

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

WEDSON FRANCELINO RIBEIRO NORONHA

**ENGENHARIA DIDÁTICA CLÁSSICA SOBRE A SEQUÊNCIA DE PELL E SEUS
MODELOS DE GENERALIZAÇÃO**

FORTALEZA

2020

WEDSON FRANCELINO RIBEIRO NORONHA

ENGENHARIA DIDÁTICA CLÁSSICA SOBRE A SEQUÊNCIA DE PELL E SEUS
MODELOS DE GENERALIZAÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Alves Vieira.

Coorientador: Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira.

Área de concentração: Ensino de Matemática.

FORTALEZA

2020

WEDSON FRANCELINO RIBEIRO NORONHA

**ENGENHARIA DIDÁTICA CLÁSSICA SOBRE A SEQUÊNCIA DE PELL E SEUS
MODELOS DE GENERALIZAÇÃO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Aprovado em ____ / ____ / ____.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves (Orientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) –
Campus Fortaleza

Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira (Coorientador)
Universidade Regional do Cariri (URCA) - *Campus Crajubar*

Prof. Dr. Eurípedes Carvalho da Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) -
Campus Maracanaú

Prof. Dra. Francisca Cláudia Fernandes Fontenele
Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA)

Prof. Dr. Laerte Silva da Fonseca
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sergipe (IFS)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal do Ceará - IFCE
Sistema de Bibliotecas - SIBI
Ficha catalográfica elaborada pelo SIBI/IFCE, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- N852e Noronha, Wedson Francelino Ribeiro Noronha.
ENGENHARIA DIDÁTICA CLÁSSICA SOBRE A SEQUÊNCIA DE PELL E SEUS MODELOS DE
GENERALIZAÇÃO / Wedson Francelino Ribeiro Noronha Noronha. - 2020.
192 f. : il. color.
- Dissertação (Mestrado) - Instituto Federal do Ceará, Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática,
Campus Fortaleza, 2020.
Orientação: Prof. Dr. Francisco Régis Viera Alves.
Coorientação: Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira.
1. Sequência de Pell. 2. Engenharia Didática. 3. Teoria das Situações Didáticas. I. Título.
CDD 510.07
-

a todos que guardam reservas da matemática
aprendida na tenra idade, atribuindo a obscuros
escolhidos o domínio desta ciência.

Agradecimentos

A Deus, por sempre me fornecer sabedoria e resiliência para vencer novos desafios.

A minha esposa, Italândia Azevedo, por sempre apoiar e acreditar no meu trabalho, sempre ao meu lado.

A todos os professores que conheci e que ainda vou conhecer. Todos vocês, de variadas formas, me ajudaram e ajudam e ser um professor melhor.

Ao meu orientador Dr. Francisco Régis Vieira Alves pelos sábios conselhos e pelo apoio e paciência ao me acompanhar nas dificuldades enfrentadas.

Ao meu coorientador Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira, pela cuidadosa observação dos meus erros e acertos.

Aos membros participantes da banca de defesa deste trabalho, pelo interesse, paciência e correções atenciosas, em prol da melhoria deste trabalho.

A todos os participantes desta pesquisa, pela colaboração e boa vontade em aprender e participar ativamente da construção do conhecimento contido aqui.

Muito obrigado a todos vocês.

Entre dois espíritos iguais, postos nas mesmas condições, aquele que sabe geometria é superior ao outro e adquire um vigor especial.
(Pascal)

RESUMO

O objetivo alcançado neste trabalho foi o de elaborar uma Engenharia Didática para objeto matemático denominado *sequência de Pell*, bem como seus diversos modelos de generalização, através de um conjunto de situações didáticas segundo os pressupostos da Teoria das Situações Didáticas. Discutimos o modelo epistemológico e evolutivo da *sequência de Pell*, associado as suas variadas manifestações matemáticas e seu percurso histórico com o propósito de realizar uma transposição didática com vias da Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 2008). Desse modo, elaboramos um conjunto de situações didáticas para o estudo e ensino da *sequência de Pell* e seus modelos de generalização utilizando, para isso, a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa, segundo os preceitos de Artigue (1996), Almouloud (2014), Almouloud (2019). Em complementaridade com a metodologia de pesquisa, selecionamos e a Teoria das Situações Didáticas, como teoria de ensino (BROUSSEAU, 2008), para apoiar a construção de nossas situações didáticas, bem como apoiar nossas análises. Concluímos neste trabalho que o estudo sobre o objeto matemático conhecido como *sequência de Pell*, com transposição didática efetuada segundo os preceitos da TSD, é capaz de mobilizar o pensamento intuitivo e inferencial do estudante, bem como atitude investigativa, conduzindo-o a descoberta de teoremas e resultados.

Palavras-chave: Sequência de Pell. Engenharia Didática. Teoria das Situações Didáticas.

ABSTRACT

The objective achieved in this work was to develop a Didactic Engineering for a mathematical object called *Pell's sequence*, as well as its several generalization models, through a set of didactic situations according to the assumptions of the Theory of Didactic Situations. We discussed the epistemological and evolutionary model of *Pell's sequence*, associated with its varied mathematical manifestations and its historical trajectory with the purpose of carrying out a didactic transposition through the Didactic Situations Theory (BROUSSEAU, 2008). In this way, we elaborated a set of didactic situations for the study and teaching of *Pell's sequence* and its generalization models using, for that, Didactic Engineering as research methodology, according to the precepts of Artigue (1996), Almouloud (2014), Almouloud (2019). In complementarity with the research methodology, we selected and the Theory of Didactic Situations, as a teaching theory (BROUSSEAU, 2008), to support the construction of our didactic situations, as well as support our analyzes. We concluded in this work that the study on the mathematical object known as *Pell's sequence*, with didactic transposition carried out according to the TSD precepts, is able to mobilize the student's intuitive and inferential thinking, as well as an investigative attitude, leading him to discover theorems and results.

Keywords: Pell sequence. Didactic Engineering. Theory of Didactic Situations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Modelo de Transposição Didática	32
Figura 2 – Relações professor-aluno-saber descritas pela TSD	34
Figura 3 – Relação entre Devolução e a Situação de Institucionalização.	37
Figura 4 – Lema de Brahmagupta, original em sânscrito.	109
Figura 5 – John Pell (1611-1685)	110
Figura 6 – Definição de U_n e V_n por Lucas (1891)	111
Figura 7 – <i>Suites</i> de Fermat, Fibonacci e Pell, segundo Lucas (1891)	112
Figura 8 – Fórmulas de Binet para U_n e V_n , segundo Lucas (1891).	113
Figura 9 – Identidades de soma e diferença de índices, por Lucas (1891).	114
Figura 10 – Definição de Horadam (1971) para $(p_n)_{n \in \mathbb{Z}}$	114
Figura 11 – Modelo matricial de Ercolano (1979).	115
Figura 12 – Construção dos modelo matemático para a <i>sequência de Pell</i> , sob o ponto de vista histórico.	116
Figura 13 – Solução dos Alunos 01, 03 e 05 para o problema de computação da <i>Escada de Theon</i> . O aluno 01 claramente corrigiu seus cálculos, incorretos por ter trocado os termos da recursão, mesmo procedimento dos alunos 03 e 05, com marcas de borracha em $n = 8$	134
Figura 14 – Solução dos alunos 01 e 02 para os 10 primeiros termos de t_n	135
Figura 15 – Solução dos alunos 03 e 04 para os 10 primeiros termos de t_n	136
Figura 16 – Solução do Aluno 05 para os 10 primeiros termos de t_n	136
Figura 17 – Validação do aluno 03 para convergência à $\sqrt{2}$	136
Figura 18 – Solução do aluno 05 para a situação-problema 02 do primeiro questionário.	138
Figura 19 – Momento da validação do aluno 02 para as fórmulas $q_{n+1} = 2q_n + q_{n-1}$ e $v_{n+1} = 2v_n + v_{n-1}$	138
Figura 20 – Solução do aluno 04 para a situação-problema 03, questionário 01.	139
Figura 21 – Computação do aluno 04 para α_n e γ_n	139
Figura 22 – Solução dos Alunos 01 e 02 para o problema 04 do primeiro questionário	140
Figura 23 – Validação para a situação-problema 04 do questionário 01. Não foram oferecidas justificativas algébricas.	140
Figura 24 – Dialética de Ação da identidade encontrada pelo Aluno 01.	142
Figura 25 – Formulação da identidade encontrada pelo Aluno 01.	143
Figura 26 – Validação da identidade encontrada pelo aluno 01.	143
Figura 27 – Dialética de ação da identidade (5.3) encontrada pelo Aluno 02.	144
Figura 28 – Dialéticas de formulação e validação da identidade (5.3) encontrada pelo Aluno 02.	144
Figura 29 – Dialéticas de ação e formulação do aluno 02 para a identidade (5.4).	145

Figura 30 – Dialéticas de ação e formulação do aluno 02 para a identidade (5.5).	146
Figura 31 – Processo de investigação do aluno 03 para a identidade (5.6).	146
Figura 32 – Validação do aluno 03, com uma demonstração incompleta.	147
Figura 33 – Início da dialética de ação do aluno 05. Note a lista de quadrados e cubos, indicando tratamento meticoloso na investigação.	148
Figura 34 – Final da dialética de ação para identidade (5.6) feita pelo aluno 05 e sua respectiva formulação.	148
Figura 35 – Final da dialética de ação e formulação para identidade (5.7) feita pelo aluno 05.	148
Figura 36 – Dialéticas de ação, formulação e validação para as identidades presentes em (5.8) e (5.9), produzidas pelo aluno 01.	150
Figura 37 – Dialéticas de ação, formulação e validação para as identidades presentes em (5.8) e (5.9), produzidas pelo aluno 03.	151
Figura 38 – Investigação do aluno 02 para as identidades (5.10) e (5.11).	152
Figura 39 – Investigação do aluno 05 para (5.10) e (5.11).	152
Figura 40 – Indução matemática para $\alpha^n = \alpha p_n + p_{n-1}$	153
Figura 41 – Demonstração da fórmula de Binet executada pelo aluno 05.	154
Figura 42 – Início da dialética de ação do aluno 01.	155
Figura 43 – Início da dialética de ação do aluno 05.	155
Figura 44 – Momento em que o aluno 02 encontra a recorrência matricial esperada, caracterizando a dialética de formulação.	156
Figura 45 – Dialética de formulação registrada pelo aluno 01.	156
Figura 46 – Dialética de formulação registrada pelo aluno 05.	157
Figura 47 – Passo indutivo para o teorema 3.2.6 realizados pelo aluno 02.	157
Figura 48 – Demonstração discutida pelo aluno 02 com a turma, exibindo o passo indutivo da figura 47.	158
Figura 49 – Determinante para matriz M_n , registrado pelo aluno 02.	158
Figura 50 – Validação do aluno 01 e sua apresentação, sobre a matriz M_{-n}	159
Figura 51 – Computação dos 10 primeiros termos de $[p_n(x)]$, caracterizando o início da ação do aluno 01	160
Figura 52 – Observação do aluno 02 sobre uma conjectura baseada no comportamento polinomial de $[p_n(x)]$	161
Figura 53 – Dialética de ação da turma na busca de outras propriedades.	161
Figura 54 – Dialética de Validação para $p_n(1) = p_n$	162
Figura 55 – Registro da equação característica $t^2 - 2xt - 1 = 0$ e cálculo das raízes α_x e β_x . 162	
Figura 56 – Registro da equação característica $t^2 - 2xt - 1 = 0$, raízes α_x e β_x e conjectura das identidades α^n e β^n , durante uma dialética de ação.	163
Figura 57 – Dialética de validação do aluno 01 da fórmula de Binet para $p_n(x)$	164

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Primeiros termos das sequências a_n e c_n	47
Tabela 2 – Sequências estendidas (b_n) e (d_n) , para $-5 \leq n \leq 5$	49
Tabela 3 – Restrições nas sequências estendidas (b_n) e (d_n) , para os dez primeiros termos.	49
Tabela 4 – Sequências numéricas que satisfazem $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$	49
Tabela 5 – Sequência Estendida de Fibonacci.	51
Tabela 6 – Os dez primeiros termos para <i>sequência de Jacobsthal</i>	54
Tabela 7 – Recorrência Estendida de Jacobsthal.	54
Tabela 8 – Eq. de recorrência e suas respectivas eq. características	58
Tabela 9 – Algumas matrizes P_n	76
Tabela 10 – Valores de t_n para $n \geq 0$	80
Tabela 11 – Valores de t_n para $n \leq 0$	80
Tabela 12 – Valores de t_n	82
Tabela 13 – Polinômios de Horadam	91
Tabela 14 – Polinômios de Horadam $n = -1, -2, -3, -4, -5$	91
Tabela 15 – Polinômios de Pell e Pell-Lucas para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$	93
Tabela 16 – Polinômios de Pell e Pell-Lucas para $n = -1, -2, -3, -4, -5, -6$	93
Tabela 17 – $[P_n(x)]$ para $-4 \leq n \leq 4$	99
Tabela 18 – Convergência de $\frac{[p_n(x)]}{[p_{n-1}(x)]}$	102
Tabela 19 – Os 8 primeiros valores para v_n e q_n	103
Tabela 20 – Razão $t_n = \frac{q_n}{v_n}$	103
Tabela 21 – Alguns valores para z_n	105
Tabela 22 – Primeiros valores de p_n e q_n e sua correspondência com a <i>equação de Pell</i>	108
Tabela 23 – Resposta desejada para o item 04 do questionário 01	126
Tabela 24 – Relações entre α e β encontradas pelos alunos.	149

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	Objetivo Geral	24
1.2	Objetivos Específicos	24
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E METODOLÓGICA	27
2.1	Didática da Matemática: fundamentação geral	27
2.1.1	<i>Didática da Matemática Francesa: Epistemologia do conhecimento matemático</i>	27
2.1.2	<i>Transposição Didática e Contrato Didático</i>	30
2.2	Teoria das Situações Didáticas	33
2.3	Engenharia Didática Clássica	37
2.3.1	<i>Análises Prévias</i>	40
2.3.2	<i>Análise a Priori</i>	42
2.3.3	<i>Experimentação e TSD</i>	44
2.3.4	<i>Análise a Posteriori, Validação interna e externa</i>	44
3	ANÁLISES PRÉVIAS	47
3.1	Recorrências: Considerações Gerais	47
3.1.1	<i>Recorrências</i>	49
3.1.2	<i>Recorrências Lineares</i>	52
3.1.3	<i>Recorrências lineares homogêneas de 2ª ordem: estrutura das soluções</i>	55
3.2	A Sequência de Pell	65
3.2.1	<i>Propriedades iniciais</i>	66
3.2.2	<i>Abordagens matriciais</i>	73
3.2.3	<i>Convergência de p_{n+1}/p_n</i>	79
3.3	Funções Geradoras	84
3.4	Polinômios de Pell	90
3.4.1	<i>Propriedades de $[p_n(x)]_{n \in \mathbb{Z}}$ e $[q_n(x)]_{n \in \mathbb{Z}}$</i>	94
3.4.2	<i>Representação Matricial para $[p_n(x)]_{n \in \mathbb{Z}}$</i>	98
3.4.3	<i>Sobre propriedades de convergência de $[p_n(x)]$</i>	100
3.5	Contexto histórico	102
3.5.1	<i>Aparições na antiguidade e aproximações à $\sqrt{2}$</i>	102
3.5.2	<i>John Pell, a Equação de Pell e a Sequência de Pell</i>	106
3.6	Contribuições recentes: Desenvolvimento histórico contemporâneo	116
4	ANÁLISE A PRIORI E EXPERIMENTAÇÃO	119
4.1	Descrição do lócus de experimentação e do público-alvo	120
4.2	Construção das Situações Didáticas	121
4.3	Descrição dos questionários e variáveis microdidáticas	123
4.3.1	<i>Situação Didática 01</i>	123

4.3.2	<i>Situação didática 02</i>	126
4.3.3	<i>Situação Didática 03</i>	128
4.3.4	<i>Situação Didática 04</i>	129
4.4	Experimentação	131
5	ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO INTERNA	133
5.1	Análise <i>a posteriori</i> da Situação Didática 01	133
5.2	Análise <i>a posteriori</i> da Situação Didática 02	141
5.3	Análise <i>a posteriori</i> da Situação Didática 03	154
5.4	Análise <i>a posteriori</i> da Situação Didática 04	160
5.5	Síntese do capítulo	163
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	165
	REFERÊNCIAS	169
ANEXO A	PARECER DO COMITÊ DE ÉTICA	177
ANEXO B	TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARE- CIDO	181
ANEXO C	PUD DA DISCIPLINA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA - COMPONENTE CURRICULAR DO CURSO DE LI- CENCIATURA EM MATEMÁTICA DO IFCE, <i>CAMPUS</i> <i>Fortaleza</i>	185
APÊNDICE A	QUESTIONÁRIOS	187

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho elaboramos uma proposta de Engenharia Didática para o ensino e estudo de *sequência de Pell* e seus modelos de generalização, utilizando a Teoria das Situações Didáticas como apoio a análise de seções de ensino.

Usualmente, sequências e recorrências são pouco abordadas nos cursos de licenciatura em matemática, seja nas disciplinas de história da matemática ou em qualquer outra parte do curso. Em geral, livros de história da matemática dão ênfase aos fundamentos da matemática grega e história do cálculo, abordando apenas de passagem a *sequência de Fibonacci* e algumas de suas propriedades mais elementares (ALVES, 2018). Entendemos neste trabalho que a compreensão do percurso histórico contribui para a compreensão da natureza da matemática, da evolução de sua epistemologia, inserida dentro de um contexto social e de acordo com as imposições culturais sobre os matemáticos em suas respectivas épocas.

Escolhemos como objeto matemático alvo de nossa pesquisa a *sequência de Pell*, por suas ricas conexões históricas, com manifestações mais longínquas datadas em 800 a.C., através de algoritmos de aproximação a $\sqrt{2}$ e modelos primevos de soluções para a *equação de Pell*: $x^2 - 2y^2 = 1$. Entretanto a *sequência de Pell* ainda se mostra objeto de pesquisas em matemática pura e aplicada recentes, contanto com diversas manifestações e modelos matemáticos, bem como conexões com a álgebra e teoria dos números. Assim, a *sequência de Pell* se apresenta como um objeto matemático ainda em processo de elaboração epistêmica e histórica, permitindo a apreciação da construção do conhecimento matemático.

Compreendemos desse modo nosso intento de elaborar uma Engenharia Didática para o ensino e estudo da sequência de Pell como o processo de estudo epistêmico, axiológico e histórico da *sequência de Pell*, resultando em uma transposição didática, seguido da elaboração, aplicação e observação de sequências de ensino que explorem o que chamamos de obstáculos epistemológicos, com o objetivo de viabilizar a descoberta de resultados e teoremas através da exploração de tais obstáculos, de acordo com as características intrínsecas da Engenharia Didática.

A Didática da Matemática, como ciência particular e autônoma, emergiu de forma orgânica em diversos grupos de pesquisa espalhados pelo mundo, principalmente nos Estados Unidos e Europa, por necessidade de compreender os processos particulares de ensino-aprendizagem para ciências e matemática. Em um espaço de tempo de aproximadamente 70 anos, a contar da década de 50, as diversas Didáticas das Ciências - Didática da Matemática, Física, Biologia e Química emergiram como ciências independentes e específicas das necessidades de ensino de cada área. (ADÚRIZ-BRAVO, 1999; ALVES, 2017b)

Em particular, nossa referência em todo trabalho será a escola francesa de Didática da Matemática, cuja abordagem apresenta forte apelo construtivista e destaca o papel central da epistemologia particular do conhecimento matemático nos processos de ensino. Sobre tal

proposta de abordagem (construtivista com ênfase na epistemologia da matemática), devemos esclarecer alguns conceitos fundamentais.

O construtivismo de Jean Piaget, origem da abordagem construtivista, é focado na construção dos conhecimentos científicos e matemáticos. Os experimentos de Piaget visavam observar o desenvolvimento das habilidades de inferência lógica e percepção de propriedades físicas por parte das crianças e adolescentes. Portanto, os processos de equilíbrio e desequilíbrio descritos por Piaget são preferencialmente voltados para a interpretação da construção de conhecimentos das ciências naturais e matemática, de modo que a escolha da abordagem construtivista como um dos fundamentos específicos é uma escolha natural, embora não única, para constituir uma Didática da Matemática como ciência.

Isto posto, a abordagem construtivista que emerge na Didática da Matemática, nomeada de *construtivismo didático* por Almouloud (2014, p. 24) se utiliza da mesma noção fundamental de desenvolvimento do construtivismo Piagetiano, com a mudança de perspectiva do desenvolvimento do sujeito para interações com o ambiente de ensino e seus pares, diferentemente do construtivismo original de Piaget, que focava a observação das interações no próprio sujeito.

O objetivo nesse caso é determinar os modos de aquisição de conhecimento, levando em consideração a organização do ambiente didático e a qualidade das interações entre seus sujeitos, ainda com as noções de desequilíbrio e equilíbrio propostas por Piaget, onde o aluno é confrontado com situações agora oferecidas pelo ambiente de ensino e pelo professor, de modo que seus modelos e esquemas internos não possuem representação completa e satisfatória para o problema ou situação apresentada, obrigando o mesmo a readequar seus esquemas mentais para dar conta da nova situação. Note que tal como o construtivismo de Piaget, aqui existe a necessidade da ação do estudante com e sobre seus pares, bem como sua interação com o meio adquire caráter essencial.

Esta abordagem exige então observação de obstáculos aos esquemas mentais dos alunos, de modo a permitir o processo de construção do novo conhecimento. Brousseau (2008) resgata o conceito de *obstáculo epistemológico* de Bachelard (1996) para modelar o aparecimento de obstáculos inerentes a natureza do conhecimento matemático que se contraponham aos esquemas prévios dos alunos. Almouloud (2014) esclarece ainda que existem 4 tipos principais de obstáculos que podem se manifestar: epistemológico, didático, psicológico e ontológico. Desses, o de controle acessível e universal seria o obstáculo epistemológico.

Portanto, por sua relação com a natureza do conhecimento específico que se deseja ensinar, a matemática e por ser frequentemente desejável, pois sua aparição e solução é fonte direta de construção do conhecimento, o obstáculo do tipo epistemológico possui destaque especial na Didática da Matemática.

O processo resumidamente descrito até este ponto depende da adaptação do conhecimento científico academicamente instituído, no caso específico da adaptação da matemática produzida por matemáticos profissionais para o ensino na escola básica. Este processo é cha-

mado de Transposição Didática e envolve um processo de transformação e reinterpretação do conhecimento, criando um conhecimento novo, no entanto, ainda fortemente embasado e atrelado ao conhecimento original. A Transposição Didática é um conceito fundamental e central aos objetivos da Didática da Matemática.

Finalmente, a noção de Engenharia Didática emergiu da escola francesa de Didática da Matemática, em meados dos anos 80, como resposta a uma abordagem de particular a investigação em didática da matemática. Trata-se de uma das várias abordagens metodológicas surgidas no interior da escola francesa e sua característica fundamental é a tentativa de conciliação entre o rigor científico e a necessidade de trabalho empírico, por parte do pesquisador/professor dentro do ambiente de aula, de difícil controle (ARTIGUE, 1996; BROUSSEAU, 2008).

A Engenharia Didática possui forte apelo experimental e está intimamente associada a Teoria das Situações Didáticas, abreviadamente TSD, teoria de ensino também pertencente a vertente francesa da Didática da Matemática. O objetivo da TSD é descrever a dinâmica em sala de aula, durante uma sessão de ensino de matemática, de um ponto de vista construtivista e tomando como elementos fundamentais as interações entre alunos e o meio de ensino, este último dando origem ao termo consagrado *milieu*.

O público alvo para aplicação e observação das sequências didáticas são os alunos da disciplina história da matemática do curso de licenciatura em matemática do IFCE - *campus* Fortaleza. Tal aplicação e observação foi registrada e aprovada pelo comitê de ética local. A aplicação ocorreu no horário corrente da disciplina, de modo que o estudo da *sequência de Pell* ficou acomodado como parte do percurso curricular de tal disciplina.

A escolha do público alvo foi efetuada após a análise da grade curricular do curso de licenciatura em matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE, *campus* Fortaleza. Observamos os objetivos e características do público em diferentes componentes curriculares. Tal análise será pormenorizada no capítulo 5. A escolha resultou em um público reduzido, de tratamento e observação mais simples, porém com objetivos da pesquisa alinhados com os objetivos curriculares do público alvo escolhido, garantindo o engajamento dos participantes.

Levando em consideração tudo o que foi exposto, nossa pergunta norteadora é: *Como realizar uma transposição didática para a sequência de Pell e seus modelos matriciais e polinomiais, de modo a promover um processo de ensino que incentive a descoberta de resultados e teoremas por parte dos alunos?*

E nossa hipótese de pesquisa fica sedimentada na seguinte afirmação: *O estudo sobre o objeto matemático conhecido como sequência de Pell, com transposição didática efetuada segundo os preceitos da TSD, é capaz de mobilizar o pensamento intuitivo e inferencial do estudante, bem como atitude investigativa, conduzindo-o a descoberta de teoremas e resultados.*

Na tentativa de emparelhar nossa pergunta norteadora e hipótese de pesquisa, surgem os seguintes objetivos, geral e específicos.

1.1 Objetivo Geral

- Propor uma Engenharia Didática para objeto matemático denominado *sequência de Pell*, bem como seus diversos modelos de generalização, através de um conjunto de situações didáticas segundo os pressupostos da Teoria das Situações Didáticas.

1.2 Objetivos Específicos

- Estudar e investigar as relações matemáticas, epistemológicas e históricas da *sequência de Pell* e seus modelos de generalização;
- Construir sequências didáticas que abordem as características da *sequência de Pell* e seus modelos de generalização, explorando os obstáculos epistemológicos encontrados;
- Analisar as estratégias e manifestações dos alunos durante a aplicação das sequências didáticas construídas, segundo o paradigma da Engenharia Didática.

Portanto, este trabalho se apoia nas diretrizes da metodologia de pesquisa Engenharia Didática. Este trabalho se divide em 6 capítulos.

O capítulo 1 corresponde a esta Introdução.

O capítulo 2 trata dos aspectos relacionados as teorias de ensino e didática da matemática, mais especificamente descreve a metodologia de pesquisa, a Engenharia Didática e a teoria de ensino escolhida para análise dos comportamentos dos alunos, a Teoria das Situações Didáticas, bem como de aspectos pertencentes a vertente francófona da Didática da matemática como Obstáculos Epistemológicos, Contrato Didático e Transposição Didática, necessário para a correta compreensão da Engenharia Didática e Teoria das Situações Didáticas.

No capítulo 3 realizamos a análise epistêmica e histórica dos objetos matemáticos que serão alvo da transposição didática da *sequência de Pell*, acompanhados dos seguintes modelos de generalizações: generalização para índices inteiros, representações matriciais e representações polinomiais. Procuramos expor em um primeiro momento a fundamentação matemática da *sequência de Pell*, de modo a exibir de modo formal as interrelações matemáticas, do ponto de vista da academia, entre as diversas representações e manifestações deste objeto matemática. Isso é necessário para dar início ao processo de transposição didática. Em seguida, a caracterização histórica coloca em contexto a exposição matemática, permitindo a exploração de possíveis obstáculos epistemológicos.

No capítulo 4 encontramos a descrição para construção das sessões de ensino e das situações didáticas, constituindo a fase de Análise A Priori da metodologia de pesquisa utilizada neste trabalho, a Engenharia Didática. As sessões de ensino foram construídas levando em consideração a exposição epistêmica e histórica do capítulo 3, bem como a TSD, teoria de ensino utilizada como base para executar e analisar as sessões de ensino.

No capítulo 5 organizamos e descrevemos os dados recolhidos durante as sessões de ensino, realizando a Análise a Posteriori e Validação, últimas etapas da Engenharia Didática, comparando com as previsões feitas durante a etapa de Análise a Priori. A partir da comparação entre o que foi previsto e o que obtemos, podemos inferir se o controle das variáveis escolhidas foi bem sucedido. No caso do presente trabalho, confirmamos a hipótese de pesquisa, atingindo os objetivos propostos.

Por fim, finalizamos com as considerações finais no capítulo 6.

A seguir, iniciamos a descrição da metodologia de pesquisa e de todos os elementos pertencentes a Didática da Matemática utilizados para embasar, organizar, realizar e validar a pesquisa.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E METODOLÓGICA

2.1 Didática da Matemática: fundamentação geral

Sobre Didática da Matemática, D'Amore (2007a, p. 184) define como "a arte de conceber e conduzir condições que podem determinar a aprendizagem de um conhecimento matemático por parte de um sujeito". Almouloud (2019) é mais específico ao delimitar Didática da Matemática como:

[...] a ciência da educação cujo propósito é o estudo de fenômenos de ensino e de aprendizagem, mais especificamente, é o estudo de situações que visam à aquisição de conhecimentos/saberes matemáticos pelos alunos ou adultos em formação, tanto do ponto de vista das características dessas situações, bem como do tipo de aprendizagem que elas possibilitam. (ALMOULOUD, 2019, p. 148)

Mas nem sempre foi clara a necessidade de uma Didática ou campo teórico específico para tratar dos problemas específicos do ensino e aprendizagem em matemática. Adúriz-Bravo (1999) narra brevemente sobre o desenvolvimento histórico da Pesquisa em Didática da Matemática e Didática das Ciências, descrevendo que até meados a década de 50, as pesquisas sobre ensino-aprendizagem em ciências e matemática eram escassas e desconexas, realizadas por estudiosos de variados domínios, não havendo corpo teórico autônomo.

Ainda segundo Adúriz-Bravo (1999), com a corrida tecnológica armamentista iniciada nesse período entre as potências, ocorreu um maior interesse e fomento a alfabetização científica, reunindo assim pesquisadores interessados em um grupo coeso, mas ainda com um corpo teórico baseado principalmente por conhecimentos periféricos como a pedagogia e psicologia.

Apesar de uma maior produção de pesquisa, havia ênfase na pesquisa quantitativa com o objetivo na intervenção direta e rápida em sala de aula, já que existia um senso de urgência na formação de cidadãos capazes de lidar e produzir tecnologia. Ou seja, não existiam maiores preocupações com a natureza epistemológica dos processos envolvidos. (ADÚRIZ-BRAVO, 1999)

Nesse ponto, ocorreram em diversas partes do mundo diferentes abordagens e linhas de desenvolvimento para a Didática da Matemática. Nosso estudo utiliza a Didática da Matemática desenvolvida pela escola francesa, de forte apelo construtivista e ênfase na epistemologia da matemática.

2.1.1 Didática da Matemática Francesa: Epistemologia do conhecimento matemático

A partir deste ponto, sempre que falarmos sobre Didática da Matemática, estaremos nos referindo a Didática da Matemática pertencente a abordagem da escola francesa, pois serão os pressupostos adotados por esta escola que adotaremos no presente trabalho.

Entre a década de 60 e 70, seguindo a tendência da abordagem cognitivista de Piaget, na França ocorre um adensamento do trabalhos de pesquisa para delinear e compreender melhor aspectos epistêmicos e cognitivos relacionados ao ensino de matemática. Como consequências a essas novas preocupações, ocorreram a criação dos IREM (Instituto de Pesquisa sobre Ensino da Matemática) e o início do movimento da Matemática Moderna. (ALMOULOUD, 2019, p. 148)

Ainda segundo (ALMOULOUD, 2019) a abordagem construtivista inaugurada por Piaget aborda um domínio específico de conhecimento: a construção do conhecimento lógico-matemático e científico. Segundo as características de seu trabalho e levando em consideração as necessidades próprias das teorias de ensino mencionadas anteriormente, três características se destacam como marca indelével do conhecimento matemático e científico

1. A construção desses conhecimentos necessita de tempo e historicamente ocorreu em um intervalo longo de tempo, alternando entre fases de progresso e devolução;
2. Saberes altamente ramificados e interconectados. Não é possível isolar cadeias de conceitos ou relações, com o agravante que as mesmas estão em constante evolução e reelaboração;
3. Tais saberes foram e são essenciais para nosso desenvolvimento científico, técnico e tecnológico, sendo essenciais para compreensão do mundo.

O grande sucesso da Epistemologia Genética de Jean Piaget ao explicar o processo de construção do conhecimento e inteligência, com ênfase especial ao conhecimento matemático volta a atenção dos pesquisadores para a gênese do conhecimento matemático como componente necessário para o entendimento dos processos de ensino e força um olhar mais atento sobre esta epistemologia particular, a colocando em posição de destaque nas teorias de ensino surgidas dali em diante na Didática da Matemática.

A abordagem construtivista, para a aquisição de conhecimentos, foi desenvolvida com o objetivo de estudar os processos de ensino e da aprendizagem de conceitos e noções matemáticas. Essa abordagem foi pensada a partir do modelo piagetiano de desenvolvimento da inteligência em relação à representação do mundo, explorando a ideia de que esse desenvolvimento se faz por adaptação a situações novas para o sujeito, ou seja, situações para as quais os conhecimentos e as competências disponíveis não se mostram suficientes. (ALMOULOUD, 2019, p. 146)

Sobre isso, Almouloud (2019) apresenta duas rupturas importantes para um novo delineamento do campo de estudos para a Didática Matemática francesa.

A primeira ruptura colocou a matemática como a essência dos fenômenos didáticos. Esse ruptura veio do reconhecimento de que a epistemologia própria do conhecimento matemático possuía influência decisiva nos processos de ensino de matemática.

A segunda ruptura é motivada pela natureza da ciência didática que surge e é relacionada pelo problema de como tratar e integrar observações e experimentações organizadas, "ruptura que levou os pesquisadores a explicitar modelos teóricos e a submeter esses modelos à lei de uma verdadeira epistemologia experimental". (ALMOULOUD, 2019, p. 149). Brousseau (2008) foi um dos principais expoentes para essas mudanças, consumada com a elaboração da teoria de ensino denominada Teoria das Situações Didáticas.

Com o reconhecimento das necessidades e peculiaridades próprias da matemática e seu processo de ensino, passa-se a considerar a Didática da Matemática como campo de pesquisa autônomo, possuindo dimensões de análise tanto epistemológica quanto histórica, afim de englobar aspectos da natureza do saber matemático e suas relações com a construção do conhecimento entre os sujeitos e o meio em que se dá essa construção. (ADÚRIZ-BRAVO, 1999; ALMOULOUD, 2014; ALMOULOUD, 2019)

Almouloud (2019, p. 149) ainda chama a atenção para o fato da abordagem de Brousseau (2008), nos anos 70, cria uma mudança de paradigma, de natureza epistemológica, sobre o conhecimento matemático e sua possibilidade de compreensão apenas através das atividades que o mesmo (conhecimento matemático) realiza, ou seja, através do tipo de problema que este conhecimento se presta a responder. "A matemática é, antes de tudo, uma atividade que se realiza em situação e contra um meio." (ALMOULOUD, 2019, p. 149)

Todo esse movimento de teorização em torno da Didática Matemática cria diversas outras abordagens e modelizações das atividades de ensino (ALMOULOUD, 2019), as principais delas listadas abaixo:

- A Teoria das Situações Didáticas (Guy Brousseau)
- A Teoria Antropológica do Didático (Yves Chevallard)
- A Dialética Ferramenta-Objeto e jogos de quadros (Régine Douady)
- A noção de Contrato Didático (Guy Brousseau)
- A noção de registro de representação semiótica (Raymond Duval)
- A Teoria dos Campos Conceituais (Gérard Vergnaud)
- Gênese instrumental e Gênese documental
- Paradigmas e Espaço de Trabalho Geométrico

Bem como dá origem a diversas metodologias de pesquisa (ALMOULOUD, 2019, p. 145)

- A metodologia de Engenharia Didática (Michele Artigue)
- A Engenharia de segunda geração (Marie-Jeanne Perrin-glorian)
- Engenharia do Percurso de Estudo e de Pesquisa – PEP (Yves Chevallard)

- Engenharia de formação (Marc Bailleul)

A explicação para essa grande variedade de teorias se dá por conta de diferentes preferências acerca de teorias sociais sobre teorias cognitivas. (ALMOULOUD, 2019, p. 148) Todas essas teorias de ensino e metodologias de pesquisa possuem em comum a ênfase pela análise da epistemologia do conhecimento matemático como necessária para o processo de ensino e processo de experimentação integrado com as características cognitivas e didáticas dos alunos. No entanto, esses elementos atendem a articulações particulares a cada teoria e metodologia específica.

A seguir, discutiremos alguns conceitos fundamentais a Didática da Matemática francófona.

2.1.2 Transposição Didática e Contrato Didático

Dois conceitos fundamentais que permeiam a Didática da Matemática são o de Transposição Didática e Contrato Didático.

Em primeiro lugar, quando falamos em Epistemologia da Matemática, estamos falando do saber matemático instituído pelo trabalho de matemáticos profissionais ao longo da história, dentro dos métodos de validação canônicos aceitos pela comunidade de matemáticos.

Esse saber não possui a mesma apresentação e meios de validação necessários ao saber escolar. Aliás, esse conhecimento não foi elaborado com esse objetivo. Ou seja o professor e o sistema de ensino precisam empreender um esforço de escolha e depuração desses conhecimentos de acordo com os objetivos de ensino e em conformidade com as características daquele a quem vai se ensinar. Moreira (2004) nos ajuda a esclarecer essa diferença

Para a matemática científica, as definições formais e as demonstrações rigorosas são elementos importantes tanto durante o processo de conformação da teoria — nos momentos em que a comunidade avalia e eventualmente acata um resultado novo, garantindo-se, então, a sua incorporação ao conjunto daqueles já aceitos como válidos — quanto no processo de apresentação sistematizada da teoria já elaborada. (MOREIRA, 2004, p. 24)

No caso da matemática escolar, dois elementos fundamentais estão permanentemente em cena [...] O primeiro elemento se refere ao fato de que a “validade” dos resultados matemáticos a serem discutidos no processo de escolarização básica não está posta em dúvida, ao contrário, já está garantida, a priori, pela própria matemática acadêmica. [...] o segundo elemento [...] refere-se à aprendizagem e, portanto, ao desenvolvimento de uma prática pedagógica visando à compreensão do fato, à construção de justificativas que permitam ao aluno utilizá-lo de maneira coerente e conveniente na sua vida escolar e extra-escolar. (MOREIRA, 2004, p. 24)

No entanto, os diversos sistemas de ensino esperam justamente a transmissão de um conhecimento que detenha a certeza do saber científico em um ambiente que formata as características do saber escolar. A necessidade da transição entre esses ambientes e sujeitos é que dá origem ao conceito de Transposição Didática.

O conceito de Transposição Didática encerra em si o processo de tradução e adaptação do conhecimento científico para o saber ensinável em um determinado contexto a um público bem definido. D'Amore (2007b, p. 225) coloca que "o conceito de transposição didática nasce da relatividade do saber no interior do qual se apresenta", deixando claro que as características manifestadas e apresentadas pelo conhecimento dependem do contexto ao qual o mesmo se apresenta. D'Amore (2007b) explica que o conceito foi originalmente Yves Chevallard, entre o final de 1979 e início de 1980. Chevallard (1982) coloca:

"Para que o ensino de tal elemento seja possível, esse elemento deve ter sofrido certas deformações, que o tornará apto para o ensino. O conhecimento ensinado [...] é necessariamente diferente do conhecimento inicialmente designado para ser ensinado.(CHEVALLARD, 1982, p. 3, tradução nossa)¹

Ocorre no processo de transposição didática uma transformação de conhecimentos. O conhecimento a ser ensinado não é o mesmo conhecimento acadêmico, mas existe uma conexão epistêmica entre eles de modo que o conhecimento escolar é validado pelo conhecimento científico, sem no entanto se reduzir ao mesmo. Não se trata de simplesmente simplificar, mas de construir novos artefatos que possuam em sua essência uma epistemologia comum ao conhecimento científico.

Mas ainda há outro nível a se considerar. Existe uma diferença entre o conhecimento a ser ensinado e aquele que foi efetivamente ensinado. Assim o processo de transposição didática encerra em si dois processos de reelaboração: Entre o saber científico e o saber a ser ensinado e entre o saber a ser ensinado e o saber ensinado (Figura 1).

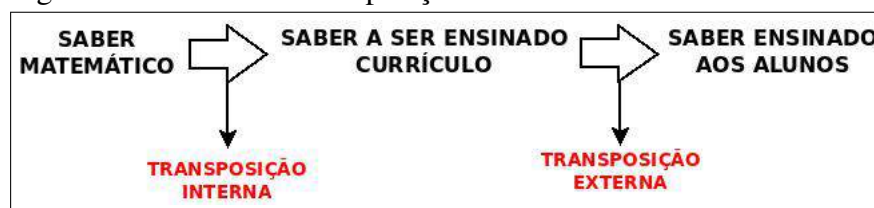
Yves Chevallard chama a 1ª transformação de transposição interna (PERRENOUD, 1998, p. 488) e corresponde a conversão dos conhecimentos acadêmicos e científicos nos currículos dos sistemas de ensino em operação. Já a 2ª transformação é o ato executado pelo professor de tomar esses currículos e efetuar seu ensino de fato, nomeada de transposição externa, realizando uma série de escolhas relativas a abordagem metodológica, meios linguísticos utilizados, materiais oferecidos, com base no perfil socio-cognitivos dos alunos e dos recursos disponíveis. Alves (2017b) esclarece sobre essas duas etapas no seguinte trecho:

No nível um, divisamos um conjunto de saberes científicos e práticas atuais elaboradas e assumidas oficialmente numa sociedade. No nível dois, [...] observamos o currículo formal, seus objetivos e programas presentes nas instituições de ensino e formação. No nível subsequente [...], constamos um currículo efetivo, seus conteúdos efetivamente mobilizados e veiculados por meio do ensino e, por fim, no último nível, os elementos que consubstanciam aprendizagens efetivas e, desejavelmente duráveis, sólidas e pretensamente permanentes dos estudantes.(ALVES, 2017b, p. 300)

Outra noção importante, que aparece em geral durante a passagem da transposição externa é a de Contrato Didático. A noção de Contrato Didático evoca uma espécie de acordo

¹ Pour que l'enseignement de tel élément de savoir soit seulement possible, cet élément devra avoir subi certaines déformations, qui le rendront apte à être enseigné. Le savoir-tel-qu'il-est-enseigné [...] est nécessairement autre que le savoir-initialement-désigné-comme-devant-être-enseigné, le savoir à enseigner.

Figura 1 – Modelo de Transposição Didática



Fonte: Reconstrução a partir de D'Amore (2007b, p. 223)

pedagógico entre alunos e professor durante a interação no ambiente de ensino. No entanto, Brousseau (2008) deixa claro que, para que as situações de ensino aconteçam a contento, tal contrato não deve ser explícito. É mais similar a um acordo fictício, constituído pelas expectativas não declaradas do aluno a respeito do papel e obrigações do professor e das expectativas não declaradas do professor em relação a postura de seus alunos diante das atividades postas. Mais precisamente, é o que cada parte imagina que a parte oposta espera de si que induz o movimento em torno da atividade de ensino, pelas expectativas de atender o que se imagina que o outro espera.

[...] o professor, por exemplo, não pode dizer explicitamente, e de antemão, o que o aluno terá que fazer diante de um problema, sem tirar-lhe a possibilidade de manifestar ou adquirir o conhecimento correspondente. O professor não pode se comprometer a "fazer o aluno entender" um conhecimento e, muito menos, fazer com que este se produza: ninguém sabe com "se faz" uma matemática nova e, menos ainda, como se pode "fazer com que seja feita" de maneira acertada. De forma que a relação didática não pode formar um contrato. (BROUSSEAU, 2008, p. 73)

Contudo, a ilusão de que existe um contrato é indispensável para que a relação aconteça e seja, eventualmente, bem sucedida. Cada um - o professor e o aluno - imagina o que o outro espera dele e o que cada um pensa do que o outro pensa... e essa ideia cria as possibilidades de intervenção [...]. (BROUSSEAU, 2008, p. 74)

Sobre o Contrato Didático, Almouloud (2014, p. 90) nos dá 4 aspectos importantes que o caracterizam:

1. O objetivo do Contrato Didático é essencialmente a aquisição de saberes por parte do aluno.
2. O correto funcionamento do Contrato Didático depende de inúmeras variáveis e elementos do processo de ensino, como os objetivos de formação para os alunos, a epistemologia do professor e suas respectivas escolhas didáticas, o tipo de avaliação que se pretende executar, dentre outras.
3. O Contrato Didático pode evoluir ao longo do processo de ensino, já que não depende exclusivamente das convenções sociais que regem também a interação entre professor e

aluno. Mesmo que essas convenções permaneçam fixas, o Contrato Didático é implicitamente atualizado durante o processo de ensino, em torno das necessidades do saber em jogo.

4. O Contrato Didático pode ser fonte das dificuldades de aprendizagem, quando incorretamente administrado pelo professor ou aluno. Quando isso acontece, o Contrato Didático, que antes estava implícito, vem a tona e é renegociado.

Apesar de se constituir como relação que depende principalmente das necessidades de interação entre professor e aluno, o professor é a parte que possui como obrigação a administração do Contrato Didático.

O Contrato Didático evolui em conjunto com as necessidades do saber que se ensina. No entanto, a renegociação contínua do mesmo pode gerar desvios indesejados e é responsabilidade do professor administrar atentamente, evitando mudanças desnecessárias no pacto implícito com seus alunos.

A negociação continua do contrato didático tem por consequência [...] a descaracterização dos conteúdos matemáticos e dos objetivos de aprendizagem, pois o professor, querendo que seus alunos acertem, tende a facilitar a tarefa de diferentes maneiras: várias explicações, proposta de problemas decompostos em subquestões, ensino de algoritmos, etc.(ALMOULOUD, 2014, p. 93)

Algumas rupturas do Contrato Didático são desejáveis para que aconteça o processo de ensino. Por exemplo, uma ruptura de Contrato Didático comum acontece no ensino fundamental, no sistema brasileiro em geral no 7º ano do ensino fundamental, quando os alunos são introduzidos a ideia da álgebra e começam a lidar com variáveis abstratas, como x e y . Antes disso, todos os problemas envolviam a formulação numérica direta, até que de repente pede-se ao aluno que descubra valores desconhecidos lidando com letras e aplicando a estas as mesmas propriedades e operações utilizadas em números (ALMOULOUD, 2014, p. 92).

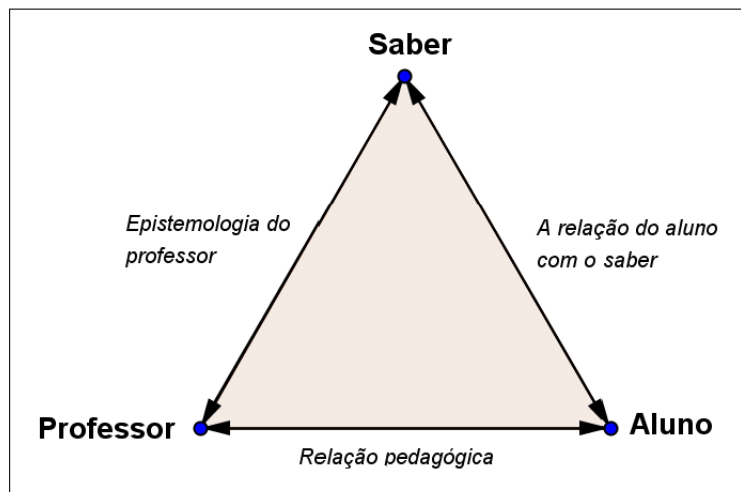
Ocorre aí uma quebra de Contrato Didático, ocasionada pela necessidade de reelaboração dos saberes, pois estava implícito ao aluno que problemas de matemática tratavam de números, não de letras.

2.2 Teoria das Situações Didáticas

Nossas aulas-experimentos serão projetadas segundo as recomendações de Brousseau (2008) e sua teoria para o ensino de matemática. O mesmo pesquisador define situação didática como "um modelo de interação do sujeito com um meio determinado"(BROUSSEAU, 2008, p. 21) . E uma situação didática consiste em um conjunto de situações reprodutíveis, com objetivo pedagógico, que permitem a organização do espaço de sala de aula, proporcionando momentos de interação entre: o professor, o aluno e o saber, em um meio organizado, que nomeamos de *milieu*.

As relações estabelecidas entre professor-aluno-saber podem ser representadas naquilo que Brousseau (2008) denomina por triângulo didático, apresentado na figura 2.

Figura 2 – Relações professor-aluno-saber descritas pela TSD



Fonte: Brousseau (2008), adaptado.

Neste triângulo, o *milieu* pode ser representado pela área do triângulo, que media as relações entre professor, aluno e saber. Na verdade, o *milieu* é essencial a prática de ensino, pois é a sua correta construção que irá permitir o processo de aprendizagem.

Sobre isso, a teoria das situações advoga que o professor tem que provocar no aluno comportamentos, que o próprio aluno, a fim de manifestar seu conhecimento, teria que adotar autonomamente. Para resolver tal paradoxo, a solução defendida por Brousseau (2008) consiste em envolver um terceiro elemento, o *milieu*, e fazer com que a resposta do aluno se refira exclusivamente às necessidades do *milieu*, que o professor conhece bem, ou que predispõe para esse fim. A arte do professor está então na organização de uma relação entre aluno e *milieu* (D'AMORE, 2007a).

Antes de enumerar os tipos de situações didáticas presentes na TSD, precisamos definir o que seria situação adidática. Brousseau (2008) define como de uma situação em que a aprendizagem ocorre através do esforço independente do aluno, em certos momentos de aprendizagem. É quando o aluno, por seus próprios meios e interesses, trabalha no problema sem necessitar de nenhuma motivação externa. Essa situação é essencial a TSD e a própria engenharia didática, pois é nessa situação em que o aluno pode construir e realizar descobertas por seus próprios meios.

Como já mencionado por D'Amore (2007a), o ponto fundamental para permitir o funcionamento da situação adidática é a cuidadosa preparação do *milieu*, de modo a conduzir o aluno as descobertas desejadas, no entanto, de forma natural. Assim, se faz adequado também discutir sobre os conceitos contrato didático e devolução.

Sobre contrato didático, devemos entender como o conjunto explícito ou implícito de obrigações e expectativas existentes entre alunos e professor, acerca do andamento dos traba-

lhos escolares e da condução do processo de ensino. O *milieu* sofre significativas influências do contrato didático, como também pode modificá-lo.

A *devolução* é o processo de transferência e engajamento do aluno no processo de aprendizagem, fazendo o mesmo responsável pelo processo de solução da situação-problema e descoberta dos conhecimentos envolvidos. A *devolução* está vinculada ao contrato didático e depende diretamente da qualidade do *milieu*. A *devolução* é essencial para que todas as situações didáticas sigam com sucesso. Se a *devolução* falhar, as outras fase ficaram comprometidas. Pode ocorrer também que o aluno não apresentar uma devolução ao professor, devido ao problema proposto não ter despertado o interesse do aluno, por ser fácil ou de dificuldade acima das capacidades do mesmo e deve ser sempre repetida caso o professor perceba uma queda no engajamento dos alunos.

Os tipos de situações didáticas na TSD, segundo Brousseau (2008) são:

1. **Situação de Ação:** Nesta fase, o aluno se debruça sobre o problema em questão. O problema proposto deve ser suficientemente desafiador para que o aluno não use esquemas prontos em sua resolução, mas não complexo demais de forma que o aluno não possa abordá-lo. Se espera do aluno uma abordagem experimental, sem formalismos ou linguagem matemática institucionalizada. As primeiras soluções aparecem, geralmente, por tentativa e erro.
2. **Situação de Formulação:** A interação com o meio permite ao aluno a elaboração de algumas conjecturas e a identificação de padrões simples, mas sem a obrigatoriedade de linguagem formal. A troca de informações entre os alunos é muito importante. Pela falta de linguagem adequada para descrever o problema, pode ocorrer ambiguidade, redundância, uso de metáforas, criação de termos semiológicos novos, falta de pertinência e de eficácia na mensagem, dentro de retroações contínuas, sem que isso deva ser encarado como negativo.
3. **Situação de Validação:** Este é o momento em que os alunos envolvidos trocam experiências e tentam convencer uns aos outros com respeito as soluções encontradas. Aqui, os alunos irão precisar fazer uso de uma linguagem mais formal e metódica, próxima a linguagem matemática. Será necessário também utilizar ferramentas e mecanismos de demonstração. Brousseau (2008) esclarece que nessa fase "o emissor já não é um informante, mas um proponente, e o receptor, um oponente." Assim os alunos devem debater, argumentar e elaborar demonstrações e/ou justificativas lógico-matemáticas, ou exibir contra-exemplos que questionem as conclusões de seus pares, com o fim assentar as estratégias e conhecimentos encontrados durante as atividades.
4. **Situação de Institucionalização:** Aqui o professor assume o papel que tradicionalmente lhe é conferido. O professor toma novamente para si a responsabilidade pela construção do conhecimento e realiza a formalização e organização das idéias. Brousseau (2008,

p 31) no explica que "[...] no decorrer das experiências desenvolvidas [...], vimos que os professores, depois de certo tempo, precisavam ordenar um espaço. [...] tinha que dar conta da produção dos alunos, descrever os fatos observados e tudo que estivesse vinculado ao conhecimento em questão." O professor precisa oficializar os conhecimentos discutidos pela turma, contrapondo as conclusões de seus alunos.

Note que as situações (1) a (3) são todas adidáticas, ou seja, a responsabilidade de construção de soluções e conhecimento é do aluno. Somente na 4ª situação, o professor retoma para si a ação de organizar o conhecimento, revelando a intencionalidade de ensinar certo conteúdo.

Devemos chamar a atenção para o fato de que, apesar da *devolução* não se constituir em um tipo de situação, mas sim de um processo de engajamento que permeia todo o trabalho, ela representa o movimento complementar a situação de institucionalização. O processo de devolução propõe atividade dos alunos, com caráter investigativo de modo que os alunos forneçam estruturas matemáticas progressivamente mais elaboradas e melhor fundamentadas aos colegas e ao professor. Já a Situação de Institucionalização aponta para o movimento contrário, onde o professor apresenta uma versão formalizada para o conhecimento construído pelos alunos, confrontando com os argumentos e estruturas construídas pelos alunos. Segundo explica Margolinas (2012), temos a partir daí dois tipos de manifestação, ditas *saber* e *conhecimento*

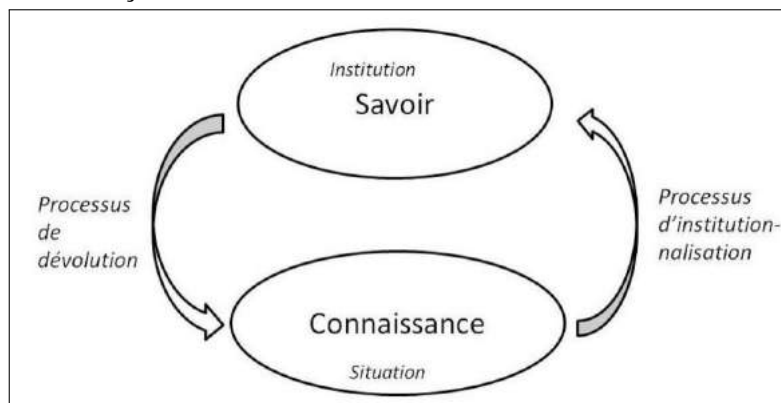
O conhecimento é o que alcança o equilíbrio entre o sujeito e o meio ambiente, o que o sujeito coloca em jogo quando investe em uma situação. É um conceito muito amplo, que inclui conhecimento corporal, conhecimento de ação, conhecimento de interação, conhecimento memorizado etc. O saber é de outra natureza, é uma construção social e cultural, que vive em uma instituição e é por natureza um texto (o que não significa que esteja sempre escrito materialmente). O saber é despersonalizado, descontextualizado, desemporalizado. É formulado, formalizado, validado e memorizado. Pode ser linearizado, o que corresponde à sua natureza textual. (MARGOLINAS, 2012, p. 7)²

Desse modo a Situação de Institucionalização delimita localmente o encerramento do processo de devolução, realizando a contraposição do conhecimento que foi produzido pelos alunos e do saber que o professor intenciona ensinar, favorecendo a construção interna dos alunos.

Uma vez escolhida a Teoria das Situações Didáticas como teoria de ensino referência para o presente trabalho, necessitamos agora de uma metodologia de pesquisa adequada. Uma escolha natural é a Engenharia Didática, metodologia de pesquisa específica para o ensino de

² Une connaissance est ce qui réalise l'équilibre entre le sujet et le milieu, ce que le sujet met en jeu quand il investit une situation. Il s'agit d'un concept très large, qui inclut à la fois des connaissances du corps, des connaissances dans l'action, des connaissances de l'interaction, des connaissances mémorisées, etc. Un savoir est d'une autre nature, il s'agit d'une construction sociale et culturelle, qui vit dans une institution et qui est par nature un texte (ce qui ne veut pas dire qu'il soit toujours matériellement écrit). Le savoir est dépersonnalisé, décontextualisé, détemporalisé. Il est formulé, formalisé, validé et mémorisé. Il peut être linéarisé, ce qui correspond à sa nature textuelle

Figura 3 – Relação entre Devolução e a Situação de Institucionalização.



Fonte: Margolinas (2012, p. 8)

matemática surgida no mesmo seio da TSD e portanto compartilhando preocupações similares bem como o construtivismo didático característico da didática da matemática francesa.

2.3 Engenharia Didática Clássica

No início da década de 80, segundo descreve Artigue (1996, p. 193), haviam dois problemas cruciais no desenvolvimento da didática matemática francesa:

- O problema das relações entre investigação, em didática da matemática, e as ações possíveis dentro de um sistema de ensino;
- A necessidade de esclarecer o papel que as "realizações didáticas" desempenham na sala de aula, no contexto da pesquisa em didática da matemática.

Segundo Artigue (1996) a noção de Engenharia Didática surgiu como necessidade de delimitar um modo de trabalho particular na pesquisa em didática da matemática na década de 80. Tal modo de trabalho tentava resolver os dois problemas cruciais acima, considerando a possibilidade de uma ação racional e previsível sobre o ensino e sobre os objetos ensináveis, admitindo no entanto a existência de alguns aspectos de difícil controle ou depuração científica, dentro do escopo desse tipo de pesquisa, obrigando o pesquisador a procurar soluções locais frequentemente dependentes do contexto ou experiência, abordagem próxima a um estudo de caso. Este modo de trabalho foi comparado ao trabalho de um Engenheiro.

[...] aquela que era comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apoia nos conhecimentos científicos do seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico mas, ao mesmo tempo, se encontra obrigado a trabalhar sobre objetos muito mais complexos do que os objetos depurados da ciência, e portanto a estudar de uma forma prática, com todos os meios ao seu alcance [...] (ARTIGUE, 1996, p. 193)

Voltando aos dois problemas cruciais, Artigue (1996) cita Chevallard (1982) para explicar mais precisamente como esses dois problemas se colocam no contexto da pesquisa em

didática matemática. No primeiro caso temos posto o problema sobre de que modo a atividade de pesquisa em didática matemática afeta o sistema de ensino de um ponto de vista global. Segundo os autores é essencial compreender os efeitos dos diferentes tipos de interferência sobre sistema de ensino, afim de manter um melhor controle sobre as variáveis estudadas. Artigue (1996) cita a opinião de Chevallard para embasar essa necessidade: "*Colocar o problema da Engenharia Didática é colocar, relacionando-o com o desenvolvimento atual e futuro da didática da matemática, o problema da ação e dos meios da ação sobre o sistema de ensino.*" (CHEVALLARD, 1982 apud ARTIGUE, 1996, p. 194)

No texto de Artigue (1996), Chevallard (1982) manifesta preocupação sobre a banalização dos métodos de observação e pesquisa dentro do sistema de ensino e no interior das salas de aula, alertando para a existência de uma *ideologia da inovação*, onde o que conta para a pesquisa é o discurso da novidade como meio de justificar quaisquer abordagens que o pesquisador ou professor julgar adequadas. Esse tipo de visão afeta o desenvolvimento da didática da matemática como disciplina científica, pois segundo Chevallard (1982) permite que professores e pesquisadores realizem ensaios e abordagens didáticas apoiados apenas em suas opiniões sobre qual a inovação causa maior impacto ou é mais instigante, posição completamente subjetiva e dependente das vontades e disposições particulares. Se perde desse modo a oportunidade de construção de fundamentos baseados em uma metodologia de pesquisa coerente com o problema do ensino de matemática.

Assim, é necessária uma análise do sistema de ensino e as formas de realizar ações produtivas no seu interior, permitindo assim uma ação racional sobre o sistema e construindo uma história científica consistente capaz de mapear os avanços e recuos dos pressupostos teóricos do que se pretende pesquisar. (CHEVALLARD, 1982 apud ARTIGUE, 1996, p. 194)

O segundo problema crucial gira em torno da necessidade de observação dos eventos de sala de aula; afinal é nesse ambiente que o ensino ocorre de fato. Novamente Artigue (1996) cita Chevallard (1982) para justificar a necessidade de dedicarmos atenção especial para aquilo que os autores denominam como *realizações didáticas*. Coutinho e Almouloud (2008), acerca da definição de *realizações didáticas* dentro da Engenharia Didática, esclarece que uma realização didática deve ser entendida como o conjunto de ações para a realização de uma determinada sessão de ensino, ou seja a *concepção, realização, observação da sessão e análise* de tal sessão de ensino. (COUTINHO; ALMOULOU, 2008, p. 66).

Note que uma única sessão de ensino (aula) pode ser ela mesma uma única realização didática, como também pode ser composta de duas ou mais realizações didáticas, como no caso em que o professor divide a aula em etapa bem delimitadas. No entanto, mesmo nesse último caso, duas etapas bem delimitadas em uma sessão de ensino não implica em etapas separadas e independentes e portanto, podemos pensar na sessão de ensino inteira como uma realização didática composta por duas realizações interconectadas. O mesmo vale para as aulas de uma semana ou mês. No conjunto dessas aulas, o professor deve ter um objetivo específico, como por exemplo, ensinar o que é e quais as técnicas para a solução de uma equação do

2º grau, sendo esse conjunto em si uma realização didática, ao final da execução das aulas. No entanto, para levar a cabo essa realização didática maior, precisamos completar as etapas menores, aulas individuais, que por sua vez também são realizações didáticas, e que podem ou não serem subdivididas em partes menores, dependendo das necessidades do professor, alunos e sistema de ensino.

A partir daí Artigue (1996) esclarece, como apoio de Chevallard (1982), que o segundo problema crucial pode ser colocado em duas frentes diferentes. De um lado, argumenta que as nuances dos processos de ensino não podem ser captados com metodologias de análise externas, como questionários, entrevistas ou experimentos com grupos de controle. Ou seja, se faz necessário compreender que a observação dos processos de ensino devem partir do interior da sala de aula para a sala de aula, considerando os processos internos e particulares de cada sessão de ensino.

Por outro lado, o ambiente de testes das teorias de ensino elaboradas durante as pesquisas somente pode ser o ambiente em que o ensino de fato ocorre, ou seja, no interior das salas de aula. Ou seja, precisamos necessariamente, para validar abordagens ou quaisquer outros construtos teóricos surgidos da didática da matemática, voltar nossa atenção para os acontecimentos no interior da sala de aula.

Assim, a Engenharia Didática desde seu início é marcada pelo caráter notadamente experimental e depende de realizações didáticas, fonte principal de informações para um processo de validação interna, via observação sistemática das manifestações de sala de aula.

Almouloud (2014) descreve a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa cuja característica marcante consiste no uso da estratégia de um "duplo movimento de teorização e provas experimentais" (ALMOULOUD, 2014, p. 170). Segundo o autor, uma das características singulares da engenharia didática é o seu processo de validação, que não depende de fatores externos ou de testes de controle, baseando nas realizações didáticas particulares das sessões de ensino, constituindo assim um processo de validação interna. Isso pode ser feito através da comparação entre concepção e observação da sessão/análise para cada sessão de ensino, segundo a definição de *realização didática*.

No entanto, para que as etapas que constituem uma realização didática: concepção, realização, observação da sessão e análise não retornem ao primeiro problema mencionado no início do texto e caia na ideologia da inovação, se faz necessária uma adequada delimitação dessas etapas. Dessa forma, a Engenharia Didática institui quatro estágios para a organização de seu trabalho: Análises Prévias, Análise a Priori, Experimentação, Análise a Posteriori/Validação.

Além disso, devemos considerar dois níveis de trabalho da Engenharia Didática: microengenharia e macroengenharia. (ARTIGUE, 1996, p. 196) Microengenharia diz respeito às realizações didáticas individuais, estudadas localmente e individualmente durante sessões de aulas individuais. Trata especificamente da concepção e análise de elementos ou acontecimentos individuais em uma sessão de ensino particular. Nesse nível, o foco são os eventos locais; conseqüentemente perde-se a noção do percurso completo durante uma investigação com

estrutura mais complexa ou com diversas sessões ou aulas.

As investigações de microengenharia são mais fáceis de iniciar mas, se permitem ter em conta, de forma local, a complexidade do fenómeno sala de aula, não permite compor essa complexidade com a complexidade essencial dos fenómenos ligados à duração nas relações ensino/aprendizagem. Também não permitem um recorte coerente dos objetos de conhecimento. (ARTIGUE, 1996, p. 196)

No entanto, é incomum que uma investigação faça uso de somente uma sessão de ensino ou tome uma única medida de dados. Assim, em geral, uma investigação é composta de várias sessões de ensino ou seja, diversas realizações didáticas. Assim a macroengenharia é a terminologia utilizada para o estudo de um conjunto de realizações didáticas, geralmente coordenadas e projetadas para o estudo de um objeto, procedimento ou teoria específico. (ARTIGUE, 1996, p. 196) O objetivo da Macroengenharia é dar conta dos objetivos gerais da pesquisa, controlando as variáveis de pesquisa que transpassão todo o roteiro de pesquisa. Por conta desse papel integrador, segundo a colocação anterior de Artigue (1996), é fazendo uso da macroengenharia que podemos delimitar corretamente os objetos de pesquisa e realizar a ligação entre os fenómenos gerais de sala de aula com o processo de construção do conhecimento em sala de aula, permitindo assim uma leitura coerente dos dados obtidos pela pesquisa e sua desejada conclusão.

De posse da estrutura geral e fundamentação essencial da Engenharia Didática, vamos descrever agora, de modo mais pormenorizado, as quatro etapas em que se desenvolvem a Engenharia Didática.

2.3.1 Análises Prévias

É nesta etapa que o pesquisador deve reunir informações presentes na literatura sobre os problemas de ensino-aprendizagem do objeto matemático, demarcando a problemática do estudo, suas hipóteses e a possível origem das variáveis envolvidas no estudo. (ARTIGUE, 1996) Essa análise inicial é feita segundo três aspectos distintos, que percorrerão toda a engenharia didática: aspecto epistemológico, aspecto didático e aspecto cognitivo.

O aspecto epistemológico estuda a gênese do conhecimento ou objeto matemático do qual é alvo do processo de ensino. Procuramos neste aspecto entender as especificidades da validade matemática do objeto (sistema de axiomas e estruturas lógicas) e todos os pontos de vista que podem nos oferecer esclarecimentos sobre o assunto. Isso inclui diferentes formas de organização axiomática, bem como a investigação histórica e social que indique porque um certo sistema formal é preferido a outro para definir e explorar tal objeto (ARTIGUE, 1996; ALMOULOU, 2014). A engenharia didática, como metodologia de pesquisa para o ensino-aprendizagem matemática, leva em consideração as características próprias da construção do conhecimento matemático, e coloca esse processo de construção como componente a ser ensinado, indissociável do objeto matemático a ser ensinado.

O aspecto didático estuda as condições de ensino a que esta submetido o processo de estudo. Características do sistema de ensino, material didático e estilos de abordagem pedagógica influenciam no estudo e elaboração futura do experimento e devem ser levadas em consideração, pois essas considerações contaminam a transmissão de informação entre o pesquisador e seus alunos (ARTIGUE, 1996; ALMOULoud, 2014). Hábitos de estudos dos alunos, bem como suas expectativas em relação ao processo de ensino também devem ser levados em consideração, já que podem ser induzidos por formas de funcionamento de um dado sistema de ensino/aulas.

Finalmente, o aspecto cognitivo leva em consideração a dimensão mental e cognitiva dos alunos envolvidos na pesquisa. Seus conhecimentos prévios e condicionamentos podem criar diferentes vias de reconstrução interna e de reelaboração dos objetos matemáticos a serem estudados. Portanto, para perfeita delimitação do experimento e a posterior análise de dados, precisamos levar em conta o perfil do público utilizado no experimento (ARTIGUE, 1996; ALMOULoud, 2014). Dificuldades detectadas nos dois aspectos anteriores também pode interferir nos processos cognitivos dos alunos, gerando dificuldades de transição entre representações e fixação em estilos matemáticos particulares também devem ser levados em conta no aspecto cognitivo.

Coutinho e Almouloud (2008), Almouloud (2014) detalham como as dimensões epistemológica, cognitiva e didática devem ser explorados nessa fase:

a) Estudo do objeto matemático - análise epistemológica

- Analisar a estrutura lógico-matemático do objeto matemático ou teoria matemática a ser ensinada;
- Estudar as manifestações históricas do objeto matemático estudado, tanto antigas como contemporâneas, bem como suas variadas funcionalidades ao longo do tempo e os obstáculos epistemológicos manifestados na construção do objeto/conceito/teoria matemática estudada;
- Explicitar os fatores culturais e sociais relacionados com o objeto matemático estudado.

b) Análise do perfil cognitivo do público alvo/alunos

- Investigar os conhecimentos prévios dos alunos sobre o objeto/saber matemático envolvido na pesquisa.
- Pesquisar as concepções dos alunos no contexto do sistema escolar em que se insere a pesquisa.

c) Análise da organização didática

- Reunir informações sobre ensino usual do objeto matemático da pesquisa e seus efeitos;
- Realizar um estudo da transposição didática do saber, considerando o sistema educativo no qual insere-se o trabalho;
- Fazer um levantamento das possíveis propostas oficiais emitidas por governos ou regulações legais a instituições de ensino que sejam pertinentes ao ensino-aprendizagem do saber matemático em estudo;
- Analisar os materiais de estudos e mídias de apoio utilizadas canonicamente no ensino do saber matemático escolhido como objeto de estudo;

E a partir dessas informações determinamos quais restrições e constrangimentos podem surgir durante as sessões de ensino e os possíveis erros dos alunos durante a exploração dos conceitos em observação, bem como a provável origem de tais erros (epistemológico, didático ou cognitivo) (ARTIGUE, 1996). Coutinho e Almouloud (2008), Almouloud (2014) deixam claro que, apesar da análise preliminar constituir na etapa inicial da pesquisa, pode ser retomada, revista e ampliada ao longo de toda pesquisa, devendo estar presente ao longo de toda a pesquisa.

2.3.2 Análise a Priori

A engenharia didática, como metodologia fortemente apoiada na experimentação, visa testar suas hipóteses através da experimentação. Assim, o objetivo é determinar as variáveis que atendem aos objetivos do estudo e desenhar o experimento de acordo com os objetivos e variáveis a serem testadas, em um formato de situações-problema a serem apresentadas aos alunos. "O objetivo de uma análise a priori é determinar como as escolhas efetuadas (as variáveis que queremos assumir como pertinentes) permitem controlar os comportamentos dos alunos e explicar seu sentido."(COUTINHO; ALMOULOU, 2008, p. 67)

Tais variáveis são chamadas por Artigue (1996) de *variáveis de comando* e são selecionadas levando em consideração as restrições impostas pelas análises prévias nos aspectos epistemológico, didático e cognitivo. Artigue (1996) e Coutinho e Almouloud (2008) distinguem dois tipos de variáveis potenciais que serão manipuladas pelo pesquisador: as variáveis macrodidáticas ou globais e as variáveis microdidáticas. As variáveis macrodidáticas tratam de aspectos globais da engenharia didática e sua medição deve percorrer todos os aspectos do experimento, correspondente ao nível de macroengenharia. Já as microdidáticas se referem a aspectos locais e descrevem os processos de uma microengenharia.

Na análise a priori devemos selecionar as variáveis que podem ter alguma influência ou controlar de alguma forma o comportamento dos alunos. Afinal, são eles, seu comportamento e capacidade de aprendizagem que desejamos examinar. Coutinho e Almouloud (2008) decreve as seguintes etapas para consideração e desenho da sessões de ensino, segundo o que se espera para o uso da Engenharia Didática (COUTINHO; ALMOULOU, 2008, p. 67):

- Listar e descrever as escolhas das variáveis locais, bem como a situação adidática desenvolvida.
- Analisar a importância dessa situação para o aluno, em função das possibilidades de ações e escolhas para construção de estratégias, tomadas de decisões, controle e validação disponíveis para o aluno.
- Prever comportamentos possíveis e tentar mostrar como a análise feita permite controlar seu sentido, assegurando que os comportamentos esperados, se e quando eles intervêm, resultam do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem.

Almouloud (2014) utiliza o termo *situação-problema* para descrever o tipo de atividade a que os alunos serão expostos durante as realizações didáticas. Segundo o autor, situação-problema é uma questão mais ou menos matematizada, aberta ou fechada, abordando um ou vários domínios de conhecimento. A função dessas situações-problema, dentro da engenharia didática, é induzir o uso do objeto ou saber matemático em questão de forma inicialmente implícita, posteriormente explicitando sua aparição e uso. Tais situações-problema devem atender a alguns critérios:

1. A situação-problema deve ser de fácil compreensão, permitindo aos alunos engajamento imediato na tentativa de solução;
2. A situação-problema deve envolver um campo conceitual na qual o objeto/saber matemático faz parte.
3. A situação-problema deve necessitar do objeto/saber matemático da pesquisa para sua solução completa;
4. Os conhecimentos prévios dos alunos são insuficientes para a resolução completa;
5. O problema deve envolver múltiplas habilidades e domínios de conhecimentos: álgebra, geometria, construção de diagramas, etc.

É essencial que o professor/pesquisador assuma papel de orientador e mediador, evitando intervenções diretas nas resoluções dos alunos. É necessário que as situações-problemas sejam capazes de criar o ambiente de aprendizagem necessário para que os alunos possam desenvolver suas próprias concepções. (COUTINHO; ALMOULOU, 2008; ALMOULOU, 2014)

Sempre que necessário, o professor deve estimular debates e confrontações entre os resultados e conclusões dos alunos. É natural que diversas conclusões, acertadas ou não, apareçam entre os alunos. Cabe nesse caso ao professor mediar a construção do saber da classe, auxiliando na eliminação das conclusões inválidas em favor das soluções funcionais.

Utilizaremos como teoria de ensino para matemática a Teoria das Situações Didáticas – TSD, de Brousseau (2008). Essa escolha é bastante natural, visto que a TSD atende perfeitamente os requisitos necessários para a elaboração das situações-problemas que a engenharia didática exige.

2.3.3 Experimentação e TSD

A Engenharia Didática, como metodologia voltada para o estudo de processos de ensino e pela sua própria constituição inicial, se depende fortemente do que já denominados como *realizações didáticas*: concepção, realização, observação e análise de situações de ensino. Portanto, a condução e observação cuidadosa de tais sessões de ensino é essencial para tal metodologia.

A observação deve focar no controle variáveis didáticas escolhidas. Se preciso, durante a fase de experimentação, podemos voltar a análise a priori para reavaliar algum aspecto mal dimensionado. Novamente, recorremos a Coutinho e Almouloud (2008):

A fase da experimentação é clássica: é o momento de se colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o se necessário, quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade, o que implica em um retorno à análise a priori, em um processo de complementação (COUTINHO; ALMOULoud, 2008, p. 67).

O modo particular de organizar a Experimentação depende da teoria de ensino escolhida. No caso particular a esta pesquisa, a Teoria das Situações Didáticas será nossa referência para o projeto do experimento (Análise *a Priori*), para a condução da Experimentação e como referência para a análise dos dados.

Uma consequência do uso da TSD como teoria de ensino é que quase toda a experimentação ocorre em situação adidáticas, ou seja, baseada no trabalho autônomo do aluno, estimulado pelo *milieu* preparado pelo professor, trabalho interrompido apenas pela institucionalização pontual oferecida pelo professor, afim de organizar o conhecimento instituído nas diversas etapas.

2.3.4 Análise a Posteriori, Validação interna e externa

A análise a posteriori é a última etapa do processo de pesquisa. Aqui comparamos o comportamento observado pelas variáveis didáticas com aquilo que esperávamos. O comportamento esperado pelas variáveis envolvidas é delineado na análise a priori, através de pesquisas preliminares tanto de natureza teórica e documental, quanto por testes de campo realizados antes do experimento por vias variadas (questionários, entrevistas,...). Coutinho e Almouloud (2008) menciona, a respeito das ferramentas usadas nessa fase:

Assim, a análise a posteriori depende das ferramentas técnicas (material didático, vídeo) ou teóricas (teoria das situações, contrato didático...) utilizadas com as quais se coletam os dados que permitirão a construção dos protocolos

de pesquisa. Esses protocolos serão analisados profundamente pelo pesquisador e as informações daí resultantes serão confrontadas com a análise *a priori* realizada. O objetivo é relacionar as observações com os objetivos definidos *a priori* e estimar a reprodutibilidade e a regularidade dos fenômenos didáticos identificados (COUTINHO; ALMOULOUD, 2008, p. 68).

Novamente a escolha da Teoria das Situações Didáticas como teoria de ensino fornece o a estrutura essencial para organizar a Análise *a Posteriori*, que é feita levando em conta as dialéticas adidáticas propostas por Brousseau (2008): Ação, Formulação e Validação. Na verdade, já na Análise *a Priori* organizamos nossas situações didáticas em termos de tais dialéticas, permitindo comparação posterior com o que foi observado.

A seguir, determinaremos alguns parâmetros elementares sobre os objetos matemáticos que pretendemos utilizar em nossas aulas (recorrências lineares e *sequência de Pell*), iniciando a fase de análises prévias.

3 ANÁLISES PRÉVIAS

Neste capítulo iniciamos a primeira fase estipulada para nossa metodologia de pesquisa. As Análises Prévia consistem em uma exploração histórica e epistemológica dos objetos de ensino a serem explorados em nossa pesquisa.

Abordamos neste capítulo: Elementos fundamentais para recorrências e recorrências lineares. Propriedades fundamentais para *sequência de Pell*. Modelos matriciais e polinomiais para a *sequência de Pell*. Discussão histórica para a *sequência de Pell*, bem como um resumo do panorama moderno das pesquisas em matemática pura e aplicada que abordam tal objeto matemático.

O objetivo aqui é reunir informações que embasem a construção do experimento durante a fase de Análises *a Priori*, permitindo a construção dentro dos aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos, dimensões necessárias aos pressupostos da Engenharia Didática.

3.1 Recorrências: Considerações Gerais

Nesta seção, trataremos sobre recorrências e de suas condições de solução, em especial recorrências lineares. Lima *et al.* (2016) se apoia na definição de sequências para discutir recorrências. Por sequência de números reais, tal como Lima (2007, pg. 100), definimos

Por $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ denotamos o conjunto dos naturais. Os símbolos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ denotam conjunto dos inteiros, reais e complexos respectivamente, de modo que $\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{R}^-$ são os conjuntos dos inteiros e reais *não positivos* e $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{R}^+$ são os conjuntos dos inteiros e reais *não negativos*. E para qualquer conjunto A , $A^* = A - \{0\}$, ou seja, o conjunto A sem o zero.

Desse modo, seguimos com as primeiras definições.

Definição 3.1.1. Chamaremos a função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ de *sequência* e a cada elemento $x(n)$ de *n-ésimo termo da sequência*, representado simplesmente por x_n .

A função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ será escrita como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou apenas (x_n) quando não houver dúvidas de seu domínio. Quando conveniente, representaremos a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ através da *n-upla* $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$, $k \in \mathbb{N}$. Por exemplo, as funções $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ e $c : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $a_n = (-1)^n$ e $c_n = 2c_{n-1} - 3$; $c_0 = 1$ geram sequências. Os oito termos iniciais de tais sequências são mostrados na Tabela 1.

Tabela 1 – Primeiros termos das sequências a_n e c_n

n	0	1	2	3	4	5	6	7
a_n	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
c_n	1	-1	-5	-13	-29	-61	-125	-253

Fonte: Autor

A definição a seguir, novamente presente em Lima (2007), simplifica algumas construções que faremos uso a seguir.

Definição 3.1.2. Dada uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, chamamos de subsequência a qualquer restrição de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a um subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ infinito.

Alguns exemplos simples podem ser criados observando restrições da sequência (c_n) aos subconjuntos: $I =$ Conjunto dos naturais ímpares; $P =$ Conjunto dos naturais pares; $O = \{2^n; n \in \mathbb{N}\}$. Assim, são subsequências de (c_n)

$$\begin{cases} c_i : I \rightarrow \mathbb{R}; \\ c_p : P \rightarrow \mathbb{R}; \\ c_o : O \rightarrow \mathbb{R}. \end{cases}$$

de modo que podemos representá-las respectivamente como:

$$(c_n)_{n \in I} = (c_1, c_3, c_5, c_7, c_9, c_{11}, \dots) = (-1, -13, -61, -253, -1021, -4093, \dots)$$

$$(c_n)_{n \in P} = (c_0, c_2, c_4, c_6, c_8, c_{10}, \dots) = (1, -5, -29, -125, -509, -2044, \dots)$$

$$(c_n)_{n \in O} = (c_1, c_2, c_4, c_8, c_{16}, c_{32}, \dots) = (-1, -5, -29, -509, -131069, \dots)$$

Entretando, podemos ampliar a noção original de sequência. Lind e Marcus (1995) em outro contexto (discussão sobre sistemas dinâmicos e ferramentas de codificação) define o conceito de *sequência bi-infinita* (LIND; MARCUS, 1995, p. 2). Dessa forma, Lind e Marcus (1995) definem

Definição 3.1.3. Denotamos como *sequência bi-infinita a enumeração*:

$$\dots, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$$

representada por $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$.

A partir da definição acima, vamos considerar uma extensão de uma sequência $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ para os inteiros, da seguinte forma

Definição 3.1.4. Dada uma sequência $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definimos a extensão de x , a função $z : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $z|_{\mathbb{N}} = x$. Chamaremos tal extensão de *sequência estendida*.

Da mesma forma, a função $z : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ será escrita como $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ou apenas (z_n) quando não houver dúvidas de seu domínio. Quando conveniente, representaremos a sequência estendida $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ como a n -upla

$$(\dots, z_{-k}, \dots, z_{-2}, z_{-1}, z_0, z_1, z_2, \dots, z_k, \dots)$$

onde $k \in \mathbb{N}$.

Por exemplo, as funções $b, d : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $b_n = (-1)^n$ e $d_n = 2d_{n-1} - 3; d_0 = 1$, são extensões das funções a e c do exemplo anterior. A tabela 2 apresenta alguns valores calculados para as funções b e d .

A noção de função restrição também pode ser aplicada as funções $z : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$. Por exemplo, considere as sequências estendidas (b_n) e (d_n) sob restrição de $\mathbb{Z}^+$ ou $\mathbb{Z}^-$, obtendo $b|_{\mathbb{Z}^+}$, $b|_{\mathbb{Z}^-}$, $d|_{\mathbb{Z}^+}$ e $d|_{\mathbb{Z}^-}$. Exibimos na tabela 3 os dez primeiros termos de tais restrições, calculados a partir de $n = 0$. Perceba que as restrições $b|_{\mathbb{N}}$ e $d|_{\mathbb{N}}$ são sequências pela definição 3.1.1.

Tabela 2 – Sequências estendidas (b_n) e (d_n) , para $-5 \leq n \leq 5$

n	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
b_n	...	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	...
d_n	...	$\frac{47}{16}$	$\frac{23}{8}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{5}{2}$	2	0	-1	-5	-13	-29	-61	...

Fonte: Autor

Tabela 3 – Restrições nas sequências estendidas (b_n) e (d_n) , para os dez primeiros termos.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	...
$(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$	0	-1	-5	-13	-29	-61	-125	-247	-497	-997	...

n	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	...
$(b_n)_{n \in -\mathbb{N}}$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	...
$(d_n)_{n \in -\mathbb{N}}$	0	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{23}{8}$	$\frac{47}{16}$	$\frac{95}{32}$	$\frac{191}{64}$	$\frac{383}{128}$	$\frac{767}{256}$	...

Fonte: Autor

Para finalizar essa seção, notemos que a lei de formação para (b_n) não depende de nenhum dos termos b_n da própria sequência, ao contrário de (d_n) , cuja lei de formação $d_n = 2d_{n-1} - 3$ depende do conhecimento de termos anteriores a d_n , tornando necessário um termo de partida $d_0 = 1$. Sequências com este comportamento serão estudadas na próxima seção.

3.1.1 Recorrências

Em termos ingênuos, uma *recorrência* é uma sequência cujos termos seguintes dependem dos anteriores. Utilizaremos a definição de Martinez (2013, p. 451).

Definição 3.1.5. (*Recorrência*) Dada $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$, dizemos que a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma recorrência de ordem k se para todo $n \in \mathbb{N}$ existe uma função r tal que:

$$x_{n+k} = r(x_{n+(k-1)}, x_{n+(k-2)}, \dots, x_{n+1}, x_n), \quad (3.1)$$

onde $n, k \in \mathbb{N}$.

A equação (3.1) é chamada de *equação de recorrência de ordem k* . É possível que diferentes sequências (x_n) satisfaçam uma dada equação de recorrência. Por exemplo, considere a equação de recorrência $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, de ordem 2. Três soluções diferentes são mostradas na tabela 4.

Tabela 4 – Sequências numéricas que satisfazem $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$

(1)	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	...
(2)	1	3	4	7	11	18	29	37	66	103	...
(3)	$3/2$	1	$5/2$	$7/2$	6	$19/2$	$31/2$	25	$81/2$	$131/2$	...

Fonte: Autor

Muitas recorrências diferentes podem ser solução da mesma equação de recorrência. No entanto, o próximo resultado determina em que condições uma equação de recorrência possui uma única solução. Isso acontece quando, dada a ordem k da equação de recorrência, fixa-

mos exatamente k termos iniciais. Teremos então somente uma única solução com os k termos dados.

Teorema 3.1.1. *Dados os termos iniciais $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1} \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$, a equação de recorrência de ordem k :*

$$x_{n+k} = r(x_{n+(k-1)}, x_{n+(k-2)}, \dots, x_{n+1}, x_n)$$

possui uma única solução com os termos iniciais dados.

Demonstração. Faremos a demonstração usando o princípio de indução forte. Para $n = 0$ temos:

$$x_{0+k} = x_k = r(x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_1, x_0),$$

como os termos iniciais $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ são determinados, x_k está univocamente determinado pela equação de recorrência.

Suponha que o resultado vale para todo natural menor ou igual a n . Assim, para $n + 1$ obtemos:

$$\begin{aligned} x_{(n+1)+k} &= r(x_{(n+1)+(k-1)}, x_{(n+1)+(k-2)}, \dots, x_{(n+1)+1}, x_{(n+1)}) \\ &= r(x_{n+k}, x_{(n-1)+k}, x_{(n-2)+k}, \dots, x_{(n-(k-1))+k}) \end{aligned}$$

Como os termos $x_{n+k}, x_{(n-1)+k}, x_{(n-2)+k}, x_{(n-3)+k}, \dots, x_{(n-(k-2))+k}, x_{(n-(k-1))+k}$ estão bem determinados, por hipótese de indução, então $x_{(n+1)+k}$ fica unicamente determinado. $\square$

Este resultado nos diz também que para determinar completamente uma recorrência de ordem k , é necessário e suficiente determinar sua equação de recorrência e k termos iniciais. Por exemplo, a célebre *sequência de Fibonacci* $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots)$ é um exemplo de recorrência de 2ª ordem, pois para todo $n \geq 2$ os termos da sequência dependem dos dois termos anteriores a ele. Tal recorrência fica univocamente determinada por

$$\begin{cases} f_{n+1} = f_n + f_{n-1}; \\ f_0 = 0; f_1 = 1 \end{cases} \quad (3.2)$$

A *sequência de Fibonacci* é classicamente definida com índices naturais. No entanto, levando em consideração a definição de sequência estendida (Definição 3.1.4) e a linearidade da equação de recorrência $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, podemos construir uma sequência estendida z_n tal que $z|_{\mathbb{N}} = (f_n)$, partindo dos termos iniciais $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$ e reescrevendo a equação de recorrência como

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \Rightarrow f_{n-1} = f_{n+1} - f_n,$$

obtemos os termos a seguir, de índices negativos

$$f_{-1} = f_1 - f_0 = 1$$

$$f_{-2} = f_0 - f_{-1} = -1$$

$$f_{-3} = f_{-1} - f_{-2} = 2$$

$$f_{-4} = f_{-2} - f_{-3} = -3$$

$$f_{-5} = f_{-3} - f_{-4} = 5$$

resultando na sequência estendida exibida na tabela 5.

Tabela 5 – Sequência Estendida de Fibonacci.

n	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
f_n	...	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	...

Fonte: Autor

A sequência estendida de Fibonacci apresentada fica perfeitamente determinada por (3.2), já que dados f_n, f_{n+1} há somente um valor para $f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$ e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se encontra univocamente determinada.

Sempre que uma recorrência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ordem k é tal que existe uma sequência estendida $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que (z_n) é solução da equação de recorrência associada a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, diremos que (z_n) é *recorrência estendida de (x_n)* . Quando não houver risco de ambiguidades, chamaremos uma recorrência estendida qualquer simplesmente de recorrência.

Horadam (1965) realiza uma abordagem de recorrências estendidas inicialmente utilizando exemplos particulares para caracterizar um tratamento mais geral, derivando diversas propriedades de termos do tipo x_{-n} , $n \in \mathbb{N}$, porém sem utilizar explicitamente a noção de sequência estendida. Essa abordagem será particularizada para o caso de recorrências lineares de 2ª ordem em seções adiante. Alves (2016a) oferece uma descrição em língua portuguesa do que chamamos de sequência estendida de Fibonacci, através de passos similares ao que Horadam (1965) utiliza.

Entretanto, nem sempre podemos tomar uma recorrência definida para $n \in \mathbb{N}$ e obter uma recorrência estendida. Por exemplo, a recorrência de 1ª ordem

$$\begin{cases} t_{n+1} = \arctan\left(\frac{1}{t_n}\right); \\ t_0 = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

está bem definida para $n \in \mathbb{N}$. Entretanto, se tentarmos calcular algum t_{-1} , vamos obter a seguinte igualdade:

$$t_0 = \arctan\left(\frac{1}{t_{-1}}\right) \implies \tan(t_0) = \frac{1}{t_{-1}}$$

o que demonstra a inconsistência de tentar calcular t_{-1} pois não existe $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Essa constatação também levanta a questão de quais equações de recorrência aceitam como soluções recorrências estendidas, ou de quais recorrências possuem recorrências estendidas.

Essas ideias serão parcialmente discutidas na próxima seção, em conjunto com nosso tema de interesse central, recorrências lineares, particularmente de 1ª e 2ª ordem.

3.1.2 Recorrências Lineares

Definição 3.1.6. *Uma recorrência é dita linear de ordem k , com coeficientes constantes, quando a equação de recorrência*

$$x_{n+k} = r(x_{n+(k-1)}, x_{n+(k-2)}, \dots, x_{n+1}, x_n)$$

pode ser escrita como:

$$x_{n+k} = C_1 \cdot x_{n+(k-1)} + C_2 \cdot x_{n+(k-2)} + \dots + C_{(k-1)} \cdot x_{n+1} + C_k \cdot x_n + b, \quad (3.3)$$

onde $C_i, b \in \mathbb{R}$ constantes, para todo $1 \leq i \leq k$.

Perceba também que uma forma simples de obter a ordem de uma equação de recorrência é

Por exemplo, recorrências lineares de 1ª e 2ª ordem são caracterizadas como

Recorrência linear de 1ª ordem

$$\begin{cases} x_{n+1} = C_1 \cdot x_n + b; \\ x_0 = a; \end{cases}$$

Recorrência linear de 2ª ordem

$$\begin{cases} x_{n+2} = C_1 \cdot x_{n+1} + C_2 \cdot x_n + b; \\ x_0 = a; x_1 = b; \end{cases}$$

Se $b = 0$, a recorrência linear é dita homogênea. A *sequência de Fibonacci* e a *sequência de Lucas*, esta última definida como:

$$\begin{cases} l_{n+1} = l_n + l_{n-1}; \\ l_0 = 2; l_1 = 1 \end{cases},$$

são recorrências lineares de 2ª ordem, ambas com $C_1 = C_2 = 1$, homogêneas. São também bastante esclarecedores os exemplos

Sequência de Padovan

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_{n-1} + p_{n-2}; \\ p_0 = 1, p_1 = 1, p_2 = 1; \end{cases}$$

Sequência de Tribonacci

$$\begin{cases} f_{n+1} = f_n + f_n + f_{n-1}; \\ f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 1; \end{cases}$$

ambas recorrências lineares homogêneas de 3ª ordem. Note porém que a *sequência de Padovan* possui apenas dois termos explícitos em sua equação de recorrência. Mesmo assim, com uma simples mudança na variável do índice, obtemos

$$\begin{cases} p_{n+3} = p_{n+1} + p_n; \\ p_0 = 1, p_1 = 1, p_2 = 1; \end{cases},$$

o que nos permite escrever

$$p_{n+3} = 0 \cdot p_{n+2} + 1 \cdot p_{n+1} + 1 \cdot p_n.$$

Perceba também que dada uma recorrência linear de ordem k , o termo C_k na equação (3.3) (coeficiente do x_i de índice mais baixo) é necessariamente não nulo. Se ao contrário, tivermos $C_k = 0$, tomaria a forma:

$$x_{n+k} = C_1 \cdot x_{n+(k-1)} + C_2 \cdot x_{n+(k-2)} + \cdots + C_{(k-1)} \cdot x_{n+1} + b \quad (3.4)$$

o que transforma a recorrência para ordem $k - 1$.

No fim da seção anterior sugerimos que em alguns casos é possível encontrar uma recorrência estendida para uma dada recorrência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou seja, uma solução $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que $z|_{\mathbb{N}} = x_n$. Vamos construir tal solução e mostrar que ela é única, desde que sejam cumpridos certos requisitos.

Note que a equação (3.3) de ordem k , pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$x_{n+k} = C_1 \cdot x_{n+(k-1)} + C_2 \cdot x_{n+(k-2)} + \cdots + C_{(k-1)} \cdot x_{n+1} + C_k \cdot x_n + b \implies$$

$$x_n = \frac{x_{n+k} - C_1 \cdot x_{n+(k-1)} - C_2 \cdot x_{n+(k-2)} - \cdots - C_{(k-1)} \cdot x_{n+1} - b}{C_k}$$

onde $C_k \neq 0$, pois a ordem k foi dada previamente. Dessa maneira, podemos calcular o termo de índice mais baixo utilizando os de índice mais alto.

Oferecemos a seguinte definição, de natureza recursiva:

Definição 3.1.7. Dados os termos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1} \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, e a equação de recorrência linear de ordem k :

$$x_{n+k} = C_1 \cdot x_{n+(k-1)} + C_2 \cdot x_{n+(k-2)} + \cdots + C_{(k-1)} \cdot x_{n+1} + C_k \cdot x_n + b, \quad n, k \in \mathbb{N}$$

Definimos:

$$x_{-1} = \frac{x_{k-1} - C_1 \cdot x_{(k-2)} - C_2 \cdot x_{(k-3)} - \cdots - C_{(k-1)} \cdot x_0 - b}{C_k};$$

$$x_{-n} = \frac{x_{k-n} - C_1 \cdot x_{(k-1)-n} - C_2 \cdot x_{(k-2)-n} - \cdots - C_{(k-1)} \cdot x_{1-n} - b}{C_k}.$$

Assim, por exemplo, a sequência de Jacobsthal, definida como

$$\begin{cases} j_{n+2} = j_{n+1} + 2j_n; \\ j_0 = 0; j_1 = 1; \end{cases}$$

cujos termos (com índice positivo) podem ser vistos na tabela 6

é tal que através da definição (3.1.7) permite a obtenção dos termos $(\dots, j_{-k}, \dots, j_{-1})$, $k \in \mathbb{N}$.

A título de exemplo, calculamos os termos de j_{-1} à j_{-7}

Tabela 6 – Os dez primeiros termos para sequência de Jacobsthal.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
j_n	0	1	1	3	5	11	21	43	85	171	...

Fonte: Autor

$$j_{-1} = \frac{j_1 - j_0}{2} = \frac{1 - 0}{2} = \frac{1}{2};$$

$$j_{-n} = \frac{j_{-(n-2)} - j_{-(n-1)}}{2}.$$

$$j_{-2} = \frac{j_0 - j_{-1}}{2} = -\frac{1}{4}; \quad j_{-5} = \frac{j_{-3} - j_{-4}}{2} = \frac{11}{32}$$

$$j_{-3} = \frac{j_{-1} - j_{-2}}{2} = \frac{3}{8}; \quad j_{-6} = \frac{j_{-4} - j_{-5}}{2} = -\frac{21}{64}$$

$$j_{-4} = \frac{j_{-2} - j_{-3}}{2} = -\frac{5}{16}; \quad j_{-7} = \frac{j_{-5} - j_{-6}}{2} = \frac{43}{128}$$

Resultando na recorrência estendida de Jacobsthal, exibida na tabela 7.

Tabela 7 – Recorrência Estendida de Jacobsthal.

n	...	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	...
j_n	...	$\frac{43}{128}$	$-\frac{21}{64}$	$\frac{11}{32}$	$-\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	1	1	3	5	11	21	43	...

Fonte: Autor

O próximo resultado estabelece o mesmo critério de unicidade do teorema (3.1.1), para recorrências estendidas e recorrências lineares.

Teorema 3.1.2. (*Unicidade da solução da equação de recorrência linear*) Dados os termos iniciais $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1} \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$, a equação de recorrência de ordem k :

$$x_{n+k} = C_1 \cdot x_{n+(k-1)} + C_2 \cdot x_{n+(k-2)} + \dots + C_{(k-1)} \cdot x_{n+1} + C_k \cdot x_n + b,$$

onde $C_i, b \in \mathbb{R}$ constantes, para todo $1 \leq i \leq k$, possui uma recorrência estendida como única solução com os termos iniciais dados, com $n \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Pelo teorema (3.1.1), existe uma recorrência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que é uma solução única para a equação de recorrência (3.3) com os termos iniciais dados $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1} \in \mathbb{R}$. Precisamos mostrar que é possível obter uma recorrência estendida $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de (x_n) e que isso somente pode ser feito de um único modo. Para isso, basta determinar de modo unívoco os termos $(\dots, x_{-n}, \dots, x_{-1})$.

Observando a definição (3.1.7), como os termos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1} \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ estão bem determinados, resulta que:

$$x_{-1} = \frac{x_{k-1} - C_1 \cdot x_{(k-2)} - C_2 \cdot x_{(k-3)} - \dots - C_{(k-1)} \cdot x_0 - b}{C_k};$$

Está bem determinado. Por hipótese de indução, suponhamos que para todo natural menor ou igual a n a equação:

$$x_{-n} = \frac{x_{k-n} - C_1 \cdot x_{(k-1)-n} - C_2 \cdot x_{(k-2)-n} - \dots - C_{(k-1)} \cdot x_{1-n} - b}{C_k}.$$

determina univocamente os termos x_{-n} . Desse modo, para $n+1$, a definição (3.1.7) resulta em:

$$\begin{aligned} x_{-(n+1)} &= \frac{x_{k-(n+1)} - C_1 \cdot x_{(k-1)-(n+1)} - C_2 \cdot x_{(k-2)-(n+1)} - \dots - C_{(k-1)} \cdot x_{1-(n+1)} - b}{C_k} \\ &= \frac{x_{[n-(k-1)]} - C_1 \cdot x_{[n-(k-2)]} - C_2 \cdot x_{[n-(k-3)]} - \dots - C_{(k-1)} \cdot x_{-n} - b}{C_k}. \end{aligned}$$

como

$$[n-(k-1)] < [n-(k-2)] < [n-(k-3)] < \dots < [n-(k-k)] = n$$

então $x_{[n-(k-1)]}, x_{[n-(k-2)]}, x_{[n-(k-3)]}, \dots, x_{-n}$ por hipótese de indução, estão bem determinados. Consequentemente, $x_{-(n+1)}$ também está univocamente determinado. $\square$

A partir de agora, discutiremos a estrutura das soluções de recorrências lineares de 2ª ordem, foco de interesse deste trabalho.

3.1.3 Recorrências lineares homogêneas de 2ª ordem: estrutura das soluções

Dados $n \in \mathbb{N}$ e $p, q \in \mathbb{R}$, uma *recorrência linear de 2ª ordem homogênea*, a coeficientes constantes possui a seguinte expressão

$$\begin{cases} x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n; \\ x_0 = a; x_1 = b, \end{cases}$$

com $q \neq 0$. Esta recorrência também é chamada de *sequência de Horadam* e pode ser encontrada em Horadam (1965).

Note que basta $q \neq 0$ para garantir que a recorrência seja de 2ª ordem, mesmo que $p = 0$. Caso $q = 0$, a equação de recorrência seria reduzida à

$$x_{n+2} = px_{n+1}$$

o que corresponde a uma recorrência de 1ª ordem, evidenciando esse fato através da mudança de variável $i = n+1$, resultando em $x_{i+1} = px_i$, $i \in \mathbb{N}$.

Caso $p = 0$ e $q \neq 0$, teríamos a equação

$$x_{n+2} = qx_n$$

que por definição é uma equação de recorrência de ordem 2. Perceba que caso fixemos, nessa situação, apenas um termo inicial $x_0 = a$, a equação de recorrência acima somente terá solução única nos termos de índice par $(x_0, x_2, \dots)$, permitindo uma infinidade de soluções com índice ímpar.

No entanto, seria interessante saber calcular cada termo x_n sem depender de outros termos da recorrência (x_n) , ou seja, encontrar uma lei de formação para x_n independente de quaisquer termos anteriores.

Para discutir uma possível solução geral, precisamos antes estabelecer alguns fatos básicos. O que discutiremos nessa seção pode ser generalizado para recorrências lineares com coeficientes constantes com uma ordem $k \in \mathbb{N}$ qualquer. No entanto, por simplicidade e objetividade de exposição, discutiremos apenas o caso de recorrências lineares de 2ª ordem, com coeficientes constantes.

Considere o conjunto $\mathbf{S}$ de todas as sequências estendidas (definição 3.1.4) que satisfazem a equação de recorrência:

$$x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n \quad (3.5)$$

Note que a sequência estendida $(e_n) = (\dots, 0, 0, 0, 0, \dots)$, tal que $e_n = 0$ para qualquer $n \in \mathbb{Z}$ é solução para a equação (3.5), para quaisquer $p, q \in \mathbb{R}$, ou seja, S é não vazio. A partir disso, baseados o que diz Kauers e Paule (2011, pg.100-102), definimos duas operações sobre o conjunto S e enunciamos dois resultados:

Definição 3.1.8. *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Considere as sequências estendidas:*

$$\begin{aligned} (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} &= (\dots, a_{-k}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_k, \dots) \\ (b_n)_{n \in \mathbb{Z}} &= (\dots, b_{-k}, \dots, b_{-1}, b_0, b_1, \dots, b_k, \dots) \end{aligned}$$

soluções de (3.5), definimos

- $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} + (b_n)_{n \in \mathbb{Z}} := (c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, tal que $c_n = a_n + b_n$. (Soma)
- $\alpha \cdot (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} := (c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, tal que $c_n = \alpha \cdot a_n$. (Produto por escalar)

Lema 3.1.1. *Se $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ são soluções para a equação (3.5), então $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} + (b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ e $\alpha(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ são também soluções para a equação (3.5).*

Demonstração. De fato, tomando a soma $c_n = a_n + b_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\begin{aligned} pc_{n+1} + qc_n &= p(a_{n+1} + b_{n+1}) + q(a_n + b_n) \\ &= pa_{n+1} + pb_{n+1} + qa_n + qb_n \\ &= (pa_{n+1} + qa_n) + (pb_{n+1} + qb_n) \\ &= a_{n+2} + b_{n+2} \\ &= c_{n+2} \end{aligned}$$

do mesmo modo, tomando $c_n = \alpha \cdot a_n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, podemos escrever:

$$p(\alpha a_{n+1}) + q(\alpha a_n) = \alpha(pa_{n+1} + qa_n) = \alpha a_{n+2}.$$

□

Um exemplo simples pode ser tomado com a equação de recorrência $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, que possui as soluções particulares *sequência de Fibonacci* e *sequência de Lucas*, já definidas anteriormente. Pelo que acabamos de demonstrar, $(f_n + l_n)$, $\alpha(f_n)$ e $\alpha(l_n)$ também são soluções para $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. O lema 3.1.1 que acabamos de demonstrar nos leva ao seguinte resultado

Teorema 3.1.3. *Seja S o conjunto de todas as sequências estendidas que são soluções para a equação:*

$$x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n$$

S é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, com as operações definidas em 3.1.8.

Demonstração. Segue do lema 3.1.1 e do fato de S ser um subconjunto do espaço das sequências de Números Reais. $\square$

A cada recorrência linear dada associamos uma *equação característica* $p(t) = 0$, onde $p(t)$ é um polinômio grau k dado por

$$p(t) = t^k - \sum_{i=0}^{k-1} t^i C_{(k-i)} = 0; \quad (3.6)$$

$C_{(k-i)} \in \mathbb{R}$ e $p(t) \in \mathbb{R}[t]$.

Na verdade, tal *equação característica* surge da possibilidade de reinterpretar recorrências lineares como transformações lineares. Particularizando para recorrências lineares de 2ª ordem, homogêneas, perceba que (x_{n+1}, x_n) é subespaço vetorial de S^2 , pois $(0_n, 0_n) \in (x_{n+1}, x_n)$ e dados $(a_{n+1}, a_n), (b_{n+1}, b_n) \in (x_{n+1}, x_n)$, $(a_{n+1}, a_n) + \lambda(b_{n+1}, b_n) = (a_{n+1} + \lambda b_{n+1}, a_n + \lambda b_n) \in (x_{n+1}, x_n)$. Assim, podemos escrever a transformação linear

$$\begin{bmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix},$$

Que nos permite calcular x_{n+1} a partir de x_n e x_{n-1} . Observe que o polinômio característico da

matriz da transformação $T = \begin{bmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$p(t) = t^2 - pt - q \quad (3.7)$$

coincide com a equação (3.6) reduzida ao caso particular para recorrências lineares de 2ª ordem, homogêneas, desde que $p(t) = 0$. Perceba também que a restrição $q \neq 0$ para a equação de recorrência (3.5), discutida onde se encontra a passagem (3.4), também garante que a equação característica não possui raiz nula, pois, nesse caso

$$t^2 - pt - q = 0 \implies t(t - p) = q \neq 0 \implies t \neq 0.$$

Desse modo, as soluções de $t^2 - pt - q = 0$ representam os autovalores da transformação linear T . Se T for diagonalizável, então os autovetores associados formam uma base para o espaço vetorial (x_{n+1}, x_n) .

Assim, convêm investigar o papel das raízes r, s de $p(t) = t^2 - pt - q$ para o espaço vetorial S . Os resultados do restante desta seção são baseados na exposição de Kauers e Paule (2011), simplificadas para o caso particular de recorrências lineares de 2º ordem, homogêneas. (KAUERS; PAULE, 2011, p. 63-70). Lima *et al.* (2016), no capítulo 3 (LIMA *et al.*, 2016, p. 61-80), também exhibe resultados equivalentes aos corolários (3.1.1) e (3.1.2).

Teorema 3.1.4. *Dada a equação de recorrência $x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n$ e r raiz de (3.7), solução da equação característica*

$$t^2 - pt - q = 0 \quad (3.8)$$

bem como S o conjunto das soluções de $x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n$, temos que

$$(r^n)_{n \in \mathbb{Z}} \in S \iff r \text{ é solução de (3.8).}$$

Demonstração. Seja $(r^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ solução para a equação (3.5). Como $q \neq 0$, então $r \neq 0$. Assim

$$x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n \implies r^{n+2} = pr^{n+1} + qr^n \implies r^2 = pr + q \implies r^2 - pr - q = 0$$

ou seja, r é solução de (3.8). Por outro lado, seja $r \neq 0$ solução de (3.8). Então

$$r^2 - pr - q = 0 \implies r^2 = pr + q \implies r^{n+2} = pr^{n+1} + qr^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z},$$

ou seja, r é solução para a equação $x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n$. □

Considerando as equações de recorrência usadas para definir as *sequências de Fibonacci, Jacobsthal e Pell*, associadas as suas respectivas equações características, construímos a tabela 8.

Tabela 8 – Eq. de recorrência e suas respectivas eq. características

	Eq. de recorrência	Eq. característica	Raízes
Fibonacci	$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$	$t^2 - t - 1 = 0$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
Jacobsthal	$j_{n+2} = j_{n+1} + 2j_n$	$t^2 - t - 2 = 0$	-1 e 2
Pell	$p_{n+2} = 2p_{n+1} + p_n$	$t^2 - 2t - 1 = 0$	$1 - \sqrt{2}$ e $1 + \sqrt{2}$

Fonte: Autor

Considerando isso, são soluções para as respectivas equações de recorrência, citadas na tabela 8 as sequências:

Fibonacci:

$$\left(\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right]^n \right)_{n \in \mathbb{Z}} = \left(\dots, \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right]^{-3}, \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right]^{-2}, \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right]^{-1}, 1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right]^2, \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right]^3, \dots \right)$$

$$\left(\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]^n \right)_{n \in \mathbb{Z}} = \left(\dots, \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]^{-3}, \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]^{-2}, \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]^{-1}, 1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]^2, \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]^3, \dots \right)$$

Jacobsthal:

$$([-1]^n)_{n \in \mathbb{Z}} = (\dots, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$$

$$(2^n)_{n \in \mathbb{Z}} = (\dots, 2^{-7}, 2^{-6}, 2^{-5}, 2^{-4}, 2^{-3}, 2^{-2}, 2^{-1}, 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, \dots)$$

Pell:

$$([1 - \sqrt{2}]^n)_{n \in \mathbb{Z}} = (\dots, [1 - \sqrt{2}]^{-3}, [1 - \sqrt{2}]^{-2}, [1 - \sqrt{2}]^{-1}, 1, [1 - \sqrt{2}], [1 - \sqrt{2}]^2, [1 - \sqrt{2}]^3, \dots)$$

$$([1 + \sqrt{2}]^n)_{n \in \mathbb{Z}} = (\dots, [1 + \sqrt{2}]^{-3}, [1 + \sqrt{2}]^{-2}, [1 + \sqrt{2}]^{-1}, 1, [1 + \sqrt{2}], [1 + \sqrt{2}]^2, [1 + \sqrt{2}]^3, \dots)$$

Os próximos resultados nos fornecerão uma base para o espaço vetorial $\mathbf{S}$. Dessa forma podemos encontrar uma fórmula fechada para calcular x_n diretamente.

Teorema 3.1.5. *Dado $n \in \mathbb{Z}$, considere a equação de recorrência (3.5):*

$$x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n;$$

se sua equação característica, $t^2 - pt - q = 0$ possuir duas raízes r e s distintas, então o conjunto $\{(r^n), (s^n)\}$, $n \in \mathbb{Z}$ é base do $\mathbb{R}$ -espaço vetorial $\mathbf{S}$, conjunto de todas as recorrências estendidas que satisfazem (3.5).

Demonstração. Dado $n \in \mathbb{Z}$, precisamos mostrar duas coisas:

1. $\{(r^n), (s^n)\}$ é gerador de S ;
2. $\{(r^n), (s^n)\}$ é LI.

Vamos começar com a afirmação (1). Considere uma recorrência estendida qualquer $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, univocamente determinada por $x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n$, dados x_0, x_1 iniciais. De posse das raízes $r \neq s$ da equação característica (3.8), o sistema linear

$$\begin{cases} x_0 = C_1 + C_2 \\ x_1 = C_1 \cdot r + C_2 \cdot s. \end{cases}$$

sempre possui solução, ou seja, sempre podemos determinar C_1 e C_2 . De fato, o determinante da matriz A de coeficientes dos sistema é $(r - s) \neq 0$, ou seja A é invertível e o sistema possui uma única solução (LIMA, 2009, pg. 263, Cor.) dada por

$$C_1 = \frac{x_1 - sx_0}{(r - s)}, \quad C_2 = \frac{rx_0 - x_1}{(r - s)}.$$

Afirmamos que $x_n = C_1 r^n + C_2 s^n$, qualquer que seja $n \in \mathbb{Z}$.

De fato, vamos proceder por indução sobre os elementos das recorrências $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ e $(x_{-n})_{n \in \mathbb{Z}_+}$, separadamente. Perceba que pelo teorema 3.1.2, uma vez dados x_0, x_1 iniciais, a recorrência (x_n) fica inteiramente determinada. Assim, para $n \in \{0, 1\}$, temos que

$$\begin{aligned} C_1 \cdot r^0 + C_2 \cdot s^0 &= x_0, \\ C_1 \cdot r^1 + C_2 \cdot s^1 &= x_1. \end{aligned}$$

Para $n = 2$:

$$\begin{aligned} x_2 &= px_1 + qx_0 \implies \\ x_2 &= prC_1 + psC_2 + qC_1 + qC_2 \implies \\ x_2 &= C_1(pr + q) + C_2(ps + q) \implies \\ x_2 &= C_1[(r + s)r - rs] + C_2[(r + s)s - rs] \implies \\ x_2 &= C_1r^2 + C_2s^2 \end{aligned}$$

Para $n \in \mathbb{Z}_+$, suponha o resultado válido para todo elemento de $\mathbb{Z}^+$ menor ou igual a n . Assim, para $n+1$, obtemos

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= px_n + qx_{n-1} = p(C_1 \cdot r^n + C_2 \cdot s^n) + q(C_1 \cdot r^{n-1} + C_2 \cdot s^{n-1}) \\ &= pC_1 \cdot r^n + pC_2 \cdot s^n + qC_1 \cdot r^{n-1} + qC_2 \cdot s^{n-1} = \\ &= C_1(pr^n + qr^{n-1}) + C_2(ps^n + qs^{n-1}) = C_1r^{n+1} + C_2s^{n+1}. \end{aligned}$$

Vamos tratar agora o caso x_{-n} . Primeiramente

$$\begin{aligned} C_1 \cdot r^{-1} + C_2 \cdot s^{-1} &= \frac{x_1 - sx_0}{r(r-s)} + \frac{rx_0 - x_1}{s(r-s)} = \frac{sx_1 - s^2x_0 + r^2x_0 - rx_1}{rs(r-s)} \implies \\ C_1 \cdot r^{-1} + C_2 \cdot s^{-1} &= \frac{x_0(r^2 - s^2) - x_1(r-s)}{-q(r-s)} = \frac{(px_0 - x_1)}{-q} = x_{-1}. \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 \cdot r^1 + C_2 \cdot s^1, \\ x_0 &= C_1 \cdot r^0 + C_2 \cdot s^0, \\ x_{-1} &= C_1 \cdot r^{-1} + C_2 \cdot s^{-1}. \end{aligned}$$

Desse modo, suponha o resultado válido para todo elemento de $n \in \mathbb{Z}_+$ menor ou igual a n . Assim, para $(n+1)$, obtemos

$$\begin{aligned} x_{-n+1} &= px_{-n} + qx_{-n-1} \implies \\ qx_{-(n+1)} &= x_{-(n-1)} - px_{-n} = C_1r^{-(n-1)} + C_2s^{-(n-1)} - p(C_1r^{-n} + C_2s^{-n}) \\ &= C_1(r^{-(n-1)} - pr^{-n}) + C_2(s^{-(n-1)} - ps^{-n}) \\ &= C_1r^{-n}(r-p) + C_2s^{-n}(s-p). \end{aligned}$$

Como $p = r + s$ e $-q = rs$, então

$$\begin{aligned} qx_{-(n+1)} &= C_1r^{-n}(r-p) + C_2s^{-n}(s-p) \\ &= C_1r^{-n}(-s) + C_2s^{-n}(-r) \\ &= C_1r^{-n}(r^{-1}q) + C_2s^{-n}(s^{-1}q) \implies \\ x_{-(n+1)} &= C_1r^{-n-1} + C_2s^{-n-1} = C_1r^{-(n+1)} + C_2s^{-(n+1)}. \end{aligned}$$

Ou seja, qualquer que seja $n \in \mathbb{Z}$, sempre podemos escrever $x_n = C_1r^n + C_2s^n$. Recordando as operações definidas em 3.1.8, qualquer que seja a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ solução particular da equação de recorrência (3.5), operando coordenada a coordenada, temos que

$$(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} = C_1(r^n)_{n \in \mathbb{Z}} + C_2(s^n)_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Portanto, $\{(r^n), (s^n)\}$ é gerador de $\mathbf{S}$. Por outro lado, fazendo:

$$A(r^n)_{n \in \mathbb{Z}} + B(s^n)_{n \in \mathbb{Z}} = (0)_{n \in \mathbb{Z}}.$$

resulta que $Ar^n + Bs^n = 0$, para todo n inteiro. Como $r, s \neq 0$, resulta que $A = B = 0$. Assim $\{(r^n), (s^n)\}$ é LI.

Portanto $\{(r^n), (s^n)\}$ é base para $\mathbf{S}$, desde que a equação característica (3.8) associada a equação de recorrência (3.5) possua duas raízes distintas. $\square$

Disso temos imediatamente um método para calcular os termos de uma recorrência $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sem precisar necessariamente utilizar os termos anteriores.

Corolário 3.1.1. *Dada a recorrência*

$$\begin{cases} x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n \\ x_0 = a; x_1 = b. \end{cases}$$

Associada a sua equação característica $t^2 - pt - q = 0$ e sejam $r \neq s$ suas raízes, x_n sempre pode ser escrito como

$$x_n = C_1 r^n + C_2 s^n;$$

onde

$$C_1 = \frac{b - sa}{(r - s)}, C_2 = \frac{ra - b}{(r - s)}.$$

Discutimos o caso $r \neq s$, mas falta ainda a possibilidade da equação característica $t^2 - pt - q = 0$ possuir uma raiz de multiplicidade 2, ou seja, $r = s$. Os próximos resultados dão conta deste último caso.

Lema 3.1.2. *Dada a equação de recorrência $x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n$ e sua equação característica:*

$$t^2 - pt - q = 0,$$

então $(nr^n)_{n \in \mathbb{Z}} = (\dots, -kr^{-k}, \dots, -1r^{-1}, 0r^0, 1r^1, \dots, kr^k, \dots)$ é uma solução para a equação de recorrência $x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n$ se, e somente se, r é a única raiz da equação característica.

Demonstração. Se r é a única raiz de $t^2 - pt - q = 0$, então podemos escrever $p = 2r$ e $q = -r^2$. Assim:

$$\begin{aligned} p[nr^n] + q[(n-1)r^{n-1}] &= 2r \cdot nr^n - r^2(n-1)r^{n-1} = \\ &= 2nr^{n+1} - (n-1)r^{n+1} = (2n - n + 1)r^{n+1} = (n+1)r^{n+1}. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $x_n = nr^n$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} x_2 &= px_1 + qx_0 \implies 2r^2 = pr^1 + 0 \cdot qr^0 \implies 2r = p \\ x_1 &= px_0 + qx_{-1} \implies r^1 = p0r^0 - qr^{-1} \implies r^2 = -q \end{aligned}$$

que resulta imediatamente no fato de r ser a única raiz de $t^2 - pt - q = 0$. $\square$

Teorema 3.1.6. Dado $n \in \mathbb{Z}$, considere a equação de recorrência (3.5):

$$x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n;$$

se sua equação característica, $t^2 - pt - q = 0$ possuir uma única raiz real r , então o conjunto $\{(r^n), (nr^n)\}$ é base do $\mathbb{R}$ -espaço vetorial $\mathbf{S}$, conjunto de todas as sequências que satisfazem (3.5).

Demonstração. Dado $n \in \mathbb{Z}$, precisamos mostrar que:

1. $\{(r^n), (nr^n)\}$ é gerador de $\mathbf{S}$;
2. $\{(r^n), (nr^n)\}$ é LI.

Novamente, vamos começar por (1). Dada uma sequência estendida recorrente qualquer $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, satisfazendo a equação (3.5), esta é definida univocamente pela recorrência:

$$\begin{cases} x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n; \\ x_0 = a; x_1 = b, \end{cases}$$

Considere a raiz r da equação característica (3.8). Já sabemos, pelo Lema 3.1.2, que (r^n) e (nr^n) são soluções particulares para a equação de recorrência acima, nas condições postas por hipótese. Assim, qualquer que seja (x_n) , sempre podemos encontrar reais C_1 e C_2 tais que

$$\begin{cases} a = C_1 \cdot r^0 + C_2 \cdot 0r^0 = C_1 \\ b = C_1 \cdot r^1 + C_2 \cdot r^1 = C_1 \cdot r + C_2 \cdot r \end{cases}$$

que representa também um sistema linear. Tal sistema sempre possui solução, ou seja, sempre podemos determinar as constantes C_1 e C_2 , qualquer que seja (x_n) . De fato, o determinante da matriz de coeficientes do sistema é $r \neq 0$, ou seja A é invertível e o sistema possui uma única solução (LIMA, 2009, p. 263, Cor.) dada por

$$C_1 = a; C_2 = \frac{b - ar}{r}.$$

ficando bem determinadas as constantes C_1 e C_2 . Vamos proceder agora por indução. Afirmando que $C_1(r^n) + C_2(nr^n) = (x_n)$, qualquer que seja $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. De fato, vamos proceder por indução sobre $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ e $(x_{-n})_{n \in \mathbb{Z}^+}$, separadamente. Assim, para $n \in \{-1, 0, 1\}$, temos que

$$\begin{aligned} C_1 \cdot r^1 + C_2 \cdot 1r^1 &= b \\ C_1 \cdot r^0 + C_2 \cdot 0r^0 &= a \\ C_1 \cdot r^{-1} + C_2 \cdot -1r^{-1} &= x_{-1} = \frac{b - ap}{q}. \end{aligned}$$

Para $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$, suponha o resultado para todo elemento de $\mathbb{Z}^+$ menor ou igual a n . Assim, para $n + 1$, obtemos

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= pa_n + qa_{n-1} = p(C_1 \cdot r^n + C_2 \cdot nr^n) + q(C_1 \cdot r^{n-1} + C_2 \cdot (n-1)r^{n-1}) \\ &= pC_1 \cdot r^n + pC_2 \cdot nr^n + qC_1 \cdot r^{n-1} + qC_2 \cdot (n-1)r^{n-1} \\ &= C_1(pr^n + qr^{n-1}) + C_2(pnr^n + q(n-1)r^{n-1}) = C_1r^{n+1} + C_2(n+1)r^{n+1}. \end{aligned}$$

Para $(x_{-n})_{n \in \mathbb{Z}^+}$, suponha o resultado para todo elemento de $\mathbb{Z}^+$ menor ou igual a n . Assim, para $-(n+1)$, obtemos

$$\begin{aligned}
 x_{-n+1} &= pa_{-n} + qa_{-n-1} \implies \\
 qa_{-(n+1)} &= a_{-(n-1)} - pa_{-n} = C_1 r^{-(n-1)} + C_2(-(n-1))r^{-(n-1)} - p(C_1 r^{-n} + C_2(-n)r^{-n}) \\
 &= C_1(r^{-(n-1)} - pr^{-n}) + C_2[(-(n-1))r^{-(n-1)} - p(-n)r^{-n}] \\
 &= C_1 q r^{-(n+1)} + C_2 q(-(n+1))r^{-(n+1)} \\
 &= q[C_1 r^{-(n+1)} + C_2[-(n+1)]r^{-(n+1)}] \implies \\
 x_{-(n+1)} &= C_1 r^{-(n+1)} + C_2[-(n+1)]r^{-(n+1)}.
 \end{aligned}$$

Ou seja, qualquer que seja $n \in \mathbb{Z}$, sempre podemos escrever $x_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$, desde que a equação de recorrência possua uma única raiz r . Recordando as operações definidas em 3.1.8, temos que, qualquer que seja a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ solução particular da equação de recorrência (3.5), a mesma pode ser, operando coordenada a coordenada, escrita pela combinação linear

$$(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} = C_1 (r^n)_{n \in \mathbb{Z}} + C_2 n (r^n)_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Portanto, $\{(r^n), (nr^n)\}$ é gerador de $\mathbf{S}$. Por outro lado, fazendo

$$A(r^n)_{n \in \mathbb{Z}} + B(nr^n)_{n \in \mathbb{Z}} = (0)_{n \in \mathbb{Z}}.$$

resulta que $Ar^n + nBr^n = 0$, para todo n inteiro. Como $r \neq 0$, resulta que $A = B = 0$. Assim $\{(r^n), (nr^n)\}$ é LI. Portanto $\{(r^n), (nr^n)\}$ é base para $\mathbf{S}$, desde que a equação característica (3.8) associada a equação de recorrência (3.5) possua uma única raiz real. $\square$

Corolário 3.1.2. *Dada a recorrência*

$$\begin{cases} x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n \\ x_0 = a; x_1 = b. \end{cases}$$

associada a sua equação característica $t^2 - pt - q = 0$ e seja $r \neq 0$ sua única raiz. x_n sempre pode ser escrito como

$$x_n = C_1 r^n + C_2 n r^n;$$

onde $C_1 = a_0$ e $C_2 = \frac{b - ra}{r}$.

Por exemplo, considerando a tabela 8 e o Corolário 3.1.1, conseguimos fórmulas gerais para as *seqüências de Fibonacci e Jacobsthal*, como demonstrado logo a seguir

Solução para seqüência de Fibonacci

$$\begin{cases} C_1 = \frac{b - sa}{(r - s)} = \frac{-1}{\sqrt{5}}; \\ C_2 = \frac{ra - b}{(r - s)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n}{\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$f_n = \frac{r^n - s^n}{r - s}$$

Solução para sequência de Jacobsthal

$$\begin{cases} C_1 = \frac{b-sa}{(r-s)} = \frac{-1}{3}; \\ C_2 = \frac{ra-b}{(r-s)} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$j_n = \frac{1}{3} \cdot 2^n - \frac{1}{3} \cdot (-1)^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \Rightarrow j_n = \frac{r^n - s^n}{r - s}$$

Com esses dois exemplos, nos sentimos provocados a procurar um modo de reescrever a fórmula do Corolário 3.1.1. De fato, substituindo C_1 e C_2 em x_n , obtemos

$$\begin{aligned} x_n &= C_1 \cdot r^n + C_2 \cdot s^n = \frac{b-sa}{(r-s)} \cdot r^n + \frac{ra-b}{(r-s)} \cdot s^n \\ &= \frac{br^n - sr^n a + rs^n a - bs^n}{(s-r)} \\ &= \frac{b(r^n - s^n) - rsa(r^{n-1} - s^{n-1})}{(r-s)} \Rightarrow \\ x_n &= \frac{b(r^n - s^n) + qa(r^{n-1} - s^{n-1})}{(r-s)}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

expressão válida quando a equação característica 3.8 possui duas raízes distintas. Como último exemplo, vamos explorar as recorrências

$$\begin{cases} g_{n+1} = 2g_n - g_{n-1}; \\ g_0 = 0, g_1 = 1; \end{cases} \quad (\text{I})$$

$$\begin{cases} z_{n+1} = 6z_n - 9z_{n-1}; \\ z_0 = -1, z_1 = 2; \end{cases} \quad (\text{II})$$

cujas equações de recorrência são respectivamente $t^2 - 2t + 1 = 0$ e $t^2 - 6t - 9 = 0$. Para a recorrência (I), vamos determinar C_1 e C_2 . A raiz de $t^2 - 2t + 1 = 0$ é $r = 1$.

$$C_1 = g_0 = 0;$$

$$C_2 = \frac{g_1 - rg_0}{r} = \frac{1}{1} = 1.$$

que, pelo Corolário 3.1.2 resulta em

$$g_n = nr^n = n1^n = n.$$

Para a recorrência (II), a raiz de $t^2 - 6t - 9 = 0$ é $r = 3$. Resulta que C_1 e C_2

$$C_1 = z_0 = -1;$$

$$C_2 = \frac{z_1 - rz_0}{r} = \frac{2 - 3(-1)}{3} = \frac{5}{3}.$$

que, pelo Corolário 3.1.2 resulta em

$$z_n = -1(3)^n + \frac{5}{3}n(3)^n = 5n3^{n-1} - 3^n = 3^{n-1}(5n - 3).$$

Da mesma forma que fizemos no caso anterior (duas raízes distintas), vamos tentar exibir uma fórmula geral para o caso de uma única raiz para a equação característica 3.8. De fato, substituindo C_1 e C_2 em x_n , seguindo o corolário 3.1.2, obtemos

$$x_n = C_1 \cdot r^n + C_2 \cdot nr^n = ar^n + \frac{b - ra}{r} \cdot nr^n = ar^n + bnr^{n-1} - anr^n \implies$$

$$x_n = bnr^{n-1} + ar^n(1 - n).$$

3.2 A Sequência de Pell

Trataremos neste trabalho de abordagens para o ensino da *sequência de Pell*, caracterizada pelos termos iniciais $p_0 = 0$; $p_1 = 1$, que aplicados a equação de recorrência $p_{n+1} = 2p_n + p_{n-1}$ dá origem aos termos listados abaixo, chamados de *números de Pell*

$$(0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, \dots)^1.$$

No entanto observaremos sua versão estendida, obtida como solução para $n \in \mathbb{Z}$ da recorrência acima, cuja formalização e consistência já discutimos nas seções anteriores e que pode ser obtida reescrevendo a equação de recorrência como $p_{n-1} = p_{n+1} - 2p_n$ e calculando os termos p_{-n} para $n \in \mathbb{Z}^+$, como demonstrado abaixo para $-8 \leq n \leq -1$

$$\begin{aligned} p_{-1} &= p_1 - p_0 = 1 & p_{-5} &= p_{-3} - p_{-4} = 29 \\ p_{-2} &= p_0 - p_{-1} = -2 & p_{-6} &= p_{-4} - p_{-5} = -70 \\ p_{-3} &= p_{-1} - p_{-2} = 5 & p_{-7} &= p_{-5} - p_{-6} = 169 \\ p_{-4} &= p_{-2} - p_{-3} = -12 & p_{-8} &= p_{-6} - p_{-7} = -408 \end{aligned}$$

resultando na sequência

$$(p_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (\dots, -408, 169, -70, 29, -12, 5, -2, 1, 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, \dots). \quad (3.10)$$

Horadam (1965), Horadam (1971), Horadam (1994a), Koshy (2011), Koshy (2014) tratam da *sequência de Pell*, tanto em sua versão clássica $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quanto de sua versão estendida $(p_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Neste texto, sempre que nos referirmos a *sequência de Pell*, estaremos falando da *sequência estendida de Pell*, salvo menção explícita do contrário.

¹ sequência A000129 em A Enciclopédia On-line de Sequências de Inteiros (1964)

A *sequência de Pell* possui um interessante contexto histórico que pode se fazer útil tanto na compreensão deste objeto matemático quanto na concepção de situações de ensino. As aparições históricas mais antigas ao qual tivemos acesso datam da grécia antiga, relacionadas ao problema da aproximação de raízes (CURD, 2004). Mais recentemente, observamos relações com a geometria e teoria dos números, através da *equação de Pell*: $x^2 - dy^2 = (-1)^n$, equação batizada assim por Euler (1707-1783).

Reservaremos os aspectos históricos à seções posteriores, onde discutiremos em mais detalhes a evolução dos conceitos relacionados a *sequência de Pell*. Seguiremos delimitando alguns aspectos elementares para a *sequência de Pell*, tomando como ponto de partida a seção (3.2).

3.2.1 Propriedades iniciais

Definição 3.2.1. Nomeamos de *sequência de Pell* a recorrência de 2ª ordem:

$$\begin{cases} p_{n+1} = 2p_n + p_{n-1}; \\ p_0 = 0; p_1 = 1. \end{cases}, n \in \mathbb{Z}.$$

A equação característica associada à *sequência de Pell* é $t^2 - 2t - 1 = 0$ e suas respectivas raízes são $s = 1 - \sqrt{2}$ e $r = 1 + \sqrt{2}$. O Teorema (3.1.2) garante que a única sequência estendida que satisfaz a recorrência da definição (3.2.1) é a sequência estendida (3.10), enquanto o Corolário (3.1.1) nos fornece uma fórmula geral para $p_n, n \in \mathbb{Z}$

$$p_n = \frac{p_1(r^n - s^n) + p_0(r^{n-1} - s^{n-1})}{(r - s)} = \frac{(r^n - s^n)}{(r - s)} = \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}. \quad (3.11)$$

Uma observação curiosa é o fato da equação geral dada acima ser constituída unicamente por potências de base irracional e denominador irracional, no entanto, resultando sempre em quantidades inteiras, qualquer que seja $n \in \mathbb{Z}$.

A partir da fórmula geral acima, podemos estabelecer uma relação entre os termos de p_n e p_{-n} , dado n natural. Observe na listagem a seguir que para $n \in \mathbb{N}$, aparentemente, $|p_n| = |p_{-n}|$, alternando o sinal com regularidade, onde p_n , está escrito em azul e p_{-n} escrito em vermelho

$$(\dots, 985, -408, 169, -70, 29, -12, 5, -2, 1, 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, \dots).$$

Lema 3.2.1. Dado $n \in \mathbb{Z}$ e a *sequência de Pell*, vale:

$$p_{-n} = (-1)^{n+1} p_n \quad (3.12)$$

Demonstração. Inicialmente, devemos observar que $r \cdot s = -1$ e $(-1)^n = (-1)^{-n}$. Assim, tomando a equação (3.11), consequência do Corolário (3.1.1), temos que

$$p_{-n} = \frac{(r^{-n} - s^{-n})}{(r - s)} = \frac{\frac{1}{r^n} - \frac{1}{s^n}}{(r - s)} = \frac{\frac{s^n - r^n}{r^n s^n}}{(r - s)} = \frac{-1}{(-1)^n} \cdot \frac{r^n - s^n}{(r - s)} = -1(-1)^n \cdot \frac{r^n - s^n}{(r - s)} = (-1)^{n+1} p_n.$$

□

Outra recorrência relacionada a *sequência de Pell* é a *sequência de Pell-Lucas*, que é chamada por Koshy (2014, p. 23) de *sequência irmã* da *sequência de Pell*. Isso ocorre porque há inúmeras propriedades complementares entre essas duas recorrências. Além disso, essas duas sequências juntas oferecem uma solução para o caso particular da *equação de Pell*: $x^2 - 2y^2 = (-1)^n$ (KOSHY, 2014, p. 40-41). Por conta desses fatos, iremos definir a *sequência de Pell-Lucas* e discutir algumas de suas propriedades, como forma de auxiliar o estudo da *sequência de Pell*. A definição a seguir se baseia na definição fornecida por Koshy (2014, p. 23), apenas escolhendo colocar como termos iniciais q_0 e q_1 ao invés de q_1 e q_2 .

Definição 3.2.2. Nomeamos de *sequência de Pell-Lucas* a recorrência

$$\begin{cases} q_{n+1} = 2q_n + q_{n-1}; \\ q_0 = 1; q_1 = 1. \end{cases}, n \in \mathbb{Z}.$$

que novamente, pelo Teorema (3.1.2) a única sequência estendida que satisfaz a recorrência da Definição (3.2.2) é

$$(q_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (\dots, 577, -239, 99, -41, 17, -7, 3, -1, 1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, 577, \dots). \quad (3.13)$$

A *sequência de Pell-Lucas* possui a mesma equação característica da *sequência de Pell*. Assim a equação geral para *sequência de Pell-Lucas* é

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{q_1(r^n - s^n) + q_0(r^{n-1} - s^{n-1})}{(r - s)} = \frac{(r^n - s^n) + (r^{n-1} - s^{n-1})}{(r - s)} = \frac{(r^n + r^{n-1}) - (s^n + s^{n-1})}{(r - s)} \\ &= \frac{r^n(1 + \frac{1}{r}) - s^n(1 + \frac{1}{s})}{(r - s)} = \frac{r^n(\sqrt{2}) - s^n(-\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

ou seja

$$q_n = \frac{r^n + s^n}{2} = \frac{(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n}{2}. \quad (3.14)$$

Do mesmo modo que há uma relação entre p_n e p_{-n} , podemos estabelecer uma relação entre q_n e q_{-n}

Lema 3.2.2. Dado $n \in \mathbb{Z}$ e a *sequência de Pell-Lucas*, vale

$$q_{-n} = (-1)^n q_n. \quad (3.15)$$

Demonstração. Recorde que $r \cdot s = -1$ e $(-1)^n = (-1)^{-n}$. Tomando a equação (3.14), consequência do Teorema (3.1.5), temos que

$$q_{-n} = \frac{r^{-n} + s^{-n}}{2} = \frac{\frac{1}{r^n} + \frac{1}{s^n}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{s^n + r^n}{r^n s^n} = \frac{1}{r^n s^n} \cdot \frac{r^n + s^n}{2} = (-1)^n \cdot q_n.$$

□

As fórmulas gerais (3.11) e (3.14) também são chamadas de "*fórmula de Binet*" na literatura especializada (DASDEMIR, 2011; KOSHY, 2011; BILGICI, 2014; CATARINO, 2014; KOSHY, 2014). Em Alves (2017a) é possível encontrar mais detalhes históricos sobre descoberta para tais fórmulas de termo geral e sobre o desenvolvimento de algumas ideias correlatas. Mais adiante, em seção oportuna, detalharemos o percurso histórico envolvido. De antemão, a existência e caracterização de fórmulas tipo Binet foi efetuada de modo independente por três matemáticos: Jacques Philippe Marie Binet (1788-1865), Gabriel Lamé (1795-1870) e Abraham De Moivre (1667-1754).

Após essa caracterização inicial, demonstraremos a seguir algumas propriedades elementares envolvendo a *sequência de Pell* e *sequência de Pell-Lucas*.

Teorema 3.2.1. *Dadas a sequência de Pell, para $n \in \mathbb{Z}$, valem*

$$(i) \quad p_{n+m} = p_n p_{m+1} + p_m p_{n-1}$$

$$(ii) \quad p_{n-m} = (-1)^m (p_n p_{m-1} - p_m p_{n-1})$$

Demonstração. Inicialmente, utilizando a solução geral para p_n , escrever p_{n+m} como

$$\begin{aligned} p_{n+m} &= \frac{r^{n+m} - s^{n+m}}{r-s} = \frac{r^{n+m+1} - sr^{n+m} - rs^{n+m} + s^{n+m+1}}{(r-s)^2} \\ &= \frac{r^{n+m+1} - r^n s^{m+1} - r^{m+1} s^n + s^{n+m+1}}{(r-s)^2} + \frac{r^n s^{m+1} - sr^{n+m} - rs^{n+m} + r^{m+1} s^n}{(r-s)^2} \\ &= \frac{r^n (r^{m+1} - s^{m+1}) - s^n (r^{m+1} - s^{m+1})}{(r-s)^2} + \frac{r^m (rs^n - r^n s) - s^m (rs^n - sr^n)}{(r-s)^2} \\ &= \frac{(r^n - s^n)(r^{m+1} - s^{m+1})}{(r-s)(r-s)} + \frac{(r^m - s^m)(rs^n - r^n s)}{(r-s)(r-s)} \\ &= \frac{(r^n - s^n)}{(r-s)} \cdot \frac{(r^{m+1} - s^{m+1})}{(r-s)} + \frac{(r^m - s^m)}{(r-s)} \cdot \frac{(r(-r)^{-n} - (-s)^{-n}s)}{(r-s)} \\ &= \frac{(r^n - s^n)}{(r-s)} \cdot \frac{(r^{m+1} - s^{m+1})}{(r-s)} + \frac{(r^m - s^m)}{(r-s)} \cdot (-1)^n \frac{(r^{-(n-1)} - s^{-(n-1)})}{(r-s)} \\ &= p_n \cdot p_{m+1} + p_m \cdot (-1)^n p_{-(n-1)} = p_n \cdot p_{m+1} + p_m \cdot p_{n-1}. \end{aligned}$$

Da mesma maneira, podemos escrever p_{n-m} como

$$\begin{aligned} p_{n-m} &= \frac{r^{n-m} - s^{n-m}}{r-s} = \frac{r^{n-m+1} - sr^{n-m} - rs^{n-m} + s^{n-m+1}}{(r-s)^2} \\ &= \frac{r^{n-m+1} - r^n s^{-m+1} - s^n r^{-m+1} + s^{n-m+1}}{(r-s)^2} + \frac{-sr^{n-m} + r^n s^{-m+1} + s^n r^{-m+1} - rs^{n-m}}{(r-s)^2} \\ &= \frac{r^{n-m+1} - r^n s^{-m+1} - s^n r^{-m+1} + s^{n-m+1}}{(r-s)^2} + \frac{-sr^{n-m} + r^n s^{-m} s + s^n r^{-m} r - rs^{n-m}}{(r-s)^2} \\ &= \frac{r^n (r^{-m+1} - s^{-m+1}) - s^n (r^{-m+1} - s^{-m+1})}{(r-s)^2} + \frac{r^{n-m-1} - r^{n-1} s^{-m} - s^{n-1} r^{-m} + s^{n-m-1}}{(r-s)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{r^n(r^{-m+1} - s^{-m+1}) - s^n(r^{-m+1} - s^{-m+1})}{(r-s)^2} + \frac{r^{-m}(r^{n-1} - s^{n-1}) - s^{-m}(r^{n-1} - s^{n-1})}{(r-s)^2} \\
&= \frac{(r^n - s^n)(r^{-m+1} - s^{-m+1})}{(r-s)(r-s)} + \frac{(r^{-m} - s^{-m})(r^{n-1} - s^{n-1})}{(r-s)(r-s)} \\
&= \frac{(r^n - s^n)}{(r-s)} \cdot \frac{(r^{-(m-1)} - s^{-(m-1)})}{(r-s)} + \frac{(r^{-m} - s^{-m})}{(r-s)} \cdot \frac{(r^{n-1} - s^{n-1})}{(r-s)} \\
&= p_n \cdot p_{-(m-1)} + p_{-m} \cdot p_{n-1} = (-1)^m (p_n p_{m-1} - p_m p_{n-1}).
\end{aligned}$$

□

Corolário 3.2.1. $p_{2n} = p_n(p_{n+1} + p_{n-1}) = 2p_n^2 + 2p_n p_{n-1}$

Demonstração. Basta escrever p_{n+n} e usar o resultado (i) do Teorema 3.2.1.

□

Corolário 3.2.2. (*Identidade de d'Ocagne*)

$$(-1)^m p_{n-m} = p_n p_{m+1} - p_m p_{n+1} \quad (3.16)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
p_{n-m} &= (-1)^m (p_n p_{m-1} - p_m p_{n-1}) \implies \\
&= (-1)^{2m} p_{n-m} = (-1)^{2m} (p_n p_{m-1} - p_m p_{n-1}) \\
&= [p_n (p_{m+1} - 2p_m) - p_m (p_{n+1} - 2p_n)] \\
&= (p_n p_{m+1} - p_m p_{n+1}) - 2p_n p_m + 2p_m p_n = (p_n p_{m+1} - p_m p_{n+1})
\end{aligned} \quad (3.17)$$

□

Teorema 3.2.2. Dadas as sequência de Pell e sequência de Pell-Lucas, para $n \in \mathbb{Z}$, valem as seguinte igualdades

$$(i) \quad p_n + p_{n-1} = q_n$$

$$(ii) \quad q_n + q_{n-1} = 2p_n$$

$$(iii) \quad p_n - p_{n-1} = q_{n-1}$$

$$(iv) \quad q_n - q_{n-1} = 2p_{n-1}.$$

Demonstração. Lembremos que as raízes da equação característica de ambas sequências são $r = 1 + \sqrt{2}$ e $s = 1 - \sqrt{2}$. Assim

$$(r+1) = 2 + \sqrt{2} \quad \text{e} \quad (s+1) = 2 - \sqrt{2}.$$

(i)

$$\begin{aligned}
p_n + p_{n-1} &= \\
&= \frac{r^n - s^n}{r - s} + \frac{r^{n-1} - s^{n-1}}{r - s} = \frac{r^{n-1}(r+1) - s^{n-1}(s+1)}{r - s} \\
&= \frac{r^{n-1}(2 + \sqrt{2}) - s^{n-1}(2 - \sqrt{2})}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{r^{n-1}(2\sqrt{2} + 2) - s^{n-1}(2\sqrt{2} - 2)}{2 \cdot 2} \\
&= \frac{r^{n-1}(\sqrt{2} + 1) - s^{n-1}(\sqrt{2} - 1)}{2} = \frac{r^{n-1} \cdot r - s^{n-1} \cdot (-s)}{2} \\
&= \frac{r^n + s^n}{2} = q_n
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
q_n + q_{n-1} &= \\
&= \frac{r^n + s^n}{2} + \frac{r^{n-1} + s^{n-1}}{2} = \frac{r^{n-1}(r+1) + s^{n-1}(s+1)}{2} \\
&= \frac{r^{n-1}(2 + \sqrt{2}) + s^{n-1}(2 - \sqrt{2})}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{r^{n-1}(2\sqrt{2} + 2) + s^{n-1}(2\sqrt{2} - 2)}{2\sqrt{2}} = 2 \frac{r^{n-1}(\sqrt{2} + 1) + s^{n-1}(\sqrt{2} - 1)}{2\sqrt{2}} \\
&= 2 \left(\frac{r^n - s^n}{r - s} \right) = 2p_n
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
p_n - p_{n-1} &= \\
&= p_n + p_{n-1} - 2p_{n-1} = q_n - q_{n-1} - q_{n-2} \\
&= q_n - q_{n-2} - q_{n-1} = 2q_{n-1} - q_{n-1} = q_{n-1}
\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
q_n - q_{n-1} &= \\
&= q_n + q_{n-1} - 2q_{n-1} = 2p_n - 2(p_{n-1} + p_{n-2}) \\
&= 2p_n - 2(p_n - p_{n-1}) = 2p_n - 2p_n + 2p_{n-1} = 2p_{n-1}
\end{aligned}$$

□

Os resultados anteriores permitem as seguintes conclusões

Corolário 3.2.3.

$$p_{2n} = 2p_n q_n. \quad (3.18)$$

Demonstração. Tomando o corolário 3.2.1

$$p_{2n} = 2p_n^2 + 2p_n p_{n-1} = 2p_n(p_n + p_{n-1}) = 2p_n q_n.$$

□

Corolário 3.2.4. (*Theon de Smyrna*)

$$p_{n+1} = p_n + q_n \quad (3.19)$$

$$q_{n+1} = 2p_n + q_n. \quad (3.20)$$

Demonstração. Para provar (3.19) basta somar as equações

$$\begin{cases} q_n + q_{n-1} = 2p_n \\ p_n + p_{n-1} = q_n \end{cases}$$

Para (3.20)

$$q_{n+1} = p_{n+1} + p_n = 2p_n + p_n + p_{n-1} = 2p_n + q_n$$

□

Corolário 3.2.5.

$$q_n \equiv 1 \pmod{2}$$

$$p_{2k} \equiv 0 \pmod{2}$$

$$p_{2k+1} \equiv 1 \pmod{2}$$

Demonstração. Veja que $q_n - q_{n-1} = 2p_{n-1}$. Assim é imediato que $q_n \equiv q_{n-1} \pmod{2}$. Como $q_0 = 1$, resulta que $q_n \equiv 1 \pmod{2}$. Ou seja, q_n ímpar, para todo n . Por outro lado, $p_n - p_{n-1} = q_{n-1} \equiv 1 \pmod{2}$. Assim existem $k_0, k_1 \in \mathbb{Z}$ tais que:

$$p_n - p_{n-1} = 2k_0 + 1$$

$$p_{n-1} - p_{n-2} = 2k_1 + 1.$$

Somando ambas equações, obtemos

$$p_n - p_{n-2} = 2(k_0 + k_1 + 1) \implies p_n \equiv p_{n-2} \pmod{2}.$$

Ou seja

$$p_{2k} \equiv p_{2(k-1)} \pmod{2}$$

$$p_{2k+1} \equiv p_{2(k-1)+1} \pmod{2}$$

lembrando que $a \equiv b \pmod{2} \iff b \equiv a \pmod{2}$, todo p_n de índice par é *congruente* $\pmod{2}$. O mesmo vale para p_n com índices ímpar. Como $p_0 = 0$ e $p_1 = 1$, temos que

$$p_{2k} \equiv 0 \pmod{2}$$

$$p_{2k+1} \equiv 1 \pmod{2}$$

De onde podemos concluir também que p_{2k} é sempre par e p_{2k+1} é sempre ímpar.

□

Teorema 3.2.3. *Dadas as sequência de Pell e sequência de Pell-Lucas, para n inteiro, valem as seguinte igualdades:*

- (i) $p_{n+1}^2 - p_n^2 = q_{n+1}q_n$
- (ii) $q_{n+1}^2 - q_n^2 = 4p_{n+1}p_n$
- (iii) $p_{n+1}^2 + p_n^2 = p_{2n+1}$
- (iv) $q_{n+1}^2 + q_n^2 = 2p_{2n+1}$

Demonstração. (i) e (ii) podem ser constatadas da seguinte forma

$$(i) : p_{n+1}^2 - p_n^2 = (p_{n+1} + p_n)(p_{n+1} - p_n) = q_{n+1}q_n.$$

$$(ii) : q_{n+1}^2 - q_n^2 = (q_{n+1} + q_n)(q_{n+1} - q_n) = 2p_{n+1} \cdot 2p_n = 4p_{n+1}p_n.$$

(iii) e (iv) ficam demonstradas com as igualdades abaixo:

$$(iii) : p_{2n+1} = p_{(n+1)+n} = p_{n+1}p_{n+1} + p_np_n = p_{n+1}^2 + p_n^2.$$

$$\begin{aligned} (iv) : 2p_{2n+1} &= 2p_{n+1}^2 + 2p_n^2 = (q_{n+1} + q_n)p_{n+1} + (q_{n+1} - q_n)p_n = \\ &= q_{n+1}p_{n+1} + q_np_{n+1} + q_{n+1}p_n - q_np_n = q_{n+1}(p_{n+1} + p_n) + q_n(p_{n+1} - p_n) = \\ &= q_{n+1}^2 + q_n^2. \end{aligned}$$

□

Uma identidade muito famosa, com versões equivalentes para outras recorrências lineares como a *sequência de Fibonacci*, *sequência de Lucas* e *sequência de Jacobsthal* é a *Identidade de Catalan* demonstrada logo a seguir. Exibimos uma demonstração similar a que vemos em Bilgici (2014, pg. 1433, Thm 5).

Teorema 3.2.4. *(Identidade de Catalan) Dada $(p_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, é válida a equação*

$$p_n^2 - p_{n+r}p_{n-r} = (-1)^{n-r}p_r^2, \forall n, r \in \mathbb{Z} \quad (3.21)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} p_n^2 - p_{n+r}p_{n-r} &= \left(\frac{r^n - s^n}{r - s} \right)^2 - \frac{(r^{n+r} - s^{n+r})}{r - s} \cdot \frac{(r^{n-r} - s^{n-r})}{r - s} \\ &= \frac{r^{2n} + s^{2n} - 2(rs)^n}{(r - s)^2} - \frac{(r^{2n} - r^{n+r}s^{n-r} - r^{n-r}s^{n+r} + s^{2n})}{(r - s)^2} \\ &= \frac{r^{n+r}s^{n-r} + r^{n-r}s^{n+r} - 2(rs)^n}{(r - s)^{2r^{2n}}} = \frac{\frac{r^n r^r s^n}{s^r} + \frac{r^n s^n s^r}{r^r} - 2(rs)^n}{(r - s)^2} \\ &= \frac{\frac{(rs)^n r^{2r} + (rs)^n s^{2r} - 2(rs)^n (rs)^r}{(rs)^r}}{(r - s)^2} = (rs)^{n-r} \frac{(r^{2r} - 2(rs)^r + s^{2r})}{(r - s)^2} \\ &= (-1)^{n-r} \frac{(r^r - s^r)^2}{(r - s)^2} = (-1)^{n-r} p_r^2. \end{aligned}$$

□

Corolário 3.2.6. (*Identidade de Cassini*) Dada $(p_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, é válida a equação

$$p_n^2 - p_{n+1}p_{n-1} = (-1)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{Z}$$

Demonstração. Basta tomar a *Identidade de Catalan*, para $r = 1$. □

É possível organizar representações matriciais tanto para a *sequência de Pell*. Na próxima sessão, discutiremos os aspectos gerais para realizar tais representações.

3.2.2 Abordagens matriciais

Bicknell (1975) e Ercolano (1979) afirmam que os *números de Pell* podem ser gerados também através da recorrência a seguir

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad P_n = P_1^n = \begin{bmatrix} p_{n+1} & p_n \\ p_n & p_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

No entanto, precisamos explicitar alguns pré-requisitos.

Definição 3.2.3. Dada uma matriz quadrada M , definimos M^n , para $n \in \mathbb{N}$ da seguinte forma

$$\begin{cases} M^0 = Id \\ M^n = M \cdot M^{n-1} \end{cases}$$

onde Id é a matriz identidade de ordem i .

Lema 3.2.3. $M \cdot M^{n-1} = M^{n-1} \cdot M$, $n \geq 1$.

Demonstração. Para $n = 1$, temos

$$M \cdot M^0 = M \cdot Id = Id \cdot M = M^0 \cdot M.$$

Suponha que, para todo elemento de $\mathbb{Z}^+$ menor ou igual a n , vale

$$M \cdot M^{n-1} = M^{n-1} \cdot M.$$

para $n + 1$ temos

$$M \cdot M^n = M \cdot (M \cdot M^{n-1}) = M \cdot (M^{n-1} \cdot M) = (M \cdot M^{n-1}) \cdot M = M^n \cdot M.$$

□

Encerrando a discursão sobre a consistência da Definição (3.2.3), enunciamos o resultado

Teorema 3.2.5. Dados $n, m \in \mathbb{Z}^+$ e M uma matriz quadrada invertível. Valem as seguintes afirmações

$$(i) \quad M^{m+n} = M^m \cdot M^n;$$

$$(ii) (M^{-1})^n = (M^n)^{-1}.$$

onde M^{-1} e $(M^n)^{-1}$ são respectivamente as inversas multiplicativas de M e M^n .

Demonstração. (i) : Fixado m , seguiremos por indução em n . O caso $n = 0$ é elementar, pois $M^{m+0} = M^m \cdot M^0 = M^m \cdot Id = M^m = M^{m+0}$. Assim, para todo $m \in \mathbb{Z}^+$ e $n = 1$, a definição (3.2.3) resulta em

$$M^{m+1} = M^m \cdot M^1.$$

Suponha que para todo elemento de $\mathbb{Z}^+$ menor ou igual a n vale

$$M^{m+n} = M^m \cdot M^n.$$

Assim, para $n + 1 \in \mathbb{Z}^+$, temos

$$M^{m+(n+1)} = M^{(m+n)+1} = M^{(m+n)} \cdot M^1 = M^m \cdot M^n \cdot M^1 = M^m \cdot M^{n+1}.$$

(ii) : Novamente, o caso $n = 0$ é elementar, pois $(M^{-1})^0 = Id = Id^{-1} = (M^0)^{-1}$. Assim, para todo $m \in \mathbb{Z}^+$ e $n = 1$, a definição (3.2.3) resulta em

$$(M^{-1})^1 = M^{-1} \cdot (M^{-1})^0 = M^{-1} \cdot Id = M^{-1} = (M \cdot M^0)^{-1} = (M^1)^{-1}$$

Suponha que para todo elemento de $\mathbb{Z}^+$ menor ou igual a n

$$(M^{-1})^n = (M^n)^{-1}$$

Assim, para $n + 1 \in \mathbb{Z}^+$, temos

$$(M^{-1})^{n+1} = M^{-1} \cdot (M^{-1})^n = M^{-1} \cdot (M^n)^{-1} = (M^n \cdot M)^{-1} = (M^{n+1})^{-1}.$$

□

De posse de tais propriedades, estenderemos a Definição 3.2.3 para potências inteiras, delimitando o significado de M^{-n} .

Definição 3.2.4. Dado $n \in \mathbb{N}$ e uma matriz quadrada M , definimos

$$M^{-n} := (M^{-1})^n.$$

Agora vamos voltar a discussão acerca das representações matriciais para os *números de Pell*.

Teorema 3.2.6. Dada (p_n) e a matriz $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ vale a propriedade

$$P^n = \begin{bmatrix} p_{n+1} & p_n \\ p_n & p_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.22)$$

Demonstração. Vamos fazer a demonstração inicialmente apenas para $n \in \mathbb{Z}^+$. Para $n = 0$ temos

$$P^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & p_0 \\ p_0 & p_{-1} \end{bmatrix}.$$

bem como, para $n = 1$, obtemos

$$P^1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_2 & p_1 \\ p_1 & p_0 \end{bmatrix}.$$

supondo o resultado válido para todo elemento de $\mathbb{Z}^+$ menor ou igual a n

$$P^n = \begin{bmatrix} p_{n+1} & p_n \\ p_n & p_{n-1} \end{bmatrix},$$

então, para $n + 1$, podemos escrever

$$\begin{aligned} P^{n+1} &= P \cdot P^n = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{n+1} & p_n \\ p_n & p_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2p_{n+1} + 1p_n & 2p_n + 1p_{n-1} \\ 1p_{n+1} + 0p_n & 1p_n + 0p_{n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow \\ &P^{n+1} = \begin{bmatrix} p_{n+2} & p_{n+1} \\ p_{n+1} & p_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Agora, para $n = -1$, temos que

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 & p_{-1} \\ p_{-1} & p_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{-1+1} & p_{-1} \\ p_{-1} & p_{-1-1} \end{bmatrix}$$

supondo então o resultado válido para todo elemento de $\mathbb{Z}^+$ menor ou igual a n , temos que

$$P^{-n} = \begin{bmatrix} p_{-n+1} & p_{-n} \\ p_{-n} & p_{-n-1} \end{bmatrix}.$$

Para $-(n + 1)$, obtemos

$$\begin{aligned} P^{-(n+1)} &= (P^{-1})^{n+1} = P^{-1} \cdot (P^{-1})^n = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{-n+1} & p_{-n} \\ p_{-n} & p_{-n-1} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} p_{-n} & p_{-n-1} \\ p_{-n+1} - 2p_{-n} & p_{-n} - 2p_{-n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{-n} & p_{-n-1} \\ p_{-n-1} & p_{-n-2} \end{bmatrix} \Rightarrow \\ P^{-(n+1)} &= \begin{bmatrix} p_{-(n+1)+1} & p_{-(n+1)} \\ p_{-(n+1)} & p_{-(n+1)-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Tabela 9 – Algumas matrizes P_n

P_{-3}	P_{-2}	P_{-1}	P_0	P_1	P_2	P_3
$\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -12 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

Fonte: Autor

Bicknell (1975) e Ercolano (1979) abordam a propriedade do Teorema 3.2.6 apenas para $n \in \mathbb{Z}^+$. A partir desta propriedade, podemos definir uma sequência de matrizes a partir da matriz P , simplesmente colocando $P_n = P^n$, para $n \in \mathbb{Z}$. Na tabela 9, vemos alguns valores calculados para as matrizes P_n

A partir do Teorema 3.2.6, podemos estabelecer o seguinte resultado

Corolário 3.2.7.

$$P_{-n} = (-1)^{n+1} P_n^{-1} \quad (3.23)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 P_{-n} &= \begin{bmatrix} P_{-n+1} & P_{-n} \\ P_{-n} & P_{-n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{-(n-1)} & P_{-n} \\ P_{-n} & P_{-(n+1)} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (-1)^n p_{n-1} & (-1)^{n+1} p_n \\ (-1)^{n+1} p_n & (-1)^{n+2} p_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^n p_{n-1} & (-1)^{n+1} p_n \\ (-1)^{n+1} p_n & (-1)^n p_{n+1} \end{bmatrix} \\
 &= (-1)^n \begin{bmatrix} p_{n-1} & -p_n \\ -p_n & p_{n+1} \end{bmatrix} = (-1)^{n+1} P_n^{-1}.
 \end{aligned}$$

□

Note que a matriz P_1 definida acima é diagonalizável e isso nos permite obter a fórmula de Binet para $(p_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, o que mostra que o Teorema 3.2.6 serve como ponto de partida para uma definição independente para a $(p_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Teorema 3.2.7. (Fórmula de Binet - Abordagem Matricial) Dado $n \in \mathbb{Z}$

$$p_n = \frac{r^n - s^n}{r - s},$$

onde $r = (1 + \sqrt{2})$ e $s = (1 - \sqrt{2})$ são os autovalores de $P_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Demonstração. Inicialmente, lembramos que se uma matriz A é dita diagonalizável quando existem matrizes V e D tais que $A = VDV^{-1}$, de modo que D é matriz diagonal dos autovalores de A e V é matriz dos autovetores coluna de A . Além disso

$$A^n = V D^n V^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Como a matriz diagonal D possui determinante diferente de 0, existe D^{-1} e

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = [(VDV^{-1})^{-1}]^n = [VD^{-1}V^{-1}]^n = V D^{-n} V^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Assim, a equação característica da matriz P_1 é dada por

$$\det(P_1 - tI_2) = 0 \implies t^2 - 2t - 1 = 0$$

cujas raízes são justamente $r = (1 + \sqrt{2})$ e $s = (1 - \sqrt{2})$, portanto autovalores de P_1 . Os autovetores correspondentes são

$$v_r = \begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_s = \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De onde podemos afirmar que a soma das dimensões dos autoespaços associados é igual a 2. Dessa forma P_1 é diagonalizável e podemos escrever

$$\begin{aligned} P_n = P_1^n = VD^nV^{-1} &= \begin{bmatrix} r & s \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r^n & 0 \\ 0 & s^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r-s} & -\frac{s}{r-s} \\ -\frac{1}{r-s} & \frac{r}{r-s} \end{bmatrix} \implies \\ \begin{bmatrix} p_{n+1} & p_n \\ p_n & p_{n-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{r^{n+1}-s^{n+1}}{r-s} & \frac{r^n-s^n}{r-s} \\ \frac{r^n-s^n}{r-s} & \frac{r^{n-1}-s^{n-1}}{r-s} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De modo análogo tomando $-n$ obtemos

$$\begin{aligned} P_{-n} = P_1^{-n} = VD^{-n}V^{-1} &= \begin{bmatrix} r & s \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r^{-n} & 0 \\ 0 & s^{-n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r-s} & -\frac{s}{r-s} \\ -\frac{1}{r-s} & \frac{r}{r-s} \end{bmatrix} \implies \\ \begin{bmatrix} p_{-n+1} & p_{-n} \\ p_{-n} & p_{-n-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{r^{-n+1}-s^{-n+1}}{r-s} & \frac{r^{-n}-s^{-n}}{r-s} \\ \frac{r^{-n}-s^{-n}}{r-s} & \frac{r^{-n-1}-s^{-n-1}}{r-s} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ou seja, $p_n = \frac{r^n - s^n}{r - s}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. □

Daí concluímos que a partir do Teorema 3.2.6 podemos tomar um caminho alternativo para a definição de $(p_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

A partir do exposto, devemos perguntar quais matrizes iniciais P_1 podem ser utilizadas como ponto de partida para uma definição matricial de (p_n) . As ideias evocadas nesta busca são uma simplificação das ideias expostas em Ercolano (1979).

Observando que a fórmula de Binet (3.11) é caracterizadora da *sequência de Pell*, e que a igualdade $P_1^n = VD^nV^{-1}$ resulta exatamente na mesma, devemos perguntar quais matrizes A resulta na diagonalização

$$A = VDV^{-1} = \begin{bmatrix} r & s \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r-s} & \frac{s}{r-s} \\ -\frac{1}{r-s} & \frac{r}{r-s} \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

onde $r = (1 + \sqrt{2})$ e $s = (1 - \sqrt{2})$. Em primeiro lugar, vamos nos preocupar com os autovalores de uma matriz genérica 2x2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

obtidos através do polinômio característico dado por

$$p(x) = \det(A - xId) = \begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix} = x^2 - (a+d)x + \det(A)$$

ou seja, para que a matriz A possua os mesmos autovalores $r = 1 + \sqrt{2}$ e $s = 1 - \sqrt{2}$ deve ser tal que $Tr(A) = 2$ e $\det(A) = -1$. Desejamos que tal matriz também seja parte de uma sequência matricial que manifeste os termos da *sequência de Pell*. Observando os termos desta sequência obtemos as seguintes matrizes satisfazendo $Tr(A) = 2$ compostas por *números de pell*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 2 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix}$$

Para obtermos $\det(A) = -1$, os possíveis valores para a e b são

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonalizando tais matrizes, obtemos

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} r & s \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r-s} & -\frac{s}{r-s} \\ -\frac{1}{r-s} & \frac{r}{r-s} \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} -s & -r \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r-s} & \frac{r}{r-s} \\ -\frac{1}{r-s} & -\frac{s}{r-s} \end{bmatrix} \\ A_3 &= \begin{bmatrix} \frac{r-s}{2} & -\frac{r-s}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r-s} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{r-s} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ A_4 &= \begin{bmatrix} \frac{2}{r-s} & -\frac{2}{r-s} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{r-s} & \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{r-s} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

desse modo

$$\begin{aligned} (A_1)^n &= \begin{bmatrix} r & s \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r^n & 0 \\ 0 & s^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r-s} & \frac{-s}{r-s} \\ -\frac{1}{r-s} & \frac{r}{r-s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^{n+1} & s^{n+1} \\ r^n & s^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r-s} & \frac{-s}{r-s} \\ -\frac{1}{r-s} & \frac{r}{r-s} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{r^{n+1}-s^{n+1}}{r-s} & \frac{r^n-s^n}{r-s} \\ \frac{r^n-s^n}{r-s} & \frac{r^{n-1}-s^{n-1}}{r-s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{n+1} & p_n \\ p_n & p_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A_2)^n &= \begin{bmatrix} -s & -r \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r^n & 0 \\ 0 & s^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r-s} & \frac{r}{r-s} \\ \frac{-r}{r-s} & \frac{-s}{r-s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^{n-1} & s^{n-1} \\ r^n & s^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r-s} & \frac{r}{r-s} \\ \frac{-1}{r-s} & \frac{-s}{r-s} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s^{n-1}-r^{n-1}}{s-r} & \frac{s^n-r^n}{s-r} \\ \frac{s^n-r^n}{s-r} & \frac{s^{n+1}-r^{n+1}}{s-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{n-1} & p_n \\ p_n & p_{n+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A_3)^n &= \begin{bmatrix} \frac{r-s}{2} & -\frac{r-s}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r^n & 0 \\ 0 & s^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r-s} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{r-s} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{r^{n+1}+r^{n-1}}{2} & \frac{s^{n+1}+s^{n-1}}{2} \\ r^n & s^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r-s} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{r-s} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{r^{n+1}-s^{n+1}+r^{n-1}-s^{n-1}}{2(r-s)} & \frac{1}{2} \left(\frac{(r^{n+1}+s^{n+1})}{2} + \frac{(r^{n-1}+s^{n-1})}{2} \right) \\ p_n & q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p_{n+1}+p_{n-1}}{2} & \frac{q_{n+1}+q_{n-1}}{2} \\ p_n & q_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} q_n & p_n \\ p_n & q_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A_4)^n &= \begin{bmatrix} \frac{2}{r-s} & -\frac{2}{r-s} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r^n & 0 \\ 0 & s^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{r-s} & \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{r-s} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2r^n}{r-s} & -\frac{2s^n}{r-s} \\ r^n & s^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{r-s} & \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{r-s} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{4(r^n-s^n)}{(r-s)^2} & \frac{r^n-s^n}{r-s} \\ \frac{2(r^n-s^n)}{r-s} & \frac{r^n+s^n}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}p_n & p_n \\ 2p_n & q_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

As matrizes A_3 e A_4 nos fornecem resultados interessantes, mas que não correspondem ao que procurávamos. Ou seja, somente A_1 e A_2 são matrizes que podem ser usadas como termos iniciais para uma dada sequência matricial A^n de modo que A^n exhibe explicitamente p_n .

$$\begin{aligned}
(A_1)^1 &= \begin{bmatrix} p_2 & p_1 \\ p_1 & p_0 \end{bmatrix} \text{ e } (A_1)^n = \begin{bmatrix} p_{n+1} & p_n \\ p_n & p_{n-1} \end{bmatrix}, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}; \\
(A_2)^1 &= \begin{bmatrix} p_0 & p_1 \\ p_1 & p_2 \end{bmatrix} \text{ e } (A_2)^n = \begin{bmatrix} p_{n-1} & p_n \\ p_n & p_{n+1} \end{bmatrix}, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

No entanto, as matrizes A_3 e A_4 nos indicam que outras identidades matriciais podem existir e que as mesmas podem nos fornecer propriedades extras. Por exemplo considerando os determinantes de tais matrizes, obtemos imediatamente que

$$(-1)^n = 2(q_n^2 - p_n^2)$$

$$(-1)^n = p_n \left(\frac{1}{\sqrt{2}} q_n - 2p_n \right)$$

A seguir, trataremos do comportamento e propriedades de convergência para (p_n) .

3.2.3 Convergência de p_{n+1}/p_n .

A *sequência de Fibonacci*, célebre sequência numérica introduzida pela primeira vez por Leonardo de Pisa (1175 - 1250), é famosa por estar relacionada com o *número de ouro*, ϕ , famosa constante matemática usada desde a antiguidade na arquitetura por causa de sua

presença recorrente em diversas estruturas simétricas tanto em geometria quanto na natureza (BELINI, 2015).

O irracional $\phi \approx 1,6180339...$, que também é chamado de Proporção Áurea, pode ser encontrado a partir da *sequência de Fibonacci*, $f_n = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...)$, através do limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi$. Curiosamente, Belini (2015) nos diz que foi Kepler (1571-1630) que notou pela primeira vez esse fato.

Assim, vamos explorar uma propriedade similar para *sequência de Pell*, ou seja, a convergência de $t_n = p_{n+1}/p_n$.

Para determinar a convergência, nos inspiraremos nos procedimentos exibidos por Pereira e Ferreira (2008), repetidos por Almeida (2014), usados para determinar a convergência de (f_{n+1}/f_n) , para o caso da *sequência de Fibonacci*.

Pretendemos utilizar o seguinte resultado sobre convergência de sequências, presente em Lima (2007, pg. 86, Teor 4)

Teorema 3.2.8. *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Trataremos de examinar a convergência da sequência $t_n = \frac{p_{n+1}}{p_n}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^*$.

Inicialmente vamos determinar limites superiores e inferiores para t_n . Na Tabela 10, calculamos os 10 primeiros termos de t_n , para $n \geq 1$

Tabela 10 – Valores de t_n para $n \geq 0$

n	t_n	n	t_n
1	2	2	2,5
3	2,4	4	2,416
5	2,4137931...	6	2,414285714...
7	2,414201183...	8	2,414215686...
9	2,414213198...	10	2,414213625...

Fonte: Autor

Note que não existe t_0 , pois $t_0 = \frac{p_1}{p_0} = \frac{1}{0}$. Aparentemente, t_n é crescente para n ímpar e decrescente para n par. Provaremos esse fato mais adiante. Partindo desta observação, vamos separar t_n em duas subsequências: t_{2k} e t_{2k-1} , para todo $k \in \mathbb{N}^*$. Essa fato será importante para a convergência de t_n . Complementarmente, 10 primeiros termos de t_n , para $n \leq 0$ são mostradas na Tabela 11.

Tabela 11 – Valores de t_n para $n \leq 0$

n	t_n	n	t_n
-1	0	-2	-0,5
-3	-0,4	-4	-0,416
-5	-0,4137931...	-6	-0,414285714...
-7	-0,414201183...	-8	-0,414215686...
-9	-0,414213198...	-10	-0,414213625...

Fonte: Autor

Da mesma forma, a simples inspeção nos sugere que t_n é decrescente para n ímpar e crescente para n par. Logo demonstraremos esse fato. Vamos separar t_n em duas subsequências: t_{2k} e t_{2k+1} , para todo $k \in -\mathbb{N}^*$. Podemos representar genericamente as subsequências

mencionadas como

$$t_n = \begin{cases} t_{2k-2}, t_{2k}, t_{2k+2}, t_{2k+4}, \dots \\ t_{2k-3}, t_{2k-1}, t_{2k+1}, t_{2k+3}, \dots \end{cases}$$

tanto para k como $-k$, onde $k \in \mathbb{N}^*$.

Observando que $\sqrt{2} \approx 1,414213562\dots$, os valores calculados de t_n nos permitem conjecturar que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n) &= 1 + \sqrt{2} \\ \lim_{n \rightarrow -\infty} (t_n) &= 1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

Vamos mostrar que t_n é limitada e que as subsequências definidas acima são todas monótonas, exatamente como descrito acima.

Primeiramente vamos mostrar que t_n é limitada. Para $n > 0$, como $0 < p_n < p_{n+1}$, então

$$0 < t_n = \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{2p_n + p_{n-1}}{p_n} = 2 + \frac{p_{n-1}}{p_n} < 3.$$

Por outro lado,

$$t_{-n} = \frac{p_{-n+1}}{p_{-n}} = \frac{p_{-(n-1)}}{p_{-n}} = -\frac{p_{n-1}}{p_n} = -\frac{p_{n-1}}{2p_{n-1} + p_{n-2}} > -\frac{p_{n-1}}{2p_{n-1}} = -0,5$$

Ou seja, $t_n \in (0, 3)$ e $t_{-n} \in (-\frac{1}{2}, 0)$. Assim $t_n \in (-\frac{1}{2}, 3)$, para todo $n \in \mathbb{Z}^*$. Perceba também que

$$\begin{aligned} t_{-n} &= \frac{p_{-n+1}}{p_{-n}} = \frac{p_{-(n-1)}}{p_{-n}} = -\frac{p_{(n-1)}}{p_n} \implies \\ -t_{-n} &= (t_{n-1})^{-1} \end{aligned} \tag{3.25}$$

Para discutir a monotonicidade das subsequências, utilizaremos o seguinte resultado

Teorema 3.2.9. *Dado $t_n = \frac{p_{n+1}}{p_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, as subsequências (t_{2k-1}) e (t_{2k}) , $k \in \mathbb{N}^*$, são respectivamente crescente e decrescente.*

Demonstração. Antes de mais nada, vamos determinar fórmulas de recorrência para as sequências t_n , t_{2k} e t_{2k-1} . Podemos reescrever t_n da seguinte maneira

$$t_n = \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{2p_n + p_{n-1}}{p_n} = 2 + \frac{1}{\frac{p_n}{p_{n-1}}} = 2 + \frac{1}{t_{n-1}}. \tag{3.26}$$

Note também que

$$\begin{cases} t_{n+1} = 2 + \frac{1}{t_n} \\ t_n = 2 + \frac{1}{t_{n-1}} \end{cases} \tag{3.27}$$

Desejamos obter fórmulas de recorrência que "pulem" dois índices, de modo que t_{2k} e t_{2k-1} constituam subsequências de índices sempre pares e ímpares, respectivamente. De posse de

(3.26) e (3.27), obtemos

$$t_{n+1} = \frac{2t_n + 1}{t_n} = \left(\frac{4t_{(n-1)} + 2 + t_{(n-1)}}{t_{(n-1)}} \right) \cdot \frac{t_{(n-1)}}{2t_{(n-1)} + 1} = \left(\frac{4t_{(n-1)} + 2 + t_{(n-1)}}{2t_{(n-1)} + 1} \right) \Rightarrow$$

$$t_{n+1} = \left(\frac{4t_{(n-1)} + 2}{2t_{(n-1)} + 1} \right) + \left(\frac{t_{(n-1)}}{2t_{(n-1)} + 1} \right) = 2 + \left(\frac{t_{(n-1)}}{2t_{(n-1)} + 1} \right),$$

de onde resulta que

$$\begin{cases} t_{2k+2} = 2 + \frac{t_{(2k)}}{2t_{(2k)} + 1} \\ t_{2k+1} = 2 + \frac{t_{(2k-1)}}{2t_{(2k-1)} + 1} \end{cases}$$

que correspondem as equações adequadas para tratar as subsequências (t_{2k}) e (t_{2k-1}) . Seguimos definindo a função auxiliar $Z : (-0,5; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $Z(x) = 2 + \frac{x}{2x+1}$. Afirmamos que $Z(x)$ é crescente. De fato, $Z'(x) = \frac{1}{(2x+1)^2} > 0$. A condição $x > -0,5$ não causa grandes problemas, já que $t_n > -0,5$ sempre que $n \neq -2$

Vamos tratar agora das subsequências. Para facilitar a leitura, reproduzimos novamente aqui as tabelas 10 e 11 na tabela 12.

Tabela 12 – Valores de t_n

n	t_n	n	t_n	n	t_n	n	t_n
1	2	2	2,5	-1	0	-2	-0,5
3	2,4	4	2,41 $\bar{6}$	-3	-0,4	-4	-0,41 $\bar{6}$
5	2,4137931...	6	2,414285714...	-5	-0,4137931...	-6	-0,414285714...
7	2,414201183...	8	2,414215686...	-7	-0,414201183...	-8	-0,414215686...
9	2,414213198...	10	2,414213625...	-9	-0,414213198...	-10	-0,414213625...

Fonte: Autor

No caso de (t_{2k}) , seguiremos por indução. Para $k = 1$, temos que $t_{2 \cdot 1} = t_2 > t_4 = t_{2 \cdot 2}$. Supondo que, para todo $1, 2, 3, \dots, k$, vale

$$t_{2k} > t_{2k+2} = t_{2(k+1)} \quad (3.28)$$

aplicamos $Z(x)$ a ambos os membros de (3.28)

$$t_{2k} > t_{2k+2} \Rightarrow Z(t_{2k}) > Z(t_{2k+2}) \Rightarrow t_{2k+2} > t_{2k+4} \Rightarrow t_{2(k+1)} > t_{2(k+2)}$$

que resulta em t_{2k} monótona decrescente.

No caso de (t_{2k-1}) , novamente seguiremos por indução. Para $k = 1$, temos que $t_{2 \cdot 1 - 1} = t_1 < t_3 = t_{2 \cdot 2 - 1}$. Supondo que, para todo $1, 2, 3, \dots, k$, vale

$$t_{2k-1} < t_{2k+1} = t_{2(k+1)-1} \quad (3.29)$$

aplicamos $Z(x)$ a ambos os membros de (3.29)

$$t_{2k-1} < t_{2k+1} \Rightarrow Z(t_{2k-1}) < Z(t_{2k+1}) \Rightarrow t_{2k+1} < t_{2k+3} \Rightarrow t_{2(k+1)-1} < t_{2(k+2)-1}$$

que resulta em t_{2k-1} monótona crescente. □

Como ambas as subsequências t_{2k} e t_{2k-1} são ambas monótonas e limitadas, então são ambas convergentes, pelo Teorema 3.2.8. Suponhamos então que

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} (t_{2n}) = L_1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (t_{2n-1}) = L_2. \end{cases}$$

Dessa forma, considerando (3.27)

$$\begin{cases} t_{2k+1} = 2 + \frac{1}{t_{2k}} \\ t_{2k} = 2 + \frac{1}{t_{2k-1}} \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} L_2 = 2 + \frac{1}{L_1} \\ L_1 = 2 + \frac{1}{L_2} \end{cases} \implies L_1 = L = L_2.$$

Ambas subsequências são convergentes para L , de tal forma que $\{t_{2k}\} \cup \{t_{(2k-1)}\} = t_n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Assim qualquer outra subsequência convergente será obtida através do destacamento de termos de umas dessas subsequências. Disso, qualquer subsequência de (t_n) , $n > 0$ deverá convergir para L , onde concluímos que $(t_n) \rightarrow L$, $\forall n > 0$. Note que $L > 0$, pois $0 < t_n < 3$ sempre que $n \in \mathbb{N}^*$. Agora, tomando os índices negativos, ou seja t_{-n} , $\forall n \in \mathbb{N}^*$ e lembrando que a equação (3.25) nos diz que

$$t_{-n} = -\frac{1}{t_{n-1}}.$$

Já determinamos que $(t_n) \rightarrow L$ quando $n \rightarrow \infty$. Portanto $(t_{-n}) \rightarrow -\frac{1}{L} = l$, quando $n \rightarrow \infty$, que equivale dizer que $-n \rightarrow -\infty$.

Agora nos resta apenas determinar os valores exatos dos limites L e l . Inicialmente, perceba que $L \cdot l = -1$. Entretanto, de posse da informação da convergência e a partir da equação $p_{n+1} = 2p_n + p_{n-1}$, podemos chegar em

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= 2p_n + p_{n-1} \implies \\ \frac{p_{n+1}}{p_n} &= \frac{2p_n + p_{n-1}}{p_n} \implies \\ \frac{p_{n+1}}{p_n} &= 2 + \frac{p_{n-1}}{p_n} \implies \\ \frac{p_{n+1}}{p_n} &= 2 + \frac{1}{\frac{p_n}{p_{n-1}}} \end{aligned} \tag{3.30}$$

fazendo $n \rightarrow \infty$, da equação (3.30) resulta em $L = 2 + \frac{1}{L} \implies L + l = 2$, nos permitindo escrever o sistema

$$\begin{cases} L \cdot l = -1 \\ L + l = 2 \end{cases}$$

Ou seja, L e l são raízes da equação $x^2 - 2x - 1 = 0$, onde $L = 1 + \sqrt{2}$ e $l = 1 - \sqrt{2}$. Daí

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n) = 1 + \sqrt{2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (t_{-n}) = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

O número $1 + \sqrt{2}$ é chamado de *número de prata*, que denotaremos por δ . O número $1 - \sqrt{2}$ denotaremos por δ' .

Boyer (1996), Almeida (2014), Belini (2015) lembram da *razão áurea*, ou *número de ouro*, como uma proporção privilegiada e conhecida desde a antiguidade, dotada de propriedades matemáticas e estéticas incomuns, encontrada também na natureza. O *número de prata*, possui propriedades similares e faz parte, juntamente com o *número de ouro* de um conjunto numérico especial chamado de *números metálicos*. Uma exposição pormenorizada e possíveis propriedades e aplicações podem ser encontrados em Vinagre (2016).

A *sequência de Pell* também pode ser encarada através de representações algébricas, via funções geradoras ou recorrências polinomiais. A representação via funções geradoras além de simples, nos fornece também conexões entre a *sequência de Pell* e problemas de contagem. Já a representação polinomial é definida via recorrências lineares, o que induz muitas propriedades correlatas com a representação tradicional $(p_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Nas duas seções seguintes discutimos mais detalhes a respeito desses dois modos de representação.

3.3 Funções Geradoras

Funções geradoras são uma ferramenta de grande utilidade para solução de alguns problemas de contagem e para representação e tratamento de recorrências. Utilizaremos nesta seção como referências Wilf (1994), Koshy (2014) e Mansour (2004). Segundo Wilf (1994), funções geradoras são uma ponte entre problemas da matemática discreta e análise, permitindo representar objetos discretos com funções contínuas.

Segundo Koshy (2014) e Wilf (1994), tomaremos a seguinte definição:

Definição 3.3.1. Se $a_0, a_1, a_2, \dots$ é uma sequência (Definição 3.1.1), a função geradora dessa sequência é a série de potências

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (3.31)$$

Essa abordagem foi apresentada pela primeira vez por Abraham De Moivre (1667–1754) e o objetivo é conseguir uma série de potências cujos coeficientes coincidam com a sequência que se deseja estudar. Dessa forma, podemos representar uma dada série $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ através da expressão $A(x)$. Muitas vezes podemos conseguir uma expressão para uma função geradora apenas com manipulações elementares, como nos dois exemplos a seguir

Exemplo 1: Encontrar a função geradora de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 1, 1, 1, 1, \dots)$

Faça inicialmente

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 \cdot x^0 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + \dots$$

Com algumas manipulações, podemos obter uma fórmula explícita para $A(x)$

$$\begin{aligned}
1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots &= 1 + x(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots) \implies \\
A(x) &= 1 + x \cdot A(x) \implies \\
A(x) &= \frac{1}{(1-x)}, x \neq 1.
\end{aligned}$$

Quando falamos de funções geradoras desejamos apenas obter os coeficientes da expansão de $A(x)$ como representantes de nossa sequência, aproveitando as propriedades apresentadas pela expansão para determinar propriedades da sequência. A seguir, mais alguns exemplos

Exemplo 2: Dado $b \in \mathbb{R}$, considere a sequência numérica

$$k_n = \frac{1}{b^{n+1}},$$

cujos primeiros termos de índice positivos são

$$\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{b^3}, \dots, \frac{1}{b^{n+1}}, \dots\right).$$

A função geradora $K(x)$ para a sequência $k(x)$ é

$$\begin{aligned}
K(x) &= \frac{1}{b} + \frac{x}{b^2} + \frac{x^2}{b^3} + \dots + \frac{x^n}{b^{n+1}} + \dots \\
&= \frac{1}{b} + \frac{x}{b} \left(\frac{1}{b} + \frac{x}{b^2} + \dots + \frac{x^{n-1}}{b^n} + \frac{x^n}{b^{n+1}} + \dots \right) \implies \\
K(x) &= \frac{1}{b} + \frac{x}{b} \cdot K(x) \implies \\
K(x) &= \frac{1}{b-x}, x \neq b.
\end{aligned}$$

O próximo exemplo explora a *sequência de Fibonacci* e sua função geradora

Exemplo 3: Considere a sequência de Fibonacci

$$\begin{cases} f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \\ f_0 = 0; f_1 = 1 \end{cases}$$

A função geradora $F(x)$ para a *sequência de Fibonacci* pode ser obtida do seguinte modo (KOSHY, 2018)

$$\begin{aligned}
F(x) &= f_0 + f_1x + f_2x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} f_nx^n \\
xF(x) &= f_0x + f_1x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} f_{n-1}x^n \\
x^2F(x) &= f_0x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} f_{n-2}x^n
\end{aligned}$$

De modo que

$$\begin{aligned}
F(x) - xF(x) - x^2F(x) &= f_1x + (f_2 - f_1)x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (f_n - f_{n-1} - f_{n-2})x^n \implies \\
&= x + (1 - 1)x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (f_n - f_n)x^n \implies \\
F(x)(1 - x - x^2) &= x \implies F(x) = \frac{x}{(1 - x - x^2)}
\end{aligned}$$

De fato, tomando a divisão entre o monômio x e o polinômio $1 - x - x^2$ obtemos

$$\frac{x}{(1 - x - x^2)} = 0x^0 + x + 1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + 13x^7 + 21x^8 + \dots$$

De modo que o expoente de x^n indexa o termo f_n . Do mesmo modo, podemos partir da função geradora $F(x)$ e buscar uma fórmula geral para f_n . Observando que $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $s = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ são soluções para $(1 - x - x^2) = 0$ e utilizando quando oportuno decomposição por frações parciais, obtemos (KOSHY, 2018, p. 235)

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{x}{(1 - x - x^2)} = \frac{x}{1 - (r+s)x + (rs)x^2} = \frac{x}{1 - rx - sx + (rs)x^2} = \\
&= \frac{x}{(1 - rx)(1 - sx)} = \\
&= \frac{1}{r-s} \left(r \cdot \frac{1}{(1 - rx)} - s \cdot \frac{1}{(1 - sx)} \right).
\end{aligned}$$

Fazendo uso do *exemplo 2*, página 77, onde $b = 1$ e trocando x por (rx) ou (sx) chegamos em

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{r-s} \cdot [r(r^0x^0 + r^1x^1 + r^2x^2 + r^3x^3 + \dots + r^nx^n + \dots) \\
&\quad - s(s^0x^0 + s^1x^1 + s^2x^2 + s^3x^3 + \dots + s^nx^n + \dots)] = \\
&= \frac{(r^1 - s^1)}{r-s} \cdot x^0 + \frac{(r^2 - s^2)}{r-s} \cdot x^1 + \dots + \frac{(r^{n+1} - s^{n+1})}{r-s} \cdot x^n + \dots \\
&= f_0x^0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + \dots + f_nx^n + \dots
\end{aligned}$$

O caso da função geradora para *sequência de Fibonacci* nos fornece um caminho para demonstrar o caso geral para recorrências lineares homogêneas de 2º ordem. Como já sabemos, tal recorrência é totalmente determinada por

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1} \\ a_0 = a; a_1 = b \end{cases}$$

cujas função geradora corresponde a

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Teorema 3.3.1. *Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma recorrência linear de 2º ordem, homogênea. Sua função geradora é dada por*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{a + (b - ap)x}{(1 - px - qx^2)} \quad (3.32)$$

Demonstração. Partindo de $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e utilizando uma estratégia similar a que utilizamos para encontrar função geradora para a *sequência de Fibonacci*, considere o sistema de equações

$$\begin{cases} A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n \\ pxA(x) = pa_0 x + pa_1 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} pa_{n-1} x^n \\ qx^2 A(x) = qa_0 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} qa_{n-2} x^n \end{cases}$$

A escolha dos multiplicadores px e qx^2 é feita de modo que a obter somatório nulo pela identidade $x_{n+1} - px_n - qx_{n-1} = 0$. Considere ainda a igualdade

$$A(x) - pxA(x) - qx^2 A(x) = A(x)[1 - px - qx^2]. \quad (3.33)$$

Desse modo, a partir das equações do sistema e considerando $a_0 = a$ e $a_1 = b$, podemos escrever

$$\begin{aligned} & A(x) - pxA(x) - qx^2 A(x) \\ &= a_0 + (a_1 x - pa_0 x) + (a_2 x^2 - pa_1 x^2 - qa_0 x^2) + \sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=3}^{\infty} pa_{n-1} x^n - \sum_{n=3}^{\infty} qa_{n-2} x^n \\ &= a + (b - ap)x + (pb + qa - pb - qa)x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (a_n - pa_{n-1} - qa_{n-2})x^n \\ &= a + (b - ap)x. \end{aligned}$$

Considerando (3.33)

$$A(x) = \frac{a + (b - ap)x}{(1 - px - qx^2)}$$

□

Esta identidade pode ser encontrada também em Horadam (1971, p. 247). Do mesmo modo partindo de (3.32) podemos recuperar a informação sobre a recorrência. Perceba que o denominador $1 - px - qx^2$ pode ser reescrito utilizando as raízes r, s da *equação característica* $x^2 - px - q$ para a recorrência linear de 2º ordem homogênea acima, pois $p = r + s$ e $-q = rs$. Assim

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{a + (b - ap)x}{(1 - (r + s)x + (rs)x^2)} = \frac{a + (b - ap)x}{(1 - rx)(1 - sx)} \\ &= \left[\frac{b - as}{r - s} \cdot \frac{1}{(1 - rx)} \right] + \left[\frac{ar - b}{r - s} \cdot \frac{1}{(1 - sx)} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b(r^n - s^n) - aq(r^{n-1} - s^{n-1})}{r - s} \right) x^n \end{aligned}$$

Que corresponde a fórmula de Binet generalizada obtida anteriormente. Em particular, para a *sequência de Pell*, a função geradora é dada por $P(x) = \frac{x}{(1-2x-x^2)}$. Utilizando uma divisão longa de x por $(1-2x-x^2)$, obtemos

$$P(x) = \frac{x}{(1-2x-x^2)} = x + 2x^2 + 5x^3 + 12x^4 + 29x^5 + 70x^6 + \dots \quad (3.34)$$

Da mesma forma, se considerarmos a *sequência de Pell* para índices negativos

$$(p_{-n})_{n \in \mathbb{N}} = (0, 1, -2, 5, -12, 29, -70, 169, -408, \dots)$$

a função geradora correspondente pode ser obtida reescrevendo a recorrência $p_{n+1} = 2p_n + p_{n-1}$ como $p_{n-1} = p_{n+1} - 2p_n$ e substituindo n por $-n$, de modo que

$$\begin{cases} p_{-(n+1)} = -2p_{-n} + p_{-(n-1)}, & n \geq 1 \\ p_0 = 0; & p_{-1} = 1 \end{cases}$$

fazendo uso da equação (3.32), obtemos (BOUSSAYOUD, 2017, p. 7, Thm 3.3)²

$$P_*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (p_{-n})x^n = \frac{x}{(1+2x-x^2)} = x - 2x^2 + 5x^3 - 12x^4 + 29x^5 - 70x^6 + \dots \quad (3.35)$$

que corresponde a função geradora para $(p_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$. Também é verdade que

$$P(-x) = -P_*(x) \quad (3.36)$$

igualdade que pode ser justificada com a seguinte passagem

$$-P(-x) = -\frac{(-x)}{(1-2(-x)-(-x)^2)} = \frac{x}{(1+2x-x^2)} = P_*(x)$$

De posse das funções geradoras de para $\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} p_{-n} x^n$, podemos destacar as séries $\sum_{n=0}^{\infty} p_{2n} x^{2n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} p_{2n+1} x^{2n+1}$.

Lema 3.3.1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{2n} x^{2n} = \frac{2x^2}{1-6x^2+x^4} \quad (3.37)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{(2n+1)} x^{(2n+1)} = \frac{x(1-x^2)}{1-6x^2+x^4} \quad (3.38)$$

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned} P(x) &= x + 2x^2 + 5x^3 + 12x^4 + 29x^5 + 70x^6 + 169x^7 + 408x^8 \dots \\ -P(-x) &= x - 2x^2 + 5x^3 - 12x^4 + 29x^5 - 70x^6 + 169x^7 - 408x^8 \dots \\ P(-x) &= -x + 2x^2 - 5x^3 + 12x^4 - 29x^5 + 70x^6 - 169x^7 + 408x^8 \dots \end{aligned}$$

² Boussayoud (2017) apenas substitui x por $-x$ em (3.34) para obter o resultado. No entanto, temos a intenção de utilizar a equação geral (3.32) obtida no desenvolvimento.

Para demonstrar a equação (3.37), basta escrever

$$\frac{P(x) + P(-x)}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{x}{(1-2x-x^2)} + \frac{-x}{(1+2x-x^2)} \right] = \frac{2x^2}{1-6x^2+x^4}.$$

Para a equação (3.38), faça

$$\frac{P(x) - P(-x)}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{x}{(1-2x-x^2)} + \frac{x}{(1+2x-x^2)} \right] = \frac{x(1-x^2)}{1-6x^2+x^4}.$$

□

Para os próximos resultados, tomaremos como apoio o resultado central de Mansour (2004, p. 208, Thm 1.1) cujo objetivo é discutir as fórmulas gerais para funções geradoras do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} w_n^k x^n$, onde denota w_n a *sequência de Horadam* (HORADAM, 1965). A *sequência de Horadam* é uma generalização para recorrências lineares de 2ª ordem, homogêneas.

Em particular, nos interessa as funções geradoras do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} p_n^k x^n$. Mansour (2004) nos fornece tanto o comportamento geral para o caso da sequência w_n como também entre as aplicações particulares as funções geradoras para $\sum_{n=0}^{\infty} p_n^k x^n$ para diversos valores de k . Por exemplo, para $k = 1, 2, 3, 4$ temos como verdadeiras as igualdades (MANSOUR, 2004, p. 211)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} p_n^1 x^n &= \frac{x}{(1-2x-x^2)} \\ \sum_{n=0}^{\infty} p_n^2 x^n &= \frac{x(1-x)}{(1+x)(1-6x+x^2)} \\ \sum_{n=0}^{\infty} p_n^3 x^n &= \frac{x(1-4x-x^2)}{(1+2x-x^2)(1-14x-x^2)} \\ \sum_{n=0}^{\infty} p_n^4 x^n &= \frac{x(1+x)(1-14x+x^2)}{(1-x)(1+6x+x^2)(1-34x-x^2)} \end{aligned}$$

Deduziremos as funções geradoras para as subsequências p_{2n} e p_{2n+1} , $n \in \mathbb{N}$. Antes precisamos como resultado auxiliar encontrar a função geradora para $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n p_{n-1} x^n$

Lema 3.3.2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n p_{n-1} x^n = \frac{2x^2}{(1+x)(1-6x+x^2)}$$

Demonstração. Chame $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n p_{n-1} x^n$. Disso segue que

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n p_{n-1} x^n \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}^2 x^n + \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} p_{n-2} x^n \\ &= 2x \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}^2 x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} p_{n-2} x^{n-1} \\ &= 2x \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}^2 x^{n-1} + x \sum_{n=2}^{\infty} p_{n-1} p_{n-2} x^{n-1} + p_0 p_{-1} x^0 \\ &= \frac{2x^2(1-x)}{(1+x)(1-6x+x^2)} + xT(x). \end{aligned}$$

De onde concluímos que

$$T(x)(1-x) = \frac{2x^2(1-x)}{(1+x)(1-6x+x^2)} \implies T(x) = \frac{2x^2}{(1+x)(1-6x+x^2)}$$

□

Teorema 3.3.2.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} p_{2n+1}x^n &= \frac{1-x^2}{(1+x)(1-6x+x^2)} \\ \sum_{n=0}^{\infty} p_{2n}x^n &= \frac{2x}{(1-6x+x^2)} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} p_{2n+1}x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1}^2x^n + \sum_{n=0}^{\infty} p_n^2x^n \\ &= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1}^2x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} p_n^2x^n \\ &= \frac{(1-x)}{(1+x)(1-6x+x^2)} + \frac{x(1-x)}{(1+x)(1-6x+x^2)} \\ &= \frac{1-x^2}{(1+x)(1-6x+x^2)} \\ \sum_{n=0}^{\infty} p_{2n}x^n &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} p_n^2x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} p_n p_{n-1}x^n \\ &= \frac{2x(1-x)}{(1+x)(1-6x+x^2)} + \frac{4x^2}{(1+x)(1-6x+x^2)} \\ &= \frac{2x}{(1-6x+x^2)} \end{aligned}$$

□

Na próxima seção, delinearemos outra abordagem polinomial para representação da *sequência de Pell*.

3.4 Polinômios de Pell

Uma outra maneira de utilizar polinômios para representar uma recorrência linear (a_n) é justamente construir sequências de polinômios $[a_n(x)]_{n \in \mathbb{N}}$ de modo que $a_n(x)$ atende a uma equação de recorrência linear análoga a a_n . Horadam (1994b), Horadam (1996b) oferecem uma definição geral baseado na generalização $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Horadam (1965) para recorrências lineares de 2ª ordem, homogêneas

Definição 3.4.1. (Horadam (1996b, p. 215)) Dados $b(x)$, $p(x)$ e $q(x)$ monômios de grau 0 ou 1, denominamos $w_n(x)$ de polinômio de Horadam

$$\begin{cases} w_{n+1}(x) = p(x)w_n(x) + q(x)w_{n-1}(x), & n > 1 \\ w_0(x) = a; & w_1(x) = b(x) \end{cases} \quad (3.40)$$

Para facilitar a leitura, adotaremos a notação a_x para nos referimos a qualquer polinômio $a(x)$. Assim escreveremos $b(x)$, $p(x)$ e $q(x)$ como b_x , p_x e q_x . Na tabela 13 vemos os 6 primeiros polinômios de Horadam com índices não negativos.

Tabela 13 – Polinômios de Horadam

$w_0(x)$	a
$w_1(x)$	b_x
$w_2(x)$	$b_x p_x + a q_x$
$w_3(x)$	$b_x [p_x^2 + q_x] + a [p_x q_x]$
$w_4(x)$	$b_x [p_x^3 + 2 p_x q_x] + a [p_x^2 q_x + q_x^2]$
$w_5(x)$	$b_x [p_x^4 + 3 p_x^2 q_x + q_x^2] + a [p_x^3 q_x + 2 p_x q_x^2]$

Fonte: Autor

Sobre os *polinômios de Horadam*, definidos pela recorrência (3.40), observe que supondo a existência de $w_{-1}(x)$, obtemos as igualdades

$$\begin{aligned} w_1(x) &= p_x w_0(x) + q_x w_{-1}(x) \implies \\ b_x &= a p_x + q_x w_{-1}(x) \implies \\ w_{-1}(x) &= \frac{b_x - a p_x}{q_x} \end{aligned}$$

Reescrevendo a equação de recorrência presente em (3.40) como

$$w_{n-1}(x) = \frac{w_{n+1}(x) - p_x w_n(x)}{q_x}$$

e repetindo o procedimento anterior, obtemos os polinômios da tabela 13.

Tabela 14 – Polinômios de Horadam $n = -1, -2, -3, -4, -5$.

$w_{-1}(x)$	$q_x^{-1} \cdot [b_x + a(-p_x)]$
$w_{-2}(x)$	$q_x^{-2} \cdot [b_x(-p_x) + a[(-p_x)^2 + q_x]]$
$w_{-3}(x)$	$q_x^{-3} \cdot [b_x[(-p_x)^2 + q_x] + a[(-p_x)^3 + 2(-p_x)q_x]]$
$w_{-4}(x)$	$q_x^{-4} \cdot [b_x[(-p_x)^3 + 2(-p_x)q_x] + a[(-p_x)^4 + 3(-p_x)^2 q_x + q_x^2]]$
$w_{-5}(x)$	$q_x^{-5} \cdot [b_x[(-p_x)^4 + 3(-p_x)^2 q_x + q_x^2] + a[(-p_x)^5 + 4(-p_x)^3 q_x + 3(-p_x)q_x]]$

Fonte: Autor

Resultando na sequência estendida para os polinômios de Horadam. A partir de agora, tomaremos $[w_n(x)]_{n \in \mathbb{Z}}$ ao invés de $[w_n(x)]_{n \in \mathbb{N}}$. Seguindo Horadam (1994b), a equação característica para $[w_n(x)]_{n \in \mathbb{Z}}$ é

$$t^2 - p_x t - q_x = 0 \quad (3.41)$$

cujas raízes são

$$\begin{aligned} s_x &= \frac{p_x + \sqrt{p_x^2 + 4q_x}}{2} \\ r_x &= \frac{p_x - \sqrt{p_x^2 + 4q_x}}{2} \end{aligned}$$

que resultam nas propriedades

$$\begin{aligned} s_x + r_x &= p_x \\ s_x \cdot r_x &= -q_x \\ s_x - r_x &= \sqrt{p_x^2 + 4q_x} = \Delta_x \end{aligned} \quad (3.42)$$

Partindo do corolário 3.1.1, a fórmula de Binet para $[w_n(x)]_{n \in \mathbb{Z}}$ podemos escrever

$$w_n(x) = \frac{b_x(s_x^n - r_x^n) + aq_x(s_x^{n-1} - r_x^{n-1})}{\Delta_x} \quad (3.43)$$

Escrevendo $b_x = b \cdot x^d$, $p_x = p \cdot x^e$ e $q_x = q \cdot x^f$, e fazendo $x = 1$, chegamos a conexão entre $[w_n(x)]_{n \in \mathbb{Z}}$ e $(w_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

Teorema 3.4.1. *Dado $w_n(x)$ enésimo termo da sequência $[w_n(x)]_{n \in \mathbb{Z}}$, a soma de seus coeficientes é igual a w_n . Em outras palavras*

$$w_n(1) = w_n$$

Demonstração. Observe que devemos ter $w_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, para alguma lista $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$. Desse modo $w_n(1) = \sum_{i=0}^n a_i$, qualquer que seja $n \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, fazendo $x = 1$, a recorrência 3.4.1 se torna

$$\begin{cases} w_{n+1}(1) = pw_n(1) + qw_{n-1}(1), & n \geq 1 \\ w_0(1) = a; & w_1(1) = b \end{cases}$$

já que b_x , p_x e q_x são monômios, o que faz a sequência de polinômios $[w_n(1)]_{n \in \mathbb{Z}}$ coincidir com a sequência de Horadam na definição 3.1.3. $\square$

Horadam e Mahon (1985) e Koshy (2014) definem os *polinômios de Pell* e *polinômios de Pell-Lucas* da seguinte forma

Definição 3.4.2. *Chamamos de **polinômios de Pell** a sequência de polinômios $[p_n(x)]_{n \in \mathbb{Z}}$ dada pela recorrência*

$$\begin{cases} p_{n+1}(x) = 2xp_n(x) + p_{n-1}(x), \\ p_0(x) = 0; & p_1(x) = 1. \end{cases} \quad (3.44)$$

Definição 3.4.3. *Chamamos de **polinômios de Pell-Lucas** a sequência de polinômios $[q_n(x)]_{n \in \mathbb{Z}}$ dada pela recorrência*

$$\begin{cases} q_{n+1}(x) = 2xq_n(x) + q_{n-1}(x), \\ q_0(x) = 2; & p_1(x) = 2x. \end{cases} \quad (3.45)$$

Na tabela para 15 encontramos os *polinômios de Pell* e os *polinômios de Pell-Lucas* calculados para $n = 0, \dots, 6$. Observe que de fato, a soma de seus coeficientes correspondem ao *números de Pell* e *números de Pell-Lucas* para cada n .

Tabela 15 – Polinômios de Pell e Pell-Lucas para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

n	$p_n(x)$	$q_n(x)$
0	0	2
1	1	$2x$
2	$2x$	$4x^2 + 2$
3	$4x^2 + 1$	$8x^3 + 6x$
4	$8x^3 + 4x$	$16x^4 + 16x^2 + 2$
5	$16x^4 + 12x^2 + 1$	$32x^5 + 40x^3 + 10x$
6	$32x^5 + 32x^3 + 6x$	$64x^6 + 96x^4 + 36x^2 + 2$

Fonte: Koshy (2014, p. 255)

Do mesmo modo, podemos calcular os termos negativos para os *polinômios de Pell e polinômios de Pell-Lucas*, caracterizando suas respectivas sequências estendidas. Vemos um exemplo para $n = -1, \dots, -6$ na tabela 16. Observe novamente a que a soma dos coeficientes de tais polinômios correspondem aos respectivos p_n e q_n .

Tabela 16 – Polinômios de Pell e Pell-Lucas para $n = -1, -2, -3, -4, -5, -6$.

n	$p_n(x)$	$q_n(x)$
-1	1	$-2x$
-2	$-2x$	$4x^2 + 2$
-3	$4x^2 + 1$	$-(8x^3 + 6x)$
-4	$-(8x^3 + 4x)$	$16x^4 + 16x^2 + 2$
-5	$16x^4 + 12x^2 + 1$	$-(32x^5 + 40x^3 + 10x)$
-6	$-(32x^5 + 32x^3 + 6x)$	$64x^6 + 96x^4 + 36x^2 + 2$

Fonte: Autor.

Considerando que $[p_n(x)]$ e $[q_n(x)]$ são casos particulares de $[w_n(x)]$, obtemos então que

$$t^2 - 2x \cdot t - 1 = 0 \quad (3.46)$$

cujas raízes são

$$s_x = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

$$r_x = x - \sqrt{x^2 + 1}$$

que resultam nas propriedades

$$s_x + r_x = 2x$$

$$s_x \cdot r_x = -1$$

$$s_x - r_x = 2\sqrt{x^2 + 1} = \Delta_x \quad (3.47)$$

$$s_x^{-1} = -r_x; \quad r_x^{-1} = -s_x$$

$$s_x^2 = 2xs_x + 1; \quad r_x^2 = 2xr_x + 1$$

e como fórmulas de Binet para $p_n(x)$ e $q_n(x)$, obtemos

$$p_n(x) = \frac{s_x^n - r_x^n}{\Delta_x} = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})^n - (x - \sqrt{x^2 + 1})^n}{\sqrt{x^2 + 1}}. \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} q_n(x) &= \frac{2x(s_x^n - r_x^n) + 2(s_x^{n-1} - r_x^{n-1})}{\Delta_x} = \frac{2(xs_x^n + s_x^{n-1}) - 2(xr_x^n + r_x^{n-1})}{\Delta_x} \\ &= \frac{s_x^n 2(x + s_x^{-1}) - r_x^n 2(x + r_x^{-1})}{\Delta_x} = \frac{s_x^n 2(x - r_x) - r_x^n 2(x - s_x)}{\Delta_x} \\ &= \frac{s_x^n(\Delta_x) - r_x^n(-\Delta_x)}{\Delta_x} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$q_n(x) = s_x^n + r_x^n = (x + \sqrt{x^2 + 1})^n + (x - \sqrt{x^2 + 1})^n. \quad (3.49)$$

Observando as tabelas 15 e 16, podemos conjecturar, de modo análogo as *sequência de Pell* e *sequência de Pell-Lucas*, que existe uma relação entre $[p_n(x)]$ e $[p_{-n}(x)]$, bem como entre $[q_n(x)]$ e $[q_{-n}(x)]$.

Teorema 3.4.2. *Dados $[p_n(x)]_{n \in \mathbb{N}}$ e $[q_n(x)]_{n \in \mathbb{N}}$, valem as seguintes igualdades*

$$[p_{-n}(x)] = (-1)^{n-1} [p_n(x)] \quad (3.50)$$

$$[q_{-n}(x)] = (-1)^n [q_n(x)] \quad (3.51)$$

Demonstração. Basta escrever

$$p_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})^{-n} - (x - \sqrt{x^2 + 1})^{-n}}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$q_n(x) = (x + \sqrt{x^2 + 1})^{-n} + (x - \sqrt{x^2 + 1})^{-n}.$$

e proceder de modo semelhante a demonstração dos lemas 3.2.1 e 3.2.2. □

3.4.1 Propriedades de $[p_n(\mathbf{x})]_{n \in \mathbb{Z}}$ e $[q_n(\mathbf{x})]_{n \in \mathbb{Z}}$

Note que as sequências $[w_n(x)]_{n \in \mathbb{N}}$, $[p_n(x)]_{n \in \mathbb{N}}$ e $[q_n(x)]_{n \in \mathbb{N}}$ são definidas por recorrências lineares de 2ª ordem, homogêneas. Portanto as propriedades estudadas na seção 3.1 podem ser aplicadas a tais polinômios.

Uma propriedade interessante mostrada em Horadam e Mahon (1985, p. 9) é

Teorema 3.4.3. *Dados $[p_n(x)]_{n \in \mathbb{Z}}$ e $[q_n(x)]_{n \in \mathbb{Z}}$*

$$\frac{dq_n(x)}{dx} = 2np_n(x).$$

Demonstração. Considerando as equações (3.48) e (3.49), basta escrever

$$\begin{aligned} \frac{dq_n(x)}{dx} &= n \left[(x + \sqrt{x^2 + 1})^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) \right] + n \left[(x - \sqrt{x^2 + 1})^{n-1} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) \right] = \\ &= n \left[\frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})^{n-1} \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{(x - \sqrt{x^2 + 1})^{n-1} \cdot (x - \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 1}} \right] = \\ &= 2n \left[\frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})^n - (x - \sqrt{x^2 + 1})^n}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right] = 2np_n(x) \end{aligned}$$

□

Corolário 3.4.1. O grau do polinômio $q_n(x)$ é maior ou igual a $p_n(x)$

Demonstração. Ou $q_n(x)$ é constante (grau 0) ou possui grau $n \neq 0$. No primeiro caso $\frac{dq_n(x)}{dx} = 2np_n(x)$ possui grau 0 e portanto $p_n(x)$ possui grau 0. Se $q_n(x)$ possui grau n , $2np_n(x)$ é grau no máximo $(n - 1)$. □

Teorema 3.4.4. Dados $[p_n(x)]_{n \in \mathbb{Z}}$ e $[q_n(x)]_{n \in \mathbb{Z}}$, valem as seguintes relações (HORADAM; MAHON, 1985, p. 8)

- (i) $p_{n+1}(x) + p_{n-1}(x) = q_n(x) = 2xp_n(x) + 2p_{n-1}(x)$
- (ii) $q_{n+1}(x) + q_{n-1}(x) = 4(x^2 + 1)p_n(x)$
- (iii) $p_n(x)q_n(x) = p_{2n}(x)$
- (iv) $p_{n+1}(x)^2 - p_{n-1}(x)^2 = 2xp_{2n}(x)$
- (v) $p_n(x)^2 - p_{n+r}(x)p_{n-r}(x) = (-1)^{n-r}$ (Identidade de Catalan para $[p_n(x)]$.)

Demonstração. Considere as raízes de $t^2 - 2xt - 1 = 0$, $s_x = x + \sqrt{x^2 + 1}$ e $r_x = x - \sqrt{x^2 + 1}$.

(i)

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x) + p_{n-1}(x) &= \frac{s_x^{n+1} - r_x^{n+1}}{\Delta_x} + \frac{s_x^{n-1} - r_x^{n-1}}{\Delta_x} = \\ &= \frac{s_x^n(s_x + s_x^{-1}) + r_x^n(-r_x - r_x^{-1})}{\Delta_x} = \frac{s_x^n(\Delta_x) + r_x^n(\Delta_x)}{\Delta_x} = \\ &= s_x^n + r_x^n = q_n(x) \end{aligned}$$

a segunda parte de igualdade é conseguida apenas aplicando a equação de recorrência

$$p_{n+1}(x) + p_{n-1}(x) = 2xp_n(x) + p_{n-1}(x) + p_{n-1}(x) = 2xp_n(x) + 2p_{n-1}(x).$$

(ii)

$$\begin{aligned}
q_{n+1}(x) + q_{n-1}(x) &= s_x^{n+1} + r_x^{n+1} + s_x^{n-1} + r_x^{n-1} = s_x^n(s_x + s_x^{-1}) + r_x^n(r_x + r_x^{-1}) \\
&= s_x^n(\Delta_x) + r_x^n(\Delta_x) = (\Delta_x)^2 \left(\frac{s_x^n + r_x^n}{\Delta_x} \right) \\
&= 4(x^2 + 1)p_n(x)
\end{aligned}$$

(iii)

$$p_n(x)q_n(x) = \frac{s_x^n - r_x^n}{\Delta_x} \cdot (s_x^n + r_x^n) = \frac{s_x^{2n} - r_x^{2n}}{\Delta_x} = p_{2n}(x)$$

(iv)

$$\begin{aligned}
p_{n+1}(x)^2 - p_{n-1}(x)^2 &= \left(\frac{s_x^{n+1} - r_x^{n+1}}{\Delta_x} \right)^2 - \left(\frac{s_x^{n-1} - r_x^{n-1}}{\Delta_x} \right)^2 \\
&= \frac{s_x^{2n}(s_x^2 - s_x^{-2}) - r_x^{2n}(r_x^{-2} - r_x^2)}{(\Delta_x)^2} \\
&= 2x \frac{s_x^{2n}(\Delta_x) - r_x^{2n}(\Delta_x)}{(\Delta_x)^2} \\
&= 2x \cdot \Delta_x \left(\frac{s_x^{2n} - r_x^{2n}}{(\Delta_x)^2} \right) \\
&= 2xp_{2n}(x)
\end{aligned}$$

(v) Análogo ao caso de $(p_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, presente no teorema 3.2.4.

□

Do mesmo modo, podemos obter as seguintes identidades, similares ao caso já demonstrado para (p_n)

Teorema 3.4.5. *Dadas as recorrências polinomiais $[p_n(x)]$ e $[q_n(x)]$, $n \in \mathbb{Z}$, valem as seguintes identidades*

$$(i) \quad p_{n+m}(x) = p_n(x)p_{m+1}(x) + p_m(x)p_{n-1}(x)$$

$$(ii) \quad p_{n-m}(x) = (-1)^m [p_n(x)p_{m-1}(x) - p_m(x)p_{n-1}(x)]$$

$$(iii) \quad p_n(x) \cdot p_m(x) = \frac{q_{n+m}(x) - (-1)^m q_{n-m}(x)}{(\Delta_x)^2}$$

$$(iv) \quad p_n(x) \cdot q_m(x) = p_{n+m}(x) + (-1)^m p_{n-m}(x)$$

$$(v) \quad q_n(x) \cdot q_m(x) = q_{n+m}(x) + (-1)^m q_{m-n}(x)$$

Demonstração. (i) Análogo ao caso (i) do teorema 3.2.1. Resumidamente

$$\begin{aligned}
 p_{n+m}(x) &= \frac{\Delta_x s_x^{n+m} - \Delta_x r_x^{n+m}}{\Delta_x^2} = \frac{s_x^{n+m+1} - r_x s_x^{n+m} - s_x r_x^{n+m} + r_x^{n+m+1}}{\Delta_x^2} \\
 &= \frac{s_x^{n+m+1} - s_x^n r_x^{m+1} - s_x^{m+1} r_x^n + r_x^{n+m+1}}{\Delta_x^2} + \frac{s_x^n r_x^{m+1} - r_x s_x^{n+m} - s_x r_x^{n+m} + s_x^{m+1} r_x^n}{\Delta_x^2} \\
 &= p_n(x) p_{m+1}(x) + p_m(x) p_{n-1}(x)
 \end{aligned}$$

(ii) Análogo ao caso (ii) do teorema 3.2.1. Alternativamente

$$\begin{aligned}
 p_{n-m}(x) &= p_{n+(-m)}(x) = p_n(x) p_{-m+1}(x) + p_{-m}(x) p_{n-1}(x) \\
 &= p_n(x) p_{-(m-1)}(x) + p_{-m}(x) p_{n-1}(x) \\
 &= p_n(x) (-1)^m p_{m-1}(x) + (-1)^{m-1} p_m(x) p_{n-1}(x) \\
 &= (-1)^m [p_n(x) p_{m-1}(x) - p_m(x) p_{n-1}(x)]
 \end{aligned}$$

os próximos resultados podem ser encontrados em Horadam (1996a, p. 71)

(iii)

$$\begin{aligned}
 p_n(x) \cdot p_m(x) &= \frac{s_x^n - r_x^n}{\Delta_x} \cdot \frac{s_x^m - r_x^m}{\Delta_x} = \frac{s_x^{n+m} - s_x^n r_x^m - r_x^n s_x^m + r_x^{n+m}}{(\Delta_x)^2} \\
 &= \frac{s_x^{n+m} - s_x^n (-s_x^{-1})^m - r_x^n (-r_x^{-1})^m + r_x^{n+m}}{(\Delta_x)^2} \\
 &= \frac{s_x^{n+m} - (-1)^m s_x^{n-m} - (-1)^m r_x^{n-m} + r_x^{n+m}}{(\Delta_x)^2} \\
 &= \frac{s_x^{n+m} + r_x^{n+m} - (-1)^m [s_x^{n-m} + r_x^{n-m}]}{(\Delta_x)^2} \\
 &= \frac{q_{n+m}(x) - (-1)^m q_{n-m}(x)}{(\Delta_x)^2}
 \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
 p_n(x) \cdot q_m(x) &= \frac{s_x^n - r_x^n}{\Delta_x} \cdot [s_x^m + r_x^m] = \frac{s_x^{n+m} - r_x^{n+m} + s_x^n r_x^m - r_x^n s_x^m}{\Delta_x} \\
 &= \frac{s_x^{n+m} - r_x^{n+m} + s_x^n (-s_x^{-1})^m - r_x^n (-r_x^{-1})^m}{\Delta_x} \\
 &= \frac{s_x^{n+m} - r_x^{n+m} + (-1)^m s_x^{n-m} - (-1)^m r_x^{n-m}}{\Delta_x} \\
 &= \frac{s_x^{n+m} - r_x^{n+m} + (-1)^m (s_x^{n-m} - r_x^{n-m})}{\Delta_x} \\
 &= p_{n+m}(x) + (-1)^m p_{n-m}(x)
 \end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}
q_n(x) \cdot q_m(x) &= (s_x^n + r_x^n)(s_x^m + r_x^m) = s_x^{n+m} + s_x^n r_x^m + r_x^n s_x^m + r_x^{n+m} \\
&= (s_x^{n+m} + r_x^{n+m}) + s_x^n (-s_x^{-1})^m + r_x^n (-r_x^{-1})^m \\
&= [s_x^{n+m} + r_x^{n+m}] + (-1)^m [s_x^{n-m} + r_x^{n-m}] \\
&= q_{n+m}(x) + (-1)^m q_{m-n}(x)
\end{aligned}$$

□

Corolário 3.4.2.

$$\begin{aligned}
p_{2n}(x) &= p_n(x)[p_{n+1}(x) + p_{n-1}(x)] \\
&= 2p_n^2(x) + p_n(x)p_{n-1}(x)
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Corolário 3.4.3. (*Identidade de d'Ocagne para $[p_n(x)]$*)

$$(-1)^m p_{n-m}(x) = p_n(x)p_{m+1}(x) - p_m(x)p_{n+1}(x) \tag{3.53}$$

As demonstrações para as identidades (3.52) e (3.53) são análogas ao exibido nos corolários 3.2.1 e 3.2.2.

A recorrência $[p_n(x)]$ tal como (p_n) , possui da mesma forma manifestações matriciais com igual potencial de substituir a definição 3.4.2. Nas próximas seções discutiremos essas representações.

3.4.2 Representação Matricial para $[p_n(x)]_{n \in \mathbb{Z}}$

Horadam e Mahon (1985) nos apresentam, de modo análogo ao já discutido para $(p_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, a matriz

$$P(x) = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.54}$$

Tal como a matriz P_1 na seção 3.2.2., $\det[P(x)] = -1$ ou seja, existe $P(x)^{-1}$ e

$$P(x)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2x \end{bmatrix}. \tag{3.55}$$

Do mesmo modo que na seção 3.2.2., dado $n \in \mathbb{N}$ e considerando as definições 3.2.3 e 3.2.4 e o teorema 3.2.5, via indução chegamos a conclusão de que

$$\begin{aligned}
P(x)^n &= \begin{bmatrix} p_{n+1}(x) & p_n(x) \\ p_n(x) & p_{n-1}(x) \end{bmatrix}; \\
P(x)^{-n} &= \begin{bmatrix} p_{-(n-1)}(x) & p_{-n}(x) \\ p_{-n}(x) & p_{-(n+1)}(x) \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

de onde podemos definir uma nova sequência de matrizes de modo que $[P_n(x)] = P(x)^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Alguns elementos da sequência de matrizes $[P_n(x)]$ são exibidos na tabela 17.

Tabela 17 – $[P_n(x)]$ para $-4 \leq n \leq 4$

n	$P_n(x)$
-4	$\begin{bmatrix} 4x^2 + 1 & -8x^3 - 4x \\ -8x^3 - 4x & 16x^4 + 12x^2 + 1 \end{bmatrix}$
-3	$\begin{bmatrix} -2x & 4x^2 + 1 \\ 4x^2 + 1 & -8x^3 - 4x \end{bmatrix}$
-2	$\begin{bmatrix} 1 & -2x \\ -2x & 4x^2 + 1 \end{bmatrix}$
-1	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2x \end{bmatrix}$
0	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
1	$\begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 4x^2 + 1 & 2x \\ 2x & 1 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 8x^3 + 4x & 4x^2 + 1 \\ 4x^2 + 1 & 2x \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 16x^4 + 12x^2 + 1 & 8x^3 + 4x \\ 8x^3 + 4x & 4x^2 + 1 \end{bmatrix}$

Fonte: Autor.

A diagonalização efetuada na seção 3.2.2., a demonstração da fórmula de Binet para (p_n) e a discussão sobre quais matrizes satisfazem as condições de formarem uma sequência matricial do tipo A^n ocorre de forma similar para as matrizes $[P_n(x)]$. Repassaremos de modo resumido esses fatos para as matrizes $P_n(x)$ e seguiremos em busca de novas propriedades relacionadas a tais matrizes.

O polinômio característico para matriz $P_1(x)$ é

$$\det[P_1(x) - tId] = t^2 - 2xt - 1$$

que resultam em $s_x = x + \sqrt{x^2 + 1}$ e $r_x = x - \sqrt{x^2 + 1}$ como autovalores resultantes e $[s_x \ 1]^t$ e $[r_x \ 1]^t$ como os respectivos autovetores. Assim

$$P_1(x) = \begin{bmatrix} s_x & r_x \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & r_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-1}{\Delta_x} & \frac{1}{\Delta_x} \\ \frac{r_x}{\Delta_x} & \frac{-s_x}{\Delta_x} \end{bmatrix}$$

o que implica em

$$P_n(x) = \begin{bmatrix} s_x & r_x \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x^n & 0 \\ 0 & r_x^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-1}{\Delta_x} & \frac{1}{\Delta_x} \\ \frac{r_x}{\Delta_x} & \frac{-s_x}{\Delta_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s_x^{n+1} - r_x^{n+1}}{\Delta_x} & \frac{s_x^n - r_x^n}{\Delta_x} \\ \frac{s_x^n - r_x^n}{\Delta_x} & \frac{s_x^{n-1} - r_x^{n-1}}{\Delta_x} \end{bmatrix}$$

e finalmente, por motivos análogos a 3.2.2., somente as matrizes

$$\begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2x \end{bmatrix}$$

possuem tais propriedades.

3.4.3 Sobre propriedades de convergência de $[p_n(x)]$

Lembre que $[p_n(x)]$ pode ser dado pela fórmula de Binet

$$[p_n(x)] = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})^n - (x - \sqrt{x^2 + 1})^n}{2\sqrt{x^2 + 1}}$$

Nesta seção vamos discutir qual o comportamento de $\frac{p_{n+1}(x)}{p_n(x)}$, quando n cresce ou decresce ilimitadamente. Procederemos com nossa discussão em dois casos: $x \in \mathbb{R}_+^*$ e $x \in \mathbb{R}_-^*$. O caso $x = 0$ será excluído pois $p_n(0) = 0, \forall n$.

Teorema 3.4.6. *Considere a sequência de polinômios de Pell dados pela fórmula*

$$[p_n(x)] = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})^n - (x - \sqrt{x^2 + 1})^n}{2\sqrt{x^2 + 1}}$$

Para $x \in \mathbb{R}_+^*$ vale

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}(x)}{p_n(x)} = s_x$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{p_{n+1}(x)}{p_n(x)} = r_x$$

Para $x \in \mathbb{R}_-^*$ vale

$$(iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}(x)}{p_n(x)} = r_x$$

$$(iv) \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{p_{n+1}(x)}{p_n(x)} = s_x$$

Demonstração. 1. Tome $x \in \mathbb{R}_+^*$

Como $x > 0$, então $\sqrt{x^2 + 1} > 1$. Assim

$$(x + \sqrt{x^2 + 1}) \geq 1$$

por outro lado

$$\begin{aligned} 0 &\leq x^2 + 1 \leq (x + 1)^2 \implies \\ 0 &\leq \sqrt{x^2 + 1} \leq x + 1 \implies \\ -x - 1 &\leq -\sqrt{x^2 + 1} \leq 0 \implies \\ -1 &\leq x - \sqrt{x^2 + 1} \leq x \implies \\ -1 &\leq x - \sqrt{x^2 + 1} \leq 0, \end{aligned}$$

pois em todo caso $\sqrt{x^2 + 1}$ é negativo. Assim $|x - \sqrt{x^2 + 1}| < 1$. O caso $|x - \sqrt{x^2 + 1}| = 1$ somente ocorre quando $x = 0$. A partir disso podemos afirmar que

$$\begin{cases} n \rightarrow \infty \implies (x - \sqrt{x^2 + 1})^n \rightarrow 0. \\ n \rightarrow \infty \implies (x + \sqrt{x^2 + 1})^n \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Finalmente podemos concluir que

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{p_n(x)}{p_{n-1}(x)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})^n + (x - \sqrt{x^2 + 1})^n}{(x + \sqrt{x^2 + 1})^{n-1} + (x - \sqrt{x^2 + 1})^{n-1}} \right] \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{p_n(x)}{p_{n-1}(x)} \right] = (x + \sqrt{x^2 + 1}) = s_x.$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow -\infty} \left[\frac{p_n(x)}{p_{n-1}(x)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{p_{-n}(x)}{p_{-n-1}(x)} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})^{-n} + (x - \sqrt{x^2 + 1})^{-n}}{(x + \sqrt{x^2 + 1})^{-n-1} + (x - \sqrt{x^2 + 1})^{-n-1}} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\frac{1}{(x + \sqrt{x^2 + 1})^n} + \frac{1}{(x - \sqrt{x^2 + 1})^n}}{\frac{1}{(x + \sqrt{x^2 + 1})^{n+1}} + \frac{1}{(x - \sqrt{x^2 + 1})^{n+1}}} \right]$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \left[\frac{p_n(x)}{p_{n-1}(x)} \right] = (x - \sqrt{x^2 + 1}) = r_x.$$

2. Tome $x \in \mathbb{R}_-^*$

$$\sqrt{x^2 + 1} > 1 \Rightarrow -\sqrt{x^2 + 1} < -1. \text{ Como } x < 0, \text{ então } x - \sqrt{x^2 + 1} < -1.$$

Observe que $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$. Como $x^2 > 0$, então $\sqrt{x^2 + 1} \leq |x| + 1$. Por outro lado, como $\sqrt{x^2 + 1} > 0$, temos que

$$-x < \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow 0 < x + \sqrt{x^2 + 1} < x + |x| + 1 = 1,$$

pois $x + |x| = 0$ já que $x < 0$. Em resumo

$$0 < |x + \sqrt{x^2 + 1}| < 1$$

$$(x - \sqrt{x^2 + 1}) < -1$$

Assim

$$\begin{cases} n \rightarrow \infty \Rightarrow (x + \sqrt{x^2 + 1})^n \rightarrow 0. \\ n \rightarrow \infty \Rightarrow (x - \sqrt{x^2 + 1})^n \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Finalmente podemos concluir que

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{p_n(x)}{p_{n-1}(x)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(x - \sqrt{x^2 + 1})^n}{(x - \sqrt{x^2 + 1})^{n-1}} \right] = (x - \sqrt{x^2 + 1}) = r_x.$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow -\infty} \left[\frac{p_n(x)}{p_{n-1}(x)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{p_{-n}(x)}{p_{-n-1}(x)} \right] = (x + \sqrt{x^2 + 1}) = s_x.$$

□

Tabela 18 – Convergência de $\frac{[p_n(x)]}{[p_{n-1}(x)]}$

$\frac{[p_n(x)]}{[p_{n-1}(x)]}$	$x > 0$	$x < 0$
$n \rightarrow \infty$	s_x	r_x
$n \rightarrow -\infty$	r_x	s_x

Fonte: Autor.

Podemos ver uma síntese dos últimos resultados na tabela 18.

A seguir, discutiremos os aspectos históricos sobre a *sequência de Pell* e seus conceitos correlatos. Tentaremos exibir as motivações conceituais e discutiremos a estrutura e processo de construção das ideias envolvidas.

3.5 Contexto histórico

Discutiremos nesta seção os aspectos históricos relacionados a *sequência de Pell*. Exibiremos o percurso histórico da *sequência de Pell*, desde as suas manifestações mais antigas até o final do século 19, quando Lucas (1891) define as sequências de *sequência de Pell* e *sequência de Pell-Lucas*. De passagem, comentaremos também sobre John Pell, matemático que empresta seu nome a sequência, bem como de outras personalidades relacionadas com a *sequência de Pell*.

Inicialmente, apresentaremos manifestações antigas da *sequência de Pell* em algoritmos de aproximação a $\sqrt{2}$. Esta propriedade está relacionada ao que discutimos na seção 3.2.3. De antemão, adiantamos que isto está relacionado com um caso particular, e clássico, da *Equação de Pell*: $x^2 - dy^2 = 1$. Civilizações antigas como gregos e hindus já sabiam resolver equações diofantinas do 1º grau e alguns casos particulares do segundo grau, em particular, para a *Equação de Pell*.

Seguiremos procurando as manifestações para *sequência de Pell* no período pós renascença, após o século 15. Nesse ponto, discutiremos quem foi John Pell e como os matemáticos da época tratavam o tema. O tema irá passar novamente através da *Equação de Pell*, pois neste período muitas descobertas perdidas na antiguidade foram refeitas, sob uma nova notação e motivações diversas.

Finalizaremos nossa descrição passando por Lucas (1891) e alguns de suas aparições em publicações do século 20 e 21.

3.5.1 Aparições na antiguidade e aproximações à $\sqrt{2}$

A *sequência de Pell* já era conhecida na antiguidade grega por volta de 100 d.C., como parte de um antigo algoritmo para criar sucessivas aproximações à $\sqrt{2}$, conhecido como *escada de Theon*. Carvalho (2010) nos fornece a seguinte definição, de natureza recursiva, com o objetivo de gerar tais aproximações

Definição 3.5.1. Chamamos de *escada de Theon* a recursão³

$$v_n = v_{n-1} + q_{n-1}, \quad (3.57)$$

$$q_n = v_{n-1} + v_n. \quad (3.58)$$

com $v_1 = q_1 = 1$ e $n \in \mathbb{N}$

A Tabela 19 apresenta v_n e q_n para $n = 1 \dots 8$.

Tabela 19 – Os 8 primeiros valores para v_n e q_n .

$n = 1$	$v_1 = 1$	$q_1 = 1$
$n = 2$	$v_2 = v_1 + q_1 = 1 + 1 = 2$	$q_2 = v_1 + v_2 = 1 + 2 = 3$
$n = 3$	$v_3 = v_2 + q_2 = 2 + 3 = 5$	$q_3 = v_2 + v_3 = 2 + 5 = 7$
$n = 4$	$v_4 = v_3 + q_3 = 5 + 7 = 12$	$q_4 = v_3 + v_4 = 5 + 12 = 17$
$n = 5$	$v_5 = v_4 + q_4 = 12 + 17 = 29$	$q_5 = v_4 + v_5 = 12 + 29 = 41$
$n = 6$	$v_6 = v_5 + q_5 = 29 + 41 = 70$	$q_6 = v_5 + v_6 = 29 + 70 = 99$
$n = 7$	$v_7 = v_6 + q_6 = 70 + 99 = 169$	$q_7 = v_6 + v_7 = 70 + 169 = 239$
$n = 8$	$v_8 = v_7 + q_7 = 169 + 239 = 408$	$q_8 = v_7 + v_8 = 169 + 408 = 577$

Fonte: Baseado em Carvalho (2010, p. 17)

As aproximações à $\sqrt{2}$ são obtidas mediante o quociente $t_n = \frac{q_n}{v_n}$, conforme exibimos na Tabela 20. A propriedade de convergência discutida aqui está garantida na seção 3.2.3. Perceba também que a *Escada de Theon* coincide com o corolário 3.2.4.

Tabela 20 – Razão $t_n = \frac{q_n}{v_n}$

n	q_n	v_n	t_n
1	1	1	1
2	3	2	1,5
3	7	5	1,4
4	17	12	1,416...
5	41	29	1,41379310...
6	99	70	1,41428571...
7	239	169	1,41420118...
8	577	408	1,41421568...

Fonte: Baseado em Carvalho (2010, p. 17)

Theon de Smirna viveu entre aproximadamente 100 depois de Cristo foi um matemático grego. Não temos certeza se a *escada de Theon* foi uma contribuição original de Theon de Smirna ou se o mesmo apenas compilou e formalizou conhecimentos já existentes na época, mas sabemos que ele realizou comentários sobre inúmeras obras matemáticas da grécia antiga. (HEATH, 1921)

Voltando a tabela 20, observamos que, no 6º passo, já obtemos uma aproximação de 4 dígitos para a $\sqrt{2} \approx 1,414213562... \dots$. Observe que os valores de v_n correspondem a *sequência*

³ Carvalho (2010) utiliza y_n e x_n como notação para as sequências que aqui nomeamos respectivamente de q_n e v_n . Fizemos essa mudança de notação para manter a coerência e clareza entre os elementos matemáticos presentes no texto, de variadas origens, no entanto, conservando a concordância com o texto do citado autor.

de Pell, (p_n) , para os valores calculados e que os valores de q_n correspondem a *sequência de Pell-Lucas*, (q_n) , novamente para os valores que foram calculados. De fato, observando a definição recursiva para a Escada de Theon, podemos reescrever as sequências q_n e v_n da seguinte maneira

$$\begin{aligned} v_n &= v_{n-1} + q_{n-1} \implies \text{Substituindo (3.58) em (3.57)} \\ v_n &= v_{n-1} + v_{n-1} + v_{n-2} \implies \\ v_n &= 2v_{n-1} + v_{n-2}. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Da mesma forma, para q_n , podemos obter

$$\begin{aligned} q_n &= v_n + v_{n-1} \implies \\ q_n &= v_n + v_{n-2} + q_{n-2} \implies \\ q_n &= 2v_{n-1} + v_{n-2} + v_{n-2} + q_{n-2} \implies \\ q_n &= 2v_{n-1} + 2v_{n-2} + q_{n-2} \implies \\ q_n &= 2(v_{n-1} + v_{n-2}) + q_{n-2} \implies \\ q_n &= 2q_{n-1} + q_{n-2}. \end{aligned} \tag{3.60}$$

De modo que podemos reescrever as duas sequências v_n e q_n da *escada de Theon* segundo duas relações de recorrência independentes

$$\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_2 = 2 \\ v_n = 2v_{n-1} + v_{n-2}. \end{cases} \quad \begin{cases} q_1 = 1 \\ q_2 = 3 \\ q_n = 2q_{n-1} + q_{n-2}. \end{cases}$$

Ou seja, sequência v_n corresponde a definição 3.2.1 para *sequência de Pell*, bem como a recorrência q_n corresponde exatamente definição 3.2.2 para a *sequência de Pell-Lucas*. Ou seja, a *sequência de Pell* e a *sequência de Pell-Lucas* já figuravam em alguns procedimentos matemáticos importantes na antiguidade.

Outro algoritmo equivalente é apresentado pelo sábio grego Hierão. Carvalho (2010) analisa os detalhes deste algoritmo, que em termos modernos pode ser dado por

$$z_n = \frac{1}{2} \left(z_{n-1} + \frac{k}{z_{n-1}} \right),$$

onde z_n é uma aproximação para raiz de $\sqrt{k}$. Fazendo $z_1 = t_1 = 1$ e $k = 2$, obtemos a seguinte sequência de valores

$$\begin{aligned}
z_2 &= \frac{1}{2} \left(z_1 + \frac{2}{z_1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{1} \right) = \frac{3}{2} = \frac{q_2}{p_2} = t_2 \\
z_3 &= \frac{1}{2} \left(z_2 + \frac{2}{z_2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3} \right) = \frac{17}{12} = \frac{q_4}{p_4} = t_4 \\
z_4 &= \frac{1}{2} \left(z_3 + \frac{2}{z_3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17} \right) = \frac{577}{408} = \frac{q_8}{p_8} = t_8 \\
z_5 &= \frac{1}{2} \left(z_4 + \frac{2}{z_4} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{577}{408} + \frac{816}{577} \right) = \frac{665857}{470832} = \frac{q_{16}}{p_{16}} = t_{16}
\end{aligned}$$

organizados para fácil consulta na tabela 21.

Tabela 21 – Alguns valores para z_n .

n	z_n
1	1
2	$3/2 = 1,5$
3	$17/12 = 1,41\bar{6}...$
4	$577/408 = 1,41421568...$
5	$665857/470832 = 1,414213562...$

Fonte: Baseado em Carvalho (2010, p. 17)

observe que aparentemente $z_n = t_{2^{n-1}}$.

Outra manifestação na antiguidade, também envolvendo aproximações à $\sqrt{2}$ pode ser encontrada em registros da matemática hindu. Carvalho (2010) cita que os *Sulbasutras*, textos sagrados hindus escritos entre 800 a.C. e 600 a.C. traziam consigo instruções para o cálculo aproximado da $\sqrt{2}$. Os *Sulbasutras* eram essencialmente textos matemáticos com orientações para construção de altares (DUTTA, 2002a). Dutta (2002a) destaca que as tradições Védicas tinham grande preocupação com a construção precisa dos mais variados tipos de altares, todos com grande riqueza de detalhes. Talvez considerassem os padrões e regularidades matemáticas como parte dos deuses e portanto, objeto de apreciação religiosa e parte integrante para fundamentar e preparar seus ritos.

Apesar dos *Sulbasutras* serem datados em um período entre 800 a.C. e 600 a.C., Dutta (2002a) deixa claro que as fórmulas e algoritmos contidos neles existiam já a muitos séculos, de modo que esses documentos correspondem a uma compilação do conhecimento pré-existente.

Um problema que ocorria frequentemente era o cálculo de $\sqrt{2}$. Carvalho (2010) nos traz a tradução do seguinte trecho, descrevendo um algoritmo para obtermos uma aproximação à $\sqrt{2}$. "Aumente o comprimento de um terço, e este terço de seu próprio quarto menos a trigésima quarta parte deste quarto." (CARVALHO, 2010, p. 22). Em termos modernos, esta frase se torna

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$$

Carvalho (2010) nos traz pelos menos duas interpretações algébrica/geométrica para o problema, dadas por Joseph (1992) e Katz (1998), o que mostra a dificuldade de interpretar

em termos modernos operações antigas. No entanto, se efetuarmos o cálculo acima obtemos, somando termo a termo, os seguintes resultados

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{q_1}{p_1} \\ 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} &= \frac{17}{12} = \frac{q_4}{p_4} \\ 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} &= \frac{577}{408} = \frac{q_8}{p_8} \end{aligned}$$

Não consideramos aqui $1 + \frac{1}{3}$, pois no procedimento descrito em Carvalho (2010), tentamos duplicar um quadrado de lado 1 realizando $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4}$, somente depois subtraindo o termo $\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$ para melhorar o erro, que para a aplicação descrita parece ser suficiente. Assim o caso hindu não apresenta um algoritmo para refinar tal aproximação tomando o valor $577/408$ como suficiente para os interesses de construção de altares do manifestados nos *Sulbasutras*. Devemos registrar também que Carvalho (2010, p. 9) cita $17/12$ como uma aproximação babilônica para $\sqrt{2}$ e deixa a entender que $7/5 = q_3/p_3$ pode ter sido usado como uma aproximação grosseira.

Outra manifestação para a *sequência de Pell* extremamente fecunda ocorre nas soluções da equação conhecida como *equação de Pell*. Na próxima seção, discutiremos essa manifestação bem como que foi John Pell, matemático que empresta seu sobrenome a *sequência de Pell*.

3.5.2 John Pell, a Equação de Pell e a Sequência de Pell.

Outra manifestação interessante para as recorrências (p_n) e (q_n) ocorre nas soluções da equação diofantina que hoje chamamos como *Equação de Pell*. Equações diofantinas são equações algébricas com uma ou mais incógnitas, com coeficientes inteiros, cujas soluções procuradas são sempre inteiras. (COURANT; ROBBINS, 2000, p. 59)

Dado $d \in \mathbb{Z}$, a *equação de Pell* é a equação diofantina não linear (DUTTA, 2003)⁴

$$x^2 - dy^2 = m. \quad (3.61)$$

Na literatura, os exemplos elementares para *equação de Pell* $x^2 - dy^2 = 1$ e $x^2 - dy^2 = -1$ são bastante explorados, figurando em todos os autores que tratam do tema. Koshy (2007), Koshy (2014) descrevem a conexão da *equação de Pell* com a *sequência de Pell* e a *sequência de Pell-Lucas* em com teoremas a seguir. Antes, chamamos (x_1, y_1) de *solução fundamental* caso $x_1, y_1 \in \mathbb{Z}_+$ sejam os menores valores tais que $x_1^2 - dy_1^2 = 1$ ou $x_1^2 - dy_1^2 = -1$. Desse modo, esclarecemos a conexão entre (p_n) , (q_n) e a equação (3.61), para $m = \pm 1$

⁴ Utilizamos (DUTTA, 2003) como referência mas estamos utilizando a notação de (KOSHY, 2014, p.52), pois ela é mais coerente aos nossos propósitos. No entanto, o texto de Dutta (2003) é mais coerente e completo do ponto de vista histórico.

Teorema 3.5.1. (KOSHY, 2014, thm 2.1, p. 32)

Seja (x_1, y_1) uma solução fundamental para $x^2 - dy^2 = -1$. Existem infinitas soluções da forma (x_n, y_n) tal que

$$x_n = \frac{1}{2} \left((x_1 + y_1 \sqrt{d})^n + (x_1 - y_1 \sqrt{d})^n \right)$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{d}} \left((x_1 + y_1 \sqrt{d})^n - (x_1 - y_1 \sqrt{d})^n \right),$$

com $n \geq 1$.

Teorema 3.5.2. (KOSHY, 2014, thm 2.2, p. 38)

Seja (x_1, y_1) uma solução fundamental para $x^2 - dy^2 = -1$. Existem infinitas soluções da forma (x_n, y_n) tal que

$$x_n = \frac{1}{2} \left((x_1 + y_1 \sqrt{d})^{2n-1} + (x_1 - y_1 \sqrt{d})^{2n-1} \right)$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{d}} \left((x_1 + y_1 \sqrt{d})^{2n-1} - (x_1 - y_1 \sqrt{d})^{2n-1} \right),$$

com $n \geq 1$.

A demonstração para esses resultados pode ser feita por indução e é apresentada em Koshy (2007, Thm 13.7, p. 617; Thm 13.8, p. 619). Em particular, fazendo $d = 2$, notamos que $(3, 2)$ é solução fundamental para $x^2 - dy^2 = 1$, pois $3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1$ e $(1, 1)$ é solução fundamental para $x^2 - 2x^2 = -1$, pois $1^2 - 2 \cdot 1^2 = -1$.

Assim a solução (x_n, y_n) para as equações $x^2 - 2x^2 = 1$ e $x^2 - 2x^2 = -1$ se tornam

1. Para $x^2 - 2x^2 = 1$

$$x_n = \frac{1}{2} \left((3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n \right) = \frac{1}{2} \left[(s^2)^n + (r^2)^n \right] = \frac{s^{2n} + r^{2n}}{2} = q_{2n}$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((3 + 2\sqrt{2})^n - (3 - 2\sqrt{2})^n \right) = \frac{1}{s - r} \left[(s^2)^n - (r^2)^n \right] = \frac{s^{2n} - r^{2n}}{s - r} = p_{2n}$$

2. Para $x^2 - 2x^2 = -1$

$$x_n = \frac{1}{2} \left((1 + \sqrt{2})^{2n-1} + (1 - \sqrt{2})^{2n-1} \right) = \frac{s^{2n-1} + r^{2n-1}}{2} = q_{2n-1}$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((1 + \sqrt{2})^{2n-1} - (1 - \sqrt{2})^{2n-1} \right) = \frac{s^{2n-1} - r^{2n-1}}{s - r} = p_{2n-1}$$

Koshy (2014) também chama a equação $x^2 - 2y^2 = (-1)^n$ de *equação de Pell*. Na Tabela 22, a título de ilustração, exibimos a correspondência dos primeiros valores de p_n e q_n , $n > 0$, com a equação de Pell $x^2 - 2y^2 = (-1)^n$.

Observe que a equação (3.61) pode ser reescrita como

$$x^2 - dy^2 = 1 \implies d = \frac{x^2 - 1}{y^2}.$$

Tabela 22 – Primeiros valores de p_n e q_n e sua correspondência com a *equação de Pell*.

n	q_n	p_n	$x^2 - 2y^2 = (-1)^n$; com $(x,y) = (q_n; p_n)$
1	1	1	$1^2 - 2 \cdot 1^2 = (-1)^1 = -1$
2	3	2	$3^2 - 2 \cdot 2^2 = (-1)^2 = 1$
3	7	5	$7^2 - 2 \cdot 5^2 = (-1)^3 = -1$
4	17	12	$17^2 - 2 \cdot 12^2 = (-1)^4 = 1$
5	41	29	$41^2 - 2 \cdot 29^2 = (-1)^5 = -1$
6	99	70	$99^2 - 2 \cdot 70^2 = (-1)^6 = 1$
7	239	169	$239^2 - 2 \cdot 169^2 = (-1)^7 = -1$
8	577	405	$577^2 - 2 \cdot 405^2 = (-1)^8 = 1$
9	1393	985	$1393^2 - 2 \cdot 985^2 = (-1)^9 = -1$

Fonte: Autor.

Do mesmo modo

$$x^2 - dy^2 = -1 \implies d = \frac{x^2 + 1}{y^2}.$$

Ou seja, a medida que a solução (q_n, p_n) cresce, a soma ± 1 se torna desprezível, de modo que

$$d = \frac{x_n^2 \pm 1}{y_n^2} \longrightarrow \frac{x_n^2}{y_n^2}$$

de onde podemos concluir que

$$n \longrightarrow \infty \implies \frac{x_n}{y_n} \longrightarrow \sqrt{d}.$$

Feitas essas observações, seguiremos agora as indicações históricas mais antigas para esses fatos.

Dutta (2002a), Dutta (2002b) relatam que na Índia, no final do período védico entre 600 a.C. e 500 a.C., os sábios já sabiam manipular equações diofantinas do primeiro e segundo graus. Em aproximadamente 200 d.C, esses sábios hindus já conheciam o método geral para resolver equações diofantinas do 1º grau, da forma $ax + by = c$, $\forall a, b, c, x, y \in \mathbb{Z}$. Por volta de 628 d.C., século 7, Brahmagupta discutiu as soluções para a equação $y^2 - dx^2 = 1$, $\forall d, x, y \in \mathbb{Z}$ (DUTTA, 2003), obtendo um método de resolução parcial, que oferecia uma primeira visão do problema. A técnica descrita por Brahmagupta, em termos modernos é conhecido como Lema de Brahmagupta

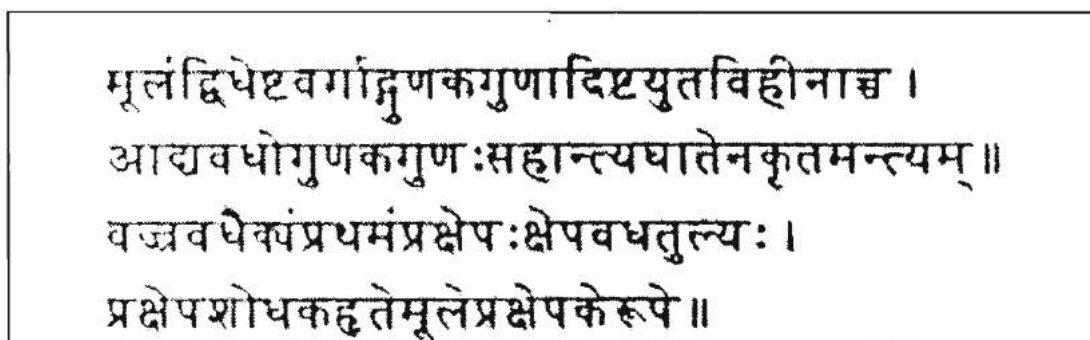
Lema 3.5.1. (*Lema de Brahmagupta*)

Se (x_1, y_1) é uma solução para $Dx^2 + m_1 = y^2$ e (x_2, y_2) é solução para $Dx^2 + m_2 = y^2$, então $(x_1y_2 + x_2y_1, y_1y_2 + Dx_1x_2)$ e $(x_1y_2 - x_2y_1, y_1y_2 - Dx_1x_2)$ são soluções de $Dx^2 + m_1m_2 = y^2$.

Que permitia o tratamento e busca de soluções para a equação $y^2 - dx^2 = 1$, desde que fosse encontrada uma solução particular. Na figura 4 vemos o original, em sânscrito, do Lema de Brahmagupta, encontrado em Dutta (2003, p. 13).

Dutta (2003) sugere de passagem que um provável caminho de investigação para o lema de Brahmagupta foi a busca de ternos pitagóricos. Uma pergunta natural nesta busca é, dado um

Figura 4 – Lema de Brahmagupta, original em sânscrito.



Fonte: (DUTTA, 2003, p. 7)

dos catetos, quais valores possíveis para o outro cateto e hipotenusa. Ou seja dado $m = c^2$, encontrar x, y tais que

$$x^2 + m = y^2$$

de modo que, quanto maiores os valores de x e y em relação a m fixo, mais próximo $\sqrt{x^2 + m}$ e $\sqrt{y^2}$ serão. A criatividade exibida pelos sábios hindus e as técnicas para solução de equações diofantinas (DUTTA, 2003) teriam terminado o trabalho de conectar a equação diofantina $x^2 \pm 1 = dy^2 \implies x^2 - dy^2 = \pm 1$ as aproximações a $\sqrt{2}$.

Curd (2004) chama a atenção para o fato de que variações para a equação $y^2 - dx^2 = 1$ também já eram conhecidas na Grécia antiga, visto que muitos sábios gregos da época sugeriam boas aproximações a $\sqrt{d}$, d inteiro, utilizando valores do tipo $t_n = y_n/x_n$, oriundos das soluções de equação Pell. Curd (2004) cita, por exemplo, o grego Eutocius (480 ac - 540 ac) como autor de uma sugestão de aproximação a $\sqrt{3}$, tendo justificado tal sugestão escrevendo o equivalente em notação moderna: $1351^2 - 3 \cdot 780^2 = 1$. Isso coincide com o caso particular para a Equação de Pell $x^2 - 3y^2 = 1$. Perceba também que $\frac{1351}{780} = 1,73205 \approx \sqrt{3}$. Não ficou claro se foi o conhecimento dessas equações que sugeriu as aproximações ou se o oposto é verdadeiro. Dessa forma, a sequência (p_n) já era conhecida por gerar soluções para a equação $x^2 - 2y^2 = (-1)^n$ através do par $(q_n, p_n) = (p_n + p_{n-1}, p_n)$.

A sequência de Pell seguiu por um longo tempo reaparecendo como solução para a equação de Pell ou como uma boa forma de conseguir aproximações a $\sqrt{2}$. Avançando no tempo, tais equações foram redescobertas e discutidas no século 17, período em que viveu John Pell, na forma de diversos casos particulares (CURD, 2004). Fermat discutiu as soluções para as equações

$$x^2 - 61y^2 = 1 \tag{3.62}$$

$$x^2 - 109y^2 = 1 \tag{3.63}$$

em correspondências com Frénicle de Bessy, cujas soluções encontradas são

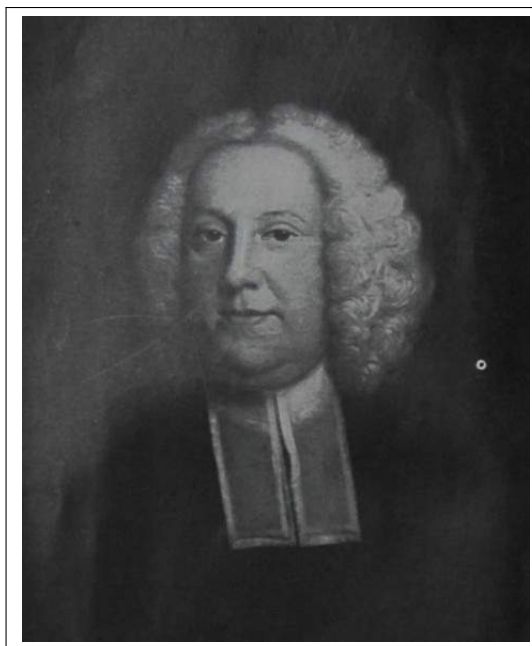
$$(1.766.319.049, 226.153.980) \text{ para a equação (3.62)}$$

$$(158.070.671.986.249, 15.140.424.455.100) \text{ para a equação (3.63)}$$

Wallis e Brouncker ⁵, contemporâneos de Pell, exibiram métodos de resolução para *equação de Pell*, baseados nas soluções dadas por Fermat, mas não conseguiram demonstrar.

A associação de John Pell (figura 5) a *equação de Pell* e a transferência do sobrenome a *sequência de Pell* parece ter ocorrido através de Leonard Euler anos depois da morte de Pell. Sabemos por Malcolm (2000) que provavelmente Pell não trabalhou com essa equação. No entanto John Pell (1611 - 1685) como extremamente reservado, ao ponto de ser difícil precisar suas contribuições na matemática, apesar do reconhecimento de suas grandes habilidades como matemático por seus contemporâneos. Sabemos por Malcolm (2000) que Pell costumava

Figura 5 – John Pell (1611-1685)



Fonte: Google Imagens.

dar discretas contribuições a outros matemáticos e em particular, Pell e Brouncker trocaram correspondências importantes, que contribuíram para uma publicação de Brouncker que exibiu a solução para *equação de Pell*. Desse modo, Euler insistia que Pell era o real autor da solução, associando permanentemente o sobrenome Pell a equação. Isso porque Euler tinha prestígio especial e Brouncker nem Wallis haviam exibido uma demonstração para o método. Provavelmente Fermat possui um esboço desta demonstração, mas nunca manifestou interesse em publicar.

John Pell publicou poucos trabalhos em seu próprio nome. Apesar disso, era muito respeitado como um matemático. No entanto, por causa de sua atitude reservada. Essa postura pessoal torna difícil determinar ao certo quais contribuições são genuinamente suas e quais foram exatamente suas contribuições. Malcolm (2000) pontua que John Pell vivia em condições muito difíceis, constantemente sem dinheiro e vivendo em condições de necessidade, sendo preso duas vezes por dívidas não quitadas. Essa seria uma possível explicação para tão poucas publicações em seu nome, apesar do reconhecimento da comunidade de matemáticos da época,

⁵ Frénicle de Bessy (1605 - 1675), Fermat (1601 - 1665), Wallis (1616 - 1703), Brouncker (1620 - 1684)

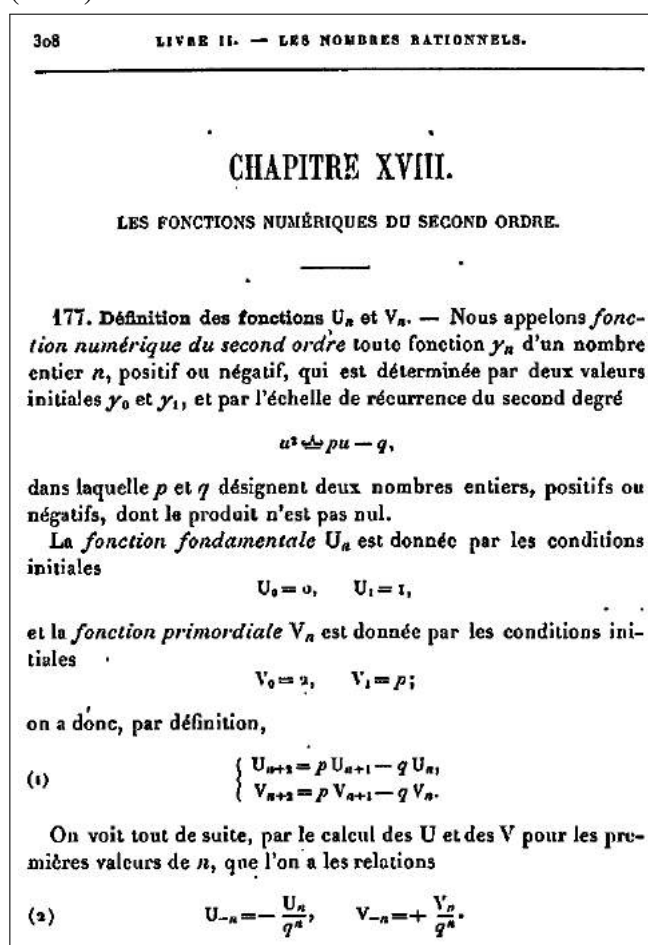
já que na época não haviam periódicos e a impressão de livros era muito mais dispendiosa que nos dias de hoje.

Entre o século 17 e 19 não encontramos nenhuma menção explícita a *sequência de Pell* ou *sequência de Pell-Lucas*. Assim a aparição moderna mais antiga encontrada tanto para a *sequência de Pell* quanto para *sequência de Pell-Lucas* se encontra em Lucas (1891), no livro *Théorie des Nombres*. O autor descreve a teoria para recorrências lineares de 2º ordem, homogêneas tomando como ponto de partida recorrências que ele define como *recorrências fundamentais*, denotadas por U_n e *recorrências primordiais*, denotadas por V_n (Tradução nossa), definidas da seguinte maneira

$$\begin{cases} U_{n+2} = pU_{n+1} - qU_n, \\ U_0 = 0, U_1 = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} V_{n+1} = pV_{n+1} - qV_n, \\ V_0 = 2, V_1 = p. \end{cases}$$

de modo que as escolhas dos inteiros p, q determinam de modo único a recorrência. Lucas (1891) explora as recorrências lineares sempre em pares (U_n, V_n) , argumentando que essas sequências possuem propriedades complementares. A definição de U_n e V_n por Lucas (1891) é apresentada na figura 6.

Figura 6 – Definição de U_n e V_n por Lucas (1891)



Fonte: Lucas (1891, p. 308)

Note que no final da página Lucas (1891, p. 308) exhibe já as relações para índices negativos, U_{-n} e V_{-n} e na figura 7 são apresentadas algumas recorrências particulares. Lucas (1891) chama de *suite* aos pares (U_n, V_n) , sendo a última da figura 7 a *suite de Pell*.

Figura 7 – *Suites* de Fermat, Fibonacci e Pell, segundo Lucas (1891)

CHAP. XVIII. — FONCTIONS NUMÉRIQUES DU SECOND ORDRE. 311									
<i>Premier genre</i> : $u^2 \Delta u - 2$. $\Delta = 1$.									
$\left\{ \begin{array}{l} n \\ U_n \\ V_n \end{array} \right.$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,
	0,	1,	3,	7,	15,	31,	63,	127,	255,
	2,	3,	5,	9,	17,	33,	65,	129,	257,
									513,
									1025.
Suites de FERMAT.									
<i>Deuxième genre</i> . — Lorsque Δ est un entier positif qui n'est pas le carré d'un nombre entier, l'échelle n'est plus décomposable en deux facteurs linéaires, et l'on obtient les fonctions du second genre. Il en est ainsi, par exemple, dans les hypothèses									
$p = 1, \quad q = -1,$									
pour lesquelles $\Delta = 5$; on obtient alors les <i>Suites de FIBONACCI</i> (*):									
<i>Deuxième genre</i> : $u^2 \Delta u + 1$. $\Delta = 5$.									
$\left\{ \begin{array}{l} n \\ U_n \\ V_n \end{array} \right.$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,
	0,	1,	1,	2,	3,	5,	8,	13,	21,
	2,	1,	3,	4,	7,	11,	18,	29,	47,
									76,
									123.
Suites de FIBONACCI.									
Nous prendrons encore pour exemple de fonctions du deuxième genre, les suites récurrentes définies par les hypothèses									
$p = 2, \quad q = -1,$									
pour lesquelles $\Delta = 8$, et que nous appellerons <i>Suites de PELL</i> :									
<i>Deuxième genre</i> : $u^2 \Delta u + 1$. $\Delta = 8$.									
$\left\{ \begin{array}{l} n \\ U_n \\ V_n \end{array} \right.$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,
	0,	1,	2,	5,	12,	29,	70,	169,	408,
	2,	2,	6,	14,	34,	82,	198,	478,	1154,
									2786,
									6726.
Suites de PELL.									
<i>Troisième genre</i> . — Lorsque Δ est un entier négatif, on obtient les fonctions du troisième genre. Les plus simples proviennent des hypothèses									
$p = 1, \quad q = 1,$									

Fonte: Lucas (1891, p. 311)

Um comentário interessante sobre nomenclatura é que Lucas (1891) não definiu explicitamente a sequência de *sequência de Pell-Lucas*, sendo esta apenas motivada por ser par da *sequência de Pell* na "suite" de Pell. Outros autores, como por exemplo Horadam (1994a), Čerin e Gianella (2006), Dasdemir (2011), Gulec e Taskara (2012) e Catarino (2014) definem a *sequência de Pell-Lucas* como

$$\begin{cases} Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}, \\ Q_0 = 2, Q_1 = 2. \end{cases}$$

gerando a sequência (2, 2, 6, 14, 34, 82, 198, 478, ...) encontrada também em Lucas (1891). Na verdade a maioria dos autores define esta última como *sequência de Pell-Lucas*, reservando para a sequência q_n a nomenclatura *sequência de Pell-Lucas modificada*. Aparentemente a expressão *sequência de Pell-Lucas modificada* tornou-se conhecida através de Horadam (1994a), que aceita a nomenclatura dada por Bruckman, para q_n , conforme texto de Whitney (1985).

Observando a notação proposta por estes autores, temos então que, $\forall n \in \mathbb{Z}$

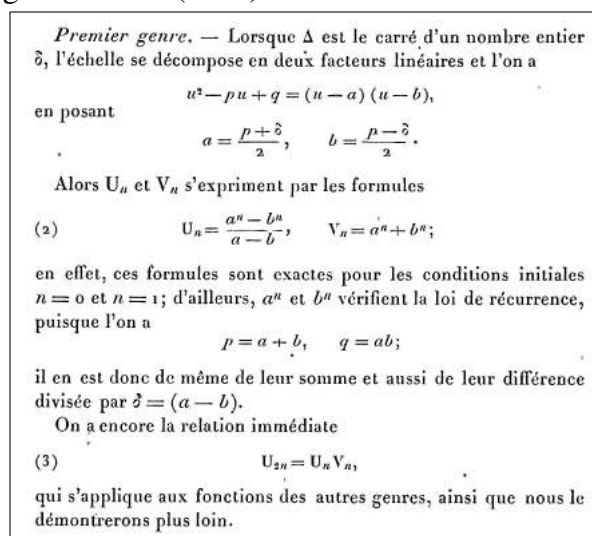
$$\begin{cases} p_n = 2p_{n-1} + p_{n-2}, \\ p_0 = 0, p_1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}, \\ Q_0 = 2, Q_1 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} q_n = 2q_{n-1} + q_{n-2}, \\ q_0 = 1, q_1 = 1. \end{cases}$$

definem respectivamente as *sequência de Pell*, *sequência de Pell-Lucas* e a *sequência de Pell-Lucas modificada*. Perceba que $q_n = v_n + v_{n-1} = p_n + p_{n-1}$ nos permite reescrever $t_n = q_n/v_n = (p_n + p_{n-1})/p_n$, fazendo a razão t_n depender somente de p_n .

Enquanto isso Koshy (2014) ignora a nomenclatura *sequência de Pell-Lucas modificada*, definindo (q_n) como *sequência de Pell-Lucas*, fazendo uso de $2q_n$ sem maiores explicações quando pretende obter os termos da sequência (Q_n) . Adotamos neste trabalho tal postura, alinhada a Koshy (2014), pois não nos seria útil discutir ambas (q_n) e (Q_n) .

Na verdade, muitas propriedades aqui discutidas, incluindo a fórmula de Binet já figura em Lucas (1891). Segundo Alves (2017a), no século 18 tal relação já havia sido demonstrada, de modo independente por Lamé (1795 – 1870) e Binet (1786 – 1856), para o caso particular da *sequência de Fibonacci*. No entanto Lucas (1891) apresenta versões para fórmula de Binet para U_n e V_n , dadas por $U_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}$ e $V_n = a^n + b^n$, como podemos ver na figura 8.

Figura 8 – Fórmulas de Binet para U_n e V_n , segundo Lucas (1891).



Fonte: Lucas (1891, p. 310)

Em Lucas (1891) encontramos já as primeiras identidades para *sequência de Pell* em um formato similar ao que apresentamos neste trabalho, na forma ainda das recorrências gerais U_n e V_n . Na figura 8 vemos a identidade $p_{2n} = 2p_n q_n$ presente no corolário 3.2.3 e apresentada como $U_{2n} = U_n V_n$ e na figura 9 vemos as fórmulas para soma e diferença de índices, encontradas no teorema 3.2.1.

Avançando no tempo, em Horadam (1965, p. 1) vemos uma abordagem mais geral, onde o autor define a recorrência

$$w(a, b, p, q) = \begin{cases} w_{n+2} = pw_{n+1} - qw_n; \\ w_0 = a; w_1 = b. \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

Figura 9 – Identidades de soma e diferença de índices, por Lucas (1891).

Si nous changeons a en b et δ en $-\delta$, nous obtenons une autre formule; puis, par addition et par soustraction,

$$(2) \quad \begin{cases} 2U_{m+n} = U_m V_n + U_n V_m, \\ 2V_{m+n} = V_m V_n + \Delta U_m U_n. \end{cases}$$

Ces formules permettent de calculer les valeurs de U et de V qui correspondent à l'indice ou argument $(m+n)$, lorsque l'on connaît les valeurs de U et de V pour les arguments m et n ; en changeant n en $-n$, on trouve encore, en tenant compte des formules (2) du n° 177,

$$(3) \quad \begin{cases} 2q^n U_{m-n} = U_m V_n - U_n V_m, \\ 2q^n V_{m-n} = V_m V_n - \Delta U_m U_n. \end{cases}$$

Fonte: Lucas (1891, p. 316)

de modo a generalizar o texto de Lucas (1891). Autores posteriores utilizam o termo *sequência de Horadam* para tal recorrência e os termos w_n chamados de *números de Horadam*. Note que as recorrências U_n e V_n podem ser tomadas como $w(0, 1, p, q)$ e $w(2, p, p, q)$ e de fato Horadam (1965) segue um caminho similar a Lucas (1891), fixando as recorrências auxiliares

$$u_n(p, q) = w(0, 1, p, q)$$

$$v_n(p, q) = w(2, p, p, q)$$

e derivando inúmeras propriedades para tanto para $U_n(p, q)$, $V_n(p, q)$ quanto para w_n , utilizando como base as recorrências auxiliares definidas em seu texto. Neste texto, figuram as fórmulas de Binet para u_n e v_n , as relações com termos de índice negativo bem como diversas identidades, muitas delas presentes neste texto.

Em Horadam (1971) vemos um tratamento dedicado a *sequência de Pell*, particularizando os resultados encontrados em Horadam (1965) para tal sequência. Na figura 10 está o registro da definição oferecida em Horadam (1971).

Figura 10 – Definição de Horadam (1971) para $(p_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

Recent issues of this Journal have contained several interesting special results involving Pell numbers. Allowing for extension to the usual Pell numbers to negative subscripts, we define the Pell numbers by the Pell sequence $\{P_n\}$ thus:

$$(1) \quad \{P_n\}: \dots P_{-4} \ P_{-3} \ P_{-2} \ P_{-1} \ P_0 \ P_1 \ P_2 \ P_3 \ P_4 \ P_5 \dots$$

$\dots \quad -12 \quad 5 \quad -2 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 5 \quad 12 \quad 29 \dots$

in which

$$(2) \quad P_0 = 0, \quad P_1 = 1, \quad P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$$

and

$$(2') \quad P_{-n} = (-1)^{n+1} P_n.$$

Fonte: Horadam (1971, p. 245)

Nossas observações históricas até agora nos evidenciam os seguintes fatos, que indicam variáveis epistemológicas a serem observadas: primeiro, que o modelo de recorrência para

a *sequência de Pell* demorou 2000 anos para ser elaborado de forma independente da *equação de Pell* ou de outras aplicações, como aproximações a $\sqrt{2}$. Assim, de forma alguma sua descoberta se faz trivial e deve ser estimulada por alguma via, configurando um importante obstáculo epistemológico. Segundo, uma vez elaborada a definição via recorrências lineares, a extensão para índices inteiros ocorre desde as primeiras aparições (LUCAS, 1891), ou seja, a evolução histórica sugere que, apesar de não necessariamente elementar, a sugestão de tal extensão não é objeto complexo, constituindo talvez em um obstáculo de menor valor, mas passível de surgir dependendo dos hábitos de estudo vigentes.

Seguindo com nossa descrição, Ercolano (1979) é nossa referência mais antiga sobre o modelo matricial para *sequência de Pell*. A principal origem para este trabalho parece ser um artigo do mesmo autor na mesma publicação, em 1976 (ERCOLANO, 1976), onde o autor faz uma exposição similar para a *sequência de Fibonacci*.

Figura 11 – Modelo matricial de Ercolano (1979).

(a) Recorte da p. 71

(b) Recorte da p. 72

MATRIX GENERATORS OF PELL SEQUENCES JOSEPH ERCOLANO Baruch College, CUNY SECTION 1 The Pell sequence $\{P_n\}$ is defined recursively by the equation (1) $P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$, $n = 2, 3, \dots$, where $P_1 = 1$, $P_2 = 2$. As is well known (see, e.g., [1]), the members of this sequence are also generated by the matrix $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$ since by taking successive positive powers of M one can easily establish that $M^n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}.$ Related to the sequence $\{P_n\}$ is the sequence $\{R_n\}$, which is defined recursively [1] by	72 MATRIX GENERATORS OF PELL SEQUENCES [Feb.] SECTION 2 A direct calculation shows that the matrix $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ satisfies the Pell equation; i.e., $M^2 = 2M + I,$ where $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Let $A = \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}$, where x, y, u, v are to be determined subject only to the condition that $xv - yu \neq 0$. Substitution of A into (2) results in the following system of scalar equations: (3.1) $x^2 - 2x - 1 + yu = 0$ (3.2) $(x + v - 2)y = 0$ (3.3) $(x + v - 2)u = 0$ (3.4) $v^2 - 2v - 1 + yu = 0$ We now investigate possible solutions of these equations. Since the techniques are similar to those used in [3], we omit most of the details. Case 1: $y = 0$. Equations (3.1), (3.4) reduce to the Pell equation, implying $x = \{\psi, \psi'\}$, $v = \{\theta, \theta'\}$. (a) If $u = 0$, we obtain the following matrix generators:
--	--

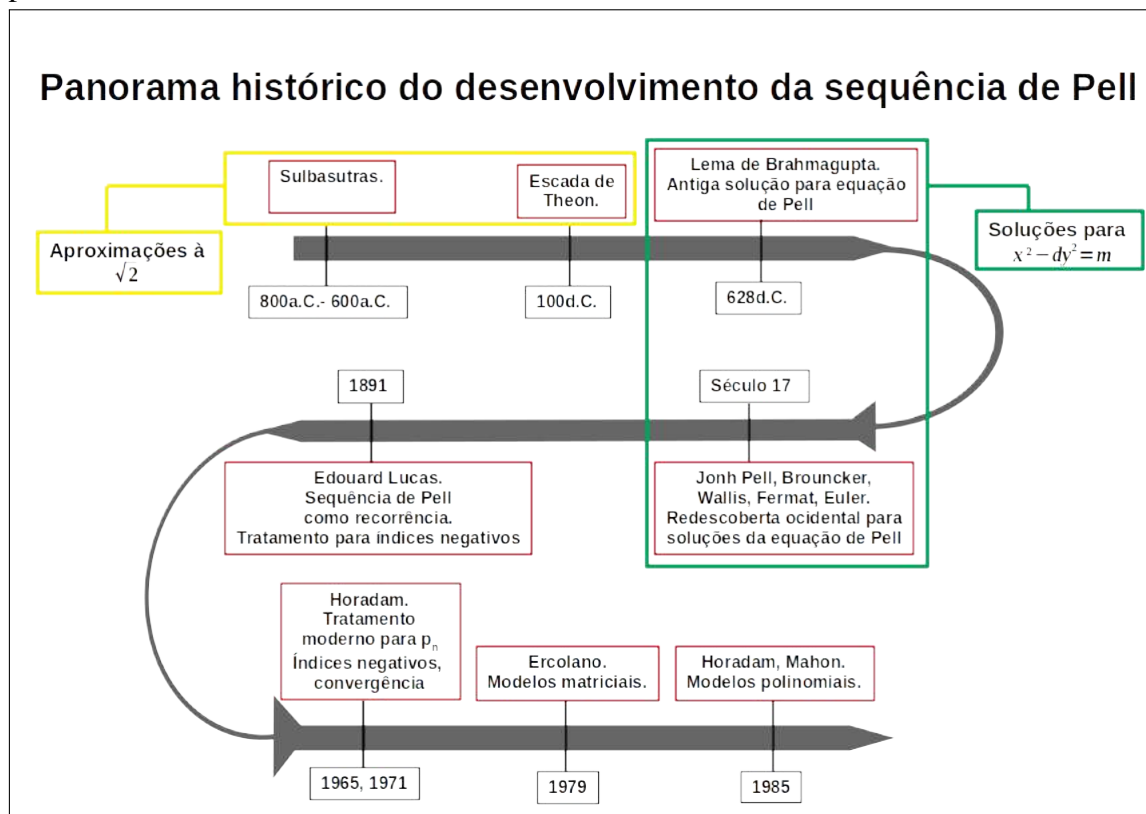
Fonte: Ercolano (1979, p. 71,72)

Ercolano (1979) examina as propostas matriciais buscando as matrizes que satisfazem a equação $M^2 = 2M + Id$, uma versão matricial da *equação de Pell*, com a intenção de encontrar matrizes capazes de gerar os *números de Pell*. O argumento apela para alguns elementos da álgebra linear para analisar a essência das matrizes e de suas possíveis transformações. Ercolano (1979) conclui não apenas com as matrizes geradoras propostas neste trabalho, mas mostra que outras matrizes em configurações diferentes das apresentadas aqui satisfazem a equação $M^2 = 2M + Id$ e possuem os termos p_n ou q_n em arranjos diferentes dos propostos aqui.

Já os modelos polinomiais de Pell são discutidos em (HORADAM; MAHON, 1985), registro mais antigo encontrado para este trabalho. Novamente já existiam desenvolvimentos elementares para os modelos polinomiais de Fibonacci, de modo que as ideias aqui são inspiradas nos mesmos.

A seguir na figura 12 um diagrama com a linha do tempo contendo os fatos discutidos até agora.

Figura 12 – Construção dos modelo matemático para a *sequência de Pell*, sob o ponto de vista histórico.



Fonte: Autor

Apesar dos modelos matriciais e polinomiais terem surgido quase ao mesmo tempo, segundo a organização detectada por nossos registros, o tratamento elementar para o modelo matricial pode ser mais delicado, ao observar a abordagem primeva de Ercolano (1979) percebermos uma manifestação mais sofisticada do que Horadam e Mahon (1985), o que pode indicar que o tratamento do modelo matricial representa um obstáculo epistemológico mais profundo na detecção e tratamento de tais matrizes. Já o modelo polinomial possui apoio inicial nos procedimentos padrão utilizados para recorrências lineares de 2º ordem, homogêneas, cujo tratamento elementar se mostra mais simples. Manteremos tal consideração em mente ao construir mais a frente as situações didáticas desejadas.

Citamos Ercolano (1979) e Horadam e Mahon (1985) como marcadores de tempo, sinalizando os registros mais antigos que tivemos notícias a respeito dos modelos matriciais e polinomiais para a *sequência de Pell*. No entanto, existe uma extensa lista de trabalhos até os dias atuais, resultados de investigações contemporâneas em matemática pura e aplicada sobre o tema.

3.6 Contribuições recentes: Desenvolvimento histórico contemporâneo

1. Horadam (1993) apresenta abordagens quaterniônicas para recorrências lineares, particularizando como exemplo de aplicação para a *sequência de Fibonacci*, mas facilmente

adaptadas para *sequência de Pell*.

2. Horadam (1994a) mostra que qualquer inteiro pode ser escrito como uma soma de termos de q_n .
3. Horadam (1994b) trata do modelo polinomial para w_n .
4. Mansour (2004) descreve como obter funções geradoras para sequências de potências de w_n . Em particular, fornece as funções geradoras para $f_n^k, l_n^k, p_n^k, k \in \mathbb{N}$.
5. Kilic e Tasci (2005) desenvolvem uma análise mais profunda sobre as matrizes geradoras para *sequência de Pell*, utilizando amplamente recursos da Álgebra Linear.
6. Kilic e Tasci (2006) propoem uma generalização para *sequência de Pell* estendendo a recorrência para uma ordem $k > 0$ qualquer, k inteiro.
7. Čerin e Gianella (2006) tratam de novas identidades utilizando somas de quadrados de p_n e q_n .
8. Dasdemir (2011) fornece novas matrizes geradoras para p_n e q_n , derivando com isso novas propriedades para tais sequências.
9. Gulec e Taskara (2012) propoem as sequências (s, t) –Pell e (s, t) –Pell-Lucas, caminho alternativo para generalização de tais sequências.
10. Catarino (2013a) discorrem sobre o modelo de generalização definido como k – Pell, obtendo propriedades similares a *sequência de Pell*. Do mesmo modo Catarino e Vasco (2013b) discorre sobre modelo similar para a sequência de *sequência de Pell-Lucas*, nomeado como k – Pell Modificado.
11. Szynal-Liana e Włoch (2016) introduzem os *quarternions de Pell* e os *octônios de Pell*, desenvolvendo diversas propriedades correlatas. Çimen e İpek (2016) Também realizam exposição similar, mas abordando os *quarternions de Pell* e *quarternions de Pell-Lucas* em suas relação mútuas intrínsecas.
12. Catarino (2017) traz aplicações para o modelo da recorrência k – Pell, encontrando novas propriedades para equações de diferenças.
13. Catarino (2018a) apresenta novas abordagens para os *polinômios de Pell* e *polinômios de Pell-Lucas*.
14. Balamurugan (2018) desenvolve um modelo de complexificação para *sequência de Pell*, buscando recorrências lineares utilizando os Números Gaussianos $G(a, b) = a + ib, a, b \in \mathbb{Z}$, seguindo de perto as ideias colocadas em Harman (1981).

15. Catarino e Vasco (2018b) tratam do comportamento matricial para os *quatérnions de Pell*, *Pell-Lucas*, *k-Pell* e *k-Pell-Lucas*
16. Bilgici e Catarino (2018) apresentam uma generalização para os *quatérnions de Pell*, introduzindo variáveis livres na contagem dos índices dos termos da sequência.
17. Karaaslan (2019) discorre sobre as propriedades dos *polinômios de Pell-Lucas* nomeados pelo autor como *Pell-Lucas modificados*.
18. Karaaslan e Yağmur (2019) desenvolvem definições para números gaussianos (s,t)-Pell e gaussianos (s,t)-Pell-Lucas e suas representações matriciais.
19. Wani *et al.* (2019) apresentam modelos matriciais para a *sequência k-Pell*.
20. Catarino, Campos e Vasco (2019) apresentam detalhes sobre a aritmética de índices nas sequências *k – Pell*, *k – Pell – Lucas* e *k – Pell – Lucas modificado*.
21. Alves e Catarino (2019) oferecem novos caminhos para demonstrar propriedades matriciais para a *sequência de Fibonacci* e *sequência de k-Pell*.

Tais trabalhos indicam que as pesquisas em torno da *sequência de Pell* ainda possuem lugar nos desenvolvimentos recentes, demarcando esta sequência como fértil e relevante para a matemática pura e aplicada, tornando seu destaque especial do ponto de vista do ensino tanto em nível elementar quanto avançado.

Encerramos aqui nossas colocações históricas e com isso nossa fase de análises prévias. Com base na descrição e análise aqui construídas, precisamos agora construir nossas situações didáticas, o que será feita no próximo capítulo, constituindo a análise *a priori* de nossa Engenharia Didática.

4 ANÁLISE A *PRIORI* E EXPERIMENTAÇÃO

Almouloud (2014, p. 175) delimita que “o objetivo de uma análise a priori é determinar como as escolhas efetuadas (as variáveis que queremos admitir como pertinentes) permitem controlar os comportamentos dos alunos e explicar seu sentido”. Dessa maneira, nosso principal objetivo durante a Análise *a Priori* é determinar as variáveis a serem examinadas e quais seus efeitos. Nossa investigação mantém o foco principal nas variáveis microdidáticas, ou seja, as variáveis relacionadas à organização, planejamento e execução das sequências de ensino em sala de aula.

Portanto nesta seção realizaremos a discussão em torno destas variáveis, constituindo os elementos de organização de nossas sequências de ensino. As principais fontes para tais variáveis são os obstáculos epistemológicos, a descrição do local de aplicação do estudo e a configuração da amostra de participantes da pesquisa. Dessa forma, pretendemos esclarecer que meios tomamos para delinear as sequências de ensino para o ensino da *sequência de Pell*.

Além de discutir as variáveis microdidáticas para esta investigação, nessa seção ainda detalharemos as características fundamentais associadas a experimentação das situações didáticas aplicadas ao público-alvo. A fase de experimentação “é o momento de se colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade, o que implica um retorno à Análise *a Priori*.” (ALMOULOU, 2014, p. 177)

Seguindo os pressupostos da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996) e amparados pela fase de análises prévias, precisamos agora conceber o experimento didático. A teoria de ensino escolhida como referência para concepção e análise das situações de ensino é a Teoria das Situações Didáticas, de Brousseau (2008).

Como já discurremos, a descrição epistemológica, o percurso histórico do conhecimento e as características cognitivas dos participantes servirão de referência para a efetivação das *realizações didáticas*: concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino (COUTINHO; ALMOULOU, 2008, p. 66), que serão corporificadas e depuradas através dos modelos de iteração de ensino descritas pela Teoria das Situações Didáticas: Ação, Formulação, Validação e Institucionalização.

O *milieu*, conceito fundamental apresentado por Brousseau (2008), é manifestado pela estrutura e propostas de atividades presentes nos questionários, sendo responsável pelo desenvolvimento das situações didáticas presentes na Teoria das Situações Didáticas, correspondentes as dialéticas de ação, formulação e validação. Os registros para as dialéticas de ação e formulação corresponderão as produções escritas dos alunos, enquanto os registros para a dialética de validação correspondem a registros fotográficos e áudio dos alunos apresentando seus resultados aos colegas.

A institucionalização será executada preferencialmente no início do encontro seguinte e eventualmente quando oportuno para esclarecer conhecimentos necessários para a continuidade da construção epistêmica com conhecimento matemático. Procuramos fazer a institucionalização preferencialmente no começo do encontro seguinte por dois motivos principais.

Primeiro, isso evita abreviar ou apressar os trabalhos dos alunos, prevenindo que o professor/experimentador encurte o encontro induzindo as respostas esperadas. Segundo, permite dar tempo ao alunos de amadurecer os conhecimentos discutidos, tornando a institucionalização mais eficiente.

Notem que, pela forma que as situações didáticas serão conduzidas, as dialéticas de ação e formulação tendem a se sobrepor, de modo que após o início da situação de ação, em algum momento, a situação de formulação será iniciada sem no entanto que se dê necessariamente o final da situação de ação. Um marcador do início da situação de formulação deve acontecer quando o aluno tiver que lidar, irremediavelmente, com algum obstáculo epistemológico (BROUSSEAU, 2008; ALMOULOU, 2014) que o force a repensar seus procedimentos e aperfeiçoar seus registros, ou seja, notação e formalismo mais apurados a descrição do problema posto.

4.1 Descrição do lócus de experimentação e do público-alvo

Nosso público-alvo foi selecionado a partir de alunos do curso de Licenciatura em Matemática, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia - IFCE *campus* Fortaleza. O referido *campus* possui, além do Ensino Médio Integrado, nove cursos superiores, dentre eles 4 licenciaturas: Licenciatura em Artes Visuais, Licenciatura em Física, Licenciatura em Matemática e Licenciatura em Teatro. O *campus* também possui pós-graduações *lato sensu* e *stricto sensu*.

O Curso em Licenciatura em Matemática possui resolução de criação de 2005, de característica semestral, com duração de 8 semestres, com 30 vagas semestrais e funcionamento matutino ou vespertino. O funcionamento diurno implica que os alunos, em sua maioria, não trabalham em período integral, podendo se dedicar a atividades extracurriculares.

O Curso de Licenciatura em Matemática possui um laboratório didático e tem a sua disposição um laboratório de informática. No entanto, nas disciplinas do eixo de formação específica, ou seja, as disciplinas envolvendo conteúdos de matemática pura ou aplicada condução essencialmente formal-expositiva, com pouco ou nenhum contato com metodologias que incentivem a descoberta ou construção do conhecimento por parte dos alunos, que constitui uma variável importante para observação das situações didáticas.

Em relação ao público-alvo, selecionamos alunos da disciplina História da Matemática por afinidade com o tema, já que podemos inserir a discussão da *sequência de Pell* no interior do percurso histórico discutido no interior da disciplina. O conteúdo programático para a referida disciplina se encontra no Anexo C.

As situações didáticas estão distribuídas em encontros com duração de 1 hora e 30 minutos cada, durante as aulas de história da matemática do curso de licenciatura em matemática do IFCE, *campus* Fortaleza, de modo que cada situação didática corresponda a um encontro, totalizando 04 situações didáticas, com carga horária total de 6 h/a.

Os encontros foram realizados durante as próprias aulas de história da matemática, com o aval do professor da disciplina. Havia um total de 08 alunos matriculados, no entanto somente 05 dos 08 alunos eram frequentadores assíduos, de modo que aproveitamos somente o material produzido por esses alunos nesta pesquisa.

Todos os 08 alunos assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, aceitando participar da pesquisa e concordando com a divulgação de dados e resultados, de acordo com os exigências colocadas pelo Comitê de Ética do IFCE.

Com este delineamento, devemos seguir com a construção das situações didáticas.

4.2 Construção das Situações Didáticas

Desse modo, preparamos 4 situações didáticas, resultando em 4 encontros, abordando aspectos matemáticos e históricos da *sequência de Pell* atrelados a alguns de seus diversos modelos: extensão aos inteiros, matricial e polinomial, procurando explorar a manifestação de diversas propriedades entre esses modelos.

Cada situação didática é materializada em um questionário, nomeados como questionário 01, 02, 03 e 04. Estes questionários estão no apêndice A. Cada um desses questionários possuem entre 1 a 4 situações-problema, abordando um tema específico. Cada uma das situações didáticas foi construída para abordar os seguintes temas:

1. Definição da *sequência de Pell* e da *sequência de Pell-Lucas*. Extensão das sequências para índices inteiros. Propriedades de convergência. Motivação histórica com aproximações a $\sqrt{2}$.
2. Exploração de propriedades, com suporte numérico, da *sequência de Pell*: soma de termos, quadrados, cubos, divisibilidade, etc. Exploração de propriedades, com suporte numérico, para α e β , raízes da *equação característica* da *sequência de Pell*. Fórmula de Binet.
3. Representação Matricial e noção de sequência de matrizes. Significado de p_{-n} na representação matricial. Propriedades correlatas a (p_n)
4. Representação Polinomial e suas propriedades. Fórmula de Binet para representação polinomial.

O processo de construção de tais situações didáticas atenta para a necessidade de atender ao processo de transposição didática, ao mesmo tempo que oportuniza a descoberta de resultados. Dessa forma, as situações-problemas são concebidas sob os pressupostos da Teoria

das Situações Didáticas, ou seja enfatizando as situações adidáticas como forma de exploração guiada, proporcionando a descoberta de resultados e teoremas, levando a cabo o processo de transposição didática pretendido, de acordo tal também com Artigue (1996) que coloca como um dos objetivos da Engenharia Didática é para provocar, de forma controlada, a evolução das concepções dos alunos.

A escolha dos temas dos questionários e modo de organização observa as seguintes características observadas durante a fase de Análises Prévias (p. 117-118):

1. A conexão entre a propriedade de convergência de $\frac{p_{n+1}}{p_n}$ com a *equação de Pell* sugere que a percepção de que $\frac{p_{n+1}}{p_n} \rightarrow \sqrt{2}$ não é espontânea, devendo ser estimulada. Além do mais, tal fato também possui conexão com a *equação característica* da citada recorrência, se tratando então de um fato unificador e importante. Desse modo consiste em um obstáculo epistemológico importante a ser explorado.
2. Desde a primeira aparição da definição da *sequência de Pell* via recorrência linear em Lucas (1891), figura termos de índice negativos, sugerindo que sua aparição é de natureza trivial e portanto, necessitando de pouco estímulo para sua manifestação. No entanto considerando os hábitos de ensino e os conteúdos normalmente trabalhados em matemática no ensino médio e licenciatura em matemática, não esperamos a percepção espontânea para tal possibilidade.
3. As manifestações matriciais, em sua essência, também apelam para recursos de Álgebra Linear para para completa compreensão. Apesar de não ter sido necessário utilizar conceitos avançados em nossa descrição epistêmica, fica claro pela exposição que matemática elementar é insuficiente para sua descrição satisfatória. Além disso, a aparição um tanto tardia para tal abordagem sugere que a percepção matricial para a *sequência de Pell* é não trivial e necessita de estímulo específico para sua manifestação, constituindo um obstáculo epistemológico.
4. Finalmente, a aparição tardia para o tratamento polinomial, $[p_n(x)]$, associado ao ineditismo da associação de sequências numéricas elementares e polinômios no interior dos assuntos tratados nas licenciaturas em matemática (componente didático), sugere fortemente que tal associação é não trivial e deve ser estimulada para promover o processo investigativo dos alunos.

Desse modo, a seguir oferecemos uma discussão pormenorizada do que cada situação didática trata, com a especificação das variáveis microdidáticas a serem observadas em cada sessão de ensino. Os questionários estão disponíveis no Apêndice A.

4.3 Descrição dos questionários e variáveis microdidáticas

Com tudo o que foi exposto, antes de examinar as situações didáticas preparadas para a fase de experimentação, gostaríamos de lembrar que a nossa hipótese de pesquisa é:

O estudo sobre o objeto matemático conhecido como sequência de Pell, com transposição didática efetuada segundo os preceitos da TSD, é capaz de mobilizar o pensamento intuitivo e inferencial do estudante, bem como atitude investigativa, conduzindo-o a descoberta de teoremas e resultados;

Tal hipótese de pesquisa nos conduz aos seguintes objetivos de trabalho:

Objetivo Geral

- Elaborar uma Engenharia Didática para objeto matemático denominado *sequência de Pell*, bem como seus diversos modelos de generalização, através de um conjunto de situações didáticas segundo os pressupostos da Teoria das Situações Didáticas.

Objetivos Específicos

- Estudar e investigar as relações matemáticas, epistemológicas e históricas da *sequência de Pell* e seus modelos de generalização;
- Tomando a Teoria das Situações Didáticas como teoria de ensino, construir sequências didáticas que abordem as características da *sequência de Pell* e seus modelos de generalização, explorando os obstáculos epistemológicos encontrados;
- Analisar as estratégias e manifestações dos alunos durante a aplicação das sequências didáticas construídas, segundo o paradigma da Engenharia Didática.

Desse modo, seguimos com a descrição das situações didáticas, especificando as dialéticas próprias esperadas segundo a Teoria das Situações Didáticas: ação, formulação, validação e institucionalização.

4.3.1 Situação Didática 01

O primeiro questionário aborda a definição da *sequência de Pell* através de uma motivação histórica, utilizando o algoritmo *Escada de Theon*, definição 3.5.1, como ponto de partida. O questionário possui 4 itens.

No primeiro item, pedimos para explorar o algoritmo da *Escada de Theon*. Pede-se para calcular para $n \in \{1, \dots, 10\}$ os termos v_n e q_n do algoritmo, e calcular as razões $t_n = q_n/v_n$ para os valores calculados. A atividade exige apenas habilidades de computação e compreensão do algoritmo. Esperamos a manifestação de dois tipos de erros:

1. Erros aritméticos, principalmente durante o cálculo dos valores v_n e q_n .
2. Falhas de manipulação do algoritmo, com posicionamento equivocado dos termos v_n e q_n .

A dialética de ação predomina em quase todo o problema, que se trata essencialmente de manipulação aritmética. Os dois erros acima devem ser localizados por inconsistências aritméticas identificadas pelos próprios alunos.

Devemos observar o início da dialética de formulação durante a manifestação do segundo tipo de erro, que deve obrigar os alunos a revisar os cálculos e eventualmente melhorar a notação e entrar em comunicação com seus vizinhos imediatos. A solução correta para esta atividade se encontra nas tabelas 19 e 20, que são as manifestações desejadas para validação dos alunos.

No segundo item, perguntamos sobre a existência de padrões numéricos nas sequências v_n e q_n . Indagamos se é possível redefinir tais sequências de modo mais conveniente e se é possível definir os termos dessas sequências para $n = 0$.

A listagem dos termos v_n e q_n devem sugerir que ambas as sequências podem ser definidas de modo independente como recorrências lineares de 2ª ordem. A situação de ação para o problema fica bem determinada pela constatação da observação e manipulação numérica dos termos por parte dos alunos.

Como formulação, esperamos a correta expressão das definições de (v_n) e (q_n) em termos de recorrências lineares.

Esses fatos podem ser demonstrados unicamente utilizando a definição do algoritmo da *Escada de Theon*. A resposta desejada para esta questão pode ser encontrada na equações (3.59) e (3.60), página 104 e as demonstrações que acompanham tais equações, constituindo na validação esperada por parte dos alunos.

No terceiro item, questionamos sobre a possibilidade de termos da *sequência de Pell* com o índice n negativo. Pedimos também que os alunos procurem alguma relação de simetria entre os termos positivos e negativos, expressando matematicamente os fatos que encontrarem.

Esperamos que os alunos percebam facilmente a relação, por simples observação do comportamento numérico, onde o pareamento dos termos relacionados constitui uma situação de ação, enquanto generalização para as expressões

$$\begin{aligned} p_{-n} &= (-1)^{n+1} p_n \\ q_{-n} &= (-1)^n q_n \end{aligned}$$

constitui a situação de formulação.

Solicitaremos alguma justificativa algébrica, esta constituindo a validação do problema. É esperado alguma tentativa de indução para tentar demonstrar o resultado, mesmo sem a posse de uma fórmula de Binet. A resposta esperada para esse item se encontra na equa-

ção (3.12) e no lema 3.2.1, que pode ser levada a cabo mesmo sem a fórmula de Binet, através de uma prova por indução, como segue a seguir

$$1. \quad p_{-n} = (-1)^{n+1} p_n$$

Demonstração. Para $n = 0$, $p_0 = (-1)p_0$. Supondo o resultado válido para todo natural menor ou igual a n , $p_{-n} = (-1)^{n+1} p_n$ e

$$\begin{aligned} p_{-(n+1)} &= p_{-n-1} = p_{-n+1} - 2p_{-n} = p_{-(n-1)} - 2p_{-n} \\ &= (-1)^n p_{n-1} - 2(-1)^{n+1} p_n = (-1)^{n+2} [2p_n + p_{n-1}] \implies \\ p_{-(n+1)} &= (-1)^{n+2} p_{n+1}. \end{aligned}$$

□

$$2. \quad q_{-n} = (-1)^n q_n$$

Demonstração. Para $n = 0$, $q_0 = (-1)q_0$. Supondo o resultado válido para todo natural menor ou igual a n , $q_{-n} = (-1)^n q_n$ e

$$\begin{aligned} q_{-(n+1)} &= q_{-n-1} = q_{-n+1} - 2q_{-n} = q_{-(n-1)} - 2q_{-n} \\ &= (-1)^{n-1} q_{n-1} - 2(-1)^n q_n = (-1)^{n+1} [2q_n + q_{n-1}] \implies \\ q_{-(n+1)} &= (-1)^{n+1} q_{n+1}. \end{aligned}$$

□

Estas demonstrações são as validações esperadas dos alunos.

No quarto e último problema para essa sessão, pedimos para calcular as razões $\alpha_n = v_{n+1}/v_n$ e $\beta_n = q_{n+1}/q_n$ para $-10 \leq n \leq 10$. Esses valores devem gerar as raízes da *equação característica* da *sequência de Pell*. Pergunta-se também sobre o comportamento de tais razões para n negativo. Esperamos neste item apenas uma percepção numérica da convergência, pois o tratamento adequado exige habilidades com convergência de sequências.

A dialética de ação corresponde aqui unicamente a computação dos termos α_n e β_n , enquanto a formulação corresponde a percepção e registro de tal convergência. Importante perceber se o aluno somente expressará uma aproximação no formato decimal ou escreverá $1 + \sqrt{2}$ e $1 - \sqrt{2}$, esta percepção se constituindo como parte da dialética de formulação. A resposta correta para esse item é exibida na tabela 23. A validação ideal se encontra na seção 3.2.3.

A última situação-problema da situação didática 01 tem como objetivo servir de base para abordar a equação característica para a *sequência de Pell*, durante a institucionalização correspondente a esta situação didática.

Como institucionalização, prevista para o encontro seguinte devemos, além de responder os problemas do questionário 01, realizar uma exposição sobre a *equação característica*, utilizando como conexão a convergência do último problema do questionário 01, bem como realizar uma rápida revisão sobre indução matemática. Também realizaremos a formalização dos

Tabela 23 – Resposta desejada para o item 04 do questionário 01

n	α_n	β_n
1	2	3
2	2,5	$2,\bar{3}$
3	2,4	2,428571428...
4	$2,4\bar{16}$	2,411764705...
5	2,4137931...	2,414634146...
6	2,414285714...	$2,4\bar{1}$
7	2,414201183...	2,414225941...
8	2,414215686...	2,414211438...
9	2,414213198...	2,414213926...
10	2,414213625...	2,414213499...
-1	0	-1
-2	-0,5	$-0,\bar{3}$
-3	-0,4	$-0,42857\bar{1}$
-4	$-0,4\bar{16}$	$-0,411764705\dots$
-5	-0,4137931...	$-0,414634146\dots$
-6	-0,414285714...	$-0,414634146\dots$
-7	-0,414201183...	$-0,414225941\dots$
-8	-0,414215686...	$-0,414211438\dots$
-9	-0,414213198...	$-0,414213926\dots$
-10	-0,414213625...	$-0,414213499\dots$

Fonte: Autor.

termos negativos, p_{-n} e q_{-n} , argumentando a unicidade de tais termos através da linearidade da equação de recorrência.

Optamos por fazer a apresentação da *equação característica* durante a institucionalização ao invés de propô-la em uma situação adidática pois sua aparição é não trivial, relacionada com resultados da Álgebra Linear, explorar uma situação adidática de modo honesto tomaria uma quantidade considerável de tempo somente para este objeto matemático.

4.3.2 Situação didática 02

O questionário 02 é apresentado de forma pouco estruturada, pois a ideia da sessão 02 é provocar os alunos a realizarem descobertas de propriedades numéricas através da livre exploração dos termos de (p_n) . Destacamos que esta situação didática específica exige a manutenção do processo de devolução de forma mais intensa e constante que as outras situações, dado o nível menor de sistematização prévia em relação as outras situações didáticas.

A primeira situação-problema colocada solicita que os alunos encontrem propriedades envolvendo somas, produtos, diferença de quadrados, somas de índices, padrões com p_n de índices pares e ímpares, etc, com apoio de uma tabela com os valores de p_n , para $0 \leq n \leq 31$.

Neste problema, desejamos observar dois aspectos. Primeiro, quais propriedades os alunos conseguem encontrar através da observação e manipulação numérica. E segundo, se os mesmos alunos serão capazes de justificar adequadamente as propriedades encontradas. Parti-

cularmente supomos que as propriedades que constam nos teorema 3.10, 3.2.2, 3.2.3 e corolários 3.2.5 e 3.2.6 devem aparecer em ao menos um dos textos escritos dos alunos.

A dialética de ação consiste na busca de relações, via observação e computação numérica com o auxílio da tabela fornecida, enquanto a dialética de formulação ocorre ao notarmos nos registros a tentativa de generalização e consequente uso da notação adequada.

A dialética de validação ocorre durante as tentativas de justificação ou demonstração dos resultados encontrados.

Como o segundo problema, solicitamos que os alunos procurem propriedades envolvendo α e β , raízes da equação característica de Pell, envolvendo operações fundamentais: soma, produto, divisão, potenciação ou radiciação. Nesse ponto, o conceito de equação característica já deve ter sido apresentado via institucionalização do professor. O objetivo consiste que os alunos encontrem algumas propriedades úteis para a solução do problema 3, que questiona o aluno sobre a existência de uma fórmula geral para os termos de (p_n) , que como sabemos trata-se da fórmula de Binet. As dialéticas de ação, formulação e validação aqui são as mesmas da situação-problema anterior. No entanto, esperamos que os alunos encontrem as relações

$$\begin{aligned}\alpha^n &= \alpha p_n + p_{n-1} \\ \beta^n &= \beta p_n + p_{n-1}.\end{aligned}$$

que podem ser demonstradas por indução.

Sobre a fórmula de Binet, por indução, podemos demonstrar que $\alpha^n = \alpha p_n + p_{n-1}$ e $\beta^n = \beta p_n + p_{n-1}$. Basta fazer $(\alpha^n - \beta^n)$ para conseguir a fórmula de Binet para a *sequência de Pell*

$$\begin{aligned}(\alpha^n - \beta^n) &= p_n(\alpha - \beta) \implies \\ p_n &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\end{aligned}$$

Nesse ponto, convém provocar os alunos para, uma vez com a fórmula de Binet, perguntar sobre a validade para $n < 0$. A correta computação desse fato será tomada como dialética de ação, bem como a constatação do fato geral, via registro em notação adequada como a dialética de formulação. Na dialética de validação esperamos que os alunos percebam que a propriedade $p_{-n} = (-1)^{n+1} p_n$ combinada com a fórmula de Binet demonstre sua validade para $n < 0$.

Pelo fato desta sessão de ensino possuir um caráter um pouco mais aberto, permitindo respostas múltiplas, fixaremos as dialéticas de ação, formulação e validação de modo que como dialética de ação entenderemos como manifestações unicamente aritméticas de uma dada propriedade encontrada; como dialética de formulação a escrita de uma equação ou descrição distinta de uma relação, em notação matemática adequada e similar a apresentado nas análises prévias; como dialética de validação a tentativa de justificativa ou demonstração para a identidade ou relação encontrada.

A institucionalização para o segundo encontro, situação didática 02, demonstraremos inicialmente as relações $\alpha^n = \alpha p_n + p_{n-1}$ e $\beta^n = \beta p_n + p_{n-1}$, via indução, bem com demonstrar os teoremas 3.12 e 3.15, também via indução, sem uso da fórmula de Binet. Seguimos demonstrando da fórmula de Binet, via $\alpha^n - \beta^n$. Partindo da fórmula de Binet demonstrada neste momento e das propriedades $p_{-n} = (-1)^{n+1} p_n$ e $q_{-n} = (-1)^n q_n$, podemos garantir Binet para $-n$. Essa percepção também é esperada na validação dos alunos.

Após estas exposições, faremos a discussão das propriedades encontradas pelos alunos, com o apoio da fórmula de Binet.

4.3.3 Situação Didática 03

O questionário 03 é pensado para abordar representações matriciais. O questionário correspondente indaga sobre possíveis representações matriciais. Como forma de esclarecer a ideia, o texto do questionário traz dois exemplos de definições recursivas utilizando matrizes

$$1. M_n = 3M_{n-1} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$2. M_n = 5M_1 \cdot M_{n-1},$$

onde $M_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Esses dois exemplos servem apenas como introdução a noção de recorrência aplicada a matrizes e garantir que os alunos que por ventura não estejam a vontade possam naturalizar tal aplicação. Devemos dessa maneira solicitar que os alunos computem alguns termos das recorrências definidas logo acima. No entanto, estamos interessados em representações matriciais que gerem sequências de matrizes onde os *números de Pell* figurem, com possibilidade de substituir definição 3.2.1 original.

Proporemos que os alunos explorem outras operações e combinações de matrizes com *números de Pell*, como multiplicação ou uma possível potenciação, presente na definição 3.2.3. Durante o encontro, esperamos que os alunos encontrem o teorema 3.2.6 para $n \in \mathbb{Z}$,

$$P_1^n = \begin{pmatrix} p_{n+1} & p_n \\ p_n & p_{n-1} \end{pmatrix}$$

instituindo assim a sequência matricial correspondente para $n > 0$.

A dialética de ação, novamente, será tomada pela computação numérica exploratória das propriedades buscadas, enquanto a dialética de formulação consiste em exibir com linguagem adequada os resultados candidatos a teoremas e definições.

Toda dialética de validação pode ser corretamente executada via indução matemática, tal como é exibido na seção 3.2.2., capítulo 3.

Neste ponto os alunos já conhecem formulações da *sequência de Pell* com índice negativo. Assim esperamos tentativas de generalização nesta direção, com resultados similares aos encontrados na seção 3.2.2..

As propriedades para este questionário podem em sua totalidade ser demonstradas por indução. Esperamos que durante a validação executada pelos alunos o uso, ou tentativa de uso da indução matemática na demonstração dos resultados.

A institucionalização seguirá segundo os moldes da seção 3.2.2., com tratamento via indução, com exceção da demonstração da fórmula de Binet via diagonalização da matriz presente em (3.22) e da discussão a respeito de quais e quantas matrizes resultam em propriedades similares, neste último caso, fazendo apenas uma exploração numérica.

4.3.4 Situação Didática 04

A situação didática 04, consubstanciada no questionário 04 aborda o conceito de recorrência polinomial análoga para *sequência de Pell*. A definição 3.4.2 é dada no questionário da seguinte forma

$$\begin{cases} p_{n+2}(x) = 2xp_{n+1}(x) + p_n(x) \\ p_1(x) = 1, p_0(x) = 0. \end{cases}$$

cujos primeiros termos são

$$p_0(x) = 0$$

$$p_1(x) = 1$$

$$p_2(x) = 2x$$

$$p_3(x) = 4x^2 + 1$$

$$p_4(x) = 8x^3 + 4x$$

$$p_5(x) = 16x^4 + 12x^2 + 1$$

$$p_6(x) = 32x^5 + 32x^3 + 6x$$

A seguir, são postas três situações-problema.

Na primeira situação-problema, solicitamos que os alunos calculem alguns termos de $[p_n(x)]$, gerando elementos para observação e manipulação aritmética e algébrica nos próximos problemas. Neste mesmo problema, solicitamos que o aluno busque uma relação entre os elementos de $[p_n(x)]$ e (p_n) .

Neste ponto, esperamos que a bagagem de conhecimentos construídos funcionem como apoio as situações-problemas postas, estabelecendo assim um sólido *milieu*.

A primeira propriedade que esperamos que os alunos percebam seja que a soma dos coeficientes do polinômio $p_n(x)$ é igual a p_n . A validação para este fato depende do polinômio $p_n(x)$, que consiste em simplesmente fazer $x = 1$ de onde resulta que $p_n(1) = p_n$, tal como encontramos no teorema 3.4.1. Esse fato abre espaço para outras generalizações.

Como dialética de ação, consideramos a computação dos termos exibidos aqui e na seção 3.4., tabela 16, bem como a computação dos coeficientes de $p_n(x)$ em busca de relações com p_n . Esperamos que os alunos exibam o seguinte comportamento, caracterizando o início

da dialética de formulação

Soma dos coeficientes de $p_0(x) = 0 = p_0$

Soma dos coeficientes de $p_1(x) = 1 = p_1$

Soma dos coeficientes de $p_2(x) = 2 = p_2$

Soma dos coeficientes de $p_3(x) = 4 + 1 = 5 = p_3$

Soma dos coeficientes de $p_4(x) = 8 + 4 = 12 = p_4$

Soma dos coeficientes de $p_5(x) = 16 + 12 + 1 = 29 = p_5$

Soma dos coeficientes de $p_6(x) = 32 + 32 + 6 = 70 = p_6$

finalizando a dialética de formulação com a identidade

Soma dos coeficientes de $p_n(x) = p_n$.

Para a dialética de validação, esperamos a constatação de quê fazendo $x = 1$ o resultado se segue de modo natural

Soma dos coeficientes de $p_n(x) = p_n(1) = p_n$,

completando a demonstração.

A segunda situação-problema apela para as noções já construídas sobre recorrências lineares. A situação-problema pretende provocar o aluno a buscar uma possível *equação característica* e explorar suas raízes.

Como dialética de ação, esperamos que os alunos comparem a recorrência presente na definição 3.2.1 e sua respectiva equação de recorrência $t^2 - 2t - 1 = 0$ com a recorrência polinomial da situação-problema. Esperamos que os alunos percebam a mudança de papel da variável x nas diferentes situações. No interior do polinômio x é uma variável legítima, mas para fins de computação da recorrência ou composição de sua *equação característica* o termo $2x$ deve ser encarado como uma constante.

A dialética de formulação consiste na correta manipulação dos termos da recorrência polinomial presente na situação-problema, resultando na *equação característica*

$$t^2 - 2xt - 1 = 0,$$

cujas raízes corretamente computadas são $\alpha_x = x + \sqrt{x^2 + 1}$ e $\beta_x = x - \sqrt{x^2 + 1}$. Consideramos natural que os alunos tentem combinações de α_x e β_x similares as propriedades para α e β exibidas na seção 3.2.: $\alpha_x \cdot \beta_x$, $\alpha_x - \beta_x$, $\alpha_x + \beta_x$ e as potências α_x^n e β_x^n . Uma discussão e uso destas relações podem ser encontradas em 3.4..

A dialética de validação aqui consiste em simplesmente na justificativa correta para tais cálculos.

A terceira situação-problema que é colocado solicita que os alunos procurem propriedades análogas as encontradas para (p_n) com os termos de $[p_n(x)]$. Esperamos que a identificação $p_n(1) = p_n$ ajude os alunos a buscar propriedades análogas as de $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Uma coleção

de tais propriedades pode ser encontrada na seção 3.4. Pelo fato de $[p_n(x)]$ também estar definido como uma recorrência linear de 2ª ordem, homogênea, acreditamos que no mínimo, os alunos irão procurar e encontrar uma fórmula geral para os termos $p_n(x)$, seguindo um processo análogo para encontrar a fórmula de Binet para (p_n) em (3.48)

A dialética de ação consiste na busca de propriedades via buscas de padrões algébricos entre os valores calculados de $p_n(x)$. É esperado que os alunos utilizem como apoio propriedades já discutidas para (p_n) .

A dialética de formulação consiste na determinação de identidades envolvendo $[p_n(x)]$. Na seção 3.4. exibimos uma boa coleção de tais identidades, que podem ser sugeridas por identidades análogas nas seções anteriores. Da mesma forma esperamos que os alunos encontrem a fórmula de Binet correspondente

$$p_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})^n - (x - \sqrt{x^2 + 1})^n}{2\sqrt{x^2 + 1}},$$

de modo similar ao que foi feito nas situações didáticas anteriores.

Para dialética de validação, esperamos que nos alunos realizem as justificativas algébricas adequadas, seguindo os passos da seção 3.4 ou de modo similar ao que foi feito nas situações didática correspondente ao questionário 02. Em particular, também são válidas as identidades

$$\begin{aligned}\alpha_x^n &= \alpha_x \cdot p_n(x) + p_{n-1}(x) \\ \beta_x^n &= \beta_x \cdot p_n(x) + p_{n-1}(x),\end{aligned}$$

que resulta na fórmula de Binet para $p_n(x)$.

A institucionalização para esta situação didática ocorre, ao contrário das demais, ao final da própria sessão, por se tratar da última. As fórmulas e relações encontradas pelos alunos podem ser facilmente demonstradas utilizando a fórmula de Binet para $p_n(x)$.

Descreveremos na seção seguinte o percurso executado durante a experimentação, completando a caracterização didática e cognitiva para esta Engenharia Didática.

4.4 Experimentação

A experimentação corresponde ao momento em que o pesquisador coloca em funcionamento todo o planejamento feito durante a análise a priori. (ALMOULOU, 2014).

Como já havíamos descrito, as situações didáticas foram aplicadas no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia - IFCE, *campus* Fortaleza, no período da tarde, durante os horários de aulas de História da Matemática do curso de graduação em licenciatura em matemática, entre 22/04/2019 e 06/05/2019. As aulas de História da Matemática ocorriam sempre segundas e sextas, das 13:30h até 15:00h, porém utilizamos somente as segundas-feiras, resultando nas datas 15/04/2019, 22/04/2019, 29/04/2019 e 06/05/2019. Frequentaram assiduamente

05 alunos, de um total de 08. Portanto levaremos em consideração apenas os dados desses 05 alunos. Nomearemos de Aluno 01, Aluno 02, Aluno 03, Aluno 04 e Aluno 05.

Em retrospecto ao que já foi dito, as situações didáticas foram distribuídas em encontros de 1 hora e 30 minutos cada, durante as aulas de História da Matemática do curso de Licenciatura em Matemática do IFCE, *campus* Fortaleza, de modo que cada situação didática corresponda a um encontro, totalizando 04 situações didáticas, com carga horária total de 6 h/a.

Os alunos utilizaram em cada atividade somente lápis e papel, acompanhados do questionário impresso para aquele determinado encontro. Fizemos o registro de todas as atividades por meio de vídeos, áudios e da coleta das anotações dos participantes da pesquisa.

As situações de ação e formulação foram guiadas apenas pelas questões e problemas propostos, constituindo o *milieu*. Em momentos oportunos, o processo de devolução foi reconduzido para manter a motivação dos alunos sobre o trabalho.

A validação dos resultados obtidos ocorriam a cada dois problemas, ou quando conveniente, ao final da sessão. A institucionalização ocorria no início da sessão seguinte ou quando oportuno para a coerência da continuidade dos trabalhos.

Prosseguiremos agora com a finalização desta Engenharia Didática, levando a cabo a Análise Posteriori e Validação.

5 ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO INTERNA

Nesta última etapa, devemos comparar nossos prognósticos registrados durante a análise a priori com os dados colhidos durante a aplicação das situações didáticas. Almouloud (2014) define esta etapa da Engenharia Didática como

A análise a posteriori de uma sessão é o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos e que contribui para a melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre as condições da transmissão do saber em jogo. Ela não é uma crônica da classe, mas uma análise feita a luz da análise a priori. (ALMOULOU, 2014, p. 177)

Organizar e analisar as produções dos alunos, levando em consideração as atividades propostas e as informações coletadas no decorrer da experimentação. Essa análise deve ser feita considerando as diferentes interações dos alunos (aluno-situação, aluno-aluno, aluno-professor) e com o *milieu* adidático e didático. (ALMOULOU, 2014, p. 177)

Ou seja, o que nos interessa não é um relato pormenorizado dos acontecimentos, mas a análise das variáveis microdidáticas eleitas para observação, realizada com base no que foi descrito durante a etapa de análises *a priori*, levando em consideração a hipótese de pesquisa e os objetivos da Engenharia Didática construída para a pesquisa.

Por fim, em conjunto com a descrição e análise *a posteriori*, realizaremos paralelos com o que foi previsto na análise *a priori*, executando assim em conjunto a validação interna para esta Engenharia Didática.

A seguir, descrevemos o comportamento das variáveis discutidas na análise a priori, em cada situação didática proposta, observando de que modo foram atendidas.

5.1 Análise *a posteriori* da Situação Didática 01

O primeiro encontro ocorreu na data de 19/04/2019. Os participantes Aluno 01, Aluno 02, Aluno 03, Aluno 04 e Aluno 05 estavam presentes na sessão.

Na primeira situação-problema, solicitamos que os alunos computassem as 10 primeiras iterações do algoritmo *Escada de Theon*, dado no questionário. De pronto, os alunos iniciaram a atividade, configurando o início da situação de ação, segundo a definição dentro da Teoria das Situações Didáticas. (BROUSSEAU, 2008)

No entanto, alguns alunos relataram dificuldades com a recursão "trocada" do algoritmo, onde para calcular v_n é necessário informações sobre q_n e vice-versa. Este momento configura o início da situação de formulação, momento de início da interação dos alunos com o objetivo de superar as dificuldades.

Os alunos 01, 03 e 05 cometeram erros aritméticos oriundos de enganos ocasionados pela "recursão trocada". Tais fatos foram relatados e registrados em gravação de áudio e em

forma escrita pelo autor durante a sessão de ensino. Na figura 13 a seguir, foram destacados marcas de correção do material produzido pelos alunos, corroborando os relatos e observações dos alunos.

Figura 13 – Solução dos Alunos 01, 03 e 05 para o problema de computação da *Escada de Theon*. O aluno 01 claramente corrigiu seus cálculos, incorretos por ter trocado os termos da recursão, mesmo procedimento dos alunos 03 e 05, com marcas de borracha em $n = 8$.

(a) Aluno 01

$$V_2 = V_1 + Q_1 = 2 \quad V_3 = V_2 + Q_2$$

$$Q_2 = 1 + 2 = 3 \quad Q_3 = V_2 + V_3$$

n	Q_n	V_n
1	1	1
2	2	2
3	3	5
4	7	12
5	17	29
6	41	70
7	99	169
8	239	408
9	577	985
10	1393	2378

(b) Aluno 03

01) $V_n = V_{n-1} + Q_{n-1}$
 $Q_n = V_{n-1} + V_n$

$V_1 = Q_1 = 1$

$V_2 = V_1 + Q_1 = 2$
 $Q_2 = 1 + 2 = 3$
 $V_3 = V_2 + Q_2 = 5$
 $Q_3 = V_2 + V_3 = 7$
 $V_4 = V_3 + Q_3 = 12$
 $Q_4 = V_3 + V_4 = 17$
 $V_5 = V_4 + Q_4 = 29$
 $Q_5 = V_4 + V_5 = 41$

n	Q_n	V_n
1	1	1
2	3	2
3	7	5
4	17	12
5	41	29
6	99	70
7	239	169
8	577	408
9	1393	985
10	3363	2378

(c) Aluno 05

$$\begin{cases} V_n = V_{n-1} + Q_{n-1} \\ Q_n = V_{n-1} + V_n \end{cases}$$

com $V_1 = Q_1 = 1$

$V_2 = V_1 + Q_1 = 2$
 $Q_2 = 1 + 2 = 3$
 $V_3 = V_2 + Q_2 = 5$
 $Q_3 = V_2 + V_3 = 7$
 $V_4 = V_3 + Q_3 = 12$
 $Q_4 = V_3 + V_4 = 17$
 $V_5 = V_4 + Q_4 = 29$
 $Q_5 = V_4 + V_5 = 41$

n	Q_n	V_n
1	1	1
2	3	2
3	7	5
4	17	12
5	41	29
6	99	70
7	239	169
8	577	408
9	1393	985
10	3363	2378

A segunda parte da primeira situação-problema solicitava o cálculo dos 10 primeiros termos de $t_n = q_n/v_n$. O objetivo do pedido é perceber se algum dos alunos notaria que $t_n \rightarrow \sqrt{2}$. Isso não aconteceu de modo espontâneo, mesmo que no enunciado do questionário tenha afirmado que a *Escada de Theon* possui o objetivo de encontrar tais aproximações. De imediato ocorre apenas a percepção de convergência, mas não a mudança de representação decimal para $\sqrt{2}$. Nenhum aluno, com exceção do aluno 05, registrou de antemão esse fato, registrando em papel.

O pesquisador indagou sobre esse fato e somente neste momento os alunos perceberam o fato. O momento de provocação do professor e reposicionamento dos alunos está registrado no seguinte trecho, gravado em áudio:

Professor: Bom aluno 01, esse comportamento te lembra algo?
 Aluno 01: Limites.
 Professor: Limites?
 Aluno 01: É. Parece estar tendendo para algum lugar.
 Professor: Para quanto?
 Aluno 01: Não sei.
 Professor: Pense bem? O que estamos fazendo aqui?

Com essa provocação, os alunos foram orientados a observar a estabilidade das casas decimais calculadas, observando se o erro diminui a medida que n cresce e a calcular o valor da $\sqrt{2}$ em calculadora para realizar comparação. Desse modo, ocorre a percepção da convergência. Os registros escritos para tal atividade estão representados nas figuras 14, 15 e 16, no momento imediatamente anterior a percepção. Novamente, somente o aluno 05 percebeu espontaneamente esse fato. Já na figura 17 vemos a dialética de validação do problema, sem justificativas topológicas para a convergência, mas com a discussão aberta do resultado.

Figura 14 – Solução dos alunos 01 e 02 para os 10 primeiros termos de t_n .

(a) Aluno 01

n	$t_n = q_n/v_n$
1	$1/1 = 1$
2	$3/2 = 1,5$
3	$7/5 = 1,4$
4	$17/12 = 1,41\bar{6}$
5	$41/29 = 1,4137931034$
6	$99/70 = 1,4142857143$
7	$239/169 = 1,4142011834$
8	$577/408 = 1,4142156863$
9	$1393/985 = 1,414213198$
10	$3563/2539 = 1,4142136249$

(b) Aluno 02

n	$t_n = q_n/v_n$
1	$1/1 = 1$
2	$3/2 = 1,5$
3	$7/5 = 1,4$
4	$17/12 = 1,41\bar{6}$
5	$41/29 = 1,4137931034$
6	$99/70 = 1,4142857143$
7	$239/169 = 1,4142011834$
8	$577/408 = 1,4142156863$
9	$1393/985 = 1,414213198$
10	$3563/2539 = 1,4142136249$

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 15 – Solução dos alunos 03 e 04 para os 10 primeiros termos de t_n .

(a) Aluno 04

n	t_n
1	1
2	$\frac{3}{2} = 1,5$
3	$\frac{7}{5} = 1,4$
4	$\frac{17}{12} = 1,4166...$
5	$\frac{41}{29} = 1,4137931034$
6	$\frac{99}{70} = 1,4142857143$
7	$\frac{239}{169} = 1,4142$
8	$\frac{577}{408}$
9	$\frac{1393}{985}$
10	$\frac{3363}{2378}$

(b) Aluno 03

n	t_n
1	1
2	$\frac{3}{2} = 1,5$
3	$\frac{7}{5} = 1,4$
4	$\frac{17}{12} = 1,4166...$
5	$\frac{41}{29} = 1,4137931034$
6	$\frac{99}{70} = 1,4142857143$

7	$\frac{239}{169} = 1,4142011834$
8	$\frac{577}{408} = 1,4142135623$
9	$\frac{1393}{985} = 1,4142135623$
10	$\frac{3363}{2378} = 1,4142135623$

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 16 – Solução do Aluno 05 para os 10 primeiros termos de t_n .

$t_1 = 1$	$t_2 = 1,5$	$t_3 = \frac{7}{5}$	$t_4 = \frac{17}{12}$	$t_5 = \frac{41}{29}$	$t_6 = \frac{99}{70}$	$\sqrt{2} \approx 1,4142$
$t_7 = \frac{239}{169}$	$t_8 = \frac{577}{408}$	$t_9 = \frac{1393}{985}$	$t_{10} = \frac{3363}{2378}$			
				$t_n = \frac{q_n}{v_n}$		

$1,414201183431$	$1,41421356274$	$1,4142135623$	$1,4142135624894$
------------------	-----------------	----------------	-------------------

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 17 – Validação do aluno 03 para convergência à $\sqrt{2}$.

n	t_n
1	$\frac{q_1}{v_1} = 1$
2	$\frac{q_2}{v_2} = \frac{3}{2} = 1,5$
3	$\frac{q_3}{v_3} = \frac{7}{5} = 1,4$
4	$\frac{q_4}{v_4} = \frac{17}{12} = 1,4166...$
5	$\frac{q_5}{v_5} = \frac{41}{29}$
6	$\frac{q_6}{v_6} = \frac{99}{70}$
7	$\frac{q_7}{v_7} = \frac{239}{169}$
8	$\frac{q_8}{v_8} = \frac{577}{408}$
9	$\frac{q_9}{v_9} = \frac{1393}{985}$
10	$\frac{q_{10}}{v_{10}} = \frac{3363}{2378}$

$\sqrt{2} \approx 1,41421356$

Fonte: Dados da pesquisa.

No segundo problema, solicitamos que os alunos observassem os valores de q_n e v_n em busca de algum padrão numérico. Nenhum dos alunos teve dificuldade de identificar numericamente as relações $q_{n+1} = 2q_n + q_{n-1}$ e $v_{n+1} = 2v_n + v_{n-1}$, ou formular algebricamente tais afirmações, indício de que as dialéticas de ação e formulação ocorrem a contento. Entretanto, houve dificuldades em justificar algebricamente esses fatos.

No entanto, após nova provocação do professor os alunos em colaboração mútua lograram sucesso na manipulação algébrica do algoritmo para aproximações à $\sqrt{2}$, demonstrando as respectivas fórmulas. O aluno 02 desenvolve papel importante nesta situação-problema, incentivando os outros alunos a seguir no processo de investigação. A seguir, um trecho da conversa com o aluno 02 durante o processo de descoberta.

Aluno 02: Testei para números pequenos, vou testar para valores maiores...
Professor: Você encontrou numericamente, mas tem outra justificativa? Tem como demonstrar? Tenta encontrar uma demonstração com o que você já sabe.

...

Aluno 02 tentando achar uma demonstração: na verdade acho que não tô chegando a lugar nenhum. Só pequei a equação de v_n e substitui em q_n e deu $q_n = 2v_{n-1} + q_{n-1}$.

Professor: Ok, mas antes de vc descartar essa caminho, quais as outras opções de substituição?

...

Aluno 02: Professor, acho que consegui! Meus Deus, como não tinha visto isso? Tem uma substituição aqui que dá certo!

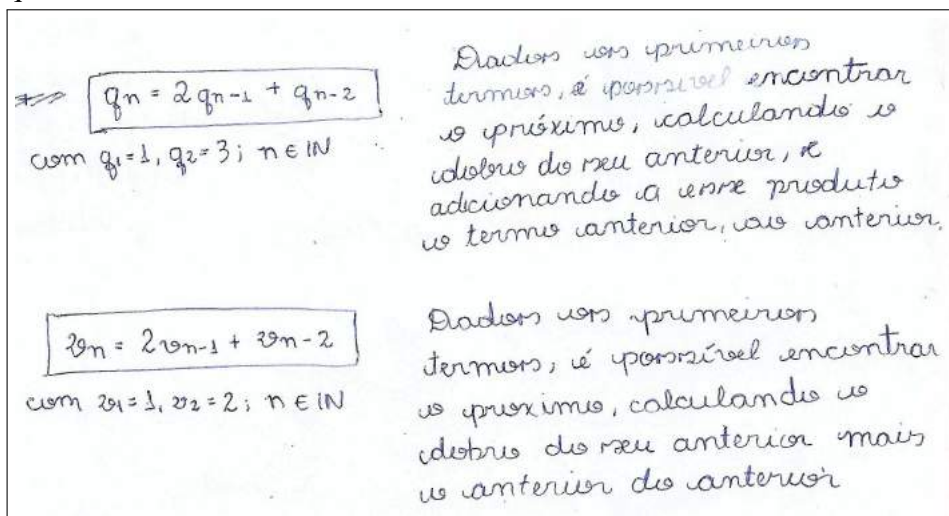
O aluno 02 passou pelo que podemos nomear de "processo de epifania", onde após algum tempo de reflexão, estimulado pelas intervenções do pesquisador, percebe como demonstrar as identidades $q_{n+1} = 2q_n + q_{n-1}$ e $v_{n+1} = 2v_n + v_{n-1}$ a partir do algoritmo dado, chamando o professor com surpresa por ter encontrado as substituições adequadas para demonstrar as identidades.

A figura 18 registra a manipulação numérica do aluno 05 e o registro das fórmulas, caracterizando as dialéticas de ação e formulação, similar em todos os alunos. Já na figura 19 podemos ver a validação de tal fato, executada pelo aluno 02, onde se discute abertamente a demonstração. A demonstração encontrada pelo aluno é similar a exibida em (3.59) e (3.60), na seção 3.5.1..

Sentimos a necessidade após essa validação realizar a institucionalização dos conhecimentos já discutidos, de modo a organizar melhor os assuntos discutidos a seguir. Apresentamos: A convergência de t_n , apenas inicialmente por vias numéricas; a justificativa algébrica para $q_{n+1} = 2q_n + q_{n-1}$ e $v_{n+1} = 2v_n + v_{n-1}$; a definição formal para as *sequência de Pell* e *sequência de Pell-Lucas*.

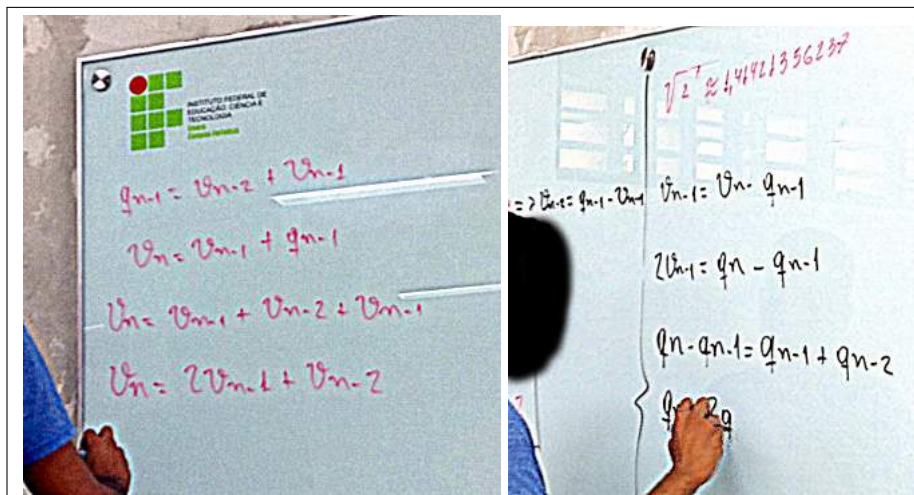
Não mencionamos neste ponto nada sobre a *equação característica* para essas recorrências, pois a informação sobre suas raízes poderia adiantar informações indesejáveis para a exploração da situação didática. Essa discussão é desenvolvida na próxima institucionalização, no início do segundo encontro, imediatamente antes da situação didática 02.

Figura 18 – Solução do aluno 05 para a situação-problema 02 do primeiro questionário.



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 19 – Momento da validação do aluno 02 para as fórmulas $q_{n+1} = 2q_n + q_{n-1}$ e $v_{n+1} = 2v_n + v_{n-1}$.



Fonte: Dados da pesquisa.

Iniciamos após essa institucionalização local o terceiro problema, que solicita o tratamento dos termos de índice negativo para ambas as sequências e provoca para existência de algum padrão preditivo.

Neste caso, os alunos ofereceram somente o tratamento numérico, sem registros de manifestação algébrica. Não houve tentativa de manipulação algébrica para justificar a existência de termos de índice negativos ou sobre as relações entre os termos de índices positivos e negativos.

Apesar da falta de justificativa algébrica, os alunos encontraram as propriedades esperadas, expressando inclusive as fórmulas $p_{-n} = (-1)^{n+1}p_n$ e $q_{-n} = (-1)^nq_n$, como podemos constatar na figura 20. O pesquisador propôs que os alunos tentassem utilizar indução, pois já havíamos conversado sobre assunto e esclarecido a posição privilegiada de tal técnica matemá-

tica como ferramenta de demonstração para números naturais e inteiros. No entanto, nenhum aluno logrou tentativas bem sucedidas, nem mesmo com estrutura matemática que lembrasse o processo de indução. Supomos que a mistura dos índices n e $-n$ possa ter constituído um obstáculo para tal.

Figura 20 – Solução do aluno 04 para a situação-problema 03, questionário 01.

$$\begin{aligned}
 P_n &= 2P_{n-1} + P_{n-2} \\
 P_2 &= 2 \cdot P_1 + P_0 \\
 2 &= 2 \cdot 1 + P_0 \\
 P_0 &= 0 \\
 P_1 &= 2 \cdot P_0 + P_{-1} \\
 1 &= 2 \cdot 0 + P_{-1} \\
 P_{-1} &= 1 \\
 P_0 &= 2 \cdot P_{-1} + P_{-2} \\
 0 &= 2 \cdot 1 + P_{-2} \\
 P_{-2} &= -2 \\
 P_1 &= 2 \cdot P_{-2} + P_{-3} \\
 1 &= -2 + P_{-3} \\
 P_{-3} &= 3
 \end{aligned}$$

$$P_n = (-1)^{n+1} \cdot P_n$$

$$\begin{aligned}
 q_2 &= 2 \cdot q_1 + q_0 \\
 3 &= 2 \cdot 1 + q_0 \\
 q_0 &= 1 \\
 q_1 &= 2 \cdot q_0 + q_{-1} \\
 1 &= 2 \cdot 1 + q_{-1} \\
 q_{-1} &= -1 \\
 q_0 &= 2 \cdot q_{-1} + q_{-2} \\
 1 &= 2 \cdot (-1) + q_{-2} \\
 q_{-2} &= 3 \\
 q_n &= (-1)^n \cdot q_n
 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Finalmente a situação-problema 04 do questionário 1 solicita a realização de outra atividade envolvendo convergência, dessa vez examinar as razões $\alpha_n = p_{n+1}/p_n$ e $\gamma_n = q_{n+1}/q_n$, $n > 0$. Não ocorreram dificuldades computacionais, de modo que a dialética de ação acontece com fluidez, mas apesar dos alunos já terem concluído em atividade anterior que $t_n \rightarrow \sqrt{2}$, não conseguiram concluir espontaneamente somente da observação do comportamento numérico que $\alpha_n, \gamma_n \rightarrow 1 + \sqrt{2}$, sendo necessária a provocação do professor. Na figura 21 podemos ver o processo de computação do aluno 04, no entanto mesmo com livre comunicação entre os alunos, nenhum percebeu que ambas as sequências pareciam convergir para $1 + \sqrt{2}$.

Figura 21 – Computação do aluno 04 para α_n e γ_n .

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \frac{3}{1} = 3 & \alpha_1 &= \frac{2}{1} = 2 \\
 \alpha_2 &= \frac{5}{3} = 1,666... & \alpha_2 &= \frac{5}{2} = 2,5 \\
 \alpha_3 &= \frac{17}{7} = 2,428571 & \alpha_3 &= \frac{12}{5} = 2,4 \\
 \alpha_4 &= \frac{41}{17} = 2,4117647 & \alpha_4 &= \frac{29}{12} = 2,41666... \\
 \alpha_5 &= \frac{99}{41} = 2,414634 & \alpha_5 &= \frac{70}{29} = 2,413793103 \\
 \alpha_6 &= \frac{239}{99} = 2,414141 & \alpha_6 &= \frac{169}{70} = 2,414285714 \\
 \alpha_7 &= \frac{577}{239} = 2,414225941 & &
 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Interessante notar que, apesar de nem todos os alunos terem explorado as aproximações de α_n e λ_n , alguns exibiram a relação $\alpha_{-n} = -\alpha_n + 2$, novamente sem justificativas algébricas, o que evidencia que a intuição e o senso investigativo dos alunos está em atividade, apesar das dificuldades de justificativa matemática. Podemos ver esse fato na figura 22.

Figura 22 – Solução dos Alunos 01 e 02 para o problema 04 do primeiro questionário

(a) Aluno 01

Handwritten solution for Aluno 01:

$$\alpha_{-1} = 0 \quad \alpha_{-3} = -0,4 \quad \alpha_{-5} = -0,4137$$

$$\alpha_{-2} = -0,5 \quad \alpha_{-4} = -0,416 \quad \alpha_{-6} = -0,4142$$

$$\boxed{\alpha_{-n} = -(\alpha_n) + 2}$$

(b) Aluno 03

Handwritten solution for Aluno 03:

$$\alpha_{-1} = \frac{p_0}{p_{-1}} = 0$$

$$\alpha_{-2} = \frac{p_{-1}}{p_{-2}} = \frac{1}{-2} = -0,5$$

$$\alpha_{-3} = \frac{p_{-2}}{p_{-3}} = \frac{-2}{5} = -0,4$$

$$\alpha_{-4} = \frac{p_{-3}}{p_{-4}} = \frac{0,5}{12} = -0,41\bar{6}$$

$$\boxed{\alpha_{-n} = -\alpha_n + 2}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Após provocação do professor, feita pela pergunta: "mas quanto dá isso exatamente, quanto n cresce? Dá para escrever sem fazer aproximações?", os alunos concluíram que $1 + \sqrt{2}$ é o valor de convergência para α_n , inclusive relacionando a convergência de t_n e α_n . Assistimos a validação de tais fatos na figura 23.

Figura 23 – Validação para a situação-problema 04 do questionário 01. Não foram oferecidas justificativas algébricas.

Handwritten notes on a whiteboard:

2) Via $t_n = \frac{q_n}{v_n}$, sabendo que

Sabendo $q_n = v_{n-1} + v_n$ e

$v_n = v_{n-1}$

Logo, $\frac{v_n}{v_{n-1}} = 1 + \sqrt{2}$

então, $t_n \rightarrow \sqrt{2}$

e vice-versa

Fonte: Dados da pesquisa.

Seguimos agora com a análise da situação didática 02.

5.2 Análise *a posteriori* da Situação Didática 02

O segundo encontro ocorreu na data de 22/04/2019. Os indivíduos Aluno 01, Aluno 02, Aluno 03 e Aluno 05 estavam presentes na sessão. O aluno 04 não pode estar presente durante a aula. Para esta situação didática, foi incentivada a livre exploração em busca de propriedades para os termos da *sequência de Pell*, de modo que ao final esperamos possuir uma coleção de identidades envolvendo a *sequência de Pell*, bem como obter a fórmula de Binet.

Antes de iniciar a situação didática, efetuamos a institucionalização dos assuntos tratados na situação didática anterior. Examinaremos a seguir esta situação didática do ponto de vista dos resultados encontrados pelos alunos. As identidades propostas pelos alunos foram

$$S_n = S_{n-1} + p_n \quad \text{Aluno 01} \quad (5.1)$$

$$p_{m+n} = (p_{m-1} + p_{m+1})p_n + (-1)^{m+1}p_{n-m} \quad \text{Aluno 01} \quad (5.2)$$

$$p_m p_n = p_{m+1} p_{n-1} + (-1)^{m+1} p_{n-m-1} \quad \text{Aluno 02} \quad (5.3)$$

$$p_m = p_{\frac{m}{2}-1} p_{\frac{m}{2}} + p_{\frac{m}{2}+1} p_{\frac{m}{2}}, \quad m \text{ par} \quad \text{Aluno 02} \quad (5.4)$$

$$p_m = p_{\frac{m-1}{2}}^2 + p_{\frac{m+1}{2}}^2, \quad m \text{ ímpar} \quad \text{Aluno 02} \quad (5.5)$$

$$p_{n+1}^2 + p_n^2 = p_{2n+1} \quad \text{Aluno 03, Aluno 05} \quad (5.6)$$

$$p_{2n} = p_n(p_{n+1} + p_{n-1}) \quad \text{Aluno 05} \quad (5.7)$$

A seguir, vamos discutir os procedimentos dos alunos até a proposição de tais identidades, localizando tais ações dentro das dialéticas propostas pela Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 2008). Durante esta situação didática, os alunos 02, 03 e 05 compartilharam informações com uma intensidade superior a situação didática anterior, de modo espontâneo, auxiliando os alunos na busca e inferência de seus resultados.

O Aluno 01 exibiu a identidade (5.1) como uma tentativa inacabada para encontrar uma fórmula da soma dos n primeiros termos para *sequência de Pell*. Apesar do desenvolvimento de tal identidade ter se mantido em nível elementar, não levando a dialética de ação além do que é exibido em (5.1), registramos a tentativa do aluno como uma prova de manifestação de espírito investigativo provocado pelo *milieu*, construído com intenção de provocar o pensamento intuitivo e a descoberta de resultados e teoremas.

Os esforços registrados para encontrar a identidade (5.2) mostra também que a principal preocupação do aluno 01 durante a situação didática foi achar uma fórmula para p_{m+n} . Tal identidade pode ser encontrada no teorema 3.2.1. Combinando os resultados deste teorema, vamos testar a validade do resultado encontrado por este aluno

$$\begin{aligned} p_{m+n} &= (p_{m-1} + p_{m+1})p_n + (-1)^{m+1}p_{n-m} \implies \\ p_m p_{n+1} + p_n p_{m-1} &= p_n p_{m-1} + p_n p_{m+1} + (-1)^{2m+1}(p_n p_{m-1} - p_m p_{n-1}) \implies \\ p_m p_{n+1} + p_n p_{m-1} &= p_n p_{m+1} + p_m p_{n-1} \implies \\ p_{m+n} &= p_{n+m} \end{aligned}$$

o que confirma a identidade descoberta pelo aluno 01. Na figura 24 percebemos que o aluno faz diversas tentativas de formulação numérica antes de chegar ao resultado, mobilizando capacidades cognitivas em torno de uma postura investigativa, utilizando pensamento inferencial e intuição matemática.

Figura 24 – Dialética de Ação da identidade encontrada pelo Aluno 01.

The image displays handwritten mathematical work by Aluno 01, showing the derivation of a recursive identity for P_m . The work is organized into two main sections.

Top Section:

- For $m=2$, $P_2 = 2$, $P_4 = 12$. The calculation shows $P_{m+1} = (P_m + P_{m-1}) \cdot P_m \cdot (-1)^{m+1} \cdot P_{m-m}$, resulting in $6 \cdot 12 + 2 = 70$.
- For $m=3$, $P_3 = 5$, $P_5 = 29$. The calculation shows $P_{m+1} = (P_m + P_{m-1}) \cdot P_m \cdot (-1)^{m+1} \cdot P_{m-m}$, resulting in $14 \cdot 29 + 2 = 408$.
- For $m=4$, $P_4 = 10$. The calculation shows $P_{m+1} = (P_m + P_{m-1}) \cdot P_m \cdot (-1)^{m+1} \cdot P_{m-m}$, resulting in $13 \cdot 29 - 5 = 376$.
- For $m=5$, $P_5 = 169$. The calculation shows $P_{m+1} = (P_m + P_{m-1}) \cdot P_m \cdot (-1)^{m+1} \cdot P_{m-m}$, resulting in 2376 .

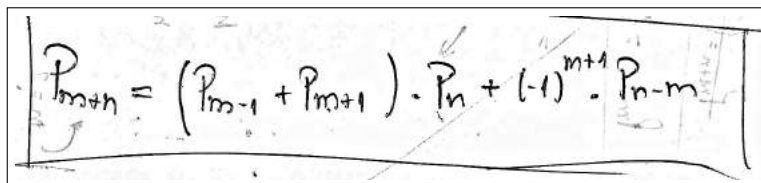
Bottom Section:

- The student derives a general formula: $P_{m+1} = (P_m + P_{m-1}) \cdot P_m \cdot (-1)^{m+1} \cdot P_{m-m}$.
- Further simplifications are shown, leading to the final boxed identity: $P_{m+1} = (P_m + P_{m-1}) \cdot P_m \cdot (-1)^{m+1} \cdot P_{m-m}$.

Fonte: Dados da pesquisa.

Já na figura 25 vemos em destaque o registro final da identidade descoberta pelo aluno, destacando que após sua escrita não ocorreram mais tentativas, além do fato que a identidade está em posição de destaque, configurando a dialética de formulação.

Figura 25 – Formulação da identidade encontrada pelo Aluno 01.

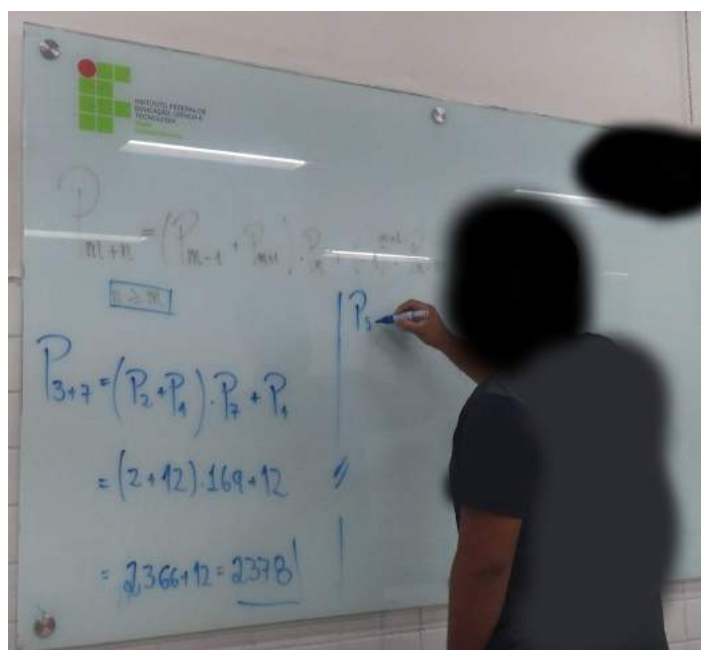


$$P_{m+n} = (P_{m-1} + P_{m+1}) \cdot P_n + (-1)^{m+1} \cdot P_{n-m}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

A validação do aluno 01 para a identidade encontrada consistiu em simples exposição numérica do resultado para seus colegas, não procedendo nenhum tipo de demonstração. (Figura 26)

Figura 26 – Validação da identidade encontrada pelo aluno 01.



Fonte: Dados da pesquisa.

O aluno 02 propôs as identidades (5.3), (5.4) e (5.5), respectivamente

$$p_m p_n = p_{m+1} p_{n-1} + (-1)^{m+1} p_{n-m-1}$$

$$p_m = p_{\frac{m}{2}-1} p_{\frac{m}{2}} + p_{\frac{m}{2}+1} p_{\frac{m}{2}}, \quad m \text{ par}$$

$$p_m = p_{\frac{m-1}{2}}^2 + p_{\frac{m+1}{2}}^2, \quad m \text{ ímpar}$$

Sobre a identidade (5.3), a mesma pode ser facilmente justificada fazendo $p_{n-m-1} = p_{n-(m+1)}$ e aplicando o teorema 3.2.1. A seguir, na figura 27 vemos o momento que o aluno 02 faz a exploração numérica para a identidade (5.3), que corresponde a dialética de ação do aluno 02 para a respectiva identidade e a figura 28 contém indícios da formulação e validação executadas pelo aluno 02, para encontrar e discutir a identidade (5.3).

Figura 27 – Dialética de ação da identidade (5.3) encontrada pelo Aluno 02.

$$\begin{array}{l}
 P_3 \cdot P_5 = 5 \cdot 29 = 145 = P_4^2 + 1 \\
 P_4 \cdot P_6 = 12 \cdot 70 = 840 = P_5^2 + 1 \\
 P_5 \cdot P_7 = 29 \cdot 169 = 4901 = P_6^2 + 1 \\
 \hline
 P_3 \cdot P_7 = 5 \cdot 169 = 845 = P_4 \cdot P_6 + 5
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 P_3 \cdot P_6 = 5 \cdot 70 = 350 = P_4 \cdot P_5 + 2 \\
 P_4 \cdot P_7 = 12 \cdot 169 = 2028 = P_5 \cdot P_6 - 2 \\
 P_5 \cdot P_8 = 29 \cdot 408 = 11832 = P_6 \cdot P_7 + 2
 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 28 – Dialéticas de formulação e validação da identidade (5.3) encontrada pelo Aluno 02.

$$\begin{array}{l}
 \text{Seja } A \leq B \\
 P_A \cdot P_B = P_{A+1} \cdot P_{B-1} + (-1)^{A+1} \cdot P_{B-A-1} \\
 \text{Suponhamos que vale até os índices } A \text{ e } B \\
 \cancel{P_A \cdot P_B} + \cancel{P_B \cdot P_A} \\
 P_A \cdot P_B \cdot 2 = 2 \left[P_{A+1} \cdot P_{B-1} + (-1)^{A+1} \cdot P_{B-A-1} \right] \\
 2P_A \cdot P_B + P_B \cdot P_{A-1} = P_B \cdot P_{A+1} = 2P_{A+1} \cdot P_{B-1} + (-1)^{A+1} \cdot 2 \cdot P_{B-A-1} + P_B \cdot P_{A-1} \\
 P_B \cdot P_{A+1} = \underline{2P_{A+1} \cdot P_{B-1}} + (-1)^{A+1} \cdot 2 \cdot P_{B-A-1} + \underline{P_A \cdot P_{B-1}} + (-1)^A \cdot P_{B-A} \\
 = P_{A+2} \cdot P_{B-1} + (-1)^A \cdot P_{B-A} - (-1)^A \cdot 2P_{B-A-1} \\
 = P_{A+2} \cdot P_{B-1} + (-1)^A \cdot [P_{B-A} - 2P_{B-A-1}] \\
 = P_{A+2} \cdot P_{B-1} + (-1)^{A+2} \cdot P_{B-A-2} \\
 \\
 P_A \cdot P_B \cdot 2 = 2 \left[P_{A+1} \cdot P_{B-1} + (-1)^{A+1} \cdot P_{B-A-1} \right] \\
 2P_B \cdot P_A + P_{B-1} \cdot P_A = 2P_{A+1} \cdot P_{B-1} + 2(-1)^{A+1} \cdot P_{B-A-1} + P_{B-1} \cdot P_A \\
 P_A \cdot P_{B+1} = \underline{2P_{A+1} \cdot P_{B-1}} + (-1)^{A+1} \cdot 2 \cdot P_{B-A-1} + \underline{P_{A+1} \cdot P_{B-2}} + (-1)^{A+1} \cdot P_{B-1-A-1} \\
 = P_{A+1} \cdot P_B + (-1)^{A+1} \cdot [2 \cdot P_{B-A-1} + P_{B-A-2}] \\
 = P_{A+1} \cdot P_B + (-1)^{A+1} \cdot P_{B-A}
 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Podemos notar pela figura 28 que o aluno não chega a realizar corretamente a demonstração, mas tinha a intenção de levar a cabo uma indução matemática sobre os índices A e B . No entanto, acabou em um argumento circular.

Vamos discutir agora as identidades (5.4) e (5.5). Observe que a identidade (5.4) é a mesma identidade presente no (5.7), a menos de uma mudança de variável, o mesmo pode ser

dito para as identidades (5.5) e (5.6). De fato considere

$$p_m = p_{\frac{m}{2}-1}p_{\frac{m}{2}} + p_{\frac{m}{2}+1}p_{\frac{m}{2}}, m \text{ par.}$$

Tomando $m = 2n$, obtemos $p_{2n} = p_m = p_{n-1}p_n + p_{n+1}p_n = p_n(p_{n+1} + p_{n-1})$. Do mesmo modo considere

$$p_m = p_{\frac{m-1}{2}}^2 + p_{\frac{m+1}{2}}^2, m \text{ ímpar.}$$

Tomando $m = 2n + 1$, obtemos $p_{2n+1} = p_n^2 + p_{n+1}^2$.

O aluno 02 não tentou realizar demonstrações formais para as identidades (5.4) e (5.5). No entanto, o registro de cálculo que o mesmo fez para testar suas fórmulas revela que para a identidade (5.4) o aluno dispôs os termos de modo a utilizar implicitamente (5.1). No entanto, seu processo inferencial o guiou para a identidade (5.4). Isso pode ser observado na figura 29. O que é bastante natural, pois (5.4) e (5.5) podem ser demonstrados com (5.1). (ver teorema 3.2.1, corolário 3.2.1 e teorema 3.2.3) Já na figura 30 podemos ver o processo para encontra a identidade (5.5), onde o aluno simplesmente explorou quadrados para alguns valores de (p_n) . Esta exploração configura a dialética de ação, de modo que o aluno levado pelo espírito investigativo e pensamento intuitivo explora tais quadrados, concluindo com a proposta da identidade (5.5). Em nenhum dos casos, o aluno 02 propôs uma demonstração lógico-formal para a identidade.

Figura 29 – Dialéticas de ação e formulação do aluno 02 para a identidade (5.4).

Handwritten mathematical work by student 02 showing calculations for the identity (5.4). The work includes calculations for p_5, p_6, p_{10} , and p_{12} , and a final formula for p_m .

$$p_5 \cdot p_6 = 29 \cdot 70 = 2030$$

$$p_{10} = 2378$$

$$p_{10} - (p_5 \cdot p_6) = 2378 - 2030 = 348 = p_4 \cdot p_8$$

$$p_{10} = p_4 p_5 + p_5 p_6$$

~~Alunos super que vale: $p_{2n} = p_{n-1} p_n + p_{n+1} p_n$~~

$$p_6 \cdot p_7 = 11830$$

$$p_{12} = 13860$$

$$p_{12} - (p_6 \cdot p_7) = 13860 - 11830 = 2030 = p_5 \cdot p_6$$

$$p_{12} = p_5 p_6 + p_6 p_7$$

Superhomos que: $p_m = p_{\frac{m}{2}-1} \cdot p_{\frac{m}{2}} + p_{\frac{m}{2}} \cdot p_{\frac{m}{2}+1}, m \text{ par.}$

Fonte: Dados da pesquisa.

O aluno 03 propõe em conjunto com o aluno 05 a seguinte identidade

$$p_{n+1}^2 + p_n^2 = p_{2n+1}$$

que corresponde a equação (5.6).

Figura 30 – Dialéticas de ação e formulação do aluno 02 para a identidade (5.5).

$$\begin{aligned}
 P_5 \cdot P_5 &= 29^2 = 841 \\
 P_9 &= 985 \\
 P_9 - (P_5^2) &= 985 - 841 = 144 = P_4^2 \\
 P_9 &= P_4^2 + P_5^2 \\
 \text{Suponhamos que } P_n &= P_{\frac{n-1}{2}}^2 + P_{\frac{n+1}{2}}^2, \text{ n ímpar}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_6^2 &= 4900 = 70^2 \\
 P_{11}^2 &= 5741 \\
 P_{11} - P_6^2 &= 841 = P_5^2 \\
 P_{11} &= P_5^2 + P_6^2
 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

O aluno 03 exibe como validação parte de uma demonstração, que o mesmo não consegue completar, apesar de ter seguido em uma direção promissora. Na figura 31a, exibimos o processo inicial de investigação do aluno, caracterizando a situação de ação e completando a dialética de formulação com a proposição da identidade como é exibido na figura 31b.

O aluno oferece ao final uma validação, que não aceitou compartilhar com os colegas, apesar dos incentivos do professor e dos colegas. O registro dessa validação está na figura 32 e consiste em uma demonstração incompleta. O registro escrito sugere que o aluno se "perdeu" na manipulação algébrica da validação referida.

Figura 31 – Processo de investigação do aluno 03 para a identidade (5.6).

(a) Dialética de Ação para (5.6).

$$\begin{aligned}
 P_0^2 &= 0^2 = 0 \\
 P_1^2 &= 1^2 = 1 \\
 P_2^2 &= 2^2 = 4 \\
 P_3^2 &= 5^2 = 25 \\
 P_4^2 &= 12^2 = 144 \\
 P_5^2 &= 29^2 = 841 \\
 P_6^2 &= 70^2 = 4900 \\
 P_1^2 + P_3^2 &= 1 + 4 = 5 = P_2 = P_1 + 1 \\
 P_2^2 + P_3^2 &= 4 + 25 = 29 = P_5 = P_2 + 3 \\
 P_3^2 + P_4^2 &= 25 + 144 = 169 = P_7 = P_3 + 4 \\
 P_4^2 + P_5^2 &= 144 + 841 = 985 = P_9 = P_4 + 5 \\
 P_5^2 + P_6^2 &= 841 + 4900 = 5741 = P_{11} = P_5 + 6
 \end{aligned}$$

(b) Dialética de Formulação para (5.6).

$$\begin{aligned}
 P_{n+(n+1)} &= P_n^2 + P_{n+1}^2 \\
 P_{2n+1} &= P_n^2 + P_{n+1}^2 \quad \text{Paso}
 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 32 – Validação do aluno 03, com uma demonstração incompleta.

Temos que $p_{m+1} = p_m^2 + p_{m+1}^2$ vale para $1 < m < k$.
 Supondo que vale para $n=k$,
 $p_{k+1} = p_k^2 + p_{k+1}^2$.
 Devemos mostrar que vale para $n=k+1$.
 $p_{(k+1)+1} = p_{k+1}^2 + p_{k+1}^2$
 $p_{(k+1)+2} = 2p_{(k+1)+1} + p_{k+1}$
 $= 2p_{k+1} + p_{k+1}$
 $\frac{2p_{k+1} + p_{k+1}}{2} + p_{k+1}$
 $(2p_{k+1} + p_k)^2 + p_{k+1}^2 = p_{k+2}^2 + p_{k+1}^2$

Fonte: Dados da pesquisa.

A demonstração esperada para o aluno, considerando o caminho escolhido pelo mesmo e o corolário 3.2.1 seria

Para $n = 0$, vale

$$p_1^2 + p_0^2 = 1 = p_{2 \cdot 0 + 1}$$

Supondo que para um dado k vale

$$p_{k+1}^2 + p_k^2 = 1 = p_{2k+1}$$

segue que para $k + 1$ temos

$$\begin{aligned} p_{2(k+1)+1} &= p_{(2k+1)+2} = 2p_{2k+2} + p_{2k+1} = 2p_{2(k+1)} + p_{2k+1} \\ &= 2p_{k+1}(p_{k+2} + p_k) + p_{k+1}^2 + p_k^2 = 4p_{k+1}^2 + 4p_k p_{k+1} + p_{k+1}^2 + p_k^2 \\ &= (2p_{k+1} + p_k)^2 + p_{k+1}^2 = p_{k+2}^2 + p_{k+1}^2. \end{aligned}$$

Em nenhum momento, o aluno 03 fez menção a validade da identidade 5.6 para p_{-n} , no entanto isso poderia ser facilmente obtido através da identidade $p_{-n} = (-1)^{n+1} p_n$.

O aluno 05 não fez tentativas para demonstração lógica-formal para a identidade (5.6), não completando a validação. No entanto, registramos suas dialéticas de ação e formulação nas figura 33 e 34.

Através da observação meticulosa, os processos intuitivos do aluno 05 o levam a inferir a identidade (5.6).

Finalmente, o aluno 05 propoe também a identidade (5.7)

$$p_{2n} = p_n(p_{n+1} + p_{n-1})$$

Figura 33 – Início da dialética de ação do aluno 05. Note a lista de quadrados e cubos, indicando tratamento metucioso na investigação.

$\odot$ Quadrados e cubos de Pell.
 $P_n^2 \Rightarrow$
 $n=1 \Rightarrow P_1=1 \therefore P_1^2=1$
 $n=2 \Rightarrow P_2=2 \therefore P_2^2=4$
 $n=3 \Rightarrow P_3=5 \therefore P_3^2=25$
 $n=4 \Rightarrow P_4=12 \therefore P_4^2=144$
 $n=5 \Rightarrow P_5=29 \therefore P_5^2=841$
 $n=6 \Rightarrow P_6=70 \therefore P_6^2=4900$
 $\vdots$
 $n=10 \Rightarrow P_{10}=2378 \therefore P_{10}^2=5.654.884$
 $P_n^3 \Rightarrow$
 $n=1 \Rightarrow P_1^3=1$
 $n=2 \Rightarrow P_2^3=8$
 $n=3 \Rightarrow P_3^3=125$
 $n=4 \Rightarrow P_4^3=1.728$
 $n=5 \Rightarrow P_5^3=24.389$
 $n=6 \Rightarrow P_6^3=4.826.809$
 $\vdots$
 $n=10 \Rightarrow P_{10}^3=13.447.314.152$

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 34 – Final da dialética de ação para identidade (5.6) feita pelo aluno 05 e sua respectiva formulação.

$\odot$ Algumas relações $\odot$
 $P_1^2 + P_2^2 = P_{1+2} = P_3 \Rightarrow 1+4=5$
 $P_2^2 + P_3^2 = P_{2+3} = P_5 \Rightarrow 4+25=29$
 $P_3^2 + P_4^2 = P_{3+4} = P_7 \Rightarrow 25+144=169$
 De forma geral, temos: $P_n^2 + P_{n+1}^2 = P_{n+n+1} \therefore P_n^2 + P_{n+1}^2 = P_{2n+1}$

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 35 – Final da dialética de ação e formulação para identidade (5.7) feita pelo aluno 05.

$P_{2n} = P_n(P_{n-1} + P_{n+1}) \leftarrow$
 $P/n=1, n=2 \text{ e } n=3:$
 $P_2 = P_1(P_0 + P_2) \Rightarrow P_2 = 1(0+2) \Rightarrow P_2=2 //$
 $P_4 = P_2(P_1 + P_3) \Rightarrow P_4 = 2(1+5) \Rightarrow P_4=12 //$
 $P_6 = P_3(P_2 + P_4) \Rightarrow P_6 = 5(2+12) \Rightarrow P_6=70 //$

Fonte: Dados da pesquisa.

a qual também não exibe nenhuma tentativa de demonstração.

O aluno 05 não registrou maiores detalhes da busca para tal identidade. No entanto, lembramos pelo corolário 3.2.1 que esta identidade pode ser reescrita como

$$p_{2n} = 2p_n^2 + 2p_np_{n-1} = 2(p_n^2 + p_np_{n-1})$$

que nos indica que o provável caminho seguido pelo aluno passou pela lista de quadrados construída pelo mesmo.

Para finalizar a análise da presente situação didática, descreveremos as conclusões dos alunos a respeito das relações encontradas utilizando $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ e $\beta = 1 - \sqrt{2}$ como base. Uma lista das possibilidades exploradas por praticamente todos os alunos é vista na tabela 24.

As relações

Tabela 24 – Relações entre α e β encontradas pelos alunos.

$\alpha\beta = -1$	$\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\alpha + \beta = 2$	$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = (-1)^n \alpha^{2n}$
$\alpha - \beta = 2\sqrt{2}$	$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = (-1)^n \beta^{2n}$
$\frac{\alpha}{\beta} = -\alpha^2$	$\alpha^n = q_n + v_n \sqrt{2}$
$\frac{\beta}{\alpha} = -\beta^2$	$\beta^n = q_n - v_n \sqrt{2}$

Fonte: Dados da pesquisa.

$$\alpha\beta = -1$$

$$\alpha + \beta = 2$$

$$\alpha - \beta = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

resultam de simples computação, realizadas por todos os alunos, portanto não incluiremos na análise. O seguinte conjunto de identidades foi encontrado por todos os alunos

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\alpha^2 \implies \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = (-1)^n \alpha^{2n} \quad (5.8)$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = -\beta^2 \implies \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = (-1)^n \beta^{2n} \quad (5.9)$$

Em todos os casos as igualdades $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = (-1)^n \alpha^{2n}$ e $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = (-1)^n \beta^{2n}$ foram demonstradas em papel, mas os alunos não se sentiram a vontade de ir a lousa compartilhar seus resultados.

No entanto, as figuras 36 e 37. mostram as dialéticas de ação, formulação e validação registrados pelos alunos 01 e 03, onde a validação fica registrada como dedução (correta) para as identidades $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = (-1)^n \alpha^{2n}$ e $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = (-1)^n \beta^{2n}$.

Observando as manifestações escritas do aluno 01, notamos que a identidade encontrada não figura no presente texto, nem foi vista na literatura consultada. Apesar da simplicidade de sua composição e concepção, é notória a capacidade de observação e o papel da intuição na busca de identidades não triviais. Isso é um indicativo de que as capacidades cognitivas dos alunos foram mobilizadas e direcionadas para a realização de inferências sobre os objetos matemáticos disponíveis.

Dada simplicidade do tratamento das identidades (5.8) e (5.9), apresentaremos somente dois exemplos, vistos que o tratamento do restante dos alunos é similar. A seguir, na figura 37 vemos o tratamento oferecido pelo aluno 03.

Figura 36 – Dialéticas de ação, formulação e validação para as identidades presentes em (5.8) e (5.9), produzidas pelo aluno 01.

(a) Computação de $\frac{\alpha}{\beta}$ e $\frac{\beta}{\alpha}$

$$\textcircled{1} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \cdot \frac{(1+\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})} = \frac{(1+\sqrt{2})^2}{-1} = \frac{3+\sqrt{2}}{-1} = -\frac{3+\sqrt{2}}{1} = -\frac{3+2\sqrt{2}}{1} = -3-2\sqrt{2}$$

$$\textcircled{2} \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{(1-\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})} = \frac{1-2\sqrt{2}+2}{-1} = \frac{-3+2\sqrt{2}}{-1} = 3-2\sqrt{2}$$

(b) Demonstração de $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = (-1)^n \alpha^{2n}$ e $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = (-1)^n \beta^{2n}$

$$\textcircled{1} \frac{\alpha^n}{\beta^n} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = \left(\alpha^2 \cdot (-1)\right)^n = \alpha^{2n} \cdot (-1)^n$$

$$\textcircled{2} \frac{\beta^n}{\alpha^n} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = \left(\beta^2 \cdot (-1)\right)^n = \beta^{2n} \cdot (-1)^n$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Finalmente, finalizando a situação didática 02, todos os alunos também encontraram as identidades

$$\alpha^n = q_n + v_n \sqrt{2}, \quad (5.10)$$

$$\beta^n = q_n - v_n \sqrt{2}. \quad (5.11)$$

No entanto, nenhum aluno manifestou necessidade de realizar uma demonstração, o que pode ser facilmente feito via indução matemática. Tentativas anteriores de indução matemática apresentadas nesta análise podem indicar problemas e dificuldades com tal ferramenta, o que faz os alunos a advogarem a favor de suas descobertas fazendo uso somente dos dados numéricos. Outro fato interessante é que neste caso, os alunos utilizaram a notação v_n ao invés de p_n . O aluno 02 foi indagado sobre este fato

Professor: O que quer dizer esse v_n ?

Aluno 02: É os números da *sequência de Pell*, né não professor?

Professor: Sim, mas você no início da aula de hoje estava usando p_n .

Aluno 02: Mas e num é a mesma coisa?

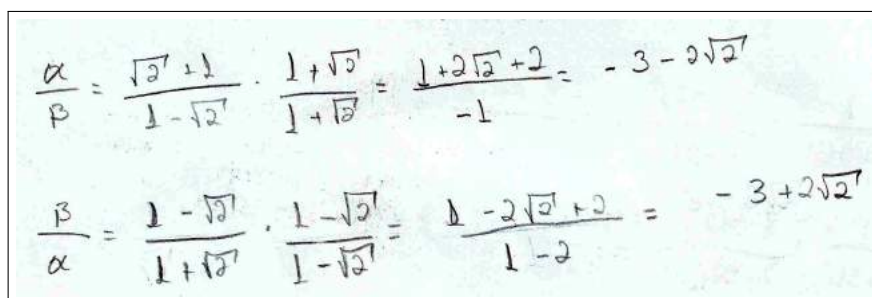
Professor: É sim. Mas fiquei curioso por que você mudou a notação.

Aluno 02: Sei lá, nem pensei nisso. Acho que é porque lembrei da aula anterior, escrevendo esses q_n junto dos v_n .

O que não correspondeu a empecilhos de nenhuma natureza para a continuidade da exploração de propriedades relacionadas a p_n , como vimos até o presente momento.

Figura 37 – Dialéticas de ação, formulação e validação para as identidades presentes em (5.8) e (5.9), produzidas pelo aluno 03.

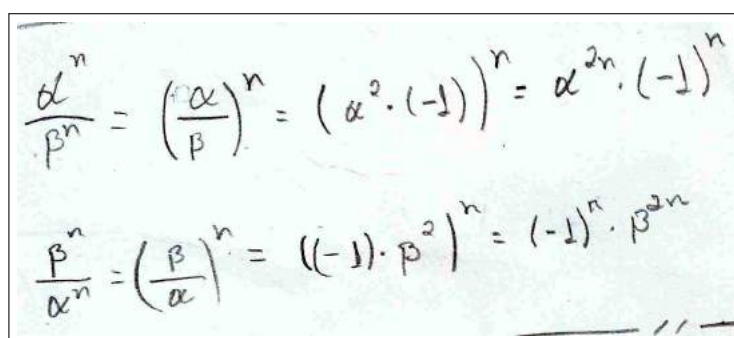
(a) Computação de $\frac{\alpha}{\beta}$ e $\frac{\beta}{\alpha}$



$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sqrt{2}+1}{1-\sqrt{2}} \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{1+2\sqrt{2}+2}{-1} = -3-2\sqrt{2}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-2\sqrt{2}+2}{1-2} = -3+2\sqrt{2}$$

(b) Demonstração do fato de $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = (-1)^n \alpha^{2n}$ e $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = (-1)^n \beta^{2n}$



$$\frac{\alpha^n}{\beta^n} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = (\alpha^2 \cdot (-1))^n = \alpha^{2n} \cdot (-1)^n$$

$$\frac{\beta^n}{\alpha^n} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = ((-1) \cdot \beta^2)^n = (-1)^n \cdot \beta^{2n}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

A demonstração para (5.10) e (5.11) pode ser obtida via indução. Tomando $n = 0$

$$1 = \alpha^0 = q_0 + v_0 \sqrt{2} = 1 + 0 = 1,$$

$$1 = \beta^0 = q_0 - v_0 \sqrt{2} = 1 + 0 = 1.$$

Suponha que para todo natural menor ou igual a n vale

$$\alpha^n = q_n + v_n \sqrt{2},$$

$$\beta^n = q_n - v_n \sqrt{2}.$$

Desse modo, para $n+1$ vale

$$\begin{aligned} \alpha^{n+1} &= \alpha \alpha^n = \alpha(q_n + v_n \sqrt{2}) \\ &= (1 + \sqrt{2})q_n + (1 + \sqrt{2})v_n \sqrt{2} \\ &= q_n + \sqrt{2}q_n + v_n \sqrt{2} + 2v_n \\ &= 2v_n + q_n + \sqrt{2}(v_n + q_n) \\ &= q_{n+1} + v_{n+1} \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta^{n+1} &= \beta\beta^n = \beta(q_n - v_n\sqrt{2}) \\
 &= (1 - \sqrt{2})q_n - (1 - \sqrt{2})v_n\sqrt{2} \\
 &= q_n - \sqrt{2}q_n - v_n\sqrt{2} + 2v_n \\
 &= 2v_n + q_n - \sqrt{2}(v_n + q_n) \\
 &= q_{n+1} - v_{n+1}\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

Estas demonstrações dependem diretamente do corolário 3.2.4, mas tal corolário é equivalente a *Escada de Theon*, ao qual os alunos possuem acesso. A seguir, nas figuras 38 e 39 seguem os registros de dois alunos. Os alunos 01, 03 e 05 mantiveram registros similares aos do aluno 02.

Figura 38 – Investigação do aluno 02 para as identidades (5.10) e (5.11).

Handwritten mathematical work by student 02 showing calculations for α and β powers:

$$\begin{aligned}
 \alpha^2 &= (1+\sqrt{2})^2 = 1^2 + 2\sqrt{2} + \sqrt{2}^2 = 3 + 2\sqrt{2} \quad ; \quad \beta^2 = (1-\sqrt{2})^2 = 1^2 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2}^2 = 3 - 2\sqrt{2} \\
 \alpha^3 &= (3+2\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = 3+3\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}^2 = 3+5\sqrt{2}+2\cdot 2 = 7+5\sqrt{2} \\
 \alpha^4 &= (3+2\sqrt{2})^2 = 3^2 + 3\cdot 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2 = 9 + 12\sqrt{2} + 8 = 17+12\sqrt{2} \\
 \alpha^5 &= (17+12\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = 17+17\sqrt{2}+12\sqrt{2}+12\sqrt{2}^2 = 17+29\sqrt{2}+12\cdot 2 = 41+29\sqrt{2} \\
 \beta^3 &= (3-2\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = 3-3\sqrt{2}-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}^2 = 3-5\sqrt{2}+2\cdot 2 = 7-5\sqrt{2} \\
 &\text{É possível supor que } \alpha^n = q_n + v_n\sqrt{2} \text{ e } \beta^n = q_n - v_n\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 39 – Investigação do aluno 05 para (5.10) e (5.11).

Handwritten mathematical work by student 05 showing calculations for α and β powers:

$$\begin{aligned}
 \alpha \cdot \alpha &= \\
 (1+\sqrt{2}) \cdot (1+\sqrt{2}) &= 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \quad \therefore \quad \boxed{\alpha^2 = 3 + 2\sqrt{2}} \\
 \beta \cdot \beta &= \\
 (1-\sqrt{2}) \cdot (1-\sqrt{2}) &= 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \quad \therefore \quad \boxed{\beta^2 = 3 - 2\sqrt{2}} \\
 \alpha^3 &= (1+\sqrt{2}) \cdot (1+\sqrt{2}) \cdot (1+\sqrt{2}) = 7 + 5\sqrt{2} \quad \therefore \quad \boxed{\alpha^3 = 7 + 5\sqrt{2}} \\
 \beta^3 &= (1-\sqrt{2}) \cdot (1-\sqrt{2}) \cdot (1-\sqrt{2}) = 7 - 5\sqrt{2} \quad \therefore \quad \boxed{\beta^3 = 7 - 5\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

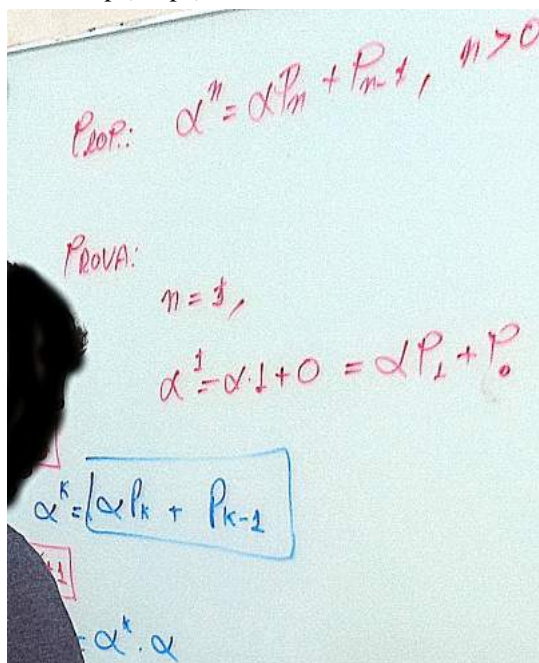
Como os alunos não realizaram a indução esperada para as identidades (5.10) e (5.11), para simplificar e insistir sobre a necessidade da indução matemática solicitamos apenas que,

baseados no que já havíamos estudado até o momento, os alunos reescrevessem as identidades (5.10) e (5.11) utilizando apenas os termos da *sequência de Pell*, obtendo dessa maneira

$$\begin{aligned}\alpha^n &= q_n + p_n\sqrt{2} \\ &= p_n + p_{n-1} + p_n\sqrt{2} = p_n\alpha + p_{n-1}, \\ \beta^n &= q_n - p_n\sqrt{2} \\ &= p_n + p_{n-1} - p_n\sqrt{2} = p_n\beta + p_{n-1}.\end{aligned}$$

Com a simplificação das identidades (5.10) e (5.11), os alunos repetiram as tentativas de indução matemática, logrando sucesso. Na figura 40 podemos ver a exposição do aluno 02, executando a dialética de validação no quadro, discutindo o procedimento de indução com o restante da turma.

Figura 40 – Indução matemática para $\alpha^n = \alpha p_n + p_{n-1}$.



Fonte: Dados da pesquisa.

A última proposta da situação didática 02, que consiste em encontrar uma fórmula geral para p_n foi registrada durante a validação das fórmulas para α^n e β^n , via provocações do professor.

Na figura 41 podemos ver o resultado a dialética de validação executada pelo aluno 05, durante a dedução da fórmula de Binet, com contribuições de seus colegas.

Essa mudança de representação para as identidades (5.10) e (5.11) foi sugerida para facilitar suas demonstrações, mas a fórmula de Binet poderia ser deduzida do mesmo modo com as identidades encontradas espontaneamente. Isso poderia ter sido feito de modo similar, como

Figura 41 – Demonstração da fórmula de Binet executada pelo aluno 05.

$$\begin{cases} \alpha^n = \alpha p_n + p_{n-1} & \text{I} \\ \beta^n = \beta p_n + p_{n-1} & \text{II} \end{cases}$$

$$\text{I} - \text{II} =$$

$$\alpha^n - \beta^n = p_n(\alpha - \beta)$$

$$p_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{(\alpha - \beta)}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

segue abaixo

$$\alpha^n - \beta^n = q_n + p_n\sqrt{2} - q_n + p_n\sqrt{2} = (2\sqrt{2})p_n \implies$$

$$p_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{2\sqrt{2}} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

A institucionalização para a situação didática finalizada aqui ocorreu no início do encontro seguinte, antes de iniciarmos a situação didática 03. Seguiremos agora a situação didática 03.

5.3 Análise *a posteriori* da Situação Didática 03

O terceiro encontro ocorreu na data de 29/04/2019. Somente os participantes Aluno 01, Aluno 02 e Aluno 05 estavam presentes na sessão. Esta situação didática explora as manifestações matriciais para a *sequência de Pell*. A ausência dos alunos ocorreu por obrigações acadêmicas.

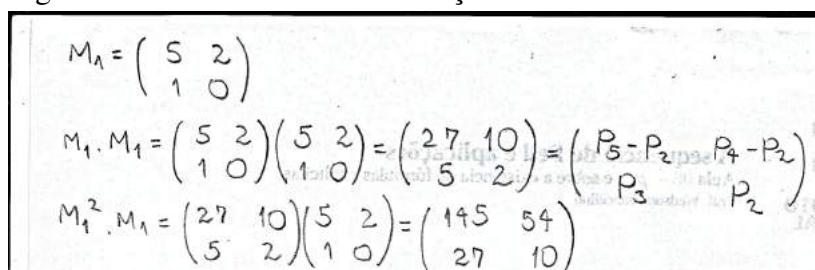
Na institucionalização correspondente a situação didática anterior, o professor realizou as demonstrações para as relações encontradas pelos alunos, bem como demonstrou a fórmula de Binet para p_n fazendo uso da diferença $\alpha^n - \beta^n$. Discutimos também os erros cometidos nas tentativas de demonstração, explicitando as possibilidades e caminhos alternativos para a validação das identidades encontradas.

Após a provocação oferecida no início da situação didática 03, os alunos iniciaram suas tentativas para encontrar equações ou relações de recorrências envolvendo operações matriciais, de modo que as matrizes resultantes possuam os termos de (p_n) em um padrão coerente. Essa

provocação inicial fornece um *milieu* apropriado para orientar uma situação adidática de busca pelas matrizes e operações apropriadas para a obtenção da recorrência matricial esperada.

Observando os exemplos oferecidos, os alunos realizaram as primeiras tentativas com a matriz $M = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ dada no exemplo. Na figura 42 exibimos o início do processo de investigação do aluno 01, iniciado a partir do exemplo dado no questionário 03. Durante a aula, foi sugerido que os alunos tentassem diversas combinações de operações matriciais: soma, produto por escalar, produto entre matrizes, determinantes, etc.

Figura 42 – Início da dialética de ação do aluno 01.



Handwritten mathematical work of student 01 showing matrix calculations:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

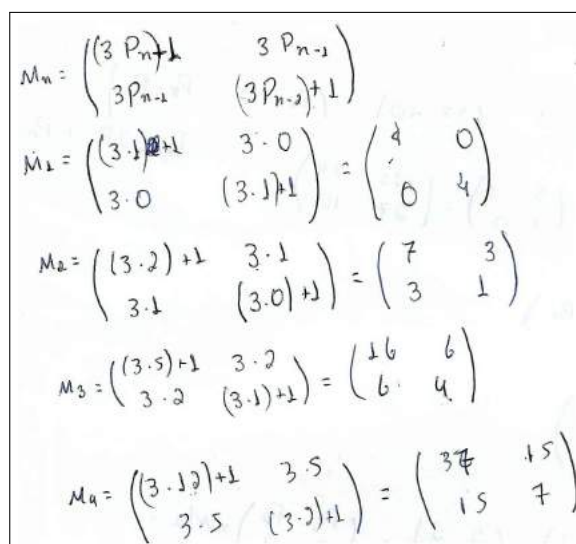
$$M_1 \cdot M_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 10 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_5 - P_2 & P_4 - P_2 \\ P_3 & P_2 \end{pmatrix}$$

$$M_1^2 \cdot M_1 = \begin{pmatrix} 27 & 10 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 145 & 54 \\ 27 & 10 \end{pmatrix}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Observe que o aluno 01 iniciou sua busca diretamente pelo teste de produtos sucessivos. Já o aluno 05 tentou se valer de uma das recorrências matriciais, substituindo a matriz M dada por uma matriz com elementos da *sequência de Pell*, como podemos ver na figura 43.

Figura 43 – Início da dialética de ação do aluno 05.



Handwritten mathematical work of student 05 showing matrix calculations with Pell sequence elements:

$$M_n = \begin{pmatrix} (3P_n)+1 & 3P_{n-1} \\ 3P_{n-1} & (3P_{n-2})+1 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} (3 \cdot 1)+1 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 & (3 \cdot 1)+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} (3 \cdot 2)+1 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 & (3 \cdot 0)+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} (3 \cdot 5)+1 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 & (3 \cdot 1)+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} (3 \cdot 13)+1 & 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 5 & (3 \cdot 2)+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 15 \\ 15 & 7 \end{pmatrix}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Nossa expectativa era de que os alunos, ao investigar as possibilidades de operações matriciais e matrizes possíveis, com a condição de quê cada matriz obtida deveria apresentar os termos da *sequência de Pell*, encontrassem o resultado exibido no teorema 3.2.6. De fato, os alunos 01 e 02 ao investigar diversas possibilidades encontraram os resultados apresentados na

figuras 44 e 45. Na figura 46 observamos a mesma conclusão por parte do aluno 05, apesar no números de operações reduzidas realizadas pelo mesmo.

Figura 44 – Momento em que o aluno 02 encontra a recorrência matricial esperada, caracterizando a dialética de formulação.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_3 & p_2 \\ p_2 & p_1 \end{pmatrix} = M_2 \\ M_2 \cdot M_1 &= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_4 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix} = M_3 \\ M_3 \cdot M_2 &= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 & 29 \\ 29 & 12 \end{pmatrix} = M_5 \\ M_4 \cdot M_3 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$M_n = \begin{pmatrix} p_{n+1} & p_n \\ p_n & p_{n-1} \end{pmatrix}; M_{n-1} = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ p_{n-1} & p_{n-2} \end{pmatrix}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 45 – Dialética de formulação registrada pelo aluno 01.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_3 & p_2 \\ p_2 & p_1 \end{pmatrix} = M_2 \\ M_2 \cdot M_1 &= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_4 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix} = M_3 \\ M_3 \cdot M_2 &= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 & 29 \\ 29 & 12 \end{pmatrix} = M_5 \\ \text{Seja } M_n &= \begin{bmatrix} p_{n+1} & p_n \\ p_n & p_{n-1} \end{bmatrix}, \text{ então } M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{Daí } M_n &= M_1 \cdot M_{n-1} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_n & p_{n-1} \\ p_{n-1} & p_{n-2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2p_n + p_{n-1} & 2p_{n-1} + p_{n-2} \\ p_n & p_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{n+1} & p_n \\ p_n & p_{n-1} \end{bmatrix} \\ M_n &= (M_1)^n \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Estes registros indicam que a situação didática 03 conseguiu estimular os processos cognitivos dos alunos, durante sua investigação numérica, permitindo aos mesmos descobrir resultados novos, indicando sucesso ao provocar o raciocínio inferencial dos alunos com apoio da situação adidática construída.

Os alunos 01 e 02 conseguiram demonstrações aceitáveis, exibindo somente o passo indutivo para o resultado, já que haviam calculado os primeiros termos para a recorrência procurada. Ou seja, os procedimentos para realizar a validação estavam disponíveis e claros. O detalhes de tais demonstrações podem ser vistos na figura 47, onde é exibido o texto do aluno 02. E na figura 48 o aluno 02 discute no quadro o passo indutivo com o restante da turma.

Figura 46 – Dialética de formulação registrada pelo aluno 05.

Como usar matrizes para representar P_n ?

$P_0 = 0$
 $P_1 = 1$
 $P_2 = 2$
 $P_3 = 5$
 $P_4 = 12$
 $\vdots$

$P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$P_1 \cdot P_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$P_1^3 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 47 – Passo indutivo para o teorema 3.2.6 realizados pelo aluno 02.

$M_n = M_{n-1} \cdot M_{n-2}$

$M_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_n & P_{n-1} \\ P_{n-1} & P_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2P_n + P_{n-1} & 2P_{n-1} + P_{n-2} \\ P_n & P_{n-1} \end{pmatrix}$

$M_n = \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{pmatrix} \quad \square$

Fonte: Dados da pesquisa.

Apesar do passo indutivo ter sido realizado como sucesso, nenhum aluno registrou preocupação com a comutatividade do produto das matrizes, necessário para definir de modo coerente as potências de matrizes utilizadas. Não ocorreu a recordação de que o produto de matrizes não é necessariamente comutativo, tampouco a tentativa de explicar ou validar a comutatividade para este caso particular. No entanto, apesar de matematicamente e pedagogicamente interessante esse fato, a percepção de tal comutatividade não faz parte do nosso interesse de análise.

Por fim, os alunos buscaram e estabeleceram com sucesso uma interpretação para as matrizes M_{-n} , bem como a relação $M_{-n} = [M_n]^{-1}$ encontrada no teorema 3.2.7. Na figura 50 exibe tanto os apontamentos do aluno 01 como sua exposição no quadro do resultado encontrado. Interessante que o aluno 01 utilizou a identidade $p_{-n} = (-1)^{n+1} p_n$ para obter o resultado, enquanto o aluno 05 simplesmente substitui n por $-n$, chegando aos mesmos resultados.

No entanto, os alunos não perceberam imediatamente que o resultado de sua manipulação resultou no aparecimento da inversa de M_n , necessitando de uma pequena provocação do professor.

Professor: Comparando a matriz M_n com essa matriz, dá para afirmar algo so-

Figura 48 – Demonstração discutida pelo aluno 02 com a turma, exibindo o passo indutivo da figura 47.

Então $M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$

Logo $M_n = M_1 \cdot M_{n-1}$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_n & P_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2P_n + P_{n-1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}$

Fonte: Dados da pesquisa.

bre elas, observando essa igualdade? (referindo a $(-1)^n \begin{bmatrix} P_{-(n+1)} & -P_{-n} \\ -P_{-n} & P_{-(n-1)} \end{bmatrix}$)

Aluno 05: Como assim professor?

Professor: Essa matriz que você conseguiu, pode ser escrito de modo diferente? Ou pode estar relacionada com outra matriz? Olha o jeito que os termos da matriz estão!

Aluno 05: Como assim professor?

Professor: Não sei... esses termos estão muito bonitinhos...

Aluno 05: Deixa ver aqui professor.

Depois de alguns minutos de trabalho, o pesquisador sugere que os alunos observem o determinante das matrizes, obtendo o seguinte registro da figura 49, efetuado no quadro para ajudar aos outros estudantes durante o processo de exploração.

Figura 49 – Determinante para matriz M_n , registrado pelo aluno 02.

$M_n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix} = (P_{n+1}) \cdot (P_{n-1}) - (P_n)^2 = (-1)^n \Rightarrow \frac{1}{(-1)^n} \begin{bmatrix} P_{n-1} & -P_n \\ -P_n & P_{n+1} \end{bmatrix}$

Fonte: Dados da pesquisa.

Nisso deixamos os alunos trabalharem sem orientações extras durante algum tempo. Após transcorridos um pouco mais que 15 minutos, os alunos 01 e 03 exclamaram terem encontrado uma relação com uma inversa de matriz, percebendo que a matriz

$$M_n = (-1)^n \begin{bmatrix} p_{-(n+1)} & -p_{-n} \\ -p_{-n} & p_{-(n-1)} \end{bmatrix}$$

é inversa de

$$\begin{bmatrix} p_{-(n-1)} & p_{-n} \\ p_{-n} & p_{-(n+1)} \end{bmatrix}$$

Figura 50 – Validação do aluno 01 e sua apresentação, sobre a matriz M_{-n} .

(a)

Handwritten derivation for part (a):

$$P_{-n} = (-1)^{n+1} P_n \Rightarrow P_n = (-1)^{n+1} P_{-n} ; P_{n+1} = (-1)^n P_{-n-1} ; P_{n-1} = (-1)^n P_{-n+1}$$

$$M_n = \begin{bmatrix} P_{-n-1} \cdot (-1)^{n+1} & P_{-n} \cdot (-1)^{n+1} \\ P_{-n} \cdot (-1)^{n+1} & P_{-n+1} \cdot (-1)^n \end{bmatrix} \Rightarrow M_n = (-1)^n \begin{bmatrix} P_{-n-1} - P_{-n} \\ -P_{-n} P_{-n+1} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$(M_1)^n = M_n = (-1)^n \begin{bmatrix} P_{-(n+1)} & -P_{-n} \\ -P_{-n} & P_{-(n-1)} \end{bmatrix}$$

(b)

Handwritten derivation for part (b):

$$P_{-n} = (-1)^{n+1} P_n \Rightarrow P_n = (-1)^{n+1} P_{-n} ; P_{n+1} = (-1)^n P_{-n-1} ; P_{n-1} = (-1)^n P_{-n+1}$$

$$M_n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$M_n = \begin{bmatrix} P_{-n-1} \cdot (-1)^{n+1} & P_{-n} \cdot (-1)^{n+1} \\ P_{-n} \cdot (-1)^{n+1} & P_{-n+1} \cdot (-1)^n \end{bmatrix} \Rightarrow M_n = (-1)^n \begin{bmatrix} P_{-n-1} & -P_{-n} \\ -P_{-n} & P_{-n+1} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$(M_1)^n = M_n = (-1)^n \begin{bmatrix} P_{-(n+1)} & -P_{-n} \\ -P_{-n} & P_{-(n-1)} \end{bmatrix}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Observando os dados, podemos concluir que a situação didática 03 estabeleceu com sucesso um *milieu* adequado para que as situações adidáticas propostas estimulassem com sucesso as capacidades cognitivas e o raciocínio inferencial dos alunos, mobilizando seus recursos para a descobertas de resultados novos. Os alunos descobriram os resultados essenciais para a situação didática, bem como estabeleceram, na maioria dos casos, validações próximas a desejadas. A seguir, descreveremos os resultados da última situação didática proposta.

5.4 Análise a posteriori da Situação Didática 04

O quarto e último encontro ocorreu na data de 06/05/2019. Os indivíduos Aluno 01, Aluno 02, Aluno 03 e Aluno 05 estavam presentes na sessão. O aluno 04 não pode estar presente por conta de obrigações acadêmicas. Nesta situação didática, exploramos a definição 3.4.2, que define os *polinômios de Pell*, $[p_n(x)]$.

Esperamos que todo o conjunto de conhecimentos sirva de referência para a exploração das propriedades da $[p_n(x)]$ e portanto, ofereceremos o mínimo de instruções para o processo de investigação promovido pela situação didática.

Antes de iniciar a situação didática, realizamos uma pequena institucionalização, discutindo as demonstrações para P_n e P_{-n} .

Solicitamos que os alunos, após computarem alguns termos para $[p_n(x)]$ buscassem: relações entre os termos de $[p_n(x)]$ e (p_n) ; uma equação característica similar a de $(p_n(x))$; uma fórmula geral para $[p_n(x)]$.

Na figura 51 constatamos o início da dialética de ação do aluno 01. Neste momento, todos os alunos computavam valores para $[p_n(x)]$.

A atitude inicial dos alunos foi a de buscar padrões gerais para os polinômios, observando uma possível previsibilidade em seus coeficientes. Dentre essas características, o aluno 01 a observação de que o coeficiente de maior grau em cada polinômio é sempre uma potência de 2. Percebe também que quando n ímpar o coeficiente de grau 0 do polinômio existe e vale necessariamente 1. Este último fato também foi percebido e registrado pelo aluno 02 como demonstramos na figura 52.

Figura 51 – Computação dos 10 primeiros termos de $[p_n(x)]$, caracterizando o início da ação do aluno 01

n	$P_n(x)$
0	0
1	1
2	$2x$
3	$4x^2 + 1$ $4+1=5$
4	$8x^3 + 4x$ $8+4=12$
5	$16x^4 + 12x^2 + 1$ $16+12+1=29$
6	$32x^5 + 32x^3 + 6x$ $32+32+6=70$
7	$64x^6 + 80x^4 + 24x^2 + 1$
8	$128x^7 + 192x^5 + 80x^3 + 8x$ $<=$
9	$256x^8 + 448x^6 + 240x^4 + 24x^2 + 8x + 1$
10	$512x^9 + 1024x^7 + 672x^5 + 128x^3 + 16x$

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 52 – Observação do aluno 02 sobre uma conjectura baseada no comportamento polinomial de $[p_n(x)]$.

n	$p_n(x)$	
0	0	$p_0(x) = 2 \times p_{-1}(x) + p_0(x) = 2x$
1	1	$p_1(x) = 2x(2x) + 1 = 4x^2 + 1$
2	$2x$	$p_2(x) = 2x(4x^2 + 1) + 2x = 8x^3 + 2x + 2x = 8x^3 + 4x$
3	$4x^3 + 1$	$p_3(x) = 2x(8x^3 + 4x) + 4x^3 + 1 = 16x^4 + 8x^2 + 4x^3 + 1 = 16x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 1$
4	$8x^3 + 4x$	
5	$16x^4 + 12x^2 + 1$	
6	$32x^5 + 32x^3 + 6x$	
7	$64x^6 + 80x^4 + 24x^2 + 1$	

Obs: n ímpar no polinômios soma-se +1
 n ímpar polinômios com potências pares
 n par polinômios com potências ímpares.

Fonte: Dados da pesquisa.

Na figura 53 vemos o aluno 01 realizando exposição da computação realizada, em discussão com o restante da turma, dando continuidade a dialética de ação e iniciando a dialética de formulação com a busca de padrões coerentes envolvendo os coeficientes de $p_n(x)$

Figura 53 – Dialética de ação da turma na busca de outras propriedades.

n	$p_n(x)$	$p_n(x)$
0	0	$= 2x$
1	1	$p_1(x)$
2	$2x$	$= 4x$
3	$4x^3 + 1$	$p_4(x)$
4	$8x^3 + 4x$	$2x$
5	$16x^4 + 12x^2 + 1$	$p_4(x)$
6	$32x^5 + 32x^3 + 6x$	$p_4(x)$
7	$64x^6 + 80x^4 + 24x^2 + 1$	$p_4(x)$
8	$128x^7 + 192x^5 + 80x^3 + 8x$	$p_5(x)$

$p_0(x) = 2x$
 $p_1(x) = 2x^2 + 1$
 $p_2(x) = 2x^3 + 2x$
 $p_3(x) = 2x^4 + 4x^2 + 1$
 $p_4(x) = 2x^5 + 8x^3 + 6x$
 $p_5(x) = 2x^6 + 16x^4 + 12x^2 + 1$
 $p_6(x) = 2x^7 + 32x^5 + 32x^3 + 6x$
 $p_7(x) = 2x^8 + 64x^6 + 80x^4 + 24x^2 + 1$
 $p_8(x) = 2x^9 + 128x^7 + 192x^5 + 80x^3 + 8x$

Fonte: Dados da pesquisa.

Como previsto na análise a priori os alunos ao explorar os polinômios e observar seus coeficientes notaram que $p_n(1) = p_n$ ou seja, que a soma dos coeficientes de cada $p_n(x)$ é igual a p_n . Inicialmente, os alunos 01 e 03 percebem esse fato exprimindo apenas a soma dos coeficientes, tal como o aluno 01 registra em escrito conforme é exibido na figura 51.

Disso, os alunos comunicam verbalmente tal fato ao restante da turma e o pesquisador segue com a seguinte provocação

Professor: Dá para representar essa soma utilizando os próprios polinômios?

Aluno 02: Vamos ver professor.

Aluno 03: Como assim professor?

Professor: Comparem o polinômio com a respectiva soma de coeficientes. Não posso dizer mais (risos da turma)

O registro escrito do momento em que o aluno 01 percebe que ao fazer $x = 1$ estabelecemos uma ponte entre $[p_n(x)]$ e p_n se encontra na figura 54.

Figura 54 – Dialética de Validação para $p_n(1) = p_n$

$$\begin{aligned} p_2(1) &= 2 = p_2 \\ p_3(1) &= 4 + 1 = 5 = p_3 \\ p_4(1) &= 8 + 4 = 12 = p_4 \\ p_n(1) &= p_n \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Os alunos também construíram, por analogia com as estruturas matemáticas já discutidas nas situações didáticas anteriores, uma *equação de característica* análoga a já discutida para p_n . A seguir na figura 55 registramos o procedimento do aluno 03 quando o mesmo constrói a equação

$$t^2 - 2xt - 1 = 0$$

e calcula corretamente as raízes α_x e β_n para a equação característica, cujas propriedades são similares as propriedades encontradas no caso de (p_n) e estão presentes na seção 3.4..

Figura 55 – Registro da equação característica $t^2 - 2xt - 1 = 0$ e cálculo das raízes α_x e β_x .

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x) &= 2x p_n(x) + p_n(x) \\ t^2 - 2xt - 1 &= 0 \quad \Delta = 4x^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 \\ \Delta &= 4x^2 + 4 \\ t &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2x \pm 2\sqrt{x^2+1}}{2} \\ t' &= x + \sqrt{x^2+1} \quad t'' = x - \sqrt{x^2+1} \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Os alunos também encontraram as identidades

$$\alpha_x^n = \alpha_x p_n(x) + p_{n-1}(x) \quad (5.12)$$

$$\beta_x^n = \beta_x p_n(x) + p_{n-1}(x) \quad (5.13)$$

similares nas identidades $\alpha^n = \alpha p_n + p_{n-1}$ e $\beta^n = \beta p_n + p_{n-1}$. Os alunos aqui não manifes-

Figura 56 – Registro da equação característica $t^2 - 2xt - 1 = 0$, raízes α_x e β_x e conjectura das identidades α^n e β^n , durante uma dialética de ação.

Handwritten mathematical work on a whiteboard. At the top, it says "6.2 CARAC. POL. QUADRÁTICA". Below that, the characteristic equation is written: $t^2 - (2x)t - 1 = 0$. The roots are found: $\alpha_x = x + \sqrt{x^2 + 1}$ and $\beta_x = x - \sqrt{x^2 + 1}$. Then, the identity $\alpha^3 = P_3(x)[\alpha] + P_2(x)$ is conjectured and verified. The verification shows $\alpha^3 = (x + \sqrt{x^2 + 1})^3 = 4x^3 + 4x\sqrt{x^2 + 1} + 3x + \sqrt{x^2 + 1}$, which is then expressed as $4x^3 + 4x\sqrt{x^2 + 1} + 3x + \sqrt{x^2 + 1} = (4x^3 + 4x)\sqrt{x^2 + 1} + (3x + 1)$. This is then written as $\alpha^3 = P_3(x)[\alpha] + P_2(x)$, where $P_3(x) = 4x^3 + 4x$ and $P_2(x) = 3x + 1$. A similar process is shown for β^3 .

Fonte: Dados da pesquisa.

taram preocupação com a demonstração formal das identidades (5.12) e (5.13), visto que tais identidades possuem mesma estrutura das identidades correspondentes a α^n e β^n . No entanto, diante da indagação sobre a demonstração formal de tais fatos, manifestaram consciência que o mesmo pode ser feito via indução matemática, em um processo similar ao passo indutivo exibido na situação didática 02.

Finalmente, com base nas identidades (5.12) e (5.13), os alunos demonstram, de modo trivial e similar ao que foi feito na situação didática 02, a fórmula de Binet para $[p_n(x)]$. Podemos ver este fato na figura 57. Tal demonstração ocorre de forma similar ao que foi executado na situação didática 02 para a fórmula geral de p_n .

Desta forma, os principais objetivos para a situação didática 04 foram atingidos: identificar um elo entre $[p_n(x)]$ e p_n , através de $p_n(1) = p_n$, explorar α_x e β_x através de uma equação característica apropriada e encontrar a fórmula de Binet para $[p_n(x)]$.

5.5 Síntese do capítulo

Desse modo, considerando nossos objetivos específicos e o fato de que estamos interessados em um processo de validação interna, onde dependemos apenas dos prognósticos traçados na análise *a priori* em comparação com os dados obtidos na análise *a posteriori*.

Figura 57 – Dialética de validação do aluno 01 da fórmula de Binet para $p_n(x)$.

$$\begin{aligned}
 & \alpha^n = \alpha (p_n(x)) + p_{n-1}(x) \\
 & \beta^n = \beta (p_n(x)) + p_{n-1}(x) \\
 \hline
 & \alpha^n - \beta^n = \alpha (p_n(x)) - \beta (p_n(x)) \\
 & \alpha^n - \beta^n = \alpha - \beta (p_n(x)) \Rightarrow \\
 & \Rightarrow p_n(x) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}
 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos o processo de descoberta de resultados via investigação numérica, a manifestação do raciocínio intuitivo e descoberta de identidades por analogias, evidência de que conseguimos ativar com sucessos os processos cognitivos e inferenciais dos alunos da pesquisa.

Digno de nota é a dificuldade dos alunos em realizar algumas demonstrações. Quase todas as identidades e relações discutidas nas situações didáticas exibidas podem ser demonstradas utilizando indução matemática ou uma fórmula de Binet apropriada. No entanto os alunos manifestaram dificuldades em por em ação tais ferramentas. Na maior parte dos casos, estímulo adequado do professor e mudança de perspectiva criaram condições adequadas para o uso da indução matemática.

A exceção da situação didática 02, que possuem identidades que necessitavam a fórmula de Binet (obtida somente ao final da situação didática) ou de malabarismos algébricos para realizar a demonstração, em todas as situações didáticas encontramos paralelos positivos entre análise *a priori* e análise *a posteriori*, de modo que os resultados previstos foram descobertos ou computados com sucesso, de modo que o processo pode ser descrito em termos das dialéticas de ação, formulação e validação da TSD, concluindo assim nossa validação interna.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo da Didática Matemática é investigar e construir teorias que expliquem os processos de ensino e aprendizagem em matemática. Esse objetivo só possui um fim principal: melhorar a eficiência para o ensino e assimilação de conhecimentos por parte de alunos de matemática nos mais variados níveis de ensino, o que implica em conhecimentos construídos com maior qualidade com menor investimento de energia e tempo.

Esses objetivos se baseiam parcialmente na afirmação, hoje de senso comum, que a metodologia de ensino mais comum em matemática, baseada nas modalidades de exposições lógico-expositiva ou numérica-replicativa não dão conta da complexidade e amplitude do conhecimento matemático, tampouco atendem as necessidades cognitivas dos alunos, resumindo o processo de ensino a simples memorização de resultados e adestramento para aplicar soluções padrão para problemas padrão.

Como já apresentamos em capítulos anteriores, a proposta da escola francesa de Didática da Matemática possui dois pilares principais: o construtivismo didático, baseado na abordagem construtivista de Jean Piaget e a análise epistêmica do conhecimento matemático.

O construtivismo didático enfatiza a construção do conhecimento por parte do aluno estimulado por um ambiente apropriado para induzir tais comportamento, levando em conta as interações entre aluno-aluno, aluno-professor e aluno-ambiente.

A análise epistêmica do conhecimento matemático ocorre pelo entendimento do papel essencial que a construção do conhecimento matemático, em seus aspectos axiológicos, históricos e filosóficos, possui para o planejamento e análise de situações didáticas.

A pesquisa contida neste texto pretendeu exhibir, fazendo uso da Engenharia Didática e Teoria das Situações Didáticas não somente um exemplo de estudo segundo o viés da Didática da Matemática francófona, mas um modo de abordagem e construção de realizações didáticas que permitam um processo de ensino mais eficiente para as necessidades cognitivas e didáticas dos alunos, como também mais condizente com a natureza epistemológica da própria matemática.

De fato conseguimos atingir nossa pretensão presente na hipótese de pesquisa ao satisfazer nossos objetivos, respondendo dessa maneira a pergunta norteadora para este trabalho e atendendo a hipótese de pesquisa.

Recapitulando, nossa hipótese de pesquisa é *o estudo sobre o objeto matemático conhecido como sequência de Pell, com transposição didática efetuada segundo os preceitos da TSD, é capaz de mobilizar o pensamento intuitivo e inferencial do estudante, bem como atitude investigativa, conduzindo-o a descoberta de teoremas e resultados, motivada pela pergunta: como realizar uma transposição didática para a sequência de Pell e seus modelos matriciais e polinomiais, de modo a promover um processo de ensino que incentive a descoberta de resultados e teoremas por parte dos alunos?*

Afirmo que tal hipótese foi confirmada pela análise *a posteriori* e validação, respondendo dessa maneira nossa pergunta norteadora, ao atender nossos objetivos específicos:

1. *Estudar e investigar as relações matemáticas, epistemológicas e históricas da sequência de Pell e seus modelos de generalização.*

Atendido durante a fase de análises prévias, onde examinamos a estrutura matemática para a *sequência de Pell* e seus modelos de generalização, bem como exibimos alguns aspectos históricos importantes. Estas informações nos permitiram examinar a estrutura dos conhecimentos matemáticos a serem trabalhados e observar os possíveis caminhos de trabalho dos alunos.

2. *Tomando a Teoria das Situações Didáticas como teoria de ensino, construir sequências didáticas que abordem as características da sequência de Pell e seus modelos de generalização, explorando os obstáculos epistemológicos encontrados.*

Atendido durante a análise *a priori*, que concebeu situações didáticas tendo em vistas as características epistemológicas do objeto matemático, os aspectos didáticos do lócus do experimento e as peculiaridades cognitivas dos alunos participantes do estudo, visando uma transposição didática que atenda os pressupostos da Teoria das Situações Didáticas. Visamos com isso provocar um processo de descoberta de resultados durante o ensino, paradigma ao qual se funda a Teoria das Situações Didáticas e a Didática da Matemática Francófona.

3. *Analisar as estratégias e manifestações dos alunos durante a aplicação das sequências didáticas construídas, segundo o paradigma da Engenharia Didática.*

A análise *a posteriori* e validação interna foram executadas ao final, realizando paralelos com as previsões de comportamentos colocadas na análise *a priori*, permitindo avaliar os resultados pretendidos em torno da hipótese escolhida. O processo de descoberta guiada pelo *milieu* projetado durante a Análise *a Priori* se mostrou bem sucedido durante o processo de ensino, estimulando a atividade exploratória e a elaboração de conjecturas por parte dos alunos.

Dessa forma, atendemos o objetivo geral para este trabalho: Elaborar uma Engenharia Didática para objeto matemático denominado *sequência de Pell*, bem como seus diversos modelos de generalização, através de um conjunto de situações didáticas segundo os pressupostos da Teoria das Situações Didáticas.

O cumprimento de tal objetivo permitiu ao final do processo, validar o estudo segundo as orientações da Engenharia Didática, constatando dadas as condições postas, ou seja situações didáticas desenhadas sobre o pressuposto da TSD permite a mobilização do pensamento intuitivo e inferencial, permitindo a descoberta de resultados e teoremas por parte dos alunos através de uma abordagem que favoreça postura investigativa.

Esse fato tanto atende nossa hipótese de pesquisa quanto responde nossa pergunta norteadora, pois indica que o uso de abordagens no ensino de matemática através do viés da TSD promovem processos de ensino que favorecem a descoberta de resultados por parte dos alunos, onde o professor exerce o papel crucial de estabelecer o ambiente adequado para estimular e promover tal comportamento.

A partir do que foi respondido pela pesquisa podemos realizar duas observações. Inicialmente, o sucesso deste trabalho parece indicar que a natureza do conhecimento matemático e de como ele é construído é essencial para o sucesso do processo de ensino. Assim, o estudo não somente da estrutura matemática daquilo que se deseja ensinar, mas o estudo sobre o processo histórico e filosófico para composição deste conhecimento é essencial para a elaboração de processos de ensino.

Além disso, a abordagem sugerida pela TSD orienta que a maior parte do trabalho em sala de aula ocorra por esforço do aluno, orientado por condições e ambiente preestabelecidos pelo professor. Nossos resultados foram atingidos em um ambiente de ensino com estas características. Desse modo, temos então um indício de que abordagens centradas no aluno, mas no entanto dirigidas pelo professor, surtam melhores efeitos no ensino do que a simples exposição lógico-teórica mas comumente vista nas salas de aula.

Dessa forma, esta pesquisa e seus resultados oferecem uma tripla contribuição. Em primeiro lugar, contribui com a ampliação do escopo da TSD e Engenharia Didática, colocando mais uma pequena peça para construções destas respectivas teoria de ensino e metodologia de pesquisa, dando assim uma modesta contribuição.

Segundo, chama a atenção para outras opções de formação para a disciplina de história da matemática, cujo itinerário tradicional de estudo em geral não inclui recorrências, sequências numéricas, álgebra e teoria dos números.

Terceiro, oferece aos professores e alunos de licenciatura em matemática um modelo de abordagem em sala de aula capaz de favorecer e estimular procedimentos inferenciais dos alunos, permitindo a descoberta de resultados e uma aprendizagem mais profunda.

Como perspectiva futura escolhemos elencar duas perspectivas principais. A mais imediata consiste em estender este trabalho para outros modelos existentes para a *sequência de Pell*, como explorar o ensino para a complexificação desta sequência, polinômios bi-variados de Pell, quaternions e octônios de Pell, bem como elaborar uma engenharia didática para estudar equações diofantinas não lineares, com foco no estudo da equação de Pell.

Outra perspectiva de estudo consiste em utilizar a TSD e Engenharia Didática para explorar a noção de recorrências lineares (e talvez não lineares) para o ensino médio, como forma de reintroduzir este assunto em nível médio.

Desse modo, encerramos o presente texto.

REFERÊNCIAS

ADÚRIZ-BRAVO, Agustín. La didáctica de las ciencias como disciplina. **Enseñanza**, Universidad de Salamanca. Salamanca, España., n. 17, p. 61–74, 1999. ISSN 0212-5374. Disponível em: <<http://revistas.usal.es/index.php/0212-5374/article/view/3902>>. Acesso em: 05/01/2020.

ALMEIDA, Edjane Gomes dos Santos. **Propriedades e generalizações dos números de Fibonacci**. 2014. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, Brasil, 2014. Disponível em: <<https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/7658>>. Acesso em: 20/05/2019.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática Matemática**. Curitiba: UFPR, 2014.

ALMOULOUD, Saddo Ag. Dialogos da didática da matemática com outras tendências da educação matemática. **Caminhos da Educação Matemática em Revista/Online**, v. 9, n. 1, p. 145–178, 2019. ISSN 2358-4750. Disponível em: <https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/index.php/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/301>. Acesso em: 05/01/2020.

ALVES, Francisco Regis Vieira. Engenharia didática para a generalização da sequência de fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 18, n. 1, 2016a. ISSN 1983-3156. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/20879>>.

ALVES, Francisco Regis Vieira. Fórmula de moivre, ou de binet ou de lamé: demonstrações generalidades sobre a sequência generalizada de fibonacci-sgf. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 17, n. 33, p. 0–16, 2017a. ISSN 1519-955X. Disponível em: <<http://www.rbhm.org.br/issues/RBHM%20-%20vol.17,no33/Francisco.pdf>>. Acesso em: 05/08/2019.

ALVES, Francisco Regis Vieira. Didática das ciências e matemática (dcem): Surgimento e implicações para a formação do professor. **IENCI: Investigações em Ensino de Ciências**, v. 22, n. 3, p. 291–320, 2017b. ISSN 1518-8795. Disponível em: <<https://www.if.ufrgs.br/cref/ojs/index.php/ienci/article/download/870>>. Acesso em: 10/01/2020.

ALVES, Francisco Regis Vieira. Engenharia didática de formação (edf): sobre o ensino dos números (generalizados) de catalan (ngc). **Educação Matemática Pesquisa**, v. 20, n. 2, p. 47–83, 2018. ISSN 1518-8795. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/36808>>. Acesso em: 13/08/2019.

ALVES, Francisco Regis Vieira; CATARINO, Paula Maria Machado Cruz. Generalized fibonacci and k-pell matrix sequences: Another way of demonstrating their properties. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics**, v. 25, n. 4, p. 110–122, 2019. ISSN 310–5132. Disponível em: <<http://nntdm.net/volume-25-2019/number-4/110-122/>>. Acesso em: 28/04/2020.

ARTIGUE, Michele. Engenharia didática. In: _____. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193–217.

BACHELARD, Gaston. **A formação do espírito científico**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BALAMURUGAN, A. Gnanam P. Gaussian pell numbers. **International Journal of Engineering & Technology**, v. 7, n. 4.10, p. 1012–1014, 2018. Disponível em: <<https://www.sciencepubco.com/index.php/ijet/article/view/26659>>. Acesso em: 10/03/2020.

BELINI, Marcelo Manechine. **A razão áurea e a sequência de Fibonacci**. 2015. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 2015. Disponível em: <<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-06012016-161056/pt-br.php>>. Acesso em: 20/05/2019.

BICKNELL, Marjorie. A primer on the pell sequence and related sequences. **The Fibonacci Quartely**, Halifax, v. 13, n. 4, p. 345–349, Dec 1975. Disponível em: <<https://www.fq.math.ca/Scanned/13-4.html>>. Acesso em: 24/05/2019.

BILGICI, Goksal. New generalizations of fibonacci and lucas sequences. **Applied Mathematical Sciences**, Viterbo, Bulgária, v. 8, n. 29, p. 1429–1437, 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.12988/ams.2014.4162>>. Acesso em: 24/05/2019.

BILGICI, Goksal; CATARINO, Paula Maria Machado Cruz. Unrestricted pell and pell-lucas quaternions. **International Journal of Mathematics and Systems Science**, v. 1, p. 1–4, 2018. Disponível em: <<https://systems.enpress-publisher.com/index.php/IJMSS/article/view/816>>. Acesso em: 23/04/2020.

BOUSSAYOUD, Ali. On some identities and generating functions for pell-lucas numbers. **Online Journal of Analytic Combinatorics**, v. 12, n. 1, p. 1–10, 2017. ISSN 1931-3365. Disponível em: <<https://web.math.rochester.edu/misc/ojac/vol12/133.pdf>>. Acesso em: 17/01/2020.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas**:: Conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. **Raiz Quadrada ao longo dos Séculos**. João Pessoa: V Bienal da SBM, João Pessoa, 2010. Disponível em: <http://www.mat.ufpb.br/bienalsbm/arquivos/Mini_Cursos_Completos/MC11Completo.pdf>. Acesso em: 28/02/2020.

CATARINO, Paula Maria Machado Cruz. On some identities and generating functions of k-pell numbers. **International Journal of Mathematical Analysis**, v. 7, n. 38, p. 1877–1884, 2013a. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.12988/ijcms.2014.311120>>. Acesso em: 22/05/2020.

CATARINO, Paula Maria Machado Cruz. On some identities for k-fibonacci sequence. **International Journal of Contemporary Mathematical Sciences**, v. 9, n. 1, p. 37–42, 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.12988/ijcms.2014.311120>>. Acesso em: 22/05/2019.

CATARINO, Paula Maria Machado Cruz. On some pell difference sequences. **MAYFEB Journal of Mathematics**, Toronto, Canada, v. 4, p. 73–84, 2017. ISSN 2371-6193. Disponível em: <<http://mayfeb.com/OJS/index.php/MAH/article/view/530>>. Acesso em: 20/05/2020.

CATARINO, Paula Maria Machado Cruz. Diagonal functions of the k-pell and k-pell-lucas polynomials and some identities. **Acta Mathematica Universitatis Comenianae**, v. 87, n. 1, p. 147–159, 2018a. ISSN 0862-9544. Disponível em: <<http://www.iam.fmph.uniba.sk/amuc/ojs/index.php/amuc/article/view/641/577>>. Acesso em: 16/04/2020.

CATARINO, Paula Maria Machado Cruz; CAMPOS, Helena; VASCO, Paulo J. M. A note on k-pell, k-pell-lucas and modified k-pell numbers with arithmetic indexes. **Acta Mathematica Universitatis Comenianae**, v. 89, n. 1, p. 97–107, 2019. Disponível em: <<http://www.iam.fmph.uniba.sk/amuc/ojs/index.php/amuc/article/view/1027/782>>. Acesso em: 25/04/2020.

CATARINO, Paula Maria Machado Cruz; VASCO, Paulo. Modified k-pell sequence: Some identities and ordinary generating function. **Applied Mathematical Sciences**, v. 7, n. 121, p. 6031–6037, 2013b. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.12988/ams.2013.39513>>. Acesso em: 22/05/2020.

CATARINO, Paula Maria Machado Cruz; VASCO, Paulo. On matrices with the pell, pell-lucas, k-pell and k-pell-lucas quaternions. **Analele științifice ale Universității “Al. I. Cuza” din Iași. Matematică (SERIE NOUĂ)**, v. 64, n. 2, p. 373–388, 2018b. ISSN 2344-4967. Disponível em: <[https://www.math.uaic.ro/~annalsmath/pdf-uri-20anale/F2\(2018\)/On_matrices_with_the_Pell,Pell-Lucas,K-Pell_and_K-Pell-Lucas_quaternions,Paula_Catarino,Paulo_Vasco_pg373.pdf](https://www.math.uaic.ro/~annalsmath/pdf-uri-20anale/F2(2018)/On_matrices_with_the_Pell,Pell-Lucas,K-Pell_and_K-Pell-Lucas_quaternions,Paula_Catarino,Paulo_Vasco_pg373.pdf)>. Acesso em: 21/04/2020.

CHEVALLARD, Yves. Pourquoi la transposition didactique? **Communication au Séminaire de didactique et de pédagogie des mathématiques de l'IMAG**, FUniversité scientifique et médicale de Grenoble, p. 167–194, 1982. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php?id_article=103>. Acesso em: 15/01/2020.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. **O que é Matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

COUTINHO, Cileda; ALMOULOU, Saddo Ag. Engenharia didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no gt-19 / anped. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 3, n. 1, p. 62–77, 2008. ISSN 1981-1322. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2008v3n1p62>>. Acesso em: 22/05/2019.

CURD, Drew. **Pell's equations: history, methods, and number theory**. Fev 2004. Tese (Doutorado) — Department of Mathematics, Texas Christian University, Fort Worth, Texas, Fev 2004. Disponível em: <<https://repository.tcu.edu/handle/116099117/7234>>. Acesso em: 28/05/2019.

D'AMORE, Bruno. **Elementos de Didática da Matemática**. Tradução Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Livraria da Física, 2007b. 1 ed.

DASDEMIR, Ahmet. On the pell, pell-lucas and modified pell numbers by matrix method. **Applied Mathematical Sciences**, Viterbo, Bulgária, v. 5, n. 64, p. 3173–3181, 2011. Disponível em: <<http://www.m-hikari.com/ams/ams-2011/ams-61-64-2011/dasdemirAMS61-64-2011.pdf>>. Acesso em: 28/05/2019.

DUTTA, Amartya Kumar. Mathematics in ancient india - an overview. **Resonance – Journal of Science Education**, v. 7, n. 4, p. 4–19, 2002a. ISSN 0973-712X. Disponível em: <<https://www.ias.ac.in/article/fulltext/reso/007/04/0004-0019>>. Acesso em: 15/03/2020.

DUTTA, Amartya Kumar. Mathematics in ancient india - diophantine equations: The kuttaka. **Resonance – Journal of Science Education**, v. 7, n. 10, p. 6–22, 2002b. ISSN 0973-712X. Disponível em: <<https://www.ias.ac.in/article/fulltext/reso/007/10/0006-0022>>. Acesso em: 15/03/2020.

DUTTA, Amartya Kumar. Mathematics in ancient india - brahmagupta's lemma: The samasabhavana. **Resonance – Journal of Science Education**, v. 8, n. 11, p. 10–24, 2003. ISSN 0973-712X. Disponível em: <<https://www.ias.ac.in/article/fulltext/reso/008/11/0010-0024>>. Acesso em: 17/03/2020.

D'AMORE, Bruno. Epistemologia, didática da matemática e práticas de ensino. **Bolema**, Rio Claro, SP, v. 20, n. 28, p. 179–205, 2007a. Disponível em: <<http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1537>>. Acesso em: 28/05/2019.

ERCOLANO, Joseph. Golden sequences of matrices with applications to fibonacci algebra. **The Fibonacci Quartely**, Halifax, v. 14, n. 5, p. 419–426, Dec. 1976. Disponível em: <<https://www.fq.math.ca/Scanned/14-5/ercolano.pdf>>. Acesso em: 17/03/2020.

ERCOLANO, Joseph. Matrix generators of pell sequences. **The Fibonacci Quartely**, Halifax, v. 17, n. 1, p. 71–77, Feb. 1979. Disponível em: <<https://www.fq.math.ca/Scanned/17-1/ercolano.pdf>>. Acesso em: 02/06/2019.

GULEC, Hasan Huseyin; TASKARA, Necati. On the (s,t)-pell and (s,t)-pell lucas sequences and their matrix representations. **Applied Mathematics Letters**, v. 25, n. 10, p. 1554–1559, Oct 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.aml.2012.01.014>>. Acesso em: 04/06/2019.

HARMAN, C. J. Complex fibonacci numbers. **The Fibonacci Quartely**, Halifax, v. 19, n. 1, p. 82–86, Feb 1981. Disponível em: <<https://www.fq.math.ca/Scanned/19-1/harman.pdf>>. Acesso em: 20/03/2020.

HEATH, Sir Thomas. **A History of Greek Mathematics**. Oxford: Clarendon Press, 1921. v. 2.

HORADAM, Alwyn Francis. Basic properties of a certain generalized sequence of numbers. **The Fibonacci Quartely**, Halifax, v. 3, n. 3, p. 161–176, Oct 1965. Disponível em: <<https://www.fq.math.ca/Scanned/3-3/horadam.pdf>>. Acesso em: 04/06/2019.

HORADAM, Alwyn Francis. Pell identities. **The Fibonacci Quartely**, Halifax, v. 9, n. 3, p. 245–263, May 1971. Disponível em: <<https://www.fq.math.ca/9-3.html>>. Acesso em: 04/06/2019.

HORADAM, Alwyn Francis. Quaternion recurrence relations. **Ulam Quartely**, v. 2, n. 2, p. 23–33, 1993. Disponível em: <<http://ulamquarterly.dyndns.org/VIEW2.2/horadam.pdf>>. Acesso em: 10/04/2020.

HORADAM, Alwyn Francis. Applications of modified pell numbers to representations. **Ulam Quartely**, Gainesville, v. 3, n. 1, p. 34–53, 1994a. Disponível em: <<http://ulamquarterly.dyndns.org/VIEW3.1/horad.pdf>>. Acesso em: 06/06/2019.

HORADAM, Alwyn Francis. Extension of a synthesis for a class of polynomial sequences. **The Fibonacci Quartely**, Halifax, v. 34, n. 1, p. 68–74, Feb 1994b. Disponível em: <<https://www.fq.math.ca/Scanned/34-1/horadam3.pdf>>. Acesso em: 06/02/2020.

HORADAM, Alwyn Francis. Jacobsthal representation numbers. **The Fibonacci Quartely**, Halifax, v. 34, n. 1, p. 40–54, Feb 1996. Disponível em: <<https://www.fq.math.ca/Scanned/34-1/horadam2.pdf>>. Acesso em: 06/06/2019.

HORADAM, Alwyn Francis. A synthesis of certain polynomial sequences. In: _____. **Applications of Fibonacci Numbers: Volume 6 Proceedings of ‘The Sixth International Research Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications’, Washington State University, Pullman, Washington, U.S.A., July 18–22, 1994**. Dordrecht: Springer Netherlands, 1996. p. 215–229. ISBN 978-94-009-0223-7. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-94-009-0223-7_18>.

HORADAM, Alwyn Francis; MAHON, J. M. Pell and pell-lucas polynomials. **The Fibonacci Quartely**, Halifax, v. 1, n. 23, p. 7–20, Feb 1985. Disponível em: <<https://www.fq.math.ca/Scanned/23-1/horadam.pdf>>. Acesso em: 04/06/2019.

JOSEPH, George Gheverghese. **The crest of the peacock: Non-european roots of mathematics**. New York: Penguin Books, 1992.

KARAASLAN, Nusret. A note on modified pell polynomials. **Aksaray University Journal of Science and Engineering**, Aksaray University, v. 3, n. 1, p. 1–7, 2019. ISSN 2587-1277. Disponível em: <<https://doi.org/10.29002/asujse.511850>>. Acesso em: 10/04/2020.

KARAASLAN, Nusret; YAĞMUR, Tülay. Gaussian (s,t)-pell and pell-lucas sequences and their matrix representations. **BEU Journal of Science**, v. 8, n. 1, p. 46–59, 2019. ISSN 2147-3188. Disponível em: <<https://doi.org/10.17798/bitlisfen.470181>>. Acesso em: 23/04/2020.

KATZ, Victor. **A history of mathematics: an introduction**. New York: Addison-Wesley, 1998. 2 ed.

KAUERS, Manuel; PAULE, Peter. **The Concrete Tetrahedron: Symbolic Sums, Recurrence Equations, Generating Functions, Asymptotic Estimates**. Verlag/Wien: Springer, 2011.

KILIC, Emrah; TASCI, Dursun. The linear algebra of the pell matrix. **Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana**, v. 11, n. 2, p. 163–174, 2005. Disponível em: <https://www.smm.org.mx/boletin_anterior/v11/n2.pdf>. Acesso em: 17/05/2020.

KILIC, Emrah; TASCI, Dursun. The generalized binet formula, representation and sums of the generalized order-k pell numbers. **TAIWANESE JOURNAL OF MATHEMATICS**, v. 10, n. 6, p. 1661–1670, 2006. Disponível em: <<https://pdfs.semanticscholar.org/78c9/0df48bac4e7d6088ea0a5106d82e885aaa2d.pdf>>. Acesso em: 17/05/2020.

KOSHY, Thomas. **Elementary number theory with applications**. Burlington: Elsevier, 2007. 2ed.

KOSHY, Thomas. Fibonacci, lucas, and pell numbers, and pascal’s triangle. **Applied Probability - MATHEMATICAL SPECTRUM**, School of Mathematics and Statistics. The University of Sheffield, Sheffield, UK, v. 43, p. 125–132, 2011. Disponível em: <<http://users.dimi.uniud.it/~giacomo.dellariccia/Table%20of%20contents/Koshy2011.pdf>>. Acesso em: 06/06/2019.

KOSHY, Thomas. **Pell and Pell–Lucas numbers with applications**. New York: Springer, 2014.

KOSHY, Thomas. **Fibonacci and Lucas numbers with applications**. Hoboken, Nova Jersey: Wiley, 2018. v. 1. 2 ed.

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2007. v. 1. 12 ed.

LIMA, Elon Lages. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

LIMA, Elon Lages *et al.* **A matemática do ensino médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2016. v. 2. 7 ed.

LIND, Douglas; MARCUS, Brian. **An Introduction To Symbolic Dynamics and Coding**. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

LUCAS, Edouard. **Théorie des nombres**. Paris: Gauthier-Villars, 1891.

MALCOLM, Noel. The publications of John Pell, f. r.s (1611 – 1685): some new light and some old confusions. **Notes and Records of the Royal Society of London**, v. 54, n. 3, p. 275–292, 2000. Disponível em: <<http://rsnr.royalsocietypublishing.org/content/roynotesrec/54/3/275.full.pdf>>. Acesso em: 06/06/2019.

MANSOUR, Toufik. A formula for the generating functions of powers of horadam's sequence. **AUSTRALASIAN JOURNAL OF COMBINATORICS**, v. 30, p. 207–212, 2004. Disponível em: <https://ajc.maths.uq.edu.au/pdf/30/ajc_v30_p207.pdf>. Acesso em: 20/01/2020.

MARGOLINAS, Clarire. Connaissance et savoir. des distinctions frontalières? **Sociologie et didactiques: vers une transgression des frontières**, p. 17–44, 2012. Acesso em: 05/05/2020.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti. **O Conhecimento Matemático do Professor: formação na licenciatura e prática docente na escola básica**. Out. 2004. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Out. 2004. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/1843/EABA-6ABMUH>>. Acesso em: 15/01/2020.

PEREIRA, Livia da Cás; FERREIRA, Marcio Violante. Sequência de fibonacci: história, propriedades e relações com a razão áurea. **Disciplinarum Scientia Ciências Naturais e Tecnológicas**, Santa Maria, v. 9, n. 1, p. 67–81, 2008. Disponível em: <<https://www.periodicos.ufn.edu.br/index.php/disciplinarumNT/article/view/1236>>. Acesso em: 07/06/2019.

PERRENOUD, Philippe. La transposition didactique à partir de pratiques : des savoirs aux compétences. **Revue des sciences de l'éducation**, v. 24, n. 3, p. 487–514, 1998. Disponível em: <<https://id.erudit.org/iderudit/031969ar>>. Acesso em: 17/01/2020.

SZYNAL-LIANA, Anetta; WŁOCH, Iwona. The pell quaternions and the pell octonions. **Advanced. Applied Clifford Algebras**, n. 26, p. 435–440, 2016. Acesso em: 25/04/2020.

VINAGRE, Fátima. Quase-cristais e números metálicos. **Gazeta de Matemática**, n. 179, p. 14–25, 2016. Disponível em: <<http://gazeta.spm.pt/fichaartigo?id=1364>>. Acesso em: 10/06/2019.

WANI, Arfat Ahmad *et al.* Generalized fibonacci and k-pell matrix sequences. **Journal of Mathematics**, v. 51, n. 1, p. 17–28, 2019. ISSN 1016-2526. Disponível em: <<https://pdfs.semanticscholar.org/e8f0/442e62ddad4568c20ca86cfc8e46c3be9793.pdf>>. Acesso em: 15/04/2020.

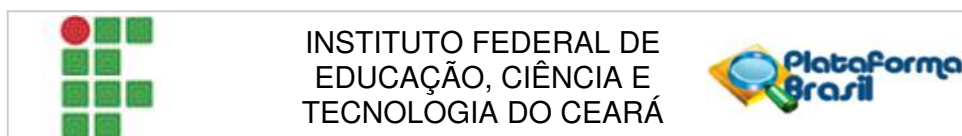
WHITNEY, Raymond E. Advanced problems and solutions. **The Fibonacci Quartely**, Halifax, v. 23, n. 1, p. 89–96, Feb 1985. Disponível em: <<https://www.fq.math.ca/Scanned/23-1/advanced23-1.pdf>>. Acesso em: 10/06/2019.

WILF, Herbert Saul. **Generatingfunctionology**. San Diego, Californi: Academic Press, 1994. 2 ed.

ÇIMEN, Cennet; İPEK, Ahmed. On pell quaternions and pell-lucas quaternions. **Advanced. Applied Clifford Algebras**, n. 26, p. 39–51, 2016. Acesso em: 25/04/2020.

ČERIN, Zvonko; GIANELLA, Gian Mario. On sums of squares of pell-lucas numbers. **Integers: eletronic journal of combinatorial number theory**, v. 6, 2006. ISSN 1553–1732. Disponível em: <<https://www.emis.de/journals/INTEGERS/papers/g15/g15.pdf>>. Acesso em: 22/05/2019.

ANEXO A – PARECER DO COMITÊ DE ÉTICA



PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: ENGENHARIA DIDÁTICA SOBRE O ENSINO DA SEQUÊNCIA DE PELL E MODELOS DE GENERALIZAÇÃO

Pesquisador: WEDSON FRANCELINO RIBEIRO NORONHA

Área Temática:

Versão: 1

CAAE: 08935319.9.0000.5589

Instituição Proponente: INSTITUTO FEDERAL DE EDUCACAO, CIENCIA E TECNOLOGIA DO CEARA

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 3.203.365

Apresentação do Projeto:

Este projeto de pesquisa se estrutura pelas diretrizes da Engenharia Didática, tendo como título "ENGENHARIA DIDÁTICA SOBRE O ENSINO DA SEQUÊNCIA DE PELL E MODELOS DE GENERALIZAÇÃO". Áreas de conhecimento: Ciências Exatas e da Terra e Ciências Humanas. Trata-se de uma intervenção experimental baseada na Teoria das Situações Didáticas, orientada pela Engenharia Didática. Número de participantes, 8. Público alvo: alunos da disciplina história da matemática, do curso de Licenciatura em Matemática do IFCE - Campus de Fortaleza.

Objetivo da Pesquisa:

Averiguar os comportamentos e obstáculos epistemológicos surgidos a partir da aplicação das situações didáticas projetadas para o ensino da sequência de Pell e seus modelos de generalização, comparando-as com as previsões iniciais.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

A pesquisadora aponta possíveis riscos, possibilidade de desmotivação em relação ao assunto abordado ou propagação de descrença acerca da metodologia utilizado para o ensino. Os alunos também podem considerar que o experimento constituiu uso inapropriado de tempo docente, ocasionando prejuízos de ordem moral ao ensino de matemática e ao assunto que se deseja ensinar, resultando em possíveis bloqueios psicológicos para com tais temas. Caso ocorram tais efeitos, poderemos considerar o experimento como parcialmente ou totalmente falho.

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703

Bairro: Jardim América

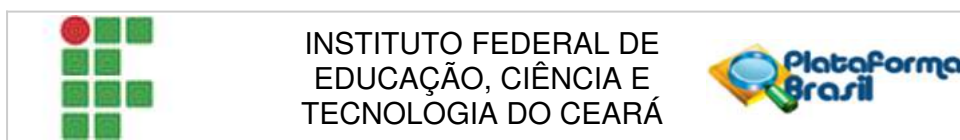
UF: CE

Município: FORTALEZA

Telefone: (85)3401-2332

CEP: 60.410-426

E-mail: cep@ifce.edu.br



Continuação do Parecer: 3.203.365

Benefícios:

Esta pesquisa procurar realizar uma contribuição incremental ao conhecimento relativo ao ensino de tópicos de história da matemática e teoria dos números, utilizando como catalisador o objeto matemático conhecido por sequência de Pell. Esta sequência numérica em particular possui interessantes conexões com diversas áreas da matemática pura e aplicada, caracterizando um interessante ponto de partida para o ensino de diversos tópicos matemáticos. Ao participar dessa pesquisa, os participantes estarão colaborando tanto para uma melhor compreensão dos aspectos relativos ao ensino de matemática para professores em formação inicial, como também terão a oportunidade de apreender conhecimentos poucos abordados nos cursos de licenciatura, enriquecendo assim a própria formação profissional.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

Acompanhamento e assistência:

O acompanhamento será dado especificamente de ordem didático/pedagógico decorrente de eventuais dificuldades surgidas na aula será efetuado preferencialmente no lócus da aula e durante a mesma, se restringindo a dificuldades relativas ao processo de ensino dos assuntos que serão abordados. Alternativamente, caso se mostre conveniente ou necessário, os pesquisadores poderão oferecer suporte a distância, através do uso de tecnologias digitais de comunicação. Haverá também ressarcimento e indenização ao participante.

O pesquisador declara conhecer e cumprir as orientações e determinações fixadas na Resolução n. 466/12 de 12/12/2012 (no item 10 da seção X3 do capítulo X) e Resolução n. 510 de 07 de abril de 2016 (artigo 28, inciso I, do capítulo VI) e Norma operacional n. 001/2013, disponível pelo CNS/CEP/IFCE. Também declara compromisso e garantia dos benefícios da pesquisa.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

Contempla todos os termos exigidos pelo CEP/CONEP.

Recomendações:

Sem recomendações.

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

Aprovado.

Considerações Finais a critério do CEP:

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703

Bairro: Jardim América

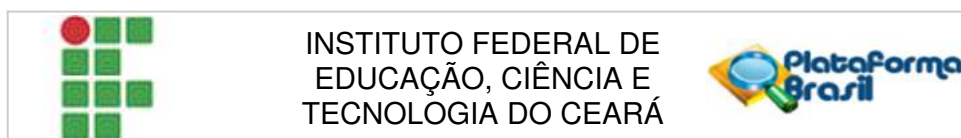
UF: CE

Município: FORTALEZA

Telefone: (85)3401-2332

CEP: 60.410-426

E-mail: cep@ifce.edu.br



Continuação do Parecer: 3.203.365

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_1306416.pdf	01/03/2019 17:08:50		Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	Projeto_Wedson_Pell.pdf	01/03/2019 17:08:10	WEDSON FRANCELINO RIBEIRO NORONHA	Aceito
Cronograma	cronograma.pdf	01/03/2019 17:07:20	WEDSON FRANCELINO RIBEIRO NORONHA	Aceito
Outros	Questionarios.pdf	27/02/2019 11:58:36	WEDSON FRANCELINO RIBEIRO NORONHA	Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	infraestrutura.pdf	27/02/2019 11:57:40	WEDSON FRANCELINO RIBEIRO NORONHA	Aceito
Orçamento	orcamento.pdf	27/02/2019 11:57:07	WEDSON FRANCELINO RIBEIRO NORONHA	Aceito
Declaração de Pesquisadores	Apres_result.pdf	27/02/2019 11:45:09	WEDSON FRANCELINO RIBEIRO NORONHA	Aceito
Declaração de Pesquisadores	regress_pesq.pdf	27/02/2019 11:44:42	WEDSON FRANCELINO RIBEIRO NORONHA	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE.pdf	27/02/2019 11:44:16	WEDSON FRANCELINO RIBEIRO NORONHA	Aceito
Folha de Rosto	Folha_de_rosto.pdf	27/02/2019 11:43:50	WEDSON FRANCELINO RIBEIRO NORONHA	Aceito

Situação do Parecer:

Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:

Não

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703

Bairro: Jardim América

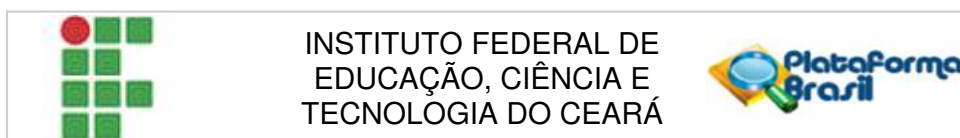
UF: CE

Município: FORTALEZA

Telefone: (85)3401-2332

CEP: 60.410-426

E-mail: cep@ifce.edu.br



Continuação do Parecer: 3.203.365

FORTALEZA, 16 de Março de 2019

Assinado por:
PAULO HENRIQUE NOBRE PARENTE
(Coordenador(a))

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703

Bairro: Jardim América

CEP: 60.410-426

UF: CE

Município: FORTALEZA

Telefone: (85)3401-2332

E-mail: cep@ifce.edu.br

ANEXO B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO



TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Engenharia Didática sobre o ensino da sequência de Pell e modelos de generalização.

Prof. Esp. Wedson Francelino Ribeiro Noronha

Você está sendo convidado a participar como voluntário de uma pesquisa. Este documento, chamado Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, visa assegurar seus direitos como participante e é elaborado em duas vias, uma que deverá ficar com você e outra com o pesquisador.

Por favor, leia com atenção e calma, aproveitando para esclarecer suas dúvidas. Se houver perguntas antes ou mesmo depois de assiná-lo, você poderá esclarecê-las com o pesquisador. Se preferir, pode levar este Termo para casa e consultar seus familiares ou outras pessoas antes de decidir participar. Não haverá nenhum tipo de penalização ou prejuízo se você não aceitar participar ou retirar sua autorização em qualquer momento.

Justificativa e objetivos:

Desejamos investigar, via Engenharia Didática, metodologia de pesquisa em Didática da Matemática, os procedimentos e categorias manifestadas pelos alunos durante o ensino da sequência de Pell e suas diversas manifestações. Recorrências lineares e sequências numéricas são tópicos pouco abordados tanto nos cursos de licenciatura em matemática quanto no ensino básico. No entanto, acreditamos que dada a riqueza de inter-relações internas e externas a matemática, manifestadas por tal objeto matemático (sequência de Pell, sequência numérica definida classicamente via recorrência linear de 2º ordem), que o mesmo se configura em uma ótima oportunidade para o ensino e fomento da cultura matemática em sala de aula, tanto no contexto de formação inicial de professores, nos cursos de licenciatura, quanto na educação básica.

- **Objetivo primário:**

Averiguar os comportamentos e obstáculos epistemológicos surgidos a partir da aplicação das situações didáticas projetadas para o ensino da sequência de Pell e seus modelos de generalização, comparando-as com as previsões iniciais.

- **Objetivos Secundários:**

- Identificar possíveis percursos metodológicos para o ensino da sequência de Pell e seus modelos de generalização;
- Examinar se a estrutura axiomática e epistemológica natural do objeto matemático: sequência de Pell, bem como seus diversos modelos de generalização, com o objetivo de identificar as necessidades de procedimentos de transposição didática ao longo do desenvolvimento do assunto proposto.

Rubrica do pesquisador: _____

Rubrica do participante: _____

**Procedimentos:**

Participando do estudo você está sendo convidado a: assistir e participar ativamente da aula, sendo constantemente convidado a responder os problemas e desafios propostos em aula, por meio de questionários impressos e/ou exposição em quadro branco.

Observações:

- Solicitamos que os alunos participantes mantenham o máximo de assiduidade e pontualidade possível, atentando para o horário normal de aulas. Faltas frequentes ou atrasos podem comprometer os trabalhos em sala de aula, a coleta de dados ou mesmo a aprendizagem dos participantes.
- Eventualmente, sob permissão expressa dos participantes, realizaremos coleta de imagem e áudio via equipamentos eletrônico apropriado (celular, câmera fotográfica ou de vídeo, gravador de áudio), com o intuito de auxiliar e fundamentar a análise dos exercícios e problemas presentes nos questionários impressos.

Desconfortos e riscos:

Como possíveis riscos, temos a possibilidade de desmotivação em relação ao assunto abordado ou propagação de descrença acerca da metodologia utilizado para o ensino. Os alunos também podem considerar que o experimento constituiu uso inapropriado de tempo docente, ocasionando prejuízos de ordem moral ao ensino de matemática e ao assunto que se deseja ensinar, resultando em possíveis bloqueios psicológicos para com tais temas. Caso ocorram tais efeitos, poderemos considerar o experimento como parcialmente ou totalmente falho.

Benefícios:

Esta pesquisa procurar realizar uma contribuição incremental ao conhecimento relativo ao ensino de tópicos de história da matemática e teoria dos números, utilizando como catalisador o objeto matemático conhecido por sequência de Pell. Esta sequência numérica em particular possui interessantes conexões com diversas áreas da matemática pura e aplicada, caracterizando um interessante ponto de partida para o ensino de diversos tópicos matemáticos. Ao participar dessa pesquisa, os participantes estarão colaborando tanto para uma melhor compreensão dos aspectos relativos ao ensino de matemática para professores em formação inicial, como também terão a oportunidade de apreender conhecimentos poucos abordados nos cursos de licenciatura, enriquecendo assim a própria formação profissional.

Acompanhamento e assistência:

O acompanhamento didático/pedagógico decorrente de eventuais dificuldades surgidas na aula será efetuado preferencialmente no lócus da aula e durante a mesma, se restringindo a dificuldades relativas ao processo de ensino dos assuntos que serão abordados. Alternativamente, caso se mostre conveniente ou necessário, os pesquisadores poderão oferecer suporte a distância, através do uso de tecnologias digitais de comunicação.

Rubrica do pesquisador: _____

Rubrica do participante: _____


Sigilo e privacidade:

Você tem a garantia de que sua identidade será mantida em sigilo e nenhuma informação será dada a outras pessoas que não façam parte da equipe de pesquisadores. Na divulgação dos resultados desse estudo, seu nome não será citado e informações contendo imagens e áudio serão devidamente tratadas para evitar identificação.

Ressarcimento e Indenização:

Você terá direito ao ressarcimento das despesas diretamente *decorrentes* de sua participação na pesquisa e à indenização pelos danos resultantes desta, nos termos da Lei.

Contato:

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, você poderá entrar em contato com o pesquisador Prof. Esp. Wedson Francelino Ribeiro Noronha, Sampaio, Av. Treze de Maio, 2081 - Benfica, Fortaleza - CE, 60040-531, Coordenação do Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciência e Matemática (PGECEM), sala 141, fone (88) 9.9648.3313, e-mail: tadpnrdd@gmail.com.

Em caso de denúncias ou reclamações sobre sua participação e sobre questões éticas do estudo, você poderá entrar em contato com a secretaria do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) do IFCE das 08:00hs às 12:00hs e das 13:00hs às 17:00hs no IFCE Reitoria - R. Jorge Dumar, 1703 - Jardim América, Fortaleza - CE, 60410-426; fone (85) 34012332 e-mail: cep@ifce.edu.br.

Consentimento livre e esclarecido:

Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais riscos e o incômodo que esta possa acarretar, aceito participar e declaro estar recebendo uma via original deste documento assinada pelo pesquisador e por mim, tendo todas as folhas por nós rubricadas:

Nome do(a) participante:

e-mail (opcional):

(Assinatura do participante ou nome e assinatura do seu RESPONSÁVEL LEGAL)

Data: ____/____/____.

Responsabilidade do Pesquisador:

Rubrica do pesquisador: _____

Rubrica do participante: _____



Asseguro ter cumprido as exigências da resolução 466/2012 CNS/MS e complementares na elaboração do protocolo e na obtenção deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Asseguro, também, ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Informo que o estudo foi aprovado pelo CEP perante o qual o projeto foi apresentado e pela CONEP, quando pertinente. Comprometo-me a utilizar o material e os dados obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

Prof. Esp Wedson Francelino Ribeiro Noronha

Data: ____/____/____.

Rubrica do pesquisador: _____

Rubrica do participante: _____

**ANEXO C – PUD DA DISCIPLINA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA -
COMPONENTE CURRICULAR DO CURSO DE LICENCIATURA EM
MATEMÁTICA DO IFCE, *CAMPUS Fortaleza***



PROGRAMA DE UNIDADE DIDÁTICA – PUD

DISCIPLINA: HISTÓRIA DA MATEMÁTICA	
Carga Horária Total: 80 h	Teórica: 70 h Prática Como Componente Curricular: 10 h
Número de Créditos:	4
Código pré-requisito:	Geo Plana e Cons. Geom, Cálculo II e Teoria dos Números
Semestre:	6º
Nível:	Graduação
EMENTA	
Estudo do conceito, desenvolvimento histórico e representações do número. O desenvolvimento da Matemática nas diversas civilizações ao longo da história. Vida obra e contexto histórico dos principais matemáticos e suas contribuições para o desenvolvimento da Matemática. História da Matemática no Brasil.	
OBJETIVO	
- Levar o aluno a compreender o desenvolvimento da Matemática de acordo com o contexto histórico e social e fazer conexões com as metodologias de ensino e propostas curriculares; - Conhecer os principais matemáticos e suas principais contribuições no desenvolvimento do conhecimento matemático ao longo da história; - Utilizar o conhecimento da História da Matemática para aprimorar o ensino de forma crítica e contextualizada; - Entender o desenvolvimento da História da Matemática no Brasil.	
PROGRAMA	
1. O conceito de número e os sistemas de numeração. 2. O desenvolvimento histórico da álgebra, Geometria e Aritmética nas diferentes épocas e civilizações. 3. Principais matemáticos da história e suas contribuições para o desenvolvimento da Matemática. 4. História da Matemática no Brasil.	
METODOLOGIA DE ENSINO	
Aulas expositivas, seminários, debates, apresentação de vídeos e pesquisa.	
AVALIAÇÃO	
Provas, trabalhos, seminários e avaliação contínua.	
BIBLIOGRAFIA BÁSICA	
- EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. Campinas-SP: Editora Unicamp, 2004. - BOYER, Carl B. História da Matemática. 2ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006. - D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Uma História Concisa da Matemática no Brasil. Petrópolis-RJ: Vozes, 2008.	
BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR	
- MENDES, I. A. O uso da História no Ensino da Matemática: reflexões teóricas e experiências. Belém: EDUEPA, 2001. - MIGUEL, Antônio <i>et. al.</i> História da Matemática em Atividades Didáticas. São Paulo: Livraria da Física Editora, 2009.	

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIOS



A sequência de Pell e aplicações

Aula 01 – Sequência de Pell: fatos elementares e generalização para índice inteiro.

Prof. Wedson Francelino

Aluno:

Data:

Na antiguidade, já se conheciam inúmeras aproximações e técnicas de cálculo para $\sqrt{n}$ e $\sqrt[3]{n}$, n natural. As aproximações a $\sqrt{2}$ são, em particular, bastante citadas como curiosidade e exemplo histórico dessas aproximações. Exemplo dessas aproximações a $\sqrt{2}$ são $\frac{17}{12}$ e $\frac{577}{408}$. *Theon de Alexandria*, sábio grego, formalizou os processos de aproximações racionais com o seguinte processo:

Definição: Dadas as sequências v_n e q_n , com $n \in \mathbb{N}$, chamamos de **escada de Theon** a recursão:

$$\begin{aligned} v_n &= v_{n-1} + q_{n-1} \\ q_n &= v_{n-1} + v_n \end{aligned}$$

com $v_1 = q_1 = 1$.

Atividade:

1. Calcule os 10 primeiros Termos das sequencias v_n e q_n . Calcule também os 10 primeiros termos da sequencia $t_n = q_n/v_n$.
2. Existe algum padrão numérico para as sequências v_n e q_n ? Se sim, as redefina de modo a explicitar esse padrão. É possível definir tais sequências a partir de $n=0$?
3. Observando o que já sabemos, é possível refazer as duas questões anteriores considerando valores negativos para n , ou seja $n \in \mathbb{Z}$? Caso seja possível, tente encontrar uma relação entre termos de valores positivos e negativos.
4. O que acontece quando calculamos $\beta_n = q_{n+1}/q_n$, para $n \in \{1, \dots, 10\}$? E quando calculamos $\alpha_n = v_{n+1}/v_n$, para $n \in \{1, \dots, 10\}$? β_n e α_n exibem algum padrão quando $n \in \{-10, \dots, -1\}$? Existem β_0 ou α_0 ?



A sequência de Pell e aplicações

Aula 02 – Fórmula de Binet e generalização de coeficientes da recorrência.

Prof. Wedson Francelino

Aluno:

Data:

Hoje vamos explorar outras possíveis relações entre os valores da sequência de Pell. Por exemplo, será que existe uma maneira de representar P_{m+n} em termos de P_n e P_m ? Existe alguma fórmula para a soma dos n primeiros P_n ? Que relações podemos encontrar ao explorarmos quadrados e cubos de Pell (P_n^2 e P_n^3)? Tente encontrar o máximo de relações interessantes entre os valores da sequência de Pell.

Sempre que possível, demonstre as relações que encontrar. Caso encontre dificuldades, tente mesmo assim justificar da melhor forma que você conseguir.

Muitas dessas relações, além de belas, podem ser utilizadas para simplificar cálculos ou permitir o acesso a novas propriedades envolvendo os números de Pell. Portanto, quaisquer relações

n	P_n	n	P_n
0	0	16	470832
1	1	17	1136689
2	2	18	2744210
3	5	19	6625109
4	12	20	15994428
5	29	21	38613965
6	70	22	93222358
7	169	23	225058681
8	408	24	543339720
9	985	25	1311738121
10	2378	26	3166815962
11	5741	27	7645370045
12	13860	28	18457556052
13	33461	29	44560482149
14	80782	30	107578520350
15	195025	31	259717522849

ou fórmulas (ou candidatas à) pode a vir ser muito úteis no futuro. Lembrem também de observar se há alguma relação envolvendo α e β .

Observe que, na tabela ao lado, presente na atividade para ajudar, exibimos apenas os 30 primeiros valores positivos. No entanto, já sabemos calcular valores da sequência de Pell para índices negativos. Considere-os em seus cálculos.

Observando tudo o que já fizemos e todas as propriedades que obtivemos, você acha possível encontrar alguma equação que permita obter p_n de forma a não depender dos termos anteriores? Se não, porque você acha que não é possível. Se sim, explicita a equação e alguns termos calculados.



A sequência de Pell e aplicações

Aula 03 – Representações matriciais e propriedades numéricas.

Prof. Wedson Francelino

Aluno:

Data:

Discutimos inúmeras propriedades interessantes. Agora é hora de propor outros modelos de apresentação para a *sequência de Pell*. Vamos nos concentrar inicialmente nos modelos matriciais

Lembrando que os termos iniciais da *sequência de Pell* são:

n	0	1	2	3	4	5	6	8	9	10	11	12
p_n	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	5741

Atividade:

- Queremos saber se é possível montar um esquema matricial para representar a sequência de Pell, ou seja, será que a partir de uma matriz inicial P_n , 2×2 , é possível “fazer aparecer” os todos os números da sequência de Pell, sob uma operação recursiva. Por exemplo, dada a matriz $M_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, podemos conceber as recursões:

$$M_n = 3M_{n-1} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou

$$M_n = 5M_1 \cdot M_{n-1}$$

Que resultam em duas sequências distintas de matrizes. No entanto, nenhuma das duas apresenta os termos da *sequência de Pell* como esperávamos. É possível encontrar uma matriz inicial M_1 e uma recursão que forneça os termos da sequência de Pell? Essa recursão, caso exista, pode substituir a definição original?



A sequência de Pell e aplicações

Aula 04 – Modelo polinomial.

Prof. Wedson Francelino

Aluno:

Data:

Nosso objetivo é discutir a possibilidade de uma representação da sequência de Pell, via polinômios.

É sempre útil lembrar de alguns termos da *sequência de Pell*:

n	0	1	2	3	4	5	6	8	9	10	11	12
P_n	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	5741

Definimos como polinômios de Pell a recorrência:

$$P_{n+2} = 2 \times P_{n+1} + P_n$$

$$P_1 = 1, P_0 = 0.$$

Atividades:

1. Calcule alguns termos da recorrência acima. Observando os resultados, que relação esses polinômios possuem com a sequência de Pell?
2. Será que existe alguma equação característica para os polinômios de Pell, tal qual a sequência de Pell? Se existe tal equação, quais propriedades possuem as raízes dessa equação?
3. Será que existe uma fórmula de Binet relacionada aos polinômios de Pell? Será que existem propriedades numéricas equivalentes aos da sequência de Pell para os polinômios de Pell

Lembre-se que todas as suas afirmações devem ser bem justificadas e demonstradas, de algum modo.