

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ -
IFCE CAMPUS FORTALEZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA – PGECM**

FRANCISCO HEDYLENO COELHO BEZERRA

**ENGENHARIA DIDÁTICA COM O TEMA: SEQUÊNCIA DE NARAYANA E OS
NÚMEROS DE NARAYANA**

**FORTALEZA
2021**

FRANCISCO HEDYLENO COELHO BEZERRA

**ENGENHARIA DIDÁTICA COM O TEMA: SEQUÊNCIA DE NARAYANA E OS
NÚMEROS DE NARAYANA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Coorientador: Prof. Dr. Eurípedes Carvalho da Silva

Área de concentração: Ensino de Matemática

**FORTALEZA
2021**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal do Ceará - IFCE
Sistema de Bibliotecas - SIBI
Ficha catalográfica elaborada pelo SIBI/IFCE, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- B574e Bezerra, Francisco Hedyleno Coelho.
ENGENHARIA DIDÁTICA COM O TEMA: SEQUÊNCIA DE NARAYANA E OS NÚMEROS DE NARAYANA / Francisco Hedyleno Coelho Bezerra. - 2021.
170 f. : il.
- Dissertação (Mestrado) - Instituto Federal do Ceará, Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Campus Fortaleza, 2021.
Orientação: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves .
Coorientação: Prof. Dr. Eurípedes Carvalho da Silva.
1. Sequência de Narayana. 2. Números de Narayana. 3. Engenharia Didática. 4. Teoria das Situações Didáticas. I. Título.
-

CDD 510.07

FRANCISCO HEDYLENO COELHO BEZERRA

**ENGENHARIA DIDÁTICA COM O TEMA: SEQUÊNCIA DE NARAYANA E OS
NÚMEROS DE NARAYANA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves (Orientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)-
Campus Fortaleza.

Prof. Dr. Eurípedes Carvalho da Silva (Coorientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)-
Campus Maracanaú.

Prof. Dra. Francisca Cláudia Fernandes Fontenele
Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA).

Prof. Dr. Laerte Silva da Fonseca
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sergipe (IFS).

Prof. Dr. Francisco Eteval da Silva Feitosa
Universidade Federal do Amazonas (UFAM).

A Deus, ao meu pai José Nilo Garcia Bezerra
(in *memorian*) e a minha mãe, Francisca
Helena Coelho Bezerra.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por ter me dado saúde e resiliência para que finalizasse este trabalho, mesmo diante das inúmeras dificuldades que se apresentaram durante o período do mestrado.

Aos meus familiares e amigos por acreditarem em mim e por me incentivarem.

Aos colegas do curso, com quem tive oportunidade de trocar experiências e que contribuíram para o meu crescimento profissional.

Ao meu orientador Dr. Francisco Régis Vieira Alves pela oportunidade e incentivo durante todo o período do mestrado.

Ao meu coorientador Dr. Eurípedes Carvalho da Silva pelas contribuições para melhoria do meu trabalho.

Aos membros da banca examinadora pelas contribuições e sugestões de melhoria no meu trabalho.

A todos os participantes desta pesquisa e suas contribuições e envolvimento nas atividades propostas.

A Secretaria de Educação do Estado do Ceará (SEDUC) por ter concedido afastamento para que eu me dedicasse de forma integral ao mestrado.

“Realize o esforço de crer que é possível, e não desista de prosseguir na meta de torna-se o seu melhor. O propósito vai acontecer.” (Pe. Adriano Zandoná).

RESUMO

Esta pesquisa apresenta uma investigação em situações de ensino sobre o estudo de dois objetos matemáticos distintos: A sequência de Narayana (SN) e os números de Narayana (NN). Com isso, a pesquisa tem o objetivo de realizar um estudo sobre a SN e os NN bem como seu processo de generalização, a fim de explorar, em situações didáticas, as definições, os teoremas e propriedades destes números. Assim, foram elaboradas situações didáticas, realizando uma transposição didática dos objetos matemáticos, levando em consideração seus aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos, utilizando a Engenharia Didática (ED) como metodologia de pesquisa e para apoiar na elaboração das situações escolhemos a Teoria das Situações Didáticas (TSD) como teoria de ensino. As situações de ensino foram desenvolvidas e aplicadas na disciplina de História da Matemática do curso de Licenciatura em Matemática no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará. Essas situações instigam o lado intuitivo e investigativo dos alunos, visando a compreensão de determinadas propriedades e teoremas, onde podemos destacar: Relações matriciais, função geradora, relações recorrentes n -dimensionais, quaternions. Dessa forma, foi possível apresentar aos professores de Matemática em formação inicial uma concepção histórica-evolutiva de alguns resultados oriundos da História da Matemática, com destaque para a SN e os NN.

Palavras-chave: Sequência de Narayana. Números de Narayana. Engenharia Didática. Teoria das Situações Didáticas.

ABSTRACT

This research presented an investigation in teaching situations on the study of two distinct mathematical objects: The Narayana sequence (SN) and the Narayana numbers (NN). With this, the research aims to conduct a study on the and NN as well as its generalization process, in order to explore, in didactic situations, the definitions, theorems and properties of these numbers. Thus, didactic situations were elaborated, performing a didactic transposition of mathematical objects, considering their epistemological, cognitive and didactic aspects, using Didactic Engineering (ED) as a research methodology and to support the elaboration of situations we chose the Theory of Didactic Situations (TSD) as teaching theory. The teaching situations were developed and applied in the discipline of History of Mathematics of the Degree course in Mathematics at the Federal Institute of Education, Science and Technology of the State of Ceará. These situations instigate the intuitive and investigative side of the students, aiming at understanding certain properties and theorems, where we can highlight: Matrix relationships, generating function, n-dimensional recurrent relationships, quaternions. Thus, it was possible to present to mathematics teachers in initial formation a historical-evolutionary conception of some results derived from the History of Mathematics, with emphasis on the and NN.

Keywords: Narayana sequence. Narayana numbers. Didactic Engineering. Didactic Situations Theory.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1-Relação do triângulo didático	27
Figura 2: Exemplo da cultura matemática indiana fortemente impregnada pelos elementos de ordem religiosa.	36
Figura 3-Períodos ou eras históricas da cultura indiana e a produção matemática correspondente de cada período histórico.	37
Figura 4-Interpretação combinatória para os números de Narayana.	110
Figura 5-Caminhos de rede de (0,0) à (3,3) que nunca se elevam acima da reta $y=x$	111
Figura 6-Caminhos Dycks ou cadeias de montanhas	112
Figura 7-Fase de ação e formulação pelo aluno 1-Extensão da sequência de Narayana para índice inteiro não positivo.	134
Figura 8-Fase de validação pelo aluno 2-Recorrência para a sequência de com índice inteiro não positivo.	135
Figura 9-Fase de ação e formulação pelo aluno 4-Fórmula de Binet.....	137
Figura 10-Fase de validação pelo aluno 2-Fórmula de Binet.....	138
Figura 11-Fase de ação pelo aluno 1-Matriz geradora para a sequência de Narayana com índice inteiro não positivo.	140
Figura 12-Fase de ação pelo aluno 1-Matriz geradora para a sequência de Narayana com índice inteiro não positivo.	141
Figura 13-Fase de formulação pelo aluno 3-Matriz geradora da sequência de Narayana para índice inteiro não positivo.	142
Figura 14-Fase de validação pelo aluno 5-Matriz geradora para a sequência de Narayana com índice inteiro não positivo.	144
Figura 15-Fase de ação pelo aluno 5-Relações Bidimensionais de Narayana.	145
Figura 16-Fases de formulação e validação pelo aluno 5-Relações Bidimensionais de Narayana.....	147
Figura 17-Fase de ação pelo aluno 5-Quaternions de Narayana.	148
Figura 18-Fase de formulação pelo aluno 5-Quaternions de Narayana.	149
Figura 19-Fase de validação pelo aluno 3-Matriz geradora para a sequência de Narayana com índice inteiro não positivo.	150
Figura 20: Fase de ação pelo aluno 5 -Propriedades dos números de Narayana.....	151
Figura 21-Fase de Validação pelo aluno 5-Propriedades dos números de Narayana.....	153

Figura 22- Continuação da fase de validação pelo aluno 5-Propriedades dos números de Narayana.....	153
--	-----

LISTA DE TABELAS

Tabela 1-Identities generalizadas para a sequência de Narayana.	60
Tabela 2- Tabela de multiplicação dos Sedenions de base S	96
Tabela 3- Valores de $N_{n,k}$ para $1 \leq k \leq n \leq 7$	110

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CEP	Comitê de Ética em Pesquisa
DM	Didática da Matemática
ED	Engenharia Didática
HM	História da Matemática
IFCE	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
NN	Números de Narayana
SF	Sequência de Fibonacci
SN	Sequência de Narayana
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
TSD	Teoria das Situações Didáticas

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	REFERENCIAL TEÓRICO.....	19
2.1	A Engenharia Didática.....	20
2.1.1	Análises Prévias.....	21
2.1.2	Concepção e análise a priori.....	23
2.1.3	Experimentação	25
2.1.4	Análise a Posteriori e Validação (Interna e Externa)	25
2.2	A Teoria das Situações Didáticas (TSD)	26
2.2.1	Transposição Didática e Contrato Didático.....	29
2.2.2	Obstáculos epistemológicos	32
3	ANÁLISES PRÉVIAS	34
3.1	Desenvolvimento histórico	34
3.1.1	Aspectos históricos da Matemática indiana.....	35
3.1.2	Resultados matemáticos propostos por Narayana	39
3.1.3	A sequência de Narayana	46
3.1.4	Os números de Narayana.....	47
3.2	Contribuições recentes	48
3.3	Função geradora e fórmula de Binet para a Sequência de Narayana.....	49
3.3.1	Sequências recursivas lineares e a fórmula de Binet.....	50
3.3.2	Formula de Binet para a sequência de Narayana.....	53
3.4	Representação Matricial de Narayana	55
3.5	Relações Recorrentes de Narayana: Inserção da Unidade imaginária e Crescimento Dimensional.....	59
3.5.1	Modelo recursivo unidimensional e identidades	59
3.5.2	Relações Recorrentes Bidimensionais.....	63
3.5.3	Relações recorrentes Tridimensionais	67
3.5.4	Relações Recorrentes Tetradimensionais	75
3.5.5	Relações Recorrentes N-dimensionais	80
3.6	Quaternions de Narayana.....	82
3.6.1	Representações matriciais para os Quaternions de Narayana	84
3.7	Octonions de Narayana.....	89

3.8	Sedenions de Narayana	95
3.9	Sequência Generalizada de Narayana	102
3.9.1	Matriz Geradora para a k-sequência de Narayana.....	103
3.9.2	Soma dos n-primeiros termos da sequência k-Narayana.....	106
3.10	Os números de Narayana	109
3.10.1	Interpretação combinatória dos números de Narayana.....	110
3.10.2	Propriedades dos números de Narayana.....	112
3.10.3	Identidade de Narayana	116
3.10.4	Identidades envolvendo os números de Narayana.....	120
4	ANÁLISE A PRIORI E EXPERIMENTAÇÃO	121
4.1	Concepções das Situações Didáticas	122
4.2	Construção das Situações Didáticas	123
4.3	Experimentação	130
5	ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO INTERNA	131
5.1	Análise a Posteriori da Situação Didática 1	131
5.2	Análise a Posteriori da Situação Didática 2.....	135
5.3	Análise a Posteriori da Situação Didática 3.....	139
5.4	Análise a Posteriori da Situação Didática 4.....	144
5.5	Análise a Posteriori da Situação Didática 5.....	147
5.6	Análise a Posteriori da Situação Didática 6.....	150
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	155
	REFERÊNCIAS	157
	ANEXO A – TERMO DE COSSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	163
	ANEXO B – PARECER DO COMITÊ DE ÉTICA.....	167

1 INTRODUÇÃO

Na presente pesquisa abordaremos algumas propriedades e aspectos históricos e epistemológicos atinentes a sequência de Narayana (SN), em seguida os números de Narayana (NN), procurando fazer uma transposição didática destes dois objetos de estudo. O cenário epistemológico objetivado busca proporcionar um percurso evolutivo de generalização da SN e dos NN cuja discussão nos livros de História da Matemática (HM) costuma ser negligenciada, sobretudo quando não desconsideramos os avanços de pesquisas atuais sobre estes dois objetos matemáticos e que nos permitem vislumbrar determinadas propriedades matemáticas da SN e dos NN.

De modo geral, observamos que os autores de livros de História da Matemática dão ênfase aos fundamentos da matemática e histórica do cálculo, abordando apenas a sequência de Fibonacci de forma superficial (ALVES, 2018). Por outro lado, outro aspecto extremamente importante diz respeito ao viés de discussão histórica dos objetos matemáticos, levando em consideração a sua origem e sua evolução até os dias atuais levando à compreensão de um processo epistemológico evolutivo da Matemática que expressa o caráter não estático do conhecimento matemático (ALVES, 2017).

Um problema que se popularizou no contexto da História da Matemática (HM) está relacionado à reprodução de coelhos dando origem a sequência de Fibonacci, uma sequência recorrente e homogênea de segunda ordem. Esta sequência parece dominar a atenção da maior parte dos autores de livros de HM.

Outro problema matemático que não teve a mesma repercussão da sequência de Fibonacci foi proposto no século 14 por um importante matemático indiano chamado Narayana Pandita (1340-1400): Uma vaca dá à luz a um bezerro todos os anos. Por sua vez, o bezerro dá a luz a outro bezerro quando tem três anos de idade. Qual o número de bezerros produzidos por uma vaca durante 20 anos por uma vaca? Este problema deu origem a chamada sequência de Narayana dos números, uma sequência recorrente e homogênea de 3ª ordem.

Dessa forma registramos outros exemplos de sequências e números que embora não sejam tão conhecidos apresentam propriedades matemáticas importantes e que podem ser objetos de estudo no contexto da HM, como por exemplo, a sequência recorrente de 3ª ordem, conhecida como sequência de Narayana e os números de Narayana.

Destacamos também que a SN e os NN são assuntos que figuram em publicações e pesquisas atuais no contexto da Matemática pura e aplicada, não existindo assim uma preocupação metodológica com o ensino destes dois objetos matemáticos o que justifica a intenção de realizar uma transposição didática da SN e dos NN.

Assim, esta pesquisa foi norteada pela seguinte questão: **Como desenvolver um estudo sobre o processo matemático de generalização da sequência de Narayana e dos números de Narayana, de forma a promover situações didáticas que incentivem a descoberta de definições, teoremas e propriedades por parte dos alunos?**

Dessa forma, temos como objetivo geral deste trabalho realizar um estudo acerca da sequência de Narayana e dos números de Narayana bem como o seu processo de generalização, a fim de explorar, em situações didáticas, as definições, os teoremas e propriedades destes números. E para alcançar o objetivo geral apresentam-se ainda os seguintes objetivos específicos:

- Investigar os teoremas e propriedades inerentes à generalização da sequência de Narayana e dos números de Narayana.
- Explorar, através de situações de ensino, as propriedades e teoremas da sequência de Narayana e dos números de Narayana.
- Apresentar o desenvolvimento histórico-evolutivo, ou seja, epistemológico-matemático da sequência de Narayana e dos números de Narayana característico ao seu processo de generalização através da proposição de situações-problema em sala de aula.

As análises prévias desta pesquisa foram feitas com base nas etapas da Engenharia Didática (ED). Assim, este processo foi organizado em duas etapas. Na primeira, foi realizada uma revisão bibliográfica sobre a metodologia de pesquisa, a teoria de ensino, sobre os dois objetos matemáticos de estudo: A sequência de Narayana e os números de Narayana. Na outra etapa, a abordagem didática e cognitiva da SN e dos NN são descritas relacionando-as ao contexto de sua aplicação e desenvolvimento da pesquisa.

A princípio foram realizados levantamentos bibliográficos referentes aos objetos matemáticos, com o intuito de definir a problemática da pesquisa e assim traçar seus objetivos. Dessa forma, foram pesquisadas definições, relações, teoremas e propriedades matemáticas importantes inerentes à gênese e ao processo histórico evolutivo da sequência de Narayana e dos números de Narayana.

Este estudo foi feito baseado em artigos científicos publicados em periódicos de Matemática pura, onde podemos destacar os trabalhos de Ramirez e Sirven (2015), onde os

autores propõem uma generalização da sequência de Narayana e exploram algumas propriedades matriciais, de Cerda- Morales (2018), onde são exploradas algumas identidades generalizadas para a SN e ainda o trabalho de Bezerra, Alves e Vieira (2020), onde são exploradas as relações recorrentes bidimensionais e tridimensionais para a sequência de Narayana.

Destacamos também nesse levantamento bibliográfico as dissertações de Mestrado de Oliveira (2018) e Santos (2017). Em ambas as dissertações é possível observar a existência da Engenharia Didática em associação com a Teoria das Situações Didáticas (TSD) e ainda um momento para a análise matemática de objetos matemáticos de natureza semelhante a estudada neste trabalho.

Com o objetivo de investigar situações de ensino orientadas pela vertente francesa da Didática da Matemática (DM), foram realizadas leituras sobre a ED e TSD destacando os autores: Brousseau (1976), Artigue (1995), Almouloud (2007), Alves (2016b), Pais (2002).

Para aplicação e desenvolvimento da pesquisa escolhemos como público-alvo os alunos da disciplina de História da Matemática do curso de Licenciatura em Matemática do IFCE–Campus Fortaleza. Destacamos que a aplicação desta pesquisa foi registrada e aprovada pelo comitê de ética local.

A escolha do público-alvo foi feita após a análise da matriz curricular do referido curso, escolhido por oferecer formação inicial para professores de Matemática. Assim, após a avaliação detalhada das ementas das disciplinas do curso foi escolhida a disciplina de História da Matemática por ser aquela que melhor se adequasse a proposta de aplicação desta pesquisa.

Este trabalho é organizado em 6 capítulos. O capítulo 1 corresponde à Introdução, onde definimos os objetivos geral e específicos, a problemática da pesquisa e o percurso seguido para que fosse possível a realização desta pesquisa.

No capítulo 2 descrevemos de forma detalhada a metodologia de pesquisa que corresponde a Engenharia Didática, a Teoria de Ensino conhecida como Teoria das Situações Didáticas.

No capítulo 3 realizamos a análise epistêmica-matemática dos nossos objetos de estudo, ou seja, a sequência de Narayana e os números de Narayana e seus modelos de generalização onde podemos destacar: Relações matriciais, relações recorrentes n -dimensionais, Quaternions, Octonions, iniciando-se assim a fase de análises prévias.

No capítulo 4 temos a descrição para a construção das situações didáticas que corresponde a segunda fase da Engenharia Didática, conhecida como a fase de Análise a

Priori. As situações de ensino foram construídas com enfoque na TSD de acordo com o estudo feito no capítulo 3.

No capítulo 5 fizemos uma análise e descrição dos dados coletados, realizando a análise a posteriori e Validação interna, que corresponde a última etapa da Engenharia Didática.

Finalmente, no capítulo 6 fizemos as considerações finais da nossa pesquisa.

A seguir serão discutidos dois referenciais teóricos conhecidos que são a ED e a TSD, a primeira como sendo a metodologia de pesquisa e a segunda conhecida como teoria de ensino.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

A partir de 1970, ocorreu na França o desenvolvimento de estudos direcionados à DM em um contexto histórico no qual estava acontecendo a reforma da Matemática Moderna e a criação do IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques), Instituto de Pesquisa sobre o ensino de Matemática. Tais estudos contribuíram para se que estabelecesse um campo científico que investigasse a DM. A preocupação era estudar os problemas de ensino de conceitos matemáticos em razão das exigências do próprio saber matemático (ALMOULOUD, 2007, p. 25-26), levando em consideração aspectos das dimensões epistemológica, cognitiva e didática (ARTIGUE, 1995, p.98).

De acordo com Pommer (2013) o desenvolvimento de estudos voltados para a DM e a criação do Instituto de Pesquisa sobre o ensino de Matemática (IREM), favoreceram a evolução para estudos do ensino de Matemática que permitiram a produção do conhecimento para controlar e produzir ações sobre o ensino. A Didática da Matemática não pode deixar de considerar os saberes específicos da própria Matemática. Nesse sentido, para Brousseau (1986) *apud* Teixeira e Passos (2013), a Didática da Matemática:

[...] estuda atividades didáticas que tem como objetivo o ensino da parte específica dos saberes matemáticos, propiciando explicações, conceitos e teorias, assim como meios de previsão e análise; incorporando resultados relativos aos comportamentos cognitivos dos alunos, além dos tipos de situações utilizadas e os fenômenos de comunicação do saber. (BROSSEAU, 1986 *apud* TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p.157).

Luiz Carlos Pais, um dos estudiosos da educação matemática aqui no Brasil, fornece a seguinte definição para a DM:

A didática da matemática é uma das tendências da grande área de educação matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica (PAIS, 2011, p.11).

Segundo Alves (2016) a Didática da Matemática é um corpus teórico cuja principal preocupação consiste nas interações entre aluno e professor. A seguir, será discutida a ED em complementariedade com a TSD, assim, como os elementos de ordem epistemológica, didática e cognitiva em uma vertente francesa de DM.

2.1 A Engenharia Didática

A Engenharia Didática é uma metodologia de pesquisa no Ensino de Matemática que teve sua origem na década de 80, na França. Conforme destaca Artigue (1995) ela pode ser comparada com o trabalho do engenheiro que no desenvolvimento de sua atividade precisa ter um forte conhecimento científico, mas também precisa estar preparado para enfrentar problemas práticos que se apresentem. Assim, a Engenharia Didática contempla tanto a dimensão teórica como experimental da pesquisa. Pais (2002) destaca que:

A engenharia didática caracteriza uma forma particular de organização dos procedimentos metodológicos da pesquisa em didática da matemática. O interesse pelo seu estudo justifica-se pelo fato de se tratar de uma concepção que contempla tanto a dimensão teórica como experimental da pesquisa em didática. (PAIS, 2002, p.99).

Vemos então que: “Como metodologia de investigação, a Engenharia Didática se caracteriza em primeiro lugar por um esquema experimental baseado em realizações didáticas em classe, que dizer, sobre a concepção, realização, observação e análises de sequências de ensino.” (ARTIGUE, 1995, p.36). Podendo ser caracterizada também “como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e pelos modos de validação que lhe são associados: a comparação entre análise a priori e análise a posteriori.” (ALMOULOU, 2007, p.171).

De acordo com Pommer (2013), a ED possui uma dupla função: pode ser utilizada como metodologia qualitativa de pesquisa na área de Matemática, mas também é extremamente útil para elaboração de situações didáticas que configurem um quadro de aprendizagem significativa em sala de aula.

Conforme destaca Artigue (1996), a Engenharia Didática é um processo empírico que objetiva conceber, realizar, observar e analisar as situações didáticas. Ainda segundo a autora,

a ED Pode ser vista tanto como metodologia de pesquisa qualitativa como uma produção para o ensino. Dessa forma, a ED pode ser caracterizada por propor:

[...] uma seqüência de aula(s) concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo, de forma constante, por um professor-engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para certa população de alunos. No decurso das trocas entre professor e alunos, o projeto evolui sob as reações dos alunos e em função das escolhas e decisões do professor (MACHADO, 2002, p. 198, apud DOUADY, 1993, p. 2).

Dessa forma percebemos que a Engenharia Didática é uma metodologia de pesquisa que valoriza bastante os trabalhos do professor e que pode “ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado objeto matemático e, em particular, a elaboração de gênesis artificiais para um dado conceito.” (ALMOULOU, 2007, p.171).

A Engenharia Didática surgiu nas discussões do IREM tendo sido idealizada por Brousseau como suporte metodológico para as pesquisas em Didática da Matemática. Essa metodologia foi desenvolvida e amplamente descrita em Artigue (1996), que posteriormente se difundiu em nível mundial. No Brasil, autores brasileiros como Almouloud (2007), Machado (2002), Pais (2002), Alves (2016), realizam várias pesquisas sobre este assunto.

Pommer (2013), comenta que a ED permite antecipar na análise a priori, o que é possível de ocorrer na aprendizagem, pela escolha conveniente das variáveis didáticas, o que orienta a evolução das estratégias que o aluno pode desenvolver.

De acordo com Alves (2016b, p.70) a pesquisa fundamentada na ED é organizada em duas categorias: a microengenharia, que investiga especificamente a complexidade dos fenômenos à sala de aula e a macroengenharia, que estuda as dificuldades de ordem metodológica e/ou institucionais inerentes ao processo de ensino e aprendizagem.

Uma Engenharia Didática deve ser organizada em quatro fases consecutivas conforme destacam Almouloud (2007), Artigue (1995) e Pais (2002), sendo estas: **análises prévias ou preliminares; concepção e análise a priori; experimentação; análise a posteriori e a validação.**

2.1.1 Análises Prévias

As análises prévias são o primeiro nível de organização de uma Engenharia Didática, tendo por objetivo a identificação de problemas relacionados ao ensino e aprendizagem do objeto de estudo. Esses problemas podem ser detectados ao fazermos um levantamento de referências bibliográficas tais como: artigos, teses, revistas, dissertações, dentre outras fontes.

Artigue (1995) argumenta que nesta análise devemos considerar as seguintes dimensões: a epistemológica, associada ao saber em jogo; a cognitiva relacionada com as características do público ao qual se pretende ensinar; e a didática relacionada às características do sistema de ensino.

Nessa primeira fase da ED conforme destaca Machado (2002), são feitas ponderações envolvendo tanto o quadro didático mais geral, como também sobre os conhecimentos mais específicos envolvendo o tema da pesquisa. Importante destacar que um ponto fundamental das análises prévias “[...] reside na fina análise prévia das concepções dos alunos, das dificuldades e dos erros tenazes, e a engenharia é concebida para provocar, de forma controlada, a evolução das concepções” (ARTIGUE, 1996, p. 202).

Pommer (2013) destaca que o levantamento dos diversos obstáculos a serem considerados durante a fase de análises preliminares permitirá a análise dos fatores que permitirão superar os problemas observados na aprendizagem, em conformidade com os objetivos da pesquisa, o que viabiliza a segunda fase da ED: A concepção da situação didática.

Um dos objetivos das análises prévias é identificar os problemas de ensino e aprendizagem do objeto de estudo e delinear de modo fundamentado as questões, as hipóteses, os fundamentos teóricos e metodológicos da pesquisa (ALMOULOU, 2007).

De acordo com Almouloud (2007) essa primeira fase da Engenharia Didática deve contemplar as seguintes vertentes:

a) Estudo da organização matemática

- Estudar a gênese histórica do saber em estudo e suas manifestações antigas e contemporâneas, suas funcionalidades na Matemática e os obstáculos epistemológicos relativos aos conceitos;
- Analisar o ensino atual e seus efeitos;
- Considerar os objetivos da pesquisa;

b) Análise da organização didática do objeto matemático escolhido

- Analisar as diferentes instituições de ensino em que o saber deve ser ensinado/aprendido e estudar a evolução do tratamento do conceito;
- O papel da história e da epistemologia elevado em consideração no estudo do objeto matemático;
- As concepções possíveis que os alunos podem desenvolver a partir da abordagem proposta.

c) Definição das questões da pesquisa

- Fazer um resumo dos principais problemas relacionados com o ensino e aprendizagem da noção estudada;
- Relatar os principais resultados das pesquisas didáticas sobre o tema em estudo;
- Destacar os problemas de ensino e aprendizagem que serão objeto da pesquisa em andamento e para os quais se pretende buscar uma solução.

Almouloud (2007) destaca ainda que a expressão análises preliminares não implica que após o início da fase seguinte não se possa retomá-las. Assim, sempre que for necessário o pesquisador pode retomar essa fase para possíveis ajustes ao longo da pesquisa.

2.1.2 Concepção e análise a priori

Sobre a análise a priori Almouloud (2007) e Pais (2002) caracterizam essa fase, como a de escolha das variáveis didáticas, sendo estas: as macros didáticas ou globais, relativas à organização da engenharia; ou micro didáticas ou locais, relativas a organização local da engenharia, ou seja, de uma sessão ou fase da pesquisa. Almouloud (2007) destaca que:

A análise a priori é importantíssima, pois de sua qualidade depende o sucesso da situação-problema; além disso, ela permite, ao professor, poder controlar a realização das atividades dos alunos, e, também, identificar e compreender os fatos observados. Assim, as conjecturas que vão aparecer poderão ser consideradas, e algumas poderão ser objeto de um debate científico. (ALMOULOU, 2007).

De acordo com Gálvez (1996), as variáveis didáticas são aquelas para as quais as escolhas de valores provocam modificações nas estratégias de resolução de problemas, de modo a fazer evoluir o desempenho dos alunos. A autora destaca ainda a importância da determinação dessas variáveis e de seus intervalos para fundamentar a construção das sequências didáticas, que permitirão o surgimento do conhecimento almejado.

Dentre as variáveis, Machado (2002) indica que a pesquisa deve delimitar as variáveis de comando. Segundo Pommer (2013) as variáveis de comando representam as variáveis consideradas pelo pesquisador de modo a fazer evoluir o comportamento dos alunos, através da possibilidade de mudanças de estratégia na resolução de problemas, sendo descritas e delimitadas nas várias sessões ou fases da Engenharia Didática. De acordo com Almouloud e Silva (2012, p.27) para nortear a definição das variáveis, deve-se:

- Descrever as escolhas feitas no nível local (relacionando-as eventualmente com as seleções globais) e as da situação a-didática desenvolvida;

- Analisar o que poderia estar em jogo nesta situação para o aluno, em função das possibilidades de ação, seleção, decisão, controle e validação que o aluno terá durante a experimentação;
- Prever campos de comportamentos possíveis e tentar demonstrar como a análise permite controlar seus significados e assegurar, particularmente, que se tais comportamentos esperados ocorrerem, é por consequência do desenvolvimento visado pela aprendizagem.

Dessa forma, o objetivo da análise a priori é:

[...] determinar de que forma permitem as escolhas efetuadas controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos. Para isso, ela funda-se em hipóteses; será a validação destas hipóteses que estará, em princípio, indiretamente em jogo no confronto, operado na quarta fase, entre a análise a priori e a análise a posteriori (ARTIGUE, 1996, p. 205).

Segundo Almouloud (2007), na fase de análise a priori devemos inicialmente descrever nossas escolhas, relativas as variáveis locais, além de fazermos uma caracterização da situação adidática que pretendemos desenvolver; analisarmos se a situação proposta tem alguma importância para o aluno, ou seja, se esta permitirá ao aluno agir sobre ela, escolher estratégias de resolução, tomar decisões, demonstrar controle e capacidade de validação.

Nessa fase deverão ser elaboradas e analisadas situações-problema que deverão ser propostas e trabalhadas com os alunos na fase da experimentação, de forma que:

Essas situações-problema devem permitir ao aluno investigar e distinguir caminhos para resolver problemas, adquirir novos conhecimentos/saberes e estratégias de resolução. Essas situações-problema devem auxiliar o aluno na construção de conhecimentos e saberes, e no desenvolvimento de habilidades, como, por exemplo, saber ler, interpretar e utilizar representação matemática em demonstrações de propriedades e teoremas etc. (ALMOULOU, 2016, p.113).

Essas situações-problema podem ser questões abertas e/ou fechadas em uma situação mais ou menos matematizada, que envolvam um ou vários domínios do saber e conhecimento. O objetivo dessas situações-problema é a discussão de novos objetos matemáticos que se apresentam implícita e explicitamente, através das questões colocadas pelos alunos.

De acordo com Almouloud (2007), as sequências de situações-problema devem ser organizadas de maneira a possibilitar que os alunos entendam a situação proposta e possam com seus conhecimentos, engajarem-se na resolução e apresentar soluções.

2.1.3 Experimentação

Na fase da experimentação serão aplicadas as situações-problema elaboradas durante a fase de análise à priori. Dessa forma, o aluno deve ser incentivado a participar do processo de ensino através das situações-problema propostas pelo professor. Nessa fase deve ocorrer a coleta de dados da pesquisa para que se possa fazer uma comparação entre a análise à priori e análise a posteriori a fim de obter a validação da pesquisa. Nesse sentido, Carneiro (2005) comenta que:

Durante a experimentação, coletamos e organizamos um corpus de pesquisa variado, composto por produção dos alunos, registro de perguntas, dúvidas e erros constatados durante o acompanhamento de suas ações e diários de classe dos ministrantes. A análise desse material é essencial para a etapa da validação (CARNEIRO, 2005, p. 105).

No próximo tópico será discutida a última fase da ED, que corresponde a análise a posteriori e a validação da pesquisa

2.1.4 Análise a Posteriori e Validação (Interna e Externa)

De acordo com Almouloud & Silva (2012, p. 27) nesta fase deve acontecer a análise dos dados que foram coletados durante a fase da Experimentação, ou seja, durante a aplicação das situações-problema em sala de aula. Importante destacar que o momento de aplicação das situações-problema deve ser registrado através de fotos das produções escritas feitas pelos alunos, de gravações etc. Dessa forma a análise a posteriori se caracteriza por:

[...] se caracteriza pelo tratamento dos dados colhidos e a confrontação com a análise a priori, permitindo a interpretação dos resultados e em que condições as questões levantadas foram respondidas. Assim, é possível analisar se ocorrem e quais são as contribuições para a superação do problema, caracterizando a generalização local que permitirá a validação interna do objetivo da pesquisa (POMMER, 2013, p. 26).

Assim, nessa fase da ED é feita uma comparação entre os resultados que foram obtidos durante a fase de experimentação e os resultados esperados que foram definidos na fase de análise à priori, com o objetivo de validar ou refutar as hipóteses levantadas na investigação.

Sobre o processo de validação a ED admite dois tipos de validação: interna e externa. Alves (2018b) destaca que a validação externa se efetiva através da comparação de produções externas associadas a outros alunos que não participaram da mesma sequência didática.

No caso da validação interna existe uma quantidade pequena de alunos envolvidos na sequência didática, que são avaliados em um curto período e as produções dos alunos não são comparadas com outras produções externas à pesquisa.

Segundo Almouloud (2007) a análise dos dados não pode ser desconectada dos fundamentos organizados na análise a priori, das teorias de análise, das hipóteses, da problemática e dos objetivos de estudos.

2.2 A Teoria das Situações Didáticas (TSD)

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) foi desenvolvida pelo pesquisador francês Guy Brousseau (1986). De acordo com Almouloud (2007) a TSD nos permite modelar o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos. Destacamos que nessa Teoria o objeto central não é o sujeito, mas a situação didática na qual são identificadas as interações entre professor, aluno e saber. Além disso, a TSD permite ao professor elaborar, realizar e analisar situações didáticas. Dessa forma, podemos considerar que:

Uma situação didática é formada pelas múltiplas relações pedagógicas estabelecidas entre o professor, os alunos e o saber, com a finalidade de desenvolver atividades voltadas para o ensino e para a aprendizagem de um conteúdo específico. Esses três elementos componentes de uma situação didática (professor, aluno, saber) constituem a parte necessária para caracterizar o espaço vivo de uma sala de aula. [...] Por outro lado, esses três elementos não são suficientes para abarcar toda a complexidade do fenômeno cognitivo, daí a vinculação que fazemos entre tais situações e outros elementos do sistema didático: objetivos, métodos, posições teóricas, recursos didáticos, entre outros. Um dos desafios da didática é que cada um desses elementos recebe influências diretas da especificidade do conteúdo em questão (PAIS, 2002, p. 65-66).

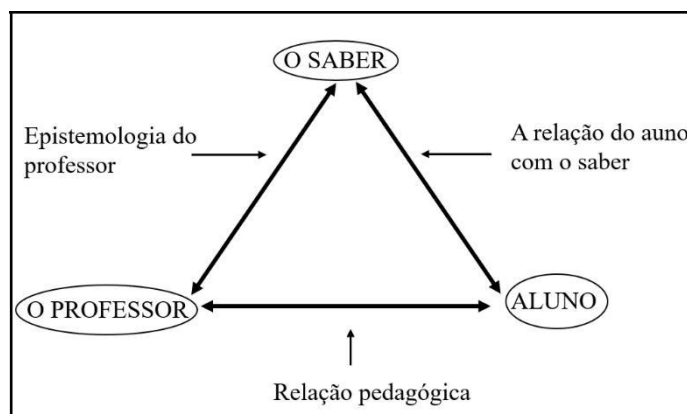
A Teoria das Situações Didáticas (TSD), como teoria da Didática da Matemática, desenvolvida por Brousseau, se propõe a ser:

Um modelo teórico, apresentando conteúdos matemáticos, que ilustra algumas situações fundamentais e que começa a servir de fundamentação teórica para novos trabalhos de pesquisa em didática e para a prática de professores de matemática. É um campo de reflexões para fazer progredir o ensino dessa disciplina nas classes do ensino básico, onde o professor, com a fundamentação dessa teoria, orienta o aprendiz para que possa desenvolver atividades que lhe permitam apropriar-se de novos saberes. (BROUSSEAU apud TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p.162).

De acordo com Teixeira e Passos (2013) a TSD tem como objetivo principal a situação didática. Uma situação didática pode ser caracterizada como sendo um conjunto de situações reprodutíveis, que permitem a organização do espaço de sala de aula, aos momentos de

interação entre: o professor, o aluno e o saber em um meio organizado(*milieu*). As relações estabelecidas entre professor-aluno-saber podem ser representadas por um triângulo didático conforme podemos ver na figura:

Figura 1-Relação do triângulo didático



Fonte: Almouloud (2007, p.32)

A partir das relações estabelecidas nesse triângulo didático podemos perceber que “docentes e discentes são atores indispensáveis da relação de ensino e aprendizagem, bem como o meio(*milieu*) em que a situação didática se faz presente”. (TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p.157).

Pommer (2013) destaca que o termo *milieu* é um conceito importante na Teoria das Situações Didáticas. Segundo o autor o *milieu* representa os vários recursos que permitem ao aluno interagir com o objetivo de vencer o jogo ou resolver a situação-problema proposta, de modo a progredir em seus conhecimentos. Dessa forma, ainda segundo o autor o *milieu* pode abranger, dentre outros recursos, situações-problema, jogos, os conhecimentos dos colegas e do professor, uma história contada, uma simulação ou uma experiência realizada.

Almouloud (2007, p.35) explica que na TSD, o *milieu* é um conjunto exterior ao aluno, que age no sentido oposto ao sujeito, ou seja, o *milieu* atua como um conjunto adidático, que não possui propósitos didáticos, porém por meio de um efeito retroativo à ação do indivíduo, possibilitando-o a participar ativamente do processo de ensino e aprendizagem.

Almouloud(2007, p.32-33) destaca que a teoria das situações apoia-se em três pilares, que descrevemos a seguir:

- O aluno aprende adaptando-se a um *milieu* que é fator de dificuldades, de contradições, de desequilíbrio. Esse conhecimento, fruto da adaptação dos alunos, manifesta-se pelas novas descobertas, que são a prova da aprendizagem.

- O professor deve criar e organizar um milieu que seja suficiente para desenvolver situações suscetíveis de promover uma aprendizagem mais significativa.
- O milieu juntamente com as situações didáticas devem engajar os conhecimentos matemáticos envolvidos durante o processo de ensino e aprendizagem.

A TSD é composta por 4 fases de ensino: **Situação de ação, situação de formulação, situação de validação e institucionalização**. Ela pode ser caracterizada como um conjunto de situações que são elaboradas para fins didáticos e, quando aplicadas em um contexto escolar, tem como objetivo analisar o comportamento dos alunos diante das situações que lhes são colocadas. A seguir faremos uma caracterização de cada uma dessas etapas:

Ação: Nessa fase o aluno terá a liberdade de agir sobre um determinado problema sem se preocupar com definições ou regras, podendo usar seus conhecimentos prévios de forma que: “O aluno pode melhorar ou abandonar seu modelo para criar outro. A situação provoca assim uma aprendizagem por adaptação” (ALMOULOU, 2007, p. 37).

Formulação: O aluno terá que apresentar a estratégia utilizada na solução do problema que lhe foi proposto e um raciocínio mais bem elaborado de forma a apresentar argumentos que poderão ou não ser validados. Dessa forma, “o objetivo dessa dialética de formulação é a troca de informações” (ALMOULOU, 2007, p. 38)

Validação: Nessa fase deverá ocorrer o convencimento de que os argumentos utilizados na resolução do problema são válidos. Nessa fase o aluno já é capaz de compreender determinados conceitos matemáticos, já sabe utilizar métodos de demonstrações. Tem-se que:

Um problema de validação é mais um problema de comparação, de avaliação e de rejeição de evidências e da investigação da demonstração. [...] Para uma abordagem de validação, o pensamento deve basear-se em formulações anteriores. A linguagem desenvolvida, na dialética da formulação, é menos específica do que a da validação. A comunicação desempenha um papel importante em parte independente das questões de validade (BROUSSEAU, 1976, p. 110).

Institucionalização: Nessa etapa o professor retoma a situação-problema de forma a formalizar e generalizar o saber construído nas fases anteriores. Pais (2002, p. 74) explica que se trata de um “momento em que se tenta proceder à passagem do conhecimento, do plano individual e particular, à dimensão histórica e cultural do saber científico”.

Destacamos alguns trabalhos recentes que se utilizam da Teoria das Situações Didáticas para a transposição didática de determinados conhecimentos matemáticos, entre eles

destacamos o trabalho de Alves(2018a), onde o autor aborda um tema envolvendo a noção dos Números Generalizados de Catalan (NGC) e propõe cinco tarefas e duas situações estruturadas de ensino, com o aporte da TSD.

A evolução nas discussões e utilizações da TSD foi enriquecida com as noções de contrato e institucionalização, entre outras. As situações de institucionalização foram então definidas como aquelas em que o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber. [...] Depois da institucionalização, feita pelo professor, o saber torna-se oficial e os alunos devem incorporá-lo a seus esquemas mentais, tornando-o assim disponível para utilização na resolução de problemas matemáticos (ALMOULOU, 2007, p. 40).

2.2.1 Transposição Didática e Contrato Didático

O processo de transformação de um saber científico em um saber a ser ensinado denomina-se Transposição Didática. Ou seja, para que um determinado conteúdo possa ser ensinado em um ambiente escolar ele precisa antes passar por uma série de transformações para que se torne acessível aos alunos. Nesse sentido, o professor é fundamental nesse processo de transmissão do saber.

Chevallard destaca que um conteúdo do saber que foi designado como um saber a ensinar, sofre a partir de então um conjunto de transformações adaptativas que vão fazê-lo apto para ocupar um lugar entre os objetos de ensino. Este trabalho que transforma um objeto de saber a ensinar em um objeto de ensino, é denominado de transposição didática.

De acordo com Almouloud (2007), o conceito de transposição didática foi desenvolvido por Chevallard com o objetivo distinguir os diferentes saberes envolvidos no processo de ensino-aprendizagem. Ainda segundo o autor o conceito de transposição didática buscar analisar epistemologicamente os objetos do saber.

Sobre os tipos de saberes envolvidos na teoria da Transposição Didática temos o saber científico e o saber a ser ensinado. O saber científico corresponde ao saber construído historicamente por uma comunidade científica, enquanto o saber a ser ensinado é aquele que será comunicado e socializado em sala de aula.

De acordo com Chevallard (1991) o processo de transformação do saber científico em um saber a ensinar acontece através de duas etapas: Uma transposição externa, que é realizada em uma instituição responsável por definir o que deve ser ensinado nas instituições de ensino, ou seja, pessoas que vão elaborar programas, currículos, livros didáticos a fim de normatizar o que deve ser ensinado nas escolas, nas universidades. Na segunda etapa, conhecida como

transposição interna ocorre no interior da sala de aula, com envolvimento de professores e alunos, sendo o professor o responsável por essa transposição. Alves (2017b) nos ajuda a entender melhor este processo no seguinte trecho:

No nível um, divisamos um conjunto de saberes científicos e práticas atuais elaboradas e assumidas oficialmente numa sociedade. No nível dois, [...] observamos o currículo formal, seus objetivos e programas presentes nas instituições de ensino e formação. No nível subsequente [...], constamos um currículo efetivo, seus conteúdos efetivamente mobilizados e veiculados por meio do ensino e, por fim, no último nível, os elementos que consubstanciam aprendizagens efetivas e, desejavelmente duráveis, sólidas e pretensamente permanentes dos estudantes. (ALVES, 2017b, p. 300)

Percebemos que nessa segunda etapa o professor ocupa um papel de destaque pois ele será o responsável por transmitir um saber para um grupo de alunos, devendo recontextualizar e repersonalizar o saber científico. Porém, diante do movimento ou um conjunto de modificações necessárias que devem ser efetivadas para que uma ação de ensino aconteça, não podemos desconsiderar a natureza intrínseca dos conteúdos, dos objetos matemáticos dos processos matemáticos que buscamos tornar evidentes numa determinada proposta de abordagem. (ALVES, 2016, p.137).

Outro importante conceito que permeia o processo de transmissão do saber é o contrato didático. De acordo com Brousseau podemos definir o contrato didático como sendo:

Uma relação que determina -explicitamente por uma pequena parte, mas sobretudo implicitamente- aquilo que cada parceiro, o professor e o aluno, tem a responsabilidade de gerir, e então ele será de uma maneira ou de outra, responsável diante do outro(parceiro). Esse sistema de obrigações recíprocas assemelha-se a um contrato. O que nos interessa é o contrato didático, quer dizer, a parte do contrato que é específica ao conteúdo: O conhecimento matemático visado. (Brousseau, 1986, p. 51).

De acordo com Pais (2002) o contrato didático tem a função de estabelecer as obrigações do professor e do aluno, a fim de efetivar a relação entre docente, estudante e conhecimento. Esse contrato possui poucas regras explícitas, enquanto que as implícitas são elaboradas a partir da natureza intrínseca da Matemática.

Pode acontecer que o contrato didático não se concretize, o que pode levá-lo a sua ruptura, conforme podemos observar no trecho a seguir:

Um primeiro exemplo de ruptura do contrato didático pode ser dado pelo caso do aluno que mostra desinteresse pela resolução dos problemas propostos pelo professor ou no caso em que não há o envolvimento necessário nas atividades propostas. Nessa situação, ocorre uma ruptura do contrato, pois, mesmo que não haja uma regra explícita e formal prevendo o envolvimento dos alunos nas

atividades didáticas, o que se espera é que isso aconteça dentro dos limites pertinentes à atividade pedagógica (PAIS, 2002, p. 81).

De acordo com Almouloud (2007) fornecemos alguns aspectos importantes que caracterizam o contrato didático:

- O objetivo do Contrato Didático é essencialmente a aquisição de saberes por parte do aluno;
- O correto funcionamento do Contrato Didático depende de inúmeras variáveis e elementos do processo de ensino, com os objetivos de formação para os alunos, a epistemologia do professor e suas respectivas escolhas didáticas, o tipo de avaliação que se pretende executar, dentre outras;
- Um contrato didático mal administrado, por parte do professor ou do aluno, pode ser a fonte de dificuldades para a aprendizagem de novos conhecimentos matemáticos. Geralmente, o contrato didático vem à tona e é motivo de renegociação quando não é respeitado por qualquer um dos parceiros da relação didática: professor ou aluno.

O professor possui a função de administrar o contrato didático, criando maneiras de fazer com que o aluno se aproprie do conhecimento e gerenciar de que forma os alunos irão participar do processo de ensino-aprendizagem. Já aluno tem o papel de participar ativamente das atividades propostas.

Brousseau destaca que o contrato didático não deve ser explícito, para que as situações de ensino de fato possam ocorrer, ou seja, o professor não pode deixar claro quais são suas expectativas em relação ao que espera dos seus alunos em uma situação de ensino. Podemos verificar essa característica do contrato didático no seguinte trecho:

[...] o professor, por exemplo, não pode dizer explicitamente, e de antemão, o que o aluno terá que fazer diante de um problema, sem tirar-lhe a possibilidade de manifestar ou adquirir o conhecimento correspondente. O professor não pode se comprometer a "fazer o aluno entender "um conhecimento e, muito menos, fazer com que este se produza: ninguém sabe com "se faz "uma matemática nova e, menos ainda, como se pode "fazer com que seja feita "de maneira acertada. De forma que a relação didática não pode formar um contrato. (BROUSSEAU, 2008, p. 73).

Dessa forma, podemos perceber que o contrato didático é fundamental para que a situação didática ocorra, que depende principalmente, das necessidades de interação entre professor e aluno, no entanto, o professor é a parte que possui como obrigação a administração do Contrato Didático.

2.2.2 Obstáculos epistemológicos

O erro tem um papel importante no processo de ensino e aprendizagem de determinados conceitos matemáticos, pois é através da superação desse erro que o aluno evolui no processo de aquisição de saberes. Dessa forma o professor deve encher os erros não como uma insuficiência de conhecimentos dos alunos, mas como um processo natural que faz parte do processo de aprendizagem.

Segundo Almouloud (2007) em diversas pesquisas no campo da Didática da Matemática a análise do erro apóia-se na noção de obstáculos, desenvolvida por Bachelard, e na teoria da equilibração, devido a Piaget. Brosseau (1983) se inspirou nesses dois autores e elaborou uma classificação dos obstáculos. Segundo esse autor o erro é a expressão, ou a manifestação explícita, de um conjunto de concepções espontâneas, ou reconstruídas, que integradas em uma rede coerente de representações cognitivas, tornam-se obstáculo à aquisição e ao domínio de novos conceitos.

Dessa forma, o processo de ensino deve buscar a superação desses obstáculos, onde o erro é uma passagem obrigatória (ALMOULOUUD 2007). De acordo com Brosseau (1983) os obstáculos se manifestam pela incapacidade de compreender certos problemas, de resolvê-los com eficácia, ou pelos erros que, para serem superados, deveriam conduzir à instalação de um novo conhecimento. Portanto, Almouloud (2007) considera que o erro é necessário para:

- Desencadear o processo de aprendizagem do aluno;
- O professor situar as concepções do aluno e, eventualmente, compreender os obstáculos subjacentes;
- O professor adaptar a situação didática.

Assim, quando o professor elaborar uma determinada situação didática deve levar em consideração os erros que os alunos podem cometer e até provocar esses erros, para que as condições de ensino-aprendizagem possam ser potencializadas a partir da superação desses erros por parte dos alunos.

A noção de obstáculo é importantíssima para a Didática da Matemática, porque trata de um saber em constituição pelo aluno e que necessariamente passa por conhecimentos provisórios (ALMOULOUUD 2007). Dessa forma:

A importância da noção de obstáculo se justifica, de um lado, porque a aprendizagem por adaptação, que permite dar sentido aos conceitos, em geral pode produzir simultaneamente concepções indadequadas e conhecimentos locais que devem ser rejeitados ou transformados por um trabalho cognitivo eficiente; por outro lado, porque esses nós de resistência, os obstáculos, necessitam de construção de situações adequadas. Nesse sentido, a construção de engenharias didáticas torna-se um dos meios eficazes para permitir a superação desses obstáculos pelos alunos. (ALMOULOU, 2007, p.134)

Dentre os diversos tipos de obstáculos que podem ocorrer no processo de ensino e aprendizagem destacamos os obstáculos epistemológicos. De acordo com Almouloud (2007) os obstáculos de origem epistemológica são inerentes ao saber e podem ser identificados nas dificuldades que os matemáticos encontram, na história, para a compreensão e utilização desses conceitos. Além disso:

Os obstáculos de origem epistemológica são aqueles que não podem e não devem escapar do fato de seu papel constitutivo estar no conhecimento alvejado, eles podem ser encontrados na história dos próprios conceitos. Isso não significa que devemos multiplicar os seus efeitos ou devemos reproduzir na escola (milieu) as condições históricas em que nós os derrotamos (BROUSSEAU, 1976, p. 108).

De acordo com Almouloud (2007) no contexto da epistemologia da Matemática os obstáculos epistemológicos exercem uma função importante no que diz respeito ao processo histórico e evolutivo do conhecimento, porém eles são ignorados explicitamente, quando se discute o saber ensinado e/ou aprendido.

Brousseau destaca outros tipos de obstáculos que podem ser identificados na didática da Matemática: Didáticos, psicológicos e ontogênicos. Almouloud (2007) nos ajuda a entender melhor cada tipo de obstáculo, conforme podemos observar a seguir:

Obstáculos didáticos: Eles nascem da escolha de estratégias de ensino que permitem a construção, no momento da aprendizagem, de conhecimentos cujo domínio de validade é questionável ou incompletos que, mais tarde, revelar-se-ão como obstáculos ao desenvolvimento da conceituação. (ALMOULOU 2007).

Ainda, segundo o autor, obstáculos desse tipo são inevitáveis e inerentes à necessidade da transposição didática. Por exemplo, a introdução dos números negativos a partir do conceito de temperaturas (positiva e negativa), extrato de contas bancárias ou jogo (ganhar e perder) permite ensinar a adição, mas constitui um obstáculo para o uso correto da regra dos sinais da multiplicação.

Obstáculos psicológicos: Esses obstáculos aparecem quando a aprendizagem contradiz as representações profundas do sujeito, ou quando induz uma desestabilização

inevitável, como por exemplo, a lógica matemática não é a lógica do dia a dia, o zero causa obstáculos psicológicos pelo medo do “nada” e sobretudo que não é bom dividir por zero. (ALMOULOUD 2007).

Obstáculos ontogênicos: De acordo com Brousseau (1983, p. 177) os obstáculos de origem ontogênica aparecem pelas limitações (neurofisiológicas entre outras) do sujeito em certo momento do seu desenvolvimento.

Dessa forma, ao fazer a transposição didática de determinados conceitos matemáticos é fundamental que o professor faça uma análise epistemológica desses conceitos para identificar os possíveis obstáculos que podem surgir no processo de ensino e aprendizagem.

3 ANÁLISES PRÉVIAS

3.1 Desenvolvimento histórico

A Matemática indiana tem sua gênese na literatura védica. Entre 1000 a.C. e 1800 d.C. vários tratados sobre Matemática foram de autoria de Matemáticos indianos, nos quais foram apresentados pela primeira vez o conceito de zero, sistema numérico, técnicas de álgebra e algoritmo, raiz quadrada e raiz cúbica. No entanto, existe uma negligência por parte de alguns historiadores (sobretudo os europeus) das contribuições dos matemáticos indianos. Dessa forma, muito do desenvolvimento da matemática indiana permanece ignorado, ou ainda, atribuído a estudiosos de outras nacionalidades, geralmente europeias.

A Índia antiga contribuiu bastante para o desenvolvimento da Matemática. Muitas ideias matemáticas importantes que foram a base de trabalho para outros países foram desenvolvidas por matemáticos indianos. Inicialmente, no período védico em que a Matemática era parte da religião e da vida, depois com o período sulba sutra, em que a Matemática se tornou parte integrante da astronomia e o período Jain, onde o conhecimento matemático se tornou um assunto por si só.

Muitas descobertas importantes foram feitas durante o período védico, entre elas, a descoberta do zero, π e até soluções de equações indeterminadas foram feitas nessa época. Vemos nomes de matemáticos importantes, entre eles, Brahmagupta, Ryabhata,

Foram desenvolvidas nessa época a Aritmética, a Álgebra e Geometria. O número decimal usado atualmente foi descoberto nessa época. A escola de Kerala marca o fim da era clássica e início da era Moderna. O trabalho matemático da escola de Kerala era de nível

avançado quando comparado com o início das obras matemáticas antigas. Infelizmente, o estudo da matemática indiana antiga não é incentivado. No tópico a seguir veremos alguns aspectos históricos da Matemática indiana.

3.1.1 Aspectos históricos da Matemática indiana.

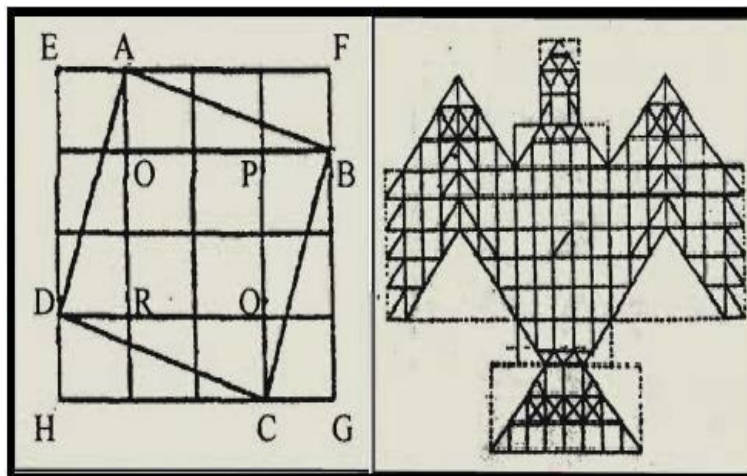
Dutta (2002, p.5) destaca que o texto matemático indiano mais antigo se intitulava Sulba-sultras e ainda possui uma forte influência atual. Plofker(2009) apresenta problemas e dificuldades oriundos da tentativa de tradução desses textos, por parte de especialistas ocidentais, como podemos perceber no trecho abaixo:

“(...)Os estudiosos europeus que encontraram textos matemáticos indianos nos séculos XVIII e XIX frequentemente estavam completamente à deriva em relação as idades dos textos, suas inter-relações e até mesmo suas identidades. O grande número de tais obras e a incerteza envolvendo até mesmo a cronologia básica da literatura sânscrita deu origem a uma grande confusão, grande parte que sobrevive até hoje em discussões sobre matemática indiana. Essa confusão foi agravada pelo fato de que autores de diferentes métodos matemáticos e textos, por vezes, possuíam o mesmo nome e textos diferentes às vezes tinha o mesmo título. Mesmo quando os tratados mais conhecidos foram resolvidos com profundidade, no início do século XIX, os historiadores ainda tinham muitos problemas vexatórios para enfrentar. Muito matemática do material estava incorporado no contexto muito desconhecido da astronomia indiana medieval e astrologia. O estilo de sua apresentação, em alta compressão do Verso sânscrito, era igualmente alienígena. No entanto, o material também possui muitas semelhanças, desde seus números decimais até suas fórmulas trigonométricas, a certas características da matemática ocidental”. (PLOFKER, 2009, p. 1 - 2)

Segundo Dutta(2002, p.5) os textos Sulba-sutras forneciam uma compilação de resultados em Matemática que eram utilizados no design e na construção de vários altares védicos desde o alvorecer da civilização indiana.

Dessa forma podemos perceber uma forte influência religiosa na produção de conhecimentos. Em particular, a Matemática estava sujeita aos mesmos critérios de verdade que outras formas de conhecimento (Plofker,2009, p.12). Na figura 1 podemos observar dois exemplos da cultura matemática indiana fortemente pelos elementos de ordem religiosa:

Figura 2: Exemplo da cultura matemática indiana fortemente impregnada pelos elementos de ordem religiosa.



Fonte: Dutta(2000)

Bag (1977) destaca a contribuição de vários matemáticos hindus, dentre eles, podemos destacar: Aryabhata(476 a.C), Bhaskara I, Bhaskara II, Narayana, etc. Datta e Singh (1938) comentam a contribuição hindu visando a introdução de ideias e operações hindus, como observamos no trecho abaixo:

Os hindus em sua aritmética definem zero como o resultado da operação. Essa definição é encontrada no trabalho de Brahmagupta e é repetido em todos os trabalhos posteriores. É usado diretamente na operação de subtração. Na execução de operações aritméticas, são necessários os resultados das operações de adição, subtração e multiplicação de zero e por zero. Os hindus não reconheceram a operação de divisão por zero como válida em aritmética; mas a divisão de zero por um número foi reconhecida como válida. (DATTA & SINGH, 1938, p. 239)

De acordo com Dutta(2002, p.5), no antigo texto Sulba-sutras é possível encontrar aplicações do Teorema de Pitágoras e vários outros métodos de construção de figuras. Algumas dessas construções envolvem aplicação de identidades matemáticas que são conhecidas atualmente por:

$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab;$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2;$$

$$a.b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2;$$

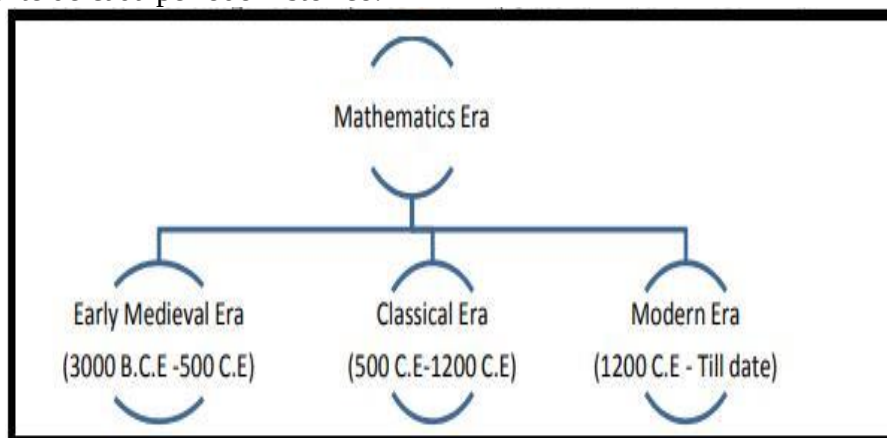
$$n.a^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 a^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 a^2.$$

Percebemos uma forte influência religiosa na produção da Matemática indiana. Katz (2007) confirma essa influência na afirmação abaixo:

Então, uma classe de boa matemática conectada com a série foi ensinada ao espírito Manibhadra, que estava interessado, por Siva, professora dos três mundos. Descreverei sua essência, chamada bhadraganita, para surpreender os bons matemáticos, a fim de agradar aqueles que conhecem diagramas mágicos, e para dissipar o orgulho dos pobres matemáticos. (KATZ, 2007, P. 501 - 502)

Com base no desenvolvimento e crescimento da Matemática, Rama (2017) divide a Matemática indiana em três categorias: Era medieval, era clássica e era moderna, conforme podemos observar na figura 2.

Figura 3-Períodos ou eras históricas da cultura indiana e a produção matemática correspondente de cada período histórico.



Fonte: Rama (2017)

Era Medieval

Rama (2017) destaca nessa era o período védico (1800 a 800 a.C.), onde os textos religiosos fornecem grande uso, com destaque para construção geométrica de altares. Depois dos Vedas, vem o período Sulba sutra (800 a 200 a.C.). O Sulba sutra Baudhayana é composto por três capítulos e contém a solução geométrica da equação quadrática do tipo $ax^2 = c$ e $ax^2 + bx = c$, diferentes valores de π ocorrem nesse tratado, dando uma aproximação diferente para a construção de círculos, valor aproximado de $\sqrt{2}$ para cinco casa decimais que pode ser visto abaixo:

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 34} = \frac{577}{408} = 1,414215686.$$

Em geral, o Sulba sutra contém os teoremas que são atribuídos a Pitágoras, introdução de números irracionais, raiz quadrada aproximada com a ajuda de um procedimento recursivo que é conhecido atualmente com expansão em série.

Logo após o período sulba sutra vem o período Jain (600-200a.C). Segundo Rama (2017), a Matemática jainista forma o elo entre o período védico e o período clássico e uma

das suas principais contribuições é que os matemáticos jainistas libertaram a Matemática indiana das suas restrições religiosas.

Algumas contribuições para a Matemática nesse período são a teoria infinita, noção de ordens do infinito que atualmente é conhecido como cardinalidade que surgiu no século XIX, devido aos trabalhos de Cantor. O triângulo de Pascal também era conhecido por eles. Além disso, também eram bons no campo da teoria dos números, geometria etc.

Pingala(300-200a.C) foi um dos estudiosos desse período. Seu principal trabalho foi com base no triângulo de Pascal, ideias básicas de números de Fibonacci e binomiais mesmo sem ter ideia sobre os teoremas binomiais. Os numerais Brahmi (século III a.C) desempenham um papel importante no desenvolvimento da Matemática indiana. Os numerais utilizados atualmente foi herança de Brahmi.

Era clássica

Esse período foi de grande importância para os indianos, onde a Matemática floresceu e estava em seu pico mais alto. Rama (2017) comenta que as ideias que se originaram e foram cultivadas nesse período causaram um grande impacto no crescimento e desenvolvimento da cultura e conhecimento indianos. Alguns Matemáticos que contribuíram com o desenvolvimento da Matemática nesse período foram Ryabhata no século V, Brahmagupta, Bhaskara I, Bhaskara II, etc.

Era moderna

Rama (2017) comenta que a Era moderna testemunhou muitas descobertas importantes e significativas feitas por matemáticos do continente indiano e o período que contribui bastante para a herança matemática do mundo. Alguns matemáticos de destaque desta época foram: Narayana Pandita, Madhava, Paramevara dos séculos XIV e XV, Nilkantha Somaiyaji e Jeysthadeva do século XV, Kamalakara do século XVII, Jagannatha Samrat do século XVIII, Ramanujan do século XIX, Harish Chandra do século XX e R.C Gupta do século XXI.

Nesse período apareceu Narayana Pandita(1340-1400), que ficou conhecido por seu trabalho Ganita Kaumudi(1356) em aritmética. Seu trabalho recebeu influências de Bhaskara II. Suas obras incluem operação matemática em números, encontrando triângulos cujos lados valores inteiros, deu regra para o segmento de um círculo, cálculo de raiz quadrada aproximada, sequência numérica, quadrados mágicos etc. No próximo tópico veremos o

contexto histórico do surgimento dos dois objetos matemáticos estudados nesse trabalho: A sequência de Narayana e os números de Narayana.

3.1.2 Resultados matemáticos propostos por Narayana

Um dos importantes resultados matemáticos propostos por Narayana foi que ele forneceu fórmulas para a soma de séries cujos termos são formados de forma sucessiva, tomando a soma parcial de outras séries da seguinte forma: O símbolo V_1^n denota a soma dos números naturais de 1 até n , ou seja,

$$V_1^n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n.$$

Denotamos V_2^n a série formada tomando as somas parciais de V_1^n , isto é,

$$\begin{aligned} V_2^n &= \sum_{r=1}^n V_1^r; \\ V_3^n &= \sum_{r=1}^n V_2^r; \\ &\vdots \\ V_m^n &= \sum_{r=1}^n V_{m-1}^r. \end{aligned}$$

Narayana forneceu a seguinte identidade para V_m^n :

$$V_m^n = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m+1)}.$$

A seguir fornecemos uma demonstração para o resultado proposto por Narayana:

Usando o princípio de indução finita sobre m temos que para $m=1$,

$$V_1^n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Supondo verdade para m temos que:

$$V_m^n = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m+1)}.$$

Devemos mostrar que é válido para $m+1$. Assim,

$$\begin{aligned}
V_{m+1}^n &= V_m^1 + V_m^2 + \dots + V_m^n \\
&= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3(1+m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m+1)} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (2+m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m+1)} + \dots + \frac{n(n+1)(n+2) \dots (n+m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m+1)} \\
&= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (1+m) + 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (2+m) + \dots + n(n+1)(n+2) \dots (n+m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m+1)} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2) \dots (n+m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m+2)}.
\end{aligned}$$

A série acima foi investigada por Narayana com o objetivo de resolver o seguinte tipo de problema: Uma vaca dá à luz a um bezerro todos os anos. O bezerro, por sua vez, dá à luz a outro bezerro quando tem três anos de idade. Qual o número de bezerros produzidos por uma vaca durante 20 anos? O problema pode ser resolvido da seguinte forma: A vaca inicial pode dar à luz a um bezerro durante 20 anos. O bezerro nascido no primeiro ano produz um novo bezerro no quarto ano, este e o nascido no segundo ano, juntos produzem dois bezerros no quinto ano, e assim sucessivamente. Assim, o número de bezerros da segunda geração seria:

$$V_{17}^1 = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 17.$$

Da mesma forma, o número de bezerros da terceira, quarta, quinta, sexta e sétima geração seria. Portanto, a descendência total em 20 anos seria:

$$\begin{aligned}
&V_{20}^0 + V_{17}^1 + V_{14}^2 + V_{11}^3 + V_8^4 + V_5^5 + V_2^6 \\
&= 20 + \frac{17 \cdot 18}{1 \cdot 2} + \frac{14 \cdot 15 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \\
&= 20 + 153 + 560 + 1001 + 792 + 210 + 8 = 2744 + 1 = 2745.
\end{aligned}$$

Joseph (2016), destaca que o resultado descoberto por Narayana desempenhou um papel importante na derivação de séries infinitas para as funções seno e cosseno na Matemática de Kerala, embora a contribuição de Narayana não seja mencionada em nenhum trabalho subsequente.

Narayana também contribuiu com algumas ideias adicionais para a Geometria das figuras planas, conforme veremos a seguir. Ele forneceu as seguintes regras envolvendo tópicos da Geometria Plana:

Regra 1: Em um círculo, o comprimento da circunferência é três vezes o diâmetro e o comprimento multiplicado por um quarto do diâmetro é a área. O quadrado do diâmetro multiplicado por 3 dividido por 4 ou três vezes o quadrado do comprimento da circunferência dividido por 36 é também a área. Seja C a circunferência, d o diâmetro e a área do círculo. A

razão constante $\frac{C}{d}$ é indicada por π (considerando $\pi = 3$). Expressando matematicamente essa regra temos:

$$C \approx 3d, A \approx \frac{Cd}{4}; A \approx \frac{3Cd^2}{4} = \frac{3c^2}{36}.$$

Um exemplo desse resultado proposto por Narayana seria encontrar o comprimento da circunferência e área de um círculo, considerando que o diâmetro é 10. Uma solução é dada a seguir:

Solução. Seja $d = 10$ o diâmetro do círculo, então a área A e o comprimento são respectivamente dados por:

$$A = \frac{C.d}{4} = \frac{30.10}{4} = \frac{300}{4} = 75;$$

$$C = 3.d = 3.10 = 30.$$

Outra regra proposta por Narayana foi:

Regra 2: A raiz quadrada da área do círculo adicionada ao seu terço é o diâmetro, ou seja,

$$d = \sqrt{A + \frac{A}{3}}.$$

Um exemplo de aplicação desse resultado seria encontrar o diâmetro de um círculo cuja área é igual a 75. A seguir fornecemos uma solução para este problema:

Solução. Seja $A = 75$ a área do círculo, então o diâmetro d é dado por:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{A + \frac{A}{3}} \\ &= \sqrt{75 + \frac{75}{3}} \\ &= \sqrt{75 + 25} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10. \end{aligned}$$

Narayana também forneceu uma nova fórmula para a área de um triângulo: “A área de um triângulo é igual o produto dos lados dividido por quatro vezes o raio do círculo circunscrito”.

Seja ABC um triângulo, AD a altura do triângulo ABC em relação a base BC e seja R o raio do círculo circunscrito então a área de ABC é dada por:

$$A = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD.$$

Pelo teorema de Brahmagupta, temos:

$$AD = \frac{AB \cdot AC}{2R}.$$

Considerando $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$, então:

$$AD = \frac{b \cdot c}{2R}.$$

Assim, a área do triângulo ABC é dada por:

$$\frac{1}{2} a \frac{b \cdot c}{2R} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2R}.$$

Narayana forneceu uma nova fórmula para o raio do círculo circunscrito ao triângulo ABC que pode ser expressa da seguinte forma:

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{BC^2 + \left(\frac{AD^2 - BD \cdot DC}{AD} \right)^2}.$$

Onde AD é altura do triângulo ABC relativa ao lado BC.

A demonstração do resultado acima segue da aplicação do Teorema de Brahmagupta que fornece:

$$R^2 = \frac{AB^2 \cdot AC^2}{4 \cdot AD^2}.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras temos: $AB^2 = AD^2 + BD^2$ e $AC^2 = AD^2 + DC^2$. Assim,

$$\begin{aligned}
R^2 &= \frac{(AD^2 + BD^2)(AD^2 + DC^2)}{4AD^2} \\
&= \frac{AD^4 + BD^2AD^2 + AD^2DC^2 + BD^2DC^2}{4AD^2} \\
&= \frac{AD^4 + AD^2(BD^2 + DC^2) + BD^2DC^2}{4AD^2} \\
&= \frac{AD^4 + AD^2[(BD + DC)^2 - 2BD.DC] + BD^2DC^2}{4AD^2} \\
&= \frac{AD^4 + AD^2[BC^2 - 2BD.DC] + BD^2DC^2}{4AD^2} \\
&= \frac{AD^2.BC^2 + (AD^4 - 2AD^2BD.DC + BD^2.DC^2)}{4AD^2} \\
&= \frac{AD^2.BC^2 + (AD^2 - BD.DC)^2}{4AD^2} \\
&= \frac{1}{4} \left[BC^2 + \left(\frac{AD - BD.DC}{AD} \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

Logo,

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{(BC)^2 + \left(\frac{AD - BD.DC}{AD} \right)^2}.$$

Narayana forneceu em seu trabalho soluções inteiras para mais duas equações: $103x^2 + 1 = y^2$ e $97x^2 + 1 = y^2$, usando o método de Bhaskara II e incluiu ainda soluções integrais de mais cinco novas equações: $179x^2 + 1 = y^2$, $131x^2 + 1 = y^2$, $231x^2 + 1 = y^2$, $31x^2 + 1 = y^2$ e $71x^2 + 1 = y^2$. A seguir veremos o teorema usado por Narayana e algumas aplicações desse método para soluções das equações.

Teorema. Seja uma equação do tipo $Na_0^2 + k = b_0^2$, de acordo com o método de Bhaskara II, temos que encontrar inteiros a_1, k_1, b_1 tais que:

$$a_1 = \frac{a_0.m_1 + b_0}{k_0};$$

$$k_1 = \frac{m_0^2 - N}{k_0};$$

$$b_1 = \frac{b_0 \cdot m_0 + N a_0}{k_0}.$$

A solução para a equação é dada por:

$$a_0 = \frac{a_1 \cdot m_0 - b_1}{k_1} \quad \text{e} \quad b_0 = \frac{b_1 \cdot m_0 - N \cdot a_1}{k_1}.$$

Onde, a partir da equação $a_0 = \frac{a_1 \cdot m_0 - b_1}{k_1}$ chegamos ao seguinte resultado:

$$b_1 = a_1 \cdot m_0 - a_0 \cdot k_1.$$

A seguir fornecemos uma demonstração para o método usado por Narayana:

Demonstração: Temos que:

$$a_1 = \frac{a_0 \cdot m_0 + b_0}{k_0} \quad (1)$$

$$b_1 = \frac{b_0 \cdot m_0 + N \cdot a_0}{k_0} \quad (2)$$

$$k_1 = \frac{m_0^2 - N}{k_0} \quad (3)$$

E ainda,

$$b_1 = \frac{m_0 \cdot (a_1 \cdot k_0 - a_0 \cdot m_0) + N \cdot a_0}{k_0}.$$

Da equação (1), temos que:

$$b_0 = a_1 \cdot m_0 - a_0 \cdot m_0.$$

Portanto, a partir da equação (3) chegamos ao seguinte resultado:

$$b_1 = a_1 \cdot m_0 - \frac{a_0 (m_0^2 - N)}{k_0} = a_1 \cdot m_0 - a_0 k_1$$

Assim,

$$b_1 = a_1 \cdot m_0 - a_0 \cdot k_1 \quad (4).$$

Da equação 4 temos que:

$$a_0 = \frac{a_1 \cdot m_0 - b_1}{k_1}.$$

Multiplicando a equação (4) por m_0 obtemos:

$$\begin{aligned} b_1 \cdot m_0 &= a_1 \cdot m_0^2 - a_0 \cdot k_1 \cdot m_0 \\ &= a_1(k_1 \cdot k_0 + N) - a_0 \cdot k_1 \cdot m_0 \\ &= a_1 \cdot N + a \cdot k_1 \cdot k_0 - a_0 \cdot k_1 \cdot m_0 \\ &= a_1 \cdot N + k_1 \cdot (a_1 \cdot k_0 - a_0 \cdot m_0). \end{aligned}$$

Da equação (1) segue que:

$$b_0 = a_1 k_0 - a_0 m_0.$$

Como $b_1 m_0 = a_1 N + k_1(a_1 k_0 - a_0 m_0)$ então,

$$b_0 = \frac{b_1 m_0 - N a_1}{k_1}$$

A seguir fornecemos por meio de um exemplo uma aplicação de acordo com o método acima:

Exemplo: Encontrar uma solução para a equação $97x^2 + 9 = y^2$.

Solução. Temos que $97 \cdot 1^2 + 3 = 100$. Assim $(a_0, b_0) = (1, 10)$ é uma solução para a equação $97x^2 + 3 = y^2$. Neste caso temos $N = 97$ e $k_0 = 3$. Escolhemos um inteiro m_0 tal que:

$$a_1 = \frac{a_0 \cdot m_0 + b_0}{k_0} = \frac{m_0 + 10}{3} \quad \text{e} \quad k_1 = \frac{m_0^2 - N}{k_0} = \frac{m_0^2 - 97}{3}.$$

Se $m_0 = 11$ então,

$$b_1 = \frac{b_0 \cdot m_0 + N \cdot a_0}{k_0} = \frac{10 \cdot 11 + 97 \cdot 1}{3} = \frac{110 + 97}{3} = \frac{207}{3} = 69.$$

$$k_1 = \frac{11^2 - 97}{3} = \frac{121 - 97}{3} = \frac{24}{3} = 8.$$

Logo, $(a_1, b_1) = (7, 69)$ é uma solução para a equação $97x^2 + 8 = y^2$.

Agora, escolhemos um inteiro m_1 tal que:

$$a_2 = \frac{a_1 \cdot m_1 + b_1}{k_1} = \frac{7 \cdot m_1 + 69}{8} \quad \text{e} \quad k_2 = \frac{m_1^2 - N}{k_1} = \frac{m_1^2 - 97}{8}.$$

Se $m_1 = 13$ então,

$$a_2 = \frac{7 \cdot (13) + 69}{8} = \frac{91 + 69}{8} = \frac{160}{8} = 20,$$

$$b_2 = \frac{b_1 \cdot m_1 + N \cdot a_1}{k_1} = \frac{69 \cdot (13) + 97 \cdot 7}{8} = \frac{897 + 679}{8} = \frac{1576}{8} = 197$$

$$k_2 = \frac{m_1^2 - 97}{8} = \frac{13^2 - 97}{8} = \frac{169 - 97}{8} = \frac{72}{8} = 9.$$

Assim,

$(a_2, b_2) = (20, 197)$ é uma solução para a equação $97x^2 + 9 = y^2$.

3.1.3 A sequência de Narayana

Narayana Pandita (1340-1400) foi um importante matemático indiano, autor da obra *Ganita Kaumudi* (Puttawamy, 2012, p.541). De acordo com Plofker (2012), os textos escritos por Narayana eram os os tratados de Matemática sânscrito mais significativo depois dos de Bhaskara II, além da escola de Kerala (Sarma, 1972).

O Tratado de aritmética de Narayana, intitulado o “lunar da Matemática”, completou-se em uma data correspondente a 10 de novembro de 1356. Plofker (2009, p.208) destaca que “tratamento de permutações e combinações e quadrados mágicos são muito abrangentes”. De acordo com Plofker (2009, p.208-209), Narayana parece ter sido um dos primeiros autores a introduzir quadrados mágicos como um tópico na aritmética indiana. Katz (2007) confirma a introdução pioneira de Narayana dos quadrados mágicos em Matemática.

“Além disso, alguns tratados novos sobre matemática, bem como novos siddhantas, foram compostos entre os séculos XII e XVI, embora a maioria ainda permaneça total ou parcialmente inédito. Um dos mais conhecidos é o *Ganitakaumudi* (Moonlight of Computation), completado em 1356 por Narayana Pandita, sobre cuja vida poucos outros detalhes estão disponíveis. Nós sabemos que ele também escreveu um trabalho de álgebra parcialmente existente, o *Bijaganitavatamsa* (Garland of Algebra), mencionado acima por Suryadasa em seu comentário sobre *Bijaganita* 10. A estrutura de *Ganitakaumudi* é em grande parte baseada na *Lilavati*, mas também contém algumas investigações mais extensas de vários tópicos, incluindo permutações e combinações (a “rede de números”), acompanhada por uma longa seção em quadrados mágicos. O primeiro dos seguintes trechos mostra algumas das regras combinatórias de Narayana, em particular o diagrama chamado “Meru parcial” (chamado para o Monte Meru na mitologia hindu) para classificar permutações. A última parte é a introdução de Narayana à matemática dos quadrados mágicos. Os versos numerados de *Ganitakaumudi* são complementados

por um comentário em prosa, que pode ou não ser pelo próprio Narayana”. (KATZ, 2007, p. 498)

A sequência de Narayana é derivada do seguinte problema proposto por Narayana no século 14: Uma vaca dá à luz a um bezerro todos os anos. O bezerro por sua vez dá à luz a outro bezerro quando tem três anos de idade. Qual o número de bezerros produzidos por uma vaca em 20 anos? O problema acima deu origem a seguinte sequência (0,1,1,1,2,3,4,6,9,13, 19,). Em uma linguagem mais atual a sequência de Narayana pode ser definida pela seguinte recorrência: $N_r = N_{r-1} + N_{r-3}$, com $N_0 = 0, N_1 = N_2 = 1$ seus termos iniciais e $r \geq 3$. A seguir falaremos sobre o contexto histórico do surgimento dos números de Narayana.

3.1.4 Os números de Narayana

De acordo com Stanley (2015, p.62) os números de Narayana foram descobertos pelo matemático britânico Alexander MacMahon(1854-1929). Estes números foram redescobertos por Tadepalli Venkata Narayana (1930-1987). Petersen(2015) define os números Eulerianos a partir de íntimas relações com os números de Narayana, por meio de interpretação combinatória.

Podemos perceber também, intrínsecas relações dos números de Narayana com os números de Catalan. Petersen(2015) destaca que “outra coisa que não era aparente em 1970, mas desde então permaneceu na vanguarda desse assunto é que os números eulerianos possuem íntimas relações próximas conhecidas como os números de Narayana”. Um pouco mais adiante, Petersen(2015) assinala que estes números são nomeados após Tadepalli Venkata Narayana, que descreveu estes números em um artigo de 1959 contendo certos tipos de caminhos de rede. Os números de Narayana possuem muitas das mesmas propriedades como os números eulerianos e têm muitas das mesmas conexões geométricas.

Petersen(2015, p.23) fornece uma definição formal para o número de Narayana . Neste caso, o número de Narayana denotado por $N_{n,k}$ é interpretado como o número de permutações definidas a partir de uma forma particular, para valores descendentes de k , com a condição $0 \leq k \leq n$. De acordo com essa interpretação combinatória, Petersen(2015) fornece a seguinte definição para o número de Narayana: Para os inteiros $0 \leq k \leq n$, os números de

Narayana são dados pela seguinte fórmula fechada $N_{n,k} = \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \binom{n}{k-1}$. Petersen(2015,

p.23) define a seguinte matriz $M_{n,k} = \begin{pmatrix} \binom{n-1}{k} & \binom{n}{k+1} \\ \binom{n}{k} & \binom{n+1}{k+1} \end{pmatrix}$, cujo determinante é:

$$\det(M_{n,k}) = \binom{n-1}{k} \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k} \binom{n}{k+1} = N_{n,k}.$$

Assim, diante do contexto histórico do surgimento da sequência de Narayana e dos números de Narayana, veremos na seção seguinte que tanto a SN como os NN admitem um processo evolutivo de suas propriedades e que apesar de não serem assuntos abordados em livros de HM apresentam propriedades matemáticas importantes e podem despertar interesse de pesquisas atuais envolvendo esses dois objetos matemáticos. Dessa forma, na próxima seção apresentaremos definições, teoremas e propriedades matemáticas importantes tanto da SN quanto dos NN, com ênfase no seu processo de generalização.

3.2 Contribuições recentes

Um problema que se popularizou no contexto da História da Matemática está relacionado à reprodução de coelhos dando origem a sequência de Fibonacci, uma sequência recorrente, recursiva e homogênea de segunda ordem, definida por $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 2$.

Outro problema matemático que não teve a mesma repercussão da sequência de Fibonacci foi proposto no século 14 por um importante matemático indiano chamado Narayana Pandita (1340-1400): Uma vaca dá a luz a um bezerro todos os anos. Por sua vez, o bezerro dá à luz a outro bezerro quando tem três anos de idade. Qual o número de bezerros produzidos durante 20 anos por uma vaca?

O problema acima deu origem a chamada sequência de Narayana (0,1,1,1,2,3,4,6,9,13,19, 28...) dos números que pode ser definida por uma linguagem mais atual da seguinte forma:

Definição 1: A sequência de Narayana dos números é definida pela seguinte recorrência: $N_r = N_{r-1} + N_{r-3}$ onde $r \geq 3$ e $N_0 = 0$, $N_1 = N_2 = 1$ seus termos iniciais.

Partindo da definição 1 iremos verificar se é possível a extensão desta sequência ao campo dos números inteiros. Para isso vamos começar analisando alguns casos particulares:

$$\begin{aligned}
N_{-1} &= N_2 - N_1 = 0 \\
N_{-2} &= N_1 - N_0 = 1 \\
N_{-3} &= N_0 - N_{-1} = 0 \\
N_{-4} &= N_{-1} - N_{-2} = -1 \\
N_{-5} &= N_{-2} - N_{-3} = 1 \\
N_{-6} &= N_{-3} - N_{-4} = 1 \\
N_{-7} &= N_{-4} - N_{-5} = -2 \\
&\vdots \\
N_{-r} &= N_{-r+3} - N_{-r+2}
\end{aligned}$$

Assim, seguindo essa conjectura chegamos à seguinte definição:

Definição 2: A sequência de Narayana para índices negativos é definida pela seguinte recorrência: $N_{-r} = N_{-r+3} - N_{-r+2}$, com $r \in \mathbb{N}$.

Assim, podemos verificar alguns termos iniciais para a sequência de Narayana estendida ao conjunto dos números Inteiros:

$$N_{r(r \in \mathbb{Z})} = (\dots, -2, 1, 1, -1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 4, 6, \dots).$$

3.3 Função geradora e fórmula de Binet para a Sequência de Narayana

As funções geradoras são usadas para resolver vários problemas, principalmente em análise combinatória e podem também ser úteis em outros campos da Matemática, como no estudo de sequências, permitindo determinar o termo geral de uma determinada sequência. O estudo destas funções permite encontrar a solução de recorrências lineares com coeficientes constantes Koshy(2001); Vieira e Alves (2019), como por exemplo, a sequência de Fibonacci, Lucas, Pel, Padovan e Narayana.

Definição 3. Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência numérica. A série de potência

$$G(a_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n \text{ é chamada função geradora para } (a_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Exemplo 3.1.1. Determinar uma função geradora para a sequência definida por $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ onde $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, para $n \geq 0$.

Solução. Seja $f(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$ a série de potência onde a_n é o termo da sequência definida em questão. Multiplicando $f(x)$ por $-5x$ e logo em seguida por $6x^2$ temos que:

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots \quad (3.1)$$

$$-5xf(x) = -5a_0x^0 - 5a_1x^2 - 5a_2x^3 - 5a_3x^4 + \dots \quad (3.2)$$

$$6x^2f(x) = 6a_0x^2 + 6a_1x^3 + 6a_2x^4 + 6a_3x^5 + \dots \quad (3.3)$$

Com base na equação (3.1-3.2+3.3) tem-se que:

$$f(x) - 5xf(x) + 6x^2f(x) = x + (a_2 - 5a_1 + 6a_0)x^2 + (a_3 - 5a_2 + 6a_1)x^3 + \dots$$

e observando que $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$. Logo,

$$f(x) = \frac{x}{1 - 5x + 6x^2}.$$

Teorema 1: A função geradora para a sequência de Narayana é dada por:

$$g(N_r, x) = \frac{x}{1 - x - x^3}.$$

Demonstração: Seja $g(N_r, x) = N_0x^0 + N_1x^1 + N_2x^2 + N_3x^3 + \dots + N_rx^r$. Multiplicamos a função $g(N_r, x)$ por x e x^3 , respectivamente, obtemos a expressão:

$$g(N_r, x) = N_0x^0 + N_1x^1 + N_2x^2 + N_3x^3 + \dots + N_rx^r \quad (3.4)$$

$$x.g(N_r, x) = N_0x^1 + N_1x^2 + N_2x^3 + N_3x^4 + \dots + N_{r-1}x^r \quad (3.5)$$

$$x^3.g(N_r, x) = N_0x^3 + N_1x^4 + N_2x^5 + N_3x^6 + \dots + N_{r-3}x^r \quad (3.6)$$

Baseado na equação (3.4-3.5-3.6), tem-se que:

$$g(N_r, x) - x.g(N_r, x) - x^3g(N_r, x) = N_1x^1 + (N_2 - N_1)x^2 + (N_3 - N_2 - N_0)x^3 + \dots + (N_r - N_{r-1} - N_3)x^r.$$

Lembrando que $N_r - N_{r-1} - N_{r-3} = 0$, tem-se que:

$$g(N_r, x) = \frac{x}{1 - x - x^3}.$$

3.3.1 Sequências recursivas lineares e a fórmula de Binet

Antes de definirmos uma fórmula de Binet para a sequência de Narayana faremos uma breve discussão sobre a noção de sequências lineares recursivas homogêneas. A seguinte equação $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \dots + c_ka_{n-k}$, com $c_1, c_2, c_3, c_k \in \mathbb{R}$, $c_k \neq 0$ é discutida por Koshy(2011). O significado de linear é explicado pelo autor, uma vez que todos os termos do lado direito da equação aprecem apenas potências de grau 1. Parker (1964, p.67) comenta que da teoria das equações homogêneas de diferenças lineares é possível obter uma solução mais geral para a equação dada por: $f(n) = c_1x_1^n + c_2x_2^n$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Com o objetivo de demonstrarmos os argumentos de Koshy(2011) e Parker(1964) sobre como obter uma solução geral de uma sequência linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes utilizaremos os argumentos de Lima(1998) sobre como determinar a solução geral de uma relação recorrente de segunda ordem. No entanto, a sequência de Narayana é de terceira ordem. Dessa forma buscamos ampliar os argumentos utilizados por Lima (1998) a fim de obter uma fórmula geral para a sequência de Narayana.

Lima(1998) fornece a seguinte definição para uma sequência linear homogênea de segunda ordem da seguinte forma: $x_{n+2} + p.x_{n+1} + q.x_n = 0$, onde p e q são constantes, $q \neq 0$. O autor destaca ainda que a cada recorrência linear de segunda ordem homogênea, com coeficientes constantes, da forma $x_{n+2} + p.x_{n+1} + q.x_n = 0$ é possível associarmos uma equação do segundo grau, $r^2 + pr + q = 0$, chamada de equação característica. Lima (1998) fornece ainda dois teoremas que ajudam a fornecer uma solução geral para uma recorrência linear de segunda ordem homogênea da forma $x_{n+2} + p.x_{n+1} + q.x_n = 0$. Assim fornecemos dois teoremas apresentados por Lima (1998, p.74-75).

Teorema 2. Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2 , então $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + p.x_{n+1} + q.x_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2 .

Demonstração. Substituindo $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ na recorrência $x_{n+2} + p.x_{n+1} + q.x_n = 0$, obtemos:

$$C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2} + p(C_1 r_1^{n+1} + C_2 r_2^{n+1}) + q(C_1 r_1^n + C_2 r_2^n) = 0.$$

Agrupando de forma conveniente os termos de forma conveniente temos que:

$$C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) + C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0.$$

Exemplo 3.1.2 Determine a solução da recorrência $X_{n+2} - 4X_{n+1} - 5X_n = 0$. Dados $X_0 = 1, X_1 = 1$

Solução. Considere a recorrência $X_{n+2} - 4X_{n+1} - 5X_n = 0$. A equação característica é $r^2 - 4r - 5 = 0$, cujas raízes são -1 e 5 . De acordo com o teorema 2 todas as formas $a_n = C_1(-1)^n + C_2(5)^n$ são soluções da recorrência.

Substituindo $X_0 = 1$ e $X_1 = 1$, obtemos $a_0 = C_1(-1)^0 + C_2(5)^0 = 1$ e $a_1 = C_1(-1)^1 + C_2(5)^1 = 1$ chegamos ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 + 5C_2 = 1 \end{cases},$$

cujas soluções são $C_1 = \frac{2}{3}$ e $C_2 = \frac{1}{3}$.

Logo, a solução da recorrência é dada por:

$$a_n = \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}5^n.$$

O teorema a seguir mostra que, se $r_1 \neq r_2$, todas as soluções da recorrência têm a forma apontada no Teorema 2.

Teorema 3. Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2 , com $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + p.x_{n+1} + q.x_n = 0$ são da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, C_1 e C_2 constantes.

Demonstração. Seja y_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + p.x_{n+1} + q.x_n = 0$. Determinamos constantes C_1 e C_2 que sejam soluções do sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1 \\ C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = y_2 \end{cases}.$$

Logo,

$$C_1 = \frac{r_2^2 y_1 - r_2 y_2}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)} \text{ e } C_2 = \frac{r_1 y_2 - r_1^2 y_1}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)},$$

isso é possível uma vez que $r_1 \neq r_2$, $r_1 \neq 0$ e $r_2 \neq 0$. Afirmamos que $y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, para todo n natural, o que provará o teorema.

Com efeito, seja $z_n = y_n - C_1 r_1^n - C_2 r_2^n$. Mostraremos que $z_n = 0$ para todo n . Temos

$$z_{n+2} + p.z_{n+1} + q.z_n = (y_{n+2} + p.y_{n+1} + q.y_n) - C_1 r_1^n (r_1^2 + p r_1 + q) - C_2 r_2^n (r_2^2 + p r_2 + q).$$

O primeiro parênteses é zero porque y_n é solução de $x_{n+2} + p.x_{n+1} + q.x_n = 0$, os dois últimos parênteses são iguais a zero porque r_1 e r_2 são raízes de $r^2 + pr + q = 0$.

Assim,

$$z_{n+2} + p.z_{n+1} + q.z_n = 0.$$

Além disso, como $C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1$ e $C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = y_2$, temos $z_1 = z_2 = 0$. Mas se $z_{n+2} + p.z_{n+1} + q.z_n = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$, então $z_n = 0$, para todo n .

Fundamentados nos teoremas 2 e 3 buscamos fornecer uma fórmula geral para a sequência de Narayana na seção a seguir.

Teorema 4. Se as raízes da equação característica $r^2 + pr + q = 0$ são iguais com $r_1 = r_2 = r$, então $a_n = C_1 r^n + nC_2 r^n$ é solução da recorrência $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$, com as condições iniciais X_0 e X_1 e os valores de C_1 e C_2 constantes a determinar.

Demonstração. Como as raízes são iguais, então $r = \frac{-p}{2}$. Substituindo $a_n = C_1 r^n + nC_2 r^n$ na recorrência $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$, obtemos:

$$C_1 r^{n+2} + nC_2 r^{n+2} + p[C_1 r^{n+1} + nC_2 r^{n+1}] + q[C_1 r^n + nC_2 r^n] = 0.$$

Agrupando os termos de forma conveniente temos:

$$C_1 r^n (r^2 + pr + q) + nC_2 r^n (r^2 + pr + q) + C_2 r^n r(2r + p) = C_1 r^n (0) + nC_2 r^n (0) + C_2 r^n r(0) = 0.$$

Por meio das condições iniciais as constantes são determinadas.

Exemplo 3.1.3. Determine a solução da recorrência $X_{n+2} - 8X_{n+1} + 16X_n = 0$. Dados $X_0 = 1$ e $X_1 = 1$.

Solução. Considere a recorrência $X_{n+2} - 8X_{n+1} + 16X_n = 0$. A equação característica é $r^2 - 8r + 16 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 4$ e $r_2 = 4$. De acordo com o teorema 4 todas as formas $a_n = C_1 4^n + nC_2 4^n$ são soluções da recorrência. Substituindo $X_0 = 1$ e $X_1 = 1$, obtemos $a_0 = C_1 4^0 + 0C_2 4^0 = 1$ e $a_1 = C_1 4^1 + 1C_2 4^1 = 1$ que resulta no seguinte sistema:

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ 4C_1 + 4C_2 = 1 \end{cases}$$

Cuja solução é $C_1 = 1$ e $C_2 = \frac{-3}{4}$.

Logo, a solução da recorrência dada é:

$$a_n = 4^n - \frac{3}{4} 4^n.$$

3.3.2 Formula de Binet para a sequência de Narayana

Uma fórmula tipo Binet é uma função que fornece o n -ésimo termo de uma sequência gerada por uma recorrência, sem necessariamente passar pelos termos anteriores. Por Exemplo, para a sequência de Fibonacci, temos que a fórmula de Binet correspondente é:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right], n \geq 0.$$

Esta fórmula foi demonstrada pelo matemático francês Jacques Philippe Marie Binet (1788–1865), via princípio de indução. Outras sequências definidas via recorrências lineares também possuem fórmulas de natureza parecidas.

O nosso objetivo vai ser encontrar uma fórmula de Binet para a sequência de Narayana. Para isso é necessário encontrar o polinômio característico para esta sequência. Considerando a SN definida pela seguinte fórmula de recorrência:

$$N_r = N_{r-1} + N_{r-3},$$

então o polinômio característico associado a esta sequência é $x^3 - x^2 - 1 = 0$.

A equação $x^3 - x^2 - 1 = 0$ possui uma raiz real e duas raízes complexas dadas por:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1,47 \\ x_2 &= -0,23 + 0,79i \\ x_3 &= -0,23 - 0,79i. \end{aligned}$$

Teorema 5. A fórmula de Binet para a SN é dada por:

$$N_r = A(x_1)^r + B(x_2)^r + C(x_3)^r.$$

Em que $r \in \mathbb{N}$, x_1, x_2 e x_3 são as raízes do polinômio característico e os coeficientes são:

$$A = \frac{(x_2 - 1)(x_3 - 1)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)}, B = \frac{(x_3 - 1)(x_1 - 1)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)}, C = \frac{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Demonstração. Sabemos que a fórmula de recorrência da SN é dada por $N_r = N_{r-1} + N_{r-3}$ e

$N_0 = 0, N_1 = N_2 = 1$, possuindo equação característica $x^3 - x^2 - 1 = 0$ com raízes x_1, x_2 e x_3 .

Com isso, $N_r = A(x_1)^r + B(x_2)^r + C(x_3)^r$. Para determinar os coeficientes A, B e C podemos utilizar as condições iniciais $N_0 = 0, N_1 = N_2 = 1$, obtendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A + B + C &= 0 \\ Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 &= 1 \\ Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 &= 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema pela regra de Cramer, tem-se que:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & x_2 & x_3 \\ 1 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}} = \frac{(x_2-1)(x_3-1)(x_3-x_2)}{(x_2-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)} = \frac{(x_2-1)(x_3-1)}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)}, \\
B &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x_1 & 1 & x_3 \\ x_1^2 & 1 & x_3^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}} = \frac{(x_3-x_1)(x_3-1)(x_1-1)}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x_3-1)(x_1-1)}{(x_2-x_1)(x_3-x_2)}, \\
C &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}} = \frac{(x_2-x_1)(x_1-1)(x_2-1)}{(x_3-x_1)(x_2-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x_1-1)(x_2-1)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.
\end{aligned}$$

3.4 Representação Matricial de Narayana

Uma importante técnica que permite encontrar qualquer termo de uma sequência recursiva é através de uma matriz geradora Q . Esta técnica foi usada a SF e SP e nesta seção a mesma técnica será usada para a SN.

Iremos analisar agora propriedades da sequência de Narayana em relação com Matrizes, isto é, investigaremos propriedades concernentes a sequência de Narayana a partir de matrizes especiais de terceira ordem.

Seja $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vamos analisar o comportamento das matrizes do tipo Q^r ,

onde $r \in \mathbb{N}$. Temos que:

$$Q^2 = Q \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^3 = Q^2 \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^4 = Q^3 \cdot Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^5 = Q^4 \cdot Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Verificamos assim o seguinte Teorema:

Teorema 6: Para $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, tem-se que $Q^r = \begin{pmatrix} N_{r+1} & N_{r-1} & N_r \\ N_r & N_{r-2} & N_{r-1} \\ N_{r-1} & N_{r-3} & N_{r-2} \end{pmatrix}$, para todo $r \geq 3$

onde $N_r = N_{r-1} + N_{r-3}$, $N_0 = 0$, $N_1 = N_2 = 1$.

Demonstração. Pelo princípio de indução finita sobre r tem-se que:

Para $r = 3$, tem-se que:

$$Q^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_4 & N_2 & N_3 \\ N_3 & N_1 & N_2 \\ N_2 & N_0 & N_1 \end{pmatrix}.$$

Assim, a igualdade é verdadeira.

Supondo que seja válido para qualquer $r = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$Q^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{k+1} & N_{k-1} & N_k \\ N_k & N_{k-2} & N_{k-1} \\ N_{k-1} & N_{k-3} & N_{k-2} \end{pmatrix}$$

Devemos mostrar que é válido para $r = k+1$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
Q^{k+1} &= Q^k \cdot Q \\
&= \begin{pmatrix} N_{k+1} & N_{k-1} & N_k \\ N_k & N_{k-2} & N_{k-1} \\ N_{k-1} & N_{k-3} & N_{k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} N_{k+1} + N_{k-1} & N_k & N_{k+1} \\ N_k + N_{k-2} & N_{k-1} & N_k \\ N_{k-1} + N_{k-3} & N_{k-2} & N_{k-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} N_{k+2} & N_k & N_{k+1} \\ N_{k+1} & N_{k-1} & N_k \\ N_k & N_{k-2} & N_{k-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

A matriz $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ é chamada matriz geradora da sequência de Narayana.

Através desta matriz é possível encontrar qualquer termo da sequência de Narayana sem usar a recursividade.

Agora iremos verificar o comportamento das matrizes do tipo Q^{-r} . Ou seja, vamos encontrar uma matriz geradora da SN para índice inteiro não positivo. Essa matriz pode ser obtida através do cálculo matriz inversa de Q . Assim, tem-se que:

$$QQ^{-1} = I.$$

Logo, podemos observar os seguintes produtos matriciais:

$$\begin{aligned}
Q^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
Q^{-2} &= Q^{-1} \cdot Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
Q^{-3} &= Q^{-2} \cdot Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
Q^{-4} &= Q^{-3} \cdot Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$Q^{-5} = Q^{-4} \cdot Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Verificamos assim, o seguinte teorema:

Teorema 7. Seja $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, então $Q^{-r} = \begin{pmatrix} N_{-r+1} & N_{-r-1} & N_{-r} \\ N_{-r} & N_{-r-2} & N_{-r-1} \\ N_{-r-1} & N_{-r-3} & N_{-r-2} \end{pmatrix}$, $r \geq 1$, onde

$$N_{-r} = N_{-r+3} - N_{-r+2}, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Pelo princípio de indução finita verifica-se que o teorema é válido para $r = 1$:

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_0 & N_{-2} & N_{-1} \\ N_{-1} & N_{-3} & N_{-2} \\ N_{-2} & N_{-4} & N_{-3} \end{pmatrix}.$$

Supondo que seja válido para $r = k$, $k \in \mathbb{N}$:

$$(Q^{-1})^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} N_{-k+1} & N_{-k-1} & N_{-k} \\ N_{-k} & N_{-k-2} & N_{-k-1} \\ N_{-k-1} & N_{-k-3} & N_{-k-2} \end{pmatrix}.$$

Assim, demonstra-se que vale para $r = k + 1$:

$$\begin{aligned} (Q^{-1})^{k+1} &= Q^{-k} Q^{-1} = \begin{pmatrix} N_{-k+1} & N_{-k-1} & N_{-k} \\ N_{-k} & N_{-k-2} & N_{-k-1} \\ N_{-k-1} & N_{-k-3} & N_{-k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} N_{-k} & N_{-k+1} - N_{-k} & N_{-k-1} \\ N_{-k-1} & N_{-k} - N_{-k-1} & N_{-k-2} \\ N_{-k-2} & N_{-k-1} - N_{-k-2} & N_{-k-3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} N_{-k} & N_{-k-2} & N_{-k-1} \\ N_{-k-1} & N_{-k-3} & N_{-k-2} \\ N_{-k-2} & N_{-k-4} & N_{-k-3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Na seção seguinte serão discutidos aspectos referentes às relações recorrentes N-dimensionais de Narayana. Tais relações são definidas a partir do modelo recursivo unidimensional.

3.5 Relações Recorrentes de Narayana: Inserção da Unidade imaginária e Crescimento Dimensional

Visando o processo de complexificação da sequência de Narayana serão discutidas propriedades referentes às relações recorrentes n-dimensionais definidas a partir do modelo recursivo unidimensional tendo por base o trabalho de Bezerra, Alves e Vieira (2020).

3.5.1 Modelo recursivo unidimensional e identidades

De acordo com o trabalho de Cerda-Morales (2018) fornecemos algumas identidades envolvendo os números de Narayana. O autor investiga a recorrência linear de terceira ordem definida por $N_r = p_a N_{r-a} + q_a N_{r-2a} + N_{r-3a}$ para números de Narayana com $p_a, q_a \in \mathbb{Z}$. Assim apresentamos algumas identidades generalizadas para a sequência de Narayana.

Lema 1. $N_r = N_{r-2} + 2N_{r-4} + N_{r-6}$, $N_r = 4N_{r-3} - 3N_{r-6} + N_{r-9}$ e $N_r = 5N_{r-4} - 2N_{r-8} + N_{r-12}$ para qualquer $r \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Temos que $N_6 = 4 = 2 + 2.1 + 0 = N_4 + 2N_2 + N_0$. Assumimos que $N_t = N_{t-2} + 2N_{t-4} + N_{t-6}$ para todo $t < r$. Assim,

$$\begin{aligned} N_r &= N_{r-1} + N_{r-3} = (N_{r-3} + 2N_{r-5} + N_{r-7}) + (N_{r-5} + 2N_{r-7} + N_{r-9}) \\ &= (N_{r-3} + N_{r-5}) + 2(N_{r-5} + N_{r-7}) + (N_{r-7} + N_{r-9}) \\ &= N_{r-2} + 2N_{r-4} + N_{r-6}. \end{aligned}$$

De modo similar podemos perceber que:

$$N_9 = 13 = 4.4 - 3.1 + 0 = 4.N_6 - 3N_3 + N_0.$$

Assumindo que $N_t = 4N_{t-3} - 3N_{t-6} + N_{t-9}$ para $t < r$. Assim,

$$\begin{aligned} N_r &= N_{r-1} + N_{r-3} = (4N_{r-4} - 3N_{r-7} + N_{r-10}) + (4N_{r-6} - 3N_{r-9} + N_{r-12}) \\ &= 4(N_{r-4} + N_{r-6}) - 3(N_{r-7} + N_{r-9}) + (N_{r-10} + N_{r-12}) \\ &= 4N_{r-3} - 3N_{r-6} + N_{r-9}. \end{aligned}$$

De modo análogo, temos que:

$$N_{12} = 41 = 5.9 - 2.2 + 0 = 5.N_8 - 2N_4 + N_0.$$

Assumindo que $N_t = 5N_{t-4} - 2N_{t-8} + N_{t-12}$ para $t < r$ Assim,

$$\begin{aligned} N_r &= N_{r-1} + N_{r-3} = (5N_{r-5} - 2N_{r-9} + N_{r-13}) + (5N_{r-7} - 2N_{r-11} + N_{r-15}) \\ &= 5(N_{r-5} + N_{r-7}) - 2(N_{r-9} + N_{r-11}) + (N_{r-13} + N_{r-15}) \\ &= 5N_{r-4} - 2N_{r-8} + N_{r-12}. \end{aligned}$$

Teorema 8. Para $1 \leq a \leq 8$ e seja a recorrência de terceira ordem definida por $N_r = p_a N_{r-a} + q_a N_{r-2a} + N_{r-3a}$ vale para N_r com os seguintes valores dos coeficientes (p_a, q_a) as seguintes identidades:

Tabela 1-Identidades generalizadas para a sequência de Narayana.

a	(p_a, q_a)	$N_r = p_a N_{r-a} + q_a N_{r-2a} + N_{r-3a}$
1	(1, 0)	$N_r = N_{r-1} + N_{r-3}$
2	(1, 2)	$N_r = N_{r-2} + 2N_{r-4} + N_{r-6}$
3	(4, -3)	$N_r = 4N_{r-3} - 3N_{r-6} + N_{r-9}$
4	(5, -2)	$N_r = 5N_{r-4} - 2N_{r-8} + N_{r-12}$
5	(6, 5)	$N_r = 6N_{r-5} + 5N_{r-10} + N_{r-15}$
6	(10, -1)	$N_r = 10N_{r-6} - N_{r-12} + N_{r-18}$
7	(15, -7)	$N_r = 15N_{r-7} - 7N_{r-14} + N_{r-21}$
8	(21, 6)	$N_r = 21N_{r-8} + 6N_{r-16} + N_{r-24}$

Fonte: Cerda-Morales (2018)

Demonstração. Podemos perceber claramente que $N_r = N_{r-1} + N_{r-3}$ quando $(p_1, q_1) = (1, 0)$.

Para $a = 2, 3, 4$ respectivamente, foi demonstrado o Lema 1. Quando $a = 5$ podemos observar que:

$$\begin{aligned} N_{16} &= 189 = 6 \cdot 28 + 5 \cdot 4 + 1 = 6N_{11} + 5N_6 + N_1; \\ N_{17} &= 277 = 6 \cdot 41 + 5 \cdot 6 + 1 = 6N_{12} + 5N_7 + N_2; \\ N_{18} &= 406 = 6 \cdot 60 + 5 \cdot 9 + 2 = 6N_{13} + 5N_8 + N_3. \end{aligned}$$

Assumindo que $N_t = 6N_{t-5} + 5N_{t-10} + N_{t-15}$ para $t < r$. Por hipótese de indução temos:

$$\begin{aligned} N_r &= N_{r-1} + N_{r-3} = (6N_{r-6} + 5N_{r-11} + N_{r-16}) + (6N_{r-8} + 5N_{r-13} + N_{r-18}) \\ &= 6(N_{r-6} + N_{r-8}) + 5(N_{r-11} + N_{r-13}) + (N_{r-16} + N_{r-18}) \\ &= 6N_{r-5} + 5N_{r-10} + N_{r-15}. \end{aligned}$$

Para $(p_5, q_5) = (6, 5)$, podemos observar ainda que:

$$\begin{aligned} N_{19} &= 595 = 10 \cdot 60 - 6 + 1 = 10N_{13} - N_7 + N_1; \\ N_{20} &= 872 = 10 \cdot 88 - 9 + 1 = 10N_{14} - N_8 + N_2; \\ N_{21} &= 1278 = 10 \cdot 129 - 13 + 1 = 10N_{15} - N_9 + N_3. \end{aligned}$$

Assumindo que $N_t = 10N_{t-6} - N_{t-12} + N_{t-18}$ para $t < r$ temos que:

$$\begin{aligned} N_r &= N_{r-1} + N_{r-3} = 10(N_{r-7} + N_{r-9}) - (N_{r-13} + N_{r-15}) + (N_{r-19} + N_{r-15}) \\ &= 10N_{r-6} + 5N_{r-12} + N_{r-18}. \end{aligned}$$

Para $(p_6, q_6) = (10, -1)$. De modo análogo podemos demonstrar os casos em que $a = 7, 8$, ou seja, os casos $(p_7, q_7) = (15, -7)$ e $(p_8, q_8) = (21, 6)$. Observamos que o índice r pode ser negativo, por exemplo,

$$N_{15} = 129 = 10N_9 - N_3 + N_{-3}.$$

Cerda-Morales (2018) apresenta a seguinte definição relacionada a sequência de Narayana:

Definição 4. Para $r \in \mathbb{Z}$ a sequência n_r é considerada uma sequência de Narayana se satisfazer a seguinte condição $n_r + n_{r+2} - n_{r+3} = 0$, com valores iniciais n_1, n_2 e n_3 .

Enunciamos o seguinte teorema proposto por Cerda-Morales (2018):

Teorema 9. Para $1 \leq a \leq 8$ sejam (p_a, q_a) os coeficientes da recorrência linear de terceira ordem $N_r = p_a N_{r-a} + q_a N_{r-2a} + N_{r-3a}$, então:

1. Para $1 \leq s \leq 5$, $\{p_s\}$ é uma sequência de Narayana, ou seja, satisfaz a relação $p_{s+3} = p_{s+2} + p_s$ com as condições iniciais $p_1 = p_2 = 1$ e $p_3 = 4$, com $\{q_s\}$ satisfazendo $q_{s+3} = q_s - q_{s+1}$, com $q_1 = 0$, $q_2 = 2$ e $q_3 = -3$.
2. Além disso temos que $p_s = N_s + 3N_{s-2}$ e $q_s = -p_{-s}$ para $1 \leq a \leq 8$, onde N_s é um número de Narayana.

Demonstração. Pelo Teorema 6 temos $\{p_s\}_1^8 = \{1, 1, 4, 5, 6, 10, 15, 21\}$ e $\{q_s\}_{s=1}^8 = \{0, 2, -3, -2, 5, -1, -7, 6\}$. Podemos perceber que $p_{s+3} = p_{s+2} + p_s$ e $q_{s+3} = q_s - q_{s+1}$ para $1 \leq s \leq 8$.

Além disso, por meio dos números de Narayana, notamos que:

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 = N_1 + 3N_{-1}; \\ p_2 &= 1 = N_2 + 3N_0; \\ p_3 &= 4 = N_3 + 3N_1; \\ p_4 &= p_3 + p_1 = 5 = N_4 + 3N_2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$p_s = N_s + 3N_{s-2}, \quad 1 \leq s \leq 8.$$

Agora considerando N_r com r negativo a sequência do tipo Narayana $\{p_s\}$ pode ser estendida para qualquer $s \in \mathbb{Z}$. Comparando $\{p_s\}_{s=-1}^{-8} = \{0, -2, 3, 2, -5, 1, 7, -6\}$ com $\{q_s\}_{s=1}^8 = \{0, 2, -3, -2, 5, -1, -7, 6\}$ podemos perceber que $q_s = -p_{-s}$ para $0 \leq s \leq 8$.

Cerda-Morales generaliza os resultados acima de $0 \leq a \leq 8$ para qualquer número inteiro a conforme veremos no teorema a seguir:

Teorema 10. Seja $p_a = N_a + 3N_{a-2}$ e $q_a = -p_{-a}$ para qualquer $a \in \mathbb{Z}^+$ então qualquer r -ésimo número de Narayana satisfaz $N_r = p_a N_{r-a} + q_a N_{r-2a} + N_{r-3a}$ para cada $a < m$.

Demonstração. Devido ao teorema 7 se $0 \leq a \leq 8$. Como $p_a = N_a + 3N_{a-2}$ para $a \in \mathbb{Z}^+$ $\{p_a\}$ é uma sequência de Narayana. De fato, temos que:

$$\begin{aligned} p_a + p_{a+2} &= (N_a + 3N_{a-2}) + (N_{a+2} + 3N_a) \\ &= (N_a + N_{a+2}) + 3(N_{a-2} + N_a) \\ &= N_{a+3} + 3N_{a+1} = p_{a+3}. \end{aligned}$$

De forma análoga sendo $q_a = -p_{-a}$ para todo a , $\{q_a\}$ satisfaz

$$\begin{aligned} q_a - q_{a+1} &= -p_{-a} + p_{-(a+1)} \\ &= -p(p_{-a-1} + p_{-a-3}) + p_{-(a+1)} \\ &= -p_{-(a+3)} \\ &= q_{a+3} \end{aligned}$$

Supondo que a recorrência linear de terceira ordem $N_r = p_t N_{r-t} + q_t N_{r-2t} + N_{r-3t}$ seja válida para todo $t \leq a$, assim,

$$\begin{aligned} N_{r-(a-2)} &= N_{r-(a-1)} + N_{r-(a+1)} \\ N_{r-2(a-2)} &= N_{r-2(a-1)} + 2N_{r-2a} + N_{r-2(a+1)} \\ N_{r-3(a-2)} &= 4N_{r-3(a-1)} - 3N_{r-3a} + N_{r-3(a+1)} \end{aligned}$$

Então pelo Lema 1 e pelo princípio de indução matemática podemos perceber que:

$$\begin{aligned} &p_{a+1}N_{r-(a+1)} + q_{a+1}N_{r-2(a+1)} + N_{r-3(a+1)} \\ &= (p_a + p_{a-2})N_{r-(a+1)} + (q_{a-2} - q_{a-1})N_{r-2(a+1)} + N_{r-3(a+1)} \\ &= (p_a + p_{a-2})(N_{r-(a-2)} - N_{r-(a-1)}) + (q_{a-2} - q_{a-1})(N_{r-2(a-2)} - N_{r-2(a-1)} - 2N_{r-2a}) \\ &\quad + (N_{r-3(a-2)} - 4N_{r-3(a-1)} + 3N_{r-3a}) \\ &= N_r \end{aligned}$$

Uma importante aplicação do Teorema 8 é que ele nos permite encontrar números grandes de Narayana. Por exemplo, se quisermos encontrar o 40º número de Narayana podemos escolher qualquer a . Se escolhermos $a = 10$, então:

$$p_{10} = N_{10} + 3N_8 = 46 \text{ e } q_{10} = -p_{-10} = -13.$$

Assim,

$$\begin{aligned} N_{40} &= p_{10}N_{40-10} + q_{10}N_{40-20} + N_{40-30} \\ &= 46 \cdot 39865 - 13 \cdot 872 + 19 \\ &= 1822473 \end{aligned}$$

3.5.2 Relações Recorrentes Bidimensionais

Baseado no trabalho de Bezerra, Alves e Vieira (2020) nesta subseção serão discutidas algumas propriedades inerentes às relações bidimensionais oriundas do modelo recursivo unidimensional de Narayana: $N_{n+1} = N_n + N_{n-2}$.

Definição 5. Os números da forma $N(n, m)$ representa a SN bidimensional e, devem satisfazer às seguintes relações bidimensionais de recorrência:

$$\begin{cases} N(n+1, m) = N(n, m) + N(n-2, m) \\ N(n, m+1) = N(n, m) + N(n, m-2) \end{cases}$$

Com as condições iniciais $N(0, 0) = 0, N(1, 0) = 1, N(2, 0) = 1, N(0, 1) = i, N(0, 2) = i,$

$N(1, 1) = 1+i, N(1, 2) = 1+i, N(2, 1) = 1+i, N(2, 2) = 1+i$, onde $i^2 = -1$.

Lema 2. Para qualquer inteiro $N(n, m) \geq 0$, temos que $N(n, 0) = 0$.

Demonstração. Através da recorrência $N(n+1, m) = N(n, m) + N(n-2, m)$ e com os valores iniciais $N(0, 0) = 0 = N_0, N(1, 0) = 1 = N_1, N(2, 0) = 1 = N_2$ aplica-se o segundo princípio de indução sobre n , onde fixa-se $m = 0$. Supondo que para $n = 2, 3, \dots, k-1$, vale, respectivamente:

$$\begin{aligned} N(3, 0) &= N(2, 0) + N(0, 0) = 1 = N_3 \\ N(4, 0) &= N(3, 0) + N(1, 0) = 2 = N_4 \\ N(5, 0) &= N(4, 0) + N(2, 0) = 3 = N_5 \\ &\vdots \\ N(k-2, 0) &= N_{k-2} \\ N(k-1, 0) &= N_{k-1} \\ N(k, 0) &= N(k-1, 0) + N(k-3, 0) = N_{k-1} + N_{k-3} = N_k \end{aligned}$$

Assim, para $n = k$ temos:

$$N(k+1, 0) = N(k, 0) + N(k-2, 0) = N_k + N_{k-2} = N_{k+1}.$$

Lema 3. Para qualquer inteiro $N(n, m) \geq 0$, temos que: $N(0, m) = N_m i$.

Demonstração. Através da recorrência $N(n, m+1) = N(n, m) + N(n, m-2)$ e com os valores iniciais definidos anteriormente como: $N(0, 0) = 0, N(0, 1) = i, N(0, 2) = i$, aplica-se o segundo princípio de indução finita sobre m , onde fixa-se $n = 0$. Supondo que para $m = 2, 3, \dots, k-1$ vale respectivamente:

$$\begin{aligned}
N(0,3) &= N(0,2) + N(0,0) = i = N_3 i \\
N(0,4) &= N(0,3) + N(0,1) = 2i = N_4 i \\
N(0,5) &= N(0,4) + N(0,2) = 3i = N_5 i \\
N(0,6) &= N(0,5) + N(0,3) = 4i = N_6 i \\
&\vdots \\
N(0,k-2) &= N_{k-2} i \\
N(0,k-1) &= N_{k-1} i \\
N(0,k) &= N(0,k-1) + N(0,k-3) = N_{k-1} i + N_{k-3} i = N_k i
\end{aligned}$$

Assim, para $n = k$ temos:

$$N(0,k+1) = N(0,k) + N(0,k-2) = N_k i + N_{k-2} i = (N_k + N_{k-2}) i = N_{k+1} i.$$

Lema 4. Para qualquer inteiro $n, m \geq 0$, temos que: $N(n,1) = N_n + (N_n + N_{n-2}) i$.

Demonstração. De modo análogo, pode-se fixar o valor de $m=1$ e variar o valor de $n = 2, 3, \dots, k-1$ com os valores iniciais $N(0,1) = i, N(1,1) = 1+i, N(2,1) = 1+i$, utilizando a recorrência $N(n+1,m) = N(n,m) + N(n-2,m)$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
N(3,1) &= N(2,1) + N(0,1) = 1 + 2i = N_3 + (N_3 + N_1) i \\
N(4,1) &= N(3,1) + N(1,1) = 2 + 3i = N_4 + (N_4 + N_2) i \\
N(5,1) &= N(4,1) + N(2,1) = 3 + 4i = N_5 + (N_5 + N_3) i \\
&\vdots \\
N(k-2,1) &= N_{k-2} + (N_{k-2} + N_{k-4}) i \\
N(k-1,1) &= N_{k-1} + (N_{k-1} + N_{k-3}) i \\
N(k,1) &= N_k + (N_k + N_{k-2}) i
\end{aligned}$$

Assim, para $n = k$ temos:

$$\begin{aligned}
N(k+1,1) &= N(k,1) + N(k-2,1) \\
&= N_k + (N_k + N_{k-2}) i + N_{k-2} + (N_{k-2} + N_{k-4}) i \\
&= N_{k+1} + (N_{k+1} + N_{k-1}) i.
\end{aligned}$$

Lema 5. Para qualquer inteiro $n, m \geq 0$, temos que: $N(1,m) = (N_m + N_{m-2}) + N_m i$.

Demonstração. Para realizar essa demonstração será aplicado o mesmo princípio indutivo, além de fixar o valor de $n=1$ e variar o valor de $m = 2, 3, \dots, k-1$, utilizando a recorrência $N(n,m+1) = N(n,m) + N(n,m-2)$ e os seguintes valores iniciais $N(1,0) = 1, N(1,1) = 1+i$,

$N(1,2) = 1+i$, obtendo:

$$\begin{aligned}
N(1, 3) &= N(1, 2) + N(1, 0) = 2 + i = (N_3 + N_1) + N_3 i \\
N(1, 4) &= N(1, 3) + N(1, 1) = 3 + 2i = (N_4 + N_2) + N_4 i \\
N(1, 5) &= N(1, 4) + N(1, 2) = 4 + 3i = (N_5 + N_3) + N_5 i \\
N(1, 6) &= N(1, 5) + N(1, 3) = 6 + 4i = (N_6 + N_4) + N_6 i \\
&\vdots \\
N(1, k-2) &= (N_{k-2} + N_{k-4}) + N_{k-2} i \\
N(1, k-1) &= (N_{k-1} + N_{k-3}) + N_{k-1} i \\
N(1, k) &= (N_k + N_{k-2}) + N_k i
\end{aligned}$$

Assim, para $n = k$ temos:

$$\begin{aligned}
N(1, k+1) &= N(1, k) + N(1, k-2) \\
&= (N_k + N_{k-2}) + N_k i + (N_{k-2} + N_{k-4}) + N_{k-2} i \\
&= (N_{k+1} + N_{k-1}) + N_{k+1} i.
\end{aligned}$$

Teorema 11. Para os inteiros, $n, m \in \mathbb{N}$, os números na forma $N(n, m)$ são descritos por:

$$N(n, m) = N_n(N_m + N_{m-2}) + (N_n + N_{n-2})N_m i.$$

Demonstração. Fixando o valor do número natural n , pode-se realizar a demonstração através de indução sobre m . Assim, fixando o valor de $n=0$ e considerando os valores iniciais $N(0, 0) = 0$, $N(0, 1) = i$, $N(0, 2) = i$ e variando o $m = 2, 3, \dots, k-1$ foi verificado o Lema 3. De forma análoga fixando o valor de $n=1$ e considerando os valores iniciais $N(1, 0) = 1$, $N(1, 1) = 1+i$, $N(1, 2) = 1+i$ e variando o valor de $m = 2, 3, \dots, k-1$ foi verificado o Lema 5. Logo, fixando o $n=2$ e variando o $m = 2, 3, \dots, k-1$, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
N(2, 0) &= 1 \\
N(2, 1) &= 1 + i \\
N(2, 2) &= 1 + i \\
N(2, 3) &= N(2, 2) + N(2, 0) = 2 + i = N_2(N_3 + N_1) + (N_2 + N_0)N_3 i \\
N(2, 4) &= N(2, 3) + N(2, 1) = 3 + 2i = N_2(N_4 + N_2) + (N_2 + N_0)N_4 i \\
&\vdots \\
N(2, k-2) &= N_2(N_{k-2} + N_{k-4}) + (N_2 + N_0)N_{k-2} i \\
N(2, k-1) &= N_2(N_{k-1} + N_{k-3}) + (N_2 + N_0)N_{k-1} i \\
N(2, k) &= N_2(N_k + N_{k-2}) + (N_2 + N_0)N_k i \\
N(2, k+1) &= N(2, k) + N(2, k-2) \\
&= N_2(N_k + N_{k-2}) + (N_2 + N_0)N_k i + N_2(N_{k-2} + N_{k-4}) + (N_2 + N_0)N_{k-2} i \\
&= N_2(N_{k+1} + N_{k-1}) + (N_2 + N_0)N_{k+1} i
\end{aligned}$$

Por fim, fixando o $n=3$ e variando o m , tem-se:

$$\begin{aligned}
N(3,0) &= 1 \\
N(3,1) &= 1 + 2i \\
N(3,2) &= 1 + 2i \\
N(3,3) &= N(3,2) + N(3,0) = 2 + 2i = N_3(N_3 + N_1) + (N_3 + N_1)N_3i \\
N(3,4) &= N(3,3) + N(3,1) = 3 + 4i = N_3(N_4 + N_2) + (N_3 + N_1)N_4i \\
N(3,k-2) &= N_3(N_{k-2} + N_{k-4}) + (N_3 + N_1)N_{k-2}i \\
N(3,k-1) &= N_3(N_{k-1} + N_{k-3}) + (N_3 + N_1)N_{k-1}i \\
N(3,k) &= N_3(N_k + N_{k-2}) + (N_3 + N_1)N_ki \\
N(3,k+1) &= N(3,k) + N(3,k-2) \\
&= N_3(N_k + N_{k-2}) + (N_3 + N_1)N_ki + N_3(N_{k-2} + N_{k-4}) + (N_3 + N_1)N_{k-2}i \\
&= N_3(N_{k+1} + N_{k-1}) + (N_3 + N_1)N_{k+1}i
\end{aligned}$$

Logo, pode-se concluir que para a generalização da relação bidimensional de Narayana, tem-se que:

$$\begin{aligned}
N(0,m) &= N_0(N_m + N_{m-2}) + (N_0 + N_{-2})N_mi \\
N(1,m) &= N_1(N_m + N_{m-2}) + (N_1 + N_{-1})N_mi \\
N(2,m) &= N_2(N_m + N_{m-2}) + (N_2 + N_0)N_mi \\
N(3,m) &= N_3(N_m + N_{m-2}) + (N_3 + N_1)N_mi \\
&\vdots \\
N(n,m) &= N_n(N_m + N_{m-2}) + (N_n + N_{n-2})N_mi.
\end{aligned}$$

3.5.3 Relações recorrentes Tridimensionais

Bezerra, Alves e Vieira destacam que os números complexos de Narayana se estendem a dimensões superiores. Dessa forma, com o viés de verificar essa extensão dos termos da SN para uma dimensão complexa, serão exploradas as relações de recursividade do caso tridimensional para a SN.

Definição 6. A recorrência tridimensional da SN na forma $N(n, m, p)$, com $n, m, p \in \mathbb{N}$, é definida por:

$$\begin{cases}
N(n+1, m, p) = N(n, m, p) + N(n-2, m, p) \\
N(n, m+1, p) = N(n, m, p) + N(n, m-2, p) \\
N(n, m, p+1) = N(n, m, p) + N(n, m, p-2)
\end{cases}$$

Com as condições iniciais: $N(0,0,0) = 0$, $N(1,0,0) = 1$, $N(2,0,0) = 1$, $N(0,1,0) = i$, $N(0,2,0) = i$, $N(0,0,1) = j$, $N(0,0,2) = j$, $N(1,1,0) = 1+i$, $N(2,1,0) = 1+i$, $N(1,0,1) = 1+j$, $N(2,0,1) = 1+j$, $N(1,1,1) = 1+i+j$, $N(1,2,1) = 1+i+j$.

Lema 6. Para qualquer valor inteiro $n, m, p \geq 0$, temos que: $N(n, 0, 0) = N_n$

Demonstração. Através da recorrência $N(n+1, m, p) = N(n, m, p) + N(n-2, m, p)$ e com os valores iniciais $N(0, 0, 0) = 0 = N_0$, $N(1, 0, 0) = 1 = N_1$, $N(2, 0, 0) = 1 = N_2$ aplica-se o segundo princípio de indução, onde fixa o valor de $m = 0, p = 0$ e variar o valor de $n = 2, 3, \dots, k-1$ obtemos:

$$\begin{aligned}
 N(3, 0, 0) &= N(2, 0, 0) + N(0, 0, 0) = 1 = N_3 \\
 N(4, 0, 0) &= N(3, 0, 0) + N(1, 0, 0) = 2 = N_4 \\
 N(5, 0, 0) &= N(4, 0, 0) + N(2, 0, 0) = 3 = N_5 \\
 N(6, 0, 0) &= N(5, 0, 0) + N(3, 0, 0) = 4 = N_6 \\
 &\vdots \\
 N(k-2, 0, 0) &= N_{k-2} \\
 N(k-1, 0, 0) &= N_{k-1} \\
 N(k, 0, 0) &= N(k-1, 0, 0) + N(k-3, 0, 0) = N_{k-1} + N_{k-3} = N_k
 \end{aligned}$$

Assim, para $n = k$ temos:

$$N(k+1, 0, 0) = N(k, 0, 0) + N(k-2, 0, 0) = N_k + N_{k-2} = N_{k+1}.$$

Lema 7. Para qualquer inteiro $n, m, p \geq 0$, temos que: $N(0, m, 0) = N_m \cdot i$.

Demonstração. Através da recorrência $N(n, m+1, p) = N(n, m, p) + N(n, m-2, p)$ e com os valores iniciais $N(0, 0, 0) = 0$, $N(0, 1, 0) = i$ e $N(0, 2, 0) = i$, aplica-se o segundo princípio de indução, onde fixa o $n = 0, p = 0$ e varia o $m = 2, 3, \dots, k-1$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 N(0, 3, 0) &= N(0, 2, 0) + N(0, 0, 0) = i = N_3 i \\
 N(0, 4, 0) &= N(0, 3, 0) + N(0, 1, 0) = 2i = N_4 i \\
 N(0, 5, 0) &= N(0, 4, 0) + N(0, 2, 0) = 3i = N_5 i \\
 N(0, 6, 0) &= N(0, 5, 0) + N(0, 3, 0) = 4i = N_6 i \\
 &\vdots \\
 N(0, k-2, 0) &= N_{k-2} i \\
 N(0, k-1, 0) &= N_{k-1} i \\
 N(0, k, 0) &= N(0, k-1, 0) + N(0, k-3, 0) = N_{k-1} i + N_{k-3} i = (N_{k-1} + N_{k-3}) i = N_k i
 \end{aligned}$$

Assim, para $n = k$ temos:

$$N(0, k+1, 0) = N(0, k, 0) + N(0, k-2, 0) = N_k i + N_{k-2} i = N_{k+1} i.$$

Lema 8. Para qualquer inteiro $n, m, p \geq 0$, temos que: $N(0, 0, p) = N_p \cdot j$

Demonstração. Através da recorrência $N(n, m, p+1) = N(n, m, p) + N(n, m, p-2)$ e com os valores iniciais definidos : $N(0, 0, 0) = 0 = N_0$, $N(0, 0, 1) = j$, $N(0, 0, 2) = j$, aplica-se o segundo princípio de indução , onde fixa o $n = 0, m = 0$ e varia $p = 2, 3, \dots, k-1$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 N(0, 0, 3) &= N(0, 0, 2) + N(0, 0, 0) = j = N_3 j \\
 N(0, 0, 4) &= N(0, 0, 3) + N(0, 0, 1) = 2j = N_4 j \\
 N(0, 0, 5) &= N(0, 0, 4) + N(0, 0, 2) = 3j = N_5 j \\
 N(0, 0, 6) &= N(0, 0, 5) + N(0, 0, 3) = 4j = N_6 j \\
 &\vdots \\
 N(0, 0, k-2) &= N_{k-2} j \\
 N(0, 0, k-1) &= N_{k-1} j \\
 N(0, 0, k) &= N(0, 0, k-1) + N(0, 0, k-3) = N_{k-1} j + N_{k-3} j = N_k j
 \end{aligned}$$

Assim, para $p = k$ temos:

$$N(0, 0, k+1) = N(0, 0, k) + N(0, 0, k-2) = N_k j + N_{k-2} j = (N_k + N_{k-2}) j = N_{k+1} j .$$

Lema 9: Para qualquer inteiro $n, m, p \geq 0$, temos que: $N(n, 1, 0) = N_n + (N_n + N_{n-2}).i$

Demonstração. Através da recorrência $N(n+1, m, p) = N(n, m, p) + N(n-2, m, p)$ e com os valores iniciais definidos: $N(0, 1, 0) = i$, $N(1, 1, 0) = 1+i$ e $N(2, 1, 0) = 1+i$, aplica-se o segundo princípio de indução , onde fixa $m = 1, p = 0$ e varia $n = 2, 3, \dots, k-1$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 N(3, 1, 0) &= N(2, 1, 0) + N(0, 1, 0) = 1+2i = N_3 + (N_3 + N_1)i \\
 N(4, 1, 0) &= N(3, 1, 0) + N(1, 1, 0) = 2+3i = N_4 + (N_4 + N_2)i \\
 N(5, 1, 0) &= N(4, 1, 0) + N(2, 1, 0) = 3+4i = N_5 + (N_5 + N_3)i \\
 &\vdots \\
 N(k-2, 1, 0) &= N_{k-2} + (N_{k-2} + N_{k-4})i \\
 N(k-1, 1, 0) &= N_{k-1} + (N_{k-1} + N_{k-3})i \\
 N(k, 1, 0) &= N(k-1, 1, 0) + N(k-3, 1, 0) = N_{k-1} + (N_{k-1} + N_{k-3})i + N_{k-3} + (N_{k-3} + N_{k-5})i \\
 &= N_k + (N_k + N_{k-2})i
 \end{aligned}$$

Assim, para $n = k$, temos:

$$\begin{aligned}
 N(k+1, 1, 0) &= N(k, 1, 0) + N(k-2, 1, 0) \\
 &= N_k + (N_k + N_{k-2})i + N_{k-2} + (N_{k-2} + N_{k-4})i \\
 &= N_{k+1} + (N_{k+1} + N_{k-1})i.
 \end{aligned}$$

Lema 10. Para qualquer inteiro $n, m, p \geq 0$, temos que: $N(n, 0, 1) = N_n + (N_n + N_{n-2}).j$.

Demonstração. Através da recorrência $N(n+1, m, p) = N(n, m, p) + N(n-2, m, p)$ e com os valores iniciais definidos : $N(1, 0, 1) = 1 + j$, $N(2, 0, 1) = 1 + j$ e $N(0, 0, 1) = j$, aplica-se o segundo princípio da indução finita, onde fixa m e varia $n = 2, 3, \dots, k-1$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 N(3, 0, 1) &= N(2, 0, 1) + N(0, 0, 1) = 1 + 2j = N_3 + (N_3 + N_1)j \\
 N(4, 0, 1) &= N(3, 0, 1) + N(1, 0, 1) = 2 + 3j = N_4 + (N_4 + N_2)j \\
 N(5, 0, 1) &= N(4, 0, 1) + N(2, 0, 1) = 3 + 4j = N_5 + (N_5 + N_3)j \\
 &\vdots \\
 N(k-2, 0, 1) &= N_{k-2} + (N_{k-2} + N_{k-4})j \\
 N(k-1, 0, 1) &= N_{k-1} + (N_{k-1} + N_{k-3})j \\
 N(k, 0, 1) &= N_k + (N_k + N_{k-2})j
 \end{aligned}$$

Assim, para $n = k$, temos:

$$\begin{aligned}
 N(k+1, 0, 1) &= N(k, 0, 1) + N(k-2, 0, 1) \\
 &= N_k + (N_k + N_{k-2})j + N_{k-2} + (N_{k-2} + N_{k-4})j \\
 &= N_{k+1} + (N_{k+1} + N_{k-1})j.
 \end{aligned}$$

Lema 11. Para qualquer inteiro $n, m, p \geq 0$, temos que:

$$N(n, 1, 1) = N_n + (N_n + N_{n-2})i + (N_n + N_{n-2})j.$$

Demonstração. Através da recorrência $N(n+1, m, p) = N(n, m, p) + N(n-2, m, p)$ e com os valores iniciais definidos : $N(0, 1, 1) = i + j$, $N(1, 1, 1) = 1 + i + j$ e $N(2, 1, 1) = 1 + i + j$, aplica-se o segundo princípio de indução finita, onde fixa $m=1, p=1$ e varia $n = 2, 3, \dots, k-1$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 N(3, 1, 1) &= N(2, 1, 1) + N(0, 1, 1) = 1 + 2i + 2j = N_3 + (N_3 + N_1)i + (N_3 + N_1)j \\
 N(4, 1, 1) &= N(3, 1, 1) + N(1, 1, 1) = 2 + 3i + 3j = N_4 + (N_4 + N_2)i + (N_4 + N_2)j \\
 N(5, 1, 1) &= N(4, 1, 1) + N(2, 1, 1) = 3 + 4i + 4j = N_5 + (N_5 + N_3)i + (N_5 + N_3)j \\
 &\vdots \\
 N(k-2, 1, 1) &= N_{k-2} + (N_{k-2} + N_{k-4})i + (N_{k-2} + N_{k-4})j \\
 N(k-1, 1, 1) &= N_{k-1} + (N_{k-1} + N_{k-3})i + (N_{k-1} + N_{k-3})j \\
 N(k, 1, 1) &= N_k + (N_k + N_{k-2})i + (N_k + N_{k-2})j
 \end{aligned}$$

Assim, para $n = k$, temos:

$$\begin{aligned}
 N(k+1, 1, 1) &= N(k, 1, 1) + N(k-2, 1, 1) = \\
 &= N_k + (N_k + N_{k-2})i + (N_k + N_{k-2})j + N_{k-2} + (N_{k-2} + N_{k-4})i + (N_{k-2} + N_{k-4})j \\
 &= N_{k+1} + (N_{k+1} + N_{k-1})i + (N_{k+1} + N_{k-1})j.
 \end{aligned}$$

Lema 12. Para qualquer inteiro $n, m, p \geq 0$, temos que: $N(1, m, 0) = (N_m + N_{m-2}) + N_m \cdot i$

Demonstração. Através da recorrência $N(n, m+1, p) = N(n, m, p) + N(n, m-2, p)$ e com os valores iniciais definidos: $N(1, 0, 0) = 1$, $N(1, 1, 0) = 1 + i$ e $N(1, 2, 0) = 1 + i$, aplica-se o segundo princípio de indução, onde fixa $n = 1, p = 0$ e varia $m = 2, 3, \dots, k-1$, obtemos:

$$\begin{aligned} N(1, 3, 0) &= N(1, 2, 0) + N(1, 0, 0) = 2 + i = (N_3 + N_1) + N_3 i \\ N(1, 4, 0) &= N(1, 3, 0) + N(1, 1, 0) = 3 + 2i = (N_4 + N_2) + N_4 i \\ N(1, 5, 0) &= N(1, 4, 0) + N(1, 2, 0) = 4 + 3i = (N_5 + N_3) + N_5 i \\ &\vdots \\ N(1, k-2, 0) &= (N_{k-2} + N_{k-4}) + N_{k-2} i \\ N(1, k-1, 0) &= (N_{k-1} + N_{k-3}) + N_{k-1} i \\ N(1, k, 0) &= (N_k + N_{k-2}) + N_k i \end{aligned}$$

Assim, para $m = k$, temos:

$$\begin{aligned} N(1, k+1, 0) &= N(1, k, 0) + N(1, k-2, 0) \\ &= (N_k + N_{k-2}) + N_k i + (N_{k-2} + N_{k-4}) + N_{k-2} i \\ &= (N_{k+1} + N_{k-1}) + N_{k+1} i. \end{aligned}$$

Lema 13. Para qualquer inteiro $n, m, p \geq 0$, temos que: $N(0, m, 1) = N_m \cdot i + (N_m + N_{m-2}) \cdot j$.

Demonstração. Através da recorrência $N(n, m+1, p) = N(n, m, p) + N(n, m-2, p)$ e com os valores iniciais definidos: $N(0, 0, 1) = j$, $N(0, 1, 1) = i + j$ e $N(0, 2, 1) = i + j$, aplica-se o segundo princípio de indução finita, onde fixa o $n = 0, p = 1$ e varia o $m = 2, 3, \dots, k-1$.

$$\begin{aligned} N(0, 3, 1) &= N(0, 2, 1) + N(0, 0, 1) = i + 2j = N_3 i + (N_3 + N_1) j \\ N(0, 4, 1) &= N(0, 3, 1) + N(0, 1, 1) = 2i + 3j = N_4 i + (N_4 + N_2) j \\ N(0, 5, 1) &= N(0, 4, 1) + N(0, 2, 1) = 3i + 4j = N_5 i + (N_5 + N_3) j \\ &\vdots \\ N(0, k-2, 1) &= N_{k-2} i + (N_{k-2} + N_{k-4}) j \\ N(0, k-1, 1) &= N_{k-1} i + (N_{k-1} + N_{k-3}) j \\ N(0, k, 1) &= N_k i + (N_k + N_{k-2}) j \end{aligned}$$

Assim, para $m = k$, temos:

$$\begin{aligned} N(0, k+1, 1) &= N(0, k, 1) + N(0, k-2, 1) \\ &= N_k i + (N_k + N_{k-2}) j + N_{k-2} i + (N_{k-2} + N_{k-4}) j \\ &= N_{k+1} i + (N_{k+1} + N_{k-1}) j. \end{aligned}$$

Lema 14. Para os inteiros $n, m, p \geq 0$, temos que:
 $N(1, m, 1) = (N_m + N_{m-2}) + N_m \cdot i + (N_m + N_{m-2}) \cdot j$.

Demonstração. Através da recorrência $N(n, m+1, p) = N(n, m, p) + N(n, m-2, p)$ e com os valores iniciais definidos : $N(1, 0, 1) = 1 + j$, $N(1, 1, 1) = 1 + i + j$ e $N(1, 2, 1) = 1 + i + j$, aplica-se o segundo princípio da indução finita, onde fixa $n = 1$, $p = 1$ e varia $m = 2, 3, \dots, k-1$.

$$\begin{aligned}
 N(1, 3, 1) &= N(1, 2, 1) + N(1, 0, 1) = 2 + i + 2j = (N_3 + N_1) + N_3i + (N_3 + N_1)j \\
 N(1, 4, 1) &= N(1, 3, 1) + N(1, 1, 1) = 3 + 2i + 3j = (N_4 + N_2) + N_4i + (N_4 + N_2)j \\
 N(1, 5, 1) &= N(1, 4, 1) + N(1, 2, 1) = 4 + 3i + 3j = (N_5 + N_3) + N_5i + (N_5 + N_3)j \\
 &\vdots \\
 N(1, k-2, 1) &= (N_{k-2} + N_{k-4}) + N_{k-2}i + (N_{k-2} + N_{k-4})j \\
 N(1, k-1, 1) &= (N_{k-1} + N_{k-3}) + N_{k-1}i + (N_{k-1} + N_{k-3})j \\
 N(1, k, 1) &= (N_k + N_{k-2}) + N_ki + (N_k + N_{k-2})j
 \end{aligned}$$

Assim, para $m = k$, temos:

$$\begin{aligned}
 N(1, k+1, 1) &= N(1, k, 1) + N(1, k-2, 1) \\
 &= (N_{k+1} + N_{k-1}) + N_{k+1}i + (N_{k+1} + N_{k-1})j.
 \end{aligned}$$

Lema 15. Para qualquer inteiro $n, m, p \geq 0$, temos que: $N(1, 0, p) = (N_p + N_{p-2}) + N_p \cdot j$.

Demonstração: Através da recorrência $N(n, m, p+1) = N(n, m, p) + N(n, m, p-2)$ e com os valores iniciais definidos : $N(1, 0, 0) = 1$, $N(1, 0, 1) = 1 + j$ e $N(1, 0, 2) = 1 + j$, aplica-se o segundo princípio de indução, onde fixa $n = 1, m = 0$ e varia $p = 2, 3, \dots, k-1$.

$$\begin{aligned}
 N(1, 0, 3) &= N(1, 0, 2) + N(1, 0, 0) = 2 + j = (N_3 + N_1) + N_3j \\
 N(1, 0, 4) &= N(1, 0, 3) + N(1, 0, 1) = 3 + 2j = (N_4 + N_2) + N_4j \\
 N(1, 0, 5) &= N(1, 0, 4) + N(1, 0, 2) = 4 + 3j = (N_5 + N_3) + N_5j \\
 &\vdots \\
 N(1, k-2, 0) &= (N_{k-2} + N_{k-4}) + N_{k-2}j \\
 N(1, k-1, 0) &= (N_{k-1} + N_{k-3}) + N_{k-1}j \\
 N(1, k, 0) &= (N_k + N_{k-2}) + N_kj
 \end{aligned}$$

Assim, para $p = k$, temos:

$$\begin{aligned}
 N(1, 0, k+1) &= N(1, 0, k) + N(1, 0, k-2) \\
 &= (N_k + N_{k-2}) + N_kj + (N_{k-2} + N_{k-4}) + N_{k-2}j \\
 &= (N_{k+1} + N_{k-1}) + N_{k+1}j.
 \end{aligned}$$

Lema 16. Para qualquer inteiro $n, m, p \geq 0$, temos que: $N(0, 1, p) = (N_p + N_{p-2}) \cdot i + N_p \cdot j$.

Demonstração. Através da recorrência $N(n, m, p+1) = N(n, m, p) + N(n, m, p-2)$ e com os valores iniciais definidos : $N(0, 1, 0) = i$, $N(0, 1, 1) = i + j$ e $N(0, 1, 2) = i + j$, aplica-se o segundo princípio de indução finita, onde fixa $n = 0, m = 1$ e varia $p = 2, 3, \dots, k-1$.

$$\begin{aligned}
N(0,1,3) &= N(0,1,2) + N(0,1,0) = 2i + j = (N_3 + N_1)i + N_3j \\
N(0,1,4) &= N(0,1,3) + N(0,1,1) = 3i + 2j = (N_4 + N_2)i + N_4j \\
N(0,1,5) &= N(0,1,4) + N(0,1,2) = 4i + 3j = (N_5 + N_3)i + N_5j \\
&\vdots \\
N(0,1,k-2) &= (N_{k-2} + N_{k-4})i + N_{k-2}j \\
N(0,1,k-1) &= (N_{k-1} + N_{k-3})i + N_{k-1}j \\
N(0,1,k) &= (N_k + N_{k-2})i + N_kj
\end{aligned}$$

Assim, para $p = k$, temos:

$$\begin{aligned}
N(0,1,k+1) &= N(0,1,k) + N(0,1,k-2) \\
&= (N_k + N_{k-2})i + N_kj + (N_{k-2} + N_{k-4})i + N_{k-2}j \\
&= (N_{k+1} + N_{k-1})i + N_{k+1}j.
\end{aligned}$$

Lema 17. Para qualquer inteiro $n, m, p \geq 0$, temos que

$$N(1,1,p) = (N_p + N_{p-2}) + (N_p + N_{p-2})i + N_pj.$$

Demonstração. Através da recorrência $N(n,m,p+1) = N(n,m,p) + N(n,m,p-2)$ e com os valores iniciais definidos : $N(1,1,0) = 1+i$, $N(1,1,1) = 1+i+j$ e $N(1,1,2) = 1+i+j$, aplica-se o segundo princípio de indução, onde fixa $n=1, m=1$ e varia $p=2,3,\dots,k-1$.

$$\begin{aligned}
N(1,1,3) &= N(1,1,2) + N(1,1,0) = 2 + 2i + j = (N_3 + N_1) + (N_3 + N_1)i + N_3j \\
N(1,1,4) &= N(1,1,3) + N(1,1,1) = 3 + 3i + 2j = (N_4 + N_2) + (N_4 + N_2)i + N_4j \\
N(1,1,5) &= N(1,1,4) + N(1,1,2) = 4 + 4i + 3j = (N_5 + N_3) + (N_5 + N_3)i + N_5j \\
&\vdots \\
N(1,1,k-2) &= (N_{k-2} + N_{k-4}) + (N_{k-2} + N_{k-4})i + N_{k-2}j \\
N(1,1,k-1) &= (N_{k-1} + N_{k-3}) + (N_{k-1} + N_{k-3})i + N_{k-1}j \\
N(1,1,k) &= (N_k + N_{k-2}) + (N_k + N_{k-2})i + N_kj
\end{aligned}$$

Assim, para $p = k$, temos:

$$\begin{aligned}
N(1,1,k+1) &= N(1,1,k) + N(1,1,k-2) \\
&= (N_k + N_{k-2}) + (N_k + N_{k-2})i + N_kj + (N_{k-2} + N_{k-4}) + (N_{k-2} + N_{k-4})i + N_{k-2}j \\
&= (N_{k+1} + N_{k-1}) + (N_k + N_{k-2})i + N_{k+1}j.
\end{aligned}$$

Teorema 12. Para os inteiros $n, m, p \in \mathbb{N}$, os números na forma $N(n,m,p)$ são descritos por:

$$N(n,m,p) = N_n(N_m + N_{m-2})(N_p + N_{p-2}) + (N_n + N_{n-2})N_m(N_p + N_{p-2})i + (N_n + N_{n-2})(N_m + N_{m-2})N_pj$$

Demonstração. Fixando o $n=0, p=2$ e variando o $m=2,3,\dots,k-1$, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
N(0,3,2) &= N(0,2,2) + N(0,0,2) = i + 2j = N_3i + (N_3 + N_1)j \\
N(0,4,2) &= N(0,3,2) + N(0,1,2) = 2i + 3j = N_4i + (N_4 + N_2)j \\
N(0,5,2) &= N(0,4,2) + N(0,2,2) = 3i + 4j = N_5i + (N_5 + N_3)j \\
&\vdots \\
N(0,k-2,2) &= (N_2 + N_0)N_{k-2}i + (N_{k-2} + N_{k-4})j \\
N(0,k-1,2) &= (N_2 + N_0)N_{k-1}i + (N_{k-1} + N_{k-3})j \\
N(0,k,2) &= (N_2 + N_0)N_ki + (N_k + N_{k-2})j
\end{aligned}$$

Assim, para $m = k$, temos:

$$\begin{aligned}
N(0,k+1,2) &= N(0,k,2) + N(0,k-2,2) \\
&= (N_2 + N_0)N_ki + (N_k + N_{k-2})j + (N_2 + N_0)N_{k-2}i + (N_{k-2} + N_{k-4})j \\
&= (N_2 + N_0)N_{k+1}i + (N_{k+1} + N_{k-1})j.
\end{aligned}$$

Fixando o $n = 1, p = 2$ e variando o m , obtêm-se:

$$\begin{aligned}
N(1,3,2) &= N(1,2,2) + N(1,0,2) = 2 + i + 2j = (N_3 + N_1) + N_3i + (N_3 + N_1)j \\
N(1,4,2) &= N(1,3,2) + N(1,1,0) = 3 + 2i + 3j = (N_4 + N_2) + N_4i + (N_4 + N_2)j \\
N(1,5,2) &= N(1,4,2) + N(1,2,0) = 4 + 3i + 4j = (N_5 + N_3) + N_5i + (N_5 + N_3)j \\
&\vdots \\
N(1,k-2,2) &= (N_{k-2} + N_{k-4}) + N_{k-2}i + (N_{k-2} + N_{k-4})j \\
N(1,k-1,2) &= (N_{k-1} + N_{k-3}) + N_{k-1}i + (N_{k-1} + N_{k-3})j \\
N(1,k,2) &= (N_k + N_{k-2}) + N_ki + (N_k + N_{k-2})j.
\end{aligned}$$

Assim, para $m = k$, temos:

$$\begin{aligned}
N(1,k+1,2) &= N(1,k,2) + N(1,k-2,2) \\
&= (N_k + N_{k-2}) + N_ki + (N_k + N_{k-2})j + (N_{k-2} + N_{k-4}) + N_{k-2}i + (N_{k-2} + N_{k-4})j \\
&= (N_{k+1} + N_{k-1}) + N_{k+1}i + (N_{k+1} + N_{k-1})j
\end{aligned}$$

Fixando o $n = 2, p = 2$ e variando o m , obtêm-se:

$$\begin{aligned}
N(2,3,2) &= N(2,2,2) + N(2,0,2) = 2 + i + 2j = N_2(N_3 + N_1) + (N_2 + N_0)N_3i + N_2(N_3 + N_1)j \\
N(2,4,2) &= N(2,3,2) + N(2,1,2) = 3 + 2i + 3j = N_2(N_4 + N_2) + (N_2 + N_0)N_4i + N_2(N_4 + N_2)j \\
N(2,5,2) &= N(2,4,2) + N(2,2,2) = 4 + 3i + 4j = N_2(N_5 + N_3) + (N_2 + N_0)N_5i + N_2(N_5 + N_3)j \\
&\vdots \\
N(2,m-2,2) &= N_2(N_2 + N_0)(N_{m-2} + N_{m-4}) + (N_2 + N_0)N_{m-2}i + N_2(N_2 + N_0)(N_m + N_{m-4})j \\
N(2,m-1,2) &= N_2(N_2 + N_0)(N_{m-1} + N_{m-3}) + (N_2 + N_0)N_{m-1}i + N_2(N_2 + N_0)(N_{m-1} + N_{m-3})j \\
N(2,m+1,2) &= N(2,m,2) + N(2,m-2,2) \\
&= N_2(N_2 + N_0)(N_{m+1} + N_{m-1}) + (N_2 + N_0)N_{m+1}i + N_2(N_2 + N_0)(N_{m+1} + N_{m-1})j
\end{aligned}$$

Com isso, observe que:

$$\begin{aligned}
N(0, m, 2) &= N_0(N_2 + N_0)(N_m + N_{m-2}) + (N_0 + N_{-2})(N_2 + N_0)N_m i + N_2(N_0 + N_{-2})(N_m + N_{m-2})j \\
N(1, m, 2) &= N_1(N_2 + N_0)(N_m + N_{m-2}) + (N_1 + N_{-1})(N_2 + N_0)N_m i + N_2(N_1 + N_{-1})(N_m + N_{m-2})j \\
N(2, m, 2) &= N_2(N_2 + N_0)(N_m + N_{m-2}) + (N_2 + N_0)(N_2 + N_0)N_m i + N_2(N_2 + N_0)(N_m + N_{m-2})j \\
&\vdots \\
N(n, m, 2) &= N_n(N_2 + N_0)(N_m + N_{m-2}) + (N_n + N_{n-2})(N_2 + N_0)N_m i + N_2(N_2 + N_0)(N_m + N_{m-2})j
\end{aligned}$$

Logo, pode-se concluir que para a generalização da relação tridimensional de Narayana, tem-se que:

$$\begin{aligned}
N(n, m, 1) &= (N_1 + N_{-1})N_n(N_m + N_{m-2}) + (N_1 + N_{-1})N_m(N_n + N_{n-2})i + N_1(N_n + N_{n-2})(N_m + N_{m-2})j \\
N(n, m, 2) &= (N_2 + N_0)N_n(N_m + N_{m-2}) + (N_2 + N_0)N_m(N_n + N_{n-2})i + N_2(N_n + N_{n-2})(N_m + N_{m-2})j \\
N(n, m, 3) &= (N_3 + N_1)N_n(N_m + N_{m-2}) + (N_3 + N_1)N_m(N_n + N_{n-2})i + N_3(N_n + N_{n-2})(N_m + N_{m-2})j \\
&\vdots \\
N(n, m, p) &= N_n(N_m + N_{m-2})(N_p + N_{p-2}) + (N_n + N_{n-2})N_m(N_p + N_{p-2})i + (N_n + N_{n-2})(N_m + N_{m-2})N_p j.
\end{aligned}$$

3.5.4 Relações Recorrentes Tetradimensionais

Continuando com o processo de complexificação da Sequência de Narayana apresentamos as relações recorrentes Tetradimensionais definidas a partir do modelo unidimensional de Narayana. Apresentamos assim, a seguinte definição:

Definição 7. Os números na forma $N(n, m, p, q)$ são definidos como a sequência Tetradimensional de Narayana, satisfazendo as seguintes relações de recorrência:

$$\begin{cases}
N(n+1, m, p, q) = N(n, m, p, q) + N(n-2, m, p, q) \\
N(n, m+1, p, q) = N(n, m, p, q) + N(n, m-2, p, q) \\
N(n, m, p+1, q) = N(n, m, p, q) + N(n, m, p-2, q) \\
N(n, m, p, q+1) = N(n, m, p, q) + N(n, m, p, q-2)
\end{cases}$$

Com as condições iniciais definidas: $N(0, 0, 0, 0) = 0$, $N(1, 0, 0, 0) = 1$, $N(2, 0, 0, 0) = 1$,

$$N(0, 2, 0, 0) = i, N(0, 0, 1, 0) = j, N(0, 0, 2, 0) = j, N(0, 0, 0, 1) = k, N(0, 0, 0, 2) = k,$$

$$N(1, 1, 0, 0) = 1+i, N(1, 1, 1, 0) = 1+i+j, N(1, 1, 1, 1) = 1+i+j+k, N(2, 1, 0, 0) = 1+i,$$

$$N(2, 2, 0, 0) = 1+i, N(0, 0, 1, 1) = j+k, N(0, 0, 1, 2) = j+k, N(1, 0, 0, 1) = 1+k, N(2, 0, 0, 1) = 1+k.$$

Doravante, apresentamos alguns lemas e um teorema referentes a Definição 1:

Lema 18. Para qualquer valor inteiro $n, m, p, q \geq 0$, temos que: $N(n, 0, 0, 0) = N_n$.

Demonstração. Através da recorrência $N(n+1, m, p, q) = N(n, m, p, q) + N(n-2, m, p, q)$ e como os valores iniciais definidos como sendo $N(0, 0, 0, 0) = N_0 = 0$, $N(1, 0, 0, 0) = N_1 = 1$

$N(2, 0, 0, 0) = N_2 = 1$, pode-se aplicar o segundo princípio de indução finita onde fixa $m = 0, p = 0, q = 0$ e faz variar o valor de n , obtendo:

$$\begin{aligned}
 N(3, 0, 0, 0) &= N(2, 0, 0, 0) + N(0, 0, 0, 0) = 1 = N_3 \\
 N(4, 0, 0, 0) &= N(3, 0, 0, 0) + N(1, 0, 0, 0) = 2 = N_4 \\
 N(5, 0, 0, 0) &= N(4, 0, 0, 0) + N(2, 0, 0, 0) = 3 = N_5 \\
 &\vdots \\
 N(n-2, 0, 0, 0) &= N_{n-2} \\
 N(n-1, 0, 0, 0) &= N_{n-1} \\
 N(n, 0, 0, 0) &= N_n \\
 N(n+1, 0, 0, 0) &= N(n, 0, 0, 0) + N(n-2, 0, 0, 0) = N_n + N_{n-2} = N_{n+1}.
 \end{aligned}$$

Lema 19. Para qualquer inteiro $n, m, p, q \geq 0$, temos que $N(0, m, p, q) = N_m \cdot i$.

Demonstração. Através da recorrência $N(n, m+1, p, q) = N(n, m, p, q) + N(n, m-2, p, q)$ e com os valores iniciais definidos como sendo $N(0, 1, 0, 0) = i = N_1 i$ e $N(0, 2, 0, 0) = i = N_2 i$, pode-se aplicar o segundo princípio de indução finita onde fixa $n = 0, p = 0, q = 0$ e faz variar o valor de m , obtendo:

$$\begin{aligned}
 N(0, 3, 0, 0) &= N(0, 2, 0, 0) + N(0, 0, 0, 0) = i = N_3 \cdot i \\
 N(0, 4, 0, 0) &= N(0, 3, 0, 0) + N(0, 1, 0, 0) = 2i = N_4 \cdot i \\
 N(0, 5, 0, 0) &= N(0, 4, 0, 0) + N(0, 2, 0, 0) = 3i = N_5 \cdot i \\
 &\vdots \\
 N(0, m-2, 0, 0) &= N_{m-2} \cdot i \\
 N(0, m-1, 0, 0) &= N_{m-1} \cdot i \\
 N(0, m, 0, 0) &= N_m \cdot i \\
 N(0, m+1, 0, 0) &= N(0, m, 0, 0) + N(0, m-2, 0, 0) = N_m i + N_{m-2} i = N_{m+1} i.
 \end{aligned}$$

Lema 20. Para qualquer valor inteiro $n, m, p, q \geq 0$, temos que $N(0, 0, p, 0) = N_p \cdot j$.

Demonstração. Através da recorrência $N(n, m, p+1, q) = N(n, m, p, q) + N(n, m, p-2, q)$ e com os valores iniciais definidos como sendo $N(0, 0, 1, 0) = j$ e $N(0, 0, 2, 0) = j$, pode-se aplicar o segundo princípio de indução finita onde fixa $n = 0, m = 0, q = 0$ e faz variar o $p = 0, 1, 2, 2, \dots$, obtendo:

$$\begin{aligned}
N(0,0,3,0) &= N(0,0,2,0) + N(0,0,0,0) = j = N_3 \cdot j \\
N(0,0,4,0) &= N(0,0,3,0) + N(0,0,1,0) = 2j = N_4 \cdot j \\
N(0,0,5,0) &= N(0,0,4,0) + N(0,0,2,0) = 3j = N_5 \cdot j \\
&\vdots \\
N(0,0,p-2,0) &= N_{p-2} \cdot j \\
N(0,0,p-1,0) &= N_{p-1} \cdot j \\
N(0,0,p,0) &= N_p \cdot j \\
N(0,0,p+1,0) &= N(0,0,p,0) + N(0,0,p-2,0) = N_p \cdot j + N_{p-2} \cdot j = N_{p+1} \cdot j.
\end{aligned}$$

Lema 21. Para qualquer valor inteiro, $n, m, p, q \geq 0$, temos que $N(0,0,0,q) = N_q \cdot k$.

Demonstração. Através da recorrência $N(n,m,p,q+1) = N(n,m,p,q) + N(n,m,p,q-2)$ e com os valores iniciais definidos como sendo $N(0,0,0,1) = k = N_1 \cdot k$ e $N(0,0,0,2) = k = N_2 \cdot k$, pode-se aplicar o segundo princípio de indução finita onde fixa o $n = 0, m = 0, p = 0$ e faz variar o $q = 0, 1, 2, 3, \dots$, obtendo:

$$\begin{aligned}
N(0,0,0,3) &= N(0,0,0,2) + N(0,0,0,0) = k = N_3 \cdot k \\
N(0,0,0,4) &= N(0,0,0,3) + N(0,0,0,1) = 2k = N_4 \cdot k \\
N(0,0,0,5) &= N(0,0,0,4) + N(0,0,0,2) = 3 \cdot k = N_5 \cdot k \\
&\vdots \\
N(0,0,0,q-2) &= N_{q-2} \cdot k \\
N(0,0,0,q-1) &= N_{q-1} \cdot k \\
N(0,0,0,q) &= N_q \cdot k \\
N(0,0,0,q+1) &= N(0,0,0,q) + N(0,0,0,q-2) = N_q \cdot k + N_{q-2} \cdot k = N_{q+1} \cdot k.
\end{aligned}$$

Lema 22. Para qualquer valor inteiro $n, m, p, q \geq 0$, temos que $N(n,0,0,1) = N_n + (N_n + N_{n-2}) \cdot k$.

Demonstração. Através da recorrência $N(n+1,m,p,q) = N(n,m,p,q) + N(n-2,m,p,q)$ e com os valores iniciais definidos como sendo $N(1,0,0,1) = 1+k$ e $N(2,0,0,1) = 1+k$, pode-se aplicar o segundo princípio de indução finita onde fixa $m = 0, p = 0, q = 1$ e faz variar o $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, obtendo:

$$\begin{aligned}
N(3, 0, 0, 1) &= N(2, 0, 0, 1) + N(0, 0, 0, 1) = 1 + 2k \\
N(4, 0, 0, 1) &= N(3, 0, 0, 1) + N(1, 0, 0, 1) = 1 + 3k \\
N(5, 0, 0, 1) &= N(4, 0, 0, 1) + N(2, 0, 0, 1) = 3 + 4k \\
&\vdots \\
N(n-2, 0, 0, 1) &= N_{n-2} + (N_{n-2} + N_{n-4}).k \\
N(n-1, 0, 0, 1) &= N_{n-1} + (N_{n-1} + N_{n-3}).k \\
N(n, 0, 0, 1) &= N_n + (N_n + N_{n-2}).k \\
N(n+1, 0, 0, 1) &= N(n, 0, 0, 1) + N(n-2, 0, 0, 1) = N_{n+1} + (N_{n+1} + N_{n-1}).k.
\end{aligned}$$

Lema 23. Para qualquer valor inteiro $n, m, p, q \geq 0$, temos que $N(n, 0, 1, 1) = N_n + (N_n + N_{n-2}).j + (N_n + N_{n-2}).k$.

Demonstração. Através da recorrência $N(n+1, m, p, q) = N(n, m, p, q) + N(n-2, m, p, q)$ e com os valores iniciais definidos como sendo $N(0, 0, 1, 1) = j + k$, $N(1, 0, 1, 1) = 1 + j + k$, $N(2, 0, 1, 1) = 1 + j + k$ pode aplicar o segundo princípio de indução finita onde fixa-se $m = 0, p = 1, q = 1$ e faz variar $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, obtendo:

$$\begin{aligned}
N(3, 0, 1, 1) &= N(2, 0, 1, 1) + N(0, 0, 1, 1) = 1 + 2j + 2k \\
N(4, 0, 1, 1) &= N(3, 0, 1, 1) + N(1, 0, 1, 1) = 2 + 3j + 3k \\
N(5, 0, 1, 1) &= N(4, 0, 1, 1) + N(2, 0, 1, 1) = 3 + 4j + 4k \\
&\vdots \\
N(n-2, 0, 1, 1) &= N_{n-2} + (N_{n-2} + N_{n-4}).j + (N_{n-2} + N_{n-4}).k \\
N(n-1, 0, 1, 1) &= N_{n-1} + (N_{n-1} + N_{n-3}).j + (N_{n-1} + N_{n-3}).k \\
N(n, 0, 1, 1) &= N_n + (N_n + N_{n-2}).j + (N_n + N_{n-2}).k \\
N(n+1, 0, 1, 1) &= N(n, 0, 1, 1) + N(n-2, 0, 1, 1) = N_{n+1} + (N_{n+1} + N_{n-1}).j + (N_{n+1} + N_{n-1}).k.
\end{aligned}$$

Lema 24. Para qualquer inteiro $n, m, p, q \geq 0$, temos que $N(n, 1, 0, 1) = N_n + (N_n + N_{n-2}).i + (N_n + N_{n-2}).k$.

Demonstração. Através da recorrência $N(n+1, m, p, q) = N(n, m, p, q) + N(n-2, m, p, q)$ e como os valores iniciais definidos como sendo $N(0, 1, 0, 1) = i + k$, $N(1, 1, 0, 1) = 1 + i + k$,

$N(2, 1, 0, 1) = 1 + i + k$, pode-se aplicar o segundo princípio de indução finita onde fixa-se o valor de $m = 1, p = 0, q = 1$ e faz variar o valor de $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, obtendo:

$$\begin{aligned}
N(3,1,0,1) &= N(2,1,0,1) + N(0,1,0,1) = 1 + 2i + 2k = N_3 + (N_3 + N_0)i + (N_3 + N_0)k \\
N(4,1,0,1) &= N(3,1,0,1) + N(1,1,0,1) = 2 + 3i + 3k = N_4 + (N_4 + N_2)i + (N_4 + N_2)k \\
N(5,1,0,1) &= N(4,1,0,1) + N(2,1,0,1) = 3 + 4i + 4k = N_5 + (N_5 + N_3)i + (N_5 + N_3)k \\
&\vdots \\
N(n-2,1,0,1) &= N_{n-2} + (N_{n-2} + N_{n-4})i + (N_{n-2} + N_{n-4})k \\
N(n-1,1,0,1) &= N_{n-1} + (N_{n-1} + N_{n-3})i + (N_{n-1} + N_{n-3})k \\
N(n,1,0,1) &= N_n + (N_n + N_{n-2})i + (N_n + N_{n-2})k \\
N(n+1,1,0,1) &= N(n,1,0,1) + N(n-2,1,0,1) = N_{n+1} + (N_{n+1} + N_{n-1})i + (N_{n+1} + N_{n-1})k.
\end{aligned}$$

Lema 25. Para qualquer valor inteiro $n, m, p, q \geq 0$, temos que $N(n,1,1,1) = N_n + (N_n + N_{n-2})i + (N_n + N_{n-2})j + (N_n + N_{n-2})k$.

Demonstração. Através da recorrência $N(n+1, m, p, q) = N(n, m, p, q) + N(n-2, m, p, q)$ e com os valores iniciais definidos como $N(0,1,1,1) = i + j + k$, $N(1,1,1,1) = 1 + i + j + k$, pode-se aplicar o segundo princípio de indução finita onde fixa-se o $m = 1, p = 1, q = 1$ e faz variar o valor de $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, obtendo:

$$\begin{aligned}
N(3,1,1,1) &= N(2,1,1,1) + N(0,1,1,1) = 1 + 2i + 2j + 2k = N_3 + (N_3 + N_1)i + (N_3 + N_1)j + (N_3 + N_1)k \\
N(4,1,1,1) &= N(3,1,1,1) + N(1,1,1,1) = 2 + 3i + 3j + 3k = N_4 + (N_4 + N_2)i + (N_4 + N_2)j + (N_4 + N_2)k \\
N(5,1,1,1) &= N(4,1,1,1) + N(2,1,1,1) = 3 + 4i + 4j + 4k = N_5 + (N_5 + N_3)i + (N_5 + N_3)j + (N_5 + N_3)k \\
&\vdots \\
N(n-2,1,1,1) &= N_{n-2} + (N_{n-2} + N_{n-4})i + (N_{n-2} + N_{n-4})j + (N_{n-2} + N_{n-4})k \\
N(n-1,1,1,1) &= N_{n-1} + (N_{n-1} + N_{n-3})i + (N_{n-1} + N_{n-3})j + (N_{n-1} + N_{n-3})k \\
N(n,1,1,1) &= N_n + (N_n + N_{n-2})i + (N_n + N_{n-2})j + (N_n + N_{n-2})k \\
N(n+1,1,1,1) &= N(n,1,1,1) + N(n-2,1,1,1) = N_{n+1} + (N_{n+1} + N_{n-1})i + (N_{n+1} + N_{n-1})j + (N_{n+1} + N_{n-1})k.
\end{aligned}$$

Lema 26. Para qualquer valor inteiro $n, m, p, q \geq 0$, temos que: $N(1, m, 1, 1) = (N_m + N_{m-2}) + N_m i + (N_m + N_{m-2})j + (N_m + N_{m-2})k$.

Demonstração. Através da recorrência $N(n, m+1, p, q) = N(n, m, p, q) + N(n, m-2, p, q)$ e com os valores iniciais definidos como sendo $N(1,0,1,1) = 1 + j + k$, $N(1,1,1,1) = 1 + i + j + k$, $N(1,2,1,1) = 1 + i + j + k$, pode-se aplicar o segundo princípio de indução finita onde fixa-se o $n = 1, p = 1, q = 1$ e faz variar o $m = 0, 1, 2, 3, \dots$, obtendo:

$$\begin{aligned}
N(1, 3, 1, 1) &= N(1, 2, 1, 1) + N(1, 0, 1, 1) = 2 + i + 2j + 2k = (N_3 + N_1) + N_3i + (N_3 + N_1)j + (N_3 + N_1)k \\
N(1, 4, 1, 1) &= N(1, 3, 1, 1) + N(1, 1, 1, 1) = 3 + 2i + 3j + 3k = (N_4 + N_2) + N_4i + (N_4 + N_2)j + (N_4 + N_2)k \\
N(1, 5, 1, 1) &= N(1, 4, 1, 1) + N(1, 2, 1, 1) = 4 + 3i + 4j + 4k = (N_5 + N_3) + N_5i + (N_5 + N_3)j + (N_5 + N_3)k \\
&\vdots \\
N(1, m-2, 1, 1) &= (N_{m-2} + N_{m-4}) + N_{m-2}i + (N_{m-2} + N_{m-4})j + (N_{m-2} + N_{m-4})k \\
N(1, m-1, 1, 1) &= (N_{m-1} + N_{m-3}) + N_{m-1}i + (N_{m-1} + N_{m-3})j + (N_{m-1} + N_{m-3})k \\
N(1, m, 1, 1) &= (N_m + N_{m-2}) + N_mi + (N_m + N_{m-2})j + (N_m + N_{m-2})k \\
N(1, m+1, 1, 1) &= N(1, m, 1, 1) + N(1, m-2, 1, 1) = (N_{m+1} + N_{m-1}) + N_{m+1}i + (N_{m+1} + N_{m-1})j + (N_{m+1} + N_{m-1})k.
\end{aligned}$$

Teorema 13. Para os inteiros $n, m, p, q \in \mathbb{N}$, os números Tetradimensionais de Narayana são descritos por:

$$\begin{aligned}
N(n, m, p, q) &= N_n(N_m + N_{m-2})(N_p + N_{p-2})(N_q + N_{q-2}) + (N_n + N_{n-2})(N_p + N_{p-2})(N_q + N_{q-2})N_mi + \\
&+ (N_n + N_{n-2})(N_m + N_{m-2})(N_q + N_{q-2})N_pj + (N_n + N_{n-2})(N_m + N_{m-2})(N_p + N_{p-2})N_qk.
\end{aligned}$$

Demonstração. Para as recorrências Bidimensionais e Tridimensionais foram demonstradas, respectivamente as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
N(n, m) &= N_n(N_m + N_{m-2}) + (N_n + N_{n-2})N_mi \\
N(n, m, p) &= N_n(N_m + N_{m-2})(N_p + N_{p-2}) + (N_n + N_{n-2}) + (N_p + N_{p-2})N_mi + (N_n + N_{n-2}) + (N_m + N_{m-2})N_pj.
\end{aligned}$$

Assim, para a recorrência Tetradimensional seguindo o mesmo princípio indutivo verificamos que:

$$\begin{aligned}
N(n, m, p, q) &= N_n(N_m + N_{m-2})(N_p + N_{p-2})(N_q + N_{q-2}) + (N_n + N_{n-2})(N_p + N_{p-2})(N_q + N_{q-2})N_mi + \\
&+ (N_n + N_{n-2})(N_m + N_{m-2})(N_q + N_{q-2})N_pj + (N_n + N_{n-2})(N_m + N_{m-2})(N_p + N_{p-2})N_qk.
\end{aligned}$$

3.5.5 Relações Recorrentes N-dimensionais

Definição 8. Um número hipercomplexo de Narayana $N(n, n_2, n_3, \dots, n_n)$ com n variáveis, para $n \geq 2$, vale, além da unidade imaginária i , o seguinte conjunto de unidades imaginárias $(\eta_1 = j, \eta_2 = k, \dots, \eta_{n-2})$. Desse modo são definidos os valores iniciais a seguir:

$$\begin{aligned}
N(0, 0, 0, \dots, 0) &= 0 \\
N(1, 0, 0, \dots, 0) &= 1 \\
N(0, 1, 0, \dots, 0) &= i \\
N(0, 0, 1, \dots, 0) &= j \\
N(0, 0, 0, 1, \dots, 0) &= k \\
N(0, 0, 0, 0, 1, \dots, 0) &= \eta_3 \\
&\vdots \\
N(0, 0, 0, \dots, 0, 1) &= \eta_{n-2} \\
N(1, 1, 1, \dots, 1) &= 1 + i + \eta_1 + \dots + \eta_{n-2} \\
N(0, 1, 1, \dots, 1) &= i + \eta_1 + \dots + \eta_{n-2} \\
N(1, 0, 1, \dots, 1) &= 1 + \eta_2 + \dots + \eta_{n-2}
\end{aligned}$$

Com isso, os números da forma $N(n, n_2, n_3, \dots, n_n)$ devem satisfazer as seguintes condições n-dimensionais de recorrência:

$$\begin{aligned}
N(n+1, n_2, n_3, \dots, n_n) &= N(n, n_2, n_3, \dots, n_n) + N(n-2, n_2, n_3, \dots, n_n) \\
N(n, n_2+1, n_3, \dots, n_n) &= N(n, n_2, n_3, \dots, n_n) + N(n, n_2-2, n_3, \dots, n_n) \\
N(n, n_2, n_3+1, \dots, n_n) &= N(n, n_2, n_3, \dots, n_n) + N(n, n_2, n_3-2, \dots, n_n) \\
&\vdots \\
N(n, n_2, n_3, \dots, n_n+1) &= N(n, n_2, n_3, \dots, n_n) + N(n, n_2, n_3, \dots, n_n-2)
\end{aligned}$$

Teorema 14. Os números da forma $N(n, n_2, n_3, \dots, n_n)$, tal que $n, n_1, n_2, \dots, n_n \in \mathbb{N}$, são determinados por:

$$\begin{aligned}
N(n, n_2, n_3, \dots, n_n) &= N_n(N_{n_2} + N_{n_2-2})(N_{n_3} + N_{n_3-2}) \dots (N_{n_n} + N_{n_n-2}) + (N_n + N_{n-2})(N_{n_3} + N_{n_3-2}) \dots (N_{n_n} + N_{n_n-2})N_{n_2}i \\
&+ (N_n + N_{n-2})(N_{n_2} + N_{n_2-2}) \dots (N_{n_n} + N_{n_n-2})N_{n_3}\eta_1 + \dots (N_n + N_{n-2})(N_{n_2} + N_{n_2-2})(N_{n_3} + N_{n_3-2}) \dots N_{n_n}\eta_{n-2}
\end{aligned}$$

Demonstração. Assim já foram demonstradas as relações:

$$\begin{aligned}
N(n, m) &= N_n(N_m + N_{m-2}) + (N_n + N_{n-2})N_m i \\
N(n, m, p) &= N_n(N_m + N_{m-2})(N_p + N_{p-2}) + (N_n + N_{n-2}) + (N_p + N_{p-2})N_m i + (N_n + N_{n-2}) + (N_m + N_{m-2})N_p j
\end{aligned}$$

Dessa forma, por meio de um processo indutivo, pode-se verificar que:

$$\begin{aligned}
N(n, m) &= N_n(N_m + N_{m-2}) + (N_n + N_{n-2})N_m i \\
N(n, m, p) &= N_n(N_m + N_{m-2})(N_p + N_{p-2}) + (N_n + N_{n-2}) + (N_p + N_{p-2})N_m i + (N_n + N_{n-2}) + (N_m + N_{m-2})N_p j \\
N(n, m, p, q) &= N_n(N_m + N_{m-2})(N_p + N_{p-2})(N_q + N_{q-2}) + (N_n + N_{n-2})(N_p + N_{p-2})(N_q + N_{q-2})N_m i + \\
&(N_n + N_{n-2})(N_m + N_{m-2})(N_q + N_{q-2})N_p j + (N_n + N_{n-2})(N_m + N_{m-2})(N_p + N_{p-2})N_q k.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
N(n, n_2, n_3, \dots, n_n) &= N_n(N_{n_2} + N_{n_2-2})(N_{n_3} + N_{n_3-2}) \dots (N_{n_n} + N_{n_n-2}) + (N_n + N_{n-2})(N_{n_3} + N_{n_3-2}) \dots (N_{n_n} + N_{n_n-2})N_{n_2}i \\
&+ (N_n + N_{n-2})(N_{n_2} + N_{n_2-2}) \dots (N_{n_n} + N_{n_n-2})N_{n_3}\eta_1 + \dots (N_n + N_{n-2})(N_{n_2} + N_{n_2-2})(N_{n_3} + N_{n_3-2}) \dots N_{n_n}\eta_{n-2}.
\end{aligned}$$

3.6 Quaternions de Narayana

Os Quaternions foram desenvolvidos por Willian Rowan Hamilton (1805-1865) em 1843. Em 1833, Hamilton fundamentou a definição dos números complexos como pares ordenados de números reais para uma representação geométrica. Atualmente os números complexos bidimensionais são localizados no plano de Argand-Gauss. De acordo com Menon (2009) os Quaternions surgiram a partir da tentativa de generalização dos números complexos na forma $z = a + bi$ em três dimensões.

Os Quaternions são números hipercomplexos, ou seja, representam uma extensão dos números complexos na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, onde se tem a parte real $\text{Re}(z) = a$, parte imaginária $\text{Im}(z) = b$ e a unidade imaginária i (OLVIVEIRA, 2018). De acordo com Halici (2012,2013) e Oliveira e Alves (2018) um Quaternion pode ser definido pela equação:

$$q = q_0 \cdot 1 + q_1 \cdot e_1 + q_2 \cdot e_2 + q_3 \cdot e_3,$$

dessa forma, ele possui tem duas partes: Uma escalar real composta por (q_0, q_1, q_2, q_3) e uma vetorial formada pela base $(1, e_1, e_2, e_3)$, onde e_1, e_2, e_3 são números complexos que satisfazem à $(e_1)^2 = (e_2)^2 = (e_3)^2 = e_1 \cdot e_2 \cdot e_3 = -1$.

Segundo Horadam (1963,1993) e Sagwine, Ell e Biham (2011), um Quaternion pode ser definido pela equação:

$$q = a + bi + cj + dk,$$

onde i, j, k são as unidades imaginárias, com $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$ e $ki = j = -ik$. O conjugado e a norma do quaternion são descritos, respectivamente por:

$$q^* = a - bi - cj - dk,$$

$$N(q) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Tem-se ainda que $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ e $q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ são dois quaternions distintos, as operações de adição e igualdade entre eles são definidas como:

$$q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k.$$

$q_1 = q_2$, somente se $a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2$.

À vista disso, serão enunciadas algumas definições referentes aos quaternions de Narayana, onde iremos explorar algumas propriedades importantes, tais como matriz geradora, função geradora, fórmula de Binet, tanto para os números naturais, assim como sua extensão para índice inteiro não positivo.

Definição 9. O quaternion de Narayana é definido, com $n \geq 0$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, pela equação:

$$QN_n = N_n + N_{n+1}i + N_{n+2}j + N_{n+3}k.$$

Definição 10. A fórmula de recorrência para o quaternion de Narayana é definida como:

$$QN_n = QN_{n-1} + QN_{n-3}.$$

Teorema 15. A função geradora para os Quaternions de Narayana é dada por:

$$g(QN_n, x) = \frac{i + j + k + (1+k)x + (j+k)x^2}{1-x-x^3}.$$

Demonstração. Seja $g(QN_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} QN_n x^n = QN_0 + QN_1 x + QN_2 x^2 + \dots + QN_n x^n$.

Multiplicando a equação $g(QN_n, x)$ por x e x^3 , respectivamente, tem-se que:

$$g(QN_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} QN_n x^n = QN_0 + QN_1 x + QN_2 x^2 + \dots + QN_n x^n \quad (3.7)$$

$$x \cdot g(QN_n, x) = QN_0 x + QN_1 x^2 + QN_2 x^3 + \dots + QN_{n-1} x^n \quad (3.8)$$

$$x^3 g(QN_n, x) = QN_0 x^3 + QN_1 x^4 + QN_2 x^5 + \dots + QN_{n-3} x^n \quad (3.9)$$

De acordo com a equação (3.7-3.8-3.9), tem-se que:

$$(1-x-x^3)g(QN_n, x) = QN_0 + (QN_1 - QN_0)x + (QN_2 - QN_1)x^2 + (QN_3 - QN_2 - QN_0)x^3 + \dots + (QN_n - QN_{n-1} - QN_{n-3})$$

Considerando os valores iniciais $QN_0 = i + j + k$, $QN_1 = 1 + i + j + 2k$, $QN_2 = 1 + i + 2j + 3k$.

E lembrando que $QN_n - QN_{n-1} - QN_{n-3} = 0$, pode-se obter:

$$(1-x-x^3)g(QN_n, x) = QN_0 + (QN_1 - QN_0)x + (QN_2 - QN_1)x^2$$

$$g(QN_n, x) = \frac{i + j + k + (1+k)x + (j+k)x^2}{1-x-x^3}.$$

3.6.1 Representações matriciais para os Quaternions de Narayana

Agora será analisada a matriz geradora dos quaternions de Narayana através da matriz Q , com $n \in \mathbb{N}$:

$$Q^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} N_{n+1} & N_{n-1} & N_n \\ N_n & N_{n-2} & N_{n-1} \\ N_{n-1} & N_{n-3} & N_{n-2} \end{pmatrix}, \text{ para todo } n \geq 3.$$

Teorema 16. Para $n \geq 1$, a matriz geradora dos quaternions de Narayana é dada por:

$$\begin{aligned} Q^n \begin{pmatrix} QN_4 & QN_2 & QN_3 \\ QN_3 & QN_1 & QN_2 \\ QN_2 & QN_0 & QN_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} QN_4 & QN_2 & QN_3 \\ QN_3 & QN_1 & QN_2 \\ QN_2 & QN_0 & QN_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} QN_{n+4} & QN_{n+2} & QN_{n+3} \\ QN_{n+3} & QN_{n+1} & QN_{n+2} \\ QN_{n+2} & QN_n & QN_{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Demonstração. Pelo princípio de indução finita sobre n , tem-se que:

Para $n=1$, tem-se que:

$$\begin{aligned} Q \begin{pmatrix} QN_4 & QN_2 & QN_3 \\ QN_3 & QN_1 & QN_2 \\ QN_2 & QN_0 & QN_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} QN_4 & QN_2 & QN_3 \\ QN_3 & QN_1 & QN_2 \\ QN_2 & QN_0 & QN_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} QN_4 + QN_2 & QN_2 + QN_0 & QN_3 + QN_1 \\ QN_4 & QN_2 & QN_3 \\ QN_3 & QN_1 & QN_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} QN_5 & QN_3 & QN_4 \\ QN_4 & QN_2 & QN_3 \\ QN_3 & QN_1 & QN_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assumindo que o teorema é válido para $n = k$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
Q^k \begin{pmatrix} QN_4 & QN_2 & QN_3 \\ QN_3 & QN_1 & QN_2 \\ QN_2 & QN_0 & QN_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} QN_4 & QN_2 & QN_3 \\ QN_3 & QN_1 & QN_2 \\ QN_2 & QN_0 & QN_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} N_{k+1} & N_{k-1} & N_k \\ N_k & N_{k-2} & N_{k-1} \\ N_{k-1} & N_{k-3} & N_{k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} QN_4 & QN_2 & QN_3 \\ QN_3 & QN_1 & QN_2 \\ QN_2 & QN_0 & QN_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} QN_{k+4} & QN_{k+2} & QN_{k+3} \\ QN_{k+3} & QN_{k+1} & QN_{k+2} \\ QN_{k+2} & QN_k & QN_{k+1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Devemos mostrar que é válido para $n = k+1$:

Assim,

$$\begin{aligned}
Q^{k+1} \begin{pmatrix} QN_4 & QN_2 & QN_3 \\ QN_3 & QN_1 & QN_2 \\ QN_2 & QN_0 & QN_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} QN_4 & QN_2 & QN_3 \\ QN_3 & QN_1 & QN_2 \\ QN_2 & QN_0 & QN_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} QN_{k+4} & QN_{k+2} & QN_{k+3} \\ QN_{k+3} & QN_{k+1} & QN_{k+2} \\ QN_{k+2} & QN_k & QN_{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} QN_{k+4} + QN_{k+2} & QN_{k+3} & QN_{k+4} \\ QN_{k+3} + QN_{k+1} & QN_{k+2} & QN_{k+3} \\ QN_{k+2} + QN_k & QN_{k+1} & QN_{k+2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Doravante, será analisado o comportamento dos termos com índices inteiros não positivos dos Quaternions de Narayana.

Definição 12. A fórmula de recorrência dos quaternions de Narayana para índice inteiro não positivo para todo $n \in \mathbb{N}$, é dada por:

$$QN_{-n} = QN_{-n+3} - QN_{-n+2}.$$

Definição 13. O quaternion de Narayana, para índice inteiro não positivo, para todo $n \in \mathbb{N}$, é definido pela equação:

$$QN_{-n} = N_{-n} + N_{-n+1}i + N_{-n+2}j + N_{-n+3}k.$$

Teorema 17. A função geradora dos quaternions de Narayana para índice inteiro não positivo, é descrita por:

$$g(QN_{-n}, x) = \frac{-(i+j+k) - (j+k)x + (-1+i+j)x^2}{x^3 - x^2 - 1}.$$

Demonstração. Seja $g(N_{-n}, x) = \sum_{n=0}^{\infty} QN_{-n}x^n = QN_0 + QN_{-1}x + QN_{-2}x^2 + \dots + QN_{-n}x^n$.

Multiplicando a equação $g(N_{-n}, x)$ por x e x^3 , respectivamente, tem-se que:

$$g(N_{-n}, x) = \sum_{n=0}^{\infty} QN_{-n}x^n = QN_0 + QN_{-1}x + QN_{-2}x^2 + \dots + QN_{-n}x^n \quad (3.10)$$

$$x^2 g(N_{-n}, x) = QN_0x^2 + QN_{-1}x^3 + QN_{-2}x^4 + \dots + QN_{-n+2}x^n \quad (3.11)$$

$$x^3 g(N_{-n}, x) = QN_0x^3 + QN_{-1}x^4 + QN_{-2}x^5 + \dots + QN_{-n+3}x^n \quad (3.12)$$

Com base na equação (3.10-3.11-3.12), tem-se que:

$$\begin{aligned} (x^3 - x^2 - 1)g(N_{-n}, x) &= -QN_0 - QN_{-1}x - (QN_0 - QN_{-2})x^2 \\ &\quad + (QN_0 - QN_{-1} - QN_{-3})x^3 + \dots + (QN_{-n+3} - QN_{-n+2} - QN_{-n})x^n. \end{aligned}$$

Considerando os valores iniciais: $QN_0 = i + j + k, QN_{-1} = j + k, QN_{-2} = 1 + k$ e a fórmula de recorrência, pode-se obter:

$$\begin{aligned} (x^3 - x^2 - 1)g(QN_{-n}, x) &= -QN_0 - QN_{-1}x + (QN_0 - QN_{-2})x^2 \\ g(QN_{-n}, x) &= \frac{-(i+j+k) - (j+k)x + (-1+i+j)x^2}{x^3 - x^2 - 1}. \end{aligned}$$

A matriz geradora Q dos quaternions de Narayana para índice inteiro não positivo, pode ser analisada calculando a inversa da matriz Q , utilizada para verificar o comportamento dos termos positivos da sequência. Assim, tem-se que:

$$Q^{-n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} N_{-n+1} & N_{-n-1} & N_{-n} \\ N_{-n} & N_{-n-2} & N_{-n-1} \\ N_{-n-1} & N_{-n-3} & N_{-n-2} \end{pmatrix}.$$

Teorema 18. Para $n \in \mathbb{N}$, a matriz geradora para os quaternions de Narayana, com índice inteiro não positivo, é dada por:

$$\begin{aligned}
Q^{-n} \begin{pmatrix} QN_4 & QN_2 & QN_3 \\ QN_3 & QN_1 & QN_2 \\ QN_2 & QN_0 & QN_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} QN_4 & QN_2 & QN_3 \\ QN_3 & QN_1 & QN_2 \\ QN_2 & QN_0 & QN_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} QN_{-n+4} & QN_{-n+2} & QN_{-n+3} \\ QN_{-n+3} & QN_{-n+1} & QN_{-n+2} \\ QN_{-n+2} & QN_{-n} & QN_{-n+1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Demonstração. Pelo princípio de indução finita, podemos analisar a igualdade para $n=1$.

$$\begin{aligned}
Q^{-1} \begin{pmatrix} QN_4 & QN_2 & QN_3 \\ QN_3 & QN_1 & QN_2 \\ QN_2 & QN_0 & QN_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} QN_4 & QN_2 & QN_3 \\ QN_3 & QN_1 & QN_2 \\ QN_2 & QN_0 & QN_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} QN_3 & QN_1 & QN_2 \\ QN_2 & QN_0 & QN_1 \\ QN_4 - QN_3 & QN_2 - QN_1 & QN_3 - QN_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} QN_3 & QN_1 & QN_2 \\ QN_2 & QN_0 & QN_1 \\ QN_1 & QN_{-1} & QN_0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Assumindo que a igualdade é válida para $n=k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
Q^{-k} \begin{pmatrix} QN_4 & QN_2 & QN_3 \\ QN_3 & QN_1 & QN_2 \\ QN_2 & QN_0 & QN_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} QN_4 & QN_2 & QN_3 \\ QN_3 & QN_1 & QN_2 \\ QN_2 & QN_0 & QN_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} N_{-k+1} & N_{-k-1} & N_{-k} \\ N_{-k} & N_{-k-2} & N_{-k-1} \\ N_{-k-1} & N_{-k-3} & N_{-k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} QN_4 & QN_2 & QN_3 \\ QN_3 & QN_1 & QN_2 \\ QN_2 & QN_0 & QN_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} QN_{-k+4} & QN_{-k+2} & QN_{-k+3} \\ QN_{-k+3} & QN_{-k+1} & QN_{-k+2} \\ QN_{-k+2} & QN_{-k} & QN_{-k+1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Concluindo a demonstração, verifica-se a igualdade para $n=k+1$:

$$\begin{aligned}
Q^{-(k+1)} \begin{pmatrix} QN_4 & QN_2 & QN_3 \\ QN_3 & QN_1 & QN_2 \\ QN_2 & QN_0 & QN_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} QN_4 & QN_2 & QN_3 \\ QN_3 & QN_1 & QN_2 \\ QN_2 & QN_0 & QN_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} N_{-k+1} & N_{-k-1} & N_{-k} \\ N_{-k} & N_{-k-2} & N_{-k-1} \\ N_{-k-1} & N_{-k-3} & N_{-k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} QN_4 & QN_2 & QN_3 \\ QN_3 & QN_1 & QN_2 \\ QN_2 & QN_0 & QN_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} QN_{-k+3} & QN_{-k+1} & QN_{-k+2} \\ QN_{-k+2} & QN_{-k} & QN_{-k+1} \\ QN_{-k+1} & QN_{-k-1} & QN_{-k} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Teorema 19. A soma dos n primeiros termos dos quaternions de Narayana é descrita por:

$$\sum_{r=0}^n QN_r = QN_{n-1} + QN_n + QN_{n+1} - (1 + i + 2j + 3k).$$

Demonstração. Utilizando a relação de recorrência dos quaternions de Narayana, tem-se que:

$$QN_n = QN_{n-1} + QN_{n-3}.$$

Com intuito de realizar os cancelamentos necessários utilizaremos a seguinte relação:

$$QN_{n-1} = QN_n - QN_{n-3}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
QN_0 &= QN_1 - QN_{-2} \\
QN_1 &= QN_2 - QN_{-1} \\
QN_2 &= QN_3 - QN_0 \\
QN_3 &= QN_4 - QN_1 \\
&\vdots \\
QN_{n-3} &= QN_{n-2} - QN_{n-5} \\
QN_{n-2} &= QN_{n-1} - QN_{n-4} \\
QN_{n-1} &= QN_n - QN_{n-3} \\
QN_n &= QN_{n+1} - QN_{n-2}.
\end{aligned}$$

Através de operações algébricas, podemos realizar alguns cancelamentos, obtemos:

$$\sum_{r=0}^n QN_r = QN_{n-1} + QN_n + QN_{n+1} - QN_{-2} - QN_{-1} - QN_0.$$

Considerando os valores iniciais $QN_{-2} = 1 + k$, $QN_{-1} = j + k$ e $QN_0 = i + j + k$, tem-se que:

$$\sum_{r=0}^n QN_r = QN_{n-1} + QN_n + QN_{n+1} - (1 + i + 2j + 3k).$$

3.7 Octonions de Narayana

De acordo com Conway e Smith (2003, p.8) logo após a descoberta dos Quaternions feita por Hamilton, surgiram os octonions, os quais foram desenvolvidos em 1843 por John T. Graves, um amigo de Hamilton. Em 1845, os Octonions foram redescobertos por Arthur Cayley(1821-1895) e dessa forma os octonions também são conhecidos como números de Cayley.

Oliveira (2018) destaca que os octonions, assim como os Quaternions, representam uma extensão dos números complexos bidimensionais e quando se faz esse processo de generalização e o conjunto numérico é ampliado ocorre a perda de algumas propriedades algébricas. Se consideramos os Quaternions, eles não apresentam a propriedade comutativa da multiplicação. Hamilton identificou que os octonions não são associativos na multiplicação.

De acordo com Santos (2016), os octonions representam uma extensão não associativa dos Quaternions. Todavia, eles constituem uma álgebra com oito componentes de base, formando uma divisão normada com oito componentes de base sobre $\mathbb{R}$ (OLIVEIRA, 2018). Assim, os octonions possuem 7 componentes imaginárias: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$ com $e_0^2 = e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_4^2 = e_5^2 = e_6^2 = e_7^2 = -1$. Dessa forma, podemos utilizar a seguinte notação para representar os octonions:

$$p = \sum_{s=0}^7 p_s e_s,$$

em que p_s é o coeficiente real. Assim, p pode ser escrito na forma $p = \text{Re}(p) + \text{Im}(p)$, onde

$\text{Re}(p) = p_0$ representa a parte real e, $\text{Im}(p) = \sum_{s=1}^7 p_s e_s$ representando a parte imaginária.

Definição 10. Para $n \geq 0$, os octonions de Narayana são definidos por:

$$ON_n = \sum_{s=0}^7 N_{n+s} e_s.$$

Definição 11. A fórmula de recorrência dos octonions de Narayana, é dada por:

$$ON_n = ON_{n-1} + ON_{n-3}.$$

Com $n \geq 3$.

Teorema 20. A Função geradora dos Octonions de Narayana, ON_n , é dada por:

$$g(ON_n, x) = \frac{x + e_1 + (1 + x^2)e_2 + (1 + x + x^2)e_3 + (2 + x + x^2)e_4 + (3 + x + 2x^2)e_5 + (4 + 2x + 3x^2)e_6 + (6 + 3x + 4x^2)e_7}{1 - x - x^3}$$

Demonstração. Seja $g(ON_n, x) = \sum_{n \geq 0} ON_n x^n = ON_0 + ON_1 x^1 + ON_2 x^2 + ON_3 x^3 + \dots + ON_n x^n$.

Multiplicamos a função $g(ON_n, x)$ por x e x^3 , respectivamente, obtemos:

$$\begin{aligned} g(ON_n, x) &= ON_0 + ON_1 x^1 + ON_2 x^2 + ON_3 x^3 + \dots + ON_n x^n \\ xg(ON_n, x) &= ON_0 x + ON_1 x^2 + ON_2 x^3 + ON_3 x^4 + \dots + ON_{n-1} x^n \\ x^3 g(ON_n, x) &= ON_0 x^3 + ON_1 x^4 + ON_2 x^5 + ON_3 x^6 + \dots + ON_{n-3} x^n \end{aligned}$$

Subtraindo as equações acima temos que:

$$(1 - x - x^3)g(ON_n, x) = ON_0 + (ON_1 - ON_0)x + (ON_2 - ON_1)x^2 + \dots + (ON_n - ON_{n-1} - ON_{n-3})x^n.$$

E lembrando que $ON_n - ON_{n-1} - ON_{n-3} = 0$.

Tem-se que:

$$g(ON_n, x) = \frac{ON_0 + (ON_1 - ON_0)x + (ON_2 - ON_1)x^2}{1 - x - x^3}.$$

Considerando os valores iniciais: $ON_0 = e_1 + e_2 + e_3 + 2e_4 + 3e_5 + 4e_6 + 6e_7$,

$ON_1 = e_0 + e_1 + e_2 + 2e_3 + 3e_4 + 4e_5 + 6e_6 + 9e_7$ e $ON_2 = e_0 + e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4 + 6e_5 + 9e_6 + 13e_7$

Tem-se que:

$$g(ON_n, x) = \frac{x + e_1 + (1 + x^2)e_2 + (1 + x + x^2)e_3 + (2 + x + x^2)e_4 + (3 + x + 2x^2)e_5 + (4 + 2x + 3x^2)e_6 + (6 + 3x + 4x^2)e_7}{1 - x - x^3}$$

Para analisar a matriz geradora dos octonions de Narayana, será utilizada a matriz geradora, com $n \in \mathbb{N}$:

$$Q^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} N_{n+1} & N_{n-1} & N_n \\ N_n & N_{n-2} & N_{n-1} \\ N_{n-1} & N_{n-3} & N_{n-2} \end{pmatrix}, \text{ para todo } n \geq 3.$$

Teorema 21. Para $n \geq 1$, a matriz geradora dos octonions de Narayana é dada por:

$$\begin{aligned} Q^n \begin{pmatrix} ON_1 & ON_{-1} & ON_0 \\ ON_0 & ON_{-2} & ON_{-1} \\ ON_{-1} & ON_{-3} & ON_{-2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} ON_1 & ON_{-1} & ON_0 \\ ON_0 & ON_{-2} & ON_{-1} \\ ON_{-1} & ON_{-3} & ON_{-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ON_{n+1} & ON_{n-1} & ON_n \\ ON_n & ON_{n-2} & ON_{n-1} \\ ON_{n-1} & ON_{n-3} & ON_{n-2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Demonstração. Pelo princípio de indução finita verifica-se que o teorema é válido para $n=1$:

$$\begin{aligned} Q \begin{pmatrix} ON_1 & ON_{-1} & ON_0 \\ ON_0 & ON_{-2} & ON_{-1} \\ ON_{-1} & ON_{-3} & ON_{-2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ON_1 & ON_{-1} & ON_0 \\ ON_0 & ON_{-2} & ON_{-1} \\ ON_{-1} & ON_{-3} & ON_{-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ON_1 + ON_{-1} & ON_{-1} + ON_{-3} & ON_0 + ON_{-2} \\ ON_1 & ON_{-1} & ON_0 \\ ON_0 & ON_{-2} & ON_{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ON_2 & ON_0 & ON_1 \\ ON_1 & ON_{-1} & ON_0 \\ ON_0 & ON_{-2} & ON_{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Supondo que a igualdade é válida para $n=k, k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} Q^k \begin{pmatrix} ON_1 & ON_{-1} & ON_0 \\ ON_0 & ON_{-2} & ON_{-1} \\ ON_{-1} & ON_{-3} & ON_{-2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} ON_1 & ON_{-1} & ON_0 \\ ON_0 & ON_{-2} & ON_{-1} \\ ON_{-1} & ON_{-3} & ON_{-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ON_{k+1} & ON_{k-1} & ON_k \\ ON_k & ON_{k-2} & ON_{k-1} \\ ON_{k-1} & ON_{k-3} & ON_{k-2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por fim, verifica-se a validade para $n=k+1$:

$$\begin{aligned}
Q^{k+1} \begin{pmatrix} ON_1 & ON_{-1} & ON_0 \\ ON_0 & ON_{-2} & ON_{-1} \\ ON_{-1} & ON_{-3} & ON_{-2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ON_1 & ON_{-1} & ON_0 \\ ON_0 & ON_{-2} & ON_{-1} \\ ON_{-1} & ON_{-3} & ON_{-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ON_{k+1} & ON_{k-1} & ON_k \\ ON_k & ON_{k-2} & ON_{k-1} \\ ON_{k-1} & ON_{k-3} & ON_{k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ON_{k+1} + ON_{k-1} & ON_k & ON_{k+1} \\ ON_k + ON_{k-2} & ON_{k-1} & ON_k \\ ON_{k-1} + ON_{k-3} & ON_{k-2} & ON_{k-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ON_{k+2} & ON_k & ON_{k+1} \\ ON_{k+1} & ON_{k-1} & ON_k \\ ON_k & ON_{k-2} & ON_{k-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Teorema 22. A soma dos n termos formados pelos Octonions de Narayana é:

$$\sum_{r=0}^n ON_r = ON_{n-1} + ON_n + ON_{n+1} - \left(\sum_{s=0}^7 (N_{s-2} + N_{s-1} + N_s) \right).$$

Demonstração. Utilizando a Definição 11, pode-se obter a relação:

$$ON_{n-1} = ON_n - ON_{n-3}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
ON_0 &= ON_1 - ON_{-2} \\
ON_1 &= ON_2 - ON_{-1} \\
ON_2 &= ON_3 - ON_0 \\
ON_3 &= ON_4 - ON_1 \\
&\vdots \\
ON_{n-3} &= ON_{n-2} - ON_{n-5} \\
ON_{n-2} &= ON_{n-1} - ON_{n-4} \\
ON_{n-1} &= ON_n - ON_{n-3} \\
ON_n &= ON_{n+1} - ON_{n-2}
\end{aligned}$$

Realizando os devidos cancelamentos, tem-se que:

$$\sum_{r=0}^n ON_r = ON_{n-1} + ON_n + ON_{n+1} - ON_{-2} - ON_{-1} - ON_0.$$

Logo,

$$\sum_{r=0}^n ON_r = ON_{n-1} + ON_n + ON_{n+1} - \left(\sum_{s=0}^7 (N_{s-2} + N_{s-1} + N_s) \right).$$

A seguir, será analisado o comportamento dos termos com índices inteiros não positivos dos octonions de Narayana.

Definição 12. Para todo $n \in \mathbb{N}$, a fórmula de recorrência dos octonions de Narayana para índice inteiro não positivo, é dada por:

$$ON_{-n} = ON_{-n+3} - ON_{-n+2}.$$

Definição 13. Para todo $n \in \mathbb{N}$, o octonion de Narayana, para índice inteiro não positivo, é definido pela equação:

$$ON_{-n} = \sum_{s=0}^7 N_{-n+s} e_s.$$

Para analisar a matriz geradora Q dos octonions de Narayana para índice inteiro não positivo, calcula-se a inversa da matriz Q , que é a matriz geradora para sequência de Narayana para índices inteiros positivos. Assim, tem-se que:

$$Q^{-n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} N_{-n} & N_{-n-2} & N_{-n-1} \\ N_{-n-1} & N_{-n-3} & N_{-n-2} \\ N_{-n-2} & N_{-n-4} & N_{-n-3} \end{pmatrix}.$$

Teorema 23. Para $n \in \mathbb{N}$, a matriz geradora dos octonions de Narayana, com índice inteiro não positivo, é dada por:

$$\begin{aligned} Q^{-n} \begin{pmatrix} ON_1 & ON_{-1} & ON_0 \\ ON_0 & ON_{-2} & ON_{-1} \\ ON_{-1} & ON_{-3} & ON_{-2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} ON_1 & ON_{-1} & ON_0 \\ ON_0 & ON_{-2} & ON_{-1} \\ ON_{-1} & ON_{-3} & ON_{-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ON_{-n+1} & ON_{-n-1} & ON_{-n} \\ ON_{-n} & ON_{-n-2} & ON_{-n-1} \\ ON_{-n-1} & ON_{-n-3} & ON_{-n-2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Demonstração. Pelo princípio de indução finita verificamos a igualdade para $n=1$:

$$\begin{aligned}
Q^{-1} \begin{pmatrix} ON_1 & ON_{-1} & ON_0 \\ ON_0 & ON_{-2} & ON_{-1} \\ ON_{-1} & ON_{-3} & ON_{-2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ON_1 & ON_{-1} & ON_0 \\ ON_0 & ON_{-2} & ON_{-1} \\ ON_{-1} & ON_{-3} & ON_{-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ON_0 & ON_{-2} & ON_{-1} \\ ON_{-1} & ON_{-3} & ON_{-2} \\ ON_1 - ON_0 & ON_{-1} - ON_{-2} & ON_0 - ON_{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ON_0 & ON_{-2} & ON_{-1} \\ ON_{-1} & ON_{-3} & ON_{-2} \\ ON_{-2} & ON_{-4} & ON_{-3} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Supondo que é válido para $n = k, k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
Q^{-k} \begin{pmatrix} ON_1 & ON_{-1} & ON_0 \\ ON_0 & ON_{-2} & ON_{-1} \\ ON_{-1} & ON_{-3} & ON_{-2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} ON_1 & ON_{-1} & ON_0 \\ ON_0 & ON_{-2} & ON_{-1} \\ ON_{-1} & ON_{-3} & ON_{-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} N_{-k} & N_{-k-2} & N_{-k} \\ N_{-k-1} & N_{-k-3} & N_{-k-1} \\ N_{-k-2} & N_{-k-3} & N_{-k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ON_1 & ON_{-1} & ON_0 \\ ON_0 & ON_{-2} & ON_{-1} \\ ON_{-1} & ON_{-3} & ON_{-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ON_{-k+1} & ON_{-k-1} & ON_{-k-1} \\ ON_{-k} & ON_{-k-2} & ON_{-k-2} \\ ON_{-k-1} & ON_{-k-3} & ON_{-k-3} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Assim, verificando se é válido para $n = k + 1$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
Q^{-(k+1)} \begin{pmatrix} ON_1 & ON_{-1} & ON_0 \\ ON_0 & ON_{-2} & ON_{-1} \\ ON_{-1} & ON_{-3} & ON_{-2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ON_1 & ON_{-1} & ON_0 \\ ON_0 & ON_{-2} & ON_{-1} \\ ON_{-1} & ON_{-3} & ON_{-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ON_{-k+1} & ON_{-k-1} & ON_{-k} \\ ON_{-k} & ON_{-k-2} & ON_{-k-1} \\ ON_{-k-1} & ON_{-k-3} & ON_{-k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ON_{-k} & ON_{-k+1} - ON_{-k} & ON_{-k-1} \\ ON_{-k-1} & ON_{-k} - ON_{-k-1} & ON_{-k-2} \\ ON_{-k-2} & ON_{-k-1} - ON_{-k-2} & ON_{-k-3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ON_{-k} & ON_{-k-2} & ON_{-k-1} \\ ON_{-k-1} & ON_{-k-3} & ON_{-k-2} \\ ON_{-k-2} & ON_{-k-4} & ON_{-k-3} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Teorema 24. A soma dos n primeiros termos com índice inteiro não positivo dos octonions de Narayana, é dada por:

$$\sum_{r=1}^n ON_{-r} = ON_{-n+3} - ON_{-n} + ON_2.$$

Demonstração. Utilizando a relação de recorrência dos quaternions de Narayana, com índices inteiros não positivos, tem-se que:

$$ON_{-n} = ON_{-n+3} - ON_{-n+2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} ON_{-1} &= ON_2 - ON_1 \\ ON_{-2} &= ON_1 - ON_0 \\ ON_{-3} &= ON_0 - ON_{-1} \\ ON_{-4} &= ON_{-1} - ON_{-2} \\ &\vdots \\ ON_{-n-3} &= ON_{-n} - ON_{-n-1} \\ ON_{-n-2} &= ON_{-n+1} - ON_{-n} \\ ON_{-n-1} &= ON_{-n+2} - ON_{-n+1} \\ ON_{-n} &= ON_{-n+3} - ON_{-n+2} \end{aligned}$$

Realizando os cancelamentos sucessivos, tem-se que:

$$\sum_{r=1}^n ON_{-r} = ON_{-n+3} + ON_2.$$

Considerando a definição 12, conclui-se que:

$$\sum_{r=1}^n ON_{-r} = ON_{-n+2} + ON_{-n} + ON_2.$$

3.8 Sedenions de Narayana

De acordo com Bilgici, Tokeser e Unal (2017) uma Álgebra de Sedenions, denotada por S é uma Álgebra de dimensão 16, desenvolvida por Cauley Dicson. Se considerarmos a base formada por seus elementos $\{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \dots, e_{15}\}$ em que e_0 é o elemento unitário e $e_0, e_1, e_2, \dots, e_{15}$ são as unidades imaginárias um sedenion pode ser descrito por:

$$S = \sum_{i=0}^{15} a_i e_i,$$

onde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{15} \in \mathbb{R}$.

A tabela 3 descreve as operações formais de multiplicação para os elementos da base S indicada por $\{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \dots, e_{15}\}$.

Tabela 2- Tabela de multiplicação dos Sedenions de base S .

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	-0	3	-2	5	-4	-7	6	9	-8	-11	10	-13	12	15	-14
2	2	-3	-0	1	6	7	-4	-5	10	11	-8	-9	-14	-15	12	13
3	3	2	-1	-0	7	-6	5	-4	11	-10	9	-8	-15	14	-13	12
4	4	-5	-6	-7	-0	1	2	3	12	13	14	15	-8	-9	-10	-11
5	5	4	-7	6	-1	-0	-3	2	13	-12	15	-14	9	-8	11	-10
6	6	7	4	-5	-2	3	-0	-1	14	-15	-12	13	10	-11	-8	9
7	7	-6	5	4	-3	-2	1	-0	15	14	-13	-12	11	10	-9	-8
8	8	-9	-10	-11	-12	-13	-14	-15	-0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	8	-11	10	-13	12	15	-14	-1	-0	-3	2	-5	4	7	-6
10	10	11	8	-9	-14	-15	12	13	-2	3	-0	-1	-6	-7	4	5
11	11	-10	9	8	-15	14	-13	12	-3	-2	1	-0	-7	6	-5	4
12	12	13	14	15	8	-9	-10	-11	-4	5	6	7	-0	-1	-2	-3
13	13	-12	15	-14	9	8	11	-10	-5	-4	7	-6	1	-0	3	-2
14	14	-15	-12	13	10	-11	8	9	-6	-7	-4	5	2	-3	-0	1
15	15	14	-13	-12	11	10	-9	8	-7	6	-5	-4	3	2	-1	-0

Fonte: Bilgici (2017)

Definição 14. Para $n \geq 0$, os sedenions de Narayana são definidos por:

$$SN_n = \sum_{s=0}^{15} N_{n+s} e_s.$$

Definição 15. A fórmula de recorrência dos sedenions de Narayana é dada por:

$$SN_n = SN_{n-1} + SN_{n-3}.$$

Teorema 25. A função geradora dos sedenions de Narayana, SN_n , é dada por:

$$g(SN_n, x) = \frac{1}{1-x-x^3} \sum_{s=0}^{15} (N_s + N_{s-2}x + N_{s-1}x^2)e_s.$$

Demonstração. Dada a função:

$$g(SN_n, x) = SN_0 + SN_1x + SN_2x^2 + \dots + SN_nx^n.$$

Realizando a multiplicação por x e x^3 , respectivamente, obtemos:

$$\begin{aligned} g(SN_n, x) &= SN_0 + SN_1x + SN_2x^2 + \dots + SN_nx^n \\ xg(SN_n, x) &= SN_0x + SN_1x^2 + SN_2x^3 + \dots + SN_{n-1}x^n \\ x^3g(SN_n, x) &= SN_0x^3 + SN_1x^4 + SN_2x^5 + \dots + SN_{n-3}x^n \end{aligned}$$

Com base na equação $g(SN_n, x) - xg(SN_n, x) - x^3g(SN_n, x)$, tem-se que:

$$(1-x-x^3)g(SN_n, x) = SN_0 + (SN_1 - SN_0)x + (SN_2 - SN_1)x^2 + \dots + (SN_n - SN_{n-1} - SN_{n-3})x^n$$

$$(1-x-x^3)g(SN_n, x) = SN_0 + (SN_1 - SN_0)x + (SN_2 - SN_1)x^2.$$

Logo,

$$g(SN_n, x) = \frac{1}{1-x-x^3} \sum_{s=0}^{15} (N_s + N_{s-2}x + N_{s-1}x^2)e_s.$$

A matriz geradora para os sedenions de Narayana, será estudada com base na matriz geradora para a sequência de Narayana, definida por:

$$Q^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} N_{n+1} & N_{n-1} & N_n \\ N_n & N_{n-2} & N_{n-1} \\ N_{n-1} & N_{n-3} & N_{n-2} \end{pmatrix}, n \geq 3.$$

Teorema 26. Para $n \geq 1$, a matriz geradora dos sedenions de Narayana é dada por:

$$\begin{aligned} Q^n \begin{pmatrix} SN_1 & SN_{-1} & SN_0 \\ SN_0 & SN_{-2} & SN_{-1} \\ SN_{-1} & SN_{-3} & SN_{-2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} SN_1 & SN_{-1} & SN_0 \\ SN_0 & SN_{-2} & SN_{-1} \\ SN_{-1} & SN_{-3} & SN_{-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} SN_{n+1} & SN_{n-1} & SN_n \\ SN_n & SN_{n-2} & SN_{n-1} \\ SN_{n-1} & SN_{n-3} & SN_{n-2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Demonstração. Pelo princípio de indução finita verifica-se que o teorema é válido para $n=1$:

$$\begin{aligned}
Q \begin{pmatrix} SN_1 & SN_{-1} & SN_0 \\ SN_0 & SN_{-2} & SN_{-1} \\ SN_{-1} & SN_{-3} & SN_{-2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} SN_1 & SN_{-1} & SN_0 \\ SN_0 & SN_{-2} & SN_{-1} \\ SN_{-1} & SN_{-3} & SN_{-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} SN_1 + SN_{-1} & SN_{-1} + SN_{-3} & SN_0 + SN_{-2} \\ SN_1 & SN_{-1} & SN_0 \\ SN_0 & SN_{-2} & SN_{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} SN_2 & SN_0 & SN_1 \\ SN_1 & SN_{-1} & SN_0 \\ SN_0 & SN_{-2} & SN_{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Supondo que a igualdade seja válida para $n = k, k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
Q^k \begin{pmatrix} SN_1 & SN_{-1} & SN_0 \\ SN_0 & SN_{-2} & SN_{-1} \\ SN_{-1} & SN_{-3} & SN_{-2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} SN_1 & SN_{-1} & SN_0 \\ SN_0 & SN_{-2} & SN_{-1} \\ SN_{-1} & SN_{-3} & SN_{-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} SN_{k+1} & SN_{k-1} & SN_k \\ SN_k & SN_{k-2} & SN_{k-1} \\ SN_{k-1} & SN_{k-3} & SN_{k-2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Por fim, verifica-se a igualdade para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}
Q^{k+1} \begin{pmatrix} SN_1 & SN_{-1} & SN_0 \\ SN_0 & SN_{-2} & SN_{-1} \\ SN_{-1} & SN_{-3} & SN_{-2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} SN_1 & SN_{-1} & SN_0 \\ SN_0 & SN_{-2} & SN_{-1} \\ SN_{-1} & SN_{-3} & SN_{-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} SN_{k+1} & SN_{k-1} & SN_k \\ SN_k & SN_{k-2} & SN_{k-1} \\ SN_{k-1} & SN_{k-3} & SN_{k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} SN_{k+1} + SN_{k-1} & SN_k & SN_{k+1} \\ SN_k + SN_{k-2} & SN_{k-1} & SN_k \\ SN_{k-1} + SN_{k-3} & SN_{k-2} & SN_{k-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Teorema 27. A soma dos n primeiros termos formados pelos sedenions de Narayana é dada por:

$$\sum_{r=0}^n SN_r = SN_{n-1} + SN_n + SN_{n+1} - \sum_{s=0}^{15} (N_{s-2} + N_{s-1} + N_s) e_s.$$

Demonstração. Utilizando a relação de recorrência dos sedenions de Narayana, tem-se que:

$$SN_n = SN_{n-1} + SN_{n-3}.$$

Com o intuito de realizar os cancelamentos necessários utilizaremos a seguinte relação:

$$SN_{n-1} = SN_n - SN_{n-3}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 SN_0 &= SN_1 - SN_{-2} \\
 SN_1 &= SN_2 - SN_{-1} \\
 SN_2 &= SN_3 - SN_0 \\
 SN_3 &= SN_4 - SN_1 \\
 &\vdots \\
 SN_{n-3} &= SN_{n-2} - SN_{n-5} \\
 SN_{n-2} &= SN_{n-1} - SN_{n-4} \\
 SN_{n-1} &= SN_n - SN_{n-3} \\
 SN_n &= SN_{n+1} - SN_{n-2}.
 \end{aligned}$$

Através de operações algébricas, podemos realizar alguns cancelamentos, obtendo:

$$\sum_{r=0}^n SN_r = SN_{n-1} + SN_n + SN_{n+1} - SN_{-2} - SN_{-1} - SN_0.$$

Logo,

$$\sum_{r=0}^n SN_r = SN_{n-1} + SN_n + SN_{n+1} - \sum_{s=0}^{15} (N_{s-2} + N_{s-1} + N_s) e_s.$$

A seguir, será analisado o comportamento dos termos com índices inteiros não positivos para os sedenions de Narayana.

Definição 16. Para todo $n \in \mathbb{N}$, a fórmula de recorrência dos sedenions de Narayana para índice inteiro não positivo é dada por:

$$SN_{-n} = SN_{-n+3} - SN_{-n+2}.$$

Definição 17. Para todo $n \in \mathbb{N}$, o sedenion de Narayana, para índice inteiro não positivo, é definido pela equação:

$$SN_{-n} = \sum_{s=0}^{15} N_{-n+s} e_s.$$

Teorema 28. Os sedenions de Narayana, para índice inteiro não positivo, é dada por:

$$g(SN_{-n}, x) = \frac{-\left(\sum_{s=0}^{15} N_s e_s\right) - \left(\sum_{s=0}^{15} N_{s-1} e_s\right) x - \left(\sum_{s=0}^{15} (N_s + N_{s-2})\right) x^2}{x^3 - x^2 - 1}.$$

Demonstração. Seja $g(SN_{-n}, x) = \sum_{n=0}^{\infty} SN_{-n} x^n = SN_0 + SN_{-1} x + SN_{-2} x^2 + \dots + SN_{-n} x^n$.

Multiplicando a função $g(SN_{-n}, x)$ por x^2 e x^3 , respectivamente, tem-se que:

$$\begin{aligned}
g(SN_{-n}, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} SN_{-n} x^n = SN_0 + SN_{-1}x + SN_{-2}x^2 + \dots + SN_{-n}x^n \\
x^2 g(SN_{-n}, x) &= SN_0 x^2 + SN_{-1}x^3 + SN_{-2}x^4 + \dots + SN_{-n+2}x^n \\
x^3 g(SN_{-n}, x) &= SN_0 x^3 + SN_{-1}x^4 + SN_{-2}x^5 + \dots + SN_{-n+3}x^n
\end{aligned}$$

Com base na equação $x^3 g(SN_{-n}, x) - x^2 g(SN_{-n}, x) - g(SN_{-n}, x)$, tem-se que:

$$(x^3 - x^2 - 1)g(SN_{-n}, x) = -SN_0 - SN_{-1}x - (SN_0 - SN_{-2})x^2.$$

Logo,

$$g(SN_{-n}, x) = \frac{-\left(\sum_{s=0}^{15} N_s e_s\right) - \left(\sum_{s=0}^{15} N_{s-1} e_s\right)x - \left(\sum_{s=0}^{15} (N_s + N_{s-2})\right)x^2}{x^3 - x^2 - 1}.$$

A matriz geradora Q dos sedenions de Narayana para índice inteiro não positivo, pode ser analisada calculando a inversa da matriz Q , utilizada para verificar o comportamento dos termos positivos da sequência. Assim, tem-se que:

$$Q^{-n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} N_{-n+1} & N_{-n-1} & N_{-n} \\ N_{-n} & N_{-n-2} & N_{-n-1} \\ N_{-n-1} & N_{-n-3} & N_{-n-2} \end{pmatrix}.$$

Teorema 29. Para $n \in \mathbb{N}$, a matriz geradora para os sedenions de Narayana, com índice inteiro não positivo, é dada por:

$$\begin{aligned}
Q^{-n} \begin{pmatrix} SN_1 & SN_{-1} & SN_0 \\ SN_0 & SN_{-2} & SN_{-1} \\ SN_{-1} & SN_{-3} & SN_{-2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} SN_1 & SN_{-1} & SN_0 \\ SN_0 & SN_{-2} & SN_{-1} \\ SN_{-1} & SN_{-3} & SN_{-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} SN_{-n+1} & SN_{-n-1} & SN_{-n} \\ SN_{-n} & SN_{-n-2} & SN_{-n-1} \\ SN_{-n-1} & SN_{-n-3} & SN_{-n-2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Demonstração. Pelo princípio de indução finita verificamos a igualdade para $n=1$:

$$\begin{aligned}
Q^{-1} \begin{pmatrix} SN_1 & SN_{-1} & SN_0 \\ SN_0 & SN_{-2} & SN_{-1} \\ SN_{-1} & SN_{-3} & SN_{-2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} SN_1 & SN_{-1} & SN_0 \\ SN_0 & SN_{-2} & SN_{-1} \\ SN_{-1} & SN_{-3} & SN_{-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} SN_0 & SN_{-2} & SN_{-1} \\ SN_{-1} & SN_{-3} & SN_{-2} \\ SN_1 - SN_0 & SN_{-1} - SN_{-2} & SN_0 - SN_{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} SN_0 & SN_{-2} & SN_{-1} \\ SN_{-1} & SN_{-3} & SN_{-2} \\ SN_{-2} & SN_{-4} & SN_{-3} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Supondo que é válida para $n = k, k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
Q^{-k} \begin{pmatrix} SN_1 & SN_{-1} & SN_0 \\ SN_0 & SN_{-2} & SN_{-1} \\ SN_{-1} & SN_{-3} & SN_{-2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} SN_1 & SN_{-1} & SN_0 \\ SN_0 & SN_{-2} & SN_{-1} \\ SN_{-1} & SN_{-3} & SN_{-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} N_{-k} & N_{-k-2} & N_{-k} \\ N_{-k-1} & N_{-k-3} & N_{-k-1} \\ N_{-k-2} & N_{-k-4} & N_{-k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} SN_1 & SN_{-1} & SN_0 \\ SN_0 & SN_{-2} & SN_{-1} \\ SN_{-1} & SN_{-3} & SN_{-2} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} SN_{-k+1} & SN_{-k-1} & SN_{-k-1} \\ SN_{-k} & SN_{-k-2} & SN_{-k-2} \\ SN_{-k-1} & SN_{-k-3} & SN_{-k-3} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Assim, verificando se é válido para $n = k + 1$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
Q^{-(k+1)} \begin{pmatrix} SN_1 & SN_{-1} & SN_0 \\ SN_0 & SN_{-2} & SN_{-1} \\ SN_{-1} & SN_{-3} & SN_{-2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} SN_1 & SN_{-1} & SN_0 \\ SN_0 & SN_{-2} & SN_{-1} \\ SN_{-1} & SN_{-3} & SN_{-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} SN_{-k+1} & SN_{-k-1} & SN_{-k} \\ SN_{-k} & SN_{-k-2} & SN_{-k-1} \\ SN_{-k-1} & SN_{-k-3} & SN_{-k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} SN_{-k} & SN_{-k+1} - SN_{-k} & SN_{-k-1} \\ SN_{-k-1} & SN_{-k} - SN_{-k-1} & SN_{-k-2} \\ SN_{-k-2} & SN_{-k-1} - SN_{-k-2} & SN_{-k-3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} SN_{-k} & SN_{-k-2} & SN_{-k-1} \\ SN_{-k-1} & SN_{-k-3} & SN_{-k-2} \\ SN_{-k-2} & SN_{-k-4} & SN_{-k-3} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3.9 Sequência Generalizada de Narayana

No trabalho de Ramirez e Sirven (2015) encontramos a generalização da sequência de Narayana que pode ser definida da seguinte forma:

Definição 18. Dado um inteiro k não nulo e denotando o conjunto dos números $\{b_{k,n}\}_{n=0}^{\infty}$, com a seguinte condição particular inicial $b_{k,0} = 0$, $b_{k,1} = 1$, $b_{k,2} = k$, $n \geq 3$, definimos a seguinte recorrência:

$$b_{k,n} = kb_{k,n-1} + b_{k,n-3}.$$

Podemos observar alguns valores iniciais:

$$0, 1, k, k^2, k^3 + 1, k^4 + 2k, k^5 + 3k^2, k^6 + 4k^3 + 1, \dots$$

Em particular,

$$\{b_{1,n}\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, \dots\}$$

$$\{b_{2,n}\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 2, 4, 20, 44, 97, 214, 472, \dots\}$$

$$\{b_{3,n}\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 3, 9, 28, 87, 270, 838, 2601, \dots\}$$

$$\{b_{-1,n}\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, -1, 1, 0, -1, 2, 1, -3, 0, 4, \dots\}$$

Definição 19. A sequência generalizada de Narayana para índices inteiros não positivos é dada por:

$$b_{k,-n} = b_{k,-n+3} - kb_{k,-n+2}, n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 30. A função geradora para a sequência generalizada de Narayana é dada por:

$$g(b_{k,n}, x) = \frac{x}{1 - kx - x^3}.$$

Demonstração. Seja $g(b_{k,n}, x) = b_{k,0} + b_{k,1}x + b_{k,2}x^2 + b_{k,3}x^3 + \dots + b_{k,n}x^n$.

Multiplicando a função $g(b_{k,n}, x)$ por kx e x^3 , respectivamente, tem-se que:

$$g(b_{k,n}, x) = b_{k,0} + b_{k,1}x + b_{k,2}x^2 + b_{k,3}x^3 + \dots + b_{k,n}x^n \quad (1)$$

$$kxg(b_{k,n}, x) = kb_{k,1}x^2 + kb_{k,2}x^3 + kb_{k,3}x^4 + \dots + kb_{k,n-1}x^n \quad (2)$$

$$x^3g(b_{k,n}, x) = b_{k,1}x^4 + b_{k,2}x^5 + b_{k,3}x^6 + \dots + b_{k,n-3}x^n \quad (3)$$

De acordo com a equação (1-2-3) tem-se que:

$$(1 - kx - x^3)g(b_{k,n}, x) = b_{k,1}x + (b_{k,2} - kb_{k,1})x^2 + \dots + (b_{k,n} - kb_{k,n-1} - b_{k,n-3})x^n.$$

Considerando os valores iniciais $b_{k,1} = 1$ e $b_{k,2} = k$ e a fórmula de recorrência da sequência generalizada da sequência de Narayana pode-se obter:

$$g(b_{k,n}, x) = \frac{x}{1 - kx - x^3}.$$

3.9.1 Matriz Geradora para a k-sequência de Narayana

Ramirez e Sirven (2015) definem a seguinte matriz geradora para a sequência generalizada de Narayana:

$$Q(k) = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos analisar o comportamento das matrizes do $Q(k)^n$. Temos que:

$$\begin{aligned} Q(k)^2 &= \begin{pmatrix} k^2 & 1 & k \\ k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ Q(k)^3 &= \begin{pmatrix} k^3+1 & k & k^2 \\ k^2 & 1 & k \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ Q(k)^4 &= \begin{pmatrix} k^4+2k & k^4 & k^3+1 \\ k^3+1 & k & k^2 \\ k^2 & 1 & k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, enunciamos o seguinte Teorema:

Teorema 31. Seja $Q(k) = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. A matriz geradora para a sequência generalizada de

Narayana é dada por, com $n \geq 3$:

$$Q(k)^n = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} b_{k,n+1} & b_{k,n-1} & b_{k,n} \\ b_{k,n} & b_{k,n-2} & b_{k,n-1} \\ b_{k,n-1} & b_{k,n-3} & b_{k,n-2} \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Pelo princípio de indução finita sobre n , temos:

Para $n = 3$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
Q(k)^3 &= \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} k^3+1 & k & k^2 \\ k^2 & 1 & k \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_{k,4} & b_{k,2} & b_{k,3} \\ b_{k,3} & b_{k,1} & b_{k,2} \\ b_{k,2} & b_{k,0} & b_{k,1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Assumimos que é válido para $n = m, m \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$Q(k)^m = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} b_{k,m+1} & b_{k,m-1} & b_{k,m} \\ b_{k,m} & b_{k,m-2} & b_{k,m-1} \\ b_{k,m-1} & b_{k,m-3} & b_{k,m-2} \end{pmatrix}.$$

Devemos mostrar que é válido para $n = m+1$. Assim,

$$\begin{aligned}
Q(k)^{m+1} &= Q(k).Q(k)^m = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{k,m+1} & b_{k,m-1} & b_{k,m} \\ b_{k,m} & b_{k,m-2} & b_{k,m-1} \\ b_{k,m-1} & b_{k,m-3} & b_{k,m-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} kb_{k,m+1} + b_{k,m-1} & kb_{k,m-1} + b_{k,m-3} & kb_{k,m} + b_{k,m-2} \\ b_{k,m+1} & b_{k,m-1} & b_{k,m} \\ b_{k,m} & b_{k,m-2} & b_{k,m-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_{k,m+2} & b_{k,m} & b_{k,m+1} \\ b_{k,m+1} & b_{k,m-1} & b_{k,m} \\ b_{k,m} & b_{k,m-2} & b_{k,m-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Visando a extensão da k-sequência de Narayana para índices inteiros não positivos podemos determinar a seguinte matriz:

$$Q(k)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -k & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz é obtida através do cálculo da inversa da matriz Q , logo:

$$QQ^{-1} = I.$$

Onde I é a matriz identidade. Realizando alguns cálculos obtemos os seguintes produtos matriciais:

$$\begin{aligned}
Q(k)^{-2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & -k \end{pmatrix} \\
Q(k)^{-3} &= \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & -k \\ -k & k^2 & 1 \end{pmatrix} \\
Q(k)^{-4} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -k \\ -k & k^2 & 1 \\ 1 & -2k & k^2 \end{pmatrix} \\
Q(k)^{-5} &= \begin{pmatrix} k & k^2 & 1 \\ 1 & -2k & k^2 \\ k^2 & -k^3 + 1 & -2k \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Assim, enunciamos o seguinte teorema:

Teorema 32. Seja $Q(k)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -k & 0 \end{pmatrix}$, então a matriz geradora da sequência generalizada

de Narayana para índices inteiros não positivos, com $n \in \mathbb{N}$, é dada por:

$$Q(k)^{-n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -k & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} b_{k,-n+1} & b_{k,-n-1} & b_{k,-n} \\ b_{k,-n} & b_{k,-n-2} & b_{k,-n-1} \\ b_{k,-n-1} & b_{k,-n-3} & b_{k,-n-2} \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Pelo princípio de indução finita sobre n , temos:

Para $n=1$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
Q(k)^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -k & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_{k,0} & b_{k,-2} & b_{k,-1} \\ b_{k,-1} & b_{k,-3} & b_{k,-2} \\ b_{k,-2} & b_{k,-4} & b_{k,-3} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Assumindo que seja verdade para $n=m$, com $m \in \mathbb{N}$ tem-se que:

$$Q(k)^{-m} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -k & 0 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} b_{k,-m+1} & b_{k,-m-1} & b_{k,-m} \\ b_{k,-m} & b_{k,-m-2} & b_{k,-m-1} \\ b_{k,-m-1} & b_{k,-m-3} & b_{k,-m-2} \end{pmatrix}.$$

Devemos mostrar que é válido para $n=m+1$. Logo,

$$\begin{aligned}
Q(k)^{-(m+1)} &= Q(k)^{-m} \cdot Q(k)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} b_{k,-m+1} & b_{k,-m-1} & b_{k,-m} \\ b_{k,-m} & b_{k,-m-2} & b_{k,-m-1} \\ b_{k,-m-1} & b_{k,-m-3} & b_{k,-m-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -k & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_{k,-m} & b_{k,-m+1} - kb_{k,-m} & b_{k,-m-1} \\ b_{k,-m-1} & b_{k,-m} - kb_{k,-m-1} & b_{k,-m-2} \\ b_{k,-m-2} & b_{k,-m-1} - kb_{k,-m-2} & b_{k,-m-3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_{k,-m} & b_{k,-m-2} & b_{k,-m-1} \\ b_{k,-m-1} & b_{k,-m-3} & b_{k,-m-2} \\ b_{k,-m-2} & b_{k,-m-4} & b_{k,-m-3} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3.9.2 Soma dos n-primeiros termos da sequência k-Narayana

Ramirez e Sirven (2015, p.95) definem ainda uma outra matriz:

$$A(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A idéia consiste em explorar propriedades matriciais com a seguinte somatória:

$$S_{k,n} = \sum_{i=1}^n b_{k,i}, n \geq 1 \text{ e } S_{k,0} = 0.$$

Importante destacar que essa somatória representa a soma dos n-primeiros termos da k-sequência de Narayana. Apresentamos o seguinte teorema:

Teorema 33. Seja $A(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, então a matriz geradora da soma dos n-primeiros

termos da sequência generalizada de Narayana é dada por:

$$A(k)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ S_{k,n+1} & b_{k,n+2} & b_{k,n} & b_{k,n+1} \\ S_{k,n} & b_{k,n+1} & b_{k,n-1} & b_{k,n} \\ S_{k,n-1} & b_{k,n} & b_{k,n-2} & b_{k,n-1} \end{pmatrix}, n \geq 2.$$

Demonstração. Pelo princípio de indução finita sobre n temos que:

Para $n = 2$, tem-se que:

$$A(k)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1+k & k^2 & 1 & k \\ 1 & k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ S_{k,3} & b_{k,4} & b_{k,2} & b_{k,3} \\ S_{k,2} & b_{k,3} & b_{k,1} & b_{k,2} \\ S_{k,1} & b_{k,2} & b_{k,0} & b_{k,1} \end{pmatrix}.$$

Assumindo a igualdade para $n = m, m \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$A(k)^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ S_{k,m+1} & b_{k,m+2} & b_{k,m} & b_{k,m+1} \\ S_{k,m} & b_{k,m+1} & b_{k,m-1} & b_{k,m} \\ S_{k,m-1} & b_{k,m} & b_{k,m-2} & b_{k,m-1} \end{pmatrix}.$$

Devemos mostrar que é válido para $n = m+1$.

Assim,

$$\begin{aligned} A(k)^{m+1} &= A(k)^m A(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ S_{k,m+1} & b_{k,m+2} & b_{k,m} & b_{k,m+1} \\ S_{k,m} & b_{k,m+1} & b_{k,m-1} & b_{k,m} \\ S_{k,m-1} & b_{k,m} & b_{k,m-2} & b_{k,m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1+kS_{k,m+1}+S_{k,m-1} & kb_{k,m+2}+b_{k,m} & kb_{k,m}+b_{k,m-2} & kb_{k,m+1}+b_{k,m-1} \\ S_{k,m+1} & b_{k,m+2} & b_{k,m} & b_{k,m+1} \\ S_{k,m} & b_{k,m+1} & b_{k,m-1} & b_{k,m} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ S_{k,m+2} & b_{k,m+3} & b_{k,m+1} & b_{k,m+2} \\ S_{k,m+1} & b_{k,m+2} & b_{k,m} & b_{k,m+1} \\ S_{k,m} & b_{k,m+1} & b_{k,m-1} & b_{k,m} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por conseguinte, visando a expansão e descrição da k -seqüência de Narayana para os correspondentes índices inteiros, determinamos a matriz $A(k)^{-1}$ que pode ser encontrada através do cálculo da inversa matriz $A(k)$, ou seja:

$$A(k)A(k)^{-1} = I,$$

onde I é a matriz identidade de ordem 4. Logo,

$$A(k)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -k & 0 \end{pmatrix}.$$

Teorema 34. Seja $A(k)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -k & 0 \end{pmatrix}$, então a matriz geradora da soma dos n-

primeiros termos da k-sequência de Narayana para índices inteiros não positivos é dada por:

$$A(k)^{-n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -k & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ S_{k,-n+1} & b_{k,-n+2} & b_{k,-n} & b_{k,-n+1} \\ S_{k,-n} & b_{k,-n+1} & b_{k,-n-1} & b_{k,-n} \\ S_{k,-n-1} & b_{k,-n} & b_{k,-n-2} & b_{k,-n-1} \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Usando o princípio de indução finita sobre n , tem-se que:

Para $n=1$, tem-se que:

$$A(k)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ S_{k,0} & b_{k,1} & b_{k,-1} & b_{k,0} \\ S_{k,-1} & b_{k,0} & b_{k,-2} & b_{k,-1} \\ S_{k,-2} & b_{k,-1} & b_{k,-3} & b_{k,-2} \end{pmatrix}.$$

Assumindo a igualdade para $n = m, m \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$A(k)^{-n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -k & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ S_{k,-n+1} & b_{k,-n+2} & b_{k,-n} & b_{k,-n+1} \\ S_{k,-n} & b_{k,-n+1} & b_{k,-n-1} & b_{k,-n} \\ S_{k,-n-1} & b_{k,-n} & b_{k,-n-2} & b_{k,-n-1} \end{pmatrix}.$$

Devemos mostrar que a igualdade é válida para $n = m+1$. Assim,

$$\begin{aligned}
A(k)^{-(m+1)} &= A(k)^{-m} A(k)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -k & 0 \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -k & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ S_{k,-m+1} & b_{k,-m+2} & b_{k,-m} & b_{k,-m+1} \\ S_{k,-m} & b_{k,-m+1} & b_{k,-m-1} & b_{k,-m} \\ S_{k,-m-1} & b_{k,-m} & b_{k,-m-2} & b_{k,-m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -k & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ S_{k,-m+1} - b_{k,-m+1} & b_{k,-m+1} & b_{k,-m+2} - kb_{k,-m+1} & b_{k,-m} \\ S_{k,-m} - b_{k,-m} & b_{k,-m} & b_{k,-m+1} - kb_{k,-m} & b_{k,-m-1} \\ S_{k,-m-1} - b_{k,-m-1} & b_{k,-m-1} & b_{k,-m} - kb_{k,-m-1} & b_{k,-m-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ S_{k,-m} & b_{k,-m+1} & b_{k,-m-1} & b_{k,-m} \\ S_{k,-m-1} & b_{k,-m} & b_{k,-m-2} & b_{k,-m-1} \\ S_{k,-m-2} & b_{k,-m-1} & b_{k,-m-3} & b_{k,-m-2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Na próxima seção falaremos sobre os números de Narayana. Apesar de suscitar por vezes uma falsa compreensão de que se trata do mesmo matemático, os elementos históricos mais recentes, apontados no próximo tópico devem nos orientar para a compreensão de que de fato tratam-se de dois matemáticos indianos distintos.

3.10 Os números de Narayana

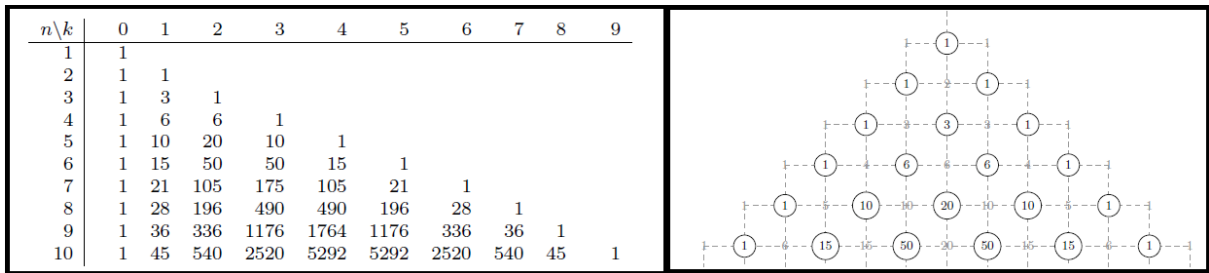
De acordo com Stanley (2015, p.62) os números de Narayana foram descobertos pelo matemático britânico Percy Alexander MacMahon (1854-1929). Estes números foram redescobertos por Tadepalli Venkata Narayana (1930-1987). Segundo Petersen (2015) os números Eulerianos são definidos a partir de íntimas relações com os números de Narayana, por meio de interpretação combinatória. Por outro lado, podemos perceber também, intrínsecas interrelações dos números de Narayana com os números de Catalan.

Definição 20: Para os inteiros $0 \leq k \leq n$, os números de Narayana são dados pela seguinte

fórmula: $N(n, k) = N_{n,k} = \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \binom{n-1}{k}$, onde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ é o conhecido coeficiente

binomial.

Figura 4-Interpretação combinatória para os números de Narayana.



Fonte: Petersen (2015, p. 209)

Grimaldi (2012) fornece uma definição equivalente para os números de Narayana:

Definição 21. Para os inteiros $n \geq k \geq 1$, os números de Narayana são definidos pela seguinte fórmula:

$$N(n, k) = \frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k-1},$$

onde, $N(0, 0) = 1$ e $N(n, 0) = 0$, para $n \geq 1$.

3.10.1 Interpretação combinatória dos números de Narayana

Nesta seção daremos algumas interpretações combinatórias para os números de Narayana tendo por base o trabalho de Bezerra e Alves (2020). Uma importante propriedade desses números é que estão relacionados com os números de Catalan, conforme podemos observar na tabela 3, onde podemos observar alguns valores para $N(n, k)$.

Tabela 3- Valores de $N_{n,k}$ para $1 \leq k \leq n \leq 7$.

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	Row Sum
1	1							1
2	1	1						2
3	1	3	1					5
4	1	6	6	1				14
5	1	10	20	10	1			42
6	1	15	50	50	15	1		132
7	1	21	105	175	105	21	1	429

Fonte: Grimaldi (2012, p. 268)

Observando a última coluna da tabela 3 podemos estabelecer a seguinte identidade:

$$N(n,1) + N(n,2) + N(n,3) + \dots + N(n,n) = \sum_{k=1}^n N_{n,k} = C_n, n \geq 1.$$

onde C_n é conhecido como o número de Catalan.

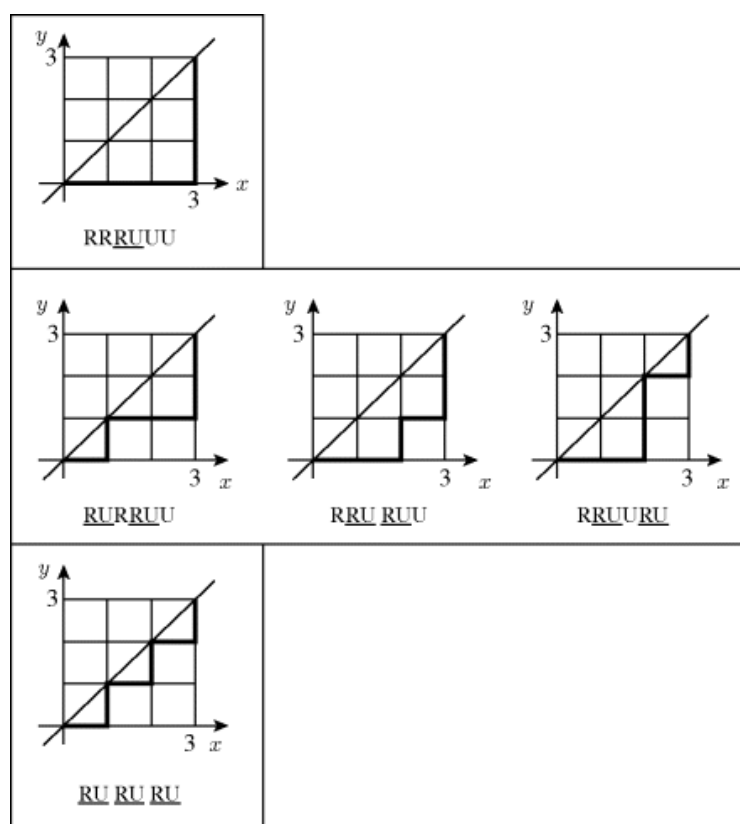
Grimaldi (2012) fornece algumas interpretações para os números de Narayana de forma semelhante como ocorre com os números de Catalan.

Podemos observar na figura 5 a quantidade de caminhos de rede dos pontos $(0,0)$ à $(3,3)$ que nunca se elevam acima da reta $y = x$. Esses caminhos podem ser encontrados de acordo com a definição dos números de Narayana.

Podemos observar que existem 1 caminho onde se tem um movimento para direita e um movimento para cima, além disso temos 3 caminhos com esse movimento e por fim temos 1 caminho com três dessas voltas. Assim, o total de caminhos pode ser dado por:

$$N(3,1) + N(3,2) + N(3,3) = 1 + 3 + 1 = 5.$$

Figura 5-Caminhos de rede de $(0,0)$ à $(3,3)$ que nunca se elevam acima da reta $y=x$



Fonte: Grimaldi (2012, p.269)

Outro exemplo de interpretação combinatória para os NN é de que forma podemos ordenar n parênteses do tipo $()$ de forma que não existam pares de parênteses abertos. Para $n=3$ temos:

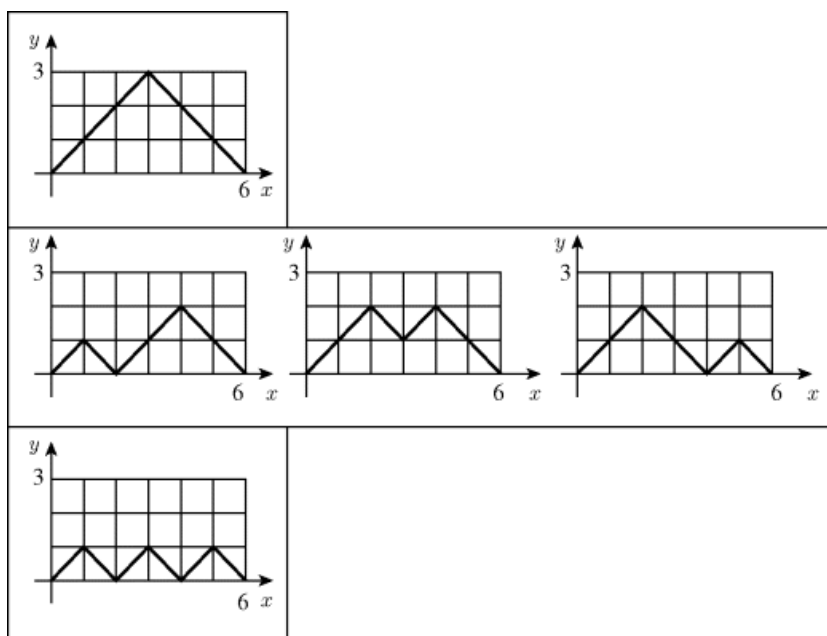
$$((())) \quad (()) \quad ()() \quad ()() \quad ()()$$

Podemos ver que existe uma sequência com uma ocorrência de “()”, existem 3 sequências com duas ocorrências de “()”, finalmente existe uma com três ocorrências de “()”. Assim, o total de maneiras de ordenar esses parênteses pode ser dada por:

$$N(3,1) + N(3,2) + N(3,3) = 1 + 3 + 1 = 5.$$

Os NN podem contar os caminhos Dyck (ou cadeias de montanhas). Descobrimos que existe um caminho Dyck com $1 = N(3,1)$ pico onde existe um $(\nearrow)$, Seguido por um $(\searrow)$. Além disso, existem $3 = N(3,2)$ caminhos Dyck com dois picos, e $1 = N(3,3)$ com caminho Dyck de três picos. Conforme podemos observar na figura 6:

Figura 6-Caminhos Dycks ou cadeias de montanhas



Fonte: Grimaldi (2012, p.272)

3.10.2 Propriedades dos números de Narayana

Os números de Narayana satisfazem determinadas propriedades que são importantes, entre elas, propriedade de simetria, de absorção, conforme podemos observar no próximo teorema:

Teorema 35. (Grimaldi, 2012): Para quaisquer inteiros, n e k de acordo com a definição do número de Narayana, temos as seguintes propriedades:

1. $N(n, k) = N(n, n+1-k), n \geq k \geq 1$;
2. $\binom{n}{k-1} N(n, k+1) = \binom{n}{k+1}$;
3. $(n+1)N(n, k) = (n-1)[N(n-1, k-1) + N(n-1, k)] + 2\binom{n-1}{k-1}^2, n \geq k \geq 2$;
4. $N(n+1, k+1) = \binom{n}{k}^2 - \binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1}, n \geq k \geq 1$.

Demonstração: Propriedade 1. De acordo com a definição 21 temos que:

$$\begin{aligned} N(n, n+1-k) &= \frac{1}{n} \binom{n}{n+1-k} \binom{n}{n-k} \\ &= \frac{1}{n} \frac{n!}{(n+1-k)!(k-1)!} \frac{n!}{(n-k)!k!}. \end{aligned}$$

Observando que:

$$\frac{n!}{(n+1-k)!(k-1)!} = \binom{n}{k-1} \quad \text{e} \quad \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} N(n, n+1-k) &= \frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k-1} \\ &= N_{n,k} \end{aligned}$$

Demonstração da propriedade 2: De forma análoga a demonstração da propriedade 1 podemos fazer a demonstração a partir da definição 21 e da definição de número binomial temos que:

$$\binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} \quad \text{e} \quad N(n, k+1) = \frac{1}{n} \binom{n}{k+1} \binom{n}{k}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} N(n, k+1) &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \frac{1}{n} \binom{n}{k+1} \binom{n}{k} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \frac{1}{n} \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \frac{1}{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\
&= \binom{n}{k+1} \frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k-1} \\
&= \binom{n}{k+1} N(n, k).
\end{aligned}$$

Demonstração da propriedade 3. A partir da definição dos números de Narayana e usando algumas propriedades dos números binomiais temos que:

$$\begin{aligned}
&(n-1)[N(n-1, k-1) + N(n-1, k)] + 2 \binom{n-1}{k-1}^2 \\
&= (n-1) \left[\frac{1}{n-1} \binom{n-1}{k-1} \binom{n-1}{k-2} + \frac{1}{n-1} \binom{n-1}{k} \binom{n-1}{k-1} \right] + 2 \binom{n-1}{k-1}^2 \\
&= \binom{n-1}{k-1} \left[\binom{n-1}{k-2} + \binom{n-1}{k} \right] + 2 \binom{n-1}{k-1}^2 \\
&= \binom{n-1}{k-1} \left[\binom{n-1}{k-2} + 2 \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right] \\
&= \binom{n-1}{k-1} \left\{ \left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-2} \right] + \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] \right\} \\
&= \binom{n-1}{k-1} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] \\
&= \binom{n-1}{k-1} \binom{n+1}{k} \\
&= \binom{n+1}{k} \binom{n-1}{k-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= (n+1) \frac{n!}{k!(n+1-k)!} \frac{n(n-1)!}{n(k-1)!(n-k)!} \\
&= (n+1) \frac{1}{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} \\
&= (n+1) \frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k-1} = (n+1)N(n, k).
\end{aligned}$$

Demonstração da propriedade 4: Devemos observar que:

$$\begin{aligned}
N(n+1, k+1) &= \frac{1}{n+1} \cdot \binom{n+1}{k+1} \binom{n+1}{k} \\
&= \frac{1}{n+1} \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k+1)k!(n-k)!} \frac{(n+1)n!}{k!(n+1-k)(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(n+1)}{(k+1)(n+1-k)} \\
&= \binom{n}{k}^2 \frac{n+1}{(k+1)(n+1-k)}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{k}^2 - \binom{n}{k-1} \binom{n}{k+1} \\
&= \binom{n}{k}^2 - \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \frac{k}{k} \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \binom{n}{k}^2 - \frac{n!k}{k!(n-k+1)!(n-k)!} \frac{n!(n-k)}{(k+1)k!(n-k)!} \\
&= \binom{n}{k}^2 - \binom{n}{k}^2 \frac{k(n-k)}{(n-k+1)(k+1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{n}{k}^2 \left[1 - \frac{k(n-k)}{(n-k+1)(k+1)} \right] \\
&= \binom{n}{k}^2 \left[\frac{(n-k+1)(k+1)}{(n-k+1)(k+1)} - \frac{k(n-k)}{(n-k+1)(k+1)} \right] \\
&= \binom{n}{k}^2 \left[\frac{nk - k^2 + k + n - k + 1 - kn + k^2}{(n-k+1)(k+1)} \right] \\
&= \binom{n}{k}^2 \frac{n+1}{(n-k+1)(k+1)} \\
&= \binom{n}{k}^2 \frac{n+1}{(k+1)(n-k+1)}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$N(n+1, k+1) = \binom{n}{k}^2 - \binom{n}{k-1} \binom{n}{k+1}, n \geq k \geq 1.$$

3.10.3 Identidade de Narayana

Uma das propriedades mais importantes dos números de Narayana é que eles estão intimamente relacionados com os números de Catalan através da seguinte identidade:

$$N(n,1) + N(n,2) + N(n,3) + \dots + N(n,n) = \sum_{k=1}^n N_{n,k} = C_n,$$

onde C_n é conhecido como sendo o número de Catalan, definido por:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}.$$

Antes de demonstrarmos essa importante identidade precisamos verificar dois lemas que serão enunciados a seguir:

Lema 28. (Identidade de Lagrange): Para $n \geq 0$ temos que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Demonstração: A partir do teorema binomial, sabemos que o coeficiente de x^n em $(1+x)^{2n}$ é

$$\binom{2n}{n}.$$

No entanto, tem-se também que:

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n (1+x)^n = \\ = \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n \right] \cdot \left[\binom{n}{0} + \dots + \binom{n}{n-2}x^{n-2} + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n \right],$$

onde o coeficiente de x^n é:

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{n-2} + \dots + \binom{n}{n}\binom{n}{0},$$

desde que,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

segue-se que o coeficiente de x^n em $(1+x)^{2n}$ é

$$\binom{n}{0}\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}\binom{n}{n}.$$

Consequentemente,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Um resultado parecido será mostrado a seguir:

Lema 29: Para $n \geq 0$, temos que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k-2} = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k-2} = \binom{2n}{n+2}.$

Demonstração: A primeira igualdade ocorre porque $\binom{n}{-2} = \binom{n}{-1} = 0.$

Para estabelecer a segunda igualdade, mais uma vez usaremos o teorema binomial. Na expansão de $(1+x)^{2n}$, O coeficiente de x^{n+2} é $\binom{2n}{n+2}.$

No entanto, sabemos que:

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n (1+x)^n$$

$$= \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n \right] \cdot \left[\binom{n}{0} + \dots + \binom{n}{n-2}x^{n-2} + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n \right]$$

é também o caso que o coeficiente de x^{n+2} é:

$$\binom{n}{2}\binom{n}{n} + \binom{n}{3}\binom{n}{n-1} + \dots + \binom{n}{n}\binom{n}{2} = \binom{n}{2}\binom{n}{0} + \binom{n}{3}\binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}\binom{n}{n-2}$$

$$= \sum_{k=2}^n \binom{n}{k}\binom{n}{k-2}.$$

Consequentemente,

$$\sum_{k=2}^n \binom{n}{k}\binom{n}{k-2} = \binom{2n}{n+2}.$$

Teorema 36: Para $n \geq 0$, temos que $\sum_{k=0}^n N(n, k) = C_n$.

Demonstração: O resultado segue para $n=0$ pois $N(0,0)=1=C_0$. Assim, a partir deste ponto, consideramos apenas $n \geq 1$ e percebermos que:

$$\sum_{k=0}^n N(n, k) = \sum_{k=1}^n N(n, k),$$

desde que $N(n, 0) = 0$ para $n \geq 1$.

Da propriedade 4, segue-se que:

$$N(n, k) = \binom{n-1}{k-1}^2 - \binom{n-1}{k-2}\binom{n-1}{k}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n N(n, k) &= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}^2 - \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-2}\binom{n-1}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}^2 - \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n-1}{k-2}\binom{n-1}{k}. \end{aligned}$$

Porque ,

$$\binom{n-1}{-1} = \binom{n-1}{n} = 0,$$

isso implica que:

$$\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k-1}^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}^2.$$

Do Lema 28 temos que:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}^2 = \binom{2(n-1)}{n-1}.$$

Enquanto que a partir do Lema 29 segue-se que:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n-1}{k-2} \binom{n-1}{k} \\ &= \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n-1}{k} \binom{n-1}{k-2} \\ &= \binom{2(n-1)}{(n-1)+2} = \binom{2(n-1)}{n+1}. \end{aligned}$$

Consequentemente, verificamos a seguinte identidade :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n N(n, k) &= \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n+1} \\ &= \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} - \frac{(2n-2)!}{(n+1)!(n-3)!} \\ &= \frac{(n+1)(n)(2n-2)!}{(n+1)(n)(n-1)!(n-1)!} - \frac{(n-1)(n-2)(2n-2)!}{(n+1)!(n-1)(n-2)(n-3)!} \\ &= \frac{(n+1)(n)(2n-2)!}{(n+1)(n-1)!} - \frac{(n-1)(n-2)(2n-2)!}{(n+1)(n-1)!} \\ &= \frac{(2n-2)!}{(n+1)(n-1)!} [n^2 + n - (n^2 - 3n + 2)] \\ &= \frac{(2n-2)!}{(n+1)(n-1)!} (4n-2) = \frac{2(2n-1)(2n-2)!}{(n-1)!(n+1)!} \\ &= \frac{2(2n-1)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{(2n)(2n-1)!}{n(n-1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = C_n \end{aligned}$$

Teorema 37. Seja $M_{n,k} = \begin{pmatrix} \binom{n-1}{k} & \binom{n}{k+1} \\ \binom{n}{k} & \binom{n+1}{k+1} \end{pmatrix}$, $\det M_{n,k} = \binom{n-1}{k} \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k} \binom{n}{k+1} = N_{n,k}$

Onde $N_{n,k}$ é o número de Narayana.

Demonstração. Temos que:

$$\begin{aligned}
 \det(M_{n,k}) &= \binom{n-1}{k} \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k} \binom{n}{k+1} \\
 &= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \cdot \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} - \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
 &= \frac{1}{k+1} \cdot \left[\frac{n!}{n \cdot k!(n-k-1)!} \cdot \frac{(n+1)n(n-1)!}{k!(n-k)!} - \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \right] \\
 &= \frac{n!(n-1)!}{k!(k+1)k!} \cdot \left[\frac{1}{n(n-k-1)!} \cdot \frac{(n+1) \cdot n}{(n-k)!} - \frac{n}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{(n-k-1)!} \right] \\
 &= \frac{1}{k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} \cdot \left[\frac{1}{n \cdot 1} \cdot \frac{(n+1)n}{1} - \frac{n}{1} \right] \\
 &= \frac{1}{k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} \cdot [n+1-n] \\
 &= \frac{1}{k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\
 &= \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \binom{n-1}{k} = N(n,k).
 \end{aligned}$$

3.10.4 Identidades envolvendo os números de Narayana

Nesta seção apresentamos alguns resultados importantes envolvendo os números de Narayana a partir da definição. Nesse sentido, apresentamos os seguintes teoremas:

Teorema 38. Seja

$$N(n,k) = \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \binom{n-1}{k}, N(n,k+1) - N(n,k) = (n-1)! \binom{n}{k} \left[\frac{(n-2k)(n+1)}{(k+1)!(n+1-k)!} \right]$$

Com a condição $n \in \mathbb{N}, n \geq 1, k \in [1, n]$.

Demonstração. A igualdade pode ser provada a partir da definição dos números de Narayana:

Seja $N(n,k) = \frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k-1}$ então:

$$\begin{aligned}
N(n, k+1) - N(n, k) &= \frac{1}{n} \binom{n}{k+1} \binom{n}{k} - \frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k-1} \\
&= \frac{1}{n} \binom{n}{k} \left[\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} - \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \right] \\
&= \frac{n!}{n} \binom{n}{k} \frac{1}{(k-1)!(n-k+1)!} \left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(n-k)(n-k+1)} \right] \\
&= \frac{n!}{n} \binom{n}{k} \frac{1}{(k+1)!(n-k+1)!} [n^2 - 2nk - 2k + n] \\
&= (n-1)! \binom{n}{k} \left[\frac{(n-2k)(n+1)}{(k+1)!(n-k+1)!} \right]
\end{aligned}$$

Teorema 39. $N(n, k+1) = \binom{n}{k}^2 \left(\frac{n-k}{n(k+1)} \right), k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$

Demonstração. Usando o resultado do teorema 39 temos que:

$$\begin{aligned}
N(n, k+1) &= N(n, k) + (n-1)! \binom{n}{k} \left[\frac{(n-2k)(n+1)}{(k+1)!(n-k+1)!} \right] \\
&= \frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k-1} + (n-1)! \binom{n}{k} \left[\frac{(n-2k)(n+1)}{(k+1)!(n-k+1)!} \right] \\
&= \frac{1}{n} \binom{n}{k} \left(\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \right) + (n-1)! \binom{n}{k} \left[\frac{(n-2k)(n+1)}{(k+1)!(n-k+1)!} \right] \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k+1)!} \right) \left(1 + \frac{(n+1)(n-2k)}{k(k+1)} \right) \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \right) \left(\frac{(n-k)^2 + (n-k)}{k(k+1)(n-k+1)} \right) \\
&= \frac{1}{n} \binom{n}{k} \left(\frac{n!}{k!(n-k)!} \right) \left(\frac{n-k}{k+1} \right) \\
&= \binom{n}{k}^2 \left(\frac{n-k}{n(k+1)} \right).
\end{aligned}$$

4 ANÁLISE A PRIORI E EXPERIMENTAÇÃO

Na segunda fase da ED, conhecida como análise a priori devemos ter a concepção das situações didáticas, onde as variáveis são definidas em uma perspectiva microdidática, com o intuito de determinar a relação entre o processo de generalização da sequência de Narayana, bem como a generalização dos números de Narayana, e a proposição das situações-problema. De acordo com Almouloud (2016), as situações-problema são questões abertas com

enunciados objetivos ou elaboradas em um contexto mais ou menos matematizado, cuja função principal é a utilização implícita e depois explícita, de novos objetos matemáticos por meio de questões dos alunos no momento de resolução da situação-problema.

Assim, a partir da análise matemática feita no capítulo 3 dos dois objetos de estudo, foram elaboradas 6 situações didáticas compostas por situações-problema envolvendo tanto a SN como os NN com o objetivo de realizar uma transposição didática desses objetos de estudo. Para a concepção e análises das situações de ensino escolhemos como referência a teoria de ensino conhecida como Teoria das Situações Didáticas (TSD). Dessa forma, no próximo tópico será feita uma discussão do percurso metodológico que antecede a situação didática, onde são apresentadas as concepções das situações didáticas e onde podemos prever o possível comportamento dos alunos e as possíveis soluções que os alunos possam manifestar durante a discussão das situações-problema. Essa fase é caracterizada como sendo a 2ª fase da ED, ou seja, a fase de concepção e análise a priori.

Esta pesquisa teve sua fase experimental aplicada em um curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), *campus* Fortaleza, na disciplina de História da Matemática (HM). Para isso foi feito um estudo do campo epistêmico-matemático, que no caso desta pesquisa corresponde a dois objetos matemáticos distintos: A sequência de Narayana e os números de Narayana e os seus modelos de generalização, onde podemos destacar: Relações matriciais, relações recorrentes n -dimensionais, Quaternions e Octonions. Em relação aos números de Narayana destacamos algumas propriedades e interpretações combinatórias para esses números.

4.1 Concepções das Situações Didáticas

No capítulo anterior foi feita uma análise matemática dos dois objetos de estudo envolvidos nesse trabalho. Essa análise se fez necessária para que fosse possível fundamentar a concepção das situações-problema. Essa fase corresponde a fase de análise prévia da ED.

Destacamos ainda a importância de se fazer uma transposição didática dos dois objetos matemáticos de estudo uma vez que estes assuntos são restritos ao âmbito da Matemática pura, não havendo uma preocupação com o seu ensino sendo necessário transformá-lo em um conteúdo a ser ensinado.

Tendo por base o estudo realizado no capítulo 3, onde foram abordados alguns conteúdos referentes à sequência de Narayana e os números de Narayana e os seus modelos de generalização, onde podemos destacar: Extensão aos inteiros, relações matriciais, relações

recorrentes bidimensionais, quaternions e algumas propriedades dos números de Narayana, foram elaboradas cinco situações-problema inerentes a estes assuntos.

4.2 Construção das Situações Didáticas

Nesse tópico iremos descrever as situações didáticas e o que se espera nas etapas de ação, formulação, validação e institucionalização da TSD, durante a resolução das soluções-problema envolvendo a sequência de Narayana e os números de Narayana.

Na situação-problema 1 é pedido aos alunos para verificar se é possível a extensão da sequência de Narayana para índices inteiros, uma vez que a sequência está definida apenas para valores positivos.

Situação-problema 1: A sequência de Narayana dos números é definida pela seguinte recorrência: $N_r = N_{r-1} + N_{r-3}$, onde $N_0 = 0, N_1 = N_2 = 1, r \geq 3$. Verifique se é possível a extensão da SN para índices Inteiros, ou seja, encontre os termos com índices não positivos para esta sequência. Determine uma recorrência que permita encontrar esses termos.

Situação de ação: Nesta primeira fase esperamos que os alunos encontrem alguns termos com índices negativos da seguinte forma:

Partindo da recorrência $N_r = N_{r-1} + N_{r-3}$, com $r \geq 3$ e $N_0 = 0, N_1 = N_2 = 1$, os alunos deverão perceber que se escolherem valores para $r \leq 3$ poderão obter o seguinte:

$$\begin{aligned} r = 2, N_{-1} &= N_2 - N_1 = 0; \\ r = 1, N_{-2} &= N_1 - N_0 = 1; \\ r = 0, N_{-3} &= N_0 - N_{-1} = 0; \\ r = -1, N_{-4} &= N_{-1} - N_{-2} = -1. \end{aligned}$$

Situação de formulação: Os alunos deverão escrever a sequência agora considerando os termos com índices não positivos:

$$N_{r(r \in \mathbb{Z})} = (..., N_{-4}, N_{-3}, N_{-2}, N_{-1}, N_0, N_1, N_2, N_3, N_4, ...) = (..., -1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 2, ...).$$

Situação de validação: os alunos deverão estabelecer uma definição que permita encontrar qualquer termo da sequência com índices inteiros não positivos. Poderão perceber essa relação a partir dos casos particulares que foram encontrados na situação de ação, assim poderão chegar na seguinte relação de recorrência:

$$N_{-r} = N_{-r+3} - N_{-r+2}.$$

Situação de institucionalização: Fornecemos a definição formal da sequência de Narayana com índices inteiros não positivos:

$$N_{-r} = N_{-r+3} - N_{-r+2}, r \in \mathbb{N}$$

Na situação-problema 2 esperamos que os alunos encontrem uma fórmula de Binet para a sequência de Narayana.

Na fase de ação os alunos deverão a partir da equação que foi dada no problema:

$$N_r = ak_1^r + bk_2^r + ck_3^r.$$

Deverão perceber que tomando os valores iniciais que são dados: $N_0 = 0$, $N_1 = N_2 = 1$ e substituindo na equação acima irão obter um sistema de equações com 3 equações e três incógnitas:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a.k_1 + b.k_2 + c.k_3 = 1 \\ a.k_1^2 + b.k_2^2 + c.k_3^2 = 1 \end{cases}$$

Nas fases de formulação validação os alunos deverão obter os valores das constantes a, b, c através da solução do sistema acima.

Na fase de institucionalização fornecemos aos alunos um teorema que fornece a fórmula de Binet para a sequência estudada.

Na situação-problema 3 esperamos que os alunos estabeleçam uma matriz geradora para a sequência de Narayana com índices inteiros não positivos.

Situação-problema 3: Uma das formas de obter qualquer elemento de uma sequência recursiva e linear é através de uma matriz geradora Q . Essa ferramenta foi usada para outras sequências lineares e recorrentes, tais como, a sequência de Fibonacci, sequência de Padovan e pode ser aplicada também para a sequência de Narayana (SN). Essa sequência possui uma matriz de ordem 3, a qual quando elevada a n -ésima potência é possível obter os seus termos sem o cálculo da recursividade.

A matriz geradora Q da sequência de Narayana é dada por:

$$\text{Para } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ tem-se que: } Q^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^r = \begin{pmatrix} N_{r+1} & N_{r-1} & N_r \\ N_r & N_{r-2} & N_{r-1} \\ N_{r-1} & N_{r-3} & N_{r-2} \end{pmatrix}, r \geq 3.$$

Com base nisso, encontre a matriz geradora da SN para os termos com índice inteiro não positivo, ou seja, analise o comportamento das matrizes da forma Q^{-r} , com $r \in \mathbb{N}$.

Situação de ação : Os estudantes deverão inicialmente calcular alguns casos particulares para as potências de matrizes com índices inteiros não positivos e perceber que Q^{-1} é a inversa da matriz Q . Assim deverão realizar alguns cálculos:

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-2} = Q^{-1} \cdot Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-3} = Q^{-2} \cdot Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-4} = Q^{-3} \cdot Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-5} = Q^{-4} \cdot Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Situação de formulação: Os alunos deverão estabelecer a seguinte identidade matricial partir das potências de matrizes calculadas no momento da situação de ação:

$$Q^{-r} = \begin{pmatrix} N_{-r+1} & N_{-r-1} & N_{-r} \\ N_{-r} & N_{-r-2} & N_{-r-1} \\ N_{-r-1} & N_{-r-3} & N_{-r-2} \end{pmatrix}.$$

Situação de validação: Os alunos deverão fazer a demonstração da identidade matricial acima. Para isso, deverão usar o princípio de indução finita sobre r , observando que a matriz está elevada a potência negativa.

Situação de institucionalização: Nesse momento é revelada aos estudantes a intenção de encontrar uma generalização da matriz geradora para os termos de índices inteiros não positivos, realizando uma extensão da SN para índices inteiros não positivos. Apresentamos ao grupo de estudantes a seguinte identidade matricial:

$$\text{Seja } Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Então } Q^{-r} = \begin{pmatrix} N_{-r+1} & N_{-r-1} & N_{-r} \\ N_{-r} & N_{-r-2} & N_{-r-1} \\ N_{-r-1} & N_{-r-3} & N_{-r-2} \end{pmatrix}, \text{ onde } N_{-r} = N_{3-r} - N_{2-r},$$

$r \in \mathbb{N}$.

Na situação-problema 4 esperamos que os alunos encontrem uma fórmula geral que permita encontrar os termos da sequência de Narayana na sua forma bidimensional.

Situação-problema 4: O processo de complexificação da sequência de Narayana está relacionado ao acréscimo da unidade imaginária, ao aumento dimensional e a sua correspondente representação algébrica. Dessa forma, serão discutidos aspectos referentes às relações recorrentes bidimensionais a partir do modelo recursivo unidimensional de Narayana. Será introduzida uma nova notação para a relação bidimensional da SN: $N(n+1, m) = N(n, m) + N(n-2, m)$ e $N(n, m+1) = N(n, m) + N(n, m-2)$. Utilizando os seguintes valores iniciais definidos: $N(0, 0) = 0, N(1, 0) = 1, N(2, 0) = 1, N(0, 1) = i, N(0, 2) = i, N(1, 1) = 1+i, N(1, 2) = 1+i, N(2, 2) = 1+i, i^2 = -1$ foi possível estabelecer as seguintes propriedades: $N(n, 0) = N_n$ e $N(0, m) = N_m i$. Com base nisso, é possível estabelecer uma relação para os números da forma $N(n, m)$ em que $n, m \geq 0$? Faça a demonstração da relação que você encontrar.

Situação de ação: Os alunos deverão encontrar relações para $N(n, 1)$ e $N(1, m)$. Para a relação $N(n, 1)$ deverão manter o valor $m=1$ constante e variar o $n = 2, 3, 4, \dots$, obtendo

$$\begin{aligned} N(3, 1) &= N(2, 1) + N(0, 1) = 1 + 2i = N_3 + (N_3 + N_1)i \\ N(4, 1) &= N(3, 1) + N(1, 1) = 2 + 3i = N_4 + (N_4 + N_2)i \\ N(5, 1) &= N(4, 1) + N(2, 1) = 3 + 4i = N_5 + (N_5 + N_3)i \\ N(6, 1) &= N(5, 1) + N(3, 1) = 4 + 6i = N_6 + (N_6 + N_4)i. \end{aligned}$$

Obtendo a propriedade $N(n, 1) = N_n + (N_n + N_{n-2})i$.

De modo análogo para encontrar a relação $N(1, m)$ deverão manter o valor $n=1$ constante e variar o $m = 2, 3, 4, \dots$, obtendo:

$$\begin{aligned} N(1, 3) &= N(1, 2) + N(1, 0) = 2 + i = (N_3 + N_1) + N_3 i \\ N(1, 4) &= N(1, 3) + N(1, 1) = 3 + 2i = (N_4 + N_2) + N_4 i \\ N(1, 5) &= N(1, 4) + N(1, 2) = 4 + 3i = (N_5 + N_3) + N_5 i \\ N(1, 6) &= N(1, 5) + N(1, 3) = 6 + 4i = (N_6 + N_4) + N_6 i \end{aligned}$$

E a partir desses casos particulares poderão chegar na seguinte relação: $N(1, m) = (N_m + N_{m-2}) + N_m i$.

Situação de formulação: Com base nas relações fornecidas e nas calculadas os estudantes deverão perceber que para $n, m \geq 0$ os números da forma $N(n, m)$ formam a relação bidimensional: $N(n, m) = N_n(N_m + N_{m-2}) + (N_n + N_{n-2})N_m i$.

Situação de validação: A partir da relação bidimensional generalizada de Narayana, é possível demonstrar essa relação através do segundo princípio de indução sobre n ou m e mantendo o valor do número natural fixo.

Situação de institucionalização: Nessa fase é revelada aos alunos a intenção de iniciar o processo matemático de complexificação da SN, através da inserção de unidades imaginárias, do aumento dimensional e sua correspondente representação algébrica. Nessa são mostradas também as relações recorrentes tridimensionais e n -dimensionais.

Na situação-problema 5 esperamos que os alunos consigam obter alguns termos para os Quaternions de Narayana com índices inteiros não positivos e consigam estabelecer uma matriz geradora.

Situação-problema 5: Segundo Horadam (1963, 1993) e Sagwine, Ell e Biham (2011), um quaternion pode ser definido por:

$$q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k,$$

onde i, j, k são as unidades imaginárias com $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k = -ji, jk = i = -kj, ki = j = -ik$.

Á vista disso, com o intuito de ampliar os estudos sobre o processo matemático de complexificação da SN serão enunciadas algumas definições a respeito dos quaternions de Narayana:

Um quaternion de Narayana pode ser definido pela seguinte equação:

$$QN_n = N_n + N_{n+1}i + N_{n+2}j + N_{n+3}k, i^2 = j^2 = k^2 = -1, n \geq 0.$$

A fórmula de recorrência do quaternion de Narayana é definida por:

$$QN_n = QN_{n-1} + QN_{n-3}.$$

A matriz geradora do quaternion de Narayana é dada por:

$$Q^n \begin{pmatrix} QN_4 & QN_2 & QN_3 \\ QN_3 & QN_1 & QN_2 \\ QN_2 & QN_0 & QN_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} QN_4 & QN_2 & QN_3 \\ QN_3 & QN_1 & QN_2 \\ QN_2 & QN_0 & QN_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} QN_{n+4} & QN_{n+2} & QN_{n+3} \\ QN_{n+3} & QN_{n+1} & QN_{n+2} \\ QN_{n+2} & QN_n & QN_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Com base nessas informações iniciais encontre a matriz geradora dos quaternions de Narayana para índices inteiros não positivos. Faça a demonstração.

Situação de ação: Os alunos deverão inicialmente calcular alguns termos dos Quaternions de Narayana com índices inteiros não positivos. Para isso poderão usar a recorrência $QN_n = QN_{n-1} + QN_{n-3}$ e escolher valores para n menores que 3, obtendo:

$$QN_{-1} = QN_2 - QN_1 = (1+i+2j+3k) - (1+i+j+2k) = j+k$$

$$QN_{-2} = QN_1 - QN_0 = (1+i+j+2k) - (1+j+k) = i+k$$

$$QN_{-3} = QN_0 - QN_{-1} = (1+j+k) - (j+k) = 1$$

$$QN_{-4} = QN_{-1} - QN_{-2} = (j+k) - (i+k) = j-i$$

$$QN_{-5} = QN_{-2} - QN_{-3} = (i+k) - 1 = -1+i+k$$

Situação de formulação: Os estudantes deverão calcular a inversa da matriz Q , elevar essa matriz a n -ésima potência e multiplicá-la pela matriz S , onde S é a matriz definida por:

$$S = \begin{pmatrix} QN_4 & QN_2 & QN_3 \\ QN_3 & QN_1 & QN_2 \\ QN_2 & QN_0 & QN_1 \end{pmatrix}.$$

Assim, deverão obter a seguinte matriz geradora para a SN com índices inteiros não positivos:

$$Q^{-n} \begin{pmatrix} QN_4 & QN_2 & QN_3 \\ QN_3 & QN_1 & QN_2 \\ QN_2 & QN_0 & QN_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-n} \begin{pmatrix} QN_4 & QN_2 & QN_3 \\ QN_3 & QN_1 & QN_2 \\ QN_2 & QN_0 & QN_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} QN_{-n+4} & QN_{-n+2} & QN_{-n+3} \\ QN_{-n+3} & QN_{-n+1} & QN_{-n+2} \\ QN_{-n+2} & QN_{-n} & QN_{-n+1} \end{pmatrix}.$$

Situação de validação: Os alunos deverão demonstrar a relação matricial acima usando o princípio de indução finita sobre n .

Situação de Institucionalização: Nessa fase revelamos a intenção a aos alunos de generalizar a relação matricial da SN para índices inteiros

Na situação didática 6 foram propostas algumas situações-problema envolvendo algumas propriedades dos números de Narayana.

Na situação-problema 6 esperamos que os alunos verifiquem a seguinte identidade matricial:

$$\det(M_{n,k}) = N_{n,k} = \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \binom{n-1}{k}.$$

Onde,

$$M_{n,k} = \begin{pmatrix} \binom{n-1}{k} & \binom{n}{k+1} \\ \binom{n}{k} & \binom{n+1}{k+1} \end{pmatrix}.$$

Na fase de ação os alunos poderão calcular alguns casos particulares para $N_{n,k}$ a partir da definição $N_{n,k} = \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \binom{n-1}{k}$ e também usando a relação matricial :

$$M_{n,k} = \begin{pmatrix} \binom{n-1}{k} & \binom{n}{k+1} \\ \binom{n}{k} & \binom{n+1}{k+1} \end{pmatrix}.$$

Nas fases de formulação poderão calcular o determinante da matriz acima. Assim,

$$\det(M_{n,k}) = \binom{n-1}{k} \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1} \binom{n}{k}.$$

Desenvolvendo os binomiais esperamos que eles percebam que:

$$\det(M_{n,k}) = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \cdot \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} - \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Na validação deverão desenvolver as relações acima e chegarão no seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \det(M_{n,k}) &= \binom{n-1}{k} \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1} \binom{n}{k} \\ &= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \cdot \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} - \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{1}{k+1} \cdot \left[\frac{n!}{n \cdot k!(n-k-1)!} \cdot \frac{(n+1)n(n-1)!}{k!(n-k)!} - \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \right] \\ &= \frac{n!(n-1)!}{k!(k+1)k!} \cdot \left[\frac{1}{n(n-k-1)!} \cdot \frac{(n+1)n}{(n-k)!} - \frac{n}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{(n-k-1)!} \right] \\ &= \frac{1}{k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} \cdot \left[\frac{1}{n \cdot 1} \cdot \frac{(n+1)n}{1} - \frac{n}{1} \right] \\ &= \frac{1}{k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} \cdot [n+1-n] \\ &= \frac{1}{k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\ &= \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \binom{n-1}{k} = N(n,k). \end{aligned}$$

4.3 Experimentação

Esta é a etapa clássica da ED, é o momento em que se põe em prática todo o dispositivo construído, corrigindo sempre que as análises locais do experimento se mostrarem necessárias, implicando assim um retorno à análise a priori. (ALMOULOU, 2007).

A experimentação aconteceu no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), *campus* Fortaleza, no curso de Licenciatura em Matemática, na disciplina de HM obrigatória para o 6º semestre, em dois momentos de aplicação: No semestre 2019.2 e 2020.1, com os 5 estudantes matriculados nos referidos semestres. Destacamos que devido à suspensão das aulas presenciais, ocasionada por conta da pandemia da Covid-19, a aplicação ocorrida no semestre 2020. 1 precisou ser feita de forma remota, onde os encontros foram realizados através da plataforma google Meet.

A aplicação aconteceu durante o período de 1 mês, nos respectivos semestres, onde foram realizados 8 encontros durante os horários das aulas de história da Matemática do curso de graduação em Licenciatura em Matemática. As aulas de história da Matemática ocorriam sempre nas segundas e sextas, das 13:30 até às 15:30.

As situações didáticas foram propostas em listas de exercícios que foram discutidas em sala e as soluções encontradas pelos alunos foram apresentadas no quadro e na própria folha de papel. Nas primeiras aulas foram apresentadas as definições iniciais e o contexto histórico envolvendo os dois conceitos da pesquisa que corresponde a sequência de Narayana e os números de Narayana.

No semestre 2020. 1, os encontros ocorreram de forma remota, em virtude da paralisação das aulas presenciais, ocasionada por conta da pandemia da Covid 19. Dessa forma os encontros ocorreram através da plataforma google Meet, onde as situações didáticas foram apresentadas aos participantes da pesquisa, fundamentadas nas etapas da TSD, possibilitando analisar as possíveis soluções dos professores em formação inicial.

Além disso, para a coleta de dados foram feitos alguns procedimentos, como: Fotos e gravações das produções escritas feitas pelos alunos, ou seja, as soluções encontradas para as soluções didáticas propostas.

A validação ocorreu com o desenvolvimento das situações didáticas, através de atividades propostas em forma de listas de exercícios, com o objetivo de instigar o lado investigativo do aluno, fornecendo conhecimentos necessários para as respectivas soluções. Com isso, as situações didáticas possibilitaram o entendimento e compreensão dos conteúdos inerentes ao processo de generalização da SN e dos NN

5 ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO INTERNA

Neste capítulo, apresenta-se a quarta e última fase da metodologia de pesquisa utilizada neste trabalho. De acordo com Almouloud (2007, p. 177), uma análise a posteriori consiste em “uma seção e o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos para a melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre as condições de transmissão do saber em jogo”.

Assim, nessa fase da ED é feita uma comparação entre os resultados que foram obtidos durante a fase de experimentação e os resultados esperados que foram definidos na fase de análise à priori, com o objetivo de validar ou refutar as hipóteses levantadas na investigação.

Devemos organizar e analisar as produções dos alunos, levando em consideração as atividades propostas e as informações coletadas no decorrer da experimentação. Segundo Almouloud (2014, p. 177) esta análise deve ser feita considerando as diferentes interações dos alunos (aluno-situação, aluno-aluno, aluno-professor) e com o milieu adidático e didático.

Na próxima seção serão discutidas as fases de ação, formulação, validação e institucionalização da TSD relativas ao momento de aplicação das situações propostas, observando o comportamento dos alunos a partir de seus conhecimentos prévios. Essas atividades foram elaboradas para trabalhar o processo histórico-evolutivo da SN e dos NN.

A seguir são realizadas observações e discussões baseados nos dados coletados durante as aplicações, tendo enfoque na ED e TSD, validando de forma interna esta pesquisa.

5.1 Análise a Posteriori da Situação Didática 1

O primeiro encontro aconteceu com a presença de 4 participantes: Aluno 1, Aluno 2, Aluno 3 e Aluno 4. O aluno 5 faltou. No primeiro momento institui-se o contrato didático com todos os participantes da pesquisa. Segundo Santos (2018, p. 67), o contrato didático ressalta o desenvolvimento do trabalho docente, a organização das estratégias metodológicas envolvidas na preparação de uma situação didática, a postura de mediador do professor, como também possibilita aos estudantes tornarem-se agentes mais investigativos, reflexivos, críticos, autônomos e colaborativos entre si.

Dessa forma, estabeleceram-se as seguintes orientações para a realização da pesquisa:

- Foi entregue para cada participante o Termo de Consentimento e Livre Esclarecido (TCLE) e após a leitura e explicação desse documento todos os participantes o assinaram.
- Após a assinatura do TCLE uma lista com a situação didática proposta foi entregue a cada participante.
- Alguns conceitos iniciais relativos à sequência de Narayana foram apresentados aos estudantes, ou seja, o contexto histórico do surgimento da sequência e o problema matemático que a originou, fazendo um paralelo com uma outra sequência bem conhecida no contexto da História da Matemática, que é a sequência de Fibonacci.
- Durante a aplicação da situação didática, os participantes faziam anotações das soluções encontradas, descrevendo cada etapa, anotando as dúvidas e dificuldades encontradas.
- Cada estudante poderia socializar a solução encontrada com os demais colegas apresentação a solução no quadro.
- Os estudantes foram avisados de que o professor-pesquisador iria interferir pouco nas respostas dadas por eles, que teriam a liberdade de agir sobre a situação didática proposta buscando encontrar uma solução para ela.

Na primeira situação-problema solicitamos que os alunos verificassem se seria possível fazer uma extensão da sequência de Narayana para índices inteiros não positivos, uma vez que sequência estava definida apenas para índices naturais.

Neste momento os estudantes começaram a buscar uma solução para a situação proposta considerando os seus conhecimentos prévios e as informações contidas no próprio problema. Após um determinado tempo o pesquisador indagou os estudantes sobre o que eles tinham conseguido fazer, obtendo as seguintes respostas:

Aluno 3: Professor, acho que não é possível obter a sequência para índices negativos.

Aluno 4: Também acho que não é possível.

Professor: Por que vocês acham que não é possível?

Aluno 3: No caso da sequência definida para índices inteiros positivos nós temos três termos iniciais.

Aluno 4: Verdade. Para a sequência com índices negativos não temos nenhum termo inicial.

Aluno 1: Professor percebi que para a sequência positiva existe uma condição para o índice r .

Professor: Será que essa condição para o índice r tem alguma importância para a solução?

Aluno 1: Vou tentar aqui.

Após esta troca de diálogos, os estudantes voltaram a tentar resolver a situação-problema proposta. Depois de um certo tempo voltaram a ser indagados pelo pesquisador e nesse momento o aluno 01 afirmou ter conseguido obter alguns termos com índices negativos. A seguir descrevemos o trecho da gravação do aluno 1:

Aluno 1: Percebi que na fórmula de recorrência para a sequência com índices inteiros positivos existe uma condição para o índice r , que tem que ser maior ou igual 3. Então eu desconsidere essa condição e substituí o valor do índice r por valores menores do que 3 e consegui obter alguns termos da sequência com índices negativos.

Após o aluno 1 expressar a sua ideia para a solução do problema o pesquisador perguntou se todos tinham entendido a ideia conforme podemos observar no seguinte diálogo:

Professor: A ideia do colega de vocês ficou clara?

Aluno 3: Sim, professor. Não tinha observado isso.

Aluno 4: Agora dá para encontrar outros termos com índices negativos.

Aluno 2: Acho que agora é possível encontrar uma fórmula de recorrência.

Na figura 7 temos o aluno 1 nas fases de ação e formulação na situação-problema 1 estabelecendo a extensão da sequência de Narayana para índices inteiros não positivos. Podemos perceber que o aluno 1 partiu da forma de recorrência da sequência $N_r = N_{r-1} + N_{r-3}$ e escolhendo alguns valores particulares para o índice r e realizando alguns cálculos conseguiu encontrar alguns termos da sequência com índice inteiro não positivo.

Esse momento corresponde a fase de ação, onde o aluno escolheu alguns valores particulares para o índice r . Na fase da formulação o aluno 1 escreveu a sequência de Narayana com a extensão para índices inteiros não positivos a partir dos cálculos feitos na fase anterior, chegando, portanto, na seguinte sequência:

$(..., -3, 0, -2, 1, 1, -1, 0, -1, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, ...)$.

Figura 7-Fase de ação e formulação pelo aluno 1-Extensão da sequência de Narayana para índice inteiro não positivo.

Handwritten mathematical work showing the extension of the Narayana sequence to negative indices. The work includes the following steps:

- Recurrence relation: $N_r = N_{r-1} + N_{r-3}$ ONDE $N_0 = 0, N_1 = N_2 = 1$
- Calculations for negative indices:
 - $N_{-1} = N_0 + N_{-2} \Rightarrow 1 = 0 + N_{-2} \Rightarrow N_{-2} = 1$
 - $N_{-2} = N_{-1} + N_{-3} \Rightarrow 1 = 1 + N_{-3} \Rightarrow N_{-3} = 0$
 - $N_{-3} = N_{-2} + N_{-4} \Rightarrow 0 = 1 + N_{-4} \Rightarrow N_{-4} = -1$
 - $N_{-4} = N_{-3} + N_{-5} \Rightarrow -1 = 0 + N_{-5} \Rightarrow N_{-5} = 1$
 - $N_{-5} = N_{-4} + N_{-6} \Rightarrow 1 = -1 + N_{-6} \Rightarrow N_{-6} = 2$
 - $N_{-6} = N_{-5} + N_{-7} \Rightarrow 2 = 1 + N_{-7} \Rightarrow N_{-7} = 1$
 - $N_{-7} = N_{-6} + N_{-8} \Rightarrow 1 = 2 + N_{-8} \Rightarrow N_{-8} = -1$
 - $N_{-8} = N_{-7} + N_{-9} \Rightarrow -1 = 1 + N_{-9} \Rightarrow N_{-9} = -2$
- Sequence listing: $(\dots, 3, 0, -2, 1, 1, -1, 0, -1, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, \dots)$
- General formula: $N_{-r} = N_{-r+3} - N_{-r+2}$

Fonte: Dados da pesquisa.

Neste momento os estudantes foram indagados pelo pesquisador se o problema estava solucionado, obtendo as seguintes respostas:

Aluno 1: Nós encontramos apenas alguns termos com índices negativos.

Aluno 3: Acho que temos que encontrar uma fórmula geral.

Aluno 2: Professor, precisamos encontrar uma fórmula de recorrência para essa sequência.

Após essa conversa, os estudantes voltaram para a situação-problema em busca de encontrar uma fórmula de recorrência para a sequência com índices inteiros não positivos. Depois de um certo tempo o aluno 2 afirmou ter encontrado a solução do problema, conforme podemos observar no trecho de gravação do aluno 2:

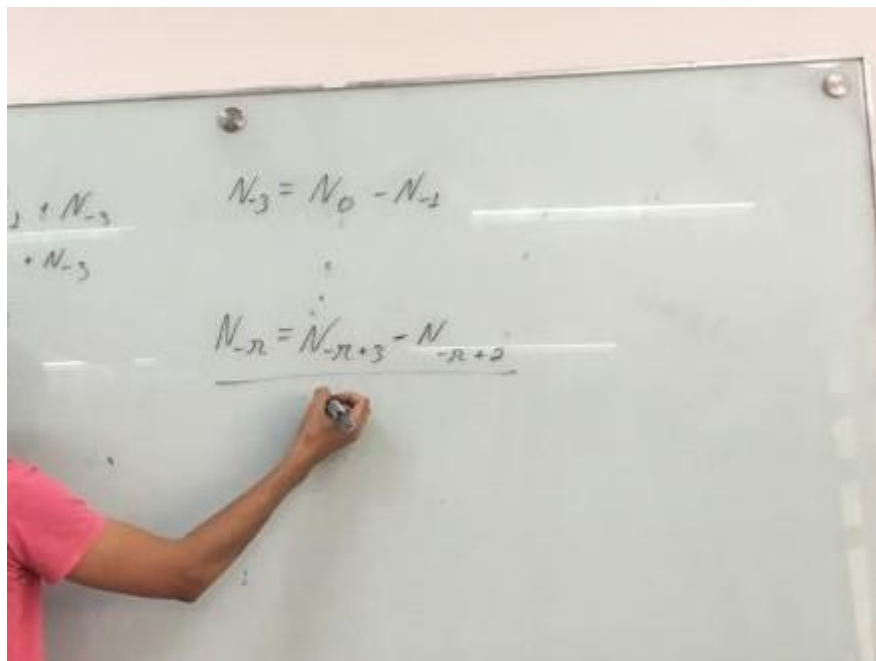
Professor, eu encontrei aqui uma fórmula de recorrência, mas não sei se está certo. Eu fiz o teste com alguns valores e deu certo. A partir dos cálculos feitos para valores específicos do índice r eu consegui uma fórmula geral que serve para encontrar qualquer termo da sequência com índice negativo.

O pesquisador perguntou ao aluno 2 se ele poderia socializar a resposta do problema com os demais colegas no quadro, obtendo sim como resposta. Dessa forma na figura 8 temos o aluno 2 estabelecendo uma fórmula de recorrência para a sequência de Narayana com

índices inteiros não positivos. A partir dos cálculos feitos na etapa da ação o aluno percebeu que era possível encontrar uma fórmula geral que permitia calcular qualquer termo da sequência de Narayana com índices inteiros não positivos, o que corresponde a etapa de validação da situação proposta. Assim, o aluno estabeleceu a seguinte recorrência:

$$N_{-r} = N_{-r+3} - N_{-r+2}.$$

Figura 8-Fase de validação pelo aluno 2-Recorrência para a sequência de com índice inteiro não positivo.



Fonte: Dados da pesquisa

Depois do aluno 2 socializar a solução encontrada, fizemos um fechamento das principais ideias discutidas durante a aplicação da situação didática e apresentamos aos estudantes a definição da sequência de Narayana para índices inteiros não positivos.

Percebemos que objetivo da situação didática foi alcançado, uma vez que os estudantes conseguiram estabelecer uma fórmula de recorrência para a sequência com índices inteiros não positivos, concluindo a análise da situação didática.

5.2 Análise a Posteriori da Situação Didática 2

O segundo encontro aconteceu com a presença dos 5 participantes: Aluno 1, Aluno 2, Aluno 3, Aluno 4 e Aluno 5. Devido ao fato de o aluno 5 ter faltado o primeiro encontro, o pesquisador iniciou a aula com uma pequena revisão do que foi visto no encontro anterior,

apresentando o que grupo de estudantes tinham conseguido encontrar. Logo após a revisão a lista com a situação problema 2 foi entregue cada participante.

Na situação-problema 3 foi solicitado aos alunos que encontrassem uma fórmula de Binet para a sequência de Narayana. Inicialmente os alunos manifestaram algumas dúvidas sobre o que seria uma fórmula de Binet, sendo necessário então uma breve explicação que fórmula de Binet é uma fórmula geral que permite encontrar os termos de uma sequência sem a necessidade de usar a fórmula de recorrência. Os alunos foram incentivados a ler novamente a situação-problema para um melhor entendimento.

Após um determinado tempo, o pesquisador perguntou ao grupo de estudantes o que eles haviam conseguido fazer. Somente o aluno 2 respondeu conforme podemos observar no trecho de gravação:

Professor eu usei a fórmula que foi fornecida no problema e substitui os três termos iniciais da sequência e consegui encontrar algumas equações. Acho que agora tem como fazer algumas substituições e encontrar os valores de a, b, e c. Vou tentar aqui.

Dessa forma, o aluno 4 percebeu que no enunciado da situação-problema já tinha a definição da fórmula de Binet e que poderia usar os termos iniciais da sequência e substituir na equação:

$$N_r = ak_1^r + bk_2^r + ck_3^r.$$

Assim, o aluno 4 usou os termos que são dados por: $N_0 = 0$, $N_1 = N_2 = 1$ e substituindo estes termos na equação acima, obteve o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ ak_1 + bk_2 + ck_3 = 1 \\ ak_1^2 + bk_2^2 + ck_3^2 = 1 \end{cases}$$

Podemos observar na figura 9, a fase de ação e formulação da situação-problema proposta pelo aluno 4.

Figura 9-Fase de ação e formulação pelo aluno 4-Fórmula de Binet.

$$\begin{aligned}
 0 &= a + b + c \\
 1 &= ak_1 + bk_2 + ck_3 \\
 1 &= ak_1^2 + bk_2^2 + ck_3^2
 \end{aligned}$$

k_1	k_2	k_3
k_1^2	k_2^2	k_3^2
1	1	1

Fonte: Dados da pesquisa

Assim, logo após a fala do aluno 2 o pesquisador voltou a questionar o grupo de alunos, conforme podemos observar no seguinte diálogo:

Professor: O colega de vocês encontrou três equações com três incógnitas. Isso lembra alguma coisa?

Aluno 4: Sistema de equações.

Aluno 2: Verdade. Vai ficar um sistema com três equações.

Professor: Como podemos resolver um sistema linear com três equações e três incógnitas?

Aluno 5: Podemos usar o método de escalonamento.

Aluno 2: Pode ser utilizado a Regra de Cramer.

Os alunos perceberam que as equações acima formaram um sistema linear e que para encontrarem os valores das constantes a , b e c deveriam resolver este sistema de equações. Dessa forma, o aluno 2 o usou o método conhecido como Regra de Cramer para solução do sistema. Essa etapa corresponde a etapa de validação da situação proposta.

O aluno optou por deixar os valores das constantes a , b e c em função das raízes do polinômio característico associado a sequência, conforme podemos observar na figura 10. Assim, usou seus conhecimentos prévios sobre cálculo de determinantes e resolução de sistema Lineares.

Alguns alunos questionaram se era preciso substituir os valores de k_1, k_2, k_3 , que são as raízes do polinômio característico associado a sequência, pelos seus respectivos valores numéricos correspondentes, porém como duas raízes eram complexas optaram por não as substituir.

Figura 10-Fase de validação pelo aluno 2-Fórmula de Binet.

Handwritten work showing the derivation of Binet's formula for a sequence defined by a recurrence relation. The student uses the method of undetermined coefficients, assuming a general form for the n th term and solving for constants a , b , and c .

The work shows the calculation of the determinant D and the constants a , b , and c using the method of undetermined coefficients.

Calculation of D :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 \end{vmatrix} = k_1^2 k_3 + k_2^2 k_3 + k_1 k_3^2 - k_3^2 k_1 - k_1^2 k_2 - k_2^2 k_1 = k_1^2 (k_3 - k_2) + k_2^2 (k_1 - k_3) + k_3^2 (k_2 - k_1)$$

Calculation of a :

$$a = \frac{k_2(k_3 - 1) - k_3(k_2 - 1)}{k_1^2(k_3 - k_2) + k_2^2(k_1 - k_3) + k_3^2(k_2 - k_1)}$$

Calculation of b :

$$b = \frac{k_3(k_3 - 1) - k_1(k_3 - 1)}{k_1^2(k_3 - k_2) + k_2^2(k_1 - k_3) + k_3^2(k_2 - k_1)}$$

Calculation of c :

$$c = \frac{k_1(k_1 - 1) - k_2(k_2 - 1)}{k_1^2(k_3 - k_2) + k_2^2(k_1 - k_3) + k_3^2(k_2 - k_1)}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Nesta situação-problema 2 podemos perceber que o grupo de estudantes conseguiu encontrar os valores das constantes a , b e c em função das raízes do polinômio característico que foi fornecido no problema proposto. No entanto, de acordo com o que foi previsto na fase de análise a priori eles deveriam ter chegado na seguinte equação para a fórmula de Binet:

$$N_r = ak_1^r + bk_2^r + ck_3^r,$$

onde,

$$a = \frac{(k_2 - 1)(k_3 - 1)}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)}, \quad b = \frac{(k_3 - 1)(k_1 - 1)}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_2)} \quad \text{e} \quad c = \frac{(k_1 - 1)(k_2 - 1)}{(k_3 - k_1)(k_3 - k_2)}.$$

Dessa forma, a análise dessa situação didática foi concluída com a apresentação da fórmula de Binet para a SN para o grupo de alunos e a importância dessa fórmula que permite encontrar qualquer termo da sequência sem ser necessário o cálculo da recursividade.

5.3 Análise a Posteriori da Situação Didática 3

O quarto encontro aconteceu com a presença dos 5 participantes: Aluno 1, Aluno 2, Aluno 3, Aluno 4 e Aluno 5. O pesquisador entregou a lista com a situação-problema a cada participante e logo depois fez uma leitura e uma breve explicação do problema. Neste momento o grupo de alunos começou a buscar a solução para o problema proposto.

Na situação-problema 3 pede-se que os alunos encontrem uma matriz geradora para a sequência de Narayana com índices inteiros não positivos, ou seja os alunos devem encontrar uma matriz Q^{-n} , onde Q é a matriz geradora para a sequência de Narayana com termos

positivos definida por $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Os alunos encontraram uma dificuldade inicial e o aluno 2 fez o seguinte questionamento, conforme podemos observar no diálogo:

Aluno 02: Professor, no caso da matriz geradora para a sequência com índice inteiro positivo nós tínhamos aquela matriz inicial Q . No caso da matriz para índices negativos não sabemos quem é a matriz Q^{-1} .

Professor: Será que é possível determinar essa matriz Q^{-1} ?

Aluno 3: Será a matriz inversa de Q ?

Professor: Como podemos encontrar essa matriz inversa?

Aluno: Através do cálculo da matriz identidade.

Assim, na figura 11 temos o aluno 1 na fase de ação. Inicialmente o aluno 1 percebeu que era necessário encontrar a matriz Q^{-1} que corresponde a inversa da matriz Q . Assim, o aluno utilizou o seguinte produto matricial:

$$Q \cdot Q^{-1} = I.$$

Onde $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e I é a matriz identidade de ordem 3 definida por $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Seja $Q^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, então o aluno 3 usou o seguinte produto matricial:

$$Q \cdot Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo, efetuando o produto matricial o aluno encontrou a matriz $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Figura 11-Fase de ação pelo aluno 1-Matriz geradora para a sequência de Narayana com índice inteiro não positivo.

Aula 2

$$Q \cdot Q^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+g & b+h & e+i \\ a & b & e \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a+g=1$ $b+h=0$ $e+i=0$
 $g=1$ $h=-1$ $i=0$
 $a=0$ $d=0$
 $b=1$ $e=0$
 $c=0$ $f=1$

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_0 & N_{-2} & N_{-1} \\ N_{-1} & N_{-3} & N_{-2} \\ N_{-2} & N_{-4} & N_{-3} \end{pmatrix}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Na figura 12 temos o aluno 1 dando continuidade a fase de ação da situação proposta. Depois do cálculo da matriz inversa Q^{-1} , os alunos efetuaram alguns cálculos de potências de matrizes com o objetivo de encontrar alguma relação entre os termos da sequência e os termos das matrizes encontradas nos produtos efetuados. No entanto, o aluno 5 percebeu que seria necessário encontrar mais produtos das matrizes já que muitos termos estavam se repetindo e não estava sendo possível estabelecer um padrão.

Assim, os alunos foram incentivados a calcular outros produtos de matrizes para que fosse possível aparecer termos distintos e assim estabelecer uma relação entre os termos das matrizes e os termos da sequência para índice inteiro não positivo.

Figura 12-Fase de ação pelo aluno 1-Matriz geradora para a sequência de Narayana com índice inteiro não positivo.

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-2} = Q^{-1} \cdot Q^{-1}$$

$$Q^{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Neste momento o pesquisador indagou os estudantes se eles tinham conseguido estabelecer alguma relação entre os termos da SN e os termos encontrados nas matrizes, obtendo a seguinte resposta dada pelo aluno 3:

Professor, quando fui fazendo o cálculo das potências das matrizes eu percebi que os termos que apareciam nessas matrizes eram exatamente os termos da sequência de Narayana com índices negativos, aí consegui encontrar uma matriz generalizada que nos permite encontrar qualquer termo.

Assim, na figura 13 temos o momento de formulação da situação-problema pelo aluno 3. Ele percebeu que:

$$Q^{-2} = \begin{pmatrix} N_{-1} & N_{-3} & N_{-2} \\ N_{-2} & N_{-4} & N_{-3} \\ N_{-3} & N_{-5} & N_{-4} \end{pmatrix}$$

$$Q^{-4} = \begin{pmatrix} N_{-3} & N_{-5} & N_{-4} \\ N_{-4} & N_{-6} & N_{-5} \\ N_{-5} & N_{-7} & N_{-6} \end{pmatrix}$$

Assim, conseguiu estabelecer a seguinte identidade matricial:

$$Q^{-r} = \begin{pmatrix} N_{-r+1} & N_{-r+1} & N_{-r} \\ N_{-r} & N_{-r+2} & N_{-r-1} \\ N_{-r-1} & N_{-r+3} & N_{-r-2} \end{pmatrix}.$$

Figura 13-Fase de formulação pelo aluno 3-Matriz geradora da sequência de Narayana para índice inteiro não positivo.

Questão 1.2 Aula 02

Dado Q^R , queremos encontrar Q^{-R}

$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$Q^1 \cdot Q = I \Rightarrow Q^{-1} = I \Rightarrow Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\frac{Q^{-2}}{Q^{-1} - Q^1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\frac{Q^{-4}}{Q^{-2} - Q^{-2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} N_{-R+1} & N_{-R-1} & N_{-R} \\ N_{-R} & N_{-R-2} & N_{-R-1} \\ N_{-R-1} & N_{-R-3} & N_{-R-2} \end{pmatrix} = Q^{-R}$

Obs: Podemos trocar $N_{-5} - N_{-2}$ por exemplo, pois
 em termos de N_{-2} , assim vindo a posicionar nossa ideia
 (temos na para que vale N_{-R-1})

Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse momento foi questionado aos alunos se a relação encontrada pelo aluno 3 seria verdadeira. O professor então perguntou o que garante que a igualdade será válida para qualquer valor de r , conforme podemos observar no seguinte diálogo:

Professor: Será que a identidade matricial encontrada é válida para todo valor de r ?

Aluno 3: Professor, eu fiz até o cálculo do r sendo 4 e deu certo.

Professor: O que garante que será válida para $r = 10$, por exemplo?

Aluno 2: Acho que tem que demonstrar.

Professor :Como podemos demonstrar?

Aluno 1: Podemos usar o princípio de indução sobre r .

Após esta troca de informações, os alunos voltaram para o problema em busca da demonstração da identidade matricial, mas manifestaram algumas dúvidas pelo fato de a potência está elevada a expoente negativo e alguns não lembravam de todos os passos da demonstração seguida no princípio de indução matemática. Assim, foi necessária uma pequena revisão sobre o princípio de indução matemática. Mesmo com a revisão, somente o aluno 5 conseguiu a demonstração da identidade matricial.

No momento de validação o aluno 5 usou o princípio de indução finita para a demonstração da identidade matricial conforme podemos observar na figura 14:

Seguindo o princípio de indução finita o aluno 4 partiu do seguinte produto matricial:

$$Q^{-(r+1)} = Q^{-r} Q^{-1}.$$

Como $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e assumindo que

$$Q^{-r} = \begin{pmatrix} N_{-r+1} & N_{-r-1} & N_{-r} \\ N_{-r} & N_{-r-2} & N_{-r-1} \\ N_{-r-1} & N_{-r-3} & N_{-r-2} \end{pmatrix},$$

então:

$$\begin{aligned} Q^{-(r+1)} &= Q^{-r} Q^{-1} = Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{-r+1} & N_{-r-1} & N_{-r} \\ N_{-r} & N_{-r-2} & N_{-r-1} \\ N_{-r-1} & N_{-r-3} & N_{-r-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} N_{-r} & N_{-r-2} & N_{-r-1} \\ N_{-r-1} & N_{-r-3} & N_{-r-2} \\ N_{-r-2} & N_{-r-4} & N_{-r-3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Figura 14-Fase de validação pelo aluno 5-Matriz geradora para a sequência de Narayana com índice inteiro não positivo.

DADO Q^0 , VERIFICAMOS ENCONTRO Q^{-N} .

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} \cdot Q = I \quad \Leftrightarrow \quad Q^{-1} = \frac{I}{Q} \quad \Leftrightarrow \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-2} = Q^{-1} \cdot Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-3} = Q^{-2} \cdot Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{matrix} Q^{-1} \\ Q^{-2} \\ Q^{-3} \end{matrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} N-R+1 & N-R & N-R \\ N-R & N-R-1 & N-R-1 \\ N-R-1 & N-R-2 & N-R-2 \end{pmatrix} = Q^{-N}$$

"OBSERVAÇÃO: PODEMOS TROCAR $N \rightarrow N-2$ POR CADA Q , POIS OS TERMOS SÃO SE APENAS NEGATIVOS, ASSIM GANHAMOS FACILIDADE NA NOSSA VIDA."

$$Q^{-1} \cdot Q^{-N} = \begin{pmatrix} N-R+1 & N-R & N-R \\ N-R & N-R-1 & N-R-1 \\ N-R-1 & N-R-2 & N-R-2 \end{pmatrix} = Q^{-N-1} = \begin{pmatrix} N-R & N-R-1 & N-R-1 \\ N-R-1 & N-R-2 & N-R-2 \\ N-R-2 & N-R-3 & N-R-3 \end{pmatrix}$$

PODE RECONHECER A
 $N-R = N-3-R = N-2-R$

"OU SEJA, VAMOS A TER A MESMA PROPRIEDADE DA MATRIZ Q^{-1} ."

Fonte: Dados da pesquisa

O encontro foi concluído com a apresentação do pesquisador ao grupo de estudantes da importante identidade matricial que permite encontrar qualquer termo da SN com índices inteiros não positivos.

O objetivo da situação didática foi atingido, uma vez que os alunos conseguiram encontrar a identidade matricial, porém, no momento de validação somente o aluno 5 conseguiu fazer a demonstração da identidade matricial.

5.4 Análise a Posteriori da Situação Didática 4

O quinto encontro iniciou-se com o pesquisador entregando a lista com a situação-problema a cada participante e explicando que o problema proposto estava relacionado com o processo de complexificação da SN. Assim, na situação-problema 5 foram trabalhadas as

relações Recorrentes Bidimensionais de Narayana tendo em vista o processo de complexificação dessa sequência.

Após um determinado tempo, os estudantes foram indagados sobre o que tinham conseguido fazer, obtendo a seguinte resposta do aluno 5:

Professor, eu usei a fórmula de recorrência que foi dada no problema e substitui a variável n por alguns valores tais como $n=1, 2, 3, \dots$, e mantive a variável m constante sendo $m=1$ e depois substitui a variável $m=0, 1, 1, \dots$, e consegui estabelecer umas relações.

Assim, na figura 15 temos a fase de ação acontecendo pelo aluno 5 que conseguiu estabelecer mais duas propriedades importantes tais como: $N(n, 1) = N_n + N_{n+1}i$ e $N(1, m) = N_{m+1} + N_m i$.

Figura 15-Fase de ação pelo aluno 5-Relações Bidimensionais de Narayana.

Handwritten mathematical work showing the derivation of Narayana's bivariate recurrence relations. The work is divided into two main parts: one for $N(n, 1)$ and one for $N(1, m)$.

Part 1: $N(n, 1)$

Initial conditions: $N(0, 1) = i$, $N(1, 1) = 1 + i$, $N(2, 1) = 1 + i$.

Recurrence relation: $N(n+1, 1) = N(n, 1) + N(n-2, 1)$.

Derivation: $N(n+1, 1) = N_n + N_{n+1}i + N_{n-2} + N_{n-1}i$.

Final result: $N(n+1, 1) = N_{n+1} + N_n i$.

Part 2: $N(1, m)$

Initial conditions: $N(1, 0) = 1$, $N(1, 1) = 1 + i$, $N(1, 2) = 1 + i$.

Recurrence relation: $N(1, m+1) = N(1, m) + N(1, m-2)$.

Derivation: $N(1, m+1) = N_{m+1} + N_m i + N_{m-1} + N_{m-2}i$.

Final result: $N(1, m+1) = N_{m+1} + N_m i$.

Fonte: Dados da pesquisa

Neste momento o pesquisador voltou a indagar o grupo de estudantes, conforme podemos observar no seguinte diálogo:

Professor: Deu para entender a ideia do colega de vocês?

Aluno 3: Sim, deu para entender.

Aluno 2. Sim. Ele usou a fórmula de recorrência que foi dada no problema.

Professor: O problema está resolvido?

Aluno 1: Não. Precisamos encontrar uma fórmula geral para $N(n,m)$.

Aluno 5: Vou tentar encontrar essa fórmula geral.

Os alunos calcularam alguns termos da sequência bidimensional obtendo o seguinte:

$$N(2,3) = N(2,2) + N(2,0) = (1+i) + 1 = 2+i$$

$$N(3,2) = N(2,2) + N(2,0) = 1+i+1 = 2+i$$

$$N(3,3) = N(3,2) + N(3,0) = (1+2i) + 1 = 2+2i$$

$$N(4,4) = N(3,4) + N(1,4) = (3+4i) + (3+2i) = 6+4i$$

Assim, durante a fase de formulação os alunos conseguiram generalizar a relação bidimensional de Narayana, obtendo a fórmula geral:

$$N(n,m) = N_n N_{m+1} + N_{n+1} N_m i.$$

Neste momento, o pesquisador voltou a indagar o grupo de estudantes perguntando se essa fórmula era válida para quaisquer valores naturais de n , m , conforme podemos observar no seguinte diálogo:

Professor: Será que esta fórmula é válida para quaisquer valores de n,m ?

Aluno 1: Precisamos mostrar que vale para m,n naturais.

Aluno 5: Temos que provar.

Professor: Como podemos demonstrar?

Aluno 5: Podemos usar o princípio de indução matemática.

Os estudantes tiveram dificuldade para a demonstração da fórmula geral, uma vez que tinha que utilizar o segundo princípio de indução matemática, sendo necessário fazer uma pequena revisão sobre este princípio. Assim, após revisão sobre o segundo princípio de indução matemática, tem-se a fase de formulação e validação pelo aluno 5, conforme podemos observar na figura 16:

Figura 16-Fases de formulação e validação pelo aluno 5-Relações Bidimensionais de Narayana.

Handwritten mathematical work showing the derivation of Narayana's bidimensional sequence. The work is divided into two main parts, (I) and (II).

Part (I): Derives the recursive formula for $N(n, m)$ based on the previous row and column values.

$$N(2, 3) = N(2, 2) + N(2, 0) = (1+i) + 1 = 2+i$$

$$N(3, 2) = N(2, 2) + N(0, 2) = (1+i) + 1 = 1+2i$$

$$N(3, 3) = N(3, 2) + N(3, 0) = (1+i) + 1 = 2+i$$

$$N(3, 4) = N(3, 3) + N(3, 1) = (2+i) + (1+i) = 3+2i$$

$$N(4, 3) = N(3, 3) + N(1, 3) = (2+i) + (1+i) = 3+2i$$

$$N(4, 4) = N(3, 4) + N(1, 4) = (3+2i) + (3+2i) = 6+4i$$

Generalizing the pattern, the student writes:

$$N(n, m) = N_{n \times n, m+1} + N_{n+1 \times n, m}$$

Devemos provar (I).

Part (II): Verifies the recursive formula for $N(n+1, m)$ using the previous row and column values.

$$N(n+1, m) = N(n, m) + N(n-1, m)$$

$$N(n+1, m) = N_{n \times n, m+1} + N_{n+1 \times n, m} + N_{n-1 \times n, m+1} + N_{n-1 \times n, m}$$

$$N(n+1, m) = N_{n+1 \times n, m+1} + (N_{n+2 \times n, m+1} + N_{n+2 \times n, m})$$

Part (III): Verifies the recursive formula for $N(n, m+1)$ using the previous row and column values.

$$N(n, m+1) = N(n, m) + N(n, m-1)$$

$$N(n, m+1) = N_{n \times n, m+1} + N_{n+1 \times n, m} + N_{n \times n, m-1} + N_{n+1 \times n, m-1}$$

$$N(n, m+1) = N_{n \times n, m+2} + N_{n+1 \times n, m+1}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

O encontro foi concluído com a apresentação da sequência bidimensional de Narayana aos estudantes e ainda a possibilidade de estender essa sequência para a sua forma tridimensional. Podemos perceber que o objetivo da situação didática foi atingido uma vez que os alunos conseguiram entender o processo de complexificação da SN.

5.5 Análise a Posteriori da Situação Didática 5

O quinto encontro iniciou-se com o pesquisador entregando a lista com a situação-problema proposta e a apresentação de alguns conceitos importantes como a definição de quaternion. Assim, na situação-problema 5 foram estudados os quaternions de Narayana. Dessa forma, são inseridas unidades imaginárias nestes números, continuando com o processo de complexificação dessa sequência, explorando a forma matricial e o comportamento desses termos inteiros não positivos.

Após a leitura e explicação do problema, os estudantes iniciaram a busca pela solução usando seus conhecimentos prévios e as informações contidas na própria situação-problema proposta.

Assim, na situação de ação o aluno 5 conseguiu encontrar alguns termos com índices inteiros não negativos a partir da recorrência dos Quaternions para índices inteiros positivos conforme podemos observar na figura 17.

A partir dos termos encontrados o aluno 5 conseguiu encontrar uma recorrência para os Quaternions de Narayana com índices inteiros não positivos

Figura 17-Fase de ação pelo aluno 5-Quaternions de Narayana.

LISTA 04 (H.M.)

①

$$QN_n = QN_{n-1} + QN_{n-3}$$

$$QN_2 = QN_1 + QN_0$$

$$QN_{-1} = 1-i+i-i+2j-j+3k-k$$

$$\boxed{QN_{-1} = j+k}$$

$$QN_{-2} = QN_0 + QN_{-3}$$

$$QN_{-2} = QN_1 - QN_0$$

$$\boxed{QN_{-2} = 1+k}$$

$$QN_{-3} = QN_0 - QN_{-1}$$

$$\boxed{QN_{-3} = i}$$

$$QN_{-4} = QN_1 - QN_{-2}$$

$$\boxed{QN_{-4} = j-1}$$

$$QN_{-5} = QN_{-2} - QN_{-3}$$

$$\boxed{QN_{-5} = k}$$

②

$$\left. \begin{array}{l} QN_{-1} = QN_2 - QN_0 \\ QN_{-2} = QN_1 - QN_0 \end{array} \right\} QN_{-n} = QN_{n+3} - QN_{n+2}$$

$$\boxed{QN_n = QN_{n+3} - QN_{n+2}}$$

vale p/ todos os casos acima.

Fonte: Dados da pesquisa.

Na fase de formulação o aluno partiu da matriz dos Quaternions de Narayana para índices inteiros positivos para obter a matriz geradora para os Quaternions com índices não positivos. Assim percebeu que se tomasse a matriz Q^{-n} e multiplicasse pela matriz

$$\begin{pmatrix} QN_4 & QN_2 & QN_3 \\ QN_3 & QN_1 & QN_2 \\ QN_2 & QN_0 & QN_1 \end{pmatrix}$$
 iria obter a matriz geradora para os Quaternions para índices inteiros

não positivos, conforme podemos observar na figura 18:

Figura 18-Fase de formulação pelo aluno 5-Quaternions de Narayana.

$$Q^n \cdot U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} QN_4 & QN_2 & QN_3 \\ QN_3 & QN_1 & QN_2 \\ QN_2 & QN_0 & QN_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} QN_{n+4} & QN_{n+2} & QN_{n+3} \\ QN_{n+3} & QN_{n+1} & QN_{n+2} \\ QN_{n+2} & QN_n & QN_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$Q^{-n} \cdot U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-n} \begin{bmatrix} QN_4 & QN_2 & QN_3 \\ QN_3 & QN_1 & QN_2 \\ QN_2 & QN_0 & QN_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} QN_{-n+4} & QN_{-n+2} & QN_{-n+3} \\ QN_{-n+3} & QN_{-n+1} & QN_{-n+2} \\ QN_{-n+2} & QN_{-n} & QN_{-n+1} \end{bmatrix}$$

Fonte: Dados da pesquisa

No momento da formulação da situação houve algumas trocas de informações entre o pesquisador e alunos, conforme podemos observar no seguinte diálogo:

Professor: Como você chegou nessa relação matricial?

Aluno 5: Teve uma aula que foi falado sobre matrizes, então considerei a matriz Q^{-1} .

Aluno 1: Verdade. A gente já tinha encontrado essa matriz.

Professor: O problema está resolvido?

Aluno 5: Precisamos demonstrar por indução matemática. Vou tentar.

Na fase de validação, os estudantes manifestaram algumas dúvidas, pelo fato da matriz está elevada a potência negativa, sendo necessário um esclarecimento sobre o cálculo de potências de matrizes com expoente negativo. Na figura 19 temos o aluno 5 na fase de validação da situação da situação proposta. Para a demonstração da situação-problema foi usando o princípio de indução finita.

Figura 20-Fase de ação pelo aluno 5 -Propriedades dos números de Narayana

$$\begin{aligned} \det(M_{n+1,k}) &= \binom{n-1}{k} \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k} \binom{n}{k+1} \\ \det(M_{n+1,k}) &= \binom{p-2}{k} \binom{p}{k+1} - \binom{p-1}{k} \binom{p-1}{k+1} \\ \det(M_{n+1,k}) &= \binom{p-2}{k} \binom{p-1}{k} \left[\frac{p-1-k}{k+1} \right] - \binom{p-1}{k} \binom{p-1}{k+1} \\ &= \binom{p-1}{k} \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Podemos perceber que o aluno 5 inicialmente calculou o determinante da matriz que foi dada no problema tentando chegar na definição do número de Narayana. Porém não conseguiu chegar na fórmula desejada conforme podemos observar no seguinte trecho da gravação:

Professor, eu usei a fórmula do determinante de uma matriz de ordem 2 aí tentei usar algumas propriedades dos números binomiais para chegar na definição do número de Narayana, mas não consegui estabelecer nenhuma relação. Vou tentar aqui de novo.

O aluno 4 conseguiu estabelecer inicialmente uma relação importante a partir do cálculo do determinante da matriz que foi dada no problema como podemos observar no seguinte diálogo:

Professor: conseguiu estabelecer alguma relação entre a matriz dada e os números de Narayana?

Aluno 4: inicialmente calculei o determinante como meu colega fez.

Professor: Ok. E depois conseguiu alguma estabelecer alguma relação?

Aluno 4: Eu usei a definição de número binomial e desenvolvi cada expressão.

Dessa forma, na figura 21 temos o aluno 4 na fase de formulação. Usando a definição de determinante de matriz de ordem 2 o aluno iniciou o cálculo do determinante da matriz definida na situação-problema proposta e usando a definição de número binomial ele conseguiu desenvolver as expressões.

Figura 21-Fase de formulação pelo aluno 4-Propriedades dos números de Narayana.

$$\binom{n-1}{k} \cdot \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k+1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \cdot \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} - \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n-1}{k} \left(\frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} - \frac{n \cdot n!}{(k+1)!(n-k)!} \right)$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Após a troca de informações entre pesquisador e estudantes foi possível um avanço na situação proposta. De fato, os estudantes lembraram bem da definição de números binomiais. Nas figuras 21 e 22 temos o aluno 5 na fase de validação da situação-problema 6. O aluno usou seus conhecimentos prévios sobre números binomiais para demonstrar a propriedade matricial pedida na situação-problema proposta. O aluno 5 conseguiu estabelecer a importante identidade:

$$\begin{aligned} \det(M_{n,k}) &= \binom{n-1}{k} \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1} \binom{n}{k} \\ &= \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \binom{n-1}{k} \\ &= N(n, k). \end{aligned}$$

Onde,

$$M_{n,k} = \begin{pmatrix} \binom{n-1}{k} & \binom{n}{k+1} \\ \binom{n}{k} & \binom{n+1}{k+1} \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, o objetivo da situação didática foi alcançado uma vez que os estudantes conseguiram estabelecer a identidade matricial que era solicitada no problema proposto. O encontro foi finalizado com o pesquisador fazendo um resumo sobre tudo o que foi visto na aula e apresentando aos alunos uma importante propriedade dos números de Narayana e a sua relação com os números binomiais.

Nesta seção fizemos uma análise e discussão das soluções das situações-problema apresentadas pelos alunos do curso de Licenciatura em Matemática e realizamos uma comparação entre as fases de análise a priori e posteriori com base nos dados coletados durante a fase de experimentação. Destacamos que esta validação ocorreu de forma interna, uma vez que foram analisadas apenas as produções observadas nesta pesquisa.

Durante a aplicação da pesquisa e no momento de resoluções das situações-problema pelos alunos foi possível perceber algumas dificuldades iniciais, sobretudo no momento de demonstração das propriedades matemáticas exigidas por cada situação problema, que corresponde a fase de validação da situação proposta. Temos que uma importante propriedade que foi exigida nas soluções das atividades foi o princípio de indução matemática, onde os estudantes demonstraram dificuldades em usar esse princípio, ou ainda não lembraram de todos os passos seguidos na indução matemática, sendo necessária uma troca de informações entre professor e alunos para a superação dessas dificuldades.

Alguns alunos falaram que esse assunto era novo para eles, isso se justifica pelo fato de o assunto abordado nas situações de ensino serem ausentes em livros de História da Matemática e até mesmo no curso de Licenciatura em Matemática. No entanto, no decurso da aplicação da pesquisa os estudantes foram evoluindo em seus conceitos e na forma de apresentarem as soluções das situações-problema.

Destacamos que outros assuntos importantes da Matemática foram aparecendo ao longo da aplicação da pesquisa, como Matrizes, princípio de indução matemática, números binomiais, números complexos e outros assuntos pertinentes da Álgebra Linear, como por exemplo, os quaternions. Assim, a pesquisa permitiu aos estudantes participantes o contato com novos objetos de estudo e uma revisão de conteúdos mais pertinentes ao curso de Licenciatura em Matemática.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

De acordo com as orientações metodológicas da ED e levando em consideração os objetivos traçados neste trabalho, foi feito um estudo detalhado dos dois objetos matemáticos: A sequência de Narayana e os números de Narayana. Destacamos que este estudo foi feito a partir de artigos científicos publicados envolvendo este assunto. Esta fase corresponde a primeira fase da ED: Análise preliminar.

Neste primeiro momento podemos destacar alguns conceitos e propriedades matemáticas importantes envolvendo os objetos de estudo. Sobre a sequência estudada podemos citar: Fórmula de Binet, extensão ao conjunto dos Inteiros, propriedades matriciais, sobre o processo de complexificação tivemos o estudo das relações recorrentes n -dimensionais, dos quaternions, octonions, sedenions e finalmente sobre os números de Narayana foram estudadas algumas propriedades e interpretações combinatórias.

Estes assuntos são publicados em periódicos de Matemática pura, não existindo uma preocupação metodológica com o ensino de tais conceitos e ausentes em livros de História da Matemática, o que nos leva a perceber a importância de se fazer uma transposição didática deste assunto.

Dessa forma, a partir do estudo feito nessa primeira parte da pesquisa foi possível a elaboração de algumas situações didáticas formadas por situações-problema envolvendo estes assuntos que foram aplicadas no curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), especificamente na disciplina de História da Matemática.

Para a aplicação e desenvolvimento das situações de ensino escolhemos a TSD como teoria de ensino, por ser uma teoria que instiga o lado intuitivo e investigativo dos alunos, levando-os a descoberta de definições, teoremas, propriedades matemáticas e por colocar o estudante como autônomo no seu processo de aprendizagem.

Durante a aplicação da pesquisa e no momento de resoluções das situações-problema pelos alunos foi possível perceber algumas dificuldades iniciais, sobretudo no momento de demonstração das propriedades matemáticas exigidas por cada situação problema, que corresponde a fase de validação da situação proposta. Temos que uma importante propriedade que foi exigida nas soluções das atividades foi o princípio de indução matemática, onde os estudantes demonstraram dificuldades em usar esse princípio, ou ainda não lembraram de todos os passos seguidos na indução matemática, sendo necessária uma troca de informações entre professor e alunos para a superação dessas dificuldades.

Alguns alunos falaram que esse assunto era novo para eles, isso se justifica pelo fato de o assunto abordado nas situações de ensino serem ausentes em livros de História da Matemática e até mesmo no curso de Licenciatura em Matemática. No entanto, no decurso da aplicação da pesquisa os estudantes foram evoluindo em seus conceitos e na forma de apresentarem as soluções das situações-problema.

A partir da análise dos dados desta pesquisa foi possível perceber que os alunos conseguiram apresentar soluções para situações-problema propostas usando seus conhecimentos prévios e ampliando seus conceitos, suas concepções sobre os assuntos abordados durante aplicação desta pesquisa.

Destacamos que outros assuntos importantes da Matemática foram aparecendo ao longo da aplicação da pesquisa, como Matrizes, Função, princípio de indução matemática, números binomiais, números complexos e outros assuntos pertinentes da Álgebra Linear, como por exemplo, os quaternions. Assim, a pesquisa permitiu aos estudantes participantes o contato com novos objetos de estudo e uma revisão de conteúdos mais pertinentes ao curso de Licenciatura em Matemática.

Dessa forma, foi possível apresentar aos professores de Matemática em formação inicial um concepção histórica-evolutiva de alguns resultados oriundos da História da Matemática, com destaque para a SN e os NN.

Sobre a teoria de ensino utilizada durante a aplicação desta pesquisa os estudantes manifestaram surpresa uma vez que no curso de Licenciatura em Matemática eles estão acostumados com o modelo tradicional de ensino. Destacaram a importância de se colocar o aluno como sujeito ativo no processo de aprendizagem o que é proporcionado pela TSD.

Como perspectiva futura para este trabalho podemos destacar que os conteúdos matemáticos trabalhados não se esgotam aqui conforme podemos observar já existe na literatura a generalização dos números de Narayana e a relação da sequência de Narayana com outras sequências recorrentes de natureza parecida que pode ser fruto de pesquisas futuras envolvendo este assunto.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. da. Engenharia didática: evolução e diversidade. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 22-52, 2012.

ALMOULOUD, S. A. Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. **REVEMAT- Revista eletrônica de educação matemática** – Florianópolis (SC), v. 11, n. 2, p. 109-141, 2016.

ALVES, F. R. V. Uma discussão de artigos envolvendo propriedades da sequência de fibonacci apoiada na tecnologia. **Anais do VI HTEM**, p. 1–17, 2013. Disponível em: http://htem2013.dm.ufscar.br/anais/anais_do_vi_htem_ufscar_2013.html.

ALVES, F. R. V. Engenharia didática (análises preliminares e análise a priori): o caso das equações diferenciais de segunda ordem. **Ensino de Ciências e Tecnologia em Revista**, n. 2, p. 1–22, 2016a.

ALVES, F. R. V. Engenharia didática: implicações para a pesquisa no âmbito do ensino em análise complexa - ac. **Ciência e Natura**, v. 38, n. 2, p. 694–715, 2016b.

ALVES, F. R. V.; NETO, H. B. A existência de sequência de fibonacci no campo dos inteiros: uma atividade de investigação apoiada nos pressupostos da sequência fedathi. **Boletim Gepem**, n. 59, p. 135–140, 2011.

ALVES, F. R. V. Engenharia Didática de Formação (edf): sobre o ensino dos números (Generalizados) de Catalan (ngc). **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 20, n. 2, p. 47 – 83, 2018. Disponível em: revistas.pucsp.br/emp/article/view/36808. Acesso em: 12/04/2019.

ALVES, F. R. V.; OLIVEIRA, R. R. Sobre o modelo de Fibonacci na variável complexa: identidades generalizadas. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 11, p. 116-135, 2017.

ALVES, F. R. V. Sequência de Oresme e algumas propriedades (matriciais) generalizadas. **C.Q.D. -Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru**, v. 16, p.28-52, dez. 2019.

ALVES, F. R. V. Didática de Matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. **Interfaces da Educação, Paranaíba**, v. 7, n. 21, p.131-150, 2016c.

ALVES, F.R.V. Brahmagupta e alguns elementos históricos da matemática hindu. **Revista Thema**, v. 16, p.1/1-19, 2019.

ARTIGUE, M. et al. Ingenieria Didactica en Educación Matemática: Um esquema para la investigación y la innovación em la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, 1995.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

ASCI, M.; GUREL, E. On bivariate complex Fibonacci and Lucas Polynomials. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics**, v. 18, n. 1, p. 1–25, 2012.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento**. Tradução: Esteia dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BAG, A. K. **The method of integral solution of indeterminate equation of the type: $by=ax\pm c$** . Ancient and medieval India Indian Journal of History of Science, 12 (1). pp. 1-16. 1977. Disponível em: <http://repository.ias.ac.in/74660/>.

BEZERRA, F. H. C.; ALVES, F. R. V.; VIEIRA, R. P. M. Relações recorrentes bidimensionais e tridimensionais de Narayana. **C. Q. D.- Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 18, p. 12-28, 2020.

BEZERRA, F. H. C.; ALVES, F. R. V. Interpretações combinatórias e propriedades dos números de Narayana. *Revista Thema*, v. 17, p. 754–764, 2020.

BICKNELL, M. Roots of Fibonacci Polynomials. **The Fibonacci Quartely**, [S.l.], v.11, n. 3, p.271-274, Oct. 1973. Disponível em: <<http://www.fq.math.ca/Scanned/113/hoggatt1>.

BREMNER, MURRAY. **An Introduction to the Narayana Numbers**. Department of Mathematics and Statistics College of Arts and Science University of Saskatchewan1 Saskatoon, Saskatchewan, Canada. Combinatorics Seminar Tuesday 27 March, 2018.

BROUSSEAU, G. **La problématique et l'enseignement de la mathématiques**. Comptes rendus de la XXVIIIe reencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques.Louvain-la-Neuve, p. 101–117, 1976.

BROUSSEAU, G. **Ingénierie didactique. d'un problème à l'étude à priori d'une situation didactique**. Deuxième École d'Été de Didactique des mathématiques, Olivet, p. 39-60, 1982.

BROUSSEAU, B. A. A Fibonacci generalization. **Fibonacci Quarterly**, [S.l.], v. 5, n. 2, p. 171 – 175, Apr. 1967. Disponível em: < <http://www.fq.math.ca/Scanned/52/brousseau1.pdf>.

CALLAN D. **Generalized Narayana numbers** (2017). Disponível em: <https://oeis.org/A281260/a281260.pdf>.

CARNEIRO, V. C. G. **Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática**. Zetetike, Campinas: UNICAMP, v. 13, n. 23, p. 85118, 2005.

CERDA- MORALES, G. Identities involving Narayana numbers, **arXiv:1805.02255v1 [math.CO]**, 2018. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1805.02255.pdf>. Acesso em: 25 maio de 2020.

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado**. 3. ed. Argentina: Aique, 1998.

CONWAY, J. H. & SMITH, D. A. **On quaternions and Octonions: their geometry, arithmetic and symmetry**. London: A. K. Peters, 2003.

D "AMORE, B. **Epistemologia, Didática da Matemática e Práticas de Ensino**. Bolema, Rio Claro, SP, v. 20, n. 28, p.179-205, 2007. Disponível em:

<<http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1537/131>.

DHANAVE, M.N.; KANGALE, M.A. The Implementation of Vedic Mathematics to Algebra and Geometry. **Journal of Mathematics**. v. 10, nº 2, 33 – 36, 2014. Disponível em: www.iosrjournals.org/iosr-jm/papers/Vol10-issue2/Version-7/F010273336.pdf.

DUTTA, A. K. **Mathematics in Ancient India**. Resonance, april, v. 1, nº 1, 1 – 16, 2002. Disponível em: <https://www.ias.ac.in/article/fulltext/reso/007/04/0004-0019>.

GÁLVEZ, G. A Didática da Matemática. In: PARRA, C.; SAIZ, I. **Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas**. Tradução de: Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: ArtMed, 1996. Cap. 2. p. 26-35.

GRIMALDI, RALPH. P. **Fibonacci and Catalan Numbers: An Introduction**. New York: Wiley and Sons Publishers, 2012.

HAMILTON, W. R.; Researches respecting quaternions: first series. **Transactions of the Royal Irish Academy**, v. 21, parte 1, p. 199–296, 1848

HALICI, S. On Fibonacci Quaternions. **Adv. Appl. Clifford Algebras**, 22(2), 321-327, 2012.

HALICI, S. On Complex Fibonacci Quaternions. **Adv. Appl. Clifford Algebras**, 23, 105-112, 2013.

HORADAM. A. F. Complex Fibonacci Numbers Quaternions. **The Americal Mathematical Monthly**, v. 70, n. 3, p. 289– 291, 1963. Disponível em: < <https://doi.org/10.2307/2313129> >

HORADAM, A. F. Quaternion Recurrence relations. **Ulam Quarterly**, v. 2, n. 2, p. 23–33, 1993.

JOSEPH, George. G. **Indian mathematics : engaging with the world from ancient to modern times** / George Gheverghese Joseph (NUS, Singapore & University of Manchester, UK & McMaster University, Canada, 2016.

KAUERS, Manuel; PAULE, Peter. **The concrete tetrahedron: symbolic sums, recurrence equations, generating functions, asymptotic estimates**. New York: Springer, 2010.

KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas Numbers with Applications**. New York: Wileyand Sons publications, 2001

LABORDE, C. **Affronter la complexité des situations didactiques d apprentissage des mathématiques en classe: défis et tentatives**. DIDASKALIA, n.10, p. 97 -112, 1997. Disponível em:< <http://documents.irevues.inist.fr/handle/2042/23800>.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**. Rio de Janeiro: SBM, 1998.

MAYNARD, P. **Generalized Binet formulae**. Applied Probability Trust, [S.l.], v. 67, n. 2, 2008. Disponível em: <http://ms.appliedprobability.org/data/files/Articles%2040/40-3-2.pdf>

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: MACHADO, S. D. A. (org.). **Educação Matemática: Uma introdução**. 2 ed. São Paulo: Educação, 2002. p. 197-208

MENON, M. J. Sobre as origens das definições dos produtos escalar e vetorial. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 31, n. 2, 2305, p. 1 – 11, 2009.

KATZ, Victor. **The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam**. Princeton: Princeton University Press, 2007.

KESKIN, R. & DEMİRTÜRK, B. **Some new Fibonacci and Lucas identities by matrix methods**. International Journal of Mathematics Education and Science and Technology. [S.l.], v. 41, n. 3, p. 379 – 387, 2010.

KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas Numbers with Applications**. New York: John Wiley and Sons, 2011.

OLIVEIRA, R. R.; ALVES, F. R. V.; PAIVA, R. E. B. Identidades bi e tridimensionais para os números de Fibonacci na forma complexa. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 11ic, p. 91-106, 2017.

OLIVEIRA, R.R. de. **Engenharia Didática sobre o Modelo de Complexificação da Sequência de Fibonacci: Relações Recorrentes N-dimensionais e Representações Polinomiais e matriciais**. Dissertação de Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE), 2018.

PARKER, F. D. On the General Term of a Recursive Sequence. **The Fibonacci Quartely**, [S.l.], v.2, n.1, p. 67-72, Feb.1964.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PETERSEN. T. Kyle. **Eulerien Numbers**. New York: T. Kyle Petersen ,2015.

PETKOVIC, Marko D. WATERFORD, Niš, Paul Barry. **Closed-form expression for hankel determinants of the narayana polynomials**. Czechoslovak Mathematical Journal. nº 62, 39 – 57(2012). Disponível em : http://cmj.math.cas.cz/full/62/1/cmj62_1_3.pdf.

PLOFKER, Kim. **Mathematics in India**. Princeton: Princeton University Press, 2009.

PLOFKER, Kim. **Mathematics in India**. Princeton: Princeton University Press, 2012.

POMMER, W. M. **A Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares**. São Paulo, 2013. Dispniável em: stoa.usp.br/wmpommer/files/3915/20692/Livro+Engª+Didática+2013.pdf.

PUTTASWAMY, T. K. **Mathematical Achievements of Pre-modern Indian Mathematicians**. New York: Elsevier, 2012.

RAMÍREZ, JOSÉ, L. & SIRVEN, V, R. **A note on k-narayana sequence**. *Annales Mathematicae et Informaticae*. nº 45, 91 – 105, 2015.

RAMA, P. **Indian contribution to mathematics in relation to ryabhata and brahmagupta**. Tibarewala University, India. 2017. Disponível em: <https://shodhganga.inflibnet.ac.in/handle/10603/192941>

SANTOS, A. A. **Engenharia Didática sobre o estudo e ensino da Fórmula de Binet como modelo de generalização e extensão da sequência de Fibonacci**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PGECM do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE. Fortaleza: IFCE, 2017, Disponível em: pgcem.fortaleza.ifce.edu.br/wp-content/uploads/2016/04/Dissertação-finalizada-com-a-catalográfica-final.pdf.

SANTOS, D. J. dos. **A Álgebra dos Complexos/Quaternions/Octônions e a construção de Cayley-Dickson**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática me Rede Nacional) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Catalão. Catalão: UFG, 2016, 101p. Disponível em: http://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UFG_d439bbd49e9f15c196ac8a2c30e1b83f.

SANTOS, A. P. R. A. **Situações Didáticas Olímpicas (SDO): um contributo da Engenharia Didática Clássica no ensino de Olimpíadas**. 2018. 144p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Ceará, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Fortaleza, 2018.

SATYA, Anshu & N. SHIVAKUMAR. **On the History of Indian Mathematics**. (IJITR) International journal of innovative technology and research. Volume No.3, Issue No.2, February – March 2015, 1915 – 1924, 2015. Disponível em: <http://ijitr.com/index.php/ojs/article/viewFile/526/pdf>

SARMA, K. V. **A History of Kerala School in Hindu Astronomy**. Panjab: Panjab University(1972). Disponível em: https://www.rarebooksocietyofindia.org/book_archive/196174216674_10153030067961675.pdf.

STANLEY, Richard P. **Catalan Numbers**. New York: Cambridge University Press, 2015.

SINGH, A. N. **On the use of series in Hindu mathematics**, *Osiris* 1, p. 606-628. (1936). Disponível em: www.anaphoria.com/hindu.PDF.

SOUZA, C. M. P.; LIMA, A.P.A. B. **O contrato didático a partir da aplicação de uma sequência didática para o ensino da progressão aritmética**. *Zetetiké*, Campinas, SP, v. 22, n. 42, p.31-61, jun./dez. 2014. Disponível em: <http://ojs.fe.unicamp.br/ged/zetetike/article/view/4360>

SYKOROVÁ, I. **Ancient Indian Mathematics**. WDS'06 Proceedings of Contributed Papers, Part I, 7–12, 2006. Disponível em: https://www.mff.cuni.cz/veda/konference/wds/proc/pdf06/WDS06_101_m8_Sykorova.pdf.

TEIXEIRA, P. J. M.; PASSOS, C. C. M. **Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau**. Zetetiké, Campinas, SP, v. 21, n. 39, p.155-168, jan./jun. 2013.

Disponível em: <https://www.fe.unicamp.br/revistas/ged/zetetike/article/view/4327/5110>

TULARAM, Gurudeo Anand. **Vedas and the Development of Arithmetic and Algebra**. Journal of Mathematics and Statistics. v. 6, nº 4, 468 – 480(2010). Disponível em : <https://thescipub.com/PDF/jmssp.2010.468.480.pdf>.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. Propriedades das extensões da Sequência de Padovan. **C.Q.D.– Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 15, p. 24-40, jul. 2019. Edição Iniciação Científica.

WADDILL, M. E; SACKS, L. Another Generalized Fibonacci Sequence. **The Fibonacci Quartely**, [S.l.], v. 5, n. 3, p. 209-222 , Oct.1967. Disponível em: <http://www.fq.math.ca/Scanned/5-3/waddill.pdf>

ZECKENDORF, E. A generalized Fibonacci Numeration. **The Fibonacci Quartely**, [S.l.], v. 10, n. 4, p. 365-372, Oct.1972. Disponível em: <http://www.fq.math.ca/Scanned/104/zeckendorf.pdf>

ANEXO A – TERMO DE COSSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO



TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Engenharia Didática com o tema: Sequência de Narayana e os números de Narayana

Pesquisador: Francisco Hedylene Coelho Bezerra

Orientador: Francisco Regis Vieira Alves

Você está sendo convidado a participar como voluntário de uma pesquisa. Este documento, chamado Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, visa assegurar seus direitos como participante e é elaborado em duas vias, uma que deverá ficar com você e outra com o pesquisador.

Por favor, leia com atenção e calma, aproveitando para esclarecer suas dúvidas. Se houver perguntas antes ou mesmo depois de assiná-lo, você poderá esclarecê-las com o pesquisador. Se preferir, pode levar este Termo para casa e consultar seus familiares ou outras pessoas antes de decidir participar. Não haverá nenhum tipo de penalização ou prejuízo se você não aceitar participar ou retirar sua autorização em qualquer momento.

Justificativa e objetivos:

Este estudo tem como questionamento norteador: Como desenvolver um estudo sobre o processo matemático de generalização da sequência de Narayana e dos números de Narayana, realizando situações didáticas que oportunizem a investigação de seus teoremas e suas propriedades em relação à sua origem e evolução histórica?

Justificativa:

A sequência de Narayana e os números de Narayana não são assuntos abordados pelos livros de História da Matemática (H.M). Esses livros apresentam apenas a sequência de Fibonacci de forma superficial, ou seja, não apresentam a evolução do processo evolutivo-matemático dessa sequência e nem apresentam outros exemplos de sequências que embora não sejam tão conhecidas apresentam propriedades matemáticas importantes, como por exemplo, a sequência de Narayana. A sequência de Narayana e os números de Narayana são assuntos abordados em artigos científicos de Matemática pura, onde não existe a preocupação com o seu ensino. Esta pesquisa busca transformar esse assunto em um conteúdo a ser ensinado, através de situações-problema propostas em sala de aula.

- **Objetivo geral da pesquisa**

- Desenvolver um estudo acerca da sequência de Narayana e dos números de Narayana bem como o seu processo de generalização, a fim de explorar em situações didáticas as propriedades destes números, visando o desenvolvimento histórico-evolutivo(epistemológico-matemático) da sequência de Narayana e dos números de Narayana.

Objetivos específicos:

1. Investigar os teoremas e propriedades inerentes à generalização da sequência de Narayana e dos números de Narayana.
2. Explorar, através de situações de ensino, as propriedades e teoremas da sequência de Narayana e dos números de Narayana.
3. Apresentar o desenvolvimento histórico-evolutivo, ou seja, epistemológico-matemático da sequência de Narayana e dos números de Narayana característico ao seu processo de generalização através da proposição de situações-problema em sala de aula.

Procedimentos:

Participando do estudo você está sendo convidado a participar de aulas remotas, onde serão coletados os dados através de gravações de áudio e vídeo, fotos e manuscritos. Estes procedimentos descritos acima ocorrerão através do Google meet e Google Classroom dentro do horário da aula de História da Matemática, não sendo necessário o deslocamento ao campus em outros períodos. Somente o pesquisador e orientador terão acesso ao material coletado e a identidade dos participantes será mantida em sigilo absoluto. As aulas remotas e coleta de dados deverão ocorrer no período de duas aulas (13:30-15:30). Ao fim da pesquisa, os dados serão discutidos pelos pesquisadores envolvidos e, em seguida, o material coletado na forma de fotos, gravações de áudio e vídeo serão descartados, ficando de posse dos pesquisadores por um período máximo de 12 meses.

Desconfortos e riscos:

Você não deve participar deste estudo caso sentir algum tipo de desconforto ou se sentir constrangido com as gravações de vídeo e áudio e com as fotos que serão tiradas durante a coleta de dados. Os riscos para quem participar dessa pesquisa são mínimos, tais como constrangimento com as gravações que serão feitas. Caso não se sinta à vontade em ser fotografado poderá solucionar as situações-problema na própria folha de papel. A sua imagem em nenhum momento será exposta e as gravações serão apenas para que nós pesquisadores percebamos a forma que você encontrou para resolver as situações-problemas propostas.

Formas de minimizar os riscos

Para minimizar os riscos, ou seja, para evitar o constrangimento dos participantes da pesquisa com as gravações e fotos tiradas durante a aplicação das situações-problema, o participante poderá:

- Optar por não participar da pesquisa
- Resolver as situações-problema de forma escrita sem precisar ser fotografado e sem precisar ter suas soluções gravadas.
- Apresentar suas soluções apenas para o professor- pesquisador, ou seja, sem precisar apresentar essas soluções no quadro para toda a turma, mas apenas apresentar ao pesquisador.
- Se sentir alguma dificuldade em solucionar as situações-problema o participante poderá solicitar a ajuda do pesquisador.

Benefícios:

Ao participar desta pesquisa os participantes não terão nenhum benefício direto. Entretanto, esperamos que este estudo traga aos participantes envolvidos uma abordagem didática-matemática fornecendo-lhes uma proposta de ensino que os permita inserir na sua prática em sala de aula, em particular no ensino de História da Matemática, elementos de caráter histórico-evolutivo na perspectiva epistemológica das propriedades matemáticas.

Acompanhamento e assistência:

Caso o participante necessite de algum acompanhamento ou assistência poderá solicitar aos pesquisadores responsáveis pela pesquisa. Se assim o desejar, poderá solicitar a interrupção da participação na pesquisa, se a mesma estiver lhe causando algum desconforto. Todos os participantes envolvidos na pesquisa serão acompanhados durante a aplicação das situações-problema em sala de aula e terão a assistência pedagógica necessária dada pelos pesquisadores responsáveis pela pesquisa. Eventuais dúvidas poderão ser tiradas pelos pesquisadores sempre levando em consideração a autonomia que os participantes envolvidos na pesquisa terão ao expor as suas soluções das situações-problema. Importante destacar que a sua participação nessa pesquisa é livre e não pode ser restrita ou limitada ao risco e caso sinta-se algum desconforto poderá solicitar a interrupção da sua participação nessa pesquisa.

Sigilo e privacidade:

Você tem a garantia de que sua identidade será mantida em sigilo e nenhuma informação será dada a outras pessoas que não façam parte da equipe de pesquisadores. Na divulgação dos resultados desse estudo, seu nome não será citado. Qualquer gravação (áudio e vídeo), fotos e listas de exercícios aplicadas durante a pesquisa serão mantidas em posse do pesquisador responsável por um período máximo de 12 meses. Após passado esse tempo todo material será descartado.

Idade dos participantes da pesquisa

Todos os participantes envolvidos na pesquisa são maiores de idade.

Ressarcimento e indenização:

Você terá direito ao ressarcimento das despesas diretamente decorrentes de sua participação na pesquisa e à indenização pelos danos resultantes desta, nos termos da Lei.

Contato:

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, você poderá entrar em contato com os pesquisadores Francisco Hedylene Coelho Bezerra ou Francisco Régis Vieira Alves, Av. Treze de Maio, 2081-Benfica, Fortaleza-CE, 60040-531, Coordenação do Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática (PGECEM, sala 141, fone (85) 988646029, email: hedy.cb@hotmail.com.

Em caso de denúncias ou reclamações sobre sua participação e sobre questões éticas do estudo, você poderá entrar em contato com a secretaria do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) do IFCE das 08:00hs às 12:00hs e das 13:00hs às 17:00hs no IFCE Reitoria - R. Jorge Dumar, 1703 - Jardim América, Fortaleza - CE, 60410-426; fone (85) 34012332 e-mail: cep@ifce.edu.br

Consentimento livre e esclarecido:

Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais riscos e o incômodo que esta possa acarretar, aceito participar e declaro estar recebendo uma via original deste documento assinada pelo pesquisador e por mim, tendo todas as folhas por nós rubricadas:

Nome do(a) participante:

Contato telefônico (opcional):

e-mail (opcional):

(Assinatura do participante ou nome e assinatura do seu RESPONSÁVEL LEGAL)

Data: ____/____/____.

Responsabilidade do Pesquisador:

Asseguro ter cumprido as exigências da resolução 510/2016 CNS/MS e complementares na elaboração do protocolo e na obtenção deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Asseguro, também, ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Informo que o estudo foi aprovado pelo CEP perante o qual o projeto foi apresentado. Comprometo-me a utilizar o material e os dados obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

Nome do(a) pesquisador(a):

[Assinatura do(a) pesquisador(a)]

Data: ____/____/____.

ANEXO B – PARECER DO COMITÊ DE ÉTICA



PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DA EMENDA

Título da Pesquisa: ENGENHARIA DIDÁTICA COM O TEMA: SEQUÊNCIA DE NARAYANA E OS NÚMEROS DE NARAYANA

Pesquisador: FRANCISCO HEDYLENO COELHO BEZERRA

Área Temática:

Versão: 4

CAAE: 30362620.7.0000.5589

Instituição Proponente: INSTITUTO FEDERAL DE EDUCACAO, CIENCIA E TECNOLOGIA DO CEARA

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 4.142.011

Apresentação do Projeto:

O projeto "ENGENHARIA DIDÁTICA COM O TEMA SEQUÊNCIA DE NARAYANA E OS NÚMEROS DE NARAYANA" propõe Realizar um estudo sobre a evolução histórica e investigativa da sequência de Narayana e dos números de Narayana, com o objetivo de transformá-lo em conteúdo a ser ensinado.

Objetivo da Pesquisa:

Desenvolver um estudo acerca da sequência de Narayana e dos números de Narayana, bem como o seu processo de generalização, a fim de explorar em situações didáticas, as propriedades destes números, visando o desenvolvimento histórico-evolutivo da sequência de Narayana e dos números de Narayana.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

Os riscos da pesquisa são considerados mínimos. O pesquisador cita como riscos o constrangimento ao serem fotografados na hora de expor as soluções dos problemas propostos, as gravações em vídeo e áudio também podem ser um constrangimento para alguns alunos, Caso não se sinta à vontade em ser fotografado poderá solucionar as situações-problema na própria folha de papel. A sua imagem em nenhum momento será exposta e as gravações serão apenas para que nós pesquisadores percebamos a forma que você encontrou para resolver as situações-problemas propostas. Como forma de minimizar os riscos o pesquisador cita: Optar por não

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703

Bairro: Jardim América

CEP: 60.410-426

UF: CE

Município: FORTALEZA

Telefone: (85)3401-2332

E-mail: cep@ifce.edu.br



Continuação do Parecer: 4.142.011

participar da pesquisa; Resolver as situações-problema de forma escrita sem precisar ser fotografado e sem precisar ter suas soluções gravadas; Apresentar suas soluções apenas para o professor- pesquisador, ou seja, sem precisar apresentar essas soluções no quadro para toda a turma, mas apenas apresentar ao pesquisador.

Como benefícios o pesquisador cita: Apresentar uma abordagem didática matemática aos professores de Matemática em formação inicial fornecendo-lhes uma proposta de ensino que os permita inserir na sua prática em sala de aula, em particular no ensino de História da Matemática (HM), elementos de caráter histórico-evolutivo na perspectiva epistemológica das propriedades matemáticas.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

Trata-se de uma emenda de projeto apresentado anteriormente, que devido a pandemia terá a metodologia alterada em virtude das aulas acontecerem de forma remota. A pesquisa possui aplicabilidade prática, possibilitando um benefício para futuros professores de matemática. O referencial teórico apresenta termos técnicos adequados; Os riscos e benefícios são esclarecidos.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

Todos os termos foram apresentados.

Recomendações:

Sem recomendações.

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

Aprovado.

Considerações Finais a critério do CEP:

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_1585085_E1.pdf	28/06/2020 17:09:33		Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	PROJETO.pdf	28/06/2020 17:02:52	FRANCISCO HEDYLENO COELHO BEZERRA	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de	TCLE.pdf	28/06/2020 17:01:38	FRANCISCO HEDYLENO COELHO BEZERRA	Aceito

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703

Bairro: Jardim América

CEP: 60.410-426

UF: CE

Município: FORTALEZA

Telefone: (85)3401-2332

E-mail: cep@ifce.edu.br



Continuação do Parecer: 4.142.011

Ausência	TCLE.pdf	28/06/2020 17:01:38	FRANCISCO HEDYLENO COELHO BEZERRA	Aceito
Cronograma	CRONOGRAMA.pdf	21/05/2020 18:09:17	FRANCISCO HEDYLENO COELHO BEZERRA	Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	INFRAESTRUTURA.pdf	20/03/2020 15:18:24	FRANCISCO HEDYLENO COELHO BEZERRA	Aceito
Folha de Rosto	folhaderosto.pdf	20/03/2020 14:54:19	FRANCISCO HEDYLENO COELHO BEZERRA	Aceito
Outros	BENEFICIOS.pdf	20/03/2020 14:52:51	FRANCISCO HEDYLENO COELHO BEZERRA	Aceito
Outros	RESULTADOS.pdf	20/03/2020 14:51:05	FRANCISCO HEDYLENO COELHO BEZERRA	Aceito
Orçamento	ORCAMENTO.pdf	20/03/2020 14:38:44	FRANCISCO HEDYLENO COELHO BEZERRA	Aceito

Situação do Parecer:

Aprovado

Necessita apreciação da CONEP:

Não

FORTALEZA, 08 de Julho de 2020

Assinado por:
PAULO HENRIQUE NOBRE PARENTE
(Coordenador(a))

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703

Bairro: Jardim América

CEP: 60.410-426

UF: CE

Município: FORTALEZA

Telefone: (85)3401-2332

E-mail: cep@ifce.edu.br