



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ
IFCE CAMPUS FORTALEZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

ALISON SOUSA DA SILVA

SOBRE OS CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS MOBILIZADOS NO ESTUDO DE
CORPOS REGULARES SEGUNDO O TRATADO *DE DIVINA PROPORTIONE* DE
LUCA PACIOLI

FORTALEZA

2022

ALISON SOUSA DA SILVA

SOBRE OS CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS MOBILIZADOS NO ESTUDO DE
CORPOS REGULARES SEGUNDO O TRATADO *DE DIVINA PROPORTIONE* DE LUCA
PACIOLI

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) - Campus Fortaleza, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Ana Carolina Costa Pereira.

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal do Ceará - IFCE
Sistema de Bibliotecas - SIBI
Ficha catalográfica elaborada pelo SIBI/IFCE, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- S586s Silva, Alison Sousa da.
Sobre os conhecimentos matemáticos mobilizados no estudo de corpos regulares segundo o tratado De Divina Proportione de Luca Pacioli / Alison Sousa da Silva. - 2022.
95 f. : il. color.
- Dissertação (Mestrado) - Instituto Federal do Ceará, Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Campus Fortaleza, 2022.
Orientação: Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira.
1. De Divina Proportione. 2. Ensino de Geometria. 3. Corpos regulares. I. Título.
- CDD 510.07
-

ALISON SOUSA DA SILVA

SOBRE OS CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS MOBILIZADOS NO ESTUDO DE
CORPOS REGULARES SEGUNDO O TRATADO *DE DIVINA PROPORTIONE* DE LUCA
PACIOLI

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) - Campus Fortaleza, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovado (a) em: 19/07/2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof.^a Dr.^a Ana Carolina Costa Pereira (Orientadora)
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Prof. Dr. Fumikazu Saito
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUCSP)

Prof. Dr. Fabio Maia Bertato
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)

Ao meu avô, Francisco Felix (*in memoriam*),
aquele que nem mesmo o mal de Alzheimer e a
cegueira puderam me apagar de suas
lembranças.

AGRADECIMENTOS

À minha mãe, Prof.^a Leila Sousa, meu eterno exemplo de profissional e de pessoa, e ao meu pai, Werneck Nelson, pela vida que me conceberam.

À minha esposa, Prof.^a Ivana Gomes, a quem dedico todo o meu amor, por estar sempre ao meu lado e por compreender minha ausência quando foi necessária.

À Prof.^a Dr.^a Carolina Pereira, pelas orientações desde a graduação que, sejam por broncas ou por elogios, contribuíram para que eu fosse o profissional que me tornei.

Aos professores, Dr. Raphael Feitosa, pelas orientações dadas na qualificação, Dr. Fumikazu Saito, por seus valiosos ensinamentos e Prof. Fabio Bertato, que, direta ou indiretamente, tem contribuído na minha formação desde a graduação, pela tradução do tratado de nosso estimado Luca Pacioli.

Às Professoras Andressa Gomes, Gisele Oliveira, Isabelle Coelho, Naiara Batista e Verusca Alves, membras do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM) e irmãs de pesquisa, por terem me guiado na reta final da escrita da dissertação com suas imprescindíveis contribuições. Vocês são incríveis!

Às Professoras Suziê Albuquerque e Adriana Oliveira, e aos Professores Wagner Soares e Eugeniano Martins, que tanto contribuíram na minha caminhada desde o processo seletivo do mestrado, pela boa companhia nos encontros do GPEHM e nas festas organizadas.

Aos bolsistas do GPEHM com quem tive o prazer de trabalhar, Sabrina, Patrícia, Milena, Carlos e Hemerson, por seu profissionalismo e sua parceria.

Aos amigos de mestrado, Professoras Arianny Lira, Renata Passos, Rosalide Carvalho, Cícera Fernandes e Milena Carolina, e Professores Evamar Barros, Gleison Silva e Hedyleno Coelho, pelo apoio mútuo em nossa jornada. Ninguém soltou a mão de ninguém.

Aos professores e funcionários da EEMTI José Maria Pontes da Rocha, por serem como uma família para mim. Sou grato a cada um de vocês.

À Coordenação e aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do IFCE, pela compreensão, pela oportunidade e pelo aprendizado.

Ao Governo do Estado do Ceará, por conceder o momento de formação em exercício.

Por fim, a Deus, pela serenidade e sabedoria necessárias à realização desse estudo e a Luca Pacioli, pelas brilhantes palavras redigidas.

“Oh! Deus! Quem vendo uma graciosa figura,
bem disposta, com seus devidos alinhamentos,
à qual só lhe aparenta faltar o alento, não a
julgaria coisa mais divina que humana?”

(PACIOLI, 2010, p. 9)

RESUMO

Dentro de um contexto renascentista de valorização de artes práticas, o frade italiano Luca Pacioli (1447?-1517?) redigiu em 1498 seu tratado *De Divina Proportione*, a partir de seu encantamento pela perspectiva e de seu interesse pela divina proporção. Um dos assuntos abordados por Pacioli são os conhecimentos pertinentes aos corpos regulares, capítulos do original em que vislumbramos um potencial para a discussão dos processos de construção desses conceitos. Assim, neste estudo objetivamos compreender as contribuições do ensino de corpos regulares para a formação de professores de Matemática por meio do tratado *De Divina Proportione* de Luca Pacioli por intermédio da construção de uma interface entre história e ensino de matemática. Para tanto, utilizamos uma metodologia qualitativa de cunho bibliográfico e documental para tratar da obra e das pesquisas relacionadas a ela que já foram realizadas. Dessa forma, identificamos algumas reflexões didáticas que emergem dos escritos de Pacioli no que se refere ao conceito de corpos regulares e à construção de alguns deles, tais como: a própria nomenclatura dos sólidos e o conceito de corpo regular; o estudo indireto sobre a medida do ângulo interno de cada base; o processo de construção dos corpos regulares a partir da composição de um semicírculo e da relação entre a medida da aresta do corpo regular e o diâmetro da esfera por meio da semelhança de triângulos. Assim, percebemos que o conteúdo do tratado *De Divina Proportione* pode ser fonte de diversas discussões potencialmente didáticas relacionadas à construção do conhecimento de corpos regulares, representando uma possibilidade de ressignificar conhecimentos.

Palavras-chave: De Divina Proportione. Ensino de Geometria. Corpos regulares.

ABSTRACT

Within a Renaissance context of cherishing practical arts, the Italian friar Luca Pacioli (1447?-1517?) drafted in 1498 his treatise *De Divina Proportione*, from his fascination by perspective and his interest in divine proportion. One of the subjects addressed by Pacioli is the knowledge pertinent to the regular shapes, chapters of the original in which it is possible to contemplate a potential for the discussion of the processes of construction of these concepts. Thus, in this study, we sought out to understand the contributions of the teaching of regular shapes to the formation of mathematics teachers through the treatise *De Divina Proportione* by Luca Pacioli with the construction of an interface between history and mathematics teaching according to an updated historiographical aspect. For this, we used a qualitative methodology, bibliographic and documentary in nature, in order to deal with the work and the research related to it that has already been carried out. Thus, we identified some didactic reflections that emerge from Pacioli's writings regarding the concept of regular shapes and the construction of some of them, such as: the very nomenclature of solids and the concept of regular shape; the indirect study on the measurement of the internal angle of each base; the process of construction of regular shapes from the composition of a semicircle and the relationship between the measurement of the regular shape's vein and the diameter of the sphere by means of the similarity of triangles. Thus, it is possible to conclude that the content of the treatise *De Divina Proportione* can be the source of several potentially didactic discussions related to the construction of knowledge of regular shapes, representing a possibility of resignifying knowledge.

Keywords: De Divina Proportione. Geometry Teaching. Regular shapes.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 — <i>Ritrato di fra Luca Pacioli</i> (1495), atribuído a Jacopo de' Barbari (1440-1515) ..	25
Figura 2 — Frontispício de <i>Summa de Arithmetica...</i> (1523) ..	26
Figura 3 — Frontispício da versão impressa de <i>De Divina Proportione</i> ..	31
Figura 4 — Lista de símbolos indicados por Pacioli (2010) ..	33
Figura 5 — Ângulos planos de três hexágonos ..	40
Figura 6 — Ângulos superficiais de três pentágonos ..	41
Figura 7 — Ângulos superficiais em um vértice do dodecaedro ..	42
Figura 8 — Ângulos superficiais de três quadrados.....	43
Figura 9 — Ângulos planos em um vértice do cubo ..	44
Figura 10 — Ângulos superficiais de seis triângulos regulares ..	45
Figura 11 — Ângulos superficiais de três, quatro e cinco triângulos regulares.....	46
Figura 12 — Ângulos superficiais em vértices do tetraedro, do octaedro e do icosaedro	46
Figura 13 — Semicírculo ADB apresentado no capítulo XXVI.....	48
Figura 14 — Execução da nona proposição do livro VI de <i>Os Elementos</i> ..	49
Figura 15 — Execução da 31ª proposição do livro I de <i>Os Elementos</i>	50
Figura 16 — Execução da décima proposição do livro I de <i>Os Elementos</i> ..	51
Figura 17 — Semicírculo ADB concluído ..	52
Figura 18 — Tetraedro ..	52
Figura 19 — Construção do triângulo FGH ..	53
Figura 20 — Execução da segunda proposição do livro XI de <i>Os Elementos</i> ..	54
Figura 21 — Construção da altura EK e das linhas KF, KG e KH ..	55
Figura 22 — Tetraedro regular envolto pela esfera de diâmetro AB ..	56
Figura 23 — Cubo ..	58
Figura 24 — Início da construção do quadrado EFGH.....	59
Figura 25 — Quadrado EFGH ..	59
Figura 26 — Construção das linhas laterais do cubo ..	60
Figura 27 — Cubo concluído ..	61
Figura 28 — Cubo envolto pela esfera de diâmetro AB ..	62
Figura 29 — Semicírculo ADB para a construção do octaedro ..	63
Figura 30 — Construção do semicírculo ADB do capítulo XXVIII.....	64
Figura 31 — Octaedro ..	64
Figura 32 — Circunferência EFGH ..	65

Figura 33 — Quadrado EFGH	66
Figura 34 — Construção da pirâmide superior	67
Figura 35 — Construção da pirâmide inferior	68
Figura 36 — Octaedro envolto pela esfera de diâmetro AB	69
Figura 37 — Representações do cubo segundo Leonardo Da Vinci	75
Figura 38 — Face de um dodecaedro subdividida em triângulos	79

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	14
2	LUCA PACIOLI NO TRATADO <i>DE DIVINA PROPORTIONE</i>	23
2.1	A inserção de tratados na Itália nos séculos XV e XVI e as contribuições de Luca Pacioli para as matemáticas.....	23
2.2	As propostas de reforma do ensino e o advento da perspectiva.....	27
2.3	O tratado <i>De Divina Proportione</i> , de Luca Pacioli.....	30
3	ASPECTOS EPISTEMOLÓGICOS DOS CORPOS REGULARES SOB O OLHAR DE LUCA PACIOLI.....	37
3.1	O conceito de corpos regulares contido no capítulo XXV.....	37
3.1.1	<i>O caso das figuras regulares com seis ou mais lados</i>	39
3.1.2	<i>O caso do pentágono regular</i>	40
3.1.3	<i>O caso do quadrado</i>	42
3.1.4	<i>O caso do triângulo regular</i>	44
3.2	A construção de alguns corpos regulares contidos em <i>De Divina Proportione</i>	47
3.2.1	<i>O tetraedro contido no capítulo XXVI</i>	47
3.2.2	<i>O cubo contido no capítulo XXVII</i>	57
3.2.3	<i>O octaedro contido no capítulo XXVIII</i>	62
4	DISCUSSÕES DIDÁTICAS ACERCA DO ESTUDO DOS CORPOS REGULARES CONTIDOS EM <i>DE DIVINA PROPORTIONE</i> PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA.....	71
4.1	<i>Sobre a interface entre história e ensino de matemática</i>	71
4.2	<i>Sobre o conceito de corpos regulares presente no capítulo XXV</i>	74
4.2.1	<i>A nomenclatura usada por Luca Pacioli em De Divina Proportione</i>	74
4.2.2	<i>O conceito de corpos regulares segundo Luca Pacioli</i>	77
4.2.3	<i>As medidas dos ângulos planos das bases</i>	78
4.3	<i>Sobre as construções dos corpos regulares</i>	80
4.3.1	<i>O “saber-fazer” no estudo das construções dos corpos regulares</i>	80
4.3.2	<i>Os conhecimentos mobilizados na construção do semicírculo ADB</i>	83
4.3.3	<i>A relação entre a medida da aresta do corpo regular e o diâmetro da esfera por meio da semelhança de triângulos</i>	85

5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	87
	REFERÊNCIAS.....	91

1 INTRODUÇÃO

No Brasil, o ensino de Geometria sofreu modificações em virtude de mudanças políticas e sociais ao longo da história. Seja na formação de oficiais nos cursos da Academia Real Militar, no século XIX, ou na educação básica, seguindo orientações internacionais e documentos oficiais do país, estudar Geometria sempre teve um objetivo específico designado além do ato de aprender Matemática¹.

Segundo Caldato e Pavanello (2015), em todo o seu contexto histórico, o ensino de Geometria no Brasil teve a formação dos professores de Matemática como um considerável problema. Até meados dos anos 1990, o ensino de Matemática nacional era, em linhas gerais, uma aplicação de metodologias internacionais. Aliada a isso, a ausência de cursos de formação específicos para lecionar essa disciplina deu margem ao emprego de professores oriundos de outras profissões, autodidatas no que se refere à formação profissional docente. Apesar das indicações governamentais que norteiam a educação brasileira desde o final do século XX², essa prática se manteve viva até os anos 2010 na educação básica.

Especificamente sobre a Geometria, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que orienta a educação básica no Brasil desde 2018, afirma que ela “[...] não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras” (BRASIL, 2018, p. 272). Podemos entender tal afirmação como uma crítica ao ensino de Geometria até então, que seguia uma metodologia essencialmente formal e axiomática, de modo que não possuía relação significativa com a realidade do aluno e que, infelizmente, perdura até hoje. Mas para que essas mudanças possam chegar às escolas, precisamos entender como são orientados os cursos de formação de professores de Matemática no Brasil.

¹ Vide: Valente (2008); Caldato e Pavanello (2015).

² Segundo a Lei de Diretrizes e Bases da educação nacional, sancionada em 20 de dezembro de 1996 pelo então Presidente da República, Fernando Henrique Cardoso, coube à União a elaboração do Plano Nacional de Educação contando com a colaboração de Estados e Municípios, de modo que a Matemática fosse contemplada nessa unidade, assim como as outras disciplinas. Além disso, a nova Lei também trazia mudanças no ensino superior no que se refere à formação de docentes, promovendo a extinção das “licenciaturas curtas”, o que, com a possibilidade de um plano comum entre os cursos licenciatura, pôde oportunizar uma melhor formação a esses futuros profissionais (BRASIL, 1996).

Apesar das indicações das Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura³, a forma como os conhecimentos geométricos são abordados no ensino superior permanece essencialmente teórica e, especificamente na realidade cearense, limitada a um quantitativo mínimo de disciplinas direcionadas a esses conhecimentos. Por meio de um levantamento realizado acerca das grades curriculares dos cursos de licenciatura em Matemática oferecidos por instituições públicas na cidade de Fortaleza⁴, constatamos que são ministradas pouquíssimas disciplinas relacionadas à Geometria, abordando essencialmente conteúdos de Geometria Plana, Geometria Espacial e Geometria Analítica.

Dentro desse panorama, percebemos que há uma espécie de ciclo alimentado pela formação insuficiente no que se refere à Geometria, pois, devido à má formação já na Educação Básica desses, eventualmente futuros professores não irão vivenciar na licenciatura esses conhecimentos geométricos, o que acarreta em uma prática que não contempla esses assuntos (LIMA; SILVA, 2015).

Visando mudar esse panorama, trazendo uma nova abordagem à Geometria nos diferentes níveis de ensino, faz-se necessário articular a Matemática com diferentes visões. A esse respeito, os documentos oficiais que norteiam a educação nacional trazem a história da matemática como uma opção, tanto para a educação básica quanto para o ensino superior. Na BNCC, vemos que, na educação básica, ela “pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática” (BRASIL, 2018, p. 298). E sobre o ensino superior, as DCN indicam que os currículos dos cursos de Bacharelado e Licenciatura em Matemática devem ser elaborados de forma que o profissional em formação se torne capaz de “trabalhar na interface da Matemática com outros campos de saber” (BRASIL, 2002, p. 4). Além disso, devem ser incluídos ao currículo comum a todos os cursos de Licenciatura em Matemática “conteúdos da Ciência da Educação, da História e Filosofia das Ciências e Matemática” (BRASIL, 2002, p. 6).

³ Segundo Brasil (2002), é comum a todos os cursos de licenciatura em matemática o estudo dos fundamentos de Geometria, assim como conteúdos de Geometria presentes na educação básica.

⁴ Para este estudo, foram consultadas as grades curriculares dos cursos de Licenciatura em Matemática oferecidos na cidade de Fortaleza pelas seguintes instituições: Universidade Estadual do Ceará (CEARÁ, 2021), Universidade Federal do Ceará (BRASIL, 2021a) e Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (BRASIL, 2021b).

Com a viabilidade da relação entre história e ensino de Matemática sendo discutida por vários estudiosos nos últimos anos⁵, percebemos a necessidade de capacitações, ou mesmo de uma complementação de atividades que possam promover uma experiência para o docente, envolvendo diversas formas de levar a história da Matemática à sala de aula (PEREIRA; SAITO, 2018).

Como forma de articulação, a construção de interfaces entre a história e o ensino de matemática, sob uma perspectiva historiográfica atualizada ⁶, aplicada à formação de professores de Matemática pode ser um caminho. Segundo Saito e Dias (2013, p. 91-92) a interface é uma “[...] constituição de um conjunto de ações e produções que promova a reflexão sobre o processo histórico da construção do conhecimento matemático para elaborar atividades didáticas que busquem articular história e ensino de matemática”. Para tanto, essa interface parte do diálogo entre o historiador e o educador matemático, com base em diversos objetos de estudo. Dentre eles, destacamos o uso de textos históricos que, de acordo com Pereira e Saito (2019), se configuram como um tratado, um texto, um instrumento, ou ainda fotos, imagens, vídeos, dentre outros, que sejam ou possuam elementos potencialmente didáticos, a fim de compor as três esferas que fazem parte da construção da interface: a contextual, a historiográfica e a epistemológica.

Toda essa reflexão acerca do ensino de Geometria parte da experiência formativa do pesquisador desde a educação básica. Durante o curso de licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Ceará (UECE), foi possível perceber que a diferença entre os conhecimentos geométricos compreendidos na escola e no ensino superior difere apenas na capacidade de argumentação do discente, advinda de um aprofundamento teórico sobre o assunto estudado. Desse modo, ao adentrar na educação básica como professor de Matemática, a prática docente levada pelo pesquisador se tornou um reflexo da que lhe foi trazida.

Com a participação nos encontros do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM), o pesquisador pôde conhecer estudos recentes envolvendo a articulação entre história e ensino de Matemática na formação de professores dessa disciplina por meio da

⁵ No Brasil, desde 1995, a realização bienal do Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM) tem reunido educadores e historiadores da matemática para debater sobre temas interrelacionados e divulgar pesquisas que vêm sendo realizadas em instituições de ensino do país. Em 1999, durante o terceiro SNHM, em Vitória (ES), foi fundada a Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat), que visa à prestação de serviços sociais educacionais e culturais por meio de estudos e da pesquisa, além de fornecer subsídio à agências afins (SBHMat, 1999; 2019).

⁶ Entende-se por perspectiva historiográfica atualizada aquela que visa contextualizar o conhecimento do passado em seu próprio tempo, sem compará-lo com o conhecimento do presente ou julgá-lo, dando ao historiador acesso ao processo de construção desse conhecimento (SAITO, 2015).

interface segundo uma vertente historiográfica atualizada. Até então, esses estudos tinham como fontes certos tratados que traziam em seu conteúdo algum instrumento matemático⁷, cuja fabricação e/ou uso possibilitava mobilizar conhecimentos matemáticos que contribuiriam na formação dos docentes.

Visando contribuir na formação de professores de Matemática, buscamos uma fonte histórica que pudesse ser utilizada na resignificação de conceitos geométricos seguindo as propostas de Saito e Dias (2013), e Saito e Pereira (2018, 2019). Assim, encontramos o tratado *De Divina Proportione*, escrito em 1498 pelo frade italiano Luca Pacioli (1447-1517), que, apesar de não trazer em seu conteúdo algum instrumento matemático, “é uma obra escrita com grande preocupação em ser clara, objetiva e didática” (BERTATO, 2010, p. 16), apresentando em seu conteúdo temas relacionados às matemáticas no que concerne à divina proporção.

Em seus escritos, Luca Pacioli aborda especificamente nos capítulos XXV a XXX os conhecimentos geométricos pertinentes aos corpos regulares, apresentando seu conceito segundo as referências do período e a construção individual de cada um deles, a saber: tetraedro, cubo, octaedro, icosaedro e dodecaedro. O destaque dado a esse tema decorre, principalmente, da abordagem do autor sobre ele, trazendo uma forma distinta de como os corpos regulares são apresentados na educação básica e, muitas vezes, no ensino superior atuais.

Analisando sete dos oito livros didáticos da educação básica indicados para o Plano Nacional do Livro Didático (PLND) triênio 2018-2020, Silva (2020) constata que a forma como os corpos regulares são abordados neles é básica, trazendo apenas um conceito, tradicionalmente relacionada à relação de Leonard Euler para os referidos corpos e informações históricas resumidas a dados biográficos de famosos matemáticos cujos estudos estão vinculados a essa temática. Apesar da semelhança com a abordagem de Luca Pacioli em *De Divina Proportione* encontrada em um dos livros didáticos, ainda assim não há menção ao frade ou a seus escritos, comprovando que a educação básica poderia jamais ter conhecimento disso, caso o professor não busque outras fontes de estudo ou não tenha obtido esse conhecimento em sua formação.

Estudos que versam sobre o ensino de Geometria por meio de documentos históricos ainda são escassos. Intentando identificar estudos correlatos ao nosso, realizamos buscas avançadas na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), de modo que, ao buscar estudos que abordem o tratado *De Divina Proportione* para o ensino de Matemática nos

⁷ Vide: Castillo (2016), Batista (2018), Albuquerque (2019), Alves (2019), Martins (2019) e Oliveira (2019).

últimos dez anos, não obtivemos nenhum resultado. Assim, optamos por generalizar a busca, verificando estudos que abordem os corpos regulares visando o ensino de Matemática que possam se aproximar do nosso. Porém, em sua maioria, os estudos encontrados são advindos de programas de mestrado profissional, cujos resultados são direcionados exclusivamente às práticas na educação básica, desse modo, não há trabalhos voltados para a formação de professores. Dos 44 resultados apontados, tivemos acesso a 31 deles, dos quais consideramos relevantes os cinco destacados no quadro 1 a seguir.

Quadro 1 — Estudos selecionados da BDTD

TÍTULO	AUTOR	INSTITUIÇÃO	TIPO	ANO
Abordagens diversificadas para o ensino dos Poliedros de Platão	Radin, L. D.	UFSM-RS	Dissertação (Mestrado Profissional)	2018
Poliedros de Platão: Uma abordagem segundo o Modelo de Van Hiele do desenvolvimento do pensamento geométrico	Santos, R. A.	UFOP-PA	Dissertação (Mestrado Profissional)	2014
Construção e medida de volume dos poliedros regulares convexos com o <i>Cabri 3D</i> : uma possível transposição didática	Santos, A. A.	PUCSP	Tese (Doutorado)	2016
O modelo euclidiano nas abordagens dos poliedros de Platão em livros didáticos: reflexos do Movimento da Matemática Moderna?	Oliveira, M. S.	UEPB	Dissertação (Mestrado Profissional)	2018
Mapeamento da Pesquisa Acadêmica Brasileira sobre Geometria Espacial: Período 2007 a 2017	Sanchez, J. B. P.	PUCSP	Dissertação (Mestrado Acadêmico)	2018

Fonte: elaborado pelo autor.

Seguindo a ordem do quadro 1, no primeiro estudo analisado Radin (2018) discorre sobre o ensino dos corpos regulares por meio da combinação entre teoria e prática utilizando material concreto na educação básica. Nesse estudo são abordados alguns conceitos pertinentes a esses corpos, como a existência de apenas cinco deles e a relação com o teorema de Euler, costumeiramente apresentada como condição para determinar um corpo como regular. Segundo o autor, a experiência de lecionar sobre o tema usando os recursos citados por ele em seu estudo (*Softwares* educacionais, atividades práticas, etc.) traz maior interesse aos alunos e motiva o professor. Apesar dos sujeitos do estudo serem alunos da educação básica, cremos que uma

aplicação como a detalhada por Radin (2018) em cursos de licenciatura em Matemática poderia surtir efeito semelhante, haja vista o pouco emprego desses recursos.

No estudo de Santos (2014), temos uma abordagem na educação básica sobre os corpos regulares, chamados pelo autor de “poliedros de Platão”, por meio do modelo de Van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Em uma aplicação simultânea em dois grupos de alunos, o autor percebe que o modelo tradicional de ensino, formal, axiomático e sem o uso de recursos diferenciados, teve pouca influência no interesse dos alunos quando comparado ao modelo proposto no estudo, onde os alunos participam de uma espécie de investigação em prol da construção do conhecimento. Assim como no estudo de Radin (2018), uma aplicação semelhante em cursos de licenciatura em Matemática poderia, no mínimo, mostrar aos futuros docentes que utilizar recursos diferenciados pode auxiliar na motivação dos alunos e na compreensão dos conteúdos.

A tese de Santos (2016) é o estudo que mais se assemelha ao aqui proposto. O autor trata da construção dos poliedros regulares convexos por meio do *software* Cabri 3D com base no disposto no livro XIII de *Os Elementos* de Euclides. Contemplar esse estudo permite ensinar a possibilidade de utilizar programas de computador como ferramenta para a execução de passos descritos em documentos históricos para a produção de, neste caso específico, corpos regulares. Além disso, Santos (2016) apresenta algumas propriedades desses corpos em decorrência de sua construção, como o cálculo das áreas das superfícies e de seus volumes.

O estudo de Oliveira (2018) acerca da forma como os corpos regulares são abordados nos livros didáticos da educação básica reflete um pouco do descrito por Pavanello (1993). A metodologia demasiadamente formal para o ensino de Geometria proposta pelo Movimento da Matemática Moderna passou a fazer parte também da maneira como os livros didáticos vem sendo redigidos nos últimos anos, de modo que, ao se limitar apenas a eles, o professor da educação básica pode não conseguir auxiliar seus alunos no desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos. Além disso, Oliveira (2018, p. 68) relata que “[...] o modelo euclidiano não é empregado, [...], em nenhuma das coleções, sendo explorados apenas relatos históricos, contribuições de alguns matemáticos e demonstrações algébricas”. Uma situação semelhante acontece nos cursos de licenciatura em Matemática, de modo que o professor em formação continuará preso a esse ensino axiomático que não provoca a reflexão sobre o conteúdo.

Por fim, no estudo de Sanchez (2018), observamos um panorama acerca das pesquisas envolvendo geometria espacial no período de 2007 a 2017, desenvolvidas em programas nacionais de Pós-Graduação *strictu sensu* na área da Educação Matemática. Segundo a autora,

os estudos se resumem a temáticas pontuais, o que decorre dos currículos imutáveis ao longo do período estudado, além do fato de que esses estudos são, em sua maioria, direcionados à educação básica.

Diante do exposto, percebemos que há uma escassez de estudos que articulem a história e o ensino de corpos regulares na formação de professores de Matemática, deixando uma lacuna a ser preenchida, a qual pode impactar na educação básica. Por se tratar de um problema que vem de longas datas, precisamos buscar formas pontuais para trazer esses estudos para a realidade dos cursos de licenciatura em Matemática. Assim, na intenção de contribuir na melhoria desse cenário, o presente estudo tem como pergunta diretriz: *como o tratado De Divina Proportione de Luca Pacioli pode contribuir na formação de professores de Matemática no que se refere ao ensino de corpos regulares, segundo a interface entre a história e o ensino de matemática em uma vertente historiográfica atualizada?* A fim de responder esse questionamento, temos como objetivo principal compreender as contribuições do ensino de corpos regulares para a formação de professores de Matemática por meio do tratado *De Divina Proportione* de Luca Pacioli por intermédio da construção de uma interface entre história e ensino de matemática segundo uma vertente historiográfica atualizada.

Com o propósito de atingir nosso objetivo principal, delineamos como específicos:

- a) Descrever por meio do estudo do tratado *De Divina Proportione* de Luca Pacioli o contexto em que ele foi elaborado;
- b) Compreender os conhecimentos matemáticos incorporados no estudo dos corpos regulares, assim como os aspectos epistemológicos envolvidos;
- c) Discutir sobre os conhecimentos matemáticos que emergem do estudo de alguns dos corpos regulares presentes no tratado *De Divina Proportione*, visando à formação de professores de Matemática.

Para a condução dessa pesquisa utilizaremos uma metodologia qualitativa, de cunho bibliográfico e documental. De acordo com Prodanov e Freitas (2013, p. 54), a pesquisa bibliográfica tem por objetivo “colocar o pesquisador em contato direto com todo o material já escrito sobre o assunto da pesquisa”, onde este material consiste em publicações científicas, tais como livros, periódicos acadêmicos, trabalhos de conclusão, internet, entre outros, relacionadas ao assunto a ser pesquisado. Sobre este último citado, os autores alertam sobre a confiabilidade e fidelidade de tais fontes, visando a legitimidade do estudo. E, segundo Gil (2010), o estudo documental se diferencia da pesquisa bibliográfica pela natureza de suas fontes. Enquanto a bibliográfica se utiliza essencialmente de estudos de diversos autores sobre um mesmo tema, a

documental trata de materiais que não tenham sido analisados de maneira correlata ao estudo a ser desenvolvido.

Desse modo, o tratado *De Divina Proportione* do frade italiano Luca Pacioli foi escolhido para este estudo por tratar, dentre outros temas, dos corpos regulares em referência à divina proporção, conforme apresentado em seu título. Além dela, outras fontes, como *Timeu*, de Platão, e *Elementos*, de Euclides, são consideradas neste estudo como suporte, visando compreender os aspectos concernentes ao tratado estudado. No entanto, para a realização de nosso estudo, nos apoiamos na tradução direta do italiano vernáculo para o português brasileiro feita por Bertato (2010), a qual trata-se de um cotejamento entre o manuscrito dedicado ao duque de Milão, Ludovico Sforza, datado de 1498, e a obra publicada por Paganino Paganini em 1509.

Assim, a introdução deste estudo traz um breve panorama acerca do assunto investigado, assim como as lacunas diante da pesquisa proposta, a problemática, justificativa, a questão norteadora e os objetivos geral e específicos que regem a ação desse estudo, de modo a orientar o leitor sobre o conteúdo aqui abordado.

A parte seguinte trata dos aspectos contextuais e historiográficos referentes ao tratado *De Divina Proportione*, necessários para a articulação entre a história e o ensino de matemática. Procura-se discorrer acerca do cenário no qual esse documento estava inserido e as influências advindas de seu período, a fim de compor as esferas contextual e historiográfica presentes na construção da interface.

O terceiro momento aborda, especificamente, o conteúdo do tratado *De Divina Proportione* acerca dos corpos regulares, desde seu conceito à construção do tetraedro, cubo e octaedro, bem como suas propriedades, dando ênfase a questões epistemológicas presentes nos escritos de Luca Pacioli no que se refere a conhecimentos de geometria. Para a realização desse estudo, usamos como fonte principal a tradução de Bertato (2010).

Em seguida são apresentadas as discussões sobre algumas reflexões que emergem dos conhecimentos matemáticos presentes no tratado *De Divina Proportione* em relação aos corpos regulares visando à formação de professores de Matemática, seja a partir de seu conceito, presente no capítulo XXV do tratado, ou nas construções do tetraedro, do cubo e do octaedro, respectivamente descritos nos capítulos XXVI, XXVII e XXVIII.

Por fim, a seção das considerações finais tratará das conclusões deste estudo, apresentando o percurso para se responder à pergunta diretriz e aos objetivos propostos a partir de um contexto geral, bem como propostas para estudos futuros em continuidade ou paralelos.

A seguir, abordaremos os elementos contextuais e historiográficos pertinentes ao tratado *De Divina Proportione*, trazendo um breve panorama acerca do momento histórico da escrita e da publicação dos escritos de Luca Pacioli, bem como um pouco sobre a trajetória do frade.

2 LUCA PACIOLI NO TRATADO *DE DIVINA PROPORTIONE*

Conhecido como um dos períodos mais intensos na história das ciências, o Renascimento é visto como um marco do desenvolvimento artístico e científico da Europa, sendo palco de inúmeras personalidades no que tange a seus estudos. No período em que se tomava como ideal ser um *uomo universale*, isto é, um homem universal, a Itália foi uma, dentre outras regiões desse continente, que assumia posição de destaque frente ao conhecimento.

Neste capítulo, discorreremos sobre o contexto no qual o frade italiano Luca Pacioli redigiu seu tratado intitulado *De Divina Proportione*, relacionando esse fato às concepções sociais, políticas e culturais da época, tendo, dentre algumas referências, os relatos do próprio Pacioli (2010).

Para tanto, abordamos uma breve contextualização sobre o período em que o tratado *De Divina Proportione* foi concebido. Na primeira seção tratamos do movimento que permeia a inserção de tratados na Itália nos séculos XV e XVI. Já na segunda seção trazemos um pouco das reflexões de estudiosos sobre o advento da perspectiva e as propostas de reforma do ensino. Por fim, na terceira, traçamos um panorama geral sobre o tratado escrito por Luca Pacioli, a fim de apresentar ao leitor uma visão superficial acerca de seu conteúdo.

2.1 A inserção de tratados na Itália nos séculos XV e XVI e as contribuições de Luca Pacioli para as matemáticas

Costumeiramente lembrado por diversos feitos artísticos, o Renascimento, período que, segundo Saito (2015), teve seu início em meados do século XIV e perdurou até meados do século XVI, é assim chamado por abarcar uma “renovação” do conhecimento, que, com o passar dos séculos, propiciou o desenvolvimento da ciência moderna⁸.

Especificamente, na passagem do *quattrocento* para o *cinquecento* (BERTATO, 2010), isto é, entre os anos de 1450 e 1550, a veneração da Antiguidade Clássica⁹ toma conta de algumas regiões da Europa, tendo seu ápice na Itália. Esse movimento, intitulado Humanismo, teve como características marcantes a valorização das ciências humanas e o estudo de antigos

⁸ Segundo Saito e Beltran (2014), a ciência moderna é tida na história da ciência como um “marco histórico”, constituída na relação entre os saberes antigos provenientes de textos clássicos, a valorização das artes manuais e os conhecimentos modernos decorrentes da descoberta da América.

⁹ Período compreendido entre os séculos VIII a.E.C e V, quando ocorre a queda do Império Romano do Ocidente (SAITO, 2015).

escritos gregos, como os de Platão, Aristóteles e Euclides, ou de suas traduções recentes. Ao passo que essas leituras eram comparadas àquelas de períodos anteriores, debates envolvendo esses saberes antigos e os saberes da época, decorrentes da descoberta do então chamado Novo Mundo¹⁰, foram acontecendo.

Além dessa admiração humanista, Saito (2015) também destaca como característica desse período o desenvolvimento das línguas vernáculas. Até então, o latim e o grego “[...] eram línguas indispensáveis para ter acesso ao conhecimento erudito” (SAITO, 2015, p. 162), mas com a ascensão social dos artesãos, os quais passaram a ser considerados burgueses, estes “[...] passaram a escrever sobre seus ofícios, inicialmente, com o objetivo de transmitir seus conhecimentos a novas gerações e, posteriormente, para valorizar sua arte e se autopromover” (SAITO, 2015, p. 171). Nesses escritos, que versavam inicialmente sobre problemas de ordem prática, o uso de línguas vernáculas passou a ser uma prática comum.

Com o surgimento da imprensa no século XV, a disseminação maior de conhecimentos novos e antigos entre diversos estudiosos de várias regiões da Europa foi possível. Segundo Saito (2015, p. 164), “Embora nem todos tivessem acesso às ciências, visto que o livro era um produto muito caro e a maioria dos europeus era analfabeta, a partir do século XVI conhecimentos antigos e novos tiveram maior circulação que em períodos anteriores”.

Da relação entre conhecimentos práticos e teóricos, trazida pelos artesãos em seus tratados por meio da incorporação de elementos como demonstrações, os estudiosos que se encontravam nas universidades e dominavam o saber erudito¹¹ passaram a se apropriar disso. Segundo Carreira (199, p. 244), no âmbito da Geometria, sua fortuna fora feita “[...] às custas dos artistas e engenheiros, não dos professores, filósofos ou teólogos. Assim, as reflexões de Juan Luis Vives¹² (1492-1540), que defendia um ensino mais prático, e Pierre de la Ramée¹³ (1515-1572), que propunha reformas no ensino universitário em virtude do “[...] exagerado conservadorismo das instituições” (SAITO, 2015, p. 161), vieram à tona, trazendo momentos de discussão sobre, por exemplo, a organização das ciências componentes do *quadrivium*¹⁴.

¹⁰ O termo “Novo Mundo” é utilizado como referência ao continente americano. Segundo registros, esse termo foi utilizado pela primeira vez em 1492 pelo historiador espanhol Pedro Mártir de Anglería (1457-1527) em uma carta a respeito da primeira viagem de Cristóvão Colombo, quando encontrou novas terras (MACNUTT, 1912).

¹¹ Podemos entender o saber erudito no contexto renascentista como o conhecimento da cultura livresca, advindo das universidades segundo uma sistemática formal (CORMACK, 2017).

¹² Humanista espanhol e teórico da educação. Para mais informações, vide: Casini (2021).

¹³ Humanista francês, também conhecido como Petrus Ramus. Para mais informações, vide: Sellberg (2020).

¹⁴ Até o período do Renascimento, o sistema educacional compreendia sete artes liberais, divididas em dois grupos: o *trívium*, que englobava a Gramática, a Retórica e a Dialética, e o *quadrivium*, composto por Aritmética, Geometria, Música e Astronomia (FRIAÇA *et al.*, 1999).

Foi nesse contexto que viveu Luca Pacioli (Figura 1), um frade franciscano que dedicou parte de sua vida a estudos relacionados às matemáticas. Nascido por volta de 1447¹⁵, em Sansepolcro, uma cidade localizada na região da Toscana, na Itália, ele é costumeiramente mencionado em textos históricos tradicionais vinculados a assuntos comerciais (DI TEODORO, 2014).

Figura 1 — *Ritrato di fra Luca Pacioli* (1495), atribuído a Jacopo de' Barbari (1440-1515)



Fonte: Museo e Real Bosco di Capodimonte (2021).

A respeito de sua carreira acadêmica, ainda na juventude foi aluno de Domenico Bragadino¹⁶, em Veneza, no mesmo período em que prestava serviços ao comerciante Antonio Rompiansi, tendo contribuído na formação de seus três filhos, Bartolomeo, Francesco e Paolo. Em virtude da experiência em assuntos comerciais obtidos nos serviços à Rompiansi e do conhecimento matemático das lições de Bragadino, Pacioli redige seu primeiro trabalho sobre aritmética em 1470, dedicado aos filhos de seu empregador. Anos depois, quando em Roma, aproximou-se de Leon Battista Alberti¹⁷, famoso arquiteto da época que influenciou Pacioli em

¹⁵ O ano exato de nascimento de Luca Pacioli é incerto, como citam Agostini (1935), Napolitani (2013) e Di Teodoro (2014).

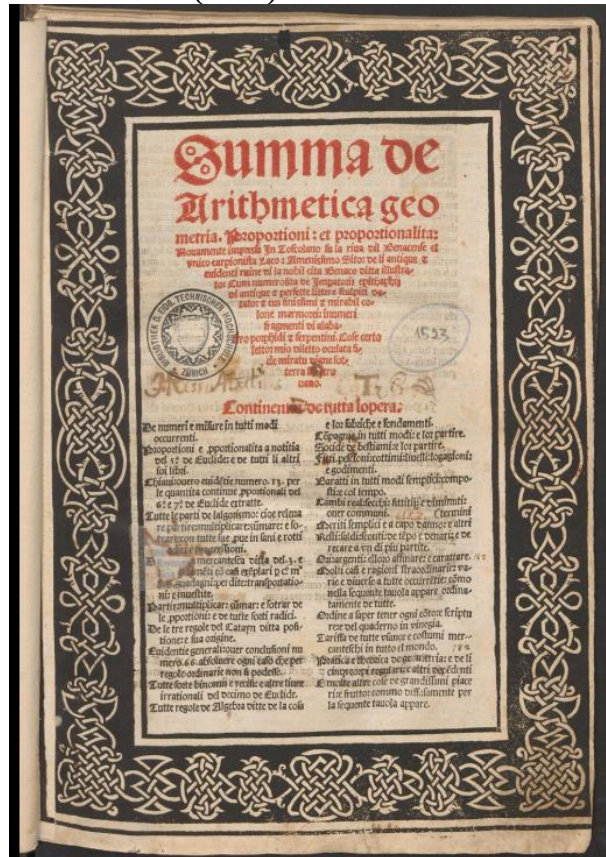
¹⁶ Membro de uma nobre família veneziana, tornou-se professor na Escola Rialto de Veneza após se formar na mesma instituição. Para mais informações, vide: Stabile (1971).

¹⁷ Humanista italiano, autor do tratado *De Pictura* (1435). Para mais informações, vide: Grayson e Argan (1960).

seus estudos sobre jogos matemáticos, geometria, e proporções, levando-o a escrever, também, sobre arquitetura (GILLISPIE, 1981; DI TEODORO, 2014).

Após a conclusão de seus estudos em teologia e sua ordenação como frade franciscano entre os anos de 1470 e 1477, Pacioli dedicou-se a lecionar sobre as matemáticas em diversas universidades, como a de Perugia, Nápoles e Roma. Nesse mesmo período, redigiu um de seus tratados mais famosos, *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (Figura 2), publicado em língua vernácula na cidade de Veneza em 1494, dedicando-o ao duque de Urbino, Guidobaldo de Montefeltro, que, segundo biografias, fora seu aluno (DI TEODORO, 2014).

Figura 2 — Frontispício de *Summa de Arithmetica...* (1523)¹⁸



Fonte: Pacioli (1523).

Em 1497, a convite de Ludovico Sforza, então duque de Milão, Pacioli prestou serviços à corte lecionando sobre as matemáticas. Nesse período, redigiu outro tratado, intitulado *De*

¹⁸ Embora a primeira versão do tratado tenha sido publicada em 1494, tivemos acesso apenas à versão publicada em 1523, em italiano, sobre a qual não nos aprofundamos.

Divina Proportione, o qual trataremos em detalhes mais adiante. Dedicado ao duque Ludovico, seus escritos datados de 1498 versavam sobre temas relacionados à divina proporção, tendo, segundo o próprio Pacioli (2010), a participação de Leonardo da Vinci na produção das figuras trazidas nas páginas finais de seu tratado.

Após fugir de Milão durante a invasão do exército francês à cidade (MAQUIAVEL, 2006), Pacioli foi para Florença, onde lecionou sobre *Os Elementos* de Euclides na Universidade de Pisa, e, em seguida, na Universidade de Bolonha atuou como *lector ad mathematicam*¹⁹. Nesse mesmo período, realizou a tradução da versão latina de *Os Elementos* para o italiano, a qual foi publicada em Veneza junto de seus outros tratados. Em seus últimos anos de vida, retornou à Sansepolcro, onde voltou a atuar como frade até sua morte, por volta de 1517²⁰.

Enquanto estudioso das matemáticas, Luca Pacioli esteve presente em discussões a respeito de propostas de reforma do ensino, trazendo considerações a respeito da ascensão da perspectiva ao *status* de arte liberal componente do *quadrivium*, como se observa a seguir.

2.2 As propostas de reforma do ensino e o advento da perspectiva

Em virtude do advento científico de estudos sobre perspectiva²¹, que deixou de ser relacionada apenas à pintura, por volta de 1420, e passou a ser compreendida segundo uma visão matemática (BERTATO, 2010; CONTADOR, 2011), algumas discussões acerca de sua valorização foram mobilizadas, a fim de que fosse elevada ao *status* de arte componente do *quadrivium*. Em meio a esse debate, alguns nomes defenderam essa proposta, como Michele Savonarola (1385-1468), Marsilio Ficino (1433-1499), Girolamo Savonarola (1455-1498) e Luca Pacioli, o qual dedicou trechos de *De Divina Proportione* à exposição de sua opinião.

No primeiro capítulo de *seu tratado*, Luca Pacioli relata um pouco sobre um “duelo científico” ocorrido em 9 de fevereiro de 1498, na corte de Milão, cujo assunto debatido não é especificado. Em suas palavras, além de Ludovico Sforza e Galeazzo Sanseverino, estiveram presentes “[...] toda sorte de celeberrimos sábios, tanto religiosos como leigos, dos quais

¹⁹ Segundo Cormack (2017), as *lectures* eram “palestras” ministradas em universidades sobre temas específicos. No caso de Luca Pacioli, entendemos tal título como “palestrante de matemáticas”.

²⁰ Segundo Bertato (2010, p. xv), Luca Pacioli “veio a falecer após 1514 (possivelmente em 1517), já que há notícias suas até 30 de agosto deste ano”.

²¹ Segundo Saito (2015, p. 182), “[...] o termo perspectiva era a tradução latina para a palavra grega *optiké*, que significava visão direta ou distinta, aquele que, para os gregos desvelava as coisas”. Apesar de estar relacionado à “ciência da visão”, esse termo também era utilizado nas belas artes.

assiduamente abunda a vossa magnífica corte” (PACIOLI, 2010, p. 1). Ao mencionar esses sábios, o frade elenca alguns deles, agrupando-os como “[...] Reverendíssimas Senhorias dos bispos, protonotários e abades, [...] egrégios oradores de Medicina e Astronomia, [...] doutores *utriusque iuris*²², [...] perspicazes arquitetos, engenheiros e assíduos inventores de coisas novas” (PACIOLI, 2010, p. 1-2). Dada a riqueza de detalhes nos escritos de Pacioli, é possível que outros debates semelhantes tenham ocorrido nesse ambiente, motivados por, dentre diversos assuntos, a proposta de reestruturação do *quadrivium* (BERTATO, 2010).

Já o segundo capítulo²³ traz inicialmente uma exaltação à visão, fazendo referência a Aristóteles. Pacioli (2010, p. 2) assim escreve: “E dentre nossos sentidos, os sábios concluem que a visão é a mais nobre. Daí, que vulgarmente se diga, não sem fundamento, que o olho é a primeira porta pela qual o intelecto entende e gosta”. Nessa afirmação, percebemos a admiração de Luca Pacioli pela perspectiva, confirmada no terceiro capítulo do tratado, quando relata “[...] o grande deleite e sumo amor que sinto pela pintura (ainda que ignorante dela)” (PACIOLI, 2010, p. 10).

Além disso, podemos destacar a inquietação de Luca Pacioli sobre o *status* da Perspectiva frente às artes componentes do *quadrivium*, também apresentada no terceiro capítulo de seu tratado:

[...] Porém, nosso juízo, ainda que baixo e incapaz, reduzem-nas a três ou cinco, isto é, Aritmética, Geometria e Astronomia, excluindo-se destas a Música, por tantas razões quanto as que eles são para excluírem das cinco a Perspectiva, ou agregando esta às quatro, por tantas razões quanto são as que agregam às nossas três a Música. Se disserem que a Música contenta o ouvido, um dos sentidos naturais, também a Perspectiva agrada a visão, que é muito mais digna, já que é a primeira porta do intelecto. Se disserem que aquela se remete ao número sonoro e à medida do tempo de suas prolações, também esta se refere ao número natural segundo todas as suas definições e à medida da linha visual. Se aquela recreia o ânimo pela harmonia, também esta muito deleita com a devida distância e também esta considera as aritméticas e geométricas. E, *breviter*, Excelso Duque, há muitos anos tenho isso em mente, ninguém conseguiu aclarar-me por que devam ser quatro e não três ou cinco. Estimo que tantos sábios não devam estar errados, porém, apesar de seus dizeres, minha ignorância não cede (PACIOLI, 2010, p. 9).

Como complemento à sua inquietação, o frade se refere a *De picturis*, de Plínio (23-79 a.E.C)²⁴, contido em seu tratado *Historiae Naturalis*, citando o desafio de Zêuxis a Parrásio, em

²² Doutores em ambas as leis, isto é, em direito civil e canônico.

²³ “Prefácio do Reverendíssimo Padre Mestre Luca Pacioli de Burgo, da Ordem dos Menores, Professor da Sagrada Teologia, no Compêndio sobre a Divina Proporção de Disciplinas Matemáticas” (PACIOLI, 2010, p. 4).

²⁴ Também conhecido como “Plínio, o velho”, foi comandante imperial da frota de Miseno (Roma) e estudioso de pintura (FABRIS, 2004, p. 73).

que, após pássaros voarem em direção às uvas pintadas em uma tela em decorrência de sua perfeição, Parrásio pintou sobre a mesma obra um véu, de modo que Zêuxis solicitou que este fosse retirado para que o público pudesse admirar seu trabalho. Porém, além de enganar os pássaros, enganou também um mestre, fazendo-o acreditar que a cobertura pintada fosse um véu real. Na conclusão do referido capítulo, Pacioli (2010, p. 12) aponta:

Daí que, por ora, se não ocorre outra, ficarei com essa idéia: são três as principais ciências e as outras são subalternas, ou são cinco as principais, se a Música for assim considerada. De maneira alguma me parece que se deva postergar a Perspectiva, visto que não seja menos digna de louvor. E estou certo de que, por não ser artigo de fé, ser-me-á tolerado (PACIOLI, 2010, p. 12).

Com vista à sua grande admiração pela perspectiva percebida em seus escritos, Pacioli (2010) deixa claro que, apesar de estudiosos designarem o *quadrivium* como lhe é conhecido, aceitava o posicionamento deles mesmo sem concordar, pois, segundo o frade, a perspectiva era tão digna de ser estudada quanto à música.

Apesar do posicionamento de Luca Pacioli,

[...] a perspectiva linear não fazia parte das matemáticas, embora considerasse a geometria de certo modo, como diriam os medievais. Na verdade, a perspectiva linear era uma arte pictórica e não fora considerada entre os pintores até o Renascimento. As discussões matemáticas acerca da perspectiva linear surgiram por causa de seu estreito vínculo com a óptica que, naquela época, tinha características muito distintas das quais estamos acostumados hoje (SAITO, 2015, p. 182).

Em virtude dessas discussões e dos demais aspectos apresentados até aqui, novos objetos de investigação matemática foram se desenvolvendo, podendo ser destacados aqueles relacionados à perspectiva linear, como a geometria projetiva.

Da parte dos não eruditos, a óptica segundo Euclides serviu de base para a aplicação da geometria por pintores, escultores e arquitetos em seus trabalhos, uma vez que, por não tratar de certas questões ligadas à visão, estudiosos de óptica da época consideraram tais escritos imprecisos e equivocados. Entretanto, apesar desse fervor acerca da perspectiva aplicada à pintura, Saito (2015, p. 185) afirma que “[...] a pintura em perspectiva não foi descoberta nem inventada pelos renascentistas. Na verdade, a técnica pictórica já existia, porém, não tinha sido utilizada pelos antigos por uma série de razões estéticas, morais e até epistemológicas”.

Nesses parâmetros, tratados que versam sobre esses conhecimentos geométricos e afins foram redigidos, trazendo inclusive instrumentos matemáticos desenvolvidos por aqueles conhecidos como “praticantes de matemáticas”. Apesar de não se encaixar nessa última característica, os escritos de Luca Pacioli em *De Divina Proportione* refletem o momento em

que essas discussões foram realizadas, abordando diversas temáticas correlatas tendo por base a “divina proporção”. Na seção a seguir, tratamos, em um contexto geral, das características do tratado *De Divina Proportione*, sua indicação e seu conteúdo.

2.3 O tratado *De Divina Proportione*, de Luca Pacioli

Dedicado ao Duque de Milão, Ludovico Sforza (1452-1508), o manuscrito intitulado *De Divina Proportione* foi finalizado em 1498, enquanto Luca Pacioli prestava serviços à corte. Há registros de uma segunda versão manuscrita, dedicada a Galeazzo Sanseverino (1458-1525), general do Exército de Milão e subordinado a Ludovico, e rumores de uma terceira, dedicada ao político de Florença, Piero Soderini (1451-1522), a qual foi dada como perdida (BERTATO, 2010; DI TEODORO, 2014). Segundo Nuovo (2014), em 1509, sob os cuidados de Paganino Paganini e seu filho, Alessandro, foi impressa uma versão do tratado em Veneza. Vale ressaltar que Paganino recebeu um privilégio de publicação dos escritos de Luca Pacioli por 15 anos, sendo responsável também pela publicação da *Summa* (BERTATO, 2010).

Segundo Bertato (2010, p. 15), “o texto da versão impressa [1509] pode ser dividido em três partes principais, além do alfabeto paciolano”. Antecedendo a primeira delas, constam cinco poemas: uma dedicatória a Piero Soderini; uma epístola de Daniele Caietani a Andrea Mocenico; um glossário relativo aos poliedros; e a *Taula desta obra*. Em seguida, temos o compêndio sobre a “Divina Proporção”, sobre o qual discorreremos um pouco mais na seção seguinte, com uma dedicatória à Ludovico Sforza. Na segunda parte, consta um tratado de arquitetura, baseado nos escritos de Vitruvius; e na terceira, encontra-se a tradução da obra de Piero Della Francesca, *Libellus de Quinque Corporibus Regularibus*, do latim para o italiano. Além disso, são apresentadas ao final “[...] a construção das letras maiúsculas, a página com a *Porta Speciosa*, 59 páginas com poliedros, numeradas de I a LIX intercaladas com duas páginas sobre arquitetura colocadas entre as páginas XIII e XIV, a *Arbor proportio et proportionalitas*” (DI TEODORO, 2014, tradução nossa)²⁵.

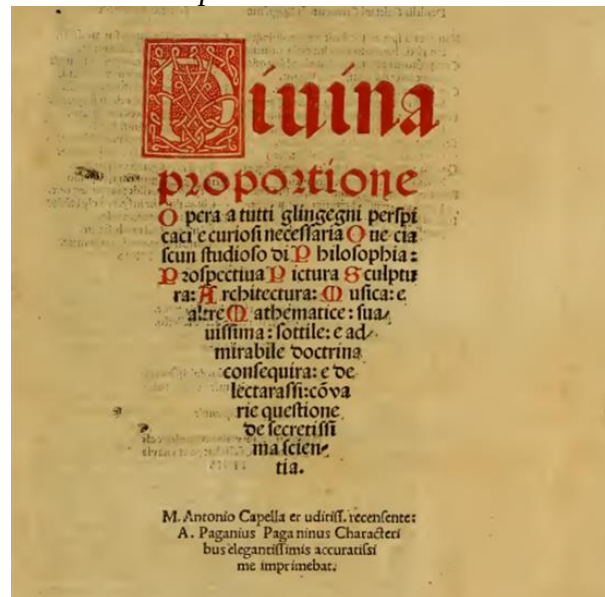
A versão de 2010, traduzida para o português, se restringe ao conteúdo comum entre o manuscrito de 1498 e a versão de 1509, isto é, a primeira parte do tratado, dedicado a discorrer sobre elementos que remetem à chamada “Divina Proporção”. Porém, em sua tradução, Bertato

²⁵ No original, se lê: “la costruzione delle lettere capitali, la tavola con la *Porta Speciosa*, tavole con i poliedri, numerate da I a LIX intervallate da due tavole architettoniche poste tra le tavole XIII e XIV, l’*Arbor proportio et proportionalitas*” (DI TEODORO, 2014).

(2010) não traz os textos que antecedem esta parte nas versões dos séculos XV e XVI. Desse modo, não pudemos nos aprofundar no conteúdo dos poemas, das epístolas e demais textos iniciais.

No frontispício da versão impressa de *De Divina Proportione* (1509) (Figura 3), Pacioli deixa claro o intuito de seu tratado, apresentando algumas características de que indivíduos se interessariam pela sua leitura e o motivo para isso.

Figura 3 — Frontispício da versão impressa de *De Divina Proportione*



Fonte: Pacioli (1509, frontispício).

Na tradução para o português, Pacioli (2010, frontispício) cita:

Obra necessária a todos os engenhosos, perspicazes e curiosos, com a qual todo estudioso de Filosofia, Perspectiva²⁶, Pintura, Escultura, Arquitetura, Música e outras disciplinas Matemáticas conseguirá suavíssima, sutil e admirável doutrina e se deleitará com várias questões da secretíssima ciência (PACIOLI, 2010).

Conforme mencionado anteriormente, o conteúdo de *De Divina Proportione* traz ao estudioso das matemáticas do Renascimento uma série de conhecimentos que podem ser interrelacionados, haja vista que os escritos de Luca Pacioli abordam essencialmente nas artes

²⁶ Em Pacioli (1509), o texto cita o termo *Prospectiva*, que, segundo Saito (2015) era uma das ramificações da perspectiva. A perspectiva abordava a representação de acordo com os parâmetros dos pintores e escultores, ou seja, era voltada para as belas artes, diferente dos outros ramos, que tratavam de propriedades ligadas à visão.

relacionadas às matemáticas dos séculos XIV e XV, trazendo temas relacionados à filosofia platônica e à arquitetura.

Os capítulos desta primeira parte são detalhados no quadro 2, a seguir. Para um melhor entendimento do leitor, organizamos por critérios de semelhança de conteúdo os assuntos abordados no referido tratado.

Quadro 2 — Descrição dos capítulos da primeira parte de *De Divina Proportione* (2010)

CAPÍTULOS	CONTEÚDO
I ao VI	São apresentados nessa seção uma dedicatória ao Duque Ludovico Sforza, o prefácio da obra, algumas concepções sobre as matemáticas, um pequeno glossário prévio, a justificativa para o título da obra e sua indicação.
VII ao XXIII	Neste trecho Pacioli apresenta os <i>effecti</i> , isto é, os “efeitos”, que são propriedades e resultados da Divina Proporção.
XXIV ao XLVI	Aqui, há uma apresentação dos corpos regulares, bem como a construção dos corpos inscritos uns nos outros. Ao final, justifica porque se limita a descrever 12 casos de inscrição.
XLVII ao LIII	Nesta seção, o autor descreve os corpos ditos “dependentes” dos citados anteriormente, dados em três variações: <i>Planus</i> (regulares), <i>Abscisus</i> (truncados) e <i>Elevatus</i> (estrelados), além de representá-los como <i>Solidus</i> (sólidos) e <i>Vacuus</i> (vazios ou “esqueletos”).
LIV	Neste capítulo Pacioli trata da esfera de Campano, um poliedro de 48 faces quadriláteras não-regulares e 24 triângulos isósceles, muito empregado na arquitetura renascentista.
LV ao LVII	Aqui, faz uma apresentação filosófica dos corpos regulares e trata de suas inscrições na esfera.
LVIII ao LXIII	O trecho da obra trata dos corpos ditos “oblongos”, se referindo a prismas e cilindros através de um estudo de colunas.
LXIV ao LXVIII	É apresentado nestes capítulos um estudo sobre pirâmides.
LXIX e LXX	Pacioli declara suficiente o que apresentou até então e indica a Summa como complemento aos estudos desta obra, além de dar esclarecimentos sobre as ilustrações contidas em sua obra.
LXXI	O capítulo apresenta um pequeno dicionário de termos matemáticos relativos à geometria.

Fonte: elaborado pelo autor.

Sobre o primeiro grupo de capítulos citado no quadro 2, além do que já foi anteriormente apresentado, é relevante ressaltar que Luca Pacioli ainda traz explicações sobre termos e símbolos que porventura possam aparecer nos capítulos subsequentes. Isto é, o autor apresenta uma espécie de glossário ou guia para compreender algumas das passagens por ele escritas em seu tratado, como as indicações de proposições de *Os Elementos* de Euclides.

A seguir, para maior facilidade, é preciso notar que quando mencionamos, por exemplo, a primeira do primeiro, a quarta do segundo, a décima do quinto, a vigésima

do sexto e assim, sucessivamente, até o décimo quinto, deve-se entender, pela primeira citação, o número das conclusões e, pela segunda, o número dos livros de nosso filósofo Euclides, a quem imitamos como arquimandrita dessa faculdade. Isto é, ao dizer “pela quinta do primeiro”, queremos dizer “pela quinta conclusão de seu primeiro livro”, e assim para os outros livros parciais de seu livro total sobre os elementos e primeiros princípios de aritmética e geometria. Porém, quando a autoridade por nós aduzida for de outra obra sua, ou de outro autor, nomearemos essa obra e esse autor (PACIOLI, 2010, p. 12).

Como complemento, Pacioli (2010) ainda traz uma lista de símbolos e expressões empregados no tratado em trechos específicos, que versam sobre conhecimentos matemáticos, como símbolos para operações (Figura 4). Segundo Pacioli (2010, p. 12), “[...] é conveniente observar estas coisas no curso de nossa obra para que não haja equívoco sobre o sentido das palavras”.

Figura 4 — Lista de símbolos indicados por Pacioli (2010)

$\mathcal{R}$, isto é, sinal de uma Raiz
 $\mathcal{R}\mathcal{R}$, isto é, sinal de Raiz de Raiz
 $\ominus$, isto é, menos em qualquer quantidade
 $\wp$, isto é, mais *similiter* em qualquer quantidade
 q^a , isto é, quantidade ou quantidades se o -a é trocado pelo -e
 po^a , isto é, potência ou potências se o -a é trocado por -e
 li^a , isto é, linha ou linhas se o -a é trocado por -e
 Geo^a , isto é, geometria; geo^ca , isto é, geométrica
 $Arith^ca$, isto é, Aritmética; Aritméticas por a/e
 $Propor^e$ isto é, proporção e proporções se o -e pelo -i
 N^o , isto é, número; números se o -o pelo -i
 $\square^o$, isto é, quadrado; quadrada; quadrados se o -o por -a ou -e
 Dra , isto é, diferença; diferenças se o -a por -e
 p^o , isto é, primeiro; primeira; primeiras; primeiros se o -o por a/e/i/o
 2^o , isto é, segundo; segunda; segundas; segundos se o -o por a/e/i/o
 $mcato$, isto é, multiplicado; multiplicada se o -o por a/o
 $mcare$, isto é, multiplicar
 $s. ppor^e h el m .e doi ex^o cioe secondo la propor^e hauente el mezzo e doi extremi.$ ^{XXVII}

Fonte: Pacioli (2010, p. 11).

Concluindo esse grupo de capítulos que caracterizam uma espécie de apresentação do tratado, Luca Pacioli traz explicações sobre seu título, no capítulo V, e sobre sua recomendação, no capítulo VI. Sobre o título, o frade afirma que “[...] o título adequado a nosso tratado deve ser *la divina proportione*” (PACIOLI, 2010, p. 14), isto é, “a divina proporção”, em vez de “sobre a divina proporção”, como é a tradução para o português. Sua afirmação decorre de quatro “correspondências” com Deus, consideradas por ele como suficientes:

A primeira é que ela é somente uma e não mais e, não é possível atribuir-lhe outras espécies, nem diferenças. E esta unidade é o supremo epíteto de Deus, segundo toda escola teológica e também filosófica. A segunda correspondência é a da Santa Trindade, isto é, assim como *in divinis* há uma mesma substância em três pessoas, Pai, Filho e Espírito Santo, da mesma maneira, uma mesma proporção desta sorte sempre se encontrará em três termos e nunca em mais ou em menos, como se dirá. A terceira correspondência é que assim como Deus, propriamente, não se pode definir, nem por nós pode ser entendido por palavras, da mesma maneira, esta nossa proporção não pode ser determinada por número inteligível, nem ser expressa por quantidade racional, sendo sempre oculta e secreta e, pelos matemáticos, chamada irracional. A quarta correspondência é que, assim como Deus jamais pode mudar e é tudo em tudo e está em tudo em toda parte, da mesma maneira, a nossa presente proporção sempre, em toda quantidade contínua ou discreta, seja grande ou pequena, é a mesma e sempre invariável e de nenhum modo pode mudar, nem tampouco pode apreendê-la de outro modo o intelecto, como nosso processo demonstrará (PACIOLI, 2010, p. 14-15).

Em virtude de sua formação teológica e suas concepções filosóficas, percebemos no excerto que Luca Pacioli traz algumas relações entre matemática e religião, vinculando a “divina proporção” a Deus. Na primeira, entendemos que, assim como Deus é considerado único, a divisão em média e extrema razão também é, uma vez que matematicamente obedece à característica de que a razão entre a menor e a maior parte é igual a razão entre a maior parte e o todo. Quanto à segunda, assim como o cristianismo tem por base a santíssima Trindade, formada por Deus (Pai), Jesus Cristo (Filho) e o Espírito Santo, a proporção que garante a média e extrema razão depende de três grandezas para que se obtenha a chamada “quarta proporcional”. Sobre a terceira relação, Pacioli faz uma associação entre a incomensurabilidade da “divina proporção”, que resulta em um número irracional e a impossibilidade de se definir Deus em decorrência da limitação da razão humana. Por fim, o frade explicita que, mesmo que as divisões do todo segundo a média e extrema razão se mantenham proporcionais entre si, seja aumentando ou diminuindo, a proporção final se manterá, fazendo alusão a Deus como a divindade inalterável.

Luca Pacioli ainda complementa o capítulo V com uma quinta “correspondência”, fazendo referência aos escritos de Platão em *Timeu* sobre os elementos da natureza e os corpos regulares, e considerando válida a tríade Deus, quinta-essência e dodecaedro, respectivamente, o ser supremo, o elemento gerador e o corpo de doze bases pentagonais que comporta em seu interior qualquer um dos demais. Tal citação reflete a influência de suas crenças religiosas e seus estudos filosóficos sobre seus escritos.

Por fim, no sexto capítulo de *De Divina Proportione*, o frade indica o início dos estudos sobre conhecimentos matemáticos presentes no tratado se referindo aos treze “efeitos” de uma

linha dividida segundo a divina proporção²⁷, “[...] efeitos estes que não devem chamar-se naturais, mas sim, divinos (PACIOLI, 2010, p. 15-16).

Sobre os 13 efeitos, Bertato (2010, p. 16) cita que

[...] o frade considera as primeiras proposições contidas no Livro XIII dos Elementos de Euclides, substituindo as demonstrações geométricas por exemplos numéricos. Cada um dos efeitos recebe um nome particular: primeiro, essencial, singular, inefável, admirável, inominável, recíproco do precedente, inestimável, excelso, supremo, excelentíssimo, incompreensível e digníssimo (BERTATO, 2010, p. 16).

Além disso, no capítulo XXIII²⁸, Pacioli (2010, p. 27) justifica a quantidade de efeitos por ele elencados com base em preceitos religiosos do cristianismo, citando:

Não me parece oportuno, Excelso Duque, estender-me mais em seus infinitos efeitos, pois o papel não bastaria à tinta para expressá-los todos, mas somente estes treze, entre os outros, elegemos em reverência do grupo dos doze e de seu Santíssimo mestre, Nosso Redentor Jesus Cristo. Tendo atribuído-lhes o nome de divinos, é necessário terminar com o número de nossa Salvação, dos treze artigos, e dos doze apóstolos unidos a Nosso Salvador, cujo colégio entendo que Vossa Ducal Alteza tem singular devoção, por havê-lo feito dispor no mencionado lugar, o Sacratíssimo templo das Graças, por nosso já citado Leonardo com seu gracioso pincel (PACIOLI, 2010, p. 27).

No que concerne ao terceiro grupo de capítulos, abordamos na realização desse estudo apenas aqueles que versam sobre o conceito de corpos regulares e a construção dos três primeiros apresentados no tratado: tetraedro, cubo e octaedro (Capítulos XXV a XXVIII), em virtude da complexidade percebida na construção dos outros dois corpos. E, como a construção das inserções dos corpos uns nos outros depende inicialmente da construção de cada um deles, não tratamos desses capítulos nesse estudo. Os demais capítulos do tratado também não foram abordados aqui, haja vista que são alheios aos objetivos elencados em nossa introdução.

A partir desse estudo inicial do conteúdo do tratado de Pacioli, percebemos uma série de conceitos matemáticos incorporados ao texto, que podem ser abordados para discutir o processo de construção do conhecimento. Assim, no capítulo a seguir, são apresentados alguns desses conhecimentos matemáticos incorporados em *De Divina Proportione*, especificamente, sobre o conceito de corpos regulares segundo Luca Pacioli e a garantia da existência de apenas cinco deles com base no descrito no capítulo XXV do tratado, bem como a construção do

²⁷ No tratado *De Divina Proportione*, Luca Pacioli trata desses “efeitos” nos capítulos VII a XXIII, os quais não abordaremos nesse estudo.

²⁸ “Como, por reverência de nossa Salvação, terminam os ditos efeitos” (PACIOLI, 2010, p. 27).

tetraedro, do cubo e do octaedro com base no diâmetro de uma esfera que envolve cada um deles.

3 ASPECTOS EPISTEMOLÓGICOS DOS CORPOS REGULARES SOB O OLHAR DE LUCA PACIOLI

Em seu tratado, Luca Pacioli aborda diversos temas relacionados à divina proporção, dentre os quais pode-se destacar um estudo detalhado acerca dos cinco corpos regulares, a saber: tetraedro, cubo (ou hexaedro), octaedro, icosaedro e dodecaedro. Além das concepções filosóficas sobre esses corpos²⁹, advindas das ideias de Platão e da religiosidade do autor, seus conhecimentos matemáticos norteiam essa considerável seção de seus escritos dedicada ao estudo dos referidos corpos.

Neste capítulo serão apresentadas algumas considerações sobre os corpos regulares a partir do tratado *De Divina Proportione*, no que se refere, principalmente, ao conhecimento matemático presente nos escritos de Luca Pacioli. Assim, o capítulo encontra-se dividido em duas seções, das quais a primeira é destinada ao estudo do capítulo XXV do tratado, que versa sobre o conceito de corpos regulares e a garantia da existência de apenas cinco deles, enquanto a segunda aborda o conteúdo dos capítulos XXVI, XXVII e XXVIII, que tratam, respectivamente, da construção de três desses cinco corpos, o tetraedro, o cubo e o octaedro, descrevendo e comentando os processos, além de apresentar os conhecimentos matemáticos incorporados.

3.1 O conceito de corpos regulares contido no capítulo XXV

Conforme mencionado na terceira seção do segundo capítulo de nosso estudo, daremos ênfase a alguns capítulos de *De Divina Proportione* que abordam os conhecimentos pertinentes ao estudo dos corpos regulares. Iniciando pelo capítulo XXV³⁰, Luca Pacioli discorre sobre a existência de apenas cinco corpos regulares, trazendo como justificativa a relação entre os ângulos presentes nesses corpos, chamados pelo autor de superficiais (ou planos) e sólidos.

Segundo Pacioli (2010, p. 28), podemos compreender os corpos regulares como

[...] aqueles cujas bases são iguais entre si e de ângulos sólidos e planos iguais e, similarmente, de lados iguais. Assim se apresenta, pois para a construção de cada

²⁹ No capítulo XXIV de *De Divina Proportione* intitulado “Como os ditos efeitos concorrem à composição dos corpos regulares e seus dependentes” (PACIOLI, 2010, p. 27), o autor se refere à relação entre os corpos regulares e os elementos da natureza contida nos escritos de Platão em *Timeu*, fazendo alusão à criação perfeita por parte de Deus.

³⁰ “Como não pode haver mais de cinco corpos regulares” (PACIOLI, 2010, p. 28).

ângulo sólido é necessário ao menos o concurso de três ângulos superficiais, porque um ângulo sólido não pode ser determinado somente por dois ângulos superficiais (PACIOLI, 2010, p. 28).

Visando à compreensão do leitor sobre o conceito de corpos regulares presente no referido tratado, faz-se necessário apresentar as definições de ângulo superficial e de ângulo sólido conforme descrito por Euclides em *Os Elementos*, indicado pelo frade como um guia norteador para seus escritos.

Sobre o ângulo superficial, chamado de ângulo plano em *Os Elementos*, Euclides (2009, p. 97) o enuncia na oitava definição do livro I como “[...] a inclinação, entre elas, de duas linhas no plano, que se tocam e não estão postas sobre uma reta”. No que se refere ao caso dos corpos regulares, podemos entender o ângulo superficial em termos da matemática atual como cada um dos ângulos internos presentes nas faces dos corpos, assim como em qualquer polígono. Quanto ao ângulo sólido, a décima primeira definição do livro XI de *Os Elementos* o enuncia como

[...] a inclinação por mais de duas retas que se tocam e que não estão na mesma superfície, relativamente a todas as retas. De outro modo: o ângulo sólido é o contido por mais de dois ângulos planos, que não estão no mesmo plano, construídos em um ponto (EUCLIDES, 2009, p. 482).

Desse modo, também em relação aos corpos regulares, entendemos que o ângulo sólido se trata do concurso de, pelo menos, três ângulos superficiais em um mesmo vértice³¹. Além disso, também percebemos no conceito apresentado por Pacioli (2010) uma indicação sobre bases e lados do corpo, os quais, diante do apresentado nos capítulos XXVI a XXVIII, que se referem às construções dos corpos regulares, são respectivamente entendidos em termos da matemática atual como as faces do corpo regular e suas arestas. A fim de manter a proximidade com os escritos do autor, utilizaremos esses mesmos termos ao longo desse estudo.

Tendo apresentado tal conceito, Luca Pacioli ainda elenca condições para a existência e a construção de corpos regulares de acordo com a base utilizada, isto é, o polígono indicado como face, e suas propriedades. Apesar da escrita do capítulo XXV de *De Divina Proportione* ser contínua e não apresentar subdivisões, optamos por abordar cada caso separadamente, conforme se segue.

³¹ Em termos da matemática atual, tais ângulos são conhecidos como ângulos poliédricos (DOLCE; POMPEO, 2005).

3.1.1 O caso das figuras regulares com seis ou mais lados

Acerca das faces dos corpos regulares, Pacioli (2010) descreve os casos que envolvem figuras regulares para a obtenção de ângulos sólidos. No primeiro, o frade discorre sobre os hexágonos regulares e uma generalização para as figuras com mais lados:

[...] Ocorre visto que três ângulos de cada hexágono equilátero são iguais a quatro ângulos retos e, ademais, no heptágono, isto é, figura de sete lados, e em geral em toda figura equilátera e também equiângula de mais lados, três ângulos são sempre maiores que quatro retos, tal como se apresenta evidentemente na trigésima segunda do primeiro, e cada ângulo sólido é menor que quatro ângulos retos, como atesta a vigésima primeira do décimo primeiro (PACIOLI, 2010, p. 28).

Nesse trecho, Luca Pacioli se refere à duas proposições presentes em *Os Elementos* de Euclides que garantirão o conteúdo do capítulo XXV de seu tratado: a 32^a do livro I³² e a 21^a do livro XI³³. Dessas, a primeira serve de referência para se mensurar os ângulos planos de cada base. Já a segunda, garante a condição mínima necessária para se obter um ângulo sólido, assim como já afirmado por Pacioli (2010).

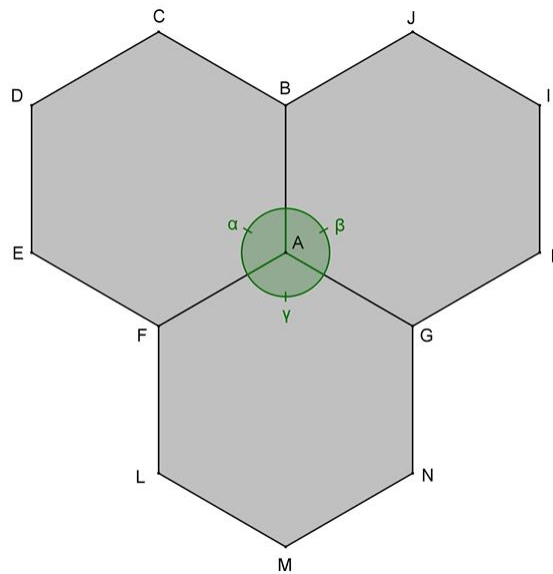
No caso inicial apresentado em *De Divina Proportione*, isto é, o hexágono regular, percebe-se uma contradição em relação à 21^a proposição do livro XI de *Os Elementos*. Pela 32^a proposição do livro I do referido tratado, um hexágono pode, a partir das diagonais que partem de um mesmo vértice, ser decomposto em quatro triângulos cuja soma das medidas de seus ângulos planos totaliza dois retos e, conseqüentemente, oito retos na soma de todos os ângulos planos do hexágono. Assim, dividindo igualmente essa soma entre seus seis ângulos planos, tem-se que cada um deles terá medida igual a um ângulo reto e um terço.

Desse modo, ao reunir três ângulos planos de distintas bases hexagonais para se cogitar a formação de um ângulo sólido, se obtém uma medida total igual a quatro ângulos retos, contrariando a 21^a proposição do livro XI de *Os Elementos*. Assim, entendemos que não é possível a construção de um ângulo sólido, pois a soma das medidas dos ângulos planos não se adequa na condição estabelecida por Euclides (2009), impossibilitando uma construção no espaço, conforme se observa na figura 5.

³² “Tendo sido prolongado um dos lados de todo triângulo, o ângulo exterior é igual aos dois interiores e opostos, e os três ângulos interiores do triângulo são iguais a dois retos” (EUCLIDES, 2009, p. 122).

³³ “Todo ângulo sólido é contido por ângulos menores do que quatro retos” (EUCLIDES, 2009, p. 499).

Figura 5 — Ângulos planos de três hexágonos



Fonte: elaborado pelo autor.

De maneira análoga, as figuras com mais que seis lados, por construção, também contrariam a 21ª proposição do livro XI, pois cada uma dessas bases terá mais diagonais partindo de um mesmo vértice e, conseqüentemente, poderá ser decomposta em mais triângulos. Assim, seus ângulos planos terão medida maior que um reto e um terço e, em decorrência disso, a concorrência de pelo menos três deles será superior a quatro retos, também contrariando a 21ª proposição do livro XI de *Os Elementos*.

Diante disso, Pacioli (2010, p. 28) afirma que:

[...] é impossível que três ângulos do hexágono, do heptágono e, em geral, de qualquer figura de mais lados equilátera e também equiângula formem um ângulo sólido. Por isso se manifesta que nenhuma figura sólida equilátera e de ângulos iguais não se pode formar a partir de superfícies hexagonais ou, verdadeiramente, de mais lados, pois se três ângulos do hexágono equilátero e equiângulo são maiores que um ângulo sólido, segue que quatro ou mais, com mais razão, excederão o dito ângulo sólido (PACIOLI, 2010, p. 28).

Isto é, diante da análise do frade, percebemos a impossibilidade de construir qualquer corpo regular com bases que tenham seis ou mais lados, pois segundo afirma, se a concorrência de três ângulos planos do hexágono regular extrapola a condição estabelecida por Euclides (2009), a concorrência de mais ângulos dessa figura, ou ainda, dos ângulos planos das figuras com mais que seis lados, também excederá a mesma condição.

3.1.2 O caso do pentágono regular

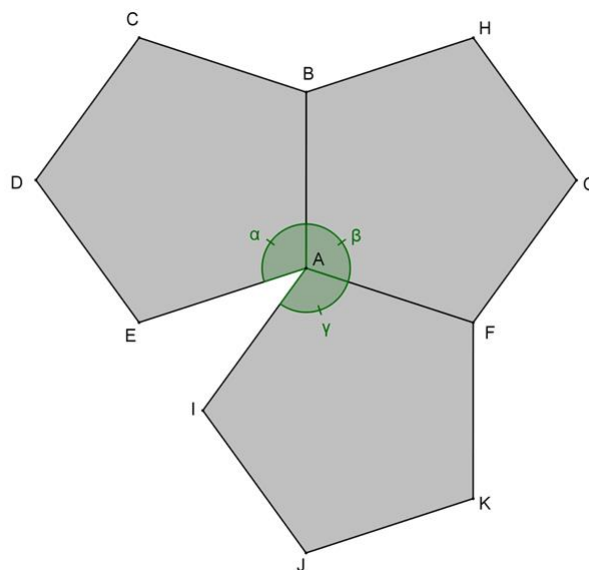
Seguindo a sequência apresentada no capítulo XXV de *De Divina Proportione*, o primeiro caso possível de construção, isto é, o caso dos polígonos regulares, é citado por Pacioli (2010, p. 29) conforme se segue:

[...] três ângulos do pentágono equilátero e equiângulo é manifesto que são menores que quatro ângulos retos e quatro são maiores que quatro retos. Donde, com três ângulos de um pentágono equilátero e equiângulo pode-se formar o ângulo sólido, porém, com quatro de seus ângulos, ou com mais, não é possível formar ângulo sólido (PACIOLI, 2010, p. 29).

De forma análoga à do caso anterior, a partir de um determinado vértice do pentágono, pode-se traçar duas diagonais e decompor tal base em três triângulos. Assim, dividindo igualmente os seis retos resultantes da soma dos cinco ângulos planos do pentágono entre eles, obtém-se um reto e um quinto como medida para cada um. Desse modo, a concorrência de três ângulos planos de distintos pentágonos resulta em um ângulo sólido de medida igual a três retos e três quintos, isto é, uma medida menor que quatro ângulos retos.

Como o resultado de tal soma está dentro da condição estabelecida por Euclides (2009) na 21ª proposição do livro XI de *Os Elementos*, então a convergência de três ângulos planos de faces pentagonais em um mesmo vértice para a formação de um ângulo sólido é possível, como se vê na figura 6.

Figura 6 — Ângulos superficiais de três pentágonos



Fonte: elaborado pelo autor.

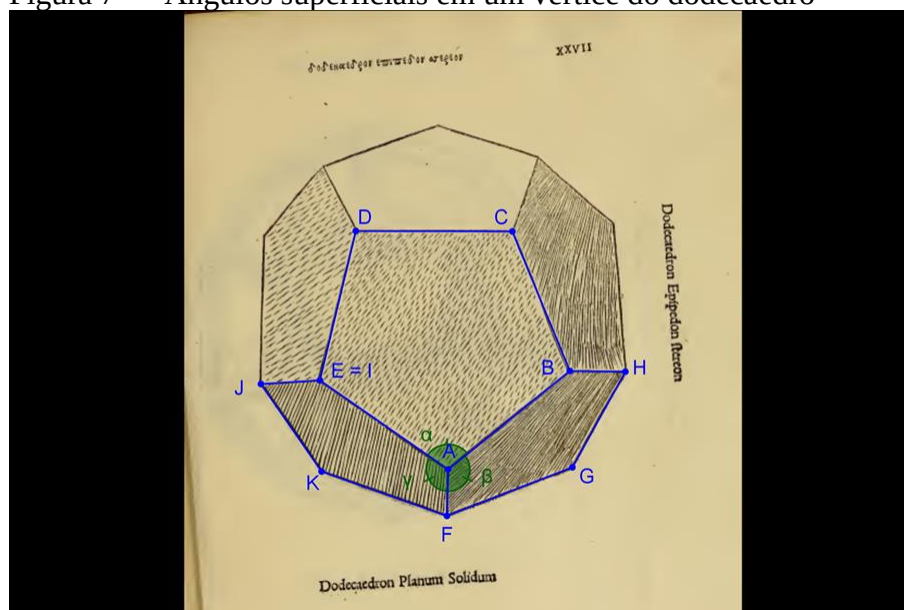
Entretanto, ao cogitar a formação de um ângulo sólido a partir de quatro ângulos planos de distintos pentágonos, a soma de suas medidas extrapolaria a condição exigida por Euclides (2009), pois resulta em quatro retos e quatro quintos, contrariando a 21ª proposição do livro XI.

Assim, Pacioli (2010, p. 29) conclui que:

[...] Portanto, somente um corpo pode ser formado com pentágonos equiláteros e equiângulos, o qual é chamado dodecaedro ou, de outra maneira, corpo de doze pentágonos, pelos filósofos. Neste, os ângulos dos pentágonos, três a três, formam e contêm todos os ângulos sólidos do dito corpo (PACIOLI, 2010, p. 29).

Desse modo, o frade indica que só é possível uma combinação entre pentágonos regulares, a qual ocorre pela concorrência de três ângulos planos por vértice, possibilitando construir apenas um corpo regular, o dodecaedro, a partir de doze bases pentagonais, como mostra a figura 7.

Figura 7 — Ângulos superficiais em um vértice do dodecaedro



Fonte: adaptado de Pacioli (1509).

Na figura 7 são destacados os ângulos planos dos pentágonos regulares ABCDE, AFKJI e ABHGF, formando um dos ângulos sólidos do dodecaedro no vértice A. Observamos também que, para que isso seja possível, as linhas AE e AI precisam estar sobrepostas.

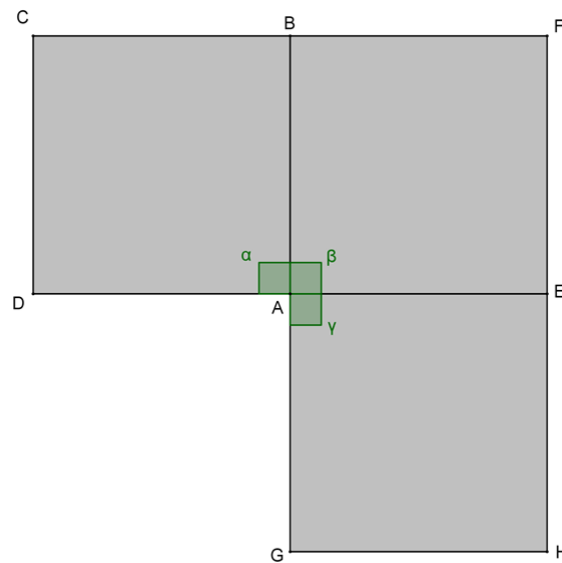
3.1.3 O caso do quadrado

Em seguida, no capítulo XXV, também observamos considerações sobre o caso das bases quadradas, sobre o qual Pacioli (2010, p. 29) cita:

[...] A mesma razão se dá nas figuras quadriláteras de lados e ângulos iguais, como foi dito para os pentágonos, pois toda figura quadrilátera, se for equilátera e também de ângulos iguais, por definição será quadrada, porque todos os seus ângulos serão retos, como se mostra pela trigésima segunda do primeiro. Donde, com três ângulos de tal figura superficial é possível formar um ângulo sólido, mas com quatro ou mais deles é impossível (PACIOLI, 2010, p. 29).

Segundo o frade, é possível cogitar a concorrência de três faces quadradas, pois, como cada ângulo plano da referida base é reto³⁴, tem-se que a soma de três deles será igual a três retos, obedecendo à condição estabelecida por Euclides (2009) na 21^a proposição do livro XI, possibilitando, então, a construção de um ângulo sólido (Figura 8).

Figura 8 — Ângulos superficiais de três quadrados



Fonte: elaborado pelo autor.

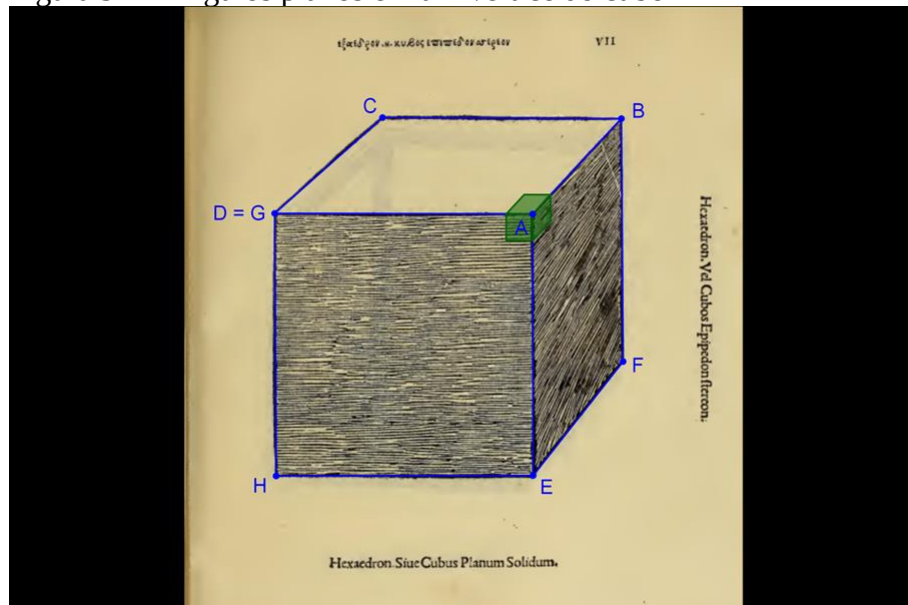
Porém, há uma impossibilidade ao cogitar a formação de um ângulo sólido com quatro desses ângulos planos, pois a soma de suas medidas resulta em quatro retos, assim como o caso das bases hexagonais, retornando ao caso da planificação.

³⁴ Assim como nos casos anteriores, também pode-se traçar a diagonal do quadrado a partir de um vértice, decompondo-o em dois triângulos, de modo que a soma das medidas dos ângulos planos totaliza quatro retos. A partir daí, dividindo igualmente esse total entre os quatro ângulos planos do quadrado, conclui-se que cada um terá medida igual a um reto.

Desse modo, Pacioli (2010, p. 29) conclui o caso das bases quadradas, citando: “Por isso, com tais figuras superficiais, sabendo que são quadriláteros eqüiláteros e de ângulos iguais, pode-se formar um sólido, a que chamamos cubo e que é um corpo contido por seis superfícies quadradas e tem doze lados e oito ângulos sólidos”.

Assim como no caso das bases pentagonais regulares, só é possível a concorrência de, no máximo, três bases quadradas por vértice para a formação de um ângulo sólido, obtendo, então, o cubo (ou hexaedro regular), formado por seis bases quadradas, como apresenta a figura 9.

Figura 9 — Ângulos planos em um vértice do cubo



Fonte: adaptado de Pacioli (1509).

Na figura 9 são destacados os ângulos planos das bases ABCD, AEHG e ABFE, formando um ângulo sólido no vértice A, conforme observamos nos escritos de Pacioli (2010). Assim como no caso das bases pentagonais, é necessário que duas linhas, AD e AG, estejam sobrepostas.

3.1.4 O caso do triângulo regular

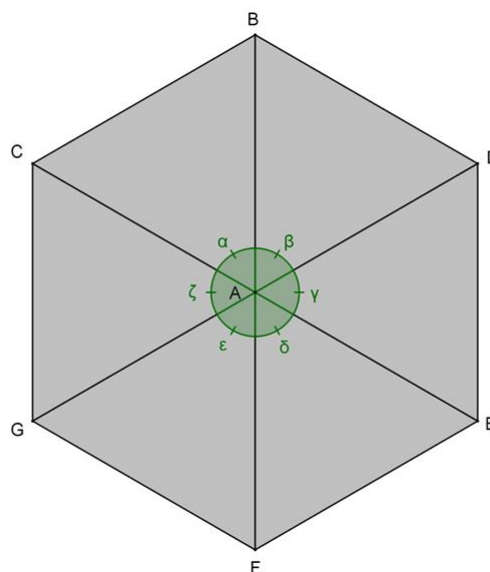
Na continuidade do capítulo XXV, o frade trata do caso das bases triangulares, que, segundo ele, devem ser regulares para que seja possível a construção dos corpos pertinentes a elas. Sobre isso, Pacioli (2010, p. 29) cita que:

Dos triângulos equiláteros, seis ângulos são iguais a quatro retos, pela citada trigésima segunda do primeiro. Dessa maneira, menos de seis são maiores que quatro retos e mais de seis são maiores que quatro retos. Portanto, com seis ou mais ângulos de tais triângulos não se pode formar um ângulo sólido, porém, com cinco, com quatro e com três se pode formar (PACIOLI, 2010, p. 29).

Pelo descrito, como a medida do ângulo plano do triângulo regular é menor que o das bases anteriormente citadas (equivalente a dois terços de um reto), essa figura propicia a construção de mais corpos, isto é, os três restantes.

Inicialmente, Pacioli (2010) afirma que não é possível a construção de ângulos sólidos com seis ângulos planos ou mais, pois, ao somar as medidas de, no mínimo, seis desses ângulos, obteremos um total de quatro retos. Consequentemente, recai-se em uma nova situação de planificação, já comprovado nos casos que envolvem bases hexagonais e quadradas (Figura 10).

Figura 10 — Ângulos superficiais de seis triângulos regulares

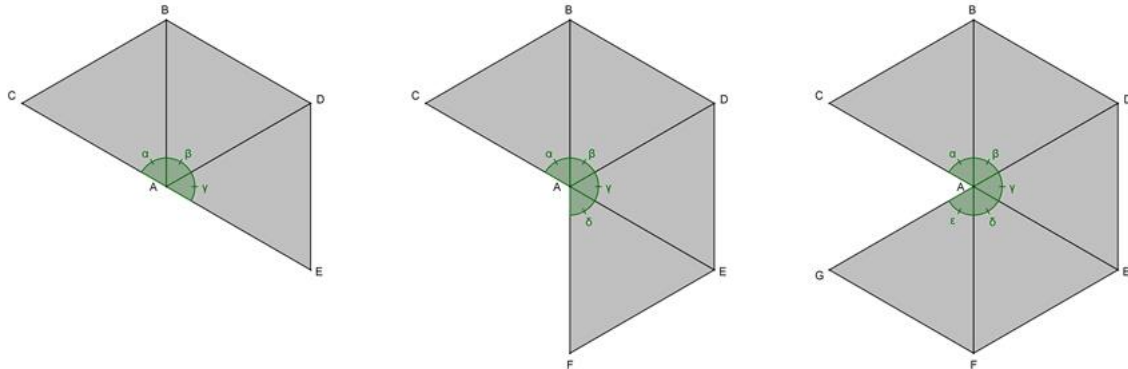


Fonte: elaborado pelo autor.

Em contrapartida, com menos que seis triângulos, há possibilidades de se gerar ângulos sólidos em virtude de as somas satisfazerem a 21ª proposição do livro I de *Os Elementos*, como aponta a figura 9. Inicialmente, podemos garantir a validade do caso mínimo, pois, na concorrência de três bases, a medida obtida totaliza dois retos. Para quatro ângulos planos concorrentes, a validade permanece, pois a soma das medidas resulta em dois retos e dois terços, também seguindo a proposição de Euclides (2009). Por fim, analogamente, é possível a concorrência de cinco ângulos planos, uma vez que a soma, equivalente a três retos e um terço,

ainda obedece à condição estabelecida, que é de não ter medida igual a quatro retos ou maior. Todas essas possibilidades são apresentadas na figura 11.

Figura 11 — Ângulos superficiais de três, quatro e cinco triângulos regulares



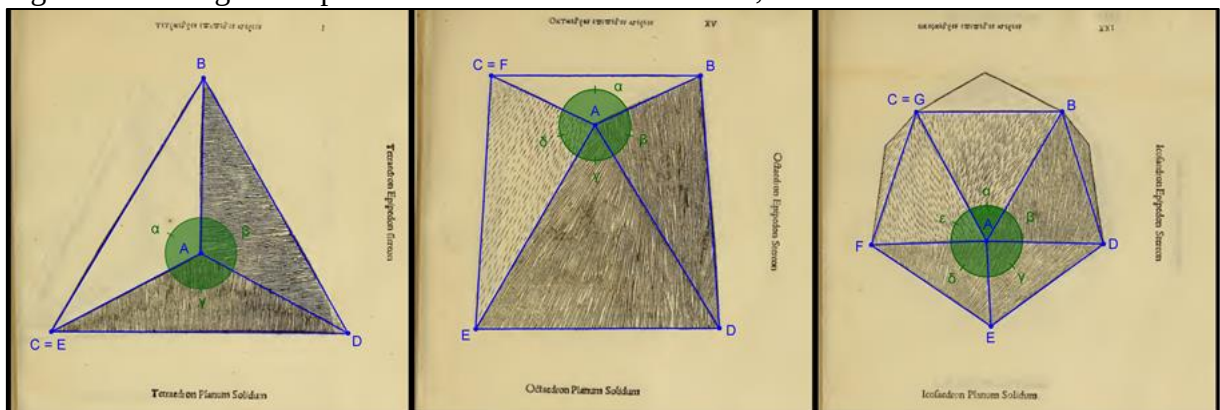
Fonte: elaborado pelo autor.

Dadas essas situações, Pacioli (2010, p. 29) conclui:

E visto que três ângulos do triângulo equilátero contêm um ângulo sólido, logo com triângulos equiláteros se forma o corpo de quatro bases triangulares de lados iguais, denominado tetraedro. E quando concorrem quatro de tais triângulos, forma-se o corpo de oito bases denominado octaedro, e se cinco triângulos equiláteros contêm um ângulo sólido, forma-se o corpo denominado icsaedro, de vinte bases triangulares e de lados iguais (PACIOLI, 2010, p. 29).

Assim, em razão da medida de seu ângulo plano, a base triangular propicia a construção de três corpos regulares, a saber: o tetraedro, com quatro bases e três ângulos planos por ângulo sólido; o octaedro, com oito bases e quatro ângulos planos por ângulo sólido; e o icsaedro, com vinte bases e cinco ângulos planos por ângulo sólido (Figura 12).

Figura 12 — Ângulos superficiais em vértices do tetraedro, do octaedro e do icsaedro



Fonte: adaptado de Pacioli (1509).

Desse modo, Pacioli (2010) conclui o capítulo XXV de seu tratado, tendo como base as proposições estabelecidas por Euclides (2009). Nos cinco capítulos seguintes do tratado, o frade trata das construções dos corpos regulares e de algumas relações pertinentes a eles. A seguir, trataremos do processo de construção de alguns corpos regulares segundo os capítulos XXVI, XXVII e XXVIII de *De Divina Proportione*, escritos de Luca Pacioli.

3.2 A construção de alguns corpos regulares contidos em *De Divina Proportione*

Tendo justificado matematicamente a existência de apenas cinco corpos regulares, Pacioli (2010) trata nos capítulos XXVI a XXX da construção de cada um deles, tomando como base os diâmetros das esferas³⁵ que os circundam³⁶. Em virtude do grau de complexidade no processo de construção de alguns desses corpos, nesse estudo trataremos apenas dos três com a menor quantidade de bases, isto é, o tetraedro, o cubo (ou hexaedro) e o octaedro.

A seguir, serão descritas e comentadas as construções desses três corpos regulares feitas por meio do *software* GeoGebra, simulando o uso de régua e compasso com comandos básicos em duas e três dimensões. Recorremos ao uso do recurso computacional em razão da melhor visualização da representação em três dimensões, uma vez que na construção dos corpos regulares usando régua e compasso se faz necessário compreender esse processo em perspectiva. Em cada processo procuramos detalhar cada etapa com o máximo de fidelidade possível seguindo os escritos de Luca Pacioli, usando *Os Elementos* de Euclides como referência para as passagens indicadas pelo autor.

3.2.1 O tetraedro contido no capítulo XXVI

No capítulo XXVI de seu tratado, Pacioli (2010) apresenta a construção do primeiro dos cinco corpos regulares, o tetraedro. Como o próprio título do capítulo afirma, “Da fábrica ou formação dos cinco corpos regulares e da proporção de cada um com relação ao diâmetro da

³⁵ Diferente de Platão (2011), que, em *Timeu*, parte dos corpos regulares na tentativa de se aproximar da esfera, forma que Demiúrgo, a divindade, deu ao universo, Pacioli (2010) parte da esfera para se construir os corpos regulares, uma vez que sua forma perfeita remete a Deus, o criador de tudo.

³⁶ Conforme se observa nas palavras iniciais do capítulo XXVI de *De Divina Proportione*: “Visto e entendido quais e quantos são exatamente os corpos regulares, é necessário dizer agora como se formam, para que sejam circundados exatamente por uma esfera e, ademais, que proporção e denominação há entre eles ou seus lados, com relação ao diâmetro da esfera que exatamente os circunda, mediante o qual se chega ao conhecimento deles todos. E por isso trataremos primeiro do tetraedro, isto é, do [corpo] de quatro bases triangulares, equiláteras, e depois de cada um dos outros sucessivamente e por ordem” (PACIOLI, 2010, p. 30).

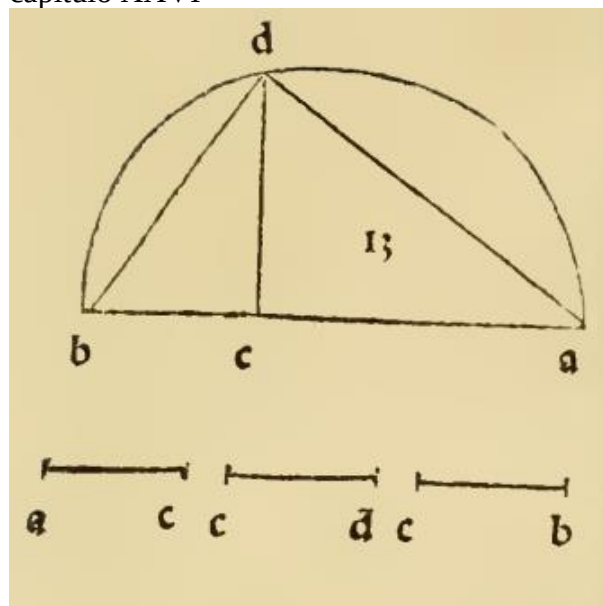
esfera. Primeiramente o tetraedro” (PACIOLI, 2010, p. 30), a construção se dá em relação ao diâmetro de uma esfera qualquer, que circundará o referido corpo.

Apesar de sua escrita contínua, podemos dividir o texto do capítulo em duas partes: a primeira, sobre a construção de um semicírculo a partir do diâmetro da esfera, e a segunda, sobre a construção efetiva do tetraedro de acordo com as medidas provenientes desse semicírculo.

No que se refere à construção do semicírculo (Figura 13), o frade cita:

Digo, pois, que tal corpo deve se formar assim: tome-se, primeiro, o diâmetro da esfera em que intentamos colocá-lo, o qual consideremos que seja a linha³⁷ .ab.³⁸, e que esta se divida no ponto .c., de modo que a parte .ac. seja o dobro da parte .bc., e faça-se sobre ela o semicírculo .adb., tire-se a linha .ab. e tirem-se as linhas .bd. e .da. (PACIOLI, 2010, p. 30).

Figura 13 — Semicírculo ADB apresentado no capítulo XXVI



Fonte: Pacioli (1509).

Segundo descreve Pacioli (2010), tendo como base uma esfera de diâmetro AB qualquer, iniciamos a construção, sendo necessário que tal linha seja dividida em duas partes, AC e BC, de modo que a medida de AC seja o dobro da medida de BC. No capítulo em questão,

³⁷ Por linha, segundo os escritos de Pacioli (2010), entende-se o segmento de reta compreendido entre os pontos dados.

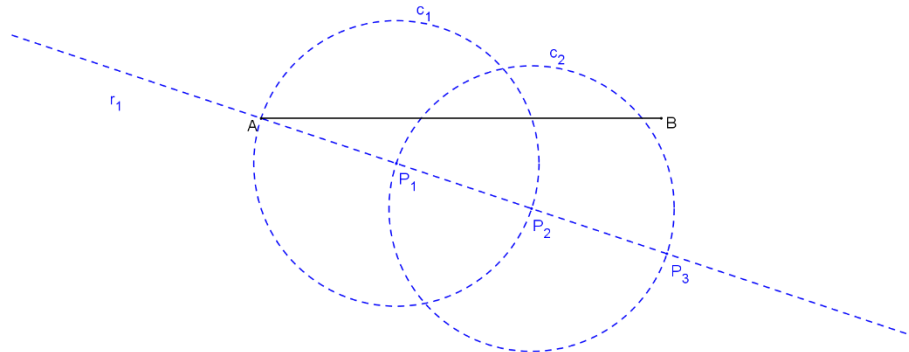
³⁸ Nas representações dos elementos como linha, ponto e outros, Pacioli (2010) os representa pelos pontos que os compõem, em letra minúscula, escritos entre pontos (.).

Luca Pacioli não expõe como fazer essa divisão proporcional, mas podemos fazê-la com base em *Os Elementos* seguindo duas proposições descritas por Euclides (2009).

Primeiramente, a nona proposição do livro VI discorre sobre como “Separar de uma reta dada a parte que foi prescrita” (EUCLIDES, 2009, p. 241). Tal processo pode ser utilizado para dividir um dado segmento em quantas partes sejam necessárias, segundo uma proporção previamente determinada. Apesar desse passo não estar indicado por Luca Pacioli em seu tratado, podemos presumir que cabe ao leitor ter esse conhecimento prévio, uma vez que isso possivelmente faça parte do “saber-fazer”³⁹ da época.

Segundo Euclides (2009), é necessário traçar uma reta concorrente à linha AB em uma de suas extremidades. A essa reta, que contém o ponto A, chamamos de r_1 . Em seguida, sobre ela, marcamos um ponto P_1 qualquer e traçamos duas circunferências cujos raios sejam iguais à distância entre os pontos A e P_1 : c_1 , com centro em P_1 , e c_2 , com centro em P_2 (ponto de interseção entre a reta r_1 e a circunferência c_1). E, na interseção entre a reta r_1 e a circunferência c_2 , obtemos o ponto P_3 , dividindo a linha AP_3 em três partes iguais, como mostra a figura 14.

Figura 14 — Execução da nona proposição do livro VI de Os Elementos



Fonte: elaborado pelo autor.

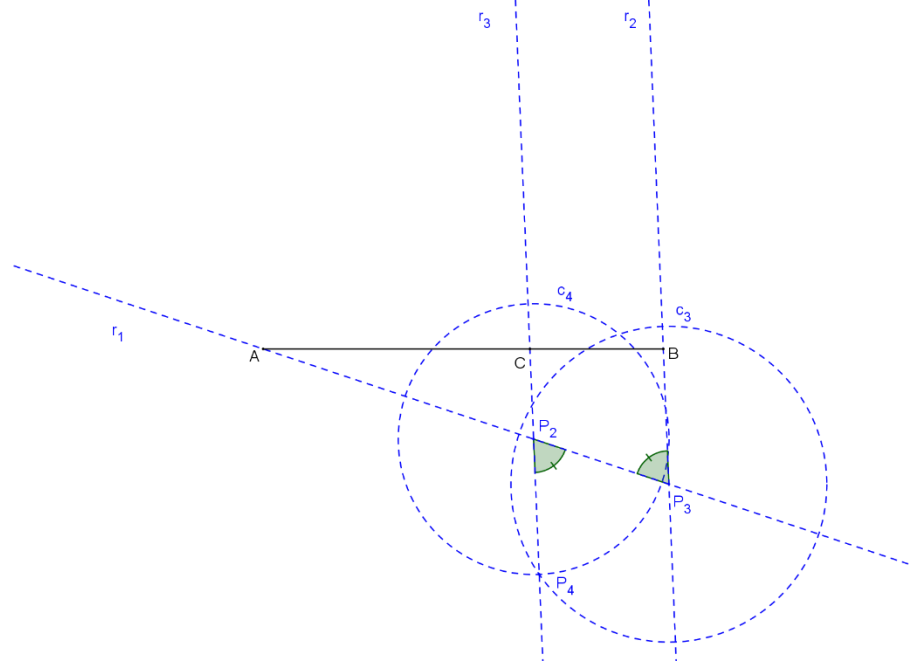
Depois, para determinar o ponto C sobre a linha AB conforme a proporção descrita por Pacioli (2010), isto é, de modo que a linha AC seja o dobro de BC, traçamos a reta r_2 , que contém os pontos P_3 e B. Desse modo, podemos recorrer à 31ª proposição do livro I, que versa sobre “Pelo ponto dado, traçar uma linha reta paralela à reta dada” (EUCLIDES, 2009, p. 121).

Para traçar uma reta r_3 paralela à r_2 no ponto P_2 , precisamos traçar um ângulo com vértice em P_2 cuja medida seja igual a de $\widehat{P_2P_3B}$, de modo que esses sejam alternos em relação

³⁹ Vide: Saito (2013).

à reta r_1 . Para isso, traçamos duas circunferências, c_3 , com centro em P_3 e raio igual à distância entre P_2 e B, e c_4 , com centro em P_2 e raio igual à distância entre P_3 e B, de modo que uma das interseções entre elas seja o ponto P_4 , que determina com o ponto P_2 a reta r_4 , paralela à r_3 . Assim, da interseção entre a linha AB e a reta r_4 , obtemos o ponto C, conforme solicitado por Pacioli (2010) e mostrado na figura 15.

Figura 15 — Execução da 31ª proposição do livro I de *Os Elementos*

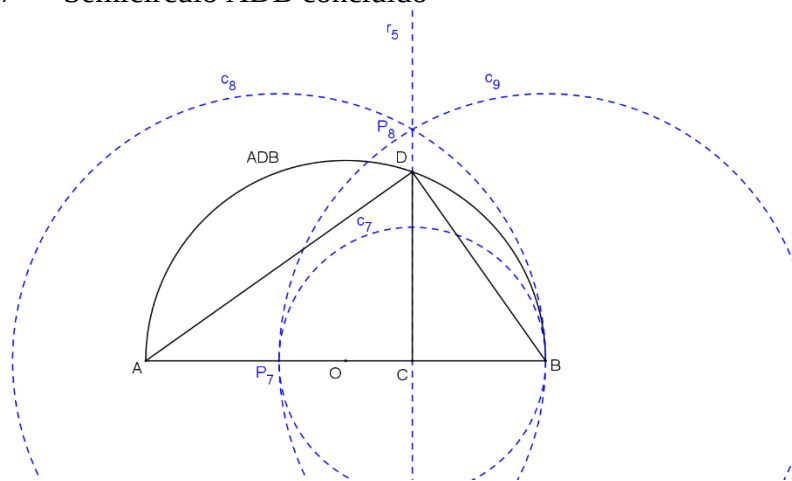


Fonte: elaborado pelo autor.

Em seguida, para obter o semicírculo ADB, é necessário localizar o ponto médio da linha AB, o qual chamaremos de ponto O. Tal construção também não é descrita por Pacioli (2010), mas podemos recorrer à décima proposição do livro I de *Os Elementos* para fazê-la, a qual versa sobre “Cortar em duas a reta limitada dada” (EUCLIDES, 2009, p. 106).

Com centro em A, traçamos uma circunferência c_5 de raio AB, e, com centro em B e mesmo raio, uma circunferência c_6 , para que, assim, as interseções entre elas, pontos P_5 e P_6 , determinem a reta r_4 , cuja interseção com a linha AB determina o ponto O buscado (Figura 16). Assim, com centro em O e raio AO, podemos, enfim, traçar o semicírculo ADB conforme indica Luca Pacioli em seu tratado.

Figura 17 — Semicírculo ADB concluído

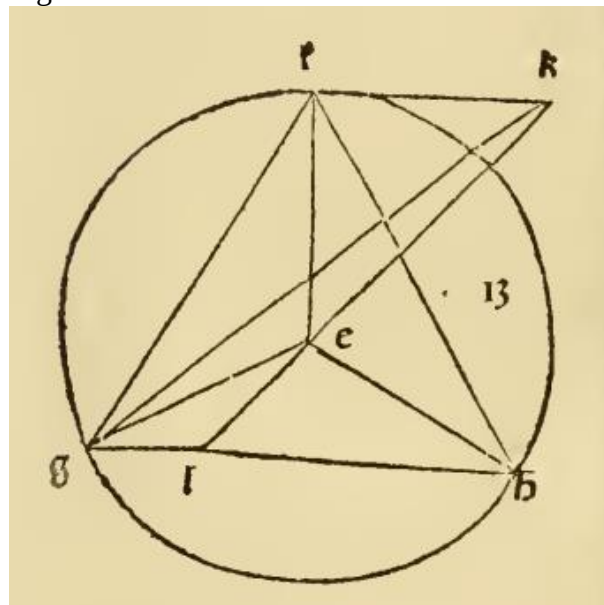


Fonte: elaborado pelo autor.

Concluída essa primeira etapa, Pacioli (2010, p. 30) dá continuidade à construção do tetraedro (Figura 18) citando:

Depois, faça-se o círculo .fgh. sobre o centro .e., cujo semidiâmetro seja igual a linha .cd.. Neste círculo, faça-se depois um triângulo eqüilátero, segundo o que ensina a segunda do quarto, e este triângulo seja .fgh., e do centro a seus ângulos tirem-se as linhas .ef., .eg., .eh. (PACIOLI, 2010, p. 30).

Figura 18 — Tetraedro



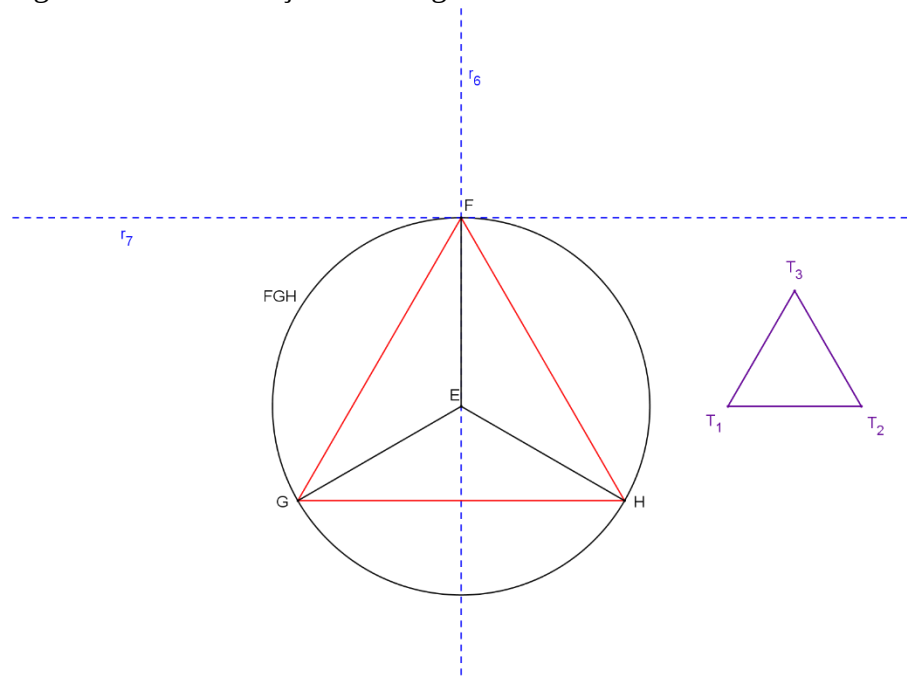
Fonte: Pacioli (1509).

Na construção efetiva do tetraedro, Pacioli (2010) indica inicialmente a necessidade de construir um triângulo equilátero FGH dentro de um círculo. Para isso, o frade indica a segunda proposição do livro IV de *Os Elementos*, que versa sobre “No círculo dado, inscrever um

triângulo equiângulo com o triângulo dado” (EUCLIDES, 2009, p. 189). No desenvolvimento desta etapa, precisamos traçar inicialmente o círculo FGH solicitado, com centro em um ponto E qualquer e raio CD, altura do triângulo ADB anteriormente construído.

Em seguida, tendo um triângulo equilátero qualquer como referência, traçamos uma reta r_6 , que contenha o ponto E, centro da circunferência FGH e a intercepte no ponto F. A partir desse último ponto, traçamos uma reta r_7 perpendicular a r_6 e, seguindo a segunda proposição do livro IV, construímos o triângulo FGH indicado, bem como os segmentos EF, EG e EH (Figura 19).

Figura 19 — Construção do triângulo FGH



Fonte: elaborado pelo autor.

Findada essa etapa, Pacioli (2010, p. 30) prossegue, agora citando:

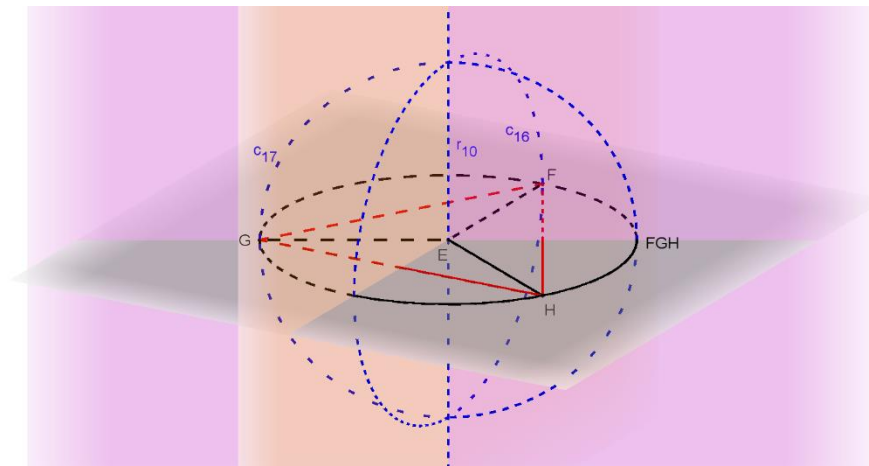
Em seguida, sobre o centro .e., eleve-se a linha .ek., perpendicular à superfície do círculo .fgh., como ensina a décima segunda do décimo primeiro, e esta perpendicular tome-se igual à linha .ac., e do ponto k deixem-se cair as hipotenusas .kf., .kg. e .kh.. Observadas exatamente estas coisas, digo que está acabada a pirâmide de quatro bases triangulares de lados iguais, e esta estará exatamente circunscrita pela esfera daquele diâmetro .ab.. (PACIOLI, 2010, p. 30).

A partir desse ponto, Pacioli (2010) evidencia que a construção deixa de ser realizada no plano e passa a ser continuada em um sistema tridimensional, iniciando com a linha EK, altura do tetraedro e encerrando com o traçado das linhas laterais KF, KG e KH que delimitam

o tetraedro. Assim, na janela de visualização 3D do *software* GeoGebra, precisamos traçar o segmento EK. Em virtude da complexidade da décima segunda proposição do livro XI⁴⁰ de *Os Elementos*, optamos por seguir um passo distinto, baseado na terceira proposição do mesmo livro⁴¹.

Traçando duas circunferências com centro em E e raio EF, perpendiculares ao plano do triângulo FGH, c_{16} e c_{17} , a seção comum entre elas determinará uma reta r_{10} , perpendicular ao plano do triângulo FGH e que contém o ponto E, como afirma a segunda proposição do livro IX de *Os Elementos* (Figura 20).

Figura 20 — Execução da segunda proposição do livro XI de *Os Elementos*



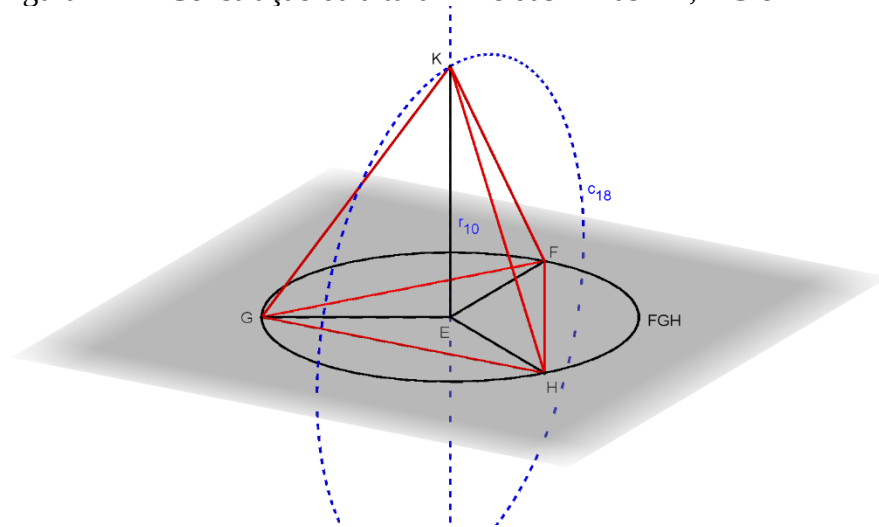
Fonte: elaborado pelo autor.

A partir dessa reta podemos, então, traçar uma circunferência c_{18} , de centro em E e raio AC, que a intercepte no ponto K, dando origem à linha EK, altura do tetraedro a ser construído. E, a partir do ponto K, traçamos as linhas restantes, KF, KG e KH, concluindo a construção do referido corpo regular (Figura 21).

⁴⁰ “Levantar uma linha reta em ângulos retos com o plano dado a partir do ponto dado sobre ele” (EUCLIDES, 2009, p. 492).

⁴¹ “Caso dois planos cortem-se, a seção comum deles é uma reta” (EUCLIDES, 2009, p. 484).

Figura 21 — Construção da altura EK e das linhas KF, KG e KH



Fonte: elaborado pelo autor.

Tendo apresentado o processo de construção do tetraedro regular, Pacioli (2010, p. 30) finaliza o capítulo apresentando a relação entre o diâmetro da esfera que circunda o tetraedro e a medida da aresta deste:

E digo, para a proporção entre o diâmetro da esfera e o lado da pirâmide fabricada, que o quadrado do dito diâmetro é sesquiáltero com relação ao quadrado do lado da dita pirâmide, isto é, que o quadrado do diâmetro contém o quadrado do lado da pirâmide uma vez e meia, ou seja, como 3 com relação a 2 e 6 a 4, e quer dizer que, se o quadrado do diâmetro fosse 6, o quadrado do lado da pirâmide seria 4. E assim se encontra provado em geometria (PACIOLI, 2010, p. 30).

Tal comentário se justifica pelas relações entre os segmentos gerados a partir da construção do semicírculo ADB, apresentado pela figura 11 no início desta seção. Essas relações decorrem da semelhança entre os triângulos ACD e DCB, de modo que o lado AC está para o lado CD assim como o lado CD está para o lado BC, de onde decorre que o quadrado de CD é igual ao produto entre AC e BC. Como descrito por Pacioli (2010) na construção do referido semicírculo, o segmento AC é o dobro do segmento BC, de onde decorre que o quadrado de CD é, então, igual ao dobro do quadrado de BC. Mas como BC é, por construção, a terça parte do diâmetro AB (PACIOLI, 2010), podemos afirmar que o quadrado de CD será igual a dois nonos do quadrado de AB.

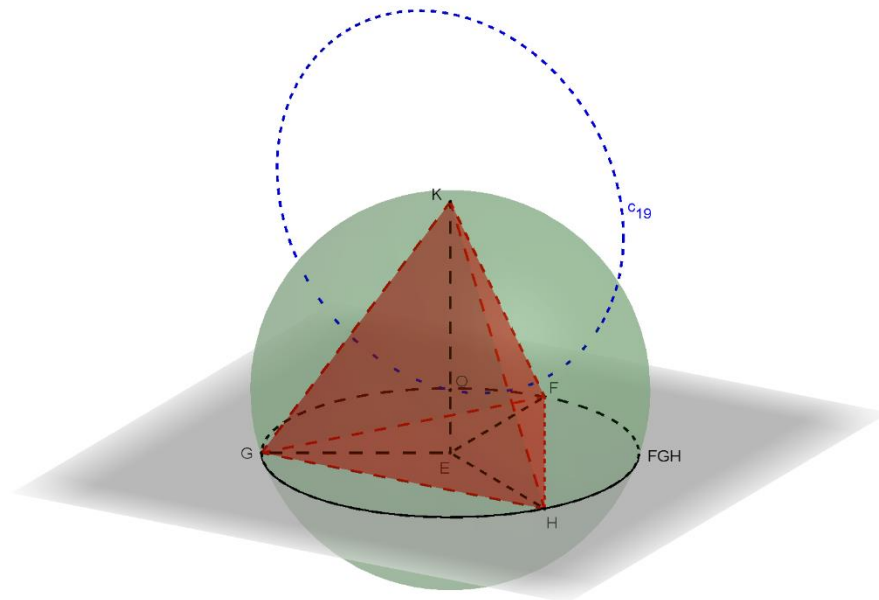
Conforme observamos na construção da base do tetraedro (Figura 16), o triângulo equilátero FGH está circunscrito por uma circunferência de raio CD. E, sabendo que, por exemplo, o lado FG do referido triângulo é uma aresta do tetraedro, pela décima segunda

proposição do livro XIII⁴² de *Os Elementos*, podemos afirmar que o quadrado de FG é igual ao triplo do quadrado de CD, ou ainda, que o quadrado de CD é um terço do quadrado de FG.

Ora, mas, pela conclusão anterior, se o quadrado de CD é igual a dois nonos do quadrado do diâmetro AB da esfera, podemos concluir que a terça parte do quadrado de FG é igual a dois nonos do quadrado de AB, de onde decorre que o quadrado de AB é igual a três meios do quadrado de FG. Isto é, o quadrado do diâmetro AB da esfera é uma vez e meia o quadrado da aresta FG do tetraedro, como afirmado por Luca Pacioli.

A fim de determinar a esfera que envolve o tetraedro construído, é necessário encontrar o ponto O, centro da esfera, contido no segmento EK, altura do tetraedro em relação à base FGH. Para isso, podemos recorrer à relação entre o segmento AC, cuja medida é igual a de EK e o raio AO da esfera. Sabendo que AB é igual ao dobro de AO e, também, igual a três meios de AC, temos que o raio AO é igual a três quartos do segmento AC. Assim, podemos concluir que, no tetraedro, o ponto O estará contido no segmento EK a uma distância de três quartos do segmento a partir do ponto K, como mostra a figura 22.

Figura 22 — Tetraedro regular envolto pela esfera de diâmetro AB



Fonte: elaborado pelo autor.

⁴² “Caso um triângulo equilátero seja inscrito em um círculo, o lado do triângulo é, em potência, o triplo do raio do círculo” (EUCLIDES, 2009, p. 576).

Analisando as figuras 18 e 22 anteriormente apresentadas, as quais mostram as representações do tetraedro regular no tratado e no *software*, percebemos que há uma divergência quanto à aresta KH: na figura apresentada no tratado, tal aresta não está presente, mesmo ela sendo um elemento importante na construção do corpo regular. Em meio ao texto do frade, não há nenhuma explicação para a ausência de tal aresta, porém, em nossa construção ela está representada corretamente.

3.2.2 O cubo contido no capítulo XXVII

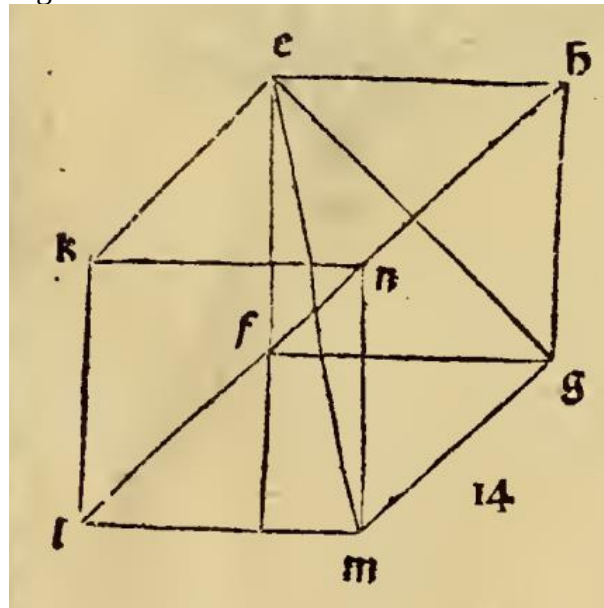
De forma análoga à construção do tetraedro, o cubo (ou hexaedro) descrito no capítulo XXVII⁴³ é iniciado a partir do diâmetro AB de uma esfera que circundará o referido corpo. Segundo Pacioli (2010, p. 31),

É necessário demonstrar como se forma o cubo e qual é a proporção entre seu lado e o diâmetro da esfera que o circunda exatamente. Para tal, digo que o dito cubo deve se formar assim: tome-se o diâmetro da esfera em que intentamos colocá-lo com exatidão e seja esta a linha .ab. sobre a qual farei o semicírculo .adb.. Depois dividirei o diâmetro no ponto .c., tal como fiz na formação da pirâmide precedente, isto é, que a parte .ac. seja o dobro da parte .bc.. Tire-se a linha .cd. perpendicular à linha .ab. e tirem-se ainda as linhas .db. e .da.. (PACIOLI, 2010, p. 31).

Isso implica dizer que o cubo (Figura 23) é construído a partir dos passos iniciais usados na construção do tetraedro, isto é, um semicírculo de diâmetro AB dividido em um ponto C de modo que AC seja o dobro de BC (Vide seção 3.2.1).

⁴³ “Da fábrica do cubo e sua proporção com relação à esfera” (PACIOLI, 2010, p. 31).

Figura 23 — Cubo



Fonte: Pacioli (1509).

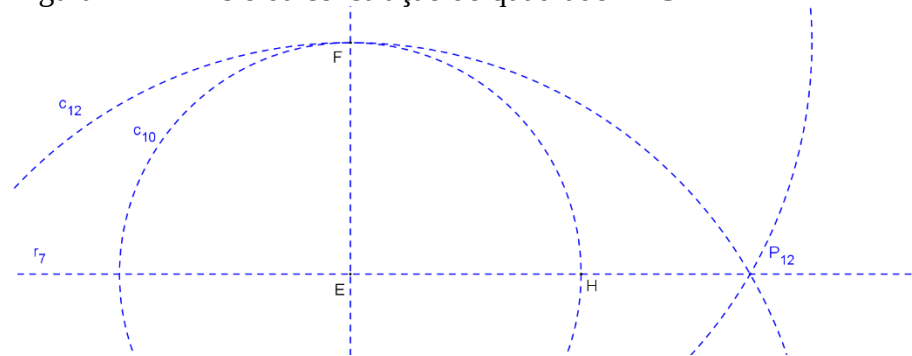
Considerando cumprido esse passo conforme anteriormente exposto, o autor dá início à construção efetiva do cubo, citando:

Depois, faça-se um quadrado do qual todos os lados são iguais à linha .bd. e seja tal quadrado .efgh., e sobre seus ângulos se elevem quatro linhas perpendiculares à superfície do dito quadrado, como ensina a décima segunda do décimo primeiro, e estas perpendiculares sejam postas também iguais à linha .bd. e sejam estas quatro perpendiculares .ek., .fl., .gm. e .hn.. E serão estas quatro perpendiculares todas equidistantes entre si, pela sexta do dito décimo primeiro. E os ângulos contidos por aquelas e pelos lados do quadrado são retos, pela definição da linha perpendicular à superfície (PACIOLI, 2010, p. 31).

Primeiramente, Pacioli (2010) indica a construção de um quadrado EFGH cujo lado tem medida igual à linha BD. A partir desse são erguidas as linhas laterais do cubo, fazendo com que o processo seja delineado em uma forma tridimensional. Para isso, ainda no plano, traçamos sobre uma reta r_6 ⁴⁴ um ponto E e, tendo-o como centro, traçamos uma circunferência c_{10} de raio BD, obtendo também sobre a reta r_6 um ponto F. Em seguida, traçamos uma reta r_7 , perpendicular a r_6 em E como explica Euclides (2009), e, sobre ela, a interseção com c_{10} determina o ponto H, obtendo três vértices do quadrado (Figura 24).

⁴⁴ Iniciamos as indicações dos elementos envolvidos na construção do cubo a partir da construção do semicírculo ADB apresentado na seção 3.2.1 desse estudo. Nela, foram determinadas as retas r_1 a r_5 , os pontos P_1 a P_9 e as circunferências c_1 a c_9 .

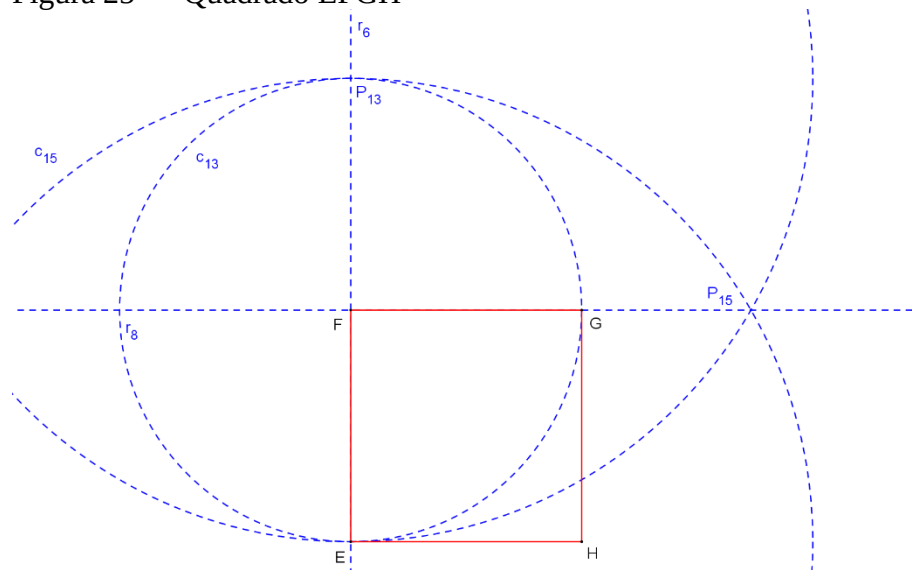
Figura 24 — Início da construção do quadrado EFGH



Fonte: elaborado pelo autor.

Em seguida, traçamos uma reta r_8 , perpendicular à r_6 em F, como explica Euclides (2009). Por fim, com centro em F e raio BD, traçamos uma circunferência c_{13} para que possamos obter o ponto G e, traçando as linhas EF, FG, GH e EH, obtemos o quadrado solicitado por Luca Pacioli (Figura 25).

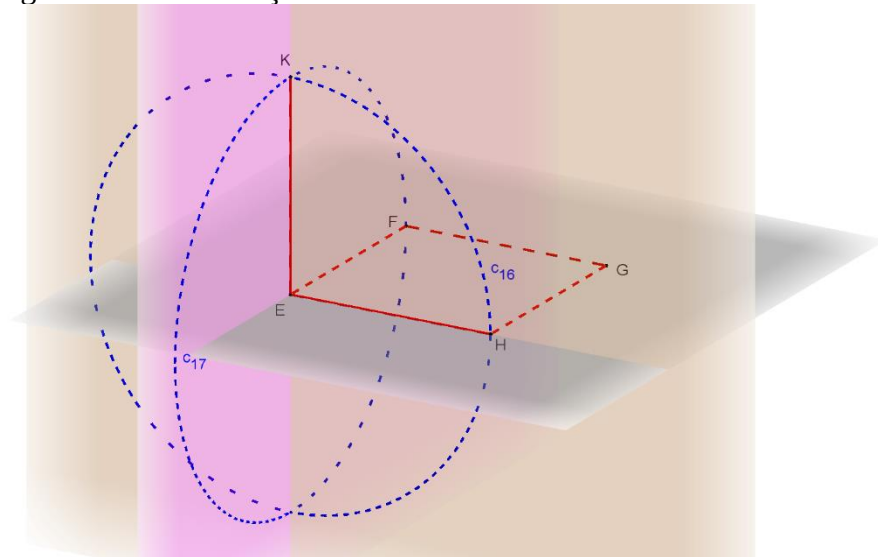
Figura 25 — Quadrado EFGH



Fonte: elaborado pelo autor.

Agora em uma construção fora do plano utilizado até então, precisamos obter as arestas laterais, que correspondem à altura do cubo. Desse modo, na janela de visualização 3D do GeoGebra, traçamos circunferências de raio BD e centros em cada um dos pontos E, F, G e H, sendo duas circunferências por ponto, de modo que estejam em planos concorrentes entre si e perpendiculares ao plano do quadrado EFGH, como na construção do segmento EK do tetraedro (Vide seção 3.2.1), a fim de obtermos o ponto K, mostrado na figura 26, e os pontos L, M e N.

Figura 26 — Construção das linhas laterais do cubo



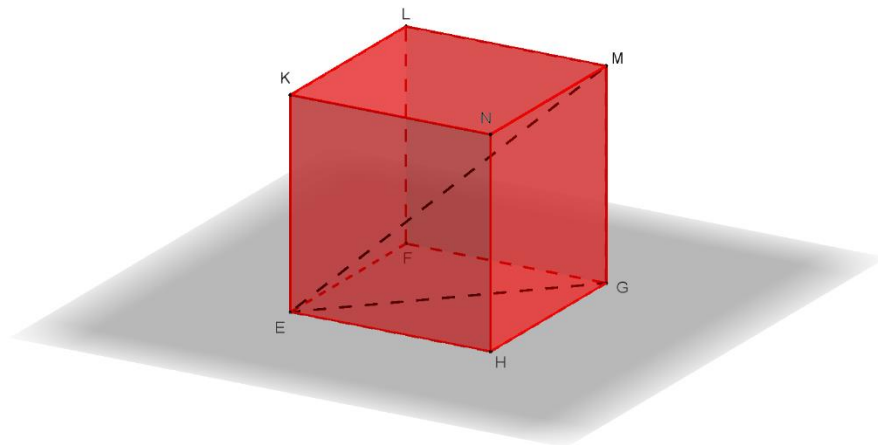
Fonte: elaborado pelo autor.

Para finalizar a construção do cubo, basta apenas traçar as linhas KL, LM, MN e NK restantes, determinando a sexta e última face do referido corpo, como cita Pacioli (2010, p. 31):

Depois, unam-se as extremidades destas perpendiculares tirando as linhas .kl., .lm., .mn. e .nk.. Observadas exata e diligentemente essas coisas, estará acabado o cubo que buscávamos formar, contido por seis superfícies quadradas, o que se prova pela trigésima quarta do primeiro. As quatro superfícies que são aquelas cujos lados opostos são as quatro perpendiculares, são todas quadradas. Que a base seja quadrada se manifesta de nossa posição e, ademais, que a suprema superfície também seja quadrada, isto é, .klmn., demonstra-se ainda pela trigésima quarta do primeiro e pela décima do décimo primeiro. Ademais, pela quarta do dito décimo primeiro se manifesta, que todos os lados do dito cubo estão ortogonalmente sobre as duas superfícies opostas. E este tal estará circunscrito exatamente pela esfera do proposto diâmetro (PACIOLI, 2010, p. 31).

Nesse excerto, Luca Pacioli menciona a trigésima quarta proposição do livro I, a décima proposição do livro XI e a quarta proposição do livro XI como justificativas para a construção. Sobre as superfícies quadradas, Euclides (2009) demonstra que, dada uma área paralelogrâmica, os lados opostos têm a mesma medida, bem como os ângulos opostos. No caso das bases, em virtude da medida utilizada para a construção, fica evidente que essa condição é satisfeita, e a construção em linhas perpendiculares determina os ângulos retos entre essas linhas, o que também é garantido pela décima proposição do livro XI. Já a quarta proposição do livro XI complementa essa garantia, uma vez que cada base se encontra em planos distintos e as seções comuns a eles, dois a dois, delimitam as linhas do cubo (Figura 27).

Figura 27 — Cubo concluído



Fonte: elaborado pelo autor.

Sobre a relação entre o diâmetro AB da esfera que circunda o cubo e a medida das linhas que o delimitam, Pacioli (2010, p. 31) completa:

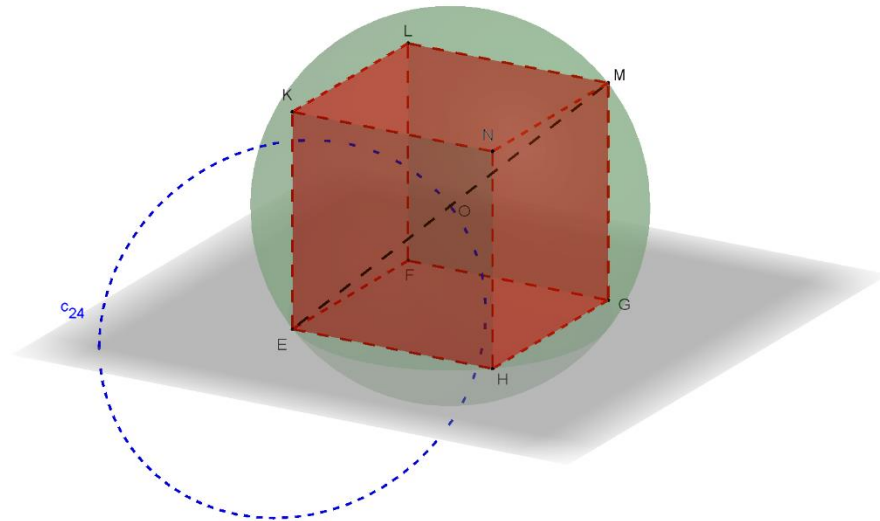
Donde, o dito diâmetro será sempre o triplo em potência, com relação ao lado do dito cubo, isto é, que o quadrado do dito diâmetro, será sempre três vezes o quadrado do lado do cubo. Dessa maneira, se o diâmetro fosse Rx300, o lado conviria a ser exatamente 10. E este conhecimento, a muitos casos necessário, é oportuno (PACIOLI, 2010, p. 31).

Assim como na construção do tetraedro, essa afirmação de Luca Pacioli é justificada pelas relações entre os segmentos gerados a partir da construção do semicírculo ADB (Vide seção 3.2.1). Pela semelhança entre os triângulos ADB e DCB, temos que o quadrado de BD é igual ao produto entre AB e BC. Mas, como AB, diâmetro da esfera que envolve o cubo, é o triplo de BC, temos que o quadrado de BD é igual a um terço do quadrado de AB, ou ainda, que o quadrado de AB é igual ao triplo de BD, aresta do cubo, assim como afirmado no capítulo XXVII de *De Divina Proportione*.

Sobre a localização do ponto O, centro da esfera que envolve o cubo, é necessário analisar que parte do cubo corresponde, em medida, ao diâmetro da esfera. Sabendo que o lado do cubo tem medida igual à linha BD, se analisarmos a diagonal EG da face inferior, veremos que ela define, com dois lados dessa face, um triângulo isósceles, de modo que o quadrado da diagonal EG corresponde ao dobro do quadrado da linha BD, medida do lado. Mas, dentre as relações encontradas nas semelhanças entre os triângulos definidos no semicírculo ADB, percebemos que a diagonal da base inferior do cubo, assim como das demais bases, tem medida igual à linha AD. E como esta é, no triângulo ADB, perpendicular à linha BD, podemos concluir que a diagonal EM do cubo corresponde ao diâmetro da esfera, de modo que o centro O dela se

localize no ponto médio dessa linha. Assim, traçando uma circunferência c_{24} de centro em E e raio AO, podemos determinar o centro da esfera, como mostra a figura 28 a seguir.

Figura 28 — Cubo envolto pela esfera de diâmetro AB



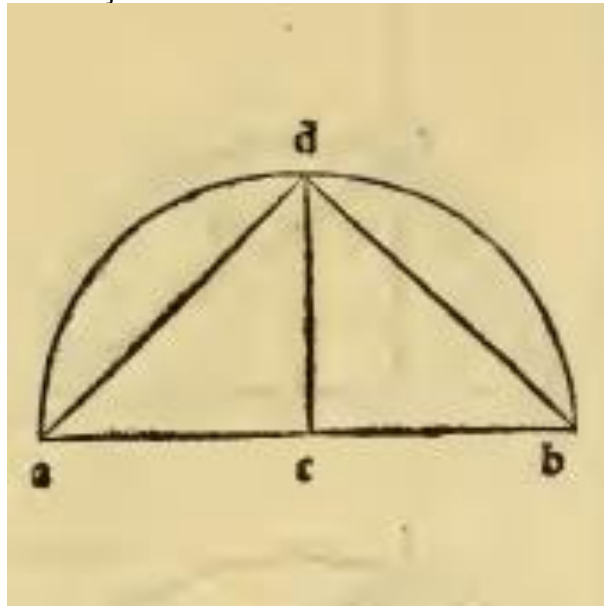
Fonte: elaborado pelo autor.

Em relação à construção do tetraedro, o cubo aparenta seguir passos mais simples em virtude de se basear nas noções de paralelismo e perpendicularidade, tanto nas linhas que o delimitam quanto nas bases formadas entre elas. Inclusive, até a delimitação do centro da esfera que envolve esse corpo, o processo de obtenção requer apenas a definição de suas diagonais.

3.2.3 O octaedro contido no capítulo XXVIII

No capítulo XXVIII, Luca Pacioli trata da construção do octaedro. Em virtude da forma de suas bases, percebemos que construção se assemelha à do tetraedro (Vide seção 3.2.1), o que se confirma nas palavras do frade. Porém, ainda que também dependa da construção inicial de um semicírculo ADB a partir do diâmetro da esfera que o envolve (Figura 29), este difere do utilizado nas construções anteriores.

Figura 29 — Semicírculo ADB para a construção do octaedro

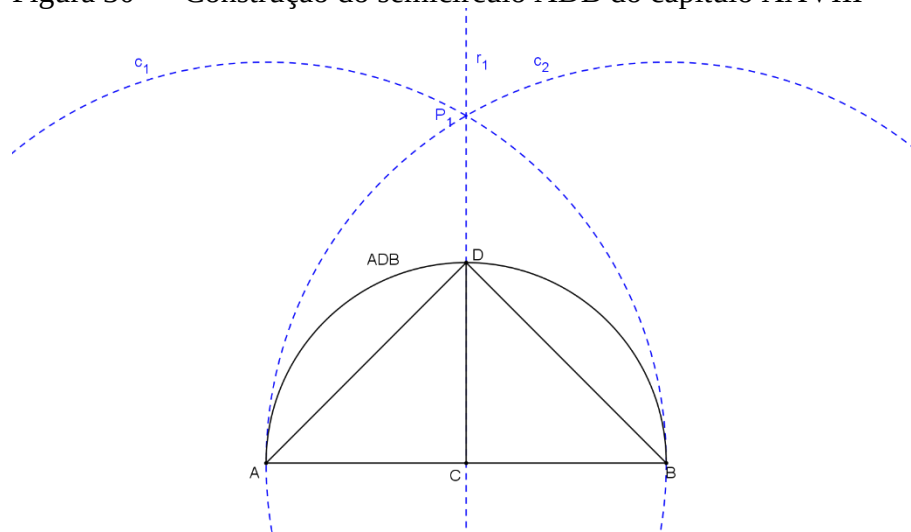


Fonte: Pacioli (1509).

Iniciando a construção do octaedro, Pacioli (2010, p. 32) cita: “[...] toma-se o diâmetro da esfera e seja esta a linha .ab., a qual se divida por igual no ponto .c., e sobre toda a linha faça-se o semicírculo .adb. e tire-se .cd. perpendicular à linha .ab.. Depois, una-se o ponto .d. com a extremidade do dito diâmetro, isto é, com .a. e com .b.”. Na execução desse passo, Pacioli (2010) afirma que o diâmetro AB da esfera precisa ser dividido ao meio para se obter o ponto C, enquanto nos corpos anteriores, deveria obedecer a uma proporção, onde a medida de AC precisaria ser o dobro da medida de BC.

Desse modo, seguindo a décima proposição do livro I de *Os Elementos*, traçamos duas circunferências, c_1 , com centro em A e raio AB, e c_2 , com centro em B e mesmo raio, para que, pelos pontos de interseção dessas duas circunferências, P_1 e P_2 , seja possível traçar a reta r_1 , perpendicular a AB, que determinará o ponto C sobre a linha AB. E a partir dele, com raio AC, traçamos o semicírculo ADB, cuja interseção com a reta r_1 determina o ponto D. Assim, concluímos essa etapa inicial traçando, também, os segmentos AD, BD e CD (Figura 30).

Figura 30 — Construção do semicírculo ADB do capítulo XXVIII

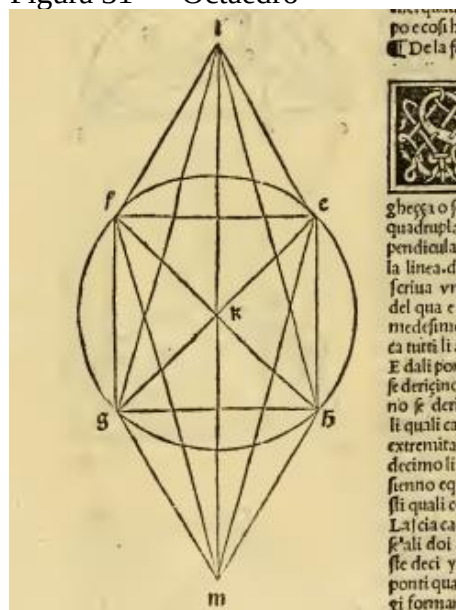


Fonte: elaborado pelo autor.

Em seguida, Pacioli (2010, p. 32) prossegue com a construção do octaedro (Figura 31), citando:

Depois, faça-se um quadrado .efgh., e neste quadrado tirem-se dois diâmetros dos quais um seja .eg. e outro .fh., os quais se dividem no ponto .k.. Donde, pela quarta do primeiro é manifesto, cada um destes diâmetros é igual à linha .ab., que foi posta diâmetro da esfera, visto que o ângulo .d. é reto, pela primeira parte da trigésima do terceiro. Ademais, cada um dos ângulos .e., .f., .g. e .h. é reto pela definição do quadrado e ainda é manifesto que aqueles dois diâmetros .eg. e .fh. dividem-se por igual, no ponto .k., e se vê facilmente pela quinta, trigésima segunda e sexta do primeiro, por dedução (PACIOLI, 2010, p. 32).

Figura 31 — Octaedro

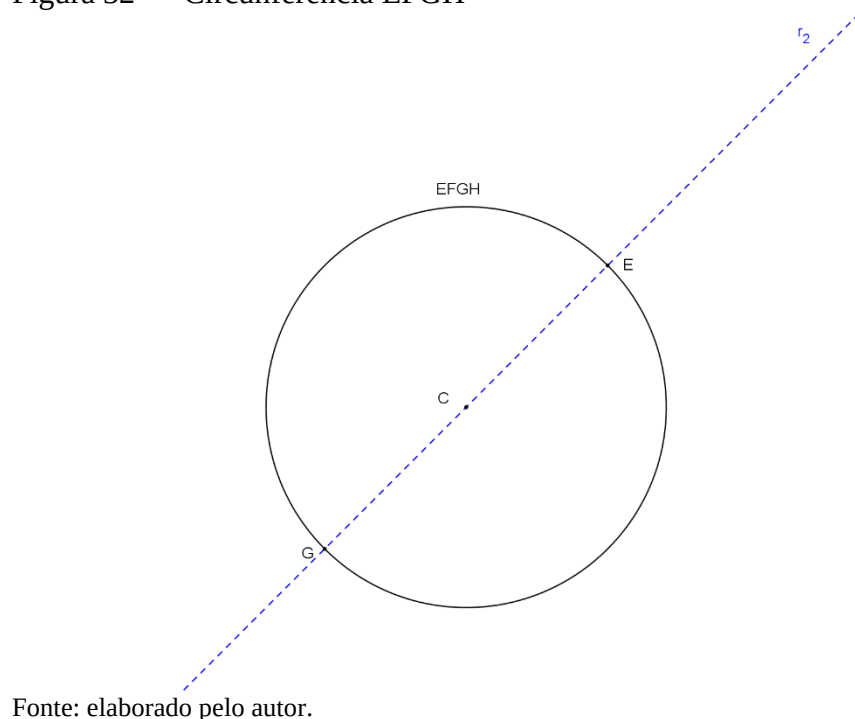


Fonte: Pacioli (1509).

Nesse excerto, Pacioli (2010) se refere aos “diâmetros” do quadrado EFGH, que tem a mesma medida do diâmetro AB. cremos que, por construção, o autor tenha se referido às diagonais do quadrado, haja vista que o diâmetro seja uma das partes da circunferência. A partir da construção do triângulo isósceles ADB, percebemos que os lados AD e BD têm medidas iguais, enquanto o lado AB, diâmetro do semicírculo e da esfera, é o lado com medida diferente. Assim, para construir o quadrado EFGH, concluímos que este terá lados com medida igual a AD.

Inicialmente, traçamos uma reta r_2 e um ponto K sobre ela, que será centro de uma circunferência EFGH de raio AC. Da interseção da circunferência com a reta r_2 , obtemos os pontos E e G, que determinam uma das diagonais do quadrado solicitado, como mostra a figura 32.

Figura 32 — Circunferência EFGH

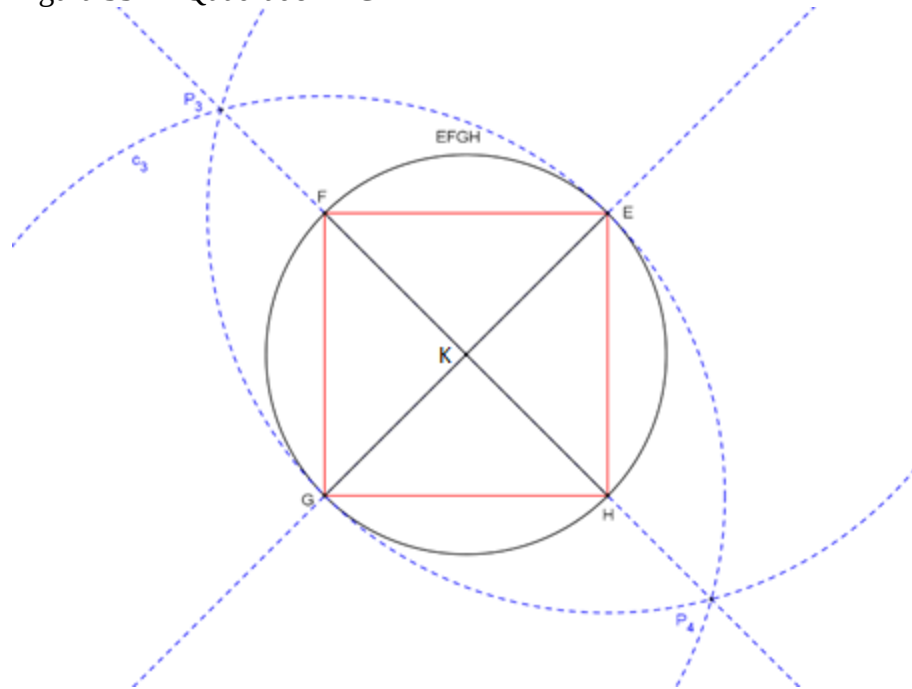


Fonte: elaborado pelo autor.

Em seguida, a partir da 10ª proposição do livro I de *Os Elementos*, precisamos traçar uma reta r_3 , perpendicular à r_2 em K. Com centro em E e raio AC, traçamos uma circunferência c_3 , e, com centro em G e mesmo raio, traçamos uma circunferência c_4 , de modo que as interseções entre elas, pontos P_3 e P_4 , determinem uma reta r_3 , perpendicular à r_2 , cujas interseções com a circunferência EFGH são os pontos F e H, também vértices do quadrado solicitado. Assim, traçando as linhas EF, FG, GH e EH, bem como as diagonais EG e FH,

concluimos a primeira etapa da construção do octaedro como descreve Luca Pacioli em seu tratado (Figura 33).

Figura 33 — Quadrado EFGH



Fonte: elaborado pelo autor.

Tal processo se justifica pela indicação de algumas proposições advindas de *Os Elementos*. Primeiramente, na relação entre as linhas EG e FH, diâmetros da circunferência que circunda o quadrado EFGH, e AB, diâmetro da esfera que envolverá o octaedro, a quarta proposição do livro I⁴⁵, garante que, sendo as linhas AD e BD iguais por construção, e o ângulo entre elas seja reto, assegurado pela trigésima proposição do livro III⁴⁶, assim como as linhas EF e FG também são por construção, e o ângulo entre elas também seja reto, os triângulos ADB e EFG serão iguais e, portanto, as linhas EG, FH e AB têm a mesma medida.

Quanto às medidas dos ângulos do quadrado EFGH, Pacioli (2010) se refere à três proposições do livro I como garantia: a quinta⁴⁷, a sexta⁴⁸ e a 32^a. Dessas duas primeiras, decorre

⁴⁵ “Caso dois triângulos tenham os dois lados iguais [aos] dois lados, cada um a cada um, e tenham o ângulo contido pelas retas iguais igual ao ângulo, também terão a base igual à base, e o triângulo será igual ao triângulo, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais se estendem os lados iguais” (EUCLIDES, 2009, p. 101).

⁴⁶ “Cortar a circunferência dada em duas” (EUCLIDES, 2009, p. 176).

⁴⁷ “Os ângulos junto à base dos triângulos isósceles são iguais entre si, e, tendo sido prolongadas ainda mais as retas iguais, os ângulos sob a base serão iguais entre si” (EUCLIDES, 2009, p. 102).

⁴⁸ “Caso os dois ângulos de um triângulo sejam iguais entre si, também os lados que se estendem sob os ângulos iguais serão iguais entre si” (EUCLIDES, 2009, p. 103).

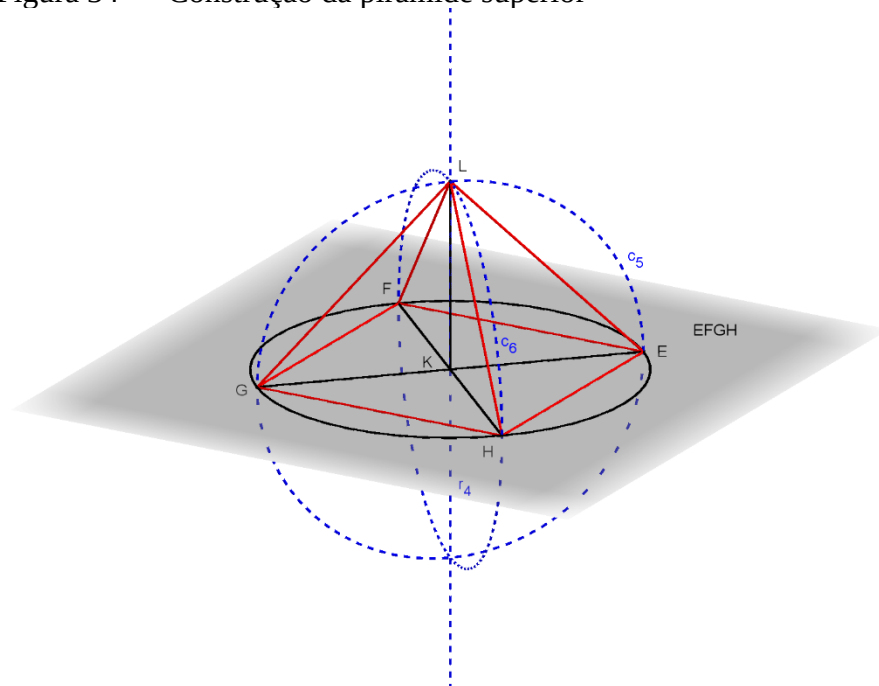
que os triângulos formados sobre os diâmetros (a saber: EFG e EHG, sobre o diâmetro EG, e FEH e FGH, sobre o diâmetro FH) são isósceles e, da terceira, que os quatro ângulos planos do quadrado EFGH são retos.

Concluída essa etapa, Luca Pacioli dá continuidade à construção do octaedro, detalhando-a em duas partes, a construção de duas pirâmides de base quadrada, sendo uma superior e uma inferior. Sobre a primeira pirâmide, o frade cita:

Agora, eleve-se sobre .k. a linha .kl., perpendicular à superfície do quadrado, e esta perpendicular ponha-se igual à metade do diâmetro .eg. ou .fh., depois deixem-se cair as hipotenusas .le., .lf., .lg. e .lh., e todas estas hipotenusas, pelo dito e proposto, mediante a penúltima do primeiro, replicada quantas vezes forem necessárias, serão iguais entre si e, ademais, iguais aos lados do quadrado. Logo, temos, até aqui, uma pirâmide de quatro bases triangulares de lados iguais constituída sobre o dito quadrado, e esta pirâmide é a metade do corpo de oito bases que buscamos (PACIOLI, 2010, p. 31).

Para traçar a linha LK, perpendicular ao plano do quadrado EFGH, recorreremos novamente à segunda proposição do livro XI, já utilizada nas construções do tetraedro e do cubo, de modo que, ao traçar duas circunferências de raio EK, c_5 e c_6 , os planos que as contém determinam uma reta r_4 , perpendicular à superfície do quadrado EFGH. Então, pela interseção de r_4 com qualquer dessas circunferências, obtemos o ponto L, vértice superior da pirâmide de base quadrada. Traçamos, então, a altura LK da pirâmide, bem como as linhas LE, LF, LG e LH, como mostra a figura 34.

Figura 34 — Construção da pirâmide superior



Fonte: elaborado pelo autor.

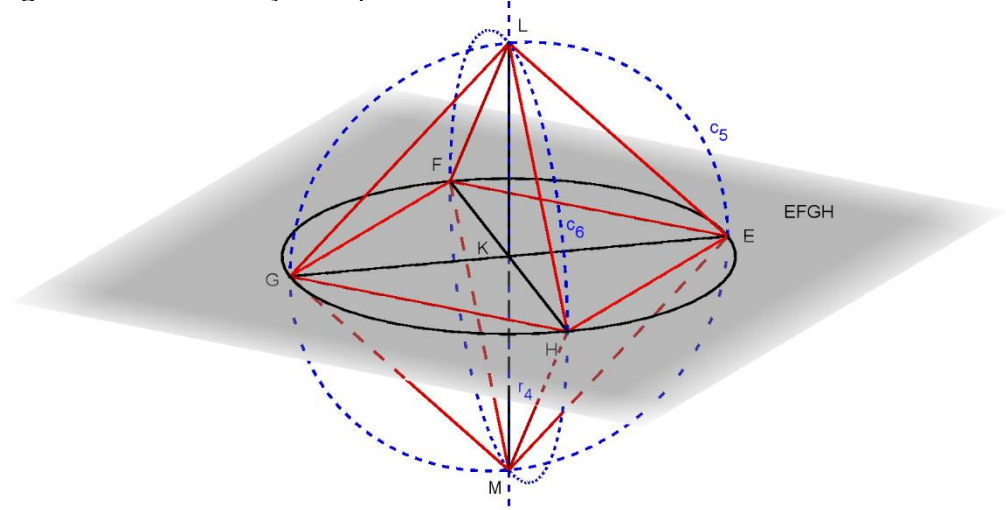
Sobre a igualdade das medidas das linhas laterais, chamadas por Pacioli de “hipotenusas”, a 13^a proposição do livro I⁴⁹ de *Os Elementos* garante esse fato, uma vez que, ao considerar cada um dos quatro triângulos formados, todos são acutângulos em L.

Em seguida, Pacioli (2010, p. 32) explica os passos necessários para se obter a pirâmide inferior, a partir de um processo semelhante:

Depois, abaixo do dito quadrado, faremos uma outra pirâmide semelhante a esta, do seguinte modo: tiraremos a dita linha .lk. furando e penetrando o dito quadrado até o ponto .m., de modo que a linha .km., que está debaixo do quadrado, seja igual à linha .lk., que está acima do dito quadrado. Depois unirei o ponto .m. com todos os ângulos do quadrado, tirando outras quatro linhas, hipotenusas, as quais são .me., .mf. .mg. e .mh., e também se prova que estas são iguais entre si, como também o são os lados do dito quadrado, pela penúltima do primeiro e outras já aduzidas, como foi provado para as outras hipotenusas sobre o quadrado. E assim, sempre observadas com diligência tais coisas, estará acabado o corpo de oito bases triangulares de lados iguais, o qual estará exatamente circunscrito pela esfera (PACIOLI, 2010, p. 32).

Assim como feito para a pirâmide superior, para traçar a linha MK, pela interseção de r_4 com qualquer das circunferências c_5 ou c_6 , obtemos o ponto M sob o plano do quadrado EFGH. Traçamos, então, a altura MK da pirâmide, bem como as linhas ME, MF, MG e MH, como mostra a figura 35, sendo tal processo também justificado pela 13^a proposição do livro I de *Os Elementos* (Figura 35).

Figura 35 — Construção da pirâmide inferior



⁴⁹ “Nos triângulos acutângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo agudo é menor do que os quadrados sobre os lados que contêm o ângulo agudo por duas vezes o contido por um dos à volta do ângulo agudo, sobre o qual cai a perpendicular, e também pela cortada internamente pela perpendicular relativa ao ângulo agudo” (EUCLIDES, 2009, p. 148).

Fonte: elaborado pelo autor.

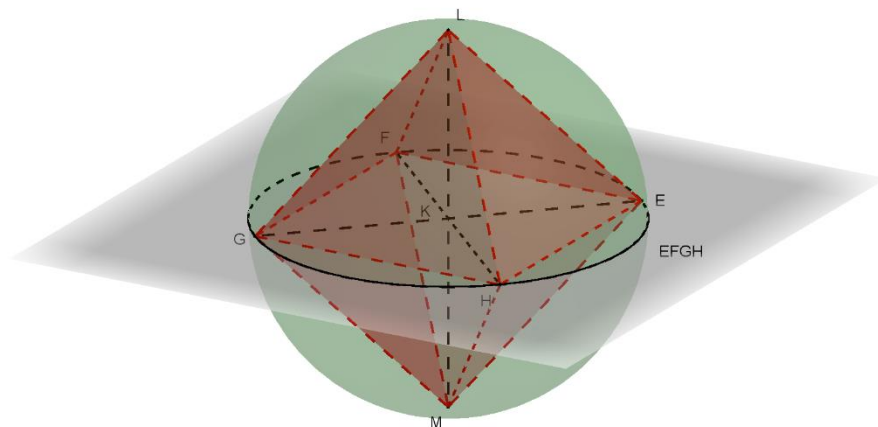
Sobre a relação entre o diâmetro da esfera e o lado do octaedro, Pacioli (2010, p. 32-33) conclui, citando:

A proporção entre a esfera e o dito corpo é que o quadrado do diâmetro da esfera com relação ao quadrado do lado do dito corpo é exatamente o dobro, isto é, se o dito diâmetro fosse 8, o lado do [corpo] de oito bases seria $R \times 32$, cujas potências entre si estão em dupla proporção, isto é, que o quadrado do diâmetro é o dobro do quadrado do lado do dito corpo. E assim temos a fábrica e a proporção com respeito à esfera (PACIOLI, 2010, p. 32-33).

Podemos justificar tal afirmação com base nas relações entre os segmentos construídos a partir do semicírculo ADB, assim como nas construções dos corpos regulares anteriores. Da semelhança entre os triângulos ADB e ACD, temos que o lado AB está para o lado AD, assim como o lado AD está para o lado AC, de onde decorre que o quadrado de AD é igual ao produto entre AB e AC. Ora, mas se, por construção, AC é metade de AB, temos que o quadrado de AD será igual à metade do quadrado de AB, ou ainda, que o quadrado de AB, diâmetro da esfera, será igual ao dobro do quadrado de AD, lado do octaedro, como afirma o frade no capítulo XXVIII de seu tratado.

No que se refere à localização do centro da esfera que envolve o octaedro, por construção, este será o ponto K (Figura 36), uma vez que, como afirmado por Luca Pacioli na construção do quadrado EFGH, ele se localiza na interseção dos diâmetros EG e FH, e ainda, como KL e KM são iguais ao raio AC, podemos concluir que o segmento LM também é diâmetro da referida esfera.

Figura 36 — Octaedro envolto pela esfera de diâmetro AB



Fonte: elaborado pelo autor.

Conforme mencionado anteriormente, em virtude da complexidade da construção do icosaedro e do dodecaedro, nesse estudo nos atemos à construção de apenas três dos cinco corpos regulares, haja vista que os processos aqui apresentados trazem semelhanças que podem ser exploradas com vistas ao ensino de Geometria, no que se refere à compreensão dos corpos regulares e algumas de suas propriedades.

No capítulo a seguir, discorreremos a respeito das reflexões que emergem do estudo do conceito de corpos regulares e da construção dos três primeiros corpos segundo o tratado *De Divina Proportione* de Luca Pacioli com base na construção de uma interface entre história e ensino de Matemática segundo uma vertente atualizada.

4 DISCUSSÕES DIDÁTICAS ACERCA DO ESTUDO DOS CORPOS REGULARES CONTIDOS EM *DE DIVINA PROPORTIONE* PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

As propostas de estudos que visam articular história e ensino de matemática podem ser contempladas em estudos desenvolvidos anteriormente, como em Miguel (1997), Miguel e Miorin (2005), e Furinghetti (2007), que pautam a história da matemática em uma perspectiva historiográfica tradicional. Todavia, outros estudos que visem promover a articulação entre esses dois campos de pesquisa, por meio da construção de interface, pautada em uma historiografia atualizada, têm-se desenvolvido a partir de estudos como o de Saito e Dias (2013), Dias e Saito (2014), Pereira e Saito (2019), entre outros.

Considerando essa perspectiva, esse estudo visa, por meio do tratado *De Divina Proportione*, possibilitar a construção de uma interface, que, diferente dos outros estudos, não apresenta em seu conteúdo instrumentos, mas baseia-se em construções e visualizações de corpos regulares incorporados no tratado, mediados pela produção de Luca Pacioli. Nas seções a seguir são apresentadas algumas discussões e reflexões didáticas que emergem do estudo dos capítulos XXV a XXVIII de *De Divina Proportione*, na intenção de colaborar com o ensino de Matemática, de modo a voltar-se para a contribuição na mudança de postura do professor de Matemática, seja em formação ou em sala de aula.

4.1 Sobre a interface entre história e ensino de matemática

Embora o valor da história da matemática seja reconhecido há muito tempo por pesquisadores da educação, apenas nas últimas décadas sua relação com o ensino de uma forma contextualizada tem sido discutida. Isso se deve ao fato de que os estudos realizados até então eram pautados em uma vertente historiográfica tradicional, que, segundo Saito (2013), segue uma visão linear e progressista da construção do conhecimento. Em contrapartida, os estudos recentes que versam sobre essa relação têm se ancorado em uma vertente historiográfica atualizada, a qual preza não só pelo conteúdo em si, mas se preocupa com o processo de construção do conhecimento matemático de determinada época, levando em consideração os aspectos contextuais, historiográficos e epistemológicos, e as razões pelas quais tal conteúdo se desenvolveu (PEREIRA; SAITO, 2019).

Com o intuito de trazer essa contribuição com significado para o ensino de matemática, a partir do diálogo entre o historiador e o educador sobre determinado objeto de estudo, tem início a construção de uma interface entre história e ensino de Matemática. Dentro de uma

perspectiva historiográfica atualizada, esse objeto emerge de um estudo em que uma análise historiográfica, epistemológica e contextual incide sobre um documento antigo, como “cartas, manuscritos, minutas e outros documentos não só escritos, mas também aqueles da cultura material, tais como instrumentos, monumentos, máquinas, etc.” (SAITO, 2015, p. 27). A interface é construída a partir do diálogo em torno desse objeto escolhido, realizando dois movimentos característicos desse processo: o contexto no qual o conhecimento matemático foi desenvolvido; e o movimento do pensamento na formação do conceito matemático. De acordo com Pereira e Saito (2019), apesar de distintos, esses dois movimentos são simultâneos, isto é, não há uma ordem de qual deve ser realizado primeiro, uma vez que ambos se completam quando se baseia em uma vertente historiográfica atualizada. Sobre o primeiro movimento citado, vemos que

[...] se refere ao contexto no qual os conhecimentos matemáticos foram desenvolvidos, isto é, observar agora o conteúdo matemático, método e os motivos por trás da escrita do documento, contextualizando na época em que foi elaborado e, portanto, considerando todas as características de ordem matemática, técnica e epistemológica como propõe uma historiografia contemporânea (PEREIRA; SAITO, 2018, p. 4).

É nesse movimento que o pesquisador precisa se debruçar sobre o período de desenvolvimento do seu objeto de estudo, com vistas a reconstruir uma teia com todos os acontecimentos em torno do período no qual o documento foi publicado, de modo a mobilizar elementos que estão incorporados em três esferas, sendo elas a contextual, a historiográfica e a epistemológica. O segundo movimento está pautado em um diálogo entre o conhecimento matemático que foi compreendido no âmbito de reconstrução do contexto histórico em torno do tratado e os conceitos matemáticos presentes nos livros didáticos e nos documentos oficiais do século XX e XXI. De acordo com Pereira e Saito (2018, p. 4),

[...] na medida em que esse diálogo é promovido, ele propicia uma reflexão do processo histórico da construção do conhecimento matemático e a construção da interface, fazendo emergir diferentes questões, sejam elas didáticas, conceituais (matemática), ou epistemológicas, promovendo uma rica articulação entre história e ensino que conduz à elaboração de atividades (PEREIRA; SAITO, 2018, p. 4).

Considerando o ponto de vista desses autores, é no diálogo sobre aspectos do passado e do presente que emergirão questões de ordem didática, conceitual e epistemológica que conduzirão a construção de um determinado conhecimento matemático, através de ações realizadas sobre o tratado, em consonância com os materiais disponíveis em sala de aula para o ensino de matemática. Como consequência dessa articulação temos a produção de atividades

investigativas pautadas nesse diálogo (PEREIRA; SAITO, 2018). Todavia, para a construção delas, é necessário o encontro das potencialidades didáticas, que emergem da reflexão sobre as ações desenvolvidas no estudo do tratado, visando ressignificar o conceito matemático objetivado.

Para a elaboração de uma atividade, Saito e Dias (2013) indicam algumas etapas interrelacionadas a serem seguidas, a saber: 1) Tratamento didático; 2) Intencionalidade e plano de ação; 3) Desenvolvimento. Na primeira, o tratamento didático se refere às possíveis adaptações que são necessárias para que o documento histórico escolhido venha a se tornar compreensível, uma vez que, em sua maioria, esses objetos de estudo surgem em línguas distintas, pois remontam a períodos específicos de uma determinada época, cujo vocabulário passou por mudanças ao longo do tempo (SAITO; DIAS, 2013). Mas não só de traduções se compõe o tratamento didático; é nesse momento que também são feitas complementações baseadas no próprio documento, como trazer as indicações feitas pelo autor a respeito de outros documentos, compondo assim uma espécie de teia, onde as relações contextuais são destacadas.

Quanto à intencionalidade, Pereira e Saito (2019, p. 348) citam que ela está ligada

[...] aos propósitos de aprendizagem e, portanto, relacionada ao momento da organização da atividade proposta. Nesta etapa, o que está em questão é o olhar do pesquisador para a potencialidade didática no intuito de articulá-la com o ensino de algum conceito matemático. Assim, uma vez delineada a intenção pela qual atividade foi elaborada, parte-se para o plano de ação, que consiste em planejar a aplicação das atividades. É por meio deste planejamento que a ação é orientada tendo em vista a prática em sala de aula (PEREIRA; SAITO, 2019, p. 348).

Segundo os autores, a partir da intenção do pesquisador, a qual é relacionada à aprendizagem, é delineada a atividade visando à articulação entre a potencialidade didática e o ensino do conceito matemático objetivado. Por fim, o desenvolvimento da atividade consiste em sua aplicação, considerando as possibilidades elencadas no plano de ação, sendo possível também investigar os processos de ensino envolvidos na construção da interface entre história e ensino de Matemática.

Para o presente estudo, conforme mencionado anteriormente, temos como documento-objeto o tratado *De Divina Proportione* de Luca Pacioli, o qual teve seu estudo contextual e historiográfico apresentado em nosso segundo capítulo, bem como um estudo epistemológico específico sobre os corpos regulares no terceiro. Por se tratar de um estudo teórico, não versaremos sobre plano de ação ou atividades relacionadas ao estudo desse tratado. Porém, ainda assim, destacaremos algumas reflexões didáticas que emergem dos escritos do frade no que se refere ao conceito de corpos regulares e à construção de alguns deles.

4.2 Sobre o conceito de corpos regulares presente no capítulo XXV

Partindo do tópico anterior, com vistas a promover a construção de uma interface entre história e ensino de matemática, apresentaremos algumas reflexões sobre o capítulo XXV, intitulado “Como não pode haver mais de cinco corpos regulares” (PACIOLI, 2010, p. 28). Essa explanação tem como objetivo propor um diálogo a partir do texto histórico, pautando-se em nomenclaturas, conceitos e casos elencados por Lucas Pacioli como necessários para a existência dos cinco corpos regulares.

Assim, o capítulo XXV do tratado *De Divina Proportione* pode vir a se tornar uma alternativa à compreensão do conceito de corpos regulares, uma vez que Pacioli (2010), baseado no conhecimento renascentista, apresenta elementos pouco usuais para o ensino moderno dessa temática, bem como possibilita discussões que não costumam ser realizadas pelos discentes nos diferentes níveis de ensino.

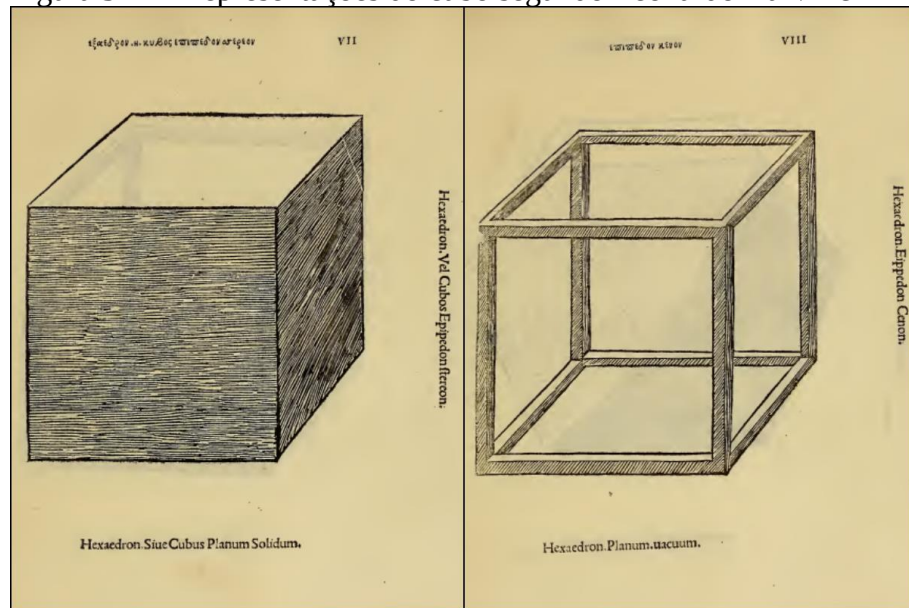
4.2.1 A nomenclatura usada por Luca Pacioli em *De Divina Proportione*

Primeiramente, uma relevante discussão que pode emergir dos escritos de Pacioli (2010) é acerca da nomenclatura trazida pelo autor em relação aos corpos regulares, popularmente conhecidos como sólidos regulares ou ainda, sólidos de Platão⁵⁰. No tratado em *De Divina Proportione* aparecem duas variações, sendo: *solidus*, ou sólido; e *vacuus*, que pode ser entendido como vazado⁵¹. Produzidos pelas mãos do artista renascentista Leonardo Da Vinci, como afirma Pacioli (2010), os desenhos que compõem a última parte do tratado apresentam bem essa distinção (Figura 37).

⁵⁰ Essa nomenclatura é empregada ao se referir aos corpos regulares em decorrência dos escritos do filósofo grego Platão em *Timeu*, onde o autor apresenta esses entes geométricos e sua relação com o universo (PLATÃO, 2006).

⁵¹ Em *De Divina Proportione*, Pacioli (2010) se refere a essas variações nos capítulos XLVIII, sobre o tetraedro, XLIX, sobre o hexaedro (cubo), L, sobre o octaedro, LI, sobre o icosaedro, e LII, sobre o dodecaedro. Também se observa a presença desses termos nos títulos dos desenhos de Leonardo Da Vinci ao final do tratado (PACIOLI, 1509).

Figura 37 — Representações do cubo segundo Leonardo Da Vinci



Fonte: Pacioli (1509, s/p).

Nos verbetes encontrados no dicionário Michaelis da língua portuguesa, o termo “sólido” é apresentado como aquele “[...] Que é compacto, sem ter partes ocas; maciço” (SÓLIDO, 2021), o que está em concordância com o termo *solidus* trazido por Pacioli (2010). No entanto, cabe uma reflexão sobre a atribuição dessa nomenclatura para os corpos regulares se considerados o tratado *De Divina Proportione* e os livros costumeiramente utilizados para o ensino de Geometria Espacial.

Em seu tratado, Pacioli (2010) descreve a construção de cada um dos cinco corpos regulares delimitando-os com elementos de Geometria Plana, como, pontos, “linhas”, “lados”, etc. Conforme a indicação de Pacioli (2010) em utilizar *Os Elementos* como guia, nas definições do Livro I trazidas por Euclides (2009, p. 97), podemos contemplar que

1. Ponto é aquilo de que nada é parte.
2. E linha é comprimento sem largura.
3. E extremidades de uma linha são pontos.
4. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.
5. E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura.
6. E extremidades de uma superfície são retas (EUCLIDES, 2009, p. 97).

Partindo dessas definições, não seria correto se referir a esses corpos como “sólidos”, uma vez que, segundo Euclides (2009), os elementos empregados no processo de construção deles não possuem espessura e apenas delimitam a superfície que os determina, ou seja, uma espécie de casca que envolve uma região oca. Porém, no ensino de Geometria, essa nomenclatura tem sido empregada nos diferentes níveis da educação.

No que se refere a Educação Básica, estudos como Mohr e Prado (2014) apresentam a nomenclatura “sólido” de forma muito particular e distinta de Pacioli (2010), como pode se perceber no seguinte trecho, “para a construção dos esqueletos dos sólidos, podemos utilizar os mais variados tipos de materiais concretos representando as estruturas de suas arestas e vértices” (MOHR; PRADO, 2014, p. 385). Um sólido não pode ser considerado como a edificação de um esqueleto, pois como já vimos na discussão anterior ele possui massa dentro de si.

Em um outro estudo voltado também para a educação básica, Lopes (2015), após preparar atividades envolvendo sólidos geométricos atrelado a sequência Fedathi, prepara um pré-teste sobre o assunto de modo a considerar elementos como, “número de vértices, faces e arestas; área de figuras planas; noções de volume; planificação de poliedros/corpos redondos” (LOPES, 2015, p. 62). Veja que, nesse caso, o autor trata até de planificação diante de um sólido que deveria ser considerado em sua integridade total, não perdendo o material que deveria estar no seu interior.

Quando se trata da BNCC⁵², é possível contemplar no seu contexto que não há uma discussão em torno da nomenclatura mais adequada de sólido e corpos regulares. Deixando, assim, uma lacuna na formação desse aluno da educação básica, que caso opte por se tornar professor de matemática, possivelmente não terá subsídios para compreensão sobre isso em um curso de Licenciatura em Matemática.

Sobre a abordagem dessa discussão na formação de professores de Matemática, é possível perceber que ela não costuma ser considerada, uma vez que diversos estudos, sejam eles publicações em periódicos ou trabalhos de conclusão de cursos de graduação e pós-graduação, trazem essa interpretação também equivocada, propondo a planificação de sólidos. Entende-se que, pela popularização de diferentes nomenclaturas dos corpos regulares, tal abordagem auxilia na compreensão dos entes geométricos que compõem esses elementos. Porém, não se pode deixar os preceitos matemáticos, como os de Euclides (2009), à margem, uma vez que estes são basilares para a formação do conhecimento de Geometria.

Nesses parâmetros, a discussão indiretamente proposta por Pacioli (2010) no capítulo XXV de *De Divina Proportione* tem potencial didático para ressignificar a noção de sólido geométrico, pois pelo estudo do referido capítulo e dos subsequentes se percebe que o conceito

⁵² Vide: Brasil (2018).

de corpo regular, apesar de não fazer distinção direta sobre a sua composição física, traz à tona a reflexão sobre o emprego dos entes matemáticos básicos da Geometria em sua construção.

4.2.2 O conceito de corpos regulares segundo Luca Pacioli

Quando tratamos do conceito de corpos regulares proposto por Luca Pacioli em *De Divina Proportione*, é possível perceber que, em relação aos livros didáticos, a maioria deles trata desse conceito segundo uma forma distinta da citada pelo frade (SILVA, 2020). Segundo Pacioli (2010, p. 28), entendemos os corpos regulares como

[...] aqueles cujas bases são iguais entre si e de ângulos sólidos e planos iguais e, similarmente, de lados iguais. Assim se apresenta, pois para a construção de cada ângulo sólido é necessário ao menos o concurso de três ângulos superficiais, porque um ângulo sólido não pode ser determinado somente por dois ângulos superficiais (PACIOLI, 2010, p. 28).

Observa-se que, nesse excerto, dois elementos se destacam: os ângulos sólidos e os ângulos planos. Tais elementos, já discutidos no capítulo 3 de nosso estudo, são pouco explorados no ensino de Geometria Espacial, seja na educação básica ou na formação de professores.

Segundo observado em Silva (2020), a maioria dos livros didáticos indicados no Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) para o triênio 2018-2020 tratam do conceito de corpos regulares fazendo menção à congruência de lados e ângulos, e à relação de Euler. Além disso, “[...] contextos históricos referentes à geometria espacial, em particular sobre os corpos regulares, pouco têm sido abordados” (SILVA, 2020, p. 11). Analogamente, os livros costumeiramente adotados nos cursos de Licenciatura em Matemática exploram os referidos corpos de forma similar, como se percebe, por exemplo, em Dolce e Pompeo (2005). Segundo os autores,

Um poliedro convexo é regular quando:

- a) Suas faces são polígonos regulares e congruentes,
- b) Seus ângulos poliédricos são congruentes (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 132).

Em seguida, Dolce e Pompeo (2005, p. 133) demonstram que “existem cinco, e somente cinco, *tipos* de poliedros regulares” e afirmam que, pelas conclusões apresentadas, todo poliedro regular também pode ser chamado de poliedro de Platão. Todavia, para atender a essa categoria, Dolce e Pompeo (2005, p. 130) afirmam que

Um poliedro é chamado de poliedro de Platão se, e somente se, satisfaz as três seguintes condições:

- a) todas as faces têm o mesmo número (n) de arestas,
- b) todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número (m) de arestas,
- c) vale a relação de Euler ($V-A+F=2$) (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 130).

Mas, ao analisar a definição desse trazida pelos autores, percebe-se uma condição que, de acordo com o descrito por Pacioli (2010), não é efetivamente necessária, que no caso é satisfazer a relação de Euler. No entanto, como já visto nos escritos de Pacioli (2010), não é feita qualquer alusão a essa última condição, haja vista que os estudos de Euler datam do século XVIII, cerca de duzentos anos após a primeira publicação de *De Divina Proportione*, tratado no qual o autor menciona a relação dos corpos regulares com Platão através de citações direcionadas aos escritos do filósofo grego⁵³.

Como é costume no ensino de Geometria Espacial nos diferentes níveis educacionais, a relação de Euler é constantemente aplicada como condição necessária à garantia de que um corpo é regular. Porém, o conceito apresentado no capítulo XXV de *De Divina Proportione* mostra, com exemplos, que as propriedades dos ângulos planos aplicadas à composição de ângulos sólidos são suficientes para garantir matematicamente a existência de apenas cinco corpos regulares, como também visto no capítulo anterior desse estudo. Desse modo, apesar da distinção entre o conceito de corpo regular presente em *De Divina Proportione* e o apresentado nos livros didáticos atuais, percebe-se um potencial didático no conceito descrito por Pacioli (2010), onde ele pode auxiliar na compreensão desses corpos por um caminho pouco usual, que se restringe a conceitos exclusivamente geométricos, sem fazer alusão a qualquer fórmula matemática mais moderna.

4.2.3 As medidas dos ângulos planos das bases

Outro aspecto que pode ser percebido nesse capítulo é um estudo indireto sobre a medida do ângulo interno de cada base, isto é, de cada polígono regular que compõe os corpos. Pacioli (2010) não determina essas medidas de maneira específica, mas, baseado na 32ª proposição

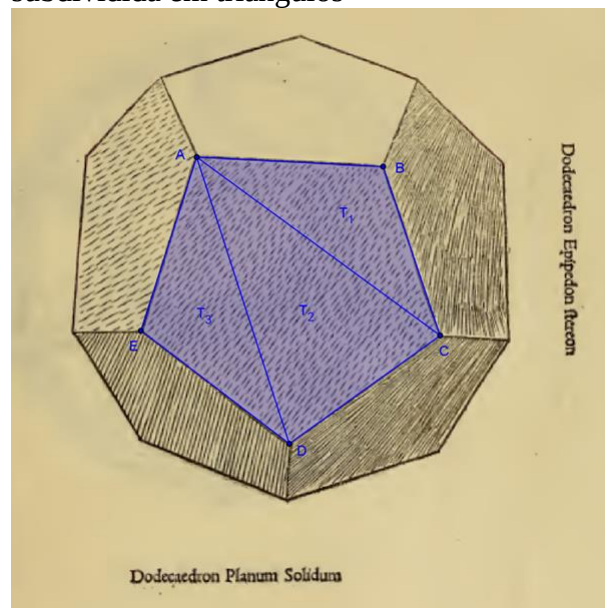
⁵³ Em vários momentos de seu tratado, Pacioli (2010) se refere a Platão como “o filósofo”, fazendo menção constante a seus estudos, em particular o *Timeu*.

presente no livro I⁵⁴ de *Elementos*, dá indícios de uma relação com a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, que é igual a dois retos.

Para compreender de maneira mais prática, é possível que o leitor considere as medidas em graus a partir do cálculo da soma das medidas dos ângulos internos de um polígono, onde o resultado desta é igual à quantidade de lados menos duas unidades, multiplicada por 180° . Porém, a partir da relação estabelecida por Euclides (2009) e indicada por Pacioli (2010), faz-se necessária uma reflexão sobre a proporção com os ângulos retos e a subdivisão de cada polígono em triângulos. Além disso, a aplicação dos graus como unidade de medida não é pertinente ao momento histórico em que o tratado *De Divina Proportione* foi concebido.

Nesses parâmetros, uma saída para se determinar a medida de cada ângulo plano que forma os possíveis ângulos sólidos citados por Pacioli (2010) seria trabalhar essa decomposição das bases em triângulos que possuam um vértice em comum para determinar a soma dos ângulos internos da base e, em seguida, pela regularidade citada na definição de corpos regulares de Pacioli, dividir igualmente essa soma pela quantidade de ângulos planos (Figura 38). Desse modo, o leitor poderá ser capaz de identificar, por meio de razões, as medidas desses ângulos e sua relação com a condição estabelecida para a construção de um ângulo sólido: que a medida total não ultrapasse quatro retos.

Figura 38 — Face de um dodecaedro subdividida em triângulos



Fonte: Adaptado de Pacioli (1509, s/p).

⁵⁴ “Tendo sido prolongado um dos lados de todo triângulo, o ângulo exterior é igual aos dois interiores e opostos, e os três ângulos interiores do triângulo são iguais a dois retos” (EUCLIDES, 2009, p. 122).

Observando o exemplo da figura 38, isto é, a face pentagonal de um dodecaedro regular, frente às concepções de Pacioli (2010) apresentadas no capítulo XXV, o leitor pode refletir sobre uma maneira de justificar a possibilidade de construção de um ângulo sólido a partir desse tipo de polígono decompondo essa face em três triângulos. Como, segundo afirma Euclides (2009), cada triângulo desse tem “dois retos” como medida da soma de seus ângulos internos, percebe-se que a soma dos ângulos internos de um pentágono equivale a três vezes esse valor, ou seja, seis retos. A partir disso, dividindo igualmente esse total por seus cinco ângulos planos, observa-se que cada um terá uma medida equivalente a um reto e um quinto, valor que, quando combinado com mais dois ângulos idênticos, totaliza três retos e três quintos, abaixo do limite de quatro retos.

Desse modo, essa reflexão possibilita uma discussão sobre a soma de ângulos internos de um polígono sem a necessidade de uma fórmula pronta ou com o grau como unidade de medida, e, conseqüentemente, a medida de cada ângulo interno de um polígono regular a partir de uma razão entre a soma total e a quantidade de ângulos planos existente nesse polígono, tendo como referência apenas o que é descrito por Pacioli (2010) em seu tratado, a 32ª proposição do livro I de *Elementos*.

4.3 Sobre as construções dos corpos regulares

Nos capítulos XXVI a XXX, Pacioli (2010) trata das construções de cada corpo regular cujas existências são garantidas no capítulo XXV. Conforme mostrado anteriormente, nesse estudo abordamos apenas as construções do tetraedro, do cubo e do octaedro (Capítulos XXVI a XXVIII). Ao analisar esses capítulos que tratam das construções, percebe-se que Pacioli (2010) descreve com riqueza de detalhes os passos a serem seguidos, citando passagens de Euclides (2009) necessárias ao cumprimento dessas instruções, porém, individualmente, não percebemos reflexões relevantes.

Em contrapartida, em uma análise geral das instruções de construção desses três corpos regulares, percebemos algumas similaridades que podem contribuir na compreensão dos conceitos pertinentes aos corpos regulares para a formação de professores de Matemática. As reflexões provenientes dessas similaridades são apresentadas a seguir.

4.3.1 O “saber-fazer” no estudo das construções dos corpos regulares

Na construção dos conhecimentos matemáticos do Renascimento, em virtude da aproximação entre a prática dos artesãos e a teoria dos eruditos, era comum que os tratados fossem destinados a um público específico, baseando-se em seu ofício. Em *De Divina Proportione*, Luca Pacioli indica no frontispício a quem seu tratado se destina: “[...] engenhosos, perspicazes e curiosos, [...] todo estudioso de Filosofia, Perspectiva, Pintura, Escultura, Arquitetura, Música e outras disciplinas Matemáticas” (PACIOLI, 2010, frontispício). Dentre os possíveis leitores indicados pelo frade, percebemos que os conhecimentos geométricos são pertinentes a seus ofícios, de modo que na articulação entre o saber e o fazer era desenvolvido um conhecimento (*technè*) (BELTRAN; SAITO; TRINDADE, 2014).

Na leitura dos capítulos XXVI, XXVII e XXVIII de *De Divina Proportione*, vemos que Luca Pacioli inicia a construção do tetraedro, do cubo e do octaedro, respectivamente, a partir da descrição de um semicírculo ADB e de algumas linhas geradas a partir dos pontos encontrados nessa construção. Conforme indicações do frade sobre outros escritos que possam auxiliar na compreensão dos processos relatados por ele em seu tratado, percebemos que, na supressão de certas passagens, Pacioli dá indícios de que é necessário um certo conhecimento prévio sobre a temática apresentada. Do mesmo modo, temos a situação em que, ao final de cada capítulo, o frade especifica uma relação entre o diâmetro da esfera que circunda o corpo regular construído e a medida de sua aresta, chamada por Pacioli (2010) de “linha”.

Com base em *Os Elementos*, evidenciado no capítulo II de *De Divina Proportione* como leitura de suporte, tanto o processo de construção do semicírculo ADB quanto a demonstração da relação entre o diâmetro da esfera e a aresta do corpo regular se dão segundo os conhecimentos matemáticos dispostos em algumas proposições descritas por Euclides (2009), não indicadas pelo frade. Para o leitor do período, isso poderia ser uma prática comum, haja vista que o “saber-fazer” geométrico da época era fundamentado teoricamente no conteúdo de *Os Elementos*. Porém, trazendo para o presente estudo, em virtude de nossa formação, os conhecimentos envolvidos não são sistematizados para esse processo, de modo que nos cabe buscar referências segundo o contexto no qual Luca Pacioli redigiu seu tratado.

Na busca de elementos descritos por Euclides (2009) que nos possibilitassem concluir as etapas anteriormente citadas, a investigação matemática se fez presente a fim de suprir esse “saber-fazer” que não nos cabe. Conforme discutido ao longo desse estudo, em razão da metodologia formal que é aplicada no ensino de Geometria no Brasil, mesmo que o discente tenha esses conhecimentos apresentados em *Os Elementos*, é possível que lhe falte a *expertise* necessária para elencá-los em um processo com uma finalidade. Porém, com a investigação

orientada pelo estudo do tratado, é possível refletir sobre os procedimentos didáticos para a sistematização e compreensão da construção dos corpos regulares seguindo os escritos de Luca Pacioli.

Em um contexto geral, os documentos oficiais trazem considerações importantes sobre a investigação ligada à educação. Na BNCC, uma das competências gerais da educação básica citada é

Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas (BRASIL, 2018, p. 9).

Isto é, para a educação básica, o processo investigativo constitui um momento que possibilita ao discente uma construção de conhecimentos que lhe façam sentido, sendo condizentes com a realidade em que vive. No âmbito da Matemática, o pensamento crítico advindo das suas reflexões e articulado com conhecimentos de outras áreas contribui na sua capacidade de raciocínio, representação, comunicação e argumentação. Desse modo, na formação do professor de Matemática, é necessário que este esteja preparado quanto a essa competência, uma vez que as DCN (BRASIL, 2002, p. 4) elencam como competências e habilidades próprias do educador matemático “[...] desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático dos educandos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos” e “perceber a prática docente de Matemática como um processo dinâmico, carregado de incertezas e conflitos, um espaço de criação e reflexão, onde novos conhecimentos são gerados e modificados continuamente”.

Momentos de investigação orientados pelo estudo do tratado com base no “saber-fazer” de uma época, como o propiciado nos escritos de Luca Pacioli em *De Divina Proportione*, possibilitam, então, refletir sobre a prática docente no que se refere ao estudo de conceitos matemáticos outrora vistos apenas de forma teórica e independente. Com a sistematização de um processo, o licenciando em Matemática tem a oportunidade de ressignificar esses conhecimentos não só no âmbito do ensino de Geometria, mas também como aporte à formação de seus alunos como ser reflexivo, que se tornará apto a argumentar e chegar às próprias conclusões.

4.3.2 Os conhecimentos mobilizados na construção do semicírculo ADB

Na leitura dos capítulos XXVI, XXVII e XXVIII, percebemos que Pacioli (2010) trata, respectivamente, da construção do tetraedro, do cubo e do octaedro, iniciando sempre com a composição de uma figura que traz medidas de referência necessárias à construção efetiva dos corpos citados: o semicírculo ADB. Conforme dito anteriormente, apesar da riqueza de detalhes na descrição do frade em seus escritos, os passos necessários para se obter tal figura são suprimidos, de modo que cabe ao leitor dispor dos conhecimentos pertinentes a esse processo de construção.

Quando de posse desses conhecimentos, percebemos dois momentos marcantes na produção do semicírculo ADB. O primeiro é a divisão proporcional do segmento AB de acordo com o indicado por Pacioli (2010) para a construção do tetraedro e do cubo. Nesses casos, em que a proporção é a mesma (que o segmento AC seja o dobro do segmento BC), faz-se necessário recorrer à nona proposição do livro VI de *Os Elementos*, que versa sobre como “Separar de uma reta dada a parte que foi prescrita” (EUCLIDES, 2009, p. 241). Em seguida, para se obter a localização do ponto C sobre a linha AB conforme solicita Pacioli (2010), recorreremos à 31ª proposição do livro I, “Pelo ponto dado, traçar uma linha reta paralela à reta dada” (EUCLIDES, 2009, p. 121).

Em meio aos conhecimentos mobilizados nesse primeiro momento, percebemos um exemplo de aplicação da relação entre retas paralelas interceptadas por transversais. Embora esse conhecimento seja apresentado na Geometria escolar como Teorema de Tales, Euclides apresenta essa relação na segunda proposição do livro VI⁵⁵ de *Os Elementos*, que se baseia na semelhança de triângulos através de suas áreas. Além disso, dentro do processo, também percebemos um exemplo para a 29ª proposição do livro I, que versa sobre os ângulos formados na interseção de uma reta transversal com retas paralelas, como justificativa para a congruência de ângulos alternos internos.

No segundo momento, destinado à construção do semicírculo de diâmetro AB, chamado por Pacioli (2010) de semicírculo ADB, primeiramente é necessário que o ponto médio da linha AB seja determinado, uma vez que esse ponto também será o centro do semicírculo por dividir o diâmetro em dois raios. Nos capítulos XXVI e XXVII, essa etapa é executada após a

⁵⁵ “Caso alguma reta seja traçada paralela a um dos lados de um triângulo, corta os lados do triângulo em proporção; e caso os lados do triângulo sejam cortados em proporção, a reta, sendo ligada dos pontos de secção, será paralela ao lado restante do triângulo” (EUCLIDES, 2009, p. 233).

localização do ponto C para se determinar o ponto O, que também será o centro da esfera, enquanto no capítulo XXVIII, esse mesmo ponto C será o centro buscado. Com base na 10ª proposição do livro I⁵⁶ de *Os Elementos*, é possível determinar esse ponto a partir da construção de um triângulo equilátero, cuja altura está contida em uma reta perpendicular ao diâmetro AB exatamente no ponto que o divide ao meio. Vale ressaltar que, no semicírculo ADB usado para construir o octaedro (capítulo XXVIII), a divisão proporcional do diâmetro AB se dá nesse momento, não sendo necessário recorrer às proposições de Euclides (2009) utilizadas nos capítulos XXVI e XXVII.

Em relação à localização do ponto D, contido no semicírculo ADB, percebemos na leitura dos capítulos que ele determina com o ponto C uma linha CD perpendicular ao diâmetro AB⁵⁷. Desse modo, para sua construção, podemos recorrer à 11ª proposição do livro I de *Os Elementos*, a qual versa sobre “Traçar uma linha reta em ângulos retos com a reta dada a partir do ponto dado sobre ela” (EUCLIDES, 2009, p. 106), já que a linha CD deve ser traçada a partir do ponto C sobre o diâmetro AB. Tendo o semicírculo já construído, ao traçar tal reta perpendicular, a interseção entre esses elementos determina o ponto D buscado, possibilitando, assim, traçar as demais linhas que Pacioli (2010) cita, AD, BD e CD e, conseqüentemente, três triângulos internos ao semicírculo ADB, ACD, BCD e ADB.

No que se refere ao estudo desses momentos, encontramos na BNCC algumas habilidades relacionadas. Sobre o primeiro, temos a habilidade EF09MA10, “Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal” (BRASIL, 2018, p. 317), que pode ser percebida no processo de divisão proporcional do diâmetro AB no ponto C nos capítulos XXVI e XXVII. Enquanto que, no segundo, para determinar o ponto médio de AB para construir o semicírculo ADB, é mobilizada a habilidade EF08MA15, “Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares” (BRASIL, 2018, p. 315), uma vez que o processo de determinação da reta perpendicular ao diâmetro AB descrito por Euclides (2009) se refere à construção de um triângulo equilátero e sua altura, que é, ao mesmo tempo, sua bissetriz e mediatriz.

⁵⁶ “Cortar em duas a reta limitada dada” (EUCLIDES, 2009, p. 106).

⁵⁷ Conforme visto anteriormente nesse estudo, ainda que os capítulos XXVI e XXVII abordem a construção do semicírculo ADB segundo a mesma proporção sobre a divisão do diâmetro AB, apenas o capítulo que trata da construção do cubo menciona essa característica, fazendo alusão também à construção do tetraedro. Quanto à construção do octaedro descrita no capítulo XXVIII, o frade se refere à linha CD como perpendicular a AB (PACIOLI, 2010).

Desse modo, ainda que não descritos por Pacioli (2010) em seu tratado, esses conhecimentos advindos de Euclides (2009) para cumprir um processo necessário para a construção dos corpos regulares possibilitam mobilizar habilidades elencadas nos documentos oficiais, trazendo aplicações sistemáticas de saberes geralmente apresentados de forma teórica. Assim, a construção do semicírculo ADB e dos outros elementos geométricos planos pertinentes a esse processo permite uma reflexão acerca do estudo de conteúdos básicos da Geometria com um propósito, onde o discente pode perceber o significado de certas passagens no que concerne à compreensão dos conhecimentos matemáticos envolvidos.

4.3.3 A relação entre a medida da aresta do corpo regular e o diâmetro da esfera por meio da semelhança de triângulos

Também podemos destacar como característica comum entre as três construções as relações que Luca Pacioli apresenta entre as medidas das linhas (arestas) que delimitam os corpos regulares e o diâmetro da esfera usada como base para construí-los, como se observa nos capítulos XXVI, XXVII e XXVIII de *De Divina Proportione*. Apesar de não explicitar em detalhes uma justificativa para tais relações, percebemos que elas são provenientes de semelhanças de triângulos, entre aqueles formados no semicírculo ADB e os segmentos traçados na construção dos corpos regulares.

No que se refere à semelhança entre os triângulos ABD, ACD e BCD, formados no semicírculo ADB, percebemos que isso pode levar às relações métricas no triângulo retângulo, conteúdo de Geometria lecionado na educação básica. Porém, nesse nível de ensino, é costume entre os professores de Matemática indicarem apenas fórmulas prontas sem uma demonstração, o que não agrega significado aos alunos. Quanto às relações entre o diâmetro e as arestas, elas se dão pela análise da construção dos corpos regulares em relação aos triângulos do semicírculo ADB, uma vez que nesse processo de construção as linhas que delimitam essas figuras são utilizadas como referências para o cumprimento dos passos que culminam na obtenção de um corpo regular.

De acordo com a BNCC, ao estudar sobre essas relações, há a mobilização das habilidades EF09MA12, “Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes” (BRASIL, 2018, p. 317), EF09MA13, “Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos” (BRASIL, 2018, p. 319) e EF09MA17, “Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em

perspectiva (BRASIL, 2018, p. 319). As duas primeiras, diretamente relacionadas ao estudo dos triângulos do semicírculo ADB e a última, mobilizada na observação do processo de construção do corpo regular e de sua representação final em três dimensões.

Assim como na construção do semicírculo ADB, esse movimento possibilita uma reflexão sobre como estabelecer ligações entre elementos distintos do processo de construção dos corpos regulares visando evitar o uso de fórmulas prontas através da análise das construções, culminando em uma dedução sistemática por parte dos discentes. Desse modo, há a possibilidade de ressignificar essas relações, uma vez que, ao ter contato com o processo de construção de um corpo regular, o discente tem em mãos toda a dedução daquilo que costumeiramente já utiliza de uma forma direta e sem significado concreto, tendo por base apenas relações de semelhança entre figuras geométricas planas.

Outras reflexões podem emergir do estudo dos capítulos XXV a XXVIII de *De Divina Proportione*. Dependendo das concepções do pesquisador frente aos escritos do tratado, sua intencionalidade pode variar, não sendo restrita a apenas uma visão, pois, na construção de uma interface entre história e ensino de Matemática, as discussões podem trazer à tona um leque de possibilidades.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme observado, o ensino de Geometria no Brasil possui históricas lacunas advindas de aspectos sociais políticos e econômicos, culminando em momentos de ascensão e queda. Dentre os problemas enfrentados ao longo dos séculos, a formação de professores de Matemática, no que se refere aos conhecimentos geométricos, reflete a falta de unidade no planejamento de cursos de formação. Além disso, o modelo demasiadamente formal e tradicional de ensino de Geometria, tanto na educação básica quanto no ensino superior, traz à tona uma espécie de ciclo negativo que, infelizmente, ainda é percebido em algumas instituições.

Proporcionar métodos que possibilitem auxiliar o ensino de Matemática trazendo significado aos conceitos abordados é uma questão que tem sido levantada no século XXI. Com isso, alguns estudos vêm sendo desenvolvidos visando à articulação entre o ensino e outros campos do saber, dos quais a história da matemática vem recebendo destaque, inclusive com sua indicação por parte de documentos oficiais mais recentes, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Desse modo, a conexão entre história e ensino de Matemática se faz presente em discussões entre estudiosos desses dois campos, tendo como objetivo a qualidade do ensino nacional.

No que se refere especificamente ao ensino de corpos regulares, conforme visto ao longo de nosso estudo, percebemos que essa temática não tem tanto destaque nos diferentes níveis de ensino, cabendo ao pesquisador buscar meios que permitam trazer significado a ela. E, através da interface entre história e ensino de Matemática, que permeia o diálogo entre o historiador e o educador acerca de um documento histórico como objeto de estudo, podemos encontrar contribuições de outros tempos ao ensino atual com vistas à uma contextualização que possibilite reflexões sobre o conteúdo matemático, propondo novas possibilidades de abstração destes.

À luz das palavras de Luca Pacioli em *De Divina Proportione* a respeito dos corpos regulares, sobre seu conceito e a sua construção, levantamos o seguinte questionamento: *como o tratado De Divina Proportione de Luca Pacioli pode contribuir na formação de professores de Matemática no que se refere ao ensino de corpos regulares, segundo a interface entre a história e o ensino de Matemática em uma vertente historiográfica atualizada?*

Diante disso, refletimos sobre os estudos apresentados nesse tratado, em consonância com a interface entre história e ensino de Matemática, quanto à ressignificação da noção de corpo regular, sua construção e suas propriedades. Considerando como essencial nesse processo

a compreensão da construção de uma interface entre a história e o ensino de Matemática, buscamos por contribuições que um documento como o citado pode trazer para formação de professores de Matemática e para a educação básica em relação aos conhecimentos geométricos.

Como forma de conduzir esse estudo, e pautado na pergunta em questão, tivemos como objetivo geral compreender as contribuições do ensino de corpos regulares para a formação de professores de Matemática por meio do tratado *De Divina Proportione* de Luca Pacioli por meio da construção de uma interface entre história e ensino de Matemática segundo uma vertente historiográfica atualizada. De modo a alcançar esse intuito, elencamos três objetivos específicos.

O primeiro objetivo foi descrever, por meio do estudo do tratado *De Divina Proportione* de Luca Pacioli, o contexto em que ele foi elaborado. Para isso, a partir de uma pesquisa de caráter documental, partimos de elementos e informações contidas no próprio tratado com o intuito de dialogar com outros materiais contemporâneos aos escritos de Luca Pacioli, com vistas a montar uma teia de informações, a fim de compreender quais aspectos sociais, políticos, econômicos, entre outros, permeavam o contexto de elaboração desse tratado.

Com isso, percebemos o impacto e a necessidade das reformas do ensino, que se tornavam cada vez mais evidentes, ao passo que se seguia o Renascimento, sendo Luca Pacioli, um personagem engajado e defensor dessas modificações. Associado a isso, vemos também a importância da relação entre os conhecimentos de ordem prática e teórica, no que diz respeito à produção de tratados, que proporcionavam a divulgação dos conhecimentos matemáticos do período, sendo *De Divina Proportione* um tratado com ricas informações sobre as ideias geométricas de seu período.

Nesta etapa do estudo, notamos como dificuldade o acesso a esses documentos contemporâneos, uma vez que as línguas utilizadas no período eram o latim, o grego e o italiano, as quais não dominamos. Ainda que de posse de uma versão do tratado traduzida para o português por Bertato (2010) a partir do cotejamento de diferentes versões de *De Divina Proportione*, a escassez de estudos que sejam relacionados aos escritos de Luca Pacioli também compõe uma dificuldade no delinear da rede de informações. Além disso, o desafio da escrita segundo uma vertente historiográfica mais atualizada esteve presente em toda a produção desse estudo, visto que é ainda uma perspectiva historiográfica distante da formação de professores de matemática, mas que tem uma interessante proposta.

O segundo objetivo foi compreender os conhecimentos matemáticos incorporados ao estudo dos corpos regulares, assim como os aspectos epistemológicos envolvidos. Para esse

fim, nos pautamos em uma pesquisa mais aprofundada, em torno de documentos que conversassem com o tratado, por estarem no mesmo período, de modo a dar ênfase na esfera epistemológica, visando continuar o movimento de conhecer o contexto no qual os conceitos matemáticos foram desenvolvidos e, assim, se chegar aos conhecimentos ali incorporados.

Diante disso, nos ancoramos nos escritos de Euclides em *Os Elementos*, indicado por Luca Pacioli como um guia para compreender seu tratado. O constante ato de transitar entre o tratado principal de nosso estudo e sua indicação de suporte nos fez perceber que o conhecimento geométrico da época não se distingue muito do que temos hoje, a não ser pela capacidade de sistematização que entendemos como parte de um saber-fazer do período em que Pacioli redigiu *De Divina Proportione*.

Nesse momento, as dificuldades ficaram em torno da compreensão dos escritos de Luca Pacioli, pois, ainda que de posse de uma versão traduzida do tratado, a linguagem utilizada pelo frade e mantida por Bertato (2010) não é tão simples, cabendo ao leitor se dedicar ao estudo profundo não só do conhecimento matemático, mas também da interpretação das palavras do frade. Além disso, as construções em perspectiva apresentadas nos capítulos referentes à construção do tetraedro, do cubo e do octaedro também exigem do leitor uma capacidade de visualização geométrica mais apurada, podendo ser necessário recorrer a meios que possibilitem uma melhor compreensão, como o uso de recursos computacionais.

O terceiro objetivo foi discutir sobre os conhecimentos matemáticos que emergem do estudo de alguns dos corpos regulares presentes no tratado *De Divina Proportione*, visando à formação de professores de Matemática. Para isso, a partir da rede de conhecimentos levantada nos capítulos dois e três de nosso estudo, promovemos um diálogo com os documentos que estão vinculados com o ensino de Matemática no século XXI, como a BNCC e as DCN, com vistas a elaborar reflexões didáticas para o ensino de Matemática que possibilitem modificações na postura do futuro professor de Matemática e na daqueles que já exercem tal profissão.

Com isso, notamos que a partir dos estudos de Luca Pacioli emergiram discussões potencialmente didáticas em torno do estudo do conceito de corpos regulares apresentado pelo frade, como a nomenclatura utilizada (corpos regulares), com base em suas representações no tratado, *solidus* (sólido) e *vacuus* (vazado). Além disso, pudemos nos aproximar mais da conceituação apresentada pelo frade sobre corpos regulares em contraste com os materiais didáticos presentes no ensino de Matemática no século XXI.

A partir das construções dos corpos regulares, outras reflexões também foram surgindo, como o saber-fazer da época, evidenciado pela supressão de algumas passagens do tratado por parte de Luca Pacioli, observado na construção do semicírculo ADB do tetraedro, cubo e

octaedro, levando em consideração os conhecimentos presentes nos escritos de Euclides. Isso, em confronto com o ensino de Matemática no século XXI, promove reflexões em torno do modo como esses corpos regulares eram compreendidos em sua estruturação, de modo a refletir sobre que conhecimentos são necessários saber para hoje articular com o tratado.

Um outro ponto que possibilitou uma discussão foi a relação entre medidas relacionadas aos corpos regulares, como o diâmetro da esfera que os envolve e as linhas que os delimitam. Na reflexão sobre essas relações, notamos aplicações sistemáticas de conhecimentos matemáticos que são geralmente apresentados de forma não relacionada e essencialmente teórica. A partir da articulação desses conhecimentos com um objetivo delineado pelo tratado, construir um corpo regular, constatamos que, ainda que dentro de um contexto estritamente matemático, a mobilização ordenada de conceitos geométricos pode contribuir na formação do futuro docente e, conseqüentemente, de seus possíveis alunos.

Como resultados da pesquisa, verificamos que a narrativa adotada por Luca Pacioli no tratado, em relação aos corpos regulares, imprime orientações relevantes para a construção, demonstração e compreensão de elementos geométricos contidos em *De Divina Proportione*, tendo como referência *Os Elementos* de Euclides, percebido neste estudo como um material usualmente adotado no estudo da Geometria, arte liberal componente do *Quadrivium*. Além disso, vemos que a reconstituição contextual da episteme do período e os conhecimentos epistemológicos que permeavam a construção dos corpos regulares, em especial neste, o cubo, o tetraedro e o octaedro, permitiu que algumas reflexões didáticas a respeito do que era assinalado por Luca Pacioli emergissem, possibilitando contribuições à formação de professores de Matemática.

Ainda que tenha sido realizado em caráter bibliográfico e documental, nosso estudo apresenta reflexões que, quando inseridas no desenvolvimento das atividades elaboradas segundo orienta a interface entre história e ensino de Matemática, podem trazer contribuições à compreensão dos corpos regulares. Desse modo, estimamos que, em um momento futuro, as reflexões aqui trazidas possam nortear essas atividades a fim de que possamos completar o ciclo de construção de uma interface e, assim, trazer uma proposta de aplicação dos conhecimentos matemáticos mobilizados no estudo dos corpos regulares contidos no tratado *De Divina Proportione* com o propósito de ressignificar o conteúdo pertinente aos referidos corpos.

REFERÊNCIAS

- ALBUQUERQUE, S. M. de. **Um estudo sobre a articulação entre a multiplicação contida no *Traité de Gerbert* (1843) e o ensino na formação de professores de Matemática.** 2019. 145 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2019.
- ALVES, V. B. **Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos mobilizados no manuseio do instrumento círculos de proporção de William Oughtred.** 2019. 153 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2019.
- BATISTA, A. N. de S. **Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos incorporados e mobilizados na construção e no uso da ba.** 2018. 114 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2018.
- BELTRAN, M. H. R.; SAITO, F.; TRINDADE, L. S. P. **História da Ciência para formação de professores.** São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2014.
- BERTATO, F. M. A **"De Divina Proportione" de Luca Pacioli:** tradução anotada e comentada. Campinas: Unicamp, 2010. 56 v. Coleção CLE.
- BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 23 dez. 1996. Seção 1, p. 1. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm. Acesso em: 1 nov. 2019.
- BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Parecer CNE/CES 1.302/2001. Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 05 mar. 2002. Seção 1, p. 15. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf>. Acesso em: 1 nov. 2019.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular:** Educação é a base. Brasília: MEC, 2018.
- BRASIL. **Universidade Federal do Ceará.** Fortaleza: UFC, 2021a. Disponível em: www.ufc.br. Acesso em: 01 jan. 2021.
- BRASIL. **Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará.** Fortaleza: IFCE, 2021b. Disponível em: www.ifce.edu.br. Acesso em: 01 jan. 2021.
- CALDATTO, M. E.; PAVANELLO, R. M. Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais. **Quadrante**, Lisboa, v. 24, n. 1, p. 103-128, jun. 2015. Disponível em: <https://quadrante.apm.pt/article/view/22913>. Acesso em: 01 jan. 2021.
- CARREIRA, E. Limites e grandezas do pensamento geométrico na Idade Média. In: FRIÇA, A. *et al.* **Trivium e Quadrivium:** as artes liberais na idade média. Cotia: Íbis, 1999. p. 203-248.

CASINI, L. **Juan Luis Vives [Joannes Ludovicus Vives]**. Stanford: Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2021. Disponível em: <https://plato.stanford.edu/entries/vives/>. Acesso em: 01 jan. 2021.

CASTILLO, A. R. M. **Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos incorporados e mobilizados na construção e no uso do bá**. 2016. 121 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Departamento de Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

CEARÁ (Estado). **Universidade Estadual do Ceará**. Fortaleza: UECE, 2021. Disponível em: www.uece.br. Acesso em: 01 jan. 2021.

CONTADOR, P. R. M. **A Matemática na arte e na vida**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

CORMACK, L. B. Handwork and Brainwork: beyond de zilsel thesis. In: CORMACK, L. B.; WALTON, S. A.; SCHUSTER, J. A.. **Matemathical Practitioners and the Transformation of Natural Knowledge in Early Modern Europe**. Cham: Springer, 2017. p. 11-36. (Studies in History and Philosophy of Science).

CORMACK, L. B. Introduction: pratical mathematics, pratical mathematicians, and the case for transforming the study. In: CORMACK, L. B.; WALTON, S. A.; SCHUSTER, J. A. **Matemathical Practitioners and the Transformation of Natural Knowledge in Early Modern Europe**. Cham: Springer, 2017. p. 1-10. (Studies in History and Philosophy of Science).

DI TEODORO, F. P. **PACIOLI, Luca**. [S. l.]: Dizionario Biografico degli Italiani, 2014. Disponível em: [http://www.treccani.it/enciclopedia/luca-pacioli_\(Dizionario-Biografico\)](http://www.treccani.it/enciclopedia/luca-pacioli_(Dizionario-Biografico)). Acesso em: 01 nov. 2019.

DIAS, M. da S.; SAITO, F..Algumas potencialidades didáticas do “setor trigonal” na interface entre história e ensino de Matemática Some didactic potential of “trigonal sector” at the interface between history and mathematic teaching. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, [s. l.], v. 16, n. 4, p. 1227-1253, abr. 2014.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar: geometria espacial, posição e métrica**. 5. ed. [S. l.]: Atual, 2005.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Unesp, 2009.

FABRIS, A. Plínio, o Velho: uma história material da pintura. **Locus: Revista de História**, [S. l.], v. 10, n. 2, p. 1-9, dez. 2004. Disponível em: <https://periodicos.ufjf.br/index.php/locus/article/view/20626>. Acesso em: 5 jul. 2021.

FRIAÇA, A. *et al.* **Trivium e Quadrivum: as artes liberais na idade média**. Cotia: Íbis, 1999.

FURINGHETTI, F. Teacher education through the history of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, [s. l.], v. 66, n. 1, p. 131-143, jan. 2007.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2010.

GILLISPIE, C. C. (Ed.). **Dictionary of scientific biography**. New York: Charles Scribner's Sons, 1981.

GRAYSON, C.; ARGAN, G. C. **ALBERTI, Leon Battista**. [S. l.]: Treccani, 1960. Disponível em: [https://www.treccani.it/enciclopedia/leon-battista-alberti_\(Dizionario-Biografico\)](https://www.treccani.it/enciclopedia/leon-battista-alberti_(Dizionario-Biografico)). Acesso em: 01 jan. 2021.

LIMA, G. L. de; SILVA, M. J. F. da. Conhecimentos docentes para o ensino de Geometria em um curso de licenciatura em Matemática. **Vidya**, Santa Maria, v. 35, n. 2, p. 159-177, jul. 2015. Disponível em: <https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/585>. Acesso em: 01 jan. 2021.

LOPES, J. P. B. **A Sequência Fedathi e o ensino de sólidos geométricos**. 2015. 165 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.

MACNUTT, F. A. **De Orbe Novo: the eight decades of feter martyr d'anghera**. [S. l.]: Project Gutenberg, 1912.. Disponível em: <https://www.gutenberg.org/files/12425/12425-h/12425-h.htm>. Acesso em: 01 jan. 2021.

MAQUIAVEL, N. **O Príncipe**. Tradução, introdução e notas de Antonio D'Ella. São Paulo: Cultrix, 2006.

MARTINS, E. B. **Conhecimentos matemáticos mobilizados na manipulação das barras de calcular de John Napier descritas no tratado Rabdologiae de 1617**. 2019. 103 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2019.

MIGUEL, A. As potencialidades da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. **Zetekiké**, Campinas, v. 5, n. 8, p. 73-105, ago. 1997.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na educação matemática: propostas e desafios**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

MOHR, A. R. R.; PRADO, A. V. S. Construção dos sólidos regulares utilizando um circuito de aprendizagem por meio de materiais diversificados. In: ENCONTRO REGIONAL DE ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DA REGIONAL SUL, 20., Bagé. **Anais [...]** Bagé: Erematul, 2014. Disponível em: <https://eventos.unipampa.edu.br/eremat/files/2014/12/MC-Mohr-004.498.660-25.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2021.

MUSEO E REAL BOSCO DI CAPODIMONTE. **Oggi vi raccontiamo... Il Ritratto di fra Luca Pacioli**. [S. l.]: Capodimonte, 2020. Disponível em: <https://capodimonte.cultura.gov.it/oggi-vi-raccontiamo-il-ritratto-di-fra-luca-pacioli/>. Acesso em: 01 jan. 2021.

NUOVO, A. **PAGANINI, Paganino**. [S. l.]: Dizionario Biografico degli Italiani, 2014. Disponível em: http://www.treccani.it/enciclopedia/paganino-paganini_%28Dizionario-Biografico%29. Acesso em: 01 nov. 2019.

OLIVEIRA, F. W. S. **Sobre os conhecimentos geométricos incorporados na construção e no uso do instrumento jacente no plano de Pedro Nunes (1502-1578) na formação do professor de Matemática**. 2019. 199 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2019.

OLIVEIRA, M. da S. **O modelo euclidiano nas abordagens dos poliedros de Platão em livros didáticos: reflexos do movimento da matemática moderna?** 2018. 132 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2018.

PACIOLI, L. **De Divina Proportione**. Veneza: A. Paganius Paganinus, 1509.

PACIOLI, L. De Divina Proportione. In: BERTATO, F. M. **A "De Divina Proportione" de Luca Pacioli**: tradução anotada e comentada. Campinas: Unicamp, 2010. p. 1-109.

PEREIRA, A. C. C.; SAITO, F.. Os instrumentos matemáticos na interface entre história e ensino de matemática: compreendendo o cenário nacional nos últimos 10 anos. In: SEMINÁRIO CEARENSE DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 3., 2018, Fortaleza. **Anais [...]** Fortaleza: EdUECE, 2018. p. 1-12.

PEREIRA, A. C. C.; SAITO, F. A reconstrução do báculo de Petrus Ramus na interface entre história e ensino de matemática. **COCAR**, Belém, v. 13, n. 25, p.342-373, abr. 2019.

PLATÃO. **Timeu-Crítias**. Tradução do Grego, introdução, notas e índices de Rodolfo Lopes. Coimbra: Cech, 2011.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. de. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

RADIN, L. D. **Abordagens diversificadas para o ensino dos poliedros de Platão**. 2018. 97 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2018.

SAITO, F. **História da matemática e suas (re)construções contextuais**. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

SAITO, F. Instrumentos e o “saber-fazer” matemático no século XVI, in Ciência, Tecnologia e Cultura: Outro desenvolvimento é possível? In: SIMPÓSIO NACIONAL DE TECNOLOGIA E SOCIEDADE, 5., 2013, Curitiba. **Anais [...]** Curitiba: UTFPR/ESOCITE.BR, 2013, pp. 1151-1160.

SAITO, F.; BELTRAN, M. H. R. Revisitando as relações entre ciência e "techné": ciência, técnica e tecnologia nas origens da ciência moderna. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA CIÊNCIA E DA TECNOLOGIA, 14., 2014, Belo Horizonte. **Anais [...]** Belo Horizonte: UFMG, 2014. p. 1-13.

SAITO, F.; DIAS, M. da S. Interface entre História da Matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. **Ciência & Educação**, [s. l.], v. 19, n. 1, p. 89-111, jan. 2013.

SANCHEZ, J. B. dos P. **Mapeamento da Pesquisa Acadêmica brasileira sobre Geometria Espacial**: período 2007 a 2017. 2018. 101 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2018.

SANTOS, A. A. dos. **Construção e medida de volume dos poliedros regulares convexos com o Cabri 3D**: uma possível transposição didática. 2016. 167 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Doutorado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

SANTOS, R. A. dos. **Poliedros de Platão**: uma abordagem segundo o modelo de van hiele do desenvolvimento do pensamento geométrico. 2014. 100 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém, 2014.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA. **Estatuto**, Registrado no 2º Oficial de Registro de Pessoa Jurídica, Comarca de Rio Claro, SP. Belém: SBHMat, 1999. Disponível em: https://www.sbhmat.org/conteudo/view?ID_CONTEUDO=366. Acesso em: 1 nov. 2019.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA. **XIII Seminário Nacional de História da Matemática**. [S. l.]: SBHMat, 2019. Disponível em: <http://uece.br/eventos/snhm2019>. Acesso em: 01 nov. 2019.

SELLBERG, E. **Petrus Ramus**. [S. l.]: Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2020. Disponível em: <https://plato.stanford.edu/entries/ramus/>. Acesso em: 01 jan. 2021.

SILVA, A. S. da. O conceito de corpos regulares em alguns livros didáticos e sua relação com o tratado De Divina Proportione (1509). **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, Fortaleza, v. 7, n. 20, p. 190-201, abr. 2021. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/2968>. Acesso em: 01 jan. 2021.

SÓLIDO. In: MICHAELIS. [S. l.]: Uol, 2021. Disponível em: <https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/solido>. Acesso em: 01 jan. 2021.

STABILE, G. **BRAGADIN, Domenico**. [S. l.]: Treccani, 1971. Disponível em: https://www.treccani.it/enciclopedia/domenico-bragadin_%28Dizionario-Biografico%29/. Acesso em: 01 jan. 2021.

VALENTE, W. R. Quem somos nós, professores de matemática? **Cadernos Cedes**, Campinas, v. 28, n. 74, p. 11-23, abr. 2008. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ccedes/a/3PnDyZfGYnvPtWVMwRgNJMx/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: 01 jan. 2021.