

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

Renata Passos Machado Vieira

**Engenharia Didática (ED): o caso da Generalização e Complexificação da
Sequência de Padovan ou Cordonnier**

Fortaleza – CE

08 de outubro de 2020

Renata Passos Machado Vieira

**Engenharia Didática (ED): o caso da Generalização e
Complexificação da Sequência de Padovan ou Cordonnier**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Linha de Pesquisa: Ensino de Matemática

Orientador: Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Coorientador: Dra. Paula Maria Machado Cruz Catarino

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECM)

Fortaleza – CE

08 de outubro de 2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal do Ceará - IFCE
Sistema de Bibliotecas - SIBI
Ficha catalográfica elaborada pelo SIBI/IFCE, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- V657e Vieira, Renata Passos Machado.
 Engenharia Didática (ED) : o caso da Generalização e Complexificação da Sequência de Padovan ou
 Cordonnier / Renata Passos Machado Vieira. - 2020.
 266 f. : il. color.
- Dissertação (Mestrado) - Instituto Federal do Ceará, Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática,
 Campus Fortaleza, 2020.
 Orientação: Prof. Dr. Francisco Regis Vieira Alves.
 Coorientação: Prof. Dr. Paula Maria Machado Cruz Catarino.
1. Complexificação. 2. Engenharia Didática. 3. Generalização. 4. Sequência de Padovan. 5. Teoria das
 Situações Didáticas. I. Título.

CDD 510.07



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIA MATEMÁTICA (PGECM)

Aos 8 dias do mês de Outubro do ano de 2020, às 9h30 no através de videoconferência pelo link meet.google.com/pqy-txov-gym, realizou-se a Defesa de dissertação, intitulada "**ENGENHARIA DIDÁTICA (ED): O CASO DA GENERALIZAÇÃO E COMPLEXIFICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE PADOVAN OU CORDONNIER**", de autoria da candidata **RENATA PASSOS MACHADO VIEIRA**, aluna do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PGCEM/IFCE, em nível de Mestrado. A Comissão Examinadora esteve constituída pelos professores: **Prof. Dr. Francisco Regis Vieira Alves**, Presidente, **Profa. Dra. Paula Maria Machado Cruz Catarino** – UTAD, Co-orientadora, **Profa. Dra. Anabela Maria Ferreira Borges Varela Rodrigues** – UTAD, **Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira** - URCA, **Prof. Dr. Eurípedes de Carvalho da Silva** - IFCE e **Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes** – UVA. Concluídos os trabalhos de apresentação e arguição, a candidata foi **APROVADA** pela Comissão Examinadora. Foi concedido um prazo de 90(noventa) dias, para a candidata efetuar as correções sugeridas pela Comissão Examinadora e apresentar o trabalho em sua redação definitiva, sob pena de não expedição do Diploma. E, para constar, foi lavrada a presente ata, que vai assinada pelos membros da Comissão.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Francisco Regis Vieira Alves, Presidente

Profa Dra. Paula Maria Machado Cruz Catarino (UTADPortugal)

Profa. Dra. Anabela Maria Ferreira Borges Varela Rodrigues - UTAD - Portugal

Prof. Dr. Eurípedes Carvalho da Silva - IFCE

Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira - URCA

Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes – UVA

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: ENGENHARIA DIDÁTICA (ED): O CASO DA GENERALIZAÇÃO E COMPLEXIFICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE PADOVAN OU CORDONNIER

LOCAL: link meet.google.com/pqy-txov-gym

HORA DE INÍCIO: **9h30**

Em sessão pública, após exposição de cerca de 30 (trinta) minutos, a candidata foi arguida oralmente pelos membros da banca tendo como resultado:

() APROVADO, devendo a candidata entregar a versão final no prazo máximo de 90 dias.

(X) APROVADO com louvor.

() APROVAÇÃO CONDICIONAL, devendo a candidata satisfazer, no prazo máximo de 90 dias, às exigências listadas na Folha de Modificações de Dissertação de Mestrado anexa à presente ata.

() REPROVADO.

Na forma regulamentar foi lavrada a presente ata que é abaixo assinada pelos membros da banca, na ordem acima determinada, e pela candidata:

Prof. Dr. Francisco Regis Vieira Alves

Profa Dra. Paula Maria Machado Cruz Catarino

Profa. Dra. Anabela Maria Ferreira Borges Varela Rodrigues

Prof. Dr. Eurípedes Carvalho da Silva

Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira

Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes

Candidata: **RENATA PASSOS MACHADO VIEIRA**



Documento assinado eletronicamente por **Daniel Brandão Menezes, Usuário Externo**, em 09/10/2020, às 16:45, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Paula Maria Machado Cruz Catarino, Usuário Externo**, em 09/10/2020, às 17:07, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Paulo César Cavalcante de Oliveira, Usuário Externo**, em 10/10/2020, às 08:42, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Renata Passos Machado Vieira, Usuário Externo**, em 11/10/2020, às 16:14, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Anabela Maria Ferreira Borges Varela Rodrigues, Usuário Externo**, em 12/10/2020, às 09:14, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Euripedes Carvalho da Silva, Professor do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico**, em 13/10/2020, às 10:15, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Francisco Regis Vieira Alves, Professor do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico**, em 13/10/2020, às 15:04, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade do documento pode ser conferida no site https://sei.ifce.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0 informando o código verificador **2051354**



e o código CRC **AB45BFA0**.

*Este trabalho é dedicado a Deus, Nossa Senhora Mãe Rainha,
minha mãe e minha tia Bia, por serem os meus alicerces.*

AGRADECIMENTOS

A Deus e a Nossa Senhora Mãe Rainha, pela dádiva da vida e por eu ter alcançado mais uma conquista. Agradeço por me guiarem, darem forças e serem meus alicerces em todos os momentos da minha vida, principalmente nos momentos mais difíceis.

A minha querida e amada mãe Regina (*in memoriam*), por ter sido em minha vida um exemplo de mãe e de mulher. Obrigada por todas as orações, ensinamentos, por todo o amor, formação e dedicação em sua vida terrestre para comigo. Eu só posso agradecer a Deus, por ter me presenteado com uma mãe tão maravilhosa aqui na terra, mesmo tendo cumprido a sua missão de forma rápida. Hoje sinto que você está no céu, vibrando com mais esta conquista e me dando forças para seguir.

A minha querida tia Bia (*in memoriam*), por ter sido uma segunda mãe para mim aqui na terra, oferecendo todo o seu amor, carinho e oração, tornando-me mais tranquila nos momentos de aflição. A minha eterna gratidão por ter feito parte da minha vida e, ter contribuído bastante para a minha formação como pessoa. Tenho a certeza de que você está também fazendo uma festa no céu por mais esta conquista.

Aos meus familiares, pela compreensão nas ausências nas reuniões familiares. De forma especial, ao meu pai e a minha irmã, por terem me apoiado em todos os momentos, não deixando faltar o carinho e a união.

Ao meu esposo, por todo o amor, compreensão e apoio nos momentos difíceis desta trajetória. Obrigada por permanecer ao meu lado, mesmo quando houve falta de atenção e carinho, pudemos permanecer unidos e com muito amor. Agradeço por todas as contribuições e parceria em todos os momentos.

Ao Professor Doutor Francisco Regis Vieira Alves, pela orientação, competência e paciência. Agradeço por acreditar em mim e pelos elogios e incentivos, tendo a certeza de que eu não alcançaria esta conquista sem o seu apoio e ensinamentos. Agradeço ainda a sua dedicação, que o fez, em muitos momentos, deixar de lado os seus momentos de descanso, para me auxiliar e orientar.

A professora Doutora Paula Maria Machado Cruz Catarino, pela coorientação, contribuição e ensinamentos durante o desenvolvimento desse projeto. Mesmo com a distância, foi capaz de contribuir significativamente para a realização desta pesquisa.

Aos membros da banca examinadora, que tão gentilmente aceitaram participar e colaborar com esta dissertação.

A Secretaria de Educação do Estado do Ceará, pelo incentivo à formação profissional, permitindo o meu afastamento para o presente estudo.

Aos meus colegas de mestrado e, de forma especial, Alison da Silva, Arianny Lira, Cícera Fernandes, Evamar Barros, Gleison da Silva, Hedyleno Bezerra, Milena Carolina, Rosalide de Sousa, pelas leituras, discussões, estudos e questionamentos sempre produtivos. Por fim, gratidão a todos que contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização desta dissertação.

“O que sabemos é uma gota; o que ignoramos é um oceano.”
(Isaac Newton)

RESUMO

O presente trabalho retrata uma investigação referente às situações de ensino, sobre o estudo do processo de generalização e complexificação da sequência de Padovan. Com isso, a pesquisa possui o viés de descrever os elementos de um estudo sistemático dos modelos de generalização e complexificação da sequência de Padovan, promovendo a compreensão histórico-evolutiva, identificação, descrição e exploração de suas propriedades matemáticas, fundamentado e organizado de acordo com o percurso metodológico da Engenharia Didática em conjunto com a Teoria das Situações Didáticas. Assim, são desenvolvidas situações didáticas, realizando uma transposição didática do objeto matemático, considerando os seus aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos. À vista disso, uma análise primordial do campo epistêmico-matemático é realizada abordando o processo de generalização dos coeficientes, ordem e termos iniciais da sequência, bem como a sua extensão para os números inteiros. A complexificação foi realizada inserindo componentes imaginárias e, consequentemente, o aumento dimensional da recorrência, sendo exploradas as relações recorrentes uni, bi, tri e n -dimensionais, os números duais, gaussianos, quatérnios, octônios e sedenios de Padovan. Foram desenvolvidas situações de ensino com enfoque na Teoria das Situações Didáticas e aplicadas com os oito discentes matriculados na disciplina de História da Matemática do curso de Licenciatura em Matemática no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará. Essas situações instigam o pensamento intuitivo dos discentes, visando a compreensão de determinadas propriedades e teoremas no processo de generalização e complexificação, com ênfase na sua abordagem matricial para os números inteiros, sequência $(s_1, s_2, \dots, s_{z-1})$ -Z-dovan, fórmula variante de Binet, relações recorrentes n -dimensionais, números gaussianos e quatérnios. Desse modo, foi possível promover o desenvolvimento de uma concepção epistemológica para o ensino de História da Matemática, oportunizando aos docentes de Matemática em cursos de formação inicial de professores, relações epistemológicas matemáticas de Padovan, evidenciando o processo evolutivo diante da perspectiva histórica e matemática.

Palavras-chave: Complexificação. Engenharia Didática. Generalização. Sequência de Padovan. Teoria das Situações Didáticas.

ABSTRACT

The present work presents an investigation regarding teaching situations of the Padovan Sequence generalization and complexification process study. With that, the research has the intention of describing the elements of a systematic study of the generalization and complexification models of Padovan Sequence, promoting the understanding historical-evolutionary, identification, description and exploration of its mathematical properties, based and organized according to the methodological path of Didactic Engineering together with the Theory of Didactic Situations. Thus, didactic situations are developed, carrying out a didactic transposition of the mathematical object, considering its epistemological, cognitive and didactic aspects. In view of that, a primordial analysis of the epistemic-mathematical field is carried out addressing the coefficients process of generalization, order and initial sequence terms, as well as its extension to the whole numbers. The complexification was carried out by inserting imaginary components and, consequently, the dimensional increase in recurrence, exploring the recurrent uni, bi, tri and n -dimensional relations, the dual, gaussian, quaternions, octonions and sedenions numbers of Padovan. Teaching situations with a focus on Theory of Didactic Situations were developed and applied with the eight students' enrolled in the History of Mathematics course of the Mathematics Degree course at the Federal Institute of Education, Science and Technology of the State of Ceará. These situations instigate the students' intuitive thinking, aiming at understanding certain properties and theorems in the generalization and complexification process, with emphasis on their matrix approach to integers, Sequence $(s_1, s_2, \dots, s_{z-1})$ -Z-dovan, Binet's variant formula, recurrent n -dimensional relations, gaussian numbers and quaternions. It was possible, to promote the development of an epistemological conception for the teaching of the History of Mathematics, providing mathematics teachers in initial teacher training courses, mathematical epistemological relations of Padovan, evidencing the evolutionary process before the historical and mathematical perspective.

Keywords: Complexification. Didactic Engineering. Generalization. Sequence of Padovan. Theory of Didactic Situations

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Triângulo didático das relações entre professor-aluno-saber.	40
Figura 2 – Saber e conhecimento.	43
Figura 3 – Divisão dos segmentos para obtenção do número plástico.	50
Figura 4 – Interior da igreja da abadia “Sint Benedictusberg” em Vaals, Holanda, construída seguindo os princípios arquiteturais de Dom Van der Laan baseados no número plástico.	52
Figura 5 – Gérard Cordonnier.	54
Figura 6 – Espiral de Padovan 2D.	55
Figura 7 – Espirais de Padovan.	55
Figura 8 – Triângulo de Pascal de Padovan.	56
Figura 9 – Desenvolvimento da Função Geradora de Padovan para os termos positivos.	79
Figura 10 – Desenvolvimento da Função Geradora de Padovan para números com índice inteiro não positivo.	80
Figura 11 – Desenvolvimento da Função Geradora de Tridovan para os termos positivos.	83
Figura 12 – Desenvolvimento da Função Geradora de Tridovan para índice inteiro não positivo.	84
Figura 13 – Desenvolvimento da Função Geradora de Tetradovan para os termos positivos.	88
Figura 14 – Desenvolvimento da Função Geradora de Tetradovan para índice inteiro não positivo.	89
Figura 15 – Processo histórico-evolutiva da SP.	188
Figura 16 – Fase da Ação e Formulação pelo Aluno A - Fórmula variante de Binet.	190
Figura 17 – Fase da Validação pelo Aluno B - Fórmula variante de Binet.	191
Figura 18 – Fase da Ação pelo Aluno D - Matriz geradora de Padovan para os números inteiros não positivos da sequência.	191
Figura 19 – Fase da Formulação pelo Aluno C - Matriz geradora de Padovan para os números inteiros não positivos da sequência.	192
Figura 20 – Continuação da Fase da Formulação pelo Aluno D - Matriz geradora de Padovan para os números inteiros não positivos da sequência.	192
Figura 21 – Fase da Validação pelo Aluno B - Matriz geradora de Padovan para os números inteiros não positivos da sequência.	193
Figura 22 – Fase da ação pelo Aluno G – Generalização dos coeficientes da recor- rência de Padovan.	193

Figura 23 – Fase da formulação pelo Aluno H - Generalização dos coeficientes da recorrência de Padovan.	194
Figura 24 – Fase da validação pelo Aluno D - Generalização dos coeficientes da recorrência de Padovan.	194
Figura 25 – Finalização da fase da validação pelo Aluno D - Generalização dos coeficientes da recorrência de Padovan.	195
Figura 26 – Aula pelo Google <i>Meet</i>	195
Figura 27 – Fase da ação pelo Aluno E - Relações Bidimensionais de Padovan. . . .	196
Figura 28 – Finalização da fase da ação pelo Aluno G - Relações Bidimensionais de Padovan.	196
Figura 29 – Fase da validação pelo Aluno A - Relações Bidimensionais de Padovan.	197
Figura 30 – Fase da ação pelo Aluno C - Números gaussianos de Padovan.	197
Figura 31 – Fase da formulação pelo Aluno G - Números gaussianos de Padovan. .	198
Figura 32 – Continuação da fase da formulação pelo Aluno E - Números gaussianos de Padovan.	198
Figura 33 – Fase da validação pelo Aluno D - Números gaussianos de Padovan. . .	199
Figura 34 – Fase da ação pelo Aluno G - Quatérnios de Padovan.	199
Figura 35 – Fase da formulação pelo Aluno E - Quatérnios de Padovan.	200
Figura 36 – Fase da validação pelo Aluno H - Quatérnios de Padovan.	200
Figura 37 – Fractal de Newton da SP.	249
Figura 38 – Fractal de Newton da SP em 3D.	250
Figura 39 – Fractal de Newton da sequência de Tridovan.	251
Figura 40 – Fractal de Newton da sequência de Tridovan 3D.	252
Figura 41 – Fractal de Newton da sequência de Tetradovan.	253
Figura 42 – Fractal de Newton da sequência de Tetradovan 3D.	254
Figura 43 – Flor gerânio.	255

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores de c_n	51
Tabela 2 – Termos da SP - índice inteiro não positivo.	62
Tabela 3 – Termos da sequência de Tridovan - índice inteiro não positivo.	67
Tabela 4 – Termos da sequência de Tetradovan - índice inteiro não positivo.	73
Tabela 5 – Razão de convergência entre os termos vizinhos da SP Afim.	105
Tabela 6 – Primeiros termos com índice inteiro não positivo dos números gaussianos de Padovan.	135
Tabela 7 – Tabela de multiplicação dos octônios de $\mathbb{O}$	156
Tabela 8 – Tabela de multiplicação dos sedenios de $\mathbb{S}$	167
Tabela 9 – Termos da sequência (s_1, s_2) -Padovan.	181
Tabela 10 – Categorização das resoluções das situações-problema propostas referen- tes à generalização.	202
Tabela 11 – Categorização das resoluções das situações-problema propostas referen- tes à complexificação.	203
Tabela 12 – Análise da convergência entre os termos vizinhos de Tridovan.	250
Tabela 13 – Análise da convergência entre os termos vizinhos de Tridovan.	252

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CEP	Comitê de Ética em Pesquisa
DM	Didática Matemática
ED	Engenharia Didática
EDC	Engenharia Didática Clássica
HM	História da Matemática
IFCE	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
SF	Sequência de Fibonacci
SP	Sequência de Padovan ou Cordonnier
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
TSD	Teoria das Situações Didáticas

LISTA DE SÍMBOLOS

$\binom{a}{b}$	Combinações de a , b a b
$g(P_n, x)$	Função Geradora de Padovan de ordem n
Q	Matriz Geradora de Padovan
Q_3	Matriz Geradora de Tridovan
Q_4	Matriz Geradora de Tetradovan
Q_z	Matriz Geradora de Z-dovan (Generalização)
ϱ	Matriz Geradora Inversa de Padovan
ϱ_3	Matriz Geradora Inversa de Tridovan
ϱ_4	Matriz Geradora Inversa de Tetradovan
ϱ_z	Matriz Geradora Inversa Z-dovan (Generalização)
$D_n Q_{P_n}$	Matriz Geradora dos Números Duais de Padovan de ordem n
DP_n	Número Dual de Padovan de ordem n
GP_n	Número Gaussiano de Padovan de ordem n
ψ	Número Plástico
P_n	n -ésimo termo da sequência de Padovan
$P_{3(n)}$	n -ésimo termo da sequência de Tridovan
$P_{4(n)}$	n -ésimo termo da sequência de Tetradovan
$P_{z(n)}$	n -ésimo termo da sequência de Z-dovan
$P_{(n)(s_1, s_2)}$	n -ésimo termo da sequência (s_1, s_2) -Padovan
$T_{(n)(s_1, s_2)}$	n -ésimo termo da sequência (s_1, s_2) -Tridovan
$Z_{(n)(s_1, s_2)}$	n -ésimo termo da sequência (s_1, s_2) -Z-dovan (Generalização)
OP_n	Octônio de Padovan de ordem n
$\in$	Pertence

QP_n	Quatérnio de Padovan de ordem n
SP_n	Sedenio de Padovan de ordem n
$P_{(n)(s_1, s_2)}$	Sequência (s_1, s_2) -Padovan de ordem n
$\Gamma_{(n)(s_1, s_2)}$	Sequência (s_1, s_2) -Tridovan de ordem n
$\zeta_{(n)(s_1, s_2)}$	Sequência (s_1, s_2) -Z-dovan (Generalização) de ordem n

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	29
1.1	Análises Prévias	30
1.1.1	Revisão Bibliográfica	30
1.1.2	Abordagem Didática e Cognitiva da Sequência de Padovan	31
1.2	Problemática e Justificativa da Pesquisa	32
1.3	Objetivos da Pesquisa	33
1.3.1	Objetivo Geral	33
1.3.2	Objetivos Específicos	33
2	REFERENCIAL TEÓRICO	35
2.1	A Engenharia Didática e a Teoria das Situações Didáticas	35
2.1.1	Análises Preliminares	37
2.1.2	Concepção e Análise a <i>Priori</i>	39
2.1.3	Teoria das Situações Didáticas	39
2.1.4	Experimentação	43
2.1.5	A Transposição Didática e o Contrato Didático	44
2.1.6	Análise a <i>Posteriori</i> e Validação da Pesquisa (Interna e Externa)	45
2.2	Sequências Lineares Recursivas	46
2.3	A Sequência de Padovan	49
3	ESTUDO DO CAMPO EPISTÊMICO-MATEMÁTICO: A GENERALIZAÇÃO E COMPLEXIFICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE PADOVAN	57
3.1	Relações Recorrentes de Padovan	57
3.1.1	Modelo Recursivo Unidimensional de Padovan e Identidades	57
3.2	Generalizações da Sequência de Padovan	59
3.2.1	Representação Matricial de Padovan	60
3.2.2	Representação Matricial de Tridovan	64
3.2.3	Representação Matricial de Tetradovan	68
3.2.4	Representação Matricial de Z-dovan	74
3.2.5	A Fórmula de Binet e a Função Geradora de Padovan	76
3.2.6	A Fórmula de Binet e a Função Geradora de Tridovan	80
3.2.7	A Fórmula de Binet e a Função Geradora de Tetradovan	84
3.2.8	A Fórmula de Binet e a Função Geradora de Z-dovan	89
3.3	Relações Matriciais	91
3.4	Sequência $(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ -Z-dovan	95

3.4.1	A Sequência $(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ -Z-dovan	95
3.4.2	A Fórmula de Binet	99
3.4.3	A Função Geradora	103
3.5	Padovan afim e as suas propriedades	105
3.6	Relações Recorrentes Bi, Tri e n -dimensionais	108
3.6.1	Relações Recorrentes Bidimensionais	108
3.6.2	Relações Recorrentes Tridimensionais	112
3.6.3	Relações Recorrentes n -dimensionais	122
3.6.4	Matrizes das Relações Recorrentes n -dimensionais	124
3.7	Números Gaussianos de Padovan	129
3.8	Números Duais de Padovan	138
3.9	Quatérnios de Padovan	146
3.10	Octônios de Padovan	155
3.11	Sedenios de Padovan	166
4	UMA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA: O ESTUDO DO MODELO DE PADOVAN NO CURSO DE LICENCIATURA	177
4.1	Concepções das Situações Didáticas	177
4.2	Análise <i>a Priori</i> das Situações Didáticas	178
4.3	Experimentação	186
5	ANÁLISES E DISCUSSÕES DOS DADOS	187
5.1	Análise <i>a Posteriori</i> e Validação Interna da Pesquisa	189
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	205
	REFERÊNCIAS	209
	APÊNDICES	219
	APÊNDICE A – ESTRUTURA DA PESQUISA BASEADA EM ENGENHARIA DIDÁTICA EM ASSOCIAÇÃO COM A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS	221
	APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	223
	APÊNDICE C – MATRIZES GERADORAS Q DE TRIDOVAN VÁLIDAS	227

APÊNDICE D – ALGUMAS MATRIZES GERADORAS Q DE TETRA- DOVAN VÁLIDAS	235
APÊNDICE E – CAMPO EPISTÊMICO-MATEMÁTICO DA SEQUÊN- CIA DE PADOVAN OU CORDONNIER	245
APÊNDICE F – FRACTAL DE NEWTON COMO FORMA DE VI- SUALIZAÇÃO ALTERNATIVA DE SEQUÊNCIAS LINEARES E RECORRENTES	247
 ANEXOS	 257
ANEXO A – MATRIZ CURRICULAR DO CURSO DE LICENCIA- TURA EM MATEMÁTICA DO INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CE- ARÁ (IFCE)	259
ANEXO B – PARECER DO COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA . .	261

1 INTRODUÇÃO

Estudos realizados sobre Didática Matemática (Didactiques de Mathématique – DM) mostram que os primeiros estudos foram desenvolvidos na França nas décadas de 1960, 1970 e 1980 na fundação da Comissão Internacional de Instrução Matemática, relatando um forte interesse pelo trinômio clássico: professor-aluno-saber. No Brasil, recebendo o nome de Educação Matemática, pode-se relatar que o principal elemento do trinômio ao realizar uma transposição didática é o professor. De acordo com Alves (2018), dois elementos merecem um destaque na chegada desta didática no Brasil, sendo eles: em relação ao movimento da constituição e identidade científica da pesquisa, em relação ao ensino de Ciência e Matemática; e o outro relacionado ao campo efetivo de atuação, onde o aluno torna-se um sujeito analisado com bastante clareza pelo professor.

A definição sobre DM é apresentada como:

A didática da matemática é uma das tendências da grande área de educação matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica. (PAIS, 2011, p.11)

Embora o foco esteja no professor, é bom enfatizar a importância do aluno, visto que este também é colocado no centro do processo de aprendizagem, cabendo ao docente guiá-lo de forma correta para determinadas situações-problema a serem resolvidas. Essa DM reúne pesquisas investigativas em relação ao surgimento de possíveis obstáculos na construção epistemológica de conceitos matemáticos em situações de ensino. Diante deste cenário, este trabalho realiza um estudo sobre a evolução histórica e investigativa da sequência de Padovan ou Cordonnier (SP), a fim de transformá-la em um conteúdo a ser ensinado.

Nesse sentido, aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos são considerados como pressupostos desta pesquisa, que foi organizada e escrita conforme a estrutura metodológica da Engenharia Didática Clássica (EDC), ou Engenharia Didática (ED) de 1ª Geração, de Artigue (1988) em complementaridade com a Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau (1976). Com isso, será apresentado o percurso inicial traçado para se realizar esta pesquisa, assim, são feitas análises prévias fundamentadas na ED, em seguida, a problemática e a justificativa da pesquisa são discutidas. E, finalmente, a questão norteadora é apresentada e os objetivos gerais e específicos são definidos.

1.1 Análises Prévias

Segundo as concepções de Almouloud e Silva (2012), as análises prévias desta pesquisa foram executadas baseadas na ED, organizando esse processo em duas etapas: na primeira feita uma revisão bibliográfica sobre a metodologia de pesquisa, a teoria de ensino e a SP; e na segunda etapa, a abordagem didática e cognitiva da SP são descritas, relacionando-as ao contexto de sua aplicação e desenvolvimento da pesquisa.

1.1.1 Revisão Bibliográfica

Primeiramente foi iniciada a construção do referencial teórico referente à SP, ED e TSD, para serem estudados *a posteriori*, com o objetivo de definir a problemática da pesquisa e assim traçar os seus objetivos. Sendo destacadas as Dissertações de Mestrado de Oliveira (2018) e Santos (2017). Sendo nesta última trabalhado o processo de generalização da SF através da fórmula de Binet e de sua extensão para os números inteiros, e a primeira estudando o processo de complexificação do modelo de Fibonacci. Em ambas as dissertações, observa-se a existência da ED em associação com a TSD, destacando ainda um momento para a análise matemática, através do campo epistêmico-matemático e, outra para a reflexão das metodologias de pesquisa e ensino.

Antes de dar início ao conteúdo matemático deste trabalho, foi construída uma base acerca das sequências lineares e recorrentes sustentados nos trabalhos de Ercolano (1979) e Zierler (1959). Com isso, foram realizados aprofundamentos matemáticos acerca do conteúdo referente aos números de Padovan para então construir o processo histórico-evolutiva com ênfase na generalização da SP através dos trabalhos de Voet e Schoonjans (2012), Spinadel e Buitrago (2009), Padovan (2002) e Stewart (1996).

A partir desse processo histórico-evolutiva, foram estudados conteúdos inerentes às matrizes geradoras, fórmula de Binet, função geradora e relações matriciais, sendo investigados em trabalhos de: Cerda-Morales (2017), Ferreira (2015), Seenukul et al. (2015), Tas e Karaduman (2014), Sokhuma (2013b) e Yilmaz e Taskara (2013). Além desses, foi possível realizar estudos em Alves (2015), Alves (2013), Cereceda (2015), Bacani e Rabago (2015), Hare, Prodinger e Shallit (2014) e Alves e Neto (2011) que discutem a generalização do modelo de Fibonacci, visto que o processo de generalização da SP não foi realizado até então. O estudo referente ao processo de complexificação foi baseado em Catarino (2019), Catarino (2018), Tasci (2018a), Tasci (2018b), Oliveira, Alves e Paiva (2017), Familton (2015), Shoham (2000), Pethe e Horadam (1986), Berzsenyi (1977). Baseado nisso, buscou-se investigar e dar continuidade aos trabalhos referenciados acima, para assim conseguir o processo de generalização desta sequência.

Ainda em relação ao campo epistêmico-matemático, foram exploradas a sequência $(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ -Z-dovan (Generalização) através de trabalhos de matemática pura, desta-

cando Vieira, Alves e Catarino (2019c), Vieira e Alves (2019d), Cerda-Morales (2017), em que este retrata a sequência matricial de Padovan, não ocorrendo a generalização. E diante dessa lacuna, esta pesquisa pretende estudar o processo de generalização. Para o estudo de Padovan afim e as suas propriedades, destaca-se o trabalho de Vieira e Alves (2018).

Além do mais, foram estudadas as relações n -dimensionais, os números duais, gaussianos, quatérnios, octônios e sedenios fundamentados nos trabalhos de Vieira e Alves (2019c), Catarino (2019), Catarino (2018), Tasci (2018a), Tasci (2018b), Oliveira, Alves e Paiva (2017), Familton (2015), Shoham (2000), Pethe e Horadam (1986), Berzsenyi (1977).

Por fim, leituras relacionadas à ED e TSD foram realizadas para que fosse possível investigar as situações de ensino orientadas pela vertente francesa da DM, destacando os autores: Brousseau (2008), Brousseau (2000), Brousseau (1986a), Brousseau (1986b), Brousseau (1982), Brousseau (1976), Artigue et al. (1995), Artigue (1988), Almouloud e Silva (2012), Almouloud e Coutinho (2008), Almouloud (2007), Alves (2016c), Pais (2011) e Teixeira e Passos (2013).

1.1.2 Abordagem Didática e Cognitiva da Sequência de Padovan

Visando descrever o contexto didático-cognitivo em que a SP é abordada, e definir o local de aplicação desta pesquisa, foi analisada a matriz curricular do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), *campus* Fortaleza (ver Anexo A), escolhido por oferecer formação inicial para professores de Matemática. Assim, foi realizada uma avaliação das ementas das disciplinas do curso para selecionar a que melhor se ajustasse à proposta desta pesquisa para a aplicação, sendo então definida a disciplina de História da Matemática (HM). Com isso, foi verificado que a ementa desta disciplina é obrigatória na matriz curricular e abrange os seguintes assuntos: o conceito de número e os sistemas de numeração; o processo histórico-evolutivo da Aritmética, Álgebra e Geometria; a biografia dos matemáticos que contribuíram significativamente para esse processo e a HM no Brasil.

Contudo, foi constatado que o conteúdo de sequências lineares recursivas é trabalhado na seção que discute a HM, iniciando com a SF (sequência de segunda ordem), inexistindo as sequências de terceira ordem, mais especificamente a SP, a qual será estudada nesta pesquisa. Ademais, pode-se perceber que além dos livros adotados usualmente para compor os estudos acerca da disciplina (disponibilizados na biblioteca da instituição), nenhum deles apresenta a SP, podendo ser encontrado na internet por meio de artigos, jornais e etc. Tal descrição do contexto permitiu descrever a problemática e a justificativa desta pesquisa, o qual serão abordados na subseção seguinte.

1.2 Problemática e Justificativa da Pesquisa

Baseado em alguns livros de HM, sugeridos para estudo na referida disciplina do curso de Licenciatura em Matemática do IFCE, onde esses apresentam alguns conceitos matemáticos, abordando o conteúdo de sequências lineares e recorrentes, estudando a Sequência de Fibonacci (SF). Essa sequência possui a sua razão de convergência relacionada com o número de ouro, sendo este e o número radiante as únicas soluções dos números mórficos. Com isso, buscou-se estudos referentes à SP, em que esta apresenta a sua relação de convergência relacionada ao número radiante, além de ser uma sequência linear e recorrente como é o caso de Fibonacci, sendo assim justificada a problemática desta pesquisa. Além dos números de Padovan, serem considerados primos dos números de Fibonacci, sendo a primeira uma sequência de terceira ordem e a última de segunda ordem. Segundo Alves (2016c), hiatos históricos são registrados no decorrer da disciplina, sendo caracterizados pelo fato de estarem presentes em determinados traços históricos, porém, não sendo encontrados registros explicativos do estágio atual de evolução, generalização e o papel assumido matematicamente. Durante a construção desses conceitos matemáticos alguns obstáculos podem ser gerados, sendo superados através do processo-evolutivo da SP, que no caso desta pesquisa é enfatizada pela generalização e complexificação da sequência.

De acordo com a revisão bibliográfica relatada anteriormente, pode-se constatar uma investigação acerca dos elementos de ordem epistemológica, cognitiva e didática diante de uma perspectiva histórica da SP. Em relação ao campo epistemológico, é possível compreender a existência de uma evolução dos números de Padovan, sendo direcionados a generalizações e a inserção de unidades imaginárias e variáveis. Em relação aos aspectos cognitivos estes estão associados à aprendizagem dos conceitos matemáticos, mobilizando o pensamento intuitivo do aluno, direcionando-o a obter um raciocínio inferencial durante a resolução da situação-problema proposta em todas as suas etapas da TSD (ação, formulação e validação). No aspecto didático, baseado também na TSD, destacou-se a transposição didática das definições matemáticas. Ambos os aspectos foram considerados de acordo com a proposta de uma experiência de ensino da SP no Ensino Superior na disciplina de HM.

A SP até então, não era discutida na disciplina de HM, na licenciatura da Matemática, apesar de ser uma sequência recorrente e linear, esta não é vista na matriz curricular do curso, e nem existem facilmente literaturas sobre este assunto, ficando ao caráter do professor obter tal abordagem e aprofundamento sobre o assunto. Dessa forma, visando transformar esse conteúdo em um tópico a ser ensinado, pode-se considerar que pesquisadores, educadores matemáticos, estudam os "fenômenos" inerentes ao ensino de Matemática, através de teorias de ensino relacionadas com a transposição didática (ALVES, 2016b).

Devido ao fato deste projeto ser voltado para a formação continuada dos professores, e diante desse contexto, destacou-se a ED em complementaridade com a TSD, como meios

para fundamentar a investigação da sequência.

Baseado nisso, a pesquisa foi norteada pela questão: *como desenvolver uma Engenharia Didática em associação com a TSD através de um estudo sistemático sobre o processo matemático de generalização e complexificação da SP, realizando situações didáticas que oportunizem a investigação de seus teoremas e suas propriedades, explorando ainda a sua representação matricial e complexa numa perspectiva epistemológica, em relação a sua origem e evolução histórica?*

Assim, é realizado um estudo, referente ao processo de generalização e complexificação da SP, poinvestigando o processo histórico e evolutivo desses números, diante de uma análise pormenorizada dos respectivos conteúdos matemáticos. Pretende-se com esta pesquisa, apresentar uma abordagem DM aos professores de Matemática em formação inicial, fornecendo-lhes ferramentas necessárias para que haja uma melhoria nas práticas em sala de aula, mais especificamente na disciplina de HM.

1.3 Objetivos da Pesquisa

Para superar os obstáculos, é necessário que haja um modelo alternativo para alcançar o objetivo da pesquisa com satisfação, apresentando novas metodologias e práticas pedagógicas, além das propostas desenvolvidas na DM como os "objetivos-obstáculos" (ASTOLFI, 1994). Contudo, os objetivos gerais e específicos deste trabalho visam elencar os elementos de ordem epistemológica, cognitiva e didática com base nos pressupostos da ED. Com isso, na próxima subseção será apresentado o objetivo geral desta pesquisa.

1.3.1 Objetivo Geral

Descrever elementos de um estudo sistemático, fundamentado na ED em conjunto com a TSD, referente aos modelos de generalização e complexificação da SP, promovendo a compreensão histórico-evolutiva, identificação, descrição e exploração de suas propriedades.

1.3.2 Objetivos Específicos

1. Investigar os teoremas e propriedades inerentes à generalização e complexificação de: representações matriciais, fórmula de Binet, função geradora, sequência $(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ -Z-dovan, Padovan afim, relações bi, tri e n -dimensionais, números gaussianos, números duais, quatérnios, octônios e sedenios de Padovan;
2. Explorar, através de situações de ensino, a fórmula de Binet, as representações matriciais, a sequência (s_1, s_2) -Padovan, as relações bidimensionais, os números gaussianos e quatérnios de Padovan;

3. Aplicar o desenvolvimento histórico-evolutiva, ou seja, epistemológico-matemático, da SP característico ao seu processo de generalização e complexificação, através da proposição de situações-problema em sala de aula.

Com isso, dois referenciais amplamente conhecidos como metodologia de pesquisa e ensino em matemática, respectivamente ED e TSD, são discutidos e associados neste trabalho à SP. Com isto, serão evidenciadas as suas relações e implicações durante a prática de ensino da integração entre essas duas teorias. Com o viés de destacar esse estudo, serão mostrados o percurso metodológico e a aplicação das fases de elaboração de uma ED, sendo essas caracterizadas pela fundamentação teórica, experimentação e análises ocorridas durante o seu processo de implementação.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Diante dos estudos realizados em relação à DM, é possível destacar a importância do aluno durante o processo de aprendizagem, devendo o professor direcioná-lo corretamente para as atividades propostas. Com base nisso, Brousseau (1986b) relata que os comportamentos dos docentes esperados pelos discentes e os comportamentos dos discentes esperados pelos docentes são semelhantes a um contrato, tornando-se um sistema de responsabilidades entre as partes, em busca do conhecimento.

Para Bachelard (1996):

O espírito científico é essencialmente uma retificação do saber, um alargamento dos quadros do conhecimento. Julga o seu passado condenando-o. A sua estrutura é a consciência dos seus erros históricos. Cientificamente, pensa-se o verdadeiro como retificação histórica de um longo erro, pensa-se a experiência como retificação da ilusão comum e primeira. (BACHELARD, 1996, p.120)

Apesar de existirem outros responsáveis para tal teoria, pode-se destacar alguns pesquisadores como os principais influenciadores, sendo eles: Gaston Bachelard, Guy Brousseau, Gérard Vergnaud, Yves Chevallard, Michele Artigue e Régine Douady.

Nas próximas seções serão discutidas a metodologia da ED em complementaridade com a TSD, reunindo os elementos de ordem epistemológica, cognitiva e didática diante de uma visão francesa da DM, com o intuito de entender a inserção desses aspectos no processo de ensino da Matemática existente no Brasil. Uma estrutura da pesquisa é realizada a fim de facilitar o entendimento da metodologia utilizada. (ver Apêndice A).

2.1 A Engenharia Didática e a Teoria das Situações Didáticas

No início do século XIX o matemático Henri Léon Lebesgue (1875 – 1941) começou a preocupar-se com a formação do professor e as condições de ensino então adotadas até o momento. Com isso, a partir dos anos 80 foram criados na França, centros universitários visando melhorar o sistema de ensino, surgindo então a ED.

Esta metodologia foi criada para analisar as situações didáticas. Vale lembrar que “o termo da ED designa um conjunto de sequências de classes concebidas, organizadas e articuladas no tempo, de maneira coerente por um professor-engenheiro, com o fim de realizar um projeto de aprendizagem para uma população determinada de alunos” (ARTIGUE et al., 1995, p.62).

A ED, segundo Artigue (1988), é uma forma de trabalho didático comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto, se apoia em conhecimentos científicos de seu domínio, aceita se submeter a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, é obrigado a trabalhar objetos mais complexos que os objetos depurados da ciência. O professor tem o papel de um engenheiro, assim este deverá criar um planejamento, de acordo com cada situação, para que os alunos consigam compreender determinados conteúdos matemáticos.

Essa metodologia é dividida em quatro fases: análises preliminares, concepção e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e validação. Permitindo ainda organizar uma pesquisa voltada para o ensino de Matemática e, estudando a relação entre a teoria e a prática e, essa estrutura de ensino investiga as situações da microengenharia e macroengenharia.

Na época do surgimento da ED, Perrin-Glorian e Bellemain (2016) observaram os riscos em relação as transformações voltadas para o sistema de ensino ao se adotar esta metodologia, relatando ainda que o sistema não estava preparado para tal mudança. Com isso, nos anos 90, o papel do professor tornou-se um objeto de estudo.

A EDC (1ª geração) estuda e analisa o comportamento do discente, tendo um interesse maior na modelização das atividades dos alunos, em seu progresso de aprendizagem e nos elementos clássicos assegurados no triângulo didático (aluno-professor-conhecimento).

Alves e Catarino (2017) afirmam que:

Engenharia Didática clássica ou de 1ª geração, compreendida como uma metodologia que visa ao estudo dos fenômenos didáticos, que possam permitir os fenômenos em sala de aula, bem como uma perspectiva de ED, visando ao desenvolvimento de recursos de formação que, segundo a tradição, têm recebido a denominação de Engenharia Didática de Formação (EDF), de desenvolvimento ou Engenharia de 2ª geração. (ALVES; CATARINO, 2017, p.126).

De forma a complementar a ED em suas respectivas fases, tem-se então a utilização da TSD como teoria de ensino. Assim, a TSD é um modelo teórico, segundo o qual, considerando o ensino como projeto e ação social em que o aprendiz se apropria de um saber constituído ou em constituição, a didática da matemática se transforma numa ciência das condições de transmissão e apropriação dos conhecimentos matemáticos. Essa teoria ainda retrata que, cada conhecimento pode ser determinado com base em uma determinada situação. Dessa forma, essas situações permitem que o espaço de aplicação (sala de aula), seja organizado elencando os momentos de interações entre o professor, aluno e saber.

Com isso, pode-se analisar a importância de transformar o conteúdo matemático para obter uma didática com cunho mais investigativo. Para isso, uma das alternativas encontradas é abordar um determinado conteúdo com a metodologia de ED em associação com a TSD no curso de formação inicial de professores. A seguir, serão discutidas as fases

da ED e os aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos, articulando com as etapas dessa metodologia abordada na pesquisa.

2.1.1 Análises Preliminares

A ED é uma metodologia de pesquisa, sendo indispensável a aplicação de suas fases para fundamentar o processo de investigação e interpretação dos dados (ALVES, 2014). Logo, na primeira etapa, é onde realizam as análises prévias, sendo elas, segundo Almouloud e Coutinho (2008):

"epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino; do ensino usual e seus efeitos; das concepções dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que marcam sua evolução; das condições e fatores de que depende a construção didática efetiva; a consideração dos objetivos específicos da pesquisa; o estudo da transposição didática do saber considerando o sistema educativo no qual insere-se o trabalho" (ALMOULOU; COUTINHO, 2008, p.66).

Pode-se ainda definir como sendo a fase que "se estrutura em torno de uma análise do funcionamento do sistema" (ARTIGUE et al., 1995, p.39). É importante determinar e selecionar os elementos que permitem o comportamento dos estudantes. Durante este processo, é necessário que o professor promova a interação do aluno, a fim de produzir conhecimento. Assim, o estudante começará a ganhar uma maior confiança e domínio em relação ao conteúdo visto em sala de aula.

O primeiro processo para iniciar a análise preliminar, é identificar os problemas de ensino e aprendizagem de acordo com o objeto de estudo. Após essa análise são selecionadas referências bibliográficas para aprimorar os conhecimentos acerca do tema que será investigado e estudado.

Segundo Artigue (1988) esta fase, deve ser analisada de acordo com três dimensões: a epistemologia, sendo esta associada ao saber em jogo; a cognição relacionada com as características dos discentes que serão analisados; e a didática relacionada com as características do sistema de ensino.

Alves e Marinho (2017, p.69) definem a dimensão epistemológica como sendo aquela que "adquire proeminência natural, tendo em vista que, a vigilância do pesquisador no que concerne aos conteúdos matemáticos de uma sequência de ensino e de que modo pode atuar/modificar sua transmissão em situação". Nela é analisada a origem do desenvolvimento matemático, diferenciando o saber científico do que se pretende ensinar. A dimensão cognitiva faz uma análise das concepções preliminares antes de ser realizada uma aplicação da sequência didática. Já a dimensão didática, esta aborda os elementos interligados com os elementos da dimensão epistemológica.

No contexto da epistemologia matemática, Bachelard (1996) afirma que "o conhecimento adquirido pelo esforço científico pode declinar. (...) A partir daí, a atividade espiritual se inverte e se bloqueia. Um obstáculo epistemológico se incrusta no conhecimento não questionado". Isso mostra que esses obstáculos exercem uma função importante em relação ao processo histórico e evolutivo do conhecimento, sendo ignorados em relação ao saber ensinado. Além disso, quando pretende-se compreender tais obstáculos, é necessário que seja levada em consideração dois processos distintos: descoberta de noções matemáticas e conceitos matemáticos.

Oliveira et al. (2018), enfatizam que "antes de um conteúdo de Matemática ser inserido em sala de aula, ele passa por uma investigação na área da Matemática Pura. Nesse contexto, é possível apontar a existência de obstáculos epistemológicos". Isso faz com que o discente tenha uma maior aprendizagem sobre o conteúdo, visto que irá entender a parte histórica desde o princípio, não apenas sendo mostradas as fórmulas as quais poderão serem utilizadas. Isso mostra ainda que o ensino e aprendizagem do aluno vai além das resoluções dos problemas.

Vale ressaltar que quando uma sequência é adotada de uma maneira generalizada epistemologicamente de acordo com o conteúdo matemático selecionado, esta deve ser demonstrada em lento processo de avanços e retrocessos (PAIS, 2011, p.49). Contudo, o plano pedagógico deve ser bem elaborado, realizando um longo processo de investigação em torno do conteúdo matemático. Alves (2016a) define que no plano pedagógico:

(...) vale a advertência do caráter epistemológico que reside em imprimir ao raciocínio do estudante, o caráter monossêmico e inferencial, característico das teorias formais. (...) Assim como os teoremas e as teorias fundantes, que conferem seu caráter de certeza, se mostram entrelaçadas com uma "teia epistêmica" de concepções e saberes que não são negligenciados pela Didática da Matemática (ALVES, 2016a, p.140-141).

Existem dois elementos que devem ser destacados nesta fase, sendo eles: estudo da organização matemática e análise didática do objeto matemático escolhido. Para o primeiro elemento é importante observar o surgimento da fórmula matemática abordada, entendendo a sua função atual na matemática, os obstáculos epistemológicos, entre outros aspectos. Para o segundo elemento é interessante notar a importância da análise de livros de HM, tendo em vista como a fórmula é abordada, percebendo o papel da história do conteúdo que será abordado (no caso desta pesquisa, destaca-se a histórica da SP); obstáculos epistemológicos identificados pelos autores; prever as possíveis concepções inadequadas dos alunos, entre outros pontos.

Por fim, conclui-se que durante esta fase o domínio do conteúdo por parte do professor e a experiência com a docência, devem ser fundamentais para a elaboração das situações-problema propostas de acordo com o conteúdo matemático a ser trabalhado durante a pesquisa.

2.1.2 Concepção e Análise *a Priori*

Durante a fase da Concepção e Análise *a priori*, são escolhidas as variáveis didáticas, sendo elas: macrodidáticas ou globais; ou microdidáticas ou locais. A primeira refere-se a maneira de como é organizada a engenharia como um todo, já a segunda é relativa à organização apenas da fase da pesquisa. Assim, relata Almouloud e Silva (2012):

O pesquisador, orientado pelas análises preliminares, delimita certo número de variáveis pertinentes ao sistema sobre os quais o ensino pode atuar, chamadas de variáveis de comando (microdidáticas ou macrodidáticas). (ALMOULOU, SILVA, 2012, p.26)

Existem três pontos importantes que deverão ser considerados para a analisar a pesquisa, a saber: descrição das escolhas realizadas no local e comparação com a situação didática escolhida; análise da importância da situação proposta para o aluno; suposição dos comportamentos dos alunos, tentando demonstrar como esta fase permitirá controlá-los. Diante disso, o professor/pesquisador deverá primeiramente ter convicção das escolhas das variáveis locais, podendo modificá-las durante o processo, e assim construir situações-problema para serem aplicadas aos alunos, para que haja o alcance do objetivo proposto.

Almouloud (2007) destaca que:

A análise *a priori* é importantíssima, pois de sua qualidade depende o sucesso da situação-problema; além disso, ela permite, ao professor, poder controlar a realização das atividades dos alunos, e, também, identificar e compreender os fatos observados. Assim, as conjecturas que vão aparecer poderão ser consideradas, e algumas poderão ser objeto de um debate científico. (ALMOULOU, 2007, p.176)

As situações-problema devem ser analisadas de acordo com a matemática e a didática. Na matemática, em cada situação, os métodos de resolução devem ser analisados. Na didática, devem ser analisadas as situações-problema propostas, se essas são pertinentes e consistentes com o conteúdo abordado e, com os saberes visados e já constituídos. Diante disso, as variáveis devem ser verificadas para que não haja construção de conhecimentos incompatíveis com os alunos.

Segundo Vieira e Alves (2020), afirmam que "o professor-pesquisador deve elaborar uma sequência de situações propostas do tipo de questões abertas e/ou fechadas, destacando o campo conceitual que pretende-se explorar, organizadas de tal modo que os alunos possam apresentar soluções". Logo, esse processo realiza o aperfeiçoamento dos participantes em determinadas aptidões evoluindo matematicamente e didaticamente em seu conhecimento.

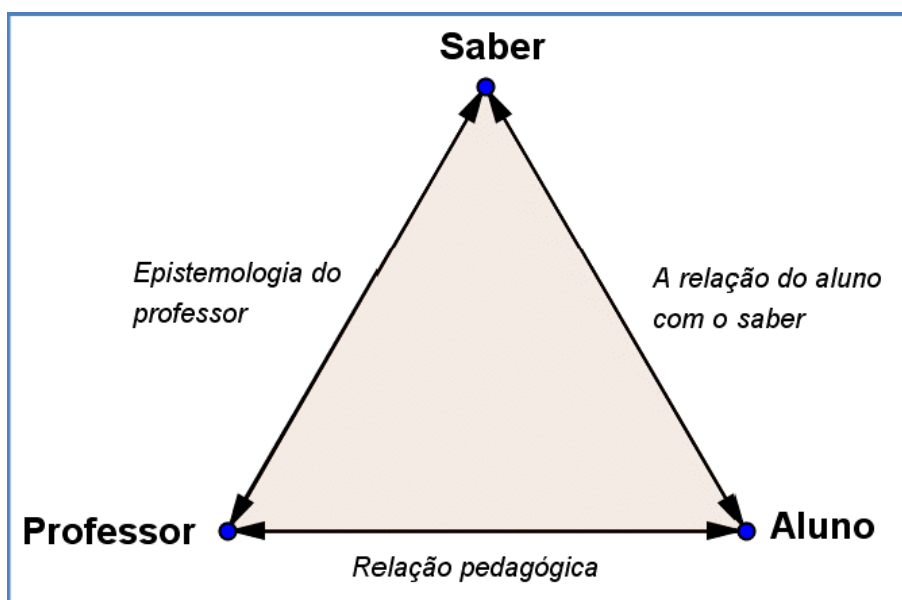
2.1.3 Teoria das Situações Didáticas

A TSD surgiu no início da década de 60, durante a renovação do ensino de matemática, sendo definida por Brousseau (1986a) como um modelo teórico, que considera o

ensino como um projeto onde o discente conquista um saber constituído ou em constituição, havendo ainda a transformação da DM numa ciência com apropriação de conhecimentos matemáticos.

Esta teoria tem, como um dos objetivos primordiais da DM, a caracterização de um processo de aprendizagem por meio de uma série de situações reprodutíveis, denominadas de situações didáticas, que estabelecem os fatores determinantes para a evolução do comportamento dos alunos. Os professores, alunos e o meio (*milieu*¹) são indispensáveis para a relação de ensino e aprendizagem. As relações estabelecidas entre professor-aluno-saber podem ser representadas através do triângulo didático (ver figura 1).

Figura 1 – Triângulo didático das relações entre professor-aluno-saber.



Fonte:(OLIVEIRA; ARAUJO, 2012, p.214)

Nos vértices do triângulo existem as relações entre saber-professor, professor-aluno e professor-saber. Vale salientar o papel do meio (*milieu*) como principal elemento durante as interações professor-aluno-saber, permitindo a evolução do conhecimento dos discentes. Segundo Brousseau (2000), essa teoria:

Trata-se de construir um modelo de situações usadas para introduzir ou ensinar noções matemáticas (e criticá-las), além de imaginar outras mais apropriadas. Ao colocar os problemas desta maneira, é possível analisá-los, de modo particular o seu cálculo, juntamente com os argumentos da organização lógico-matemática do conhecimento, argumentos econômicos e ergonômicos. Mas também, é possível considerar outras restrições, em particular, aquelas que podem aparecer como conclusões de obras da psicologia ou sociologia, com a condição de torná-los funcionais, ou seja,

¹ Termo em francês, com tradução para o português como sendo meio. Utilizado para compreender o ambiente criado pelo professor

de especificar como eles intervêm efetivamente (BROUSSEAU, 2000, p. 11, tradução nossa).

Esclarecendo a integração das dimensões epistemológicas, cognitivas e sociais na Educação Matemática, este modelo permite compreender as interações sociais existentes entre os discentes e docentes em sala de aula, e as condições de como o conteúdo é aprendido. Um dos seus objetivos em relação à DM é a criação de uma série de situações didáticas, estabelecendo assim, fatores para a evolução do comportamento dos alunos. Teixeira e Passos (2013) complementam ainda que:

O objeto central de estudo nessa teoria não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática, na qual são identificadas as interações entre professor, aluno e saber. Algum erro cometido pelo aluno, nessa teoria, quando identificado, constitui-se como valiosa fonte de informação para a elaboração de boas questões ou para novas situações problemas que possam atender, mais claramente, os objetivos desejáveis (TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p.158).

Uma situação, segundo Brousseau (2008) é "um modelo de interação de um sujeito com um meio determinado, reunindo as circunstâncias nas quais uma pessoa se encontra e as relações que a unem ao *milieu*. O *milieu* seria subsistema autônomo, antagônico ao sujeito".

As variáveis didáticas podem ser de dois tipo: situação didática e adidática. Em ambas as situações são elaboradas em forma de jogo, porém na primeira o aluno é motivado a participar do processo de aprendizagem, desenvolvendo determinada autonomia. Na outra situação, o discente possui uma estratégia básica para adquirir o conhecimento, de acordo com as regras do jogo. Na situação adidática a estratégia pedagógica não é revelada ao aluno.

Durante essas situações na TSD, o professor deve esclarecer os elementos predominantes nas etapas didáticas de ensino desenvolvidas por Brousseau, seja ela de ação, formulação, validação e institucionalização (BROUSSEAU, 1986a). Definidas por Brousseau (2002) como:

Situação de ação.

A sequência de 'situações de ação' constitui o processo pelo qual o aluno elabora estratégias, ou seja, 'ensina a si mesmo' um método de resolver seu problema. Essa sucessão de interações entre o aluno e o meio, constitui a dialética da ação. Usamos a palavra 'dialética' em vez da palavra 'interação' porque, por um lado, o aluno é capaz de antecipar os resultados de suas escolhas e, por outro lado, suas estratégias são, de certa forma, proposições validadas ou invalidadas pela experimentação em uma espécie de diálogo com a situação (BROUSSEAU, 2002, p.9, tradução nossa).

Nesta etapa o aluno busca em seus conhecimentos prévios, visando resolver a situação-problema apresentada, envolvendo um raciocínio de uma forma mais experimental do que teórico.

Situação de formulação, segundo Vieira, Alves e Catarino (2019d):

Pode-se resumir que durante esta situação, os discentes irão transformar as ideias obtidas durante a situação da ação, e transformá-las em uma linguagem mais adequada, visando realizar conjecturas, teoremas e propriedades do assunto matemático (VIEIRA; ALVES; CATARINO, 2019d, p.268).

Durante este processo uma estratégia de resolução é apresentada pelo aluno, podendo ser escrita ou oral, destacando um conhecimento mais teórico e formalizando a linguagem utilizada, uma vez que os argumentos serão validados posteriormente. Nesta fase, ocorre ainda a presença do professor ou colega.

Situação de validação, de acordo com Oliveira, Alves e Silva (2019):

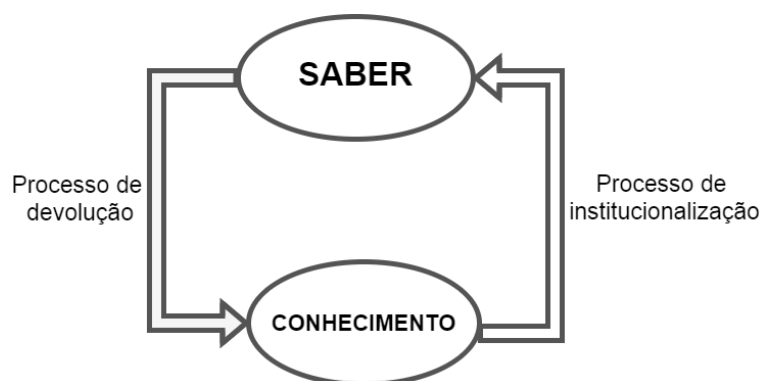
Tem-se a validação, na qual as conjecturas elaboradas são verificadas a fim refutá-las ou validá-las. Para isso, o aluno passa a apresentar uma linguagem mais teórica e formal, fazendo uso de propriedades e métodos de demonstrações matemáticas (OLIVEIRA; ALVES; SILVA, 2019, p.4).

Na etapa da validação, é o momento em que os alunos irão demonstrar e convencer os participantes sobre os argumentos utilizados para resolver a situação-problema proposta, havendo ainda uma apropriação de uma linguagem mais científica. Situação de institucionalização, pelo olhar de Brousseau (1997):

O objetivo dos diferentes tipos de situações, cuja devolução nós abordamos, é que o próprio aluno dê sentido às peças de conhecimento que ele manipula, combinando esses diferentes componentes, dando sentido ao conhecimento adquirido (BROUSSEAU, 1997, p.235, tradução nossa).

Por fim, a última etapa ocorre a revelação da intenção do professor aos estudantes, conferindo as resoluções que foram até então demonstradas, visando conferir as respostas. Nota-se ainda a presença do professor neste período, revelando a intenção da atividade proposta e concluindo a aplicação das quatro fases das situações da TSD. Durante as conferências das resoluções, é avaliada a transferência do conhecimento e do saber científico, sendo diferenciados pelo fato de que o saber é o equilíbrio alcançado entre o estudante e o local da aplicação (MARGOLINAS, 2012). Contudo, a Figura 2, revela o momento de devolução e conhecimento, como não sendo uma fase trivial durante o momento do ensino. Tão logo, é necessário que o professor proponha aos estudantes algumas situações didáticas de ensino, buscando os conhecimentos relacionados ao saber existente.

Figura 2 – Saber e conhecimento.



Fonte: Adaptado de Margolinas (2012, p.8)

Essas situações visam resgatar os conhecimentos prévios dos estudantes de uma maneira não visível, ocorrendo uma única previsão de uma intenção didática. Vale destacar que, em muitos casos, os estudantes obtêm as respostas das atividades de forma fácil, apresentando somente o conhecimento e, construindo ainda o saber. Durante o processo de aprendizagem, é necessário que ocorra a interação entre a pessoa que aprende e a pessoa que ensina, devendo utilizar os materiais didáticos mais apropriados. Logo, ao apresentar um determinado problema aos estudantes, um dispositivo é acionado para auxiliar na resolução, seguindo as regras estabelecidas e com o viés de alcançar a trajetória correta do resultado. Assim, segundo Oliveira (2018) "a TSD serve de fundamentação para a concepção e proposição das situações-problema, que irão compor uma realização didática".

2.1.4 Experimentação

Durante a fase da experimentação, é proposta a aplicação de situações-problema de acordo com os objetivos da pesquisa e, baseados na TSD, acontecendo assim a situação didática proposta pela referida teoria. Entretanto, deve ser estabelecido um contrato didático (BROUSSEAU, 1982), em que são as expectativas do docente em relação aos discentes, e deles em relação ao docente, incluindo ainda a relação do saber e a maneira de como esse saber é tratado por ambos.

Almouloud e Coutinho (2008) relatam que:

"é o momento de se colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o se necessário, quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade, o que implica em um retorno à análise *a priori*, em um processo de complementação. Ela é seguida de uma fase de análise *a posteriori* que se apoia no conjunto de dados recolhidos durante a experimentação: observações realizadas sobre as sessões de ensino e as produções dos alunos em sala de aula ou fora dela. Esses dados são, às vezes, completados por dados obtidos pela utilização de metodologias externas: questionários, entrevistas individuais

ou em pequenos grupos, realizadas em diversos momentos do ensino". (ALMOULOU; COUTINHO, 2008, p.67-68)

Esta etapa é caracterizada ainda por aplicar toda a estrutura já organizada até então, observando as situações de aprendizagem e envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática, não seguindo a dinâmica de uma aula tradicional ou comum (PAIS, 2011). Assim, de acordo com Almouloud (2007) a organização da aula, neste período, deve ser fundamentada na TSD e voltada para a coleta de dados dos alunos, para que possa assim analisar o ensino-aprendizagem.

Alves et al. (2019), relatam ainda que durante a experimentação, o docente deverá colocar em prática a sequência didática elaborada na concepção e análise *a priori*, observando o momento da resolução das atividades propostas pelos estudantes, para serem então analisadas posteriormente na próxima fase.

Pode-se ainda relatar que "nesta coleta, foi possível fazer uso de vários instrumentais, tais como relatórios, registros fotográficos, produções dos alunos, entrevistas, dentre outros recursos, a fim de formarmos o corpus da pesquisa" (SANTOS; ALVES, 2017). Logo, antes de coletar os dados, foi realizado um Termo de Consentimento Livre e Esclarecimento (TCLE) (ver Apêndice B) para que os alunos voluntários tivessem livre adesão ao processo de pesquisa durante esta fase, após isso, os dados da coleta da pesquisa foram registrados e anexados nesta pesquisa para fins de conferência e análises.

2.1.5 A Transposição Didática e o Contrato Didático

Nesta seção, são apresentadas as noções de transposição didática e do contrato didático, visando compreender os elementos epistemológicos, cognitivos e didáticos, abordados nesta pesquisa diante da perspectiva da DM.

Introduzido por Verret (1975), a transposição didática analisa a transmissão dos saberes, tornando-os acessíveis por meio de uma simplificação e busca dos conhecimentos prévios dos participantes. Com isso, tem-se que a necessidade de adaptar o conhecimento no momento em que se pretende ensinar, surgiu de forma unânime, uma vez que existe uma dificuldade em transformar a teoria em prática no processo de ensino-aprendizagem, desenvolvendo assim o conceito de transposição didática.

Tal conceito foi criado para analisar o sistema didático, sendo definido no ápice da DM por Chevallard (1998), tratando como:

Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado transposição didática (CHEVALLARD, 1998, p.39)

Visando transformar o conhecimento e a experiência, necessita-se que existam três saberes: o sábio, ensinar e o ensinado. Segundo Melzer (2015) o saber sábio é desenvolvido a partir da pesquisa acadêmica, destinando a comunicação de processos e resultados da pesquisa. O saber a ensinar tem uma linguagem mais acessível e é dotada de artifícios pedagógicos. O saber ensinado é criado a partir do saber em ensinar em sala de aula.

Esta teoria visa analisar de forma epistemológica os objetos dos saberes, sendo eles paramatemáticos e matemáticos. Segundo Oliveira (2018) "este último pode estudar também a si mesmo, e os objetos protomatemáticos, que apesar de não terem oficialmente a função de estudar objetos, possuem propriedades para resolver questões matemáticas". Lopes (1999) estudou este conceito no Brasil, chamando-o de mediação didática e definindo como o meio de alterar o conhecimento de um lugar para o outro.

Em relação ao contrato didático, este é considerado como uma relação em que determina a responsabilidade de cada professor e aluno, respeitando as suas respectivas regras estabelecidas durante o funcionamento do processo de ensino e aprendizagem. Pais (2002) afirma que o contrato didático "é uma noção apropriada para compreender o fenômeno educacional, no plano mais específico da sala de aula, embora, na realidade do cotidiano escolar, aconteçam fatos não previsíveis, dificultando a realização dos objetivos propostos".

Vale salientar que nem sempre o contrato didático é concretizado, pois existem vezes em que o discente não se interessa pela resolução das situações-problema propostas pelo docente, havendo assim uma ruptura do contrato. Portanto, na fase de experimentação, são coletados os dados dos discentes, para que posteriormente, ocorra a validação ou negação na etapa final da ED.

2.1.6 Análise a *Posteriori* e Validação da Pesquisa (Interna e Externa)

De acordo com Almouloud e Silva (2012), na análise a *posteriori* os dados coletados durante a experimentação devem ser analisados, devendo ser registrados através de procedimentos como: relato de observações, registros fotográficos das produções escritas e gravações das entrevistas com os alunos.

Durante esta fase, é realizada uma comparação dos resultados obtidos na experimentação com o que definido na análise a *priori*, para que sejam validadas as hipóteses durante a investigação. A ED permite dois tipos de validação: externa e interna. A primeira envolve "uma descrição genérica da classe ou das condutas e tipos de produção majoritárias na classe, estudo de sua evolução e verificação de sua adequação no que concerne ao esperado dos estudantes" (LABORDE, 1997, p.105). Na segunda, Alves (2016c) relata que existe "uma comparação das produções dos estudantes antes ou ao longo da sequência, ou ainda após experimentação em sala, o que pode ocorrer por meio de entrevistas individuais ou

em grupo, bem como por meio de questionários. E, também, por meio da comparação de produções externas, envolvendo outros alunos não submetidos à mesma sequência estruturada de ensino".

Contudo, esta pesquisa abordou uma quantidade pequena de alunos (8 discentes) num curto período de aplicação (período do curso de pós-graduação *Stricto Sensu*). Ressalta-se que as produções não foram comparadas com outras externas a esta pesquisa, sendo então realizada a validação interna. Na seção seguinte é realizado o campo epistêmico-matemático da pesquisa, sendo apresentado aos discentes como forma de aula.

2.2 Sequências Lineares Recursivas

Uma sequência linear recursiva é aquela em que um dado termo é calculado por meio de uma combinação linear de um ou mais termos anteriores, partindo da definição dos seus termos iniciais. Dessa forma, sequências diferentes podem ter a mesma fórmula de recorrência, porém uma mudança nos termos iniciais causa uma alteração nos demais termos da sequência (ZIERLER, 1959).

Cada sequência possui um polinômio característico, também chamada de equação característica, onde este está associado a ordem da sequência. Dessa forma, este tipo de sequências podem ser de várias ordens, sendo estudada, neste trabalho uma sequência de ordem 3, com coeficientes constantes cuja fórmula de recorrência é: $x_{n+3} + rx_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, em que $r, p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$, pois caso $q = p = 0$ ou $q = 0$ e $p \neq 0$ a sequência passará a ser de primeira ou segunda ordem, respectivamente. Para cada recorrência linear de terceira ordem homogênea, com coeficientes constantes, expressa como $x_{n+3} + rx_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, esta será associado ao polinômio de terceiro grau, $x^3 + rx^2 + px + q = 0$, denominada de polinômio ou equação característica (SILVA, 2015).

Diante disso, percebe-se que é necessário conhecer os seus termos antecessores, porém alguns métodos matemáticos são utilizados para obter esses elementos sem que haja essa necessidade, como por exemplo através da sua forma matricial. Esse método, consta de uma matriz geradora, em que as suas linhas resultam em uma base para uma transformação linear. No seu processo de construção, são então apresentados os termos da sequência, incluindo os operadores e algumas propriedades (ERCOLANO, 1979).

Vieira, Alves e Catarino (2019c) explicam que "toda matriz geradora Q possui pelo menos duas propriedades, sendo elas: calcular o próximo termo, e guardar informações relativas aos últimos termos da sequência". Com isso, são utilizados dois operadores, denominados de principal e de deslocamento. O primeiro traduz a maneira de como a sequência é calculada, fórmula de recorrência. O segundo mantém, exclui ou inclui novos termos da sequência na matriz. Assim, utiliza-se como exemplo a seguinte matriz da SP (SOKHUMA, 2013b; VIEIRA; ALVES; CATARINO, 2019c):

$$\text{Para } Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ tem-se } Q^n = \begin{bmatrix} P_n & P_{n-1} & P_{n-2} \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}.$$

Nota-se que na primeira coluna existem os coeficientes lineares dados pela fórmula de recorrência da sequência, denominada portanto de operador principal. Na segunda coluna é apresentado o operador de deslocamento, onde ao ser realizado o produto da matriz Q^n por Q , a segunda coluna apenas o termo a_{13} é levado em consideração, visto que o primeiro elemento é multiplicado pelo numeral neutro (0). Por fim, a primeira linha da matriz apresenta os termos iniciais da sequência, descritos na forma do mais atual para o mais antigo.

Visando generalizar este processo, é então considerada a sequência S , com fórmula de recorrência dada por:

$$S_n = \alpha_1 S_{n-1} + \alpha_2 S_{n-2} + \alpha_3 S_{n-3} + \dots + \alpha_n S_0,$$

em que $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots$, são os termos da sequência e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são os coeficientes da combinação linear, com $\alpha_n \in \mathbb{Z}$.

A matriz geradora Q é representada por (VIEIRA; ALVES; CATARINO, 2019c):

$$Q = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \mathbf{I} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

em que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são os coeficientes da recorrência da sequência, $\mathbf{I}$ a matriz de bloco dada pela matriz identidade, $\mathbf{0}$ o vetor linha, ambos os vetores de tamanho $g - 1$, em que g representa a ordem da sequência.

Diante disso, é possível estabelecer a quantidade de Matrizes Geradoras Q válidas de uma sequência linear e recorrente. A sequência deve estar disposta em alguma linha de Q^n , e, portanto, de z maneiras. Na matriz Q o operador pode estar em qualquer coluna, e os operadores de deslocamento também. Portanto a matriz Q pode ser permutada pelas linhas livremente resultando em $z!$, em que z representa a ordem da sequência. Assim, é fácil ver que para a SP que é de ordem 3, existem $3! = 6$ matrizes geradoras Q válidas.

Essas matrizes são obtidas a partir da permutação das linhas de uma matriz denominada como base, logo depois, são realizadas permutações das colunas utilizando a mesma técnica de permutação das linhas anteriores. Isso garante que os elementos obtidos após o produto de Q^n serão os mesmos, porém permutados segundo a mesma regra.

Como prova desse argumento, considere uma matriz A de ordem z e outra matriz B de mesma ordem, sendo os seus elementos representados, respectivamente por: $a_{i,j}$

e $b_{i,j}$. Realizando o produto entre elas, resulta na matriz C , sendo os seus elementos representados por: $c_{i,j} = \sum_{k=1}^z a_{i,k} b_{k,j}$.

Considerando ainda a permutação das linhas e colunas v e w das matrizes A e B , tem-se uma permutação idêntica no resultado na matriz C . Isso pode ser verificado ao analisar o comportamento da matriz resultante após a permutação dos elementos, enumerando-se 9 casos apresentados à seguir:

1. Quando $i, j \neq v, w$, tem-se que:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^z a_{i,k} b_{k,j}.$$

2. Quando $i, j = v$, tem-se que:

$$c_{w,w} = \sum_{k=1}^z a_{w,k} b_{k,w}.$$

3. Quando $i, j = w$, tem-se que:

$$c_{v,v} = \sum_{k=1}^z a_{v,k} b_{k,v}.$$

4. Quando $i = v, j = w$, tem-se que:

$$c_{w,v} = \sum_{k=1}^z a_{w,k} b_{k,v}.$$

5. Quando $i = w, j = v$, tem-se que:

$$c_{v,w} = \sum_{k=1}^z a_{v,k} b_{k,w}.$$

6. Quando $i = v, j \neq v, w$, tem-se que:

$$c_{w,j} = \sum_{k=1}^z a_{w,k} b_{k,j}.$$

7. Quando $i = w, j \neq v, w$, tem-se que:

$$c_{v,j} = \sum_{k=1}^z a_{v,k} b_{k,j}.$$

8. Quando $j = v, i \neq v, w$, tem-se que:

$$c_{i,w} = \sum_{k=1}^z a_{i,k} b_{k,w}.$$

9. Quando $j = w, i \neq v, w$, tem-se que:

$$c_{i,v} = \sum_{k=1}^z a_{i,k} b_{k,v}.$$

Note que nenhum novo elemento é adicionado à matriz resultante, sendo esses apenas permutações do produto matricial AB .

2.3 A Sequência de Padovan

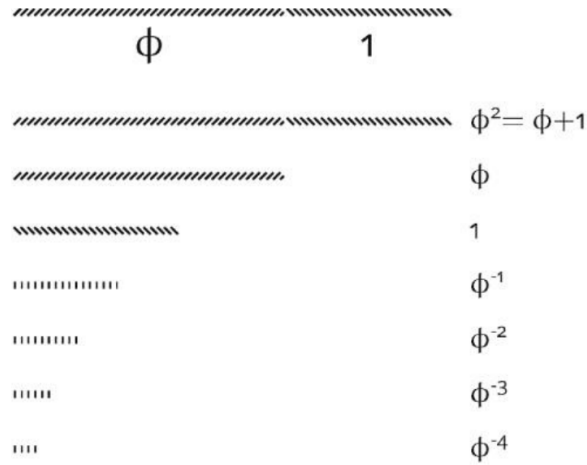
Visando a compreensão e o entendimento adequado acerca do processo de evolução e generalização das ideias matemáticas, algumas podendo ser registradas por intermédio da percepção de exemplos, pode-se observar este processo e realizar uma discussão em torno dos números de Padovan. De acordo com Padovan (2002) a natureza pode ser considerada como algo indescritível e insondável e, a ciência e a arte são como uma espécie de abstrações que nós tentamos compreender.

Tendo início no ano de 1939, a Segunda Guerra Mundial foi um conflito em que houve a utilização de tecnologias, até então nunca vistas, tais como: metralhadoras, bombas, granadas entre outras. Essas foram aperfeiçoadas para destruir milhares de vidas com um único golpe. Assim, muitas obras arquitetônicas acabaram por serem destruídas e danificadas nesta época, sendo cessada no ano de 1945.

Com ênfase nesse processo histórico matemático desta sequência, destaca-se o holandês Hans Van der Laan (1904 - 1991), o qual abandonou o curso de arquitetura na Technische Hogeschool de Delf, decidindo consagrar a sua vida à Deus como um monge beneditino. Assim, buscou ainda pesquisar as origens primitivas da arquitetura, estabelecendo uma ligação entre a arte da construção técnica com o espaço (PADOVAN, 1994). Diante disso, ele tomou como base a basílica cristã primitiva de abadia utilizada para treinar os arquitetos durante o processo de reconstrução das igrejas que haviam sido destruídas após a Segunda Guerra Mundial (VOET; SCHOONJANS, 2012). Com isso, Laan e seu irmão investigaram padrões para a arquitetura com base em experimentos utilizando pedras e, posteriormente, materiais de construção. Feito isso, deram por descoberto um novo padrão de medida, em que a sua construção é dada através de um número irracional, ideal para se trabalhar em escala geométrica e objetos espaciais (retângulos, trapézios, elipses, e etc), denominando este número de número plástico. Porém, este número foi estudado primeiramente por Gérard Cordonnier, chamando-o de número radiante. Uma aplicação deste número é mencionada na área da música, tocando acordes, compondo paredes, salas, entre outras.

De início, Van Der Laan estava buscando uma possível divisão de determinados segmentos, dos quais encontravam-se em uma proporção contínua, estabelecendo um problema real que ele expressou em uma de suas cartas repassadas ao arquiteto Richard Padovan (LLORCA-BOFÍ; MADRIGAL, 2019). Para isso, é então dividido um segmento em várias partes, para que os comprimentos das partes resultantes (ou a união das partes adjacentes) se encaixem perfeitamente em uma progressão geométrica decrescente (ver Figura 3). Para que esse requisito seja realizado, é então feito dois cortes e três partes, obtendo a função $f(x) = x^3 - x - 1$, possuindo apenas uma raiz real. Ao construir a progressão geométrica, os novos comprimentos são obtidos aritmeticamente com comprimentos maiores.

Figura 3 – Divisão dos segmentos para obtenção do número plástico.



Fonte: (LLORCA-BOFÍ; MADRIGAL, 2019)

E assim, cada novo comprimento é dado pela diferença entre o terceiro e o primeiro. Mas, surpreendentemente, é também a diferença entre o quinto e o quarto, enriquecendo assim os sistemas de medida. Com base nessas considerações, é confirmada a equação característica que obtêm como a sua única solução real o número plástico.

Segundo Spinadel e Buitrago (2009, p.163), o arquiteto Hans Van der Laan, estudou sobre o número plástico posteriormente, sendo portanto a única solução real da equação cúbica característica da SP. Assim sendo, tem-se que as suas raízes são conhecidas como família dos números plásticos. Uma maneira de demonstrar esse resultado, é por meio da fórmula de Cardano, onde de acordo com a equação do tipo $x^3 + px + q = 0$, com $p, q \in \mathbb{Z}$, é possível obter a raiz real: $x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$. Logo, para fins de resolução da equação cúbica mencionada acima, tem-se: $p = q = -1$. Substituindo na fórmula da raiz, tem-se:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-(-1)}{2} + \sqrt{\frac{(-1)^2}{4} + \frac{(-1)^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-(-1)}{2} - \sqrt{\frac{(-1)^2}{4} + \frac{(-1)^3}{27}}}.$$

$$\text{Assim tem-se: } x' = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}}} = 1,324717957244746025960908 \dots$$

Tal grandeza constitui uma das soluções da equação cúbica: $x^3 - x - 1 = 0$ e que representa uma das equações cúbicas que pertence à família das trinômios descritos do tipo $x^n - x - 1 = 0$, $n = 2, 3 \dots, k$, em que $k \in \mathbb{N}$. Voet e Schoonjans (2012, p.255) comentam que “seu número plástico possui o vigor do seu próprio sistema proporcional, sendo testado e usado por arquitetos e matemáticos”.

Seja P_n a SP, $\psi \approx 1,32$ a constante plástica (SPINADEL; BUITRAGO, 2009), tem-se a seguinte propriedade.

Propriedade 1. O número plástico pode ser representado através da interação de infinitas raízes cúbicas pela expressão (FERREIRA, 2015):

$$\psi = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \dots}}}$$

Demonstração. Realizando a operação algébrica, pode-se perceber que:

$$\psi = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \dots}}} \implies \psi^3 = 1 + \psi$$

Como visto anteriormente que ψ é um número real que satisfaz a equação cúbica $x^3 - x - 1 = 0$, sendo portanto um número plástico. A operação realizada é possível devido ao fato da sequência x_n com recorrência $x_{n+1} = \sqrt[3]{1 + x_n}$ com $x_1 = 1$ ser convergente. Assim, sendo a sequência monótona crescente (visto que $x_1 < x_2$, já que $x_1 = 1$ e $x_2 = \sqrt[3]{1 + 1}$) e supondo $x_{n-1} < x_n$, tem-se $x_n^3 = 1 + x_{n-1} < 1 + x_n = x_{n+1}^3$ e limitada superiormente (visto que $x_1 < \psi$ e supondo $x_n < \psi$, tem-se analogamente $x_{n+1}^3 = 1 + x_n < 1 + \psi = \psi^3$), então é convergente. $\square$

Doravante, seja c_n uma nova sequência em que $c_n = \frac{P_{n+1}}{P_n}$. Assim será explorada a convergência da nova sequência $c_n = \frac{P_{n+1}}{P_n}$ com base em Vieira, Alves e Catarino (2019c), em que $c_0 = \frac{P_1}{P_0} = \frac{1}{1} = 1$, $c_1 = \frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{1} = 1$, $c_2 = \frac{P_3}{P_2} = \frac{2}{1} = 2$, $c_3 = \frac{P_4}{P_3} = \frac{2}{2} = 1$.

Examinando a convergência de $c_n = \frac{P_{n+1}}{P_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Na Tabela 1 foram realizados os cálculos dos 20 primeiros termos de c_n para $n \geq 0$.

Tabela 1 – Valores de c_n .

n	c_n	n	c_n
1	1	11	1,3125
2	2	12	1,3333...
3	1	13	1,3214
4	1,5	14	1,3243
5	1,3333...	15	1,3265
6	1,25	16	1,3230
7	1,4	17	1,3255
8	1,28	18	1,324561
9	1,3333...	19	1,3245033
10	1,6	20	1,325

Com isso, pode-se perceber que $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{P_{n+1}}{P_n} \approx \psi \approx 1,32$.

Propriedade 2. A relação entre o número plástico ψ e a nova sequência c_n é dada por:

$$c_n \approx \psi = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \dots}}}$$

Demonstração. Realizando a multiplicação de três termos consecutivos da nova sequência c_n , tem-se que:

$$\begin{aligned} c_{n+2}c_{n+1}c_n &= \frac{P_{n+3}}{P_{n+2}} \frac{P_{n+2}}{P_{n+1}} \frac{P_{n+1}}{P_n} \\ &= \frac{P_{n+3}}{P_n} \end{aligned}$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \approx \psi$, e $c_n \approx c_{n+1} \approx c_{n+2}$. Assim:

$$\begin{aligned} \psi^3 &= \frac{P_{n+3}}{P_n} \\ \psi &= \sqrt[3]{\frac{P_{n+3}}{P_n}} \end{aligned}$$

Com isso:

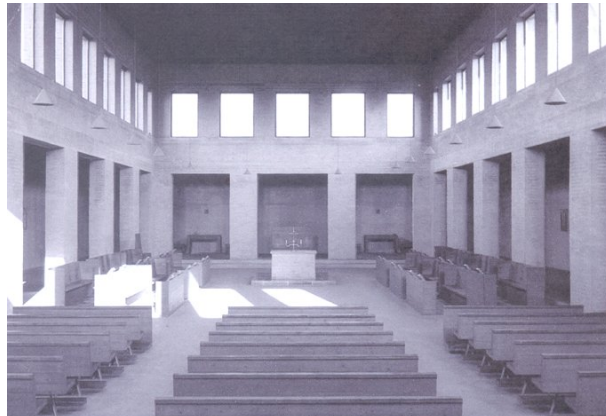
$$\begin{aligned} c_n \approx \psi &= \sqrt[3]{\frac{P_{n+3}}{P_n}} = \sqrt[3]{\frac{P_{n+1} + P_n}{P_n}} \\ &= \sqrt[3]{1 + \frac{P_{n+1}}{P_n}} \\ &= \sqrt[3]{1 + \psi} = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \dots}}} \end{aligned}$$

□

Diante da Propriedade 1, validada que a x_n é convergente, é fácil ver, através da Propriedade 2, que c_n também é convergente.

Na Figura 4, é mostrada uma aplicação do número plástico em uma igreja, onde as suas formas foram regidas pela propriedade deste número.

Figura 4 – Interior da igreja da abadia “Sint Benedictusberg” em Vaals, Holanda, construída seguindo os princípios arquiteturais de Dom Van der Laan baseados no número plástico.



Fonte:(MAROHNIC; STRMECKI, 2012)

Segundo Spinadel e Buitrago (2009), Ferreira (2015) é possível mostrar que o número de ouro (relacionado à SF) e o número plástico são as únicas soluções para os números mórficos.

Definição 1. *Um número real $p > 1$ é chamado de número mórfico quando existem números naturais m e n , com $m, n \in \mathbb{N}$, tais que:*

$$\begin{cases} p + 1 = p^m \\ p - 1 = p^{-n} \end{cases}$$

Se os valores de m e n forem substituídos por 2 e 1, tem-se:

$$\begin{cases} p + 1 = p^2 \\ p - 1 = p^{-1} \end{cases} \implies p^2 - p - 1 = 0$$

Onde as raízes são: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, que é conhecido como número de ouro.

Agora se m e n forem substituídos por 3 e 4, obtêm-se:

$$\begin{cases} p + 1 = p^3 \\ p - 1 = p^{-4} \end{cases} \implies p^3 - p - 1 = 0$$

Em que a sua solução real desta equação já foi explorada, conhecido como número plástico ou radiante.

Contudo, a SP possui este nome atribuído ao arquiteto italiano Richard Padovan (1935 -), nascido em Pádua (STEWART, 1996; MANGUEIRA et al., 2020). Vieira e Alves (2019a) relatam ainda que esta sequência considerada parente de uma das sequências mais conhecida, a SF, sendo também aritmética e de números inteiros. O matemático francês, Gérard Cordonnier (1907 – 1977) desenvolveu estudos acerca destes números, porém faleceu antes de realizar a publicação de sua pesquisa, desenvolvendo o número radiante, também conhecido como número plástico. Assim, a sequência também é conhecida como sequência de Cordonnier.

Richard Padovan, nasceu em 1935 e estudou arquitetura na Architectural Association, Londres (1952-57). Até hoje, ele realiza uma combinação entre a prática e o ensino durante os seus projetos de arquitetura, crendo em sua vocação direcionada à arquitetura. Com isso, iniciou estudo sobre o arquiteto holandês Dom Hans Van der Laan em 1974. Em 1999, publicou Proportion: Science, Philosophy, Architecture. Seu último livro, Rumo à Universalidade: Le Corbusier, Mies e De Stijl em 2002, contrasta os grandiosos ideais filosóficos do modernismo europeu. Há indícios ainda que esta sequência também é conhecida como os números de Van der Laan.

Em relação ao matemático Gérard Cordonnier, cuja imagem é lembrada na Figura 5, este nasceu em 7 de abril de 1907 em Bailleul (Norte), e morreu subitamente em Lhez, nos Altos Pirineus, devido a um acidente de estrada ocorrido em 12 de julho de 1977. Cordonnier foi aluno da École Polytechnique até o ano de 1928, formando-se em bacharelado em ciências no mesmo ano. Estudante da Escola Nacional de Engenharia Marítima até o ano de 1930, finalizando com a sua graduação no Instituto de Ótica. Salienta-se que o seu trabalho, referente ao número radiante, não foi finalizado, devido ao seu falecimento. Assim, os seus familiares realizam buscas de seus arquivos, dentre as gravações de seus colegas referente ao assunto, com o viés de reconstruir e publicar o seu estudo inerente à esse número e ao número de ouro. Autor ainda de pesquisas na área de eletrônica e matemática aplicada, possuindo mais de vinte patentes de invenções (VIEIRA; ALVES; CATARINO, 2020).

Figura 5 – Gérard Cordonnier.



Fonte: International (2019)

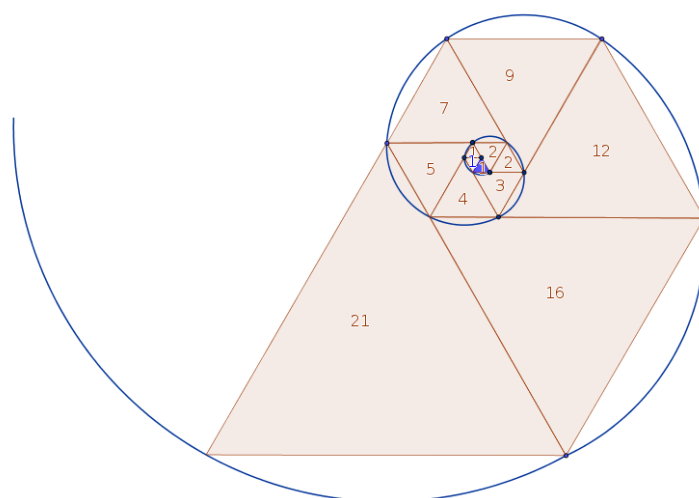
Definição 2. A SP é definida pela seguinte relação de recorrência com $n \in \mathbb{N}$:

$$P_n = P_{n-2} + P_{n-3},$$

$n \geq 3$, onde P_n é o n -ésimo termo da sequência e os primeiros termos são: $P_0 = P_1 = P_2 = 1$.

Vale salientar que existe uma representação geométrica da SP, e essa se dá através da espiral de Padovan, conforme mostra a Figura 6 desenvolvido no *software* Geogebra. Esta é composta pela justaposição de triângulos equiláteros respeitando uma regra de construção característica. Considere o triângulo de lado 1 destacado em azul como o triângulo inicial. A formação da espiral se dá pela adição de um novo triângulo equilátero ao maior lado do polígono formado, inicialmente o triângulo azul. Após a adição dos demais triângulos é formado um novo polígono, conhecido como pentágono plástico. A espiral se apresenta ao conectar com um arco duas extremidades do novo triângulo adicionado.

Figura 6 – Espiral de Padovan 2D.

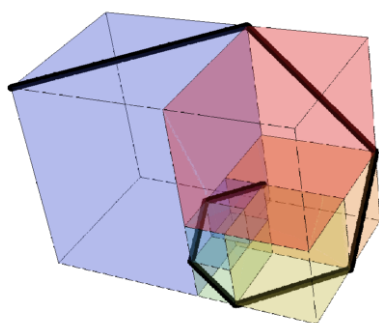


Fonte: Elaborado pela autora

Uma réplica desta representação geométrica foi feita pelo estudante Luís Cervera Pons e pelo professor Gabriel Seguí de Vidal na cidade de Minorca, localizada no leste da Espanha e no oeste da Sardenha, como mostra na Figura 7b. Uma outra representação deste espiral, elaborado no *software* Wolfram em três dimensões (3D), pode ser visualizado na Figura 7a, onde são adicionados cubos e assim traçadas retas de acordo com a diagonal externa à esta figura.

Figura 7 – Espirais de Padovan.

(a) Espiral de Padovan 3D.



Fonte: Elaborado pela autora

(b) Escultura do Espiral de Padovan.



Fonte: (BAGUR, 2014)

Wilson (1993) notou a relação da soma das diagonais de algumas sequências, estabelecendo alguns critérios e desenhou-as no papel, muitas dessas sequências ainda não haviam sido descobertas. Porém os números de Padovan não foram descobertos até 1994, sendo então essas diagonais posteriormente relacionadas à SP (ver Figura 8). Assim, pode-se perceber que a soma de cada diagonal é um número da SP.

3 ESTUDO DO CAMPO EPISTÊMICO-MATEMÁTICO: A GENERALIZAÇÃO E COMPLEXIFICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE PADOVAN

3.1 Relações Recorrentes de Padovan

Os estudos sobre a SP iniciaram com trabalhos de Sokhuma (2013b), Seenukul et al. (2015), Cerda-Morales (2017), Yilmaz e Taskara (2013) e Tas e Karaduman (2014) em que realizaram pesquisas em relação as matrizes de Padovan. A evolução do modelo de Padovan teve início com os trabalhos de Tasci (2018a) desenvolvendo uma forma complexa desses números através dos inteiros gaussianos. À vista disso, iniciando o estudo sobre o processo de generalização e complexificação desta sequência. Nos próximos tópicos serão exploradas: o modelo recursivo unidimensional de Padovan e as identidades; as generalizações deste modelo; relações matriciais; sequência $(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ -Z-dovan; Padovan afim e suas propriedades (VIEIRA; ALVES, 2018); relações n -dimensionais (OLIVEIRA; ALVES; PAIVA, 2017); números gaussianos e duais de Padovan (BERZSENYI, 1977; PETHE; HORADAM, 1986; SHOHAM, 2000; TASCI, 2018a); quatérnios, octônios e sedenios de Padovan (CATARINO, 2019; FAMILTON, 2015; TASCI, 2018b; CATARINO, 2018).

3.1.1 Modelo Recursivo Unidimensional de Padovan e Identidades

De posse da Definição 2, em que: $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, n \geq 3$, onde P_n é o n -ésimo termo da sequência e os primeiros termos são: $P_0 = P_1 = P_2 = 1$, formando a SP 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, ... À vista disso, realizando manipulações algébricas na recorrência, pode-se concluir que:

$$P_{n+1} = P_{n-1} + P_{n-2} \implies P_{n-2} = P_{n+1} - P_{n-1},$$

permitindo escrever os números de Padovan da seguinte forma:

$$P_1 = P_4 - P_2$$

$$P_2 = P_5 - P_3$$

$$P_3 = P_6 - P_4$$

$$\begin{aligned}
 P_4 &= P_7 - P_5 \\
 &\vdots \\
 P_{2n-1} &= P_{2n+2} - P_{2n} \\
 P_{2n} &= P_{2n+3} - P_{2n+1} \\
 P_{2n+1} &= P_{2n+4} - P_{2n+2}
 \end{aligned}$$

Com base nas relações apresentadas acima, inicia-se o estudo sobre o processo de complexificação e generalização da SP, apresentando algumas identidades unidimensionais para os números de Padovan, indicados por $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e, posteriormente, sua discussão na forma generalizada e complexa, com a inserção da unidade imaginária i . Veja:

Identidade 1. *A soma dos n primeiros termos de índice ímpar da SP é dada por:*

$$\sum_{i=1}^n P_{2i-1} = P_{2n+2} - 1.$$

Demonstração. Partindo dos números de Padovan descritos através da definição notacional e considerando apenas os termos de índice ímpar, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n P_{2i-1} &= P_1 + P_3 + P_5 + \dots + P_{2n-1} \\
 &= (P_4 - P_2) + (P_6 - P_4) + (P_8 - P_6) + \dots + (P_{2n+2} - P_{2n}) \\
 &= P_{2n+2} - P_2 = P_{2n+2} - 1.
 \end{aligned}$$

□

Identidade 2. *A soma dos n primeiros termos de índice par da SP é dada por:*

$$\sum_{i=1}^n P_{2i} = P_{2n+3} - 2.$$

Demonstração. Novamente, partindo da apresentação dos números de Padovan através da definição notacional, porém, considerando apenas os termos de índice par, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n P_{2i} &= P_2 + P_4 + P_6 + \dots + P_{2n} \\
 &= (P_5 - P_3) + (P_7 - P_5) + (P_9 - P_7) + \dots + (P_{2n+3} - P_{2n+1}) \\
 &= P_{2n+3} - P_3 \\
 &= P_{2n+3} - 2.
 \end{aligned}$$

□

Identidade 3. *A soma dos n primeiros termos da SP é dada por:*

$$\sum_{i=1}^n P_i = P_{n+5} - 3.$$

Demonstração. Segue que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n P_i &= P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \dots + P_n \\
&= (P_4 - P_2) + (P_5 - P_3) + (P_6 - P_4) + (P_7 - P_5) + \dots + (P_{n+3} - P_{n+1}) \\
&= (-P_2 - P_3) + (P_4 - P_4) + (P_5 - P_5) + \dots + (P_{n+1} - P_{n+1}) + (P_{n+2} + P_{n+3}) \\
&= P_{n+2} + P_{n+3} - P_2 - P_3 \\
&= P_{n+5} - 1 - 2 \\
&= P_{n+5} - 3.
\end{aligned}$$

□

Identidade 4. A soma de quaisquer três termos consecutivos da SP é dada por:

$$P_n + P_{n+1} + P_{n+2} = P_{n+5}.$$

Demonstração. Aplicando a Definição 2, tem-se:

$$\begin{aligned}
P_n + P_{n+1} + P_{n+2} &= P_{n+3} + P_{n+2} \\
&= P_{n+5}.
\end{aligned}$$

□

Identidade 5. A soma de quaisquer sete termos consecutivos da SP é dada por:

$$\sum_{i=0}^6 P_{n+i} = 2P_{n+8}.$$

Demonstração. Aplicando a Definição 2, tem-se:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^6 P_{n+i} &= P_n + P_{n+1} + P_{n+2} + P_{n+3} + P_{n+4} + P_{n+5} + P_{n+6} \\
&= P_{n+3} + P_{n+2} + P_{n+3} + P_{n+4} + P_{n+5} + P_{n+6} \\
&= P_{n+5} + P_{n+6} + P_{n+5} + P_{n+6} \\
&= P_{n+8} + P_{n+8} \\
&= 2P_{n+8}.
\end{aligned}$$

□

3.2 Generalizações da Sequência de Padovan

Tomando como base trabalhos voltados para a SF, Cereceda (2015), Bacani e Rabago (2015) e Hare, Prodinger e Shallit (2014), Vieira e Alves (2019b), os quais propuseram uma extensão desta sequência ao considerar que tal número será obtido a

partir da soma de dois, três ou quatro elementos anteriores, é possível estender os números de Padovan ao considerar uma quantidade maior de termos para estimar o seguinte. Alves e Neto (2011), Alves (2013) e Alves (2015) discutem a generalização do modelo de Fibonacci para os números inteiros, tornando-se relevante estabelecer conjecturas envolvendo o aumento da quantidade de termos antecedentes, visando definir outras sequências lineares e recursivas semelhantes, como é o caso da SP.

A SP é uma sequência linear e recorrente, de terceira ordem, visto que a sua fórmula de recorrência se dá através da soma dos dois termos anteriores contados a partir de um salto, além de seu polinômio característico ser de terceira ordem. Ao considerar que o termo seguinte da sequência será calculado como a soma dos três antecessores após o salto, aqui denominada de sequência de Tridovan, e portanto de quarta ordem. De maneira semelhante, tem-se os números: Tridovan (ordem 4), Tetradovan (ordem 5), Pentadovan (ordem 6), e Z-dovan (ordem z) que serão estudados neste trabalho.

Nesta seção são apresentados os teoremas para as extensões das sequências, onde fornece a descrição de uma fórmula explícita dos termos presentes na SP e de ordens superiores.

3.2.1 Representação Matricial de Padovan

Uma forma de obter qualquer elemento de uma sequência linear e recursiva é através da matriz geradora Q . Esta técnica foi aplicada para a SF, e nesta subseção a mesma ideia será aplicada para os números de Padovan (FALCON; PLAZA, 2007).

A SP possui uma matriz Q de ordem 3, que quando elevada a n -ésima potência dá origem aos termos desta. A relação matricial foi representada por Sokhuma (2013b), Seenukul et al. (2015) apresentando os valores iniciais diferentes da SP, sendo portanto definidos como $P_0 = 1, P_1 = 0, P_2 = 1$. Assim, visando prevalecer os seus valores iniciais (os quais já foram discutidos na Seção 2.2 como sendo $P_0 = P_1 = P_2 = 1$), tem-se que essa matriz, com $n \in \mathbb{N}$, expressa por:

Teorema 1. Para $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se $Q^n = \begin{bmatrix} P_{n-5} & P_{n-3} & P_{n-4} \\ P_{n-4} & P_{n-2} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-1} & P_{n-2} \end{bmatrix}$, para todo $n \geq 5$.

Demonstração. Utilizando o princípio da indução finita, tem-se que:

Para $n = 5$ tem-se:

$$Q^5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 & P_2 & P_1 \\ P_1 & P_3 & P_2 \\ P_2 & P_4 & P_3 \end{bmatrix}.$$

Assim, a igualdade é válida.

Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$Q^k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} P_{k-5} & P_{k-3} & P_{k-4} \\ P_{k-4} & P_{k-2} & P_{k-3} \\ P_{k-3} & P_{k-1} & P_{k-2} \end{bmatrix}.$$

Agora, verificando que seja válido para $n = k + 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} Q^{k+1} &= Q^k Q \\ &= \begin{bmatrix} P_{k-5} & P_{k-3} & P_{k-4} \\ P_{k-4} & P_{k-2} & P_{k-3} \\ P_{k-3} & P_{k-1} & P_{k-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{k-4} & P_{k-5} + P_{k-4} & P_{k-3} \\ P_{k-3} & P_{k-4} + P_{k-3} & P_{k-2} \\ P_{k-2} & P_{k-3} + P_{k-2} & P_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{k-4} & P_{k-2} & P_{k-3} \\ P_{k-3} & P_{k-1} & P_{k-2} \\ P_{k-2} & P_k & P_{k-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Outras matrizes Q de formas diferentes, porém com propriedades semelhantes foram encontradas (SEENKUL et al., 2015; YILMAZ; TASKARA, 2013; TAS; KARADUMAN, 2014), existindo portanto mais cinco matrizes Q de ordem 3, totalizando 6 matrizes válidas de Padovan. Prevalecendo os valores iniciais da sequência, tem-se que os seguintes teoremas:

Teorema 2. Para $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se $Q^n = \begin{bmatrix} P_{n-2} & P_{n-4} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-5} & P_{n-4} \\ P_{n-1} & P_{n-3} & P_{n-2} \end{bmatrix}$, para todo $n \geq 5$.

Demonstração. Por meio do princípio da indução finita, tem-se que:

Verificando para $n = 5$, tem-se:

$$Q^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_3 & P_1 & P_2 \\ P_2 & P_0 & P_1 \\ P_4 & P_2 & P_3 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, é validada a igualdade.

Supondo que o teorema descrito vale para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$Q^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} P_{k-2} & P_{k-4} & P_{k-3} \\ P_{k-3} & P_{k-5} & P_{k-4} \\ P_{k-1} & P_{k-3} & P_{k-2} \end{bmatrix}.$$

Com isso, é verificado que seja válido para $n = k + 1$. Obtendo:

$$\begin{aligned}
 Q^{k+1} &= Q^k Q^1 \\
 &= \begin{bmatrix} P_{k-2} & P_{k-4} & P_{k-3} \\ P_{k-3} & P_{k-5} & P_{k-4} \\ P_{k-1} & P_{k-3} & P_{k-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P_{k-3} + P_{k-4} & P_{k-3} & P_{k-2} \\ P_{k-5} + P_{k-4} & P_{k-4} & P_{k-3} \\ P_{k-3} + P_{k-2} & P_{k-2} & P_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{k-1} & P_{k-3} & P_{k-2} \\ P_{k-2} & P_{k-4} & P_{k-3} \\ P_k & P_{k-2} & P_{k-1} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

□

Teorema 3. Para $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se $Q^n = \begin{bmatrix} P_{n-5} & P_{n-4} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-2} & P_{n-1} \\ P_{n-4} & P_{n-3} & P_{n-2} \end{bmatrix}$, para todo $n \geq 5$.

Demonstração. Assim como foi demonstrado no Teorema 2, é possível chegar facilmente a demonstração deste e dos demais teoremas explorados abaixo. □

Teorema 4. Para $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se $Q^n = \begin{bmatrix} P_{n-2} & P_{n-1} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-2} & P_{n-4} \\ P_{n-4} & P_{n-3} & P_{n-5} \end{bmatrix}$, para todo $n \geq 5$.

Teorema 5. Para $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se $Q^n = \begin{bmatrix} P_{n-2} & P_{n-3} & P_{n-4} \\ P_{n-1} & P_{n-2} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-4} & P_{n-5} \end{bmatrix}$, para todo $n \geq 5$.

Teorema 6. Para $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se $Q^n = \begin{bmatrix} P_{n-2} & P_{n-3} & P_{n-1} \\ P_{n-4} & P_{n-5} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-4} & P_{n-2} \end{bmatrix}$, para todo $n \geq 5$.

Definição 3. De modo análogo à definição da SP (Definição 2), pode-se obter a recorrência para os termos negativos desta sequência, com $n \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}$, resultando em:

$$P_{-n} = P_{-n+3} - P_{-n+1}.$$

Com essa relação, é possível calcular os termos com índice inteiro não positivo da SP conforme apresenta a Tabela 2 abaixo:

Tabela 2 – Termos da SP - índice inteiro não positivo.

P_{-10}	P_{-9}	P_{-8}	P_{-7}	P_{-6}	P_{-5}	P_{-4}	P_{-3}	P_{-2}	P_{-1}	P_0
2	-1	0	1	-1	1	0	0	1	0	1

Fonte: Elaborado pela autora

A matriz geradora da SP para os números com índice inteiro não positivo, denominada de ϱ , é obtida através do cálculo da matriz inversa de Q , conjecturando o teorema abaixo, tomando como exemplo a matriz Q do Teorema 5.

Teorema 7. *Seja $n \in \mathbb{N}$ e $\varrho = Q^{-1}$, tem-se que a matriz abaixo representa a matriz geradora para a sequência negativa de Padovan.*

$$Q\varrho = I$$

$$\text{Para } \varrho = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ tem-se } \varrho^n = \begin{bmatrix} P_{-n-2} & P_{-n-3} & P_{-n-4} \\ P_{-n-3} + P_{-n-4} & P_{-n-4} + P_{-n-5} & P_{-n-5} + P_{-n-6} \\ P_{-n-3} & P_{-n-4} & P_{-n-5} \end{bmatrix}, n \geq 1.$$

Demonstração. Pelo princípio da indução finita, verifica-se que o teorema é válido para $n = 1$:

$$\varrho = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{-3} & P_{-4} & P_{-5} \\ P_{-4} + P_{-5} & P_{-5} + P_{-6} & P_{-6} + P_{-7} \\ P_{-4} & P_{-5} & P_{-6} \end{bmatrix}.$$

Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$:

$$\varrho = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} P_{-k-2} & P_{-k-3} & P_{-k-4} \\ P_{-k-3} + P_{-k-4} & P_{-k-4} + P_{-k-5} & P_{-k-5} + P_{-k-6} \\ P_{-k-3} & P_{-k-4} & P_{-k-5} \end{bmatrix}.$$

Assim, demonstra-se que vale para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} \varrho^{k+1} &= \varrho^k \varrho \\ &= \begin{bmatrix} P_{-k-2} & P_{-k-3} & P_{-k-4} \\ P_{-k-3} + P_{-k-4} & P_{-k-4} + P_{-k-5} & P_{-k-5} + P_{-k-6} \\ P_{-k-3} & P_{-k-4} & P_{-k-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{-k-3} & P_{-k-4} & P_{-k-2} - P_{-k-4} \\ P_{-k-4} + P_{-k-5} & P_{-k-5} + P_{-k-6} & P_{-k-3} + P_{-k-4} - P_{-k-5} - P_{-k-6} \\ P_{-k-4} & P_{-k-5} & P_{-k-3} - P_{-k-5} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{-k-3} & P_{-k-4} & P_{-k-5} \\ P_{-k-4} + P_{-k-5} & P_{-k-5} + P_{-k-6} & P_{-k-6} + P_{-k-7} \\ P_{-k-4} & P_{-k-5} & P_{-k-6} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

As outras matrizes geradoras ϱ seguem a mesma regra de formação, totalizando seis matrizes válidas de Padovan para índice inteiro não positivo da sequência.

3.2.2 Representação Matricial de Tridovan

Com base nos trabalhos de Vieira e Alves (2019d), Vieira e Alves (2019e), a sequência de Tridovan é uma extensão da SP de quarta ordem, sendo do tipo recorrente e linear, descrita com os seguintes termos: 1, 0, 1, 1, 2, 2, 4, 5, 8, 11, 17, ...

Definição 4. A sequência de Tridovan satisfaz a seguinte fórmula de recorrência, para $n \in \mathbb{N}$ (VIEIRA; ALVES, 2019d; VIEIRA; ALVES, 2019e):

$$P_{3(n)} = P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)},$$

$n \geq 4$, em que $P_{3(n)}$ representa o n -ésimo termo da sequência e com os termos iniciais $P_{3(0)} = 1, P_{3(1)} = 0, P_{3(2)} = P_{3(3)} = 1$.

Existe uma abordagem matricial para Tridovan, de maneira semelhante à SP, denominada de matriz geradora Q_3 , podendo também ser gerada através da recorrência (Definição 4).

Teorema 8. Seja $n \in \mathbb{N}$ e $Q_3(i, j)$ o termo da matriz Q_3 representado por i a linha e j a coluna, tem-se a matriz geradora Q_3 de Tridovan dada por (VIEIRA; ALVES, 2019d):

$$\text{Para } Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ tem-se } Q_3^n = \begin{bmatrix} Q_3(1,1) & Q_3(1,2) & Q_3(1,3) & Q_3(1,4) \\ Q_3(2,1) & Q_3(2,2) & Q_3(2,3) & Q_3(2,4) \\ Q_3(3,1) & Q_3(3,2) & Q_3(3,3) & Q_3(3,4) \\ Q_3(4,1) & Q_3(4,2) & Q_3(4,3) & Q_3(4,4) \end{bmatrix}, n \geq 6.$$

De forma a simplificar a visualização dos termos da matriz anterior, o cálculo de cada um destes é apresentado em cada uma das linhas a seguir:

$$\begin{aligned} Q_3(1,1) &= P_{3(n)}, \\ Q_3(1,2) &= P_{3(n-1)}, \\ Q_3(1,3) &= P_{3(n-2)}, \\ Q_3(1,4) &= P_{3(n-3)}, \\ Q_3(2,1) &= P_{3(n-1)} + P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)}, \\ Q_3(2,2) &= P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}, \\ Q_3(2,3) &= P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)}, \\ Q_3(2,4) &= P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)} + P_{3(n-6)}, \\ Q_3(3,1) &= P_{3(n-1)} + P_{3(n-2)}, \\ Q_3(3,2) &= P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)}, \\ Q_3(3,3) &= P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}, \\ Q_3(3,4) &= P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)}, \\ Q_3(4,1) &= P_{3(n-1)}, \\ Q_3(4,2) &= P_{3(n-2)}, \end{aligned}$$

$$Q_3(4, 3) = P_{3(n-3)},$$

$$Q_3(4, 4) = P_{3(n-4)}.$$

Demonstração. Verificando que o teorema é válido para $n = 6$, pelo princípio da indução finita:

$$\begin{aligned} Q_3^6 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^6 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{3(6)} & P_{3(5)} & P_{3(4)} & P_{3(3)} \\ P_{3(5)} + P_{3(4)} + P_{3(3)} & P_{3(4)} + P_{3(3)} + P_{3(2)} & P_{3(3)} + P_{3(2)} + P_{3(1)} & P_{3(2)} + P_{3(1)} + P_{3(0)} \\ P_{3(5)} + P_{3(4)} & P_{3(4)} + P_{3(3)} & P_{3(3)} + P_{3(2)} & P_{3(2)} + P_{3(1)} \\ P_{3(5)} & P_{3(4)} & P_{3(3)} & P_{3(2)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Supondo a veracidade para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$Q_3^k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Q_3(1, 1) & Q_3(1, 2) & Q_3(1, 3) & Q_3(1, 4) \\ Q_3(2, 1) & Q_3(2, 2) & Q_3(2, 3) & Q_3(2, 4) \\ Q_3(3, 1) & Q_3(3, 2) & Q_3(3, 3) & Q_3(3, 4) \\ Q_3(4, 1) & Q_3(4, 2) & Q_3(4, 3) & Q_3(4, 4) \end{bmatrix}.$$

Sendo:

$$Q_3(1, 1) = P_{3(k)},$$

$$Q_3(1, 2) = P_{3(k-1)},$$

$$Q_3(1, 3) = P_{3(k-2)},$$

$$Q_3(1, 4) = P_{3(k-3)},$$

$$Q_3(2, 1) = P_{3(k-1)} + P_{3(k-2)} + P_{3(k-3)},$$

$$Q_3(2, 2) = P_{3(k-2)} + P_{3(k-3)} + P_{3(k-4)},$$

$$Q_3(2, 3) = P_{3(k-3)} + P_{3(k-4)} + P_{3(k-5)},$$

$$Q_3(2, 4) = P_{3(k-4)} + P_{3(k-5)} + P_{3(k-6)},$$

$$Q_3(3, 1) = P_{3(k-1)} + P_{3(k-2)},$$

$$Q_3(3, 2) = P_{3(k-2)} + P_{3(k-3)},$$

$$Q_3(3, 3) = P_{3(k-3)} + P_{3(k-4)},$$

$$Q_3(3, 4) = P_{3(k-4)} + P_{3(k-5)},$$

$$Q_3(4, 1) = P_{3(k-1)},$$

$$Q_3(4, 2) = P_{3(k-2)},$$

$$Q_3(4, 3) = P_{3(k-3)},$$

$$Q_3(4, 4) = P_{3(k-4)}.$$

Demonstrando que o teorema é válido para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}
 Q_3^{k+1} &= Q_3^k Q_3 \\
 Q_3^{k+1} &= \begin{bmatrix} Q_3(1,1) & Q_3(1,2) & Q_3(1,3) & Q_3(1,4) \\ Q_3(2,1) & Q_3(2,2) & Q_3(2,3) & Q_3(2,4) \\ Q_3(3,1) & Q_3(3,2) & Q_3(3,3) & Q_3(3,4) \\ Q_3(4,1) & Q_3(4,2) & Q_3(4,3) & Q_3(4,4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} Q'_3(1,1) & Q'_3(1,2) & Q'_3(1,3) & Q'_3(1,4) \\ Q'_3(2,1) & Q'_3(2,2) & Q'_3(2,3) & Q'_3(2,4) \\ Q'_3(3,1) & Q'_3(3,2) & Q'_3(3,3) & Q'_3(3,4) \\ Q'_3(4,1) & Q'_3(4,2) & Q'_3(4,3) & Q'_3(4,4) \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Tem-se que cada elemento dessa matriz é dado por:

$$\begin{aligned}
 Q'_3(1,1) &= P_{3(k-1)} + P_{3(k-2)} + P_{3(k-3)} = P_{3(k+1)}, \\
 Q'_3(1,2) &= P_{3(k)}, \\
 Q'_3(1,3) &= P_{3(k-1)}, \\
 Q'_3(1,4) &= P_{3(k-2)}, \\
 Q'_3(2,1) &= P_{3(k-2)} + P_{3(k-3)} + P_{3(k-4)} + P_{3(k-3)} + P_{3(k-4)} + P_{3(k-5)} + P_{3(k-4)} + P_{3(k-5)} + P_{3(k-6)} = \\
 &P_{3(k)} + P_{3(k-1)} + P_{3(k-2)}, \\
 Q'_3(2,2) &= P_{3(k-1)} + P_{3(k-2)} + P_{3(k-3)}, \\
 Q'_3(2,3) &= P_{3(k-2)} + P_{3(k-3)} + P_{3(k-4)}, \\
 Q'_3(2,4) &= P_{3(k-3)} + P_{3(k-4)} + P_{3(k-5)}, \\
 Q'_3(3,1) &= P_{3(k-2)} + P_{3(k-3)} + P_{3(k-3)} + P_{3(k-4)} + P_{3(k-4)} + P_{3(k-5)} = P_{3(k)} + P_{3(k-1)}, \\
 Q'_3(3,2) &= P_{3(k-1)} + P_{3(k-2)}, \\
 Q'_3(3,3) &= P_{3(k-2)} + P_{3(k-3)}, \\
 Q'_3(3,4) &= P_{3(k-3)} + P_{3(k-4)}, \\
 Q'_3(4,1) &= P_{3(k-2)} + P_{3(k-3)} + P_{3(k-4)} = P_{3(k)}, \\
 Q'_3(4,2) &= P_{3(k-1)}, \\
 Q'_3(4,3) &= P_{3(k-2)}, \\
 Q'_3(4,4) &= P_{3(k-3)}.
 \end{aligned}$$

□

Como os termos da sequência de Tridovan são de ordem 4 (três elementos que compõe a fórmula de recorrência, mais um elemento dado como o salto da sequência), pode-se verificar a quantidade de matrizes geradoras Q válidas através da permutação de suas linhas e posteriormente das suas colunas, de acordo com as linhas que foram permutadas, resultando em $P_4 = 4! = 24$. Além dessa matriz estudada, existem mais vinte e três matrizes válidas 4×4 (de ordem 4), totalizando vinte e quatro matrizes geradoras Q_3 de Tridovan. Cada uma dessas matrizes Q_3 e sua n -ésima potência podem ser demonstradas

de maneira semelhante a apresentada anteriormente. No apêndice C são mostradas as outras vinte e três matrizes.

Baseado no mesmo princípio utilizado para compor a fórmula de recorrência da SP para índices inteiros não positivo, pode-se obter a composição da recorrência da sequência de Tridovan.

Definição 5. Com $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se a fórmula de recorrência da sequência de Tridovan:

$$P_{3(-n)} = P_{3(-n+4)} - P_{3(-n+2)} - P_{3(-n+1)}.$$

Assim, é possível calcular os termos com índice inteiro não positivo de Tridovan de acordo com a Tabela 3 abaixo:

Tabela 3 – Termos da sequência de Tridovan - índice inteiro não positivo.

$P_{3(-10)}$	$P_{3(-9)}$	$P_{3(-8)}$	$P_{3(-7)}$	$P_{3(-6)}$	$P_{3(-5)}$	$P_{3(-4)}$	$P_{3(-3)}$	$P_{3(-2)}$	$P_{3(-1)}$	$P_{3(0)}$
2	-2	0	1	0	-1	1	0	0	0	1

Fonte: Elaborado pela autora

Com índice inteiro não positivo, a sequência de Tridovan, será nomeada a matriz geradora de ϱ_3 , obtida através do cálculo da matriz inversa de Q_3 (Teorema 8).

Teorema 9. Seja $n \in \mathbb{N}$ e $\varrho_3(i, j)$ o termo da matriz ϱ_3 representado por i a linha e j a coluna, tem-se ϱ_3 a matriz geradora para os termos de Tridovan com índice inteiro não positivo, onde $\varrho_3 = Q_3^{-1}$, em que:

$$Q_3 \varrho_3 = I$$

$$\text{Para } \varrho_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ tem-se } \varrho_3^n = \begin{bmatrix} \varrho_3(1, 1) & \varrho_3(1, 2) & \varrho_3(1, 3) & \varrho_3(1, 4) \\ \varrho_3(2, 1) & \varrho_3(2, 2) & \varrho_3(2, 3) & \varrho_3(2, 4) \\ \varrho_3(3, 1) & \varrho_3(3, 2) & \varrho_3(3, 3) & \varrho_3(3, 4) \\ \varrho_3(4, 1) & \varrho_3(4, 2) & \varrho_3(4, 3) & \varrho_3(4, 4) \end{bmatrix}, n \geq 1.$$

Simplificando a visualização da matriz, os termos são dispostos em cada linha:

$$\begin{aligned} \varrho_3(1, 1) &= P_{3(-n)}, \\ \varrho_3(1, 2) &= P_{3(-n-1)}, \\ \varrho_3(1, 3) &= P_{3(-n-2)}, \\ \varrho_3(1, 4) &= P_{3(-n-3)}, \\ \varrho_3(2, 1) &= P_{3(-n-1)} + P_{3(-n-2)} + P_{3(-n-3)}, \\ \varrho_3(2, 2) &= P_{3(-n-2)} + P_{3(-n-3)} + P_{3(-n-4)}, \\ \varrho_3(2, 3) &= P_{3(-n-3)} + P_{3(-n-4)} + P_{3(-n-5)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varrho_3(2, 4) &= P_{3(-n-4)} + P_{3(-n-5)} + P_{3(-n-6)}, \\
 \varrho_3(3, 1) &= P_{3(-n-1)} + P_{3(-n-2)}, \\
 \varrho_3(3, 2) &= P_{3(-n-2)} + P_{3(-n-3)}, \\
 \varrho_3(3, 3) &= P_{3(-n-3)} + P_{3(-n-4)}, \\
 \varrho_3(3, 4) &= P_{3(-n-4)} + P_{3(-n-5)}, \\
 \varrho_3(4, 1) &= P_{3(-n-1)}, \\
 \varrho_3(4, 2) &= P_{3(-n-2)}, \\
 \varrho_3(4, 3) &= P_{3(-n-3)}, \\
 \varrho_3(4, 4) &= P_{3(-n-4)}.
 \end{aligned}$$

Demonstração. A demonstração pode ser realizada utilizando o princípio da indução finita conforme feito na demonstração do Teorema 7. $\square$

As demais matrizes geradoras ϱ_3 utilizam a mesma regra de formação, compondo 24 matrizes geradoras válidas de Tridovan com índice inteiro não positivo da sequência.

3.2.3 Representação Matricial de Tetradovan

A sequência de Tetradovan é uma outra extensão da SP, definida por Vieira e Alves (2019d), como sendo uma sequência de quinta ordem, descrevendo os seus dez primeiros elementos como: 1, 0, 1, 1, 2, 3, 4, 7, 10, 16, ...

Definição 6. A sequência de Tetradovan satisfaz a relação de recorrência, com $n \in \mathbb{N}$ (VIEIRA; ALVES, 2019d):

$$P_{4(n)} = P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)},$$

$n \geq 5$, em que $P_{4(n)}$ representa o n -ésimo termo da sequência e com os valores iniciais $P_{4(0)} = 1, P_{4(1)} = 0, P_{4(2)} = P_{4(3)} = 1, P_{4(4)} = 2$.

Qualquer termo da sequência de Tetradovan pode ser obtido através do cálculo da n -ésima potência de Q , gerado a partir da matriz geradora.

Teorema 10. Seja $n \in \mathbb{N}$ e $Q_4(i, j)$ o termo da matriz Q_4 representado por i a linha e j a coluna, tem-se a matriz geradora de Tetradovan, Q_4 dada por (VIEIRA; ALVES, 2019d):

$$\text{Para } Q_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ tem-se } Q_4^n = \begin{bmatrix} Q_4(1, 1) & Q_4(1, 2) & Q_4(1, 3) & Q_4(1, 4) & Q_4(1, 5) \\ Q_4(2, 1) & Q_4(2, 2) & Q_4(2, 3) & Q_4(2, 4) & Q_4(2, 5) \\ Q_4(3, 1) & Q_4(3, 2) & Q_4(3, 3) & Q_4(3, 4) & Q_4(3, 5) \\ Q_4(4, 1) & Q_4(4, 2) & Q_4(4, 3) & Q_4(4, 4) & Q_4(4, 5) \\ Q_4(5, 1) & Q_4(5, 2) & Q_4(5, 3) & Q_4(5, 4) & Q_4(5, 5) \end{bmatrix},$$

$n \geq 8$ e onde cada termo da matriz anterior é dado por:

$$\begin{aligned}
Q_4(1, 1) &= P_{4(n)}, \\
Q_4(1, 2) &= P_{4(n-1)}, \\
Q_4(1, 3) &= P_{4(n-2)}, \\
Q_4(1, 4) &= P_{4(n-3)}, \\
Q_4(1, 5) &= P_{4(n-4)}, \\
Q_4(2, 1) &= P_{4(n-1)} + P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)}, \\
Q_4(2, 2) &= P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)}, \\
Q_4(2, 3) &= P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)}, \\
Q_4(2, 4) &= P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)} + P_{4(n-7)}, \\
Q_4(2, 5) &= P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)} + P_{4(n-7)} + P_{4(n-8)}, \\
Q_4(3, 1) &= P_{4(n-1)} + P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)}, \\
Q_4(3, 2) &= P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)}, \\
Q_4(3, 3) &= P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)}, \\
Q_4(3, 4) &= P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)}, \\
Q_4(3, 5) &= P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)} + P_{4(n-7)}, \\
Q_4(4, 1) &= P_{4(n-1)} + P_{4(n-2)}, \\
Q_4(4, 2) &= P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)}, \\
Q_4(4, 3) &= P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)}, \\
Q_4(4, 4) &= P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)}, \\
Q_4(4, 5) &= P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)}, \\
Q_4(5, 1) &= P_{4(n-1)}, \\
Q_4(5, 2) &= P_{4(n-2)}, \\
Q_4(5, 3) &= P_{4(n-3)}, \\
Q_4(5, 4) &= P_{4(n-4)}, \\
Q_4(5, 5) &= P_{4(n-5)}.
\end{aligned}$$

Demonstração. Verificando que funciona para $n = 8$, pelo princípio da indução finita:

$$Q_4^8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^8 = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 4 & 3 & 2 \\ 16 & 10 & 7 & 4 & 3 \\ 14 & 9 & 6 & 4 & 2 \\ 11 & 7 & 5 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Q_4(1, 1) & Q_4(1, 2) & Q_4(1, 3) & Q_4(1, 4) & Q_4(1, 5) \\ Q_4(2, 1) & Q_4(2, 2) & Q_4(2, 3) & Q_4(2, 4) & Q_4(2, 5) \\ Q_4(3, 1) & Q_4(3, 2) & Q_4(3, 3) & Q_4(3, 4) & Q_4(3, 5) \\ Q_4(4, 1) & Q_4(4, 2) & Q_4(4, 3) & Q_4(4, 4) & Q_4(4, 5) \\ Q_4(5, 1) & Q_4(5, 2) & Q_4(5, 3) & Q_4(5, 4) & Q_4(5, 5) \end{bmatrix}.$$

Em que cada elemento é dado por:

$$\begin{aligned}
Q_4(1, 1) &= P_{4(8)} , \\
Q_4(1, 2) &= P_{4(7)}, \\
Q_4(1, 3) &= P_{4(6)}, \\
Q_4(1, 4) &= P_{4(5)}, \\
Q_4(1, 5) &= P_{4(4)}, \\
Q_4(2, 1) &= P_{4(7)} + P_{4(6)} + P_{4(5)} + P_{4(4)}, \\
Q_4(2, 2) &= P_{4(6)} + P_{4(5)} + P_{4(4)} + P_{4(3)}, \\
Q_4(2, 3) &= P_{4(5)} + P_{4(4)} + P_{4(3)} + P_{4(2)}, \\
Q_4(2, 4) &= P_{4(4)} + P_{4(3)} + P_{4(2)} + P_{4(1)}, \\
Q_4(2, 5) &= P_{4(3)} + P_{4(2)} + P_{4(1)} + P_{4(0)}, \\
Q_4(3, 1) &= P_{4(7)} + P_{4(6)} + P_{4(5)}, \\
Q_4(3, 2) &= P_{4(6)} + P_{4(5)} + P_{4(4)}, \\
Q_4(3, 3) &= P_{4(5)} + P_{4(4)} + P_{4(3)}, \\
Q_4(3, 4) &= P_{4(4)} + P_{4(3)} + P_{4(2)}, \\
Q_4(3, 5) &= P_{4(3)} + P_{4(2)} + P_{4(1)}, \\
Q_4(4, 1) &= P_{4(7)} + P_{4(6)}, \\
Q_4(4, 2) &= P_{4(6)} + P_{4(5)}, \\
Q_4(4, 3) &= P_{4(5)} + P_{4(4)}, \\
Q_4(4, 4) &= P_{4(4)} + P_{4(3)}, \\
Q_4(4, 5) &= P_{4(3)} + P_{4(2)}, \\
Q_4(5, 1) &= P_{4(7)}, \\
Q_4(5, 2) &= P_{4(6)}, \\
Q_4(5, 3) &= P_{4(5)}, \\
Q_4(5, 4) &= P_{4(4)}, \\
Q_4(5, 5) &= P_{4(3)}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, assume-se que o teorema vale para para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$:

$$Q_4^k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Q_4(1, 1) & Q_4(1, 2) & Q_4(1, 3) & Q_4(1, 4) & Q_4(1, 5) \\ Q_4(2, 1) & Q_4(2, 2) & Q_4(2, 3) & Q_4(2, 4) & Q_4(2, 5) \\ Q_4(3, 1) & Q_4(3, 2) & Q_4(3, 3) & Q_4(3, 4) & Q_4(3, 5) \\ Q_4(4, 1) & Q_4(4, 2) & Q_4(4, 3) & Q_4(4, 4) & Q_4(4, 5) \\ Q_4(5, 1) & Q_4(5, 2) & Q_4(5, 3) & Q_4(5, 4) & Q_4(5, 5) \end{bmatrix}.$$

Em que cada elemento é descrito por:

$$\begin{aligned}
Q_4(1, 1) &= P_{4(k)} , \\
Q_4(1, 2) &= P_{4(k-1)}, \\
Q_4(1, 3) &= P_{4(k-2)}, \\
Q_4(1, 4) &= P_{4(k-3)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_4(1, 5) &= P_{4(k-4)}, \\
Q_4(2, 1) &= P_{4(k-1)} + P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)}, \\
Q_4(2, 2) &= P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)}, \\
Q_4(2, 3) &= P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)}, \\
Q_4(2, 4) &= P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)} + P_{4(k-7)}, \\
Q_4(2, 5) &= P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)} + P_{4(k-7)} + P_{4(k-8)}, \\
Q_4(3, 1) &= P_{4(k-1)} + P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)}, \\
Q_4(3, 2) &= P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)}, \\
Q_4(3, 3) &= P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)}, \\
Q_4(3, 4) &= P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)}, \\
Q_4(3, 5) &= P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)} + P_{4(k-7)}, \\
Q_4(4, 1) &= P_{4(k-1)} + P_{4(k-2)}, \\
Q_4(4, 2) &= P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)}, \\
Q_4(4, 3) &= P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)}, \\
Q_4(4, 4) &= P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)}, \\
Q_4(4, 5) &= P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)}, \\
Q_4(5, 1) &= P_{4(k-1)}, \\
Q_4(5, 2) &= P_{4(k-2)}, \\
Q_4(5, 3) &= P_{4(k-3)}, \\
Q_4(5, 4) &= P_{4(k-4)}, \\
Q_4(5, 5) &= P_{4(k-5)}.
\end{aligned}$$

Assim, demonstra-se que para $n = k + 1$, o teorema continua sendo válido:

$$Q_4^{k+1} = Q_4^k Q_4$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} Q_4(1, 1) & Q_4(1, 2) & Q_4(1, 3) & Q_4(1, 4) & Q_4(1, 5) \\ Q_4(2, 1) & Q_4(2, 2) & Q_4(2, 3) & Q_4(2, 4) & Q_4(2, 5) \\ Q_4(3, 1) & Q_4(3, 2) & Q_4(3, 3) & Q_4(3, 4) & Q_4(3, 5) \\ Q_4(4, 1) & Q_4(4, 2) & Q_4(4, 3) & Q_4(4, 4) & Q_4(4, 5) \\ Q_4(5, 1) & Q_4(5, 2) & Q_4(5, 3) & Q_4(5, 4) & Q_4(5, 5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} Q'_4(1, 1) & Q'_4(1, 2) & Q'_4(1, 3) & Q'_4(1, 4) & Q'_4(1, 5) \\ Q'_4(2, 1) & Q'_4(2, 2) & Q'_4(2, 3) & Q'_4(2, 4) & Q'_4(2, 5) \\ Q'_4(3, 1) & Q'_4(3, 2) & Q'_4(3, 3) & Q'_4(3, 4) & Q'_4(3, 5) \\ Q'_4(4, 1) & Q'_4(4, 2) & Q'_4(4, 3) & Q'_4(4, 4) & Q'_4(4, 5) \\ Q'_4(5, 1) & Q'_4(5, 2) & Q'_4(5, 3) & Q'_4(5, 4) & Q'_4(5, 5) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Para fins de facilitar a visualização, tem-se que cada elemento dessa matriz é dado por:

$$Q'_4(1, 1) = P_{4(k+1)},$$

$$\begin{aligned}
Q'_4(1, 2) &= P_{4(k)}, \\
Q'_4(1, 3) &= P_{4(k-1)}, \\
Q'_4(1, 4) &= P_{4(k-2)}, \\
Q'_4(1, 5) &= P_{4(k-3)}, \\
Q'_4(2, 1) &= P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)} + \\
&P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)} + P_{4(k-7)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)} + P_{4(k-7)} + P_{4(k-8)} = \\
&P_{4(k)} + P_{4(k-1)} + P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)}, \\
Q'_4(2, 2) &= P_{4(k-1)} + P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)}, \\
Q'_4(2, 3) &= P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)}, \\
Q'_4(2, 4) &= P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)}, \\
Q'_4(2, 5) &= P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)} + P_{4(k-7)}, \\
Q'_4(3, 1) &= P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + \\
&P_{4(k-6)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)} + P_{4(k-7)} = P_{4(k)} + P_{4(k-1)} + P_{4(k-2)}, \\
Q'_4(3, 2) &= P_{4(k-1)} + P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)}, \\
Q'_4(3, 3) &= P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)}, \\
Q'_4(3, 4) &= P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)}, \\
Q'_4(3, 5) &= P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)}, \\
Q'_4(4, 1) &= P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)} = \\
&P_{4(k)} + P_{4(k-1)}, \\
Q'_4(4, 2) &= P_{4(k-1)} + P_{4(k-2)}, \\
Q'_4(4, 3) &= P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)}, \\
Q'_4(4, 4) &= P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)}, \\
Q'_4(4, 5) &= P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)}, \\
Q'_4(5, 1) &= P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} = P_{4(k)}, \\
Q'_4(5, 2) &= P_{4(k-1)}, \\
Q'_4(5, 3) &= P_{4(k-2)}, \\
Q'_4(5, 4) &= P_{4(k-3)}, \\
Q'_4(5, 5) &= P_{4(k-4)}.
\end{aligned}$$

□

O comportamento com índice inteiro não positivo da sequência de Tetradovan é definido a partir da recorrência $P_{4(n+5)} = P_{4(n+3)} + P_{4(n+2)} + P_{4(n+1)} + P_{4(n)}$, assim tem-se a definição abaixo.

Definição 7. *A fórmula de recorrência de Tetradovan com índice inteiro não positivo, com $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$:*

$$P_{4(-n)} = P_{4(-n+5)} - P_{4(-n+3)} - P_{4(-n+2)} - P_{4(-n+1)}.$$

Alguns termos com índice inteiro não positivo de Tetradovan são apresentados abaixo (Tabela 4).

Tabela 4 – Termos da sequência de Tetradovan - índice inteiro não positivo.

$P_{4(-10)}$	$P_{4(-9)}$	$P_{4(-8)}$	$P_{4(-7)}$	$P_{4(-6)}$	$P_{4(-5)}$	$P_{4(-4)}$	$P_{4(-3)}$	$P_{4(-2)}$	$P_{4(-1)}$	$P_{4(0)}$
0	1	0	0	-1	1	0	0	0	0	1

Fonte: Elaborado pela autora

Os termos com índice inteiro não positivo da sequência de Tetradovan, esses podem ser obtidos a partir da matriz geradora, chamada de ϱ_4 .

Teorema 11. *Seja $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ e $\varrho_4(i, j)$ o termo da matriz ϱ_4 representado por i a linha e j a coluna, tem-se a matriz geradora para os termos de Tetradovan com índice inteiro não positivo, calculada a partir da matriz inversa de Q_4 (ver Teorema 10), em que:*

$$Q_4 \varrho_4 = I$$

$$\text{Para } \varrho_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ tem-se } \varrho_4^n = \begin{bmatrix} \varrho_4(1,1) & \varrho_4(1,2) & \varrho_4(1,3) & \varrho_4(1,4) & \varrho_4(1,5) \\ \varrho_4(2,1) & \varrho_4(2,2) & \varrho_4(2,3) & \varrho_4(2,4) & \varrho_4(2,5) \\ \varrho_4(3,1) & \varrho_4(3,2) & \varrho_4(3,3) & \varrho_4(3,4) & \varrho_4(3,5) \\ \varrho_4(4,1) & \varrho_4(4,2) & \varrho_4(4,3) & \varrho_4(4,4) & \varrho_4(4,5) \\ \varrho_4(5,1) & \varrho_4(5,2) & \varrho_4(5,3) & \varrho_4(5,4) & \varrho_4(5,5) \end{bmatrix}.$$

Para melhor visualizar a matriz, os termos são apresentados em cada linha:

$$\begin{aligned} \varrho_4(1,1) &= P_{4(-n)}, \\ \varrho_4(1,2) &= P_{4(-n-1)}, \\ \varrho_4(1,3) &= P_{4(-n-2)}, \\ \varrho_4(1,4) &= P_{4(-n-3)}, \\ \varrho_4(1,5) &= P_{4(-n-4)}, \\ \varrho_4(2,1) &= P_{4(-n-1)} + P_{4(-n-2)} + P_{4(-n-3)} + P_{4(-n-4)}, \\ \varrho_4(2,2) &= P_{4(-n-2)} + P_{4(-n-3)} + P_{4(-n-4)} + P_{4(-n-5)}, \\ \varrho_4(2,3) &= P_{4(-n-3)} + P_{4(-n-4)} + P_{4(-n-5)} + P_{4(-n-6)}, \\ \varrho_4(2,4) &= P_{4(-n-4)} + P_{4(-n-5)} + P_{4(-n-6)} + P_{4(-n-7)}, \\ \varrho_4(2,5) &= P_{4(-n-5)} + P_{4(-n-6)} + P_{4(-n-7)} + P_{4(-n-8)}, \\ \varrho_4(3,1) &= P_{4(-n-1)} + P_{4(-n-2)} + P_{4(-n-3)}, \\ \varrho_4(3,2) &= P_{4(-n-2)} + P_{4(-n-3)} + P_{4(-n-4)}, \\ \varrho_4(3,3) &= P_{4(-n-3)} + P_{4(-n-4)} + P_{4(-n-5)}, \\ \varrho_4(3,4) &= P_{4(-n-4)} + P_{4(-n-5)} + P_{4(-n-6)}, \\ \varrho_4(3,5) &= P_{4(-n-5)} + P_{4(-n-6)} + P_{4(-n-7)}, \\ \varrho_4(4,1) &= P_{4(-n-1)} + P_{4(-n-2)}, \end{aligned}$$

$$\varrho_4(4, 2) = P_{4(-n-2)} + P_{4(-n-3)},$$

$$\varrho_4(4, 3) = P_{4(-n-3)} + P_{4(-n-4)},$$

$$\varrho_4(4, 4) = P_{4(-n-4)} + P_{4(-n-5)},$$

$$\varrho_4(4, 5) = P_{4(-n-5)} + P_{4(-n-6)},$$

$$\varrho_4(5, 1) = P_{4(-n-1)},$$

$$\varrho_4(5, 2) = P_{4(-n-2)},$$

$$\varrho_4(5, 3) = P_{4(-n-3)},$$

$$\varrho_4(5, 4) = P_{4(-n-4)},$$

$$\varrho_4(5, 5) = P_{4(-n-5)}.$$

Demonstração. A demonstração pode ser realizada utilizando o princípio da indução finita conforme feito na demonstração do Teorema 7. $\square$

Seguindo o princípio matemático abordado para os termos da SP e Tridovan, bem como a sua obtenção dada a partir da permutação das linhas, pode-se concluir que ao todo serão 120 matrizes geradoras Q de Tetradovan válidas ($P_5 = 5! = 120$) de ordem 5, sendo uma já abordada nesta seção e outras no Apêndice D. A mesma quantidade é válida para as matrizes com índice inteiro não positivo da sequência. As demais matrizes podem ser obtidas realizando transformações lineares, de maneira semelhante como ocorre para os números positivos da sequência.

De acordo com os teoremas e demonstrações apresentados nas subseções anteriores, é possível seguir o mesmo raciocínio e assim obter a generalização da extensão desta sequência, a qual será explicitada na subseção 3.2.4.

3.2.4 Representação Matricial de Z-dovan

Observando as matrizes das sequências anteriores, pode-se constatar que para uma extensão de ordem z , denominada neste presente trabalho de Z-dovan, em que $Z = z - 1$.

Definição 8. A sequência de Z-dovan satisfaz a seguinte fórmula de recorrência:

$$P_{Z(n+z)} = \sum_{i=0}^{z-2} P_{Z(n+i)},$$

$n \geq z$, $n \in \mathbb{N}$, em que $P_{Z(n)}$ representa o n -ésimo termo da sequência.

Definição 9. Por sua vez, a matriz geradora Q_Z de Z-dovan, com $n \geq 2z - 2$ e $n \in \mathbb{N}$, é

obtida por:

$$\text{Para } Q_Z = \begin{bmatrix} 0 & [I] \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \text{ tem-se } Q_Z^n = \begin{bmatrix} P_{Z(n)} & \cdots & P_{Z(n-j+1)} & \cdots & P_{Z(n-z+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{z-i+1} P_{Z(n-i)} & \cdots & \sum_{i=1}^{z-i+1} P_{Z(n-i-j+1)} & \cdots & \sum_{i=1}^{z-i+1} P_{Z(n-i-z+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{Z(n-1)} & \cdots & P_{Z(n-j)} & \cdots & P_{Z(n-z)} \end{bmatrix}.$$

Onde $\mathbf{1}$ é o vetor coluna e $\mathbf{0}$ o vetor linha, onde ambos apresentam tamanho $z-1$, $[I]$ a matriz de bloco dada pela matriz identidade de ordem $z-1$ e z a ordem da sequência.

Sendo i a linha e j a coluna. Logo para $i \in \{1, \dots, z\}$ e $j \in \{1, \dots, z\}$, tem-se que:

$$Q_Z^n = \begin{bmatrix} P_{Z(n)} & P_{Z(n-j+1)} \\ \sum_{i=1}^{z-i+1} P_{Z(n-i)} & \sum_{i=1}^{z-i+1} P_{Z(n-i-j+1)} \end{bmatrix}.$$

Vale salientar que o tamanho da matriz está relacionado com a ordem da sequência, sendo assim, observa-se que para a matriz geradora de Padovan, tem-se uma matriz 3x3, para Tridovan uma matriz 4x4, até a Z-dovan como sendo zxz .

A SP é um caso particular da sequência Z-dovan, tanto para os números positivos quanto para os números negativos, pois a sequência possui os seus termos iniciais definidos como $P_0 = 1, P_1 = 0, P_2 = 1$. Assim, é possível encontrar os termos da sequência estendida generalizada de Padovan sem recursividade.

As matrizes geradoras Q válidas da sequência generalizada de Padovan serão obtidas através da permutação das linhas da matriz geradora base, e posteriormente da permutação das colunas, utilizando a mesma regra de permutação das linhas. A definição abaixo também é válida para os números com índices inteiros não positivos.

Definição 10. Sendo $m = z$, e z a ordem da generalização da sequência, a quantidade de matrizes geradoras Q válidas para a sequência generalizada é dada por:

$$P_m = m!.$$

De acordo com o comportamento com índice inteiro não positivo das sequências anteriores, é possível realizar o corolário abaixo, como sendo a fórmula de recorrência generalizada de Z-dovan com índice inteiro não positivo obtida a partir da fórmula de recorrência generalizada (ver Definição 8), sendo:

Definição 11. Fórmula de recorrência generalizada de Padovan com índice inteiro não positivo da sequência, com $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$:

$$P_{Z(-n)} = P_{Z(-n+z+1)} + \sum_{i=0}^{z-1} P_{Z(-n+1)}.$$

Com base na construção das matrizes geradoras válidas das sequências anteriores, pode-se generalizar matriz geradora de Z-dovan, denominada de ϱ_Z .

Definição 12. A matriz geradora de Z-dovan (Generalização), com $n \geq 2z - 2$ e $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{Para } \varrho_Z = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 \\ [\mathbf{I}] & 0 \\ (-\mathbf{1}) & \end{bmatrix}, \text{ tem-se } \varrho_Z^n = \begin{bmatrix} P_{Z(-n)} & \cdots & P_{Z(-n-j+1)} & \cdots & P_{Z(-n-z+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{z-i+1} P_{Z(-n-i)} & \cdots & \sum_{i=1}^{z-i+1} P_{Z(-n-i-j+1)} & \cdots & \sum_{i=1}^{z-i+1} P_{Z(-n-i-z+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{Z(-n-1)} & \cdots & P_{Z(-n-j)} & \cdots & P_{Z(-n-z)} \end{bmatrix}.$$

Em que $\mathbf{0}$ representa o vetor linha de tamanho $z - 1$, $(-\mathbf{1})$ representa vetor coluna de tamanho $z - 2$, e $[\mathbf{I}]$ a matriz de bloco dada pela matriz identidade de tamanho $z - 1$.

3.2.5 A Fórmula de Binet e a Função Geradora de Padovan

Abraham de Moivre (1667-1764) conseguiu escrever uma fórmula a partir da qual é possível determinar qualquer termo de uma sequência sem usar a recursividade. Porém tal investigação matemática homenageou Jacques Phillippe Marie Binet (1786-1856), sendo então chamada de Fórmula de Binet. Assim, para uma sequência recorrente, é possível encontrar um termo desta sem necessitar conhecer os anteriores, sabendo apenas da posição do termo na sequência.

Para que seja possível encontrar tal fórmula, é necessário conhecer o polinômio característico da sequência.

Teorema 12. Para os números de Padovan, o polinômio característico é dado por:

$$x^3 - x - 1 = 0 \quad (3.1)$$

Demonstração. Com base no Teorema de Cayley-Hamilton, tem-se que o polinômio característico de Padovan é dado por (GOMES; OLIVEIRA, 2019):

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - Q),$$

$$\text{com } \lambda \in \mathbb{Z} \text{ ou } \lambda \in \mathbb{C}, \lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ e } Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim:

$$p(\lambda) = \det \left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \lambda^3 - \lambda - 1.$$

Então: $p(\lambda) = 0$, tem-se: $\lambda^3 - \lambda - 1 = 0$. Logo: $x^3 - x - 1 = 0$ $\square$

As suas raízes são dadas por uma real e duas complexas, sendo elas:

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}}$$

$$x_2, x_3 = \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \left(-\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} \approx -0,662359 \pm 0,56228i.$$

A única raiz real encontrada a partir da Equação (3.1) é conhecida como número plástico, em que representa a razão de convergência entre os números vizinhos desta sequência (AARTS; FOKKINK; KRUIJTZER, 2001).

Teorema 13. A fórmula de Binet da SP, é dada por:

$$P_{(n)} = A(x_1)^n + B(x_2)^n + C(x_3)^n,$$

em que $n \in \mathbb{Z}$, x_1, x_2 e x_3 são as raízes da equação característica e os coeficientes são:

$$A = \frac{(x_2 - 1)(x_3 - 1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, B = \frac{(x_1 - 1)(x_3 - 1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, C = \frac{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Demonstração. Sabe-se que a relação de recorrência da SP é conhecida por $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$ e $P_0 = P_1 = P_2 = 1$, possuindo equação característica $x^3 - x - 1 = 0$ com raízes x_1, x_2, x_3 . Com isso, $P_{(n)} = A(x_1)^n + B(x_2)^n + C(x_3)^n$. Para determinar os coeficientes A, B, C utiliza-se as condições iniciais $P_0 = P_1 = P_2 = 1$, e a partir daí, obtêm-se o sistema:

$$\begin{cases} A + B + C &= 1 \\ Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 &= 1 \\ Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 &= 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, tem-se que:

$$A = \frac{-x_2 + x_2x_3 - x_3 + 1}{x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3} = \frac{(x_2 - 1)(x_3 - 1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)},$$

$$B = \frac{-x_1 + x_1x_3 - x_3 + 1}{x_2^2 - x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3} = \frac{(x_1 - 1)(x_3 - 1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)},$$

$$C = \frac{-x_1 + x_1x_2 - x_2 + 1}{x_3^2 + x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3} = \frac{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

$\square$

Ressalta-se que a fórmula de Binet pode ser obtida por meio do método de BenTaher-Rachidi, estudado nos trabalhos de Sá e Spreafico (2020), Taher e Rachidi

(2016), consistindo em obter os coeficientes de uma determinada equação, proposta por BenTaher-Rachidi, sem a necessidade de resolver um sistema linear.

A função geradora permite a resolução de recorrências lineares com coeficientes constantes (KOSHY, 2001; SOYKAN, 2020). Tal procedimento demonstrou como encontrar os números de Fibonacci sem ser necessário calcular todos os números que o precedem.

Teorema 14. *Função Geradora da SP para os termos positivos (FERREIRA, 2015):*

$$g(P_n, x) = \frac{1 + x}{1 - x^2 - x^3}.$$

Demonstração. Esta é uma série formal em que os seus coeficientes obtém informações sobre uma sucessão a_n com n pertencendo aos números naturais, e sendo uma função $g(a_n, x)$ definida pela série:

$$g(a_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots$$

Da mesma maneira como ocorre com a SF, em Padovan essa função é multiplicada por x^2, x^3 nas equações abaixo devido a sua relação de recorrência.

Assim, para Padovan, com os seus valores iniciais $P_0 = P_1 = P_2 = 1$, tem-se que:

$$g(P_{(n)}, x) = P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + P_3 x^3 + P_4 x^4 + \dots \quad (3.2)$$

$$x^2 g(P_{(n)}, x) = P_0 x^2 + P_1 x^3 + P_2 x^4 + P_3 x^5 + P_4 x^6 + \dots \quad (3.3)$$

$$x^3 g(P_{(n)}, x) = P_0 x^3 + P_1 x^4 + P_2 x^5 + P_3 x^6 + P_4 x^7 + \dots \quad (3.4)$$

Baseada na Equação (3.2-3.3+3.4), tem-se que:

$$g(P_n, x)(1 - x^2 - x^3) = P_0 + P_1 x + (P_2 - P_0)x^2$$

$$g(P_n, x)(1 - x^2 - x^3) = 1 + x$$

$$g(P_n, x) = \frac{1 + x}{1 - x^2 - x^3}$$

□

A seguir, na Figura 9, é apresentada uma caracterização (HUNTLEY, 1985), notando-se que ao serem determinados os primeiros coeficientes do desenvolvimento por meio da divisão direta, forma-se a série de Fibonacci. Dessa forma, utiliza-se esse procedimento para a série de Padovan e suas extensões, sendo utilizado o *software* Maxima ¹.

¹ *Software* matemático gratuito de computação algébrica, permitindo plotagem de gráficos e resoluções de problemas. Sua licença é fornecida pela *General Public License*.

Figura 9 – Desenvolvimento da Função Geradora de Padovan para os termos positivos.

```
(%i2) ((1+x)/(1-x^2-x^3));
taylor ((1+x)/(-x^3-x^2+1),x,0,70);
```

$$\frac{x+1}{-x^3-x^2+1}$$

```
(%o2) 1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+7x^8+9x^9+12x^10+16x^11+21x^12+28x^13+37x^14+49x^15+65x^16+86x^17+114x^18+151x^19+200x^20+265x^21+351x^22+465x^23+616x^24+816x^25+1081x^26+1432x^27+1897x^28+2513x^29+3329x^30+4410x^31+5842x^32+7739x^33+10252x^34+13581x^35+17991x^36+23833x^37+31572x^38+41824x^39+55405x^40+73396x^41+97229x^42+128801x^43+170625x^44+226030x^45+299426x^46+396655x^47+525456x^48+696081x^49+922111x^50+1221537x^51+1618192x^52+2143648x^53+2839729x^54+3761840x^55+4983377x^56+6601569x^57+8745217x^58+11584946x^59+15346786x^60+20330163x^61+26931732x^62+35676949x^63+47261895x^64+62608681x^65+82938844x^66+109870576x^67+145547525x^68+192809420x^69+255418101x^70+...
```

Fonte: Elaborado pela autora

De forma semelhante como ocorre para os números positivos, existe uma função geradora para os números com índice inteiro não positivo, de tal forma que os expoentes de x são considerados como sendo positivos, porém as suas posições são referentes aos termos com índice inteiro não positivo da SP. Isso acontece pelo fato de utilizarmos a Série de Taylor para compor esses elementos, e esta série é iniciada a partir de zero (KNOPP, 1990).

Teorema 15. *Função Geradora da SP, para os termos com índice inteiro não positivo é descrita por:*

$$g(P_{-n}, x) = \frac{-x^2 - x - 1}{x^3 - x - 1}.$$

Demonstração. A função $g(P_{-n}, x)$ é multiplicada por x^3 e x , de acordo com a fórmula de recorrência (Definição 3). Considerando $P_0 = 1, P_{-1} = 0, P_{-2} = 1$, tem-se que:

$$g(P_{(-n)}, x) = P_0 + P_{-1}x + P_{-2}x^2 + P_{-3}x^3 + P_{-4}x^4 + \dots \quad (3.5)$$

$$xg(P_{(-n)}, x) = P_0x + P_{-1}x^2 + P_{-2}x^3 + P_{-3}x^4 + P_{-4}x^5 + \dots \quad (3.6)$$

$$x^3g(P_{(-n)}, x) = P_0x^3 + P_{-1}x^4 + P_{-2}x^5 + P_{-3}x^6 + P_{-4}x^7 + \dots \quad (3.7)$$

De acordo com a Equação (3.7-3.6+3.5), resulta-se em:

$$g(P_{-n}, x)(x^3 - x - 1) = -P_0x - P_{-1}x^2 - P_0 - P_{-1}x - P_{-2}x^2$$

$$g(P_{-n}, x)(x^3 - x - 1) = -x^2 - x - 1$$

$$g(P_{-n}, x) = \frac{-x^2 - x - 1}{x^3 - x - 1}.$$

□

Logo abaixo é mostrada na Figura 10 o *software* Maxima.

Figura 10 – Desenvolvimento da Função Geradora de Padovan para números com índice inteiro não positivo.

```
(%i2) ((-x^2-x-1)/(x^3-x-1));
taylor ((-x^2-x-1)/(x^3-x-1),x,0,70);

(%o1) 
$$\frac{-x^2-x-1}{x^3-x-1}$$


(%o2)/T/ 
$$1+x^2+x^5-x^6+x^7-x^9+2x^{10}-2x^{11}+x^{12}+x^{13}-3x^{14}+4x^{15}-3x^{16}+4x^{18}-7x^{19}+7x^{20}-3x^{21}-4x^{22}+ \\ 11x^{23}-14x^{24}+10x^{25}+x^{26}-15x^{27}+25x^{28}-24x^{29}+9x^{30}+16x^{31}-40x^{32}+49x^{33}-33x^{34}-7x^{35}+56x^{36}-89x^{37}+ \\ 82x^{38}-26x^{39}-63x^{40}+145x^{41}-171x^{42}+108x^{43}+37x^{44}-208x^{45}+316x^{46}-279x^{47}+71x^{48}+245x^{49}- \\ 524x^{50}+595x^{51}-350x^{52}-174x^{53}+769x^{54}-1119x^{55}+945x^{56}-176x^{57}-943x^{58}+1888x^{59}-2064x^{60}+1121x^{61}+ \\ 767x^{62}-2831x^{63}+3952x^{64}-3185x^{65}+354x^{66}+3598x^{67}-6783x^{68}+7137x^{69}-3539x^{70}+...$$

```

Fonte: Elaborado pela autora

3.2.6 A Fórmula de Binet e a Função Geradora de Tridovan

Levando em consideração a fórmula de recorrência de Tridovan (ver Definição 4), o polinômio característico desta sequência é calculado através do teorema abaixo.

Teorema 16. *O polinômio característico de Tridovan é (VIEIRA; ALVES, 2019d):*

$$x^4 - x^2 - x - 1 = 0. \quad (3.8)$$

Demonstração. De acordo com o Teorema de Cayley-Hamilton, tem-se que o polinômio característico de Tridovan é dado por (GOMES; OLIVEIRA, 2019):

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - Q_3),$$

$$\text{com } \lambda \in \mathbb{Z} \text{ ou } \lambda \in \mathbb{C}, \lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ e } Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim:

$$p(\lambda) = \det \left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \lambda^4 - \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Então: $p(\lambda) = 0$, tem-se: $\lambda^4 - \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$.

Logo: $x^4 - x^2 - x - 1 = 0$

□

Em que realizando o cálculo para encontrar as raízes de tal polinômio, tem-se:

$$S = \sqrt[3]{\frac{29}{54} + \sqrt{\left(\frac{-1}{9}\right)^3 + \left(\frac{29}{54}\right)^2}},$$

$$T = \sqrt[3]{\frac{29}{54} - \sqrt{\left(\frac{-1}{9}\right)^3 + \left(\frac{29}{54}\right)^2}}.$$

Desta forma, as raízes calculadas são:

$$x_1 = \frac{1}{3} + S + P,$$

$$x_2 = -1,$$

$$x_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(S + T) + \frac{\sqrt{3}}{2}(S - T)i,$$

$$x_4 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(S + T) - \frac{\sqrt{3}}{2}(S - T)i.$$

A partir do polinômio característico descrito, pode-se obter a fórmula completa de Binet para Tridovan.

Teorema 17. *Fórmula de Binet de Tridovan, com $n \in \mathbb{Z}$ é descrita por (VIEIRA; ALVES, 2019d):*

$$P_{3(n)} = A(x_1)^n + B(x_2)^n + C(x_3)^n + D(x_4)^n,$$

em que $n \in \mathbb{Z}$, x_1, x_2, x_3 e x_4 são as raízes da equação característica de Tridovan e os coeficientes são:

$$A = \frac{x_1^2 + x_1 + 1}{2x_1^4 + x_1 + 2}, B = \frac{x_2^2 + x_2 + 1}{2x_2^4 + x_2 + 2},$$

$$C = \frac{x_3^2 + x_3 + 1}{2x_3^4 + x_3 + 2}, D = \frac{x_4^2 + x_4 + 1}{2x_4^4 + x_4 + 2}.$$

Demonstração. De acordo com a recorrência da sequência de Tridovan, conhecida por $P_{3(n)} = P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}$ e $P_{3(0)} = 1, P_{3(1)} = 0, P_{3(2)} = P_{3(3)} = 1$, possuindo equação característica $x^4 - x^2 - x - 1 = 0$ com raízes x_1, x_2, x_3, x_4 . Com isso, $P_{3(n)} = A(x_1)^n + B(x_2)^n + C(x_3)^n + D(x_4)^n$. Para determinar os coeficientes A, B, C, D utiliza-se as condições iniciais $P_{3(0)} = 1, P_{3(1)} = 0, P_{3(2)} = P_{3(3)} = 1$, obtendo o sistema:

$$\begin{cases} A + B + C + D &= 1 \\ Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 &= 0 \\ Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + Dx_4^2 &= 1 \\ Ax_1^3 + Bx_2^3 + Cx_3^3 + Dx_4^3 &= 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, tem-se que:

$$\begin{aligned} A &= \frac{-x_4 - x_2 - x_2x_3x_4 - x_3 + 1}{x_1^3 - x_4x_1^2 - x_2x_1^2 + x_1x_2x_4 - x_3x_1^2 + x_1x_3x_4 - x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3}, \\ B &= \frac{-x_4 - x_1 - x_4x_1x_3 - x_3 + 1}{x_2^3 - x_4x_2^2 - x_1x_2^2 + x_1x_2x_4 - x_1x_3x_4 - x_2^2x_3 + x_4x_2x_3 + x_1x_2x_3}, \\ C &= \frac{x_4 + x_1 + x_1x_2x_4 + x_2 - 1}{-x_3^3 + x_1x_2x_4 + x_4x_3^2 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2 - x_1x_3x_4 - x_2x_3x_4 - x_1x_2x_3}, \\ D &= \frac{-x_1 - x_2 - x_1x_2x_3 - x_3 + 1}{x_4^3 - x_1x_4^2 - x_2x_4^2 + x_1x_2x_4 - x_3x_4^2 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 - x_1x_2x_3}. \end{aligned}$$

Utilizando as relações $x_1x_2x_3x_4 = -1$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ e $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 1$, é fácil ver que:

$$\begin{aligned} A &= \frac{x_1 + \frac{1}{x_1} + 1}{2x_1^3 + 1 + \frac{2}{x_1}} = \frac{x_1^2 + x_1 + 1}{2x_1^4 + x_1 + 2}, \\ B &= \frac{x_2 + \frac{1}{x_2} + 1}{2x_2^3 + 1 + \frac{2}{x_2}} = \frac{x_2^2 + x_2 + 1}{2x_2^4 + x_2 + 2}, \\ C &= \frac{-x_3 - \frac{1}{x_3} - 1}{-2x_3^3 - 1 - \frac{2}{x_3}} = \frac{-(x_3^2 + x_3 + 1)}{-(2x_3^4 + x_3 + 2)} = \frac{x_3^2 + x_3 + 1}{2x_3^4 + x_3 + 2}, \\ D &= \frac{x_4 + \frac{1}{x_4} + 1}{2x_4^3 + 1 + \frac{2}{x_4}} = \frac{x_4^2 + x_4 + 1}{2x_4^4 + x_4 + 2}. \end{aligned}$$

□

A Função Geradora de Tridovan para os termos positivos, por sua vez, é obtida da seguinte maneira:

Teorema 18. *Função Geradora de Tridovan, $P_{3(n)}$, para os termos positivos é (VIEIRA; ALVES, 2019d):*

$$g(P_{3(n)}, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{3(n)}x = \frac{1}{(1 - x^2 - x^3 - x^4)}.$$

Demonstração. Dada a função $g(P_{3(n)}, x) = P_{3(0)} + P_{3(1)}x + P_{3(2)}x^2 + P_{3(3)}x^3 + P_{3(4)}x^4 + \dots$, esta é então multiplicada por x^2 , x^3 , x^4 , resultando em:

$$g(P_{3(n)}, x) = P_{3(0)} + P_{3(1)}x + P_{3(2)}x^2 + P_{3(3)}x^3 + P_{3(4)}x^4 + \dots \quad (3.9)$$

$$x^2g(P_{3(n)}, x) = P_{3(0)}x^2 + P_{3(1)}x^3 + P_{3(2)}x^4 + P_{3(3)}x^5 + P_{3(4)}x^6 + \dots \quad (3.10)$$

$$x^3g(P_{3(n)}, x) = P_{3(0)}x^3 + P_{3(1)}x^4 + P_{3(2)}x^5 + P_{3(3)}x^6 + P_{3(4)}x^7 + \dots \quad (3.11)$$

$$x^4g(P_{3(n)}, x) = P_{3(0)}x^4 + P_{3(1)}x^5 + P_{3(2)}x^6 + P_{3(3)}x^7 + P_{3(4)}x^8 + \dots \quad (3.12)$$

Manipulando as equações da seguinte forma: 3.9 – [3.10 + 3.11 + 3.12], tem-se $g(P_{3(n)}, x) - [x^2g(P_{3(n)}, x) + x^3g(P_{3(n)}, x) + x^4g(P_{3(n)}, x)]$, em que $P_{3(0)} = 1$, $P_{3(1)} = 0$, $P_{3(2)} =$

$P_{3(3)} = 1$, obtêm-se:

$$g(P_{3(n)}, x)(1 - x^2 - x^3 - x^4) = P_{3(0)} + P_{3(1)}x + (P_{3(2)} - P_{3(0)})x^2$$

$$g(P_{3(n)}, x)(1 - x^2 - x^3 - x^4) = 1$$

$$g(P_{3(n)}, x) = \frac{1}{(1 - x^2 - x^3 - x^4)}.$$

□

Na Figura 11 pode-se visualizar os coeficientes da função geradora de Tridovan para os termos positivos através do *software* Maxima.

Figura 11 – Desenvolvimento da Função Geradora de Tridovan para os termos positivos.

```
(%i1) 1/(1-x^2-x^3-x^4);
(%o1) 1
      -x^4-x^3-x^2+1

(%i2) taylor (1/(-x^4-x^3-x^2+1), x, 0, 70);
(%o2)T/ 1+x^2+x^3+2x^4+2x^5+4x^6+5x^7+8x^8+11x^9+17x^10+24x^11+36x^12+52x^13+77x^14+112x^15
+165x^16+241x^17+354x^18+518x^19+760x^20+1113x^21+1632x^22+2391x^23+3505x^24+5136x^25+7528x^26
+11032x^27+16169x^28+23696x^29+34729x^30+50897x^31+74594x^32+109322x^33+160220x^34+234813x^35+
344136x^36+504355x^37+739169x^38+1083304x^39+1587660x^40+2326828x^41+3410133x^42+4997792x^43+
7324621x^44+10734753x^45+15732546x^46+23057166x^47+33791920x^48+49524465x^49+72581632x^50+
106373551x^51+155898017x^52+228479648x^53+334853200x^54+490751216x^55+719230865x^56+1054084064
x^57+1544835281x^58+2264066145x^59+3318150210x^60+4862985490x^61+7127051636x^62+10445201845x^63+
15308187336x^64+22435238971x^65+32880440817x^66+48188628152x^67+70623867124x^68+103504307940x^69
+151692936093x^70+...
```

Fonte: Elaborado pela autora

Para os termos com índices inteiros não positivos, a função geradora de Tridovan é obtida através do teorema abaixo.

Teorema 19. *Função Geradora de Tridovan, para índice inteiro não positivo é:*

$$g(P_{3(-n)}, x) = \frac{-x^2 - x - 1}{(x^4 - x^2 - x - 1)}.$$

Demonstração. Baseado na função $g(P_{3(-n)}, x) = P_{3(0)} + P_{3(-1)}x + P_{3(-2)}x^2 + P_{3(-3)}x^3 + P_{3(-4)}x^4 + \dots$, pode-se multiplicar por x , x^2 , x^4 obtendo:

$$g(P_{3(-n)}, x) = P_{3(0)} + P_{3(-1)}x + P_{3(-2)}x^2 + P_{3(-3)}x^3 + P_{3(-4)}x^4 + \dots \quad (3.13)$$

$$xg(P_{3(-n)}, x) = P_{3(0)}x + P_{3(-1)}x^2 + P_{3(-2)}x^3 + P_{3(-3)}x^4 + P_{3(-4)}x^5 + \dots \quad (3.14)$$

$$x^2g(P_{3(-n)}, x) = P_{3(0)}x^2 + P_{3(-1)}x^3 + P_{3(-2)}x^4 + P_{3(-3)}x^5 + P_{3(-4)}x^6 + \dots \quad (3.15)$$

$$x^4g(P_{3(-n)}, x) = P_{3(0)}x^4 + P_{3(-1)}x^5 + P_{3(-2)}x^6 + P_{3(-3)}x^7 + P_{3(-4)}x^8 + \dots \quad (3.16)$$

Assim, realizando $3.16 - [3.15 + 3.14 + 3.13]$, tem-se que $x^4 g(P_{3(-n)}, x) - [x^2 g(P_{3(-n)}, x) + xg(P_{3(-n)}, x) + g(P_{3(-n)}, x)]$ e com $P_{3(0)} = 1, P_{3(-1)} = P_{3(-2)} = P_{3(-3)} = 0$, obtêm-se:

$$\begin{aligned} g(P_{3(-n)}, x)(x^4 - x^2 - x - 1) &= -P_{3(0)}(x^2 + x) - P_{3(-1)}(x^3 + x^2) - (P_{3(-2)}x^3) \\ g(P_{3(-n)}, x)(x^4 - x^2 - x - 1) &= -x^2 - x - 1 \\ g(P_{3(-n)}, x) &= \frac{-x^2 - x - 1}{(x^4 - x^2 - x - 1)}. \end{aligned}$$

□

De acordo com a Figura 12 é possível visualizar os coeficientes da função geradora de Tridovan utilizando o mesmo *software*.

Figura 12 – Desenvolvimento da Função Geradora de Tridovan para índice inteiro não positivo.

```
(%i2) ((-x^2-x-1)/(x^4-x^2-x-1));
taylor ((-x^2-x-1)/(x^4-x^2-x-1),x,0,70);

(%o1) 
$$\frac{-x^2-x-1}{x^4-x^2-x-1}$$


(%o2)/T/ 
$$1+x^4-x^5+x^7-2x^9+2x^{10}+x^{11}-3x^{12}+5x^{14}-4x^{15}-4x^{16}+8x^{17}+x^{18}-13x^{19}+8x^{20}+13x^{21}-20x^{22}-6x^{23}+34x^{24}-15x^{25}-39x^{26}+48x^{27}+25x^{28}-88x^{29}+24x^{30}+112x^{31}-111x^{32}-89x^{33}+224x^{34}-23x^{35}-312x^{36}+246x^{37}+290x^{38}-559x^{39}-43x^{40}+848x^{41}-515x^{42}-892x^{43}+1364x^{44}+376x^{45}-2255x^{46}+987x^{47}+2632x^{48}-3243x^{49}-1644x^{50}+5874x^{51}-1598x^{52}-7519x^{53}+7473x^{54}+5920x^{55}-14991x^{56}+1552x^{57}+20912x^{58}-16544x^{59}-19359x^{60}+37455x^{61}+2816x^{62}-56815x^{63}+34640x^{64}+59630x^{65}-91454x^{66}-24991x^{67}+151085x^{68}-66464x^{69}-176075x^{70}+...$$

```

Fonte: Elaborado pela autora

3.2.7 A Fórmula de Binet e a Função Geradora de Tetradovan

Para os números da sequência de Tetradovan, dado pela relação de recorrência estudada anteriormente (ver Definição 6), pode-se perceber que é possível calcular o seu polinômio característico através do teorema descrito abaixo.

Teorema 20. *O polinômio característico de Tetradovan (VIEIRA; ALVES, 2019d):*

$$x^5 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0. \quad (3.17)$$

Demonstração. Fundamentado no Teorema de Cayley-Hamilton, tem-se que o polinômio característico de Tetradovan é dado por (GOMES; OLIVEIRA, 2019):

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - Q_4),$$

$$\text{com } \lambda \in \mathbb{Z} \text{ ou } \lambda \in \mathbb{C}, \lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ e } Q_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim:

$$p(\lambda) = \det \left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \lambda^5 - \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Então: $p(\lambda) = 0$, tem-se: $\lambda^5 - \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$.

Logo: $x^5 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0$

□

Para encontrar as raízes deste polinômio, é importante lembrar que não existem fórmulas algébricas para a resolução de equações polinomiais a partir do quinto grau.

Existem muitos meios para obter as raízes de uma equação matemática, dependendo do seu grau, onde para polinômios do 2º grau conhecemos o método de Bhaskara. Para polinômios do 3º grau, existe o método de Cardano, porém para graus superiores a quarta ordem, Abel provou que não é possível resolver equações por meio de radicais e combinações dos coeficientes (CLAUDIO; MARINS, 2000). Com isso, utilizam-se métodos numéricos e recursos computacionais para que seja possível obter as raízes dessas equações de grau superior a quatro. Diante disso, uma análise das raízes reais dos polinômios característico das sequências estudadas até então (Padovan, Tridovan e Tetradovan), são discutidas através do método de Newton, utilizando o fractal e a ferramenta computacional Google Colab para verificação com base no trabalho de Vieira, Alves e Catarino (2019a) (ver Apêndice F).

Teorema 21. *A fórmula de Binet para Tetradovan é dada por (VIEIRA; ALVES, 2019d):*

$$P_{4(n)} = A(x_1)^n + B(x_2)^n + C(x_3)^n + D(x_4)^n + E(x_5)^n,$$

em que $n \in \mathbb{Z}$, x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 são as raízes da equação característica de Tetradovan, onde para realizar o cálculo dessas raízes, utiliza-se recursos computacionais (BERGLUND, 2011).

Os valores dos coeficientes são:

$$\begin{aligned} A &= \frac{x_1^3 + x_1^2 + x_1 - 1}{2x_1^5 + x_1^3(x_1^2 - 1) - x_1^2(x_1 - x_1^3 + 1) - 1}, \\ B &= \frac{x_2^3 + x_2^2 + x_2 - 1}{2x_2^5 + x_2^3(x_2^2 - 1) - x_2^2(x_2 - x_2^3 + 1) - 1}, \\ C &= \frac{x_3^3 + x_3^2 + x_3 - 1}{2x_3^5 + x_3^3(x_3^2 - 1) - x_3^2(x_3 - x_3^3 + 1) - 1}, \\ D &= \frac{x_4^3 + x_4^2 + x_4 - 1}{2x_4^5 + x_4^3(x_4^2 - 1) - x_4^2(x_4 - x_4^3 + 1) - 1}, \\ E &= \frac{x_5^3 + x_5^2 + x_5 - 1}{2x_5^5 + x_5^3(x_5^2 - 1) - x_5^2(x_5 - x_5^3 + 1) - 1}. \end{aligned}$$

Demonstração. Através da recorrência da sequência de Tetradovan, conhecida por $P_{4(n)} = P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)}$ e $P_{4(0)} = 1; P_{4(1)} = 0; P_{4(2)} = P_{4(3)} = 1; P_{4(4)} = 2$, possuindo equação característica $x^5 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ com raízes x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . Com isso, $P_{4(n)} = P_{4(n)} = A(x_1)^n + B(x_2)^n + C(x_3)^n + D(x_4)^n + E(x_5)^n$. Para determinar os coeficientes A, B, C, D, E utiliza-se as condições iniciais $P_{4(0)} = 1; P_{4(1)} = 0; P_{4(2)} = P_{4(3)} = 1; P_{4(4)} = 2$, obtendo o sistema:

$$\begin{cases} A + B + C + D + E &= 1 \\ Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 + Ex_5 &= 0 \\ Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + Dx_4^2 + Ex_5^2 &= 1 \\ Ax_1^3 + Bx_2^3 + Cx_3^3 + Dx_4^3 + Ex_5^3 &= 1 \\ Ax_1^4 + Bx_2^4 + Cx_3^4 + Dx_4^4 + Ex_5^4 &= 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema e através das relações $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5 = -1$, $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 + x_1x_2x_5 + x_1x_3x_5 + x_1x_4x_5 + x_2x_3x_5 + x_2x_4x_5 + x_3x_4x_5 = 1$ e $x_1x_2x_3x_4x_5 = -1$, tem-se que:

$$\begin{aligned} A &= \frac{x_2x_3x_4x_5 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 - x_2 + x_3x_4 + x_3x_5 - x_3 + x_4x_5 - x_4 - x_5 + 2}{x_1^2(x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5) - x_1(x_2x_4x_5 + x_3x_4x_5 + x_2x_3x_4 + x_2x_3x_5) + x_2x_3x_4x_5 + 2x_1^4} \\ &= \frac{-\frac{1}{x_1} + x_1 + x_1^2 + 1}{x_1^2(x_1^2 - 1) - x_1(x_1 - x_1^3 + 1) - \frac{1}{x_1} + 2x_1^4} = \frac{x_1^3 + x_1^2 + x_1 - 1}{2x_1^5 + x_1^3(x_1^2 - 1) - x_1^2(x_1 - x_1^3 + 1) - 1}, \\ B &= \frac{-x_1x_3x_4x_5 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 + x_1 - x_3x_4 - x_3x_5 + x_3 - x_4x_5 + x_4 + x_5 - 2}{-x_2^2(x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5) + x_2(x_1x_3x_4 + x_1x_3x_5 + x_1x_4x_5 + x_3x_4x_5) - x_1x_3x_4x_5 - 2x_2^4} \\ &= \frac{\frac{1}{x_2} - x_2 - x_2^2 - 1}{-x_2^2(x_2^2 - 1) + x_2(x_2 - x_2^3 + 1) + \frac{1}{x_2} - 2x_2^4} = \frac{-x_2^3 - x_2^2 - x_2 + 1}{-2x_2^5 - x_2^3(x_2^2 - 1) + x_2^2(x_2 - x_2^3 + 1) + 1} \\ &= \frac{-(x_2^3 + x_2^2 + x_2 - 1)}{-(2x_2^5 + x_2^3(x_2^2 - 1) - x_2^2(x_2 - x_2^3 + 1) - 1)} = \frac{x_2^3 + x_2^2 + x_2 - 1}{2x_2^5 + x_2^3(x_2^2 - 1) - x_2^2(x_2 - x_2^3 + 1) - 1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &= \frac{x_1x_2x_4x_5 + x_1x_2 + x_1x_4 + x_1x_5 - x_1 + x_2x_4 + x_2x_5 - x_2 + x_4x_5 - x_4 - x_5 + 2}{x_3^2(x_1x_2 + x_2x_5 + x_2x_4 + x_4x_5 + x_1x_5 + x_1x_4) - x_3(x_1x_2x_4 + x_1x_2x_5 + x_1x_4x_5 + x_2x_4x_5) + x_1x_2x_4x_5 + 2x_3^4} \\
&= \frac{-\frac{1}{x_3} + x_3 + x_3^2 + 1}{x_3^2(x_3^2 - 1) - x_3(x_3 - x_3^3 + 1) - \frac{1}{x_3} + 2x_3^4} = \frac{x_3^3 + x_3^2 + x_3 - 1}{2x_3^5 + x_3^3(x_3^2 - 1) - x_3^2(x_3 - x_3^3 + 1) - 1}, \\
D &= \frac{-x_1x_2x_3x_5 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_5 + x_1 - x_2x_3 - x_2x_5 + x_2 - x_3x_5 + x_3 + x_5 - 2}{-x_4^2(x_2x_5 + x_3x_5 + x_1x_5 + x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2) + x_4(x_4 - x_4^3 + 1) - x_1x_2x_3x_5 - 2x_4^4} \\
&= \frac{\frac{1}{x_4} - x_4 - x_4^2 - 1}{-x_4^2(x_4^2 - 1) + x_4(x_4 - x_4^3 + 1) + \frac{1}{x_4} - 2x_4^4} = \frac{-x_4^3 - x_4^2 - x_4 + 1}{-2x_4^5 - x_4^3(x_4^3 - 1) + x_4^2(x_4 - x_4^3 + 1) + 1} \\
&= \frac{-(x_4^3 + x_4^2 + x_4 - 1)}{-(2x_4^5 + x_4^3(x_4^3 - 1) - x_4^2(x_4 - x_4^3 + 1) - 1)} = \frac{x_4^3 + x_4^2 + x_4 - 1}{2x_4^5 + x_4^3(x_4^3 - 1) - x_4^2(x_4 - x_4^3 + 1) - 1}, \\
E &= \frac{x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 - x_1 + x_2x_3 + x_2x_4 - x_2 + x_3x_4 - x_3 - x_4 + 2}{-x_5(x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4) + x_5^2(x_3x_4 + x_2x_4 + x_2x_3 + x_1x_4 + x_1x_3 + x_1x_2) + x_1x_2x_3x_4 + 2x_5^4} \\
&= \frac{-\frac{1}{x_5} + x_5^2 + 1 + x_5}{x_5^2(x_5^2 - 1) - x_5(x_5 - x_5^3 + 1) - \frac{1}{x_5} + 2x_5^4} = \frac{x_5^3 + x_5^2 + x_5 - 1}{2x_5^5 + x_5^3(x_5^2 - 1) - x_5^2(x_5 - x_5^3 + 1) - 1}.
\end{aligned}$$

□

A Função Geradora de Tetradovan dos termos positivos, dar-se-á pelo seguinte modo:

Teorema 22. *Função Geradora de Tetradovan, $P_{4(n)}$, para os termos positivos é (VIEIRA; ALVES, 2019d):*

$$g(P_{4(n)}, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{4(n)}x = \frac{1}{(1 - x^2 - x^3 - x^4 - x^5)}.$$

Demonstração. Com base na função:

$$g(P_{4(n)}, x) = P_{4(0)} + P_{4(1)}x + P_{4(2)}x^2 + P_{4(3)}x^3 + P_{4(4)}x^4 + \dots,$$

pode-se multiplicar por x^2, x^3, x^4, x^5 , obtendo:

$$g(P_{4(n)}, x) = P_{4(0)} + P_{4(1)}x + P_{4(2)}x^2 + P_{4(3)}x^3 + P_{4(4)}x^4 + \dots \quad (3.18)$$

$$x^2g(P_{4(n)}, x) = P_{4(0)}x^2 + P_{4(1)}x^3 + P_{4(2)}x^4 + P_{4(3)}x^5 + P_{4(4)}x^6 + \dots \quad (3.19)$$

$$x^3g(P_{4(n)}, x) = P_{4(0)}x^3 + P_{4(1)}x^4 + P_{4(2)}x^5 + P_{4(3)}x^6 + P_{4(4)}x^7 + \dots \quad (3.20)$$

$$x^4g(P_{4(n)}, x) = P_{4(0)}x^4 + P_{4(1)}x^5 + P_{4(2)}x^6 + P_{4(3)}x^7 + P_{4(4)}x^8 + \dots \quad (3.21)$$

$$x^5g(P_{4(n)}, x) = P_{4(0)}x^5 + P_{4(1)}x^6 + P_{4(2)}x^7 + P_{4(3)}x^8 + P_{4(4)}x^9 + \dots \quad (3.22)$$

Manipulando as equações da seguinte forma:

3.18 - [3.19 + 3.20 + 3.21 + 3.22], tem-se $g(P_{4(n)}, x) - [x^2g(P_{4(n)}, x) + x^3g(P_{4(n)}, x) + x^4g(P_{4(n)}, x) + x^5g(P_{4(n)}, x)]$ e com $P_{4(0)} = 1, P_{4(1)} = 0, P_{4(2)} = P_{4(3)} = 1$, é possível calcular a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
g(P_{4(n)}, x)(1 - x^2 - x^3 - x^4) &= P_{4(0)} + P_{4(1)}x + (P_{4(2)} - P_{4(0)})x^2 \\
g(P_{4(n)}, x)(1 - x^2 - x^3 - x^4 - x^5) &= 1 \\
g(P_{4(n)}, x) &= \frac{1}{(1 - x^2 - x^3 - x^4 - x^5)}.
\end{aligned}$$

□

Para que haja um melhor entendimento, na Figura 13 são mostrados os coeficientes dos números de Tetradovan (de índices positivos), através da divisão direta, utilizando o *software* Maxima.

Figura 13 – Desenvolvimento da Função Geradora de Tetradovan para os termos positivos.

```
(%i2) 1/(1-x^2-x^3-x^4-x^5);
       Taylor (1/(-x^5-x^4-x^3-x^2+1),x,0,70);

(%o1) 1
      -x^5-x^4-x^3-x^2+1

(%o2)/T/ 1+x^2+x^3+2x^4+3x^5+4x^6+7x^7+10x^8+16x^9+24x^10+37x^11+57x^12+87x^13+134x^14+205x^15+315x^16+483x^17+741x^18+1137x^19+1744x^20+2676x^21+4105x^22+6298x^23+9662x^24+14823x^25+22741x^26+34888x^27+53524x^28+82114x^29+125976x^30+193267x^31+296502x^32+454881x^33+697859x^34+1070626x^35+1642509x^36+2519868x^37+3865875x^38+5930862x^39+9098878x^40+13959114x^41+21415483x^42+32854729x^43+50404337x^44+77328204x^45+118633663x^46+182002753x^47+279220933x^48+428368957x^49+657185553x^50+1008226306x^51+1546778196x^52+2373001749x^53+3640559012x^54+5585191804x^55+8568565263x^56+13145530761x^57+20167317828x^58+30939846840x^59+47466605656x^60+72821260692x^61+111719301085x^62+171395031016x^63+262947014273x^64+403402198449x^65+618882607066x^66+949463544823x^67+1456626850804x^68+2234695364611x^69+3428375201142x^70+...
```

Fonte: Elaborado pela autora

Para índice inteiro não positivo, a Função Geradora de Tetradovan, é obtida através do teorema abaixo.

Teorema 23. *Função Geradora de Tetradovan para os termos negativos é dada por:*

$$g(P_{4(-n)}, x) = \frac{-x^3 - x^2 - x - 1}{(x^5 - x^3 - x^2 - x - 1)}.$$

Demonstração. Multiplicando a função $g(P_{4(-n)}, x) = P_{4(0)} + P_{4(-1)}x + P_{4(-2)}x^2 + P_{4(-3)}x^3 + P_{4(-4)}x^4 + \dots$ por x^3, x^2, x , tem-se que:

$$g(P_{4(-n)}, x) = P_{4(0)} + P_{4(-1)}x + P_{4(-2)}x^2 + P_{4(-3)}x^3 + P_{4(-4)}x^4 + \dots \quad (3.23)$$

$$xg(P_{4(-n)}, x) = P_{4(0)}x + P_{4(-1)}x^2 + P_{4(-2)}x^3 + P_{4(-3)}x^4 + P_{4(-4)}x^5 + \dots \quad (3.24)$$

$$x^2g(P_{4(-n)}, x) = P_{4(0)}x^2 + P_{4(-1)}x^3 + P_{4(-2)}x^4 + P_{4(-3)}x^5 + P_{4(-4)}x^6 + \dots \quad (3.25)$$

$$x^3g(P_{4(-n)}, x) = P_{4(0)}x^3 + P_{4(-1)}x^4 + P_{4(-2)}x^5 + P_{4(-3)}x^6 + P_{4(-4)}x^7 + \dots \quad (3.26)$$

$$x^5g(P_{4(-n)}, x) = P_{4(0)}x^5 + P_{4(-1)}x^6 + P_{4(-2)}x^7 + P_{4(-3)}x^8 + P_{4(-4)}x^9 + \dots \quad (3.27)$$

Assim, é possível obter a seguinte relação 3.27 – [3.26 + 3.25 + 3.24 + 3.23], resultando em $x^5g(P_{4(-n)}, x) - [x^3g(P_{4(-n)}, x) + x^2g(P_{4(-n)}, x) + xg(P_{4(-n)}, x) + g(P_{4(-n)}, x)]$, e com os valores $P_{4(0)} = 1, P_{4(-1)} = P_{4(-2)} = P_{4(-3)} = P_{4(-4)} = 0$, tem-se:

$$\begin{aligned}
g(P_{4(-n)}, x)(x^5 - x^3 - x^2 - x - 1) &= -P_{4(0)}(x^3 + x^2 + x + 1) - P_{4(-1)}(x^4 + x^3 + x^2 + x) \\
&\quad - P_{4(-2)}(x^4 + x^3 + x^2) - P_{4(-3)}(x^4 + x^3) - P_{4(-4)}x^4 \\
g(P_{4(-n)}, x)(x^5 - x^3 - x^2 - x - 1) &= -x^3 - x^2 - x - 1 \\
g(P_{4(-n)}, x) &= \frac{-x^3 - x^2 - x - 1}{(x^5 - x^3 - x^2 - x - 1)}.
\end{aligned}$$

□

Na Figura 14 são mostrados os termos da sequência de Tetradovan (índice inteiro não positivo da sequência) com a utilização do *software* Maxima.

Figura 14 – Desenvolvimento da Função Geradora de Tetradovan para índice inteiro não positivo.

```

(%i2)      (-x^3-x^2-x-1)/(x^5-x^3-x^2-x-1);
          taylor ((-x^3-x^2-x-1)/(x^5-x^3-x^2-x-1),x,0,70);

(%o1)      -x^3-x^2-x-1
           x^5-x^3-x^2-x-1

(%o2)/T/   1+x^5-x^6+x^9-2x^11+x^12+x^13+x^14-3x^15-x^16+4x^17+x^18-3x^19-5x^20+6x^21+6x^22-
6x^23-9x^24+4x^25+17x^26-6x^27-21x^28+x^29+30x^30+7x^31-44x^32-14x^33+52x^34+36x^35-67x^36-
65x^37+82x^38+102x^39-83x^40-168x^41+84x^42+249x^43-63x^44-353x^45-x^46+501x^47+102x^48-665
x^49-291x^50+853x^51+604x^52-1064x^53-1058x^54+1227x^55+1748x^56-1313x^57-2726x^58+1233x^59+
4033x^60-792x^61-5787x^62-180x^63+7992x^64+2008x^65-10612x^66-5175x^67+13599x^68+10180x^69-
16596x^70+...

```

Fonte: Elaborado pela autora

3.2.8 A Fórmula de Binet e a Função Geradora de Z-dovan

O polinômio característico da sequência de Z-dovan pode ser calculado de forma semelhante como foi realizado nas Equações (3.8 e 3.17). É importante notar a existência de um salto nestas equações, validando a fórmula de recorrência destas sequências.

Definição 13. *Polinômio característico de Z-dovan (Generalização), em que z é a ordem da sequência estendida, tem-se:*

$$P_{Z(x)} = x^{(z)} = x^{(z-2)} + x^{(z-3)} + x^{(z-4)} + \dots + x^{(z-z)}.$$

De acordo com os resultados apresentados para a fórmula de Binet das sequências vistas nas subseções anteriores, pode-se chegar à seguinte conclusão referente à sequência de Z-dovan.

Definição 14. A fórmula de Binet de Z-dovan é dada por:

$$F(n) = A(x_1)^n + B(x_2)^n + C(x_3)^n + \dots Z(x_z)^n,$$

em que $n \in \mathbb{Z}$, $A, B, C, \dots, Z$ são os coeficientes da função, e $x_1, x_2, x_3, \dots, x_z$ são as raízes do polinômio característico da sequência.

Os coeficientes deverão ser calculados de acordo com a ordem da extensão da sequência. Assim, para pentadovan existirão 6 coeficientes, hexadovan 7, heptadovan 8, e assim por diante. A quantidade de raízes se dará de forma semelhante.

Para a sequência de Z-dovan seus termos também podem ser obtidos a partir de uma função geradora. Baseado nos cálculos das sequências anteriores, pode-se obter esta função de maneira semelhante (índice inteiro não positivo da sequência).

Definição 15. A Função geradora de Z-dovan para os termos positivos da sequência é descrita por:

$$g(P_{Z(n)}, x) = \frac{1}{1 - \sum_{i=2}^z x^i},$$

em que z representa a ordem da sequência que irá variar de 3 até z .

Definição 16. A Função geradora de Z-dovan para índice inteiro não positivo da sequência é:

$$g(P_{Z(-n)}, x) = \frac{-\left(\sum_{i=0}^{z-2} x^i\right)}{x^{(z)} - \sum_{i=0}^{z-2} x^i},$$

sendo z representado pela ordem da sequência que irá variar de 3 até z .

Portanto, pode-se notar que a SP é um caso particular da sequência de Z-dovan, apresentando assim a sua sequência com os seus respectivos valores iniciais iguais a $P_0 = 1, P_1 = 0, P_2 = 1$. Assim, é possível utilizar a forma generalizada para obter as suas funções geradoras (números positivos e negativos).

Nesta seção foram estudadas as sequências estendidas dos números de Padovan. De acordo com os principais resultados desta pesquisa, tem-se que os termos dessas sequências podem ser calculados elevando a n -ésima potência as suas respectivas matrizes Q , inclusive para a sequência generalizada.

Contudo, foi abordada além da construção da matriz geradora Q , a fórmula de Binet e a função geradora para os termos de Padovan e as suas extensões, meios pelos quais é possível obter os termos da sequência de modo não recursivo.

3.3 Relações Matriciais

Nesta seção serão discutidas algumas relações matriciais da SP, oriundas da seção anterior. Contudo, foram realizados estudos com base em trabalhos de Sokhuma (2013a) e Cerda-Morales (2017) a fim de obtermos propriedades matriciais inerentes as extensões desta sequência.

Propriedade 3. *Para qualquer inteiro m, n tal que $3 \leq m < n$ e $m, n \in \mathbb{N}$, tem-se a seguinte propriedade para a SP:*

$$P_{n+m-1} = P_{n-1}P_{m-2} + P_{n-2}P_{m-1} + P_{n-3}P_{m-3}.$$

Demonstração. De acordo com o Teorema 5, são dadas as matrizes:

$$\text{Para } Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ tem-se } Q^n = \begin{bmatrix} P_{n-2} & P_{n-3} & P_{n-4} \\ P_{n-1} & P_{n-2} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-4} & P_{n-5} \end{bmatrix}, \text{ para todo } n \geq 5.$$

$$Q^{n+m} = Q^n Q^m$$

$$\begin{bmatrix} P_{n+m-2} & P_{n+m-3} & P_{n+m-4} \\ P_{n+m-1} & P_{n+m-2} & P_{n+m-3} \\ P_{n+m-3} & P_{n+m-4} & P_{n+m-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{n-2} & P_{n-3} & P_{n-4} \\ P_{n-1} & P_{n-2} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-4} & P_{n-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{m-2} & P_{m-3} & P_{m-4} \\ P_{m-1} & P_{m-2} & P_{m-3} \\ P_{m-3} & P_{m-4} & P_{m-5} \end{bmatrix}$$

Obtendo o elemento da segunda linha e primeira coluna, é fácil ver que:

$$P_{n+m-1} = P_{n-1}P_{m-2} + P_{n-2}P_{m-1} + P_{n-3}P_{m-3}.$$

Para $m = 3$, tem-se que:

$$P_{n+2} = P_{n-1}P_1 + P_{n-2}P_2 + P_{n-3}P_0$$

De acordo com os valores iniciais $P_0 = P_1 = P_2 = 1$ e com a relação de recorrência $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$, pode-se chegar a relação de recorrência:

$$\begin{aligned} P_{n+2} &= P_{n-1} + P_{n-2} + P_{n-3} \\ &= P_n + P_{n-1}. \end{aligned}$$

□

Propriedade 4. *A relação matricial dos números de Tridovan, é dada por:*

$P_{3(n+m)} = P_{3(n)}P_{3(m)} + P_{3(n-1)}P_{3(m+1)} + P_{3(n-2)}(P_{3(m-1)} + P_{3(m-2)}) + P_{3(n-3)}P_{3(m-1)}$, para qualquer inteiro m, n tal que $2 \leq m < n$ e $m, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Dadas as matrizes, em que $Q_3(i, j)$ representa os termos da matriz Q_3 , onde i é a linha e j a coluna, tem-se:

$$\text{Para } Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ tem-se } \begin{bmatrix} Q_3(1, 1) & Q_3(1, 2) & Q_3(1, 3) & Q_3(1, 4) \\ Q_3(2, 1) & Q_3(2, 2) & Q_3(2, 3) & Q_3(2, 4) \\ Q_3(3, 1) & Q_3(3, 2) & Q_3(3, 3) & Q_3(3, 4) \\ Q_3(4, 1) & Q_3(4, 2) & Q_3(4, 3) & Q_3(4, 4) \end{bmatrix}.$$

Para todo $n \geq 1$, como mostradas anteriormente no Teorema 8 e, sendo os seus termos apresentados em cada linha abaixo:

$$\begin{aligned} Q_3(1, 1) &= P_{3(n)}, \\ Q_3(1, 2) &= P_{3(n-1)}, \\ Q_3(1, 3) &= P_{3(n-2)}, \\ Q_3(1, 4) &= P_{3(n-3)}, \\ Q_3(2, 1) &= P_{3(n-1)} + P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)}, \\ Q_3(2, 2) &= P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}, \\ Q_3(2, 3) &= P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)}, \\ Q_3(2, 4) &= P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)} + P_{3(n-6)}, \\ Q_3(3, 1) &= P_{3(n-1)} + P_{3(n-2)}, \\ Q_3(3, 2) &= P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)}, \\ Q_3(3, 3) &= P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}, \\ Q_3(3, 4) &= P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)}, \\ Q_3(4, 1) &= P_{3(n-1)}, \\ Q_3(4, 2) &= P_{3(n-2)}, \\ Q_3(4, 3) &= P_{3(n-3)}, \\ Q_3(4, 4) &= P_{3(n-4)}. \end{aligned}$$

Utilizando:

$$Q_3^{n+m} = Q_3^n Q_3^m.$$

É possível encontrar o termo $Q_3(1, 1)$, e chegar facilmente a conclusão que:

$$\begin{aligned} P_{3(n+m)} &= P_{3(n)}P_{3(m)} + P_{3(n-1)}(P_{3(m-1)} + P_{3(m-2)} + P_{3(m-3)}) \\ &\quad + P_{3(n-2)}(P_{3(m-1)} + P_{3(m-2)}) + P_{3(n-3)}P_{3(m-1)} \\ &= P_{3(n)}P_{3(m)} + P_{3(n-1)}P_{3(m+1)} + P_{3(n-2)}(P_{3(m-1)} + P_{3(m-2)}) + P_{3(n-3)}P_{3(m-1)}. \end{aligned}$$

Supondo $m = 2$, tem-se que:

$$P_{3(n+2)} = P_{3(n)}P_{3(2)} + P_{3(n-1)}P_{3(3)} + P_{3(n-2)}(P_{3(1)} + P_{3(0)}) + P_{3(n-3)}P_{3(1)}.$$

De acordo com os valores iniciais $P_{3(0)} = 1, P_{3(1)} = 0, P_{3(2)} = P_{3(3)} = 1$, pode-se chegar a relação de recorrência de Tridovan:

$$P_{3(n+2)} = P_{3(n)} + P_{3(n-1)} + P_{3(n-2)}.$$

□

Propriedade 5. Para qualquer inteiro m, n tal que $2 \leq m < n$ e $m, n \in \mathbb{N}$, existe a relação matricial da sequência de Tetradovan:

$$\begin{aligned} P_{4(n+m)} &= P_{4(n)}P_{4(m)} + P_{4(n-1)}(P_{4(m-1)} + P_{4(m-2)} + P_{4(m-3)} + P_{4(m-4)}) \\ &\quad + P_{4(n-2)}(P_{4(m-1)} + P_{4(m-2)} + P_{4(m-3)}) + P_{4(n-3)}(P_{4(m-1)} + P_{4(m-2)}) \\ &\quad + P_{4(n-4)}P_{4(m-1)}. \end{aligned}$$

Demonstração. Observando o Teorema 10, onde apresentam as matrizes, para $n \geq 8$, em que $Q_4(i, j)$ representam os termos da matriz Q_4 , onde i representa a linha e j a coluna, tem-se:

$$\text{Para } Q_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ tem-se } Q_4^n = \begin{bmatrix} Q_4(1,1) & Q_4(1,2) & Q_4(1,3) & Q_4(1,4) & Q_4(1,5) \\ Q_4(2,1) & Q_4(2,2) & Q_4(2,3) & Q_4(2,4) & Q_4(2,5) \\ Q_4(3,1) & Q_4(3,2) & Q_4(3,3) & Q_4(3,4) & Q_4(3,5) \\ Q_4(4,1) & Q_4(4,2) & Q_4(4,3) & Q_4(4,4) & Q_4(4,5) \\ Q_4(5,1) & Q_4(5,2) & Q_4(5,3) & Q_4(5,4) & Q_4(5,5) \end{bmatrix}.$$

Em que cada termo desta matriz é dado por:

$$\begin{aligned} Q_4(1,1) &= P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)} = P_{4(n)}, \\ Q_4(1,2) &= P_{4(n-1)}, \\ Q_4(1,3) &= P_{4(n-2)}, \\ Q_4(1,4) &= P_{4(n-3)}, \\ Q_4(1,5) &= P_{4(n-4)}, \\ Q_4(2,1) &= P_{4(n-1)} + P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)}, \\ Q_4(2,2) &= P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)}, \\ Q_4(2,3) &= P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)}, \\ Q_4(2,4) &= P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)} + P_{4(n-7)}, \\ Q_4(2,5) &= P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)} + P_{4(n-7)} + P_{4(n-8)}, \\ Q_4(3,1) &= P_{4(n-1)} + P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)}, \\ Q_4(3,2) &= P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)}, \\ Q_4(3,3) &= P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)}, \\ Q_4(3,4) &= P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)}, \\ Q_4(3,5) &= P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)} + P_{4(n-7)}, \\ Q_4(4,1) &= P_{4(n-1)} + P_{4(n-2)}, \end{aligned}$$

$$Q_4(4, 2) = P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)},$$

$$Q_4(4, 3) = P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)},$$

$$Q_4(4, 4) = P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)},$$

$$Q_4(4, 5) = P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)},$$

$$Q_4(5, 1) = P_{4(n-1)},$$

$$Q_4(5, 2) = P_{4(n-2)},$$

$$Q_4(5, 3) = P_{4(n-3)},$$

$$Q_4(5, 4) = P_{4(n-4)},$$

$$Q_4(5, 5) = P_{4(n-5)}.$$

Assim:

$$Q_4^{n+m} = Q_4^n Q_4^m.$$

É possível encontrar o termo $Q_4(1, 1)$, concluindo que:

$$\begin{aligned} P_{4(n+m)} &= P_{4(n)}P_{4(m)} + P_{4(n-1)}(P_{4(m-1)} + P_{4(m-2)} + P_{4(m-3)} + P_{4(m-4)}) \\ &\quad + P_{4(n-2)}(P_{4(m-1)} + P_{4(m-2)} + P_{4(m-3)}) + P_{4(n-3)}(P_{4(m-1)} + P_{4(m-2)}) + P_{4(n-4)}P_{4(m-1)} \\ &= P_{4(n)}P_{4(m)} + P_{4(n-1)}P_{4(m+1)} + P_{4(n-2)}(P_{4(m-1)} + P_{4(m-2)} + P_{4(m-3)}) \\ &\quad + P_{4(n-3)}(P_{4(m-1)} + P_{4(m-2)}) + P_{4(n-4)}P_{4(m-1)}. \end{aligned}$$

Logo, para $m = 2$, tem-se que:

$$\begin{aligned} P_{4(n+m)} &= P_{4(n)}P_{4(2)} + P_{4(n-1)}P_{4(3)} + P_{4(n-2)}(P_{4(1)} + P_{4(0)} + P_{4(-1)}) \\ &\quad + P_{4(n-3)}(P_{4(1)} + P_{4(0)}) + P_{4(n-4)}P_{4(1)}. \end{aligned}$$

De acordo com os valores iniciais $P_{4(-1)} = 0, P_{4(0)} = 1, P_{4(1)} = 0, P_{4(2)} = P_{4(3)} = 1$, obtêm-se a relação de recorrência de Tetradovan:

$$P_{4(n+2)} = P_{4(n)} + P_{4(n-1)} + P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)}.$$

□

Propriedade 6. Para a generalização da SP (*Z-dovan*), tem-se a seguinte relação matricial, com $m, n \in \mathbb{N}$ e $2 \leq m < n$:

$$P_{Z(n+m)} = P_{Z(n)}P_{Z(m)} + \dots + P_{Z(n-j+1)}\left(\sum_{i=1}^{z-i+1} P_{Z(m-i)}\right) + \dots + P_{Z(n-z+1)}P_{Z(m-1)}.$$

Demonstração. De acordo com as matrizes estudadas na subseção 3.2.4, tem-se que, para

$n \geq 2z - 2$:

$$\text{Para } Q_Z = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ tem-se } Q_Z^n = \begin{bmatrix} P_{Z(n)} & \dots & P_{Z(n-j+1)} & \dots & P_{Z(n-z+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{z-i+1} P_{Z(n-i)} & \dots & \sum_{i=1}^{z-i+1} P_{Z(n-i-j+1)} & \dots & \sum_{i=1}^{z-i+1} P_{Z(n-i-z+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{Z(n-1)} & \dots & P_{Z(n-j)} & \dots & P_{Z(n-z)} \end{bmatrix}.$$

Assim para $Q_Z^{n+m} = Q_Z^n Q_Z^m$, é possível obter a generalização da relação matricial da sequência $P_{Z(n)}$, calculando o termo $Q_Z(1, 1)$. Dessa forma, tem-se que esse termo é representado pela seguinte fórmula:

$$P_{Z(n+m)} = P_{Z(n)}P_{Z(m)} + \dots + P_{Z(n-j+1)} \left(\sum_{i=1}^{z-i+1} P_{Z(m-i)} \right) + \dots + P_{Z(n-z+1)}P_{Z(m-1)},$$

em que i a linha, j a coluna, z a ordem da SP (Generalização) e $Z = z - 1$. Sendo ainda $\mathbf{1}$ é o vetor coluna e $\mathbf{0}$ é o vetor linha, ambos de tamanho $z - 1$, $\mathbf{I}$ a matriz de bloco dada pela matriz identidade de tamanho $z - 1$, em que z representa a ordem da sequência. Vale salientar que as linhas e colunas variam de 2 até a ordem da sequência, e que a SP é um caso particular desse processo de generalização, visto que a sequência possuirá os seus termos iniciais como sendo $P_0 = 1, P_1 = 0, P_2 = 1$. $\square$

3.4 Sequência $(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ -Z-dovan

Esta seção apresenta novas extensões da sequência (s, t) -Padovan e a generalização deste modelo matricial. A sequência (s_1, s_2) -Padovan é uma forma de visualização alternativa da sequência (s, t) -Padovan (CERDA-MORALES, 2017; DISKAYA; MENKEN, 2019). É também apresentada a sequência (s_1, s_2, s_3) -Tridovan como passo até alcançar a generalização deste processo investigativo matemático fundamentado no trabalho de Vieira, Alves e Catarino (2019c).

3.4.1 A Sequência $(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ -Z-dovan

Uma sequência (s_1, s_2) -Padovan foi definida, primordialmente, por Cerda-Morales (2017) baseado em trabalhos de Civec e Türkmen (2008) e Gulec e Taskara (2012), onde esta representa uma maneira de desenvolvermos uma matriz geradora da SP com a generalização dos coeficientes existentes na fórmula de recorrência da sequência.

Os termos $s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)}$ variam de acordo com a extensão e a ordem da sequência, no caso dos números de Padovan, haverá apenas o s_1 e o s_2 . Entretanto a generalização da SP, Z-dovan, terão $Z = z - 1$ termos, dependendo da ordem da sequência $((s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ -Z-dovan). Nesta seção serão definidas, de modo primordial, as sequências matriciais $(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ de Padovan, suas extensões, bem como a sua generalização.

Vale destacar que Cerda-Morales (2017) definiu esta sequência com os valores iniciais diferentes em relação aos valores padrões da SP, entretanto, neste presente trabalho, serão utilizados os mesmos valores definidos por Padovan ao criar a sequência.

Definição 17. Para $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$, a sequência (s_1, s_2) -Padovan, representada por $P_n(s_1, s_2)$ com $n \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, é definida pela fórmula de recorrência:

$$P_{(n+3)(s_1, s_2)} = s_1 P_{(n+1)(s_1, s_2)} + s_2 P_{(n)(s_1, s_2)}.$$

Com os valores iniciais: $P_{(0)(s_1, s_2)} = 1$, $P_{(1)(s_1, s_2)} = 1$ e $P_{(2)(s_1, s_2)} = 1$. Para efeito de notação, será utilizado $P_{(n)(s_1, s_2)} = B_n$.

Teorema 24. A matriz geradora da sequência (s_1, s_2) -Padovan, para $n \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}$, é dada por:

$$\mathbf{v}_3 Q_{(s_1, s_2)}^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 \\ s_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} B_{n+2} & B_{n+1} & B_n \end{bmatrix}.$$

Em que $\mathbf{v}_3$ representa o vetor linha, contendo os valores iniciais da SP.

Demonstração. Para $n = 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 Q_{(s_1, s_2)}^1 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 \\ s_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s_1 + s_2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_3 & B_2 & B_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, o teorema é válido para este valor inicial.

Supondo que para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$ valha, então:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 Q_{(s_1, s_2)}^k &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 \\ s_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \\ &= \begin{bmatrix} B_{k+2} & B_{k+1} & B_k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_3 Q_{(s_1, s_2)}^{k+1} &= \mathbf{v}_3 Q_{(s_1, s_2)}^k Q_{(s_1, s_2)} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 \\ s_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 \\ s_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} B_{k+2} & B_{k+1} & B_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 \\ s_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} s_1 B_{k+1} + s_2 B_k & B_{k+2} & B_{k+1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} B_{k+3} & B_{k+2} & B_{k+1} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Concluindo assim a demonstração pelo princípio da indução finita. $\square$

A sequência (s_1, s_2, s_3) -Tridovan de quarta ordem ocorre por meio de uma combinação linear de quatro termos, apresentando o primeiro coeficiente, da respectiva fórmula de recorrência, com valor zero. Introduzido primordialmente neste trabalho e com suporte em Cerda-Morales (2017), Vieira, Alves e Catarino (2019c), é então definida de acordo com a conjectura apresentada abaixo.

Definição 18. Para $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{Z}$, a sequência (s_1, s_2, s_3) -Tridovan, representada por $T_{(n)}(s_1, s_2, s_3)$ com $n \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, tem a seguinte fórmula de recorrência (VIEIRA; ALVES; CATARINO, 2019c):

$$T_{(n+3)}(s_1, s_2, s_3) = s_1 T_{(n+1)}(s_1, s_2, s_3) + s_2 T_{(n)}(s_1, s_2, s_3) + s_3 T_{(n-1)}(s_1, s_2, s_3).$$

Com os seguintes valores iniciais: $T_{(0)}(s_1, s_2, s_3) = 1$, $T_{(1)}(s_1, s_2, s_3) = 0$, $T_{(2)}(s_1, s_2, s_3) = 1$ e $T_{(3)}(s_1, s_2, s_3) = s_2 + s_3$ com $T_{(n)}(s_1, s_2, s_3) = T_{(n)}$.

Teorema 25. A matriz geradora da sequência (s_1, s_2, s_3) -Tridovan, representada por $\Gamma_{(s_1, s_2, s_3)}^{(n)}$ para $n \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}$, é expressa por:

$$\mathbf{v}_4 \Gamma_{(s_1, s_2, s_3)}^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 & 0 \\ s_2 & 0 & 0 & 1 \\ s_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} T_{n+2} & T_{n+1} & T_n & T_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Em que $\mathbf{v}_4$ é o vetor linha contendo os valores iniciais da sequência de Tridovan.

Demonstração. Provando que para $n = 1$, a igualdade é verdadeira, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_4 \Gamma_{(s_1, s_2, s_3)}^{(1)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 & 0 \\ s_2 & 0 & 0 & 1 \\ s_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s_2 + s_3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T_3 & T_2 & T_1 & T_0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_4 \Gamma_{(s_1, s_2, s_3)}^{(k)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 & 0 \\ s_2 & 0 & 0 & 1 \\ s_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \\ &= \begin{bmatrix} T_{k+2} & T_{k+1} & T_k & T_{k-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, verificando que vale também para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_4 \Gamma_{(s_1, s_2, s_3)}^{(k+1)} &= \mathbf{v}_4 \Gamma_{(s_1, s_2, s_3)}^{(k)} \Gamma_{(s_1, s_2, s_3)} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 & 0 \\ s_2 & 0 & 0 & 1 \\ s_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 & 0 \\ s_2 & 0 & 0 & 1 \\ s_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T_{k+2} & T_{k+1} & T_k & T_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 & 0 \\ s_2 & 0 & 0 & 1 \\ s_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s_1 T_{k+1} + s_2 T_k + s_3 T_{k-1} & T_{k+2} & T_{k+1} & T_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T_{k+3} & T_{k+2} & T_{k+1} & T_k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Validando assim o teorema pelo princípio da indução finita. $\square$

A fim de realizar a generalização desta sequência, são consideradas as relações utilizadas para as sequências expressas anteriormente, e assim alcançar a forma generalizada dessa sequência denominada $(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ -Z-dovan. Com suporte no trabalho de Alves (2015), em que a generalização da SF é realizada, é definida a generalização desta sequência.

Definição 19. Para $s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)} \in \mathbb{Z}$, a sequência $(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ -Z-dovan, denominada $Z_{(n)}(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ com $n \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, é definida por:

$$\begin{aligned} Z_{(n+1)}(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)}) &= s_1 Z_{(n-1)}(s_1, s_2, s_3, \dots, s_{(z-1)}) + s_2 Z_{(n-2)}(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)}) \\ &\quad + s_3 Z_{(n-3)}(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)}) + \dots + s_{(z-1)} Z_{(n-z+1)}(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)}) \\ Z_{(n+1)}(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)}) &= \sum_{i=1}^{z-1} s_i Z_{(n-i)}(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)}). \end{aligned}$$

Em que z representa a ordem da sequência.

Com isso, será utilizada a notação $Z_{(n)}(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)}) = Z_{(n)}$ e $s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)}$ representa a ordem da sequência.

Definição 20. Com $n \geq z-3$ e $n \in \mathbb{N}$, a matriz geradora da sequência $(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ -Z-dovan, representada por $\zeta_{(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & [I] \\ \mathbf{s} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, tem-se:

$$\mathbf{v} \zeta_{(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})}^{(n)} = \begin{bmatrix} Z_{n+2} & Z_{n+1} & \dots & Z_{n-z+3} \end{bmatrix}.$$

Em que $\mathbf{v}$ representa o vetor linha contendo os valores iniciais da sequência, $\mathbf{s}$ representa o vetor coluna, $[I]$ a matriz de bloco dada pela matriz identidade e $\mathbf{0}$ o vetor linha, ambos de tamanho $z-1$.

É possível observar que a primeira linha da matriz representa o operador de acordo com a recorrência (ERCOLANO, 1979). Posteriormente, há uma matriz identidade logo abaixo, sendo expressa de acordo com o número de termos somados da sequência. E finalmente, uma coluna de zeros, variando de acordo com a ordem da sequência.

A partir da Definição 20, conclui-se que a generalização desta sequência pode ser facilmente calculada de acordo com a ordem da sequência. Assim, para o modelo de generalização apresentado, partindo da SP (ordem 3), pode-se chegar a uma perspectiva mais geral (ordem z).

3.4.2 A Fórmula de Binet

A fórmula de Binet resulta em um método para obter os termos de uma sequência, sem necessitar da recorrência definida, existindo a obrigação de conhecer o polinômio característico de sequência analisada.

Definição 21. O polinômio na forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ pode ser expresso por:

$$a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n,$$

sendo C_1, C_2 os coeficientes, r_1, r_2 as raízes do polinômio $r^2 + pr + q = 0$, com $p, q \in \mathbb{Z}$, $r_1 \neq r_2$.

Cerda-Morales (2017), Diskaya e Menken (2019) definiram o polinômio característico da sequência (s_1, s_2) -Padovan como sendo $x^3 - s_1x - s_2 = 0$. No entanto, Vieira, Alves e Catarino (2019c) definiram usando outras variáveis, s_1, s_2 .

Definição 22. *Fundamentada na sua recorrência (ver Definição 17), o polinômio característico da sequência (s_1, s_2) -Padovan é definida como (VIEIRA; ALVES; CATARINO, 2019c; DISKAYA; MENKEN, 2019):*

$$x^3 = s_1x - s_2 \implies x^3 - s_1x - s_2 = 0,$$

onde $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$ e resultando numa raiz real e as outras duas sendo números complexos e conjugados. Assim, r_1, r_2, r_3 são as raízes desse polinômio, em que:

$$\begin{aligned} r_1 &= A + B, \\ r_2 &= -\frac{1}{2}(A + B) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(A - B), \\ r_3 &= -\frac{1}{2}(A + B) - \frac{i\sqrt{3}}{2}(A - B), \\ A &= \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\Delta}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}, \\ B &= \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\Delta}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}, \\ \Delta &= \left(\frac{t}{2}\right)^2 - \left(\frac{s}{3}\right)^3. \end{aligned}$$

Com esta definição e o Teorema 21, pode-se facilmente chegar à fórmula de Binet da sequência (s_1, s_2) -Padovan.

Teorema 26. *Para $n \in \mathbb{N}$, tem-se que a fórmula de Binet da sequência (s_1, s_2) -Padovan é expressa por (VIEIRA; ALVES; CATARINO, 2019c):*

$$Q_{(s_1, s_2)}^{(n)} = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n + C_3 r_3^n,$$

onde C_1, C_2, C_3 são os coeficientes da fórmula de Binet da sequência, r_1, r_2, r_3 as raízes do polinômio característico $(x^3 - s_1x - s_2 = 0)$ e $27s_2^2 - 4s_1^3 \neq 0$ a condição para os coeficientes s_1, s_2 da fórmula de recorrência existirem.

Demonstração. De posse da fórmula de recorrência da sequência (s_1, s_2) -Padovan (Definição 17), com os valores iniciais definidos e o seu polinômio característico (Definição 22) com raízes r_1, r_2, r_3 , pode-se obter, através da resolução do sistema linear de equações, os valores dos coeficientes C_1, C_2, C_3 .

O discriminante $\Delta = \frac{(-s_2)^2}{4} + \frac{(-s_1)^3}{27}$, relativo ao polinômio de 3º grau, determina a forma de como serão as raízes do polinômio. Portanto, quando $\Delta \neq 0$ todas as raízes serão distintas, chegando facilmente à conclusão de que $27s_2^2 - 4s_1^3 \neq 0$. De fato, se a condição

não existir, não há os coeficientes indicados acima, visto que as raízes são iguais, então não haverá nenhuma fórmula Binet. Note-se também que $r_1 r_2 r_3 = s_2$ e que $r_1 + r_2 + r_3 = 0$. Por fim, essa condição implica que quando $s_2 \neq 0$, haverá pelo menos uma raiz igual a zero. Logo, não haverá a fórmula Binet para este caso. $\square$

Além disso, será explorada o polinômio característico e a fórmula de Binet da sequência (s_1, s_2, s_3) -Tridovan, fundamentada na sequência (s_1, s_2) -Padovan.

Definição 23. O polinômio característico da sequência (s_1, s_2, s_3) -Tridovan é definido baseado na recorrência (ver Definição 18), resultando em (VIEIRA; ALVES; CATARINO, 2019c):

$$x^4 = s_1 x^2 + s_2 x + s_3 \implies x^4 - s_1 x^2 - s_2 x - s_3 = 0,$$

em que $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{Z}$, r_1, r_2, r_3, r_4 são as raízes, e:

$$r_1 = -S + \frac{1}{2} \sqrt{-4S^2 - 2p + \frac{q}{S}},$$

$$r_2 = -S - \frac{1}{2} \sqrt{-4S^2 - 2p + \frac{q}{S}},$$

$$r_3 = S + \frac{1}{2} \sqrt{-4S^2 - 2p - \frac{q}{S}},$$

$$r_4 = S - \frac{1}{2} \sqrt{-4S^2 - 2p - \frac{q}{S}},$$

$$p = -8s_1, q = -s_2,$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2}{3}p + \frac{1}{3} \left(Q + \frac{\Delta_0}{Q} \right)},$$

$$Q = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + (\sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3})}{2}},$$

$$\Delta_0 = s_1^2 - 12s_3,$$

$$\Delta_1 = -2s_1^3 + 27s_2^2 - 72s_1s_3.$$

Teorema 27. Para $n \in \mathbb{N}$, tem-se que a fórmula de Binet da sequência (s_1, s_2, s_3) -Tridovan é dada por (VIEIRA; ALVES; CATARINO, 2019c):

$$\Gamma_{(s_1, s_2, s_3)}^{(n)} = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n + C_3 r_3^n + C_4 r_4^n,$$

em que C_1, C_2, C_3, C_4 são os coeficientes da fórmula de Binet da sequência, r_1, r_2, r_3, r_4 as raízes do polinômio característico ($x^4 - s_1 x^2 - s_2 x - s_3 = 0$). Dessa forma, os coeficientes s_1, s_2, s_3 da fórmula de recorrência da sequência, deverão obedecer as seguintes condições: $s_3 \neq 0$ e $\Delta < 0$ ou ($\Delta > 0$ e $P < 0$ e $D < 0$) onde $\Delta = s_2^2(4s_1^3 - 27s_2^2) - 16s_3(16s_3^2 + 8s_1^2s_3 + 9s_1s_2^2 + s_1^4)$, $P = -8s_1$ e $D = -64s_3 - 16s_1$.

Demonstração. Através da recorrência da sequência (s_1, s_2, s_3) -Tridovan (Definição 18), com os valores iniciais definidos e o seu polinômio característico (Definição 23) com raízes

r_1, r_2, r_3, r_4 , pode-se obter, através da resolução do sistema linear de equações, os valores dos coeficientes C_1, C_2, C_3, C_4 .

Existe ainda uma condição, a qual é obtida a partir do princípio de que todas as raízes devem ser distintas, $\Delta < 0$ ou $\Delta > 0$ com $P < 0$ e $D < 0$. A partir do polinômio geral de quarto grau, tem-se a sua forma representada por: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, em que a, b, c, d, e são os coeficientes do polinômio, tendo que o discriminante Δ é obtido pela fórmula (REES, 1992):

$$\begin{aligned}\Delta = & 256a^3e^3 - 192a^2bd^2 - 128a^2c^2e^2 + 144a^2cd^2e - 27a^2d^4 + 144ab^2ce^2 \\ & - 6ab^2d^2e - 80abc^2de + 18abcd^3 + 16ac^4e - 4ac^3d^2 - 27b^4e^2 + 18b^3cde \\ & - 4b^3d^3 - 4b^2c^3e + b^2c^2d^2.\end{aligned}$$

Portanto:

$$\Delta = s_2^2(4s_1^3 - 27s_2^2) - 16s_3(16s_3^2 + 8s_1^2s_3 + 9s_1s_2^2 + s_1^4).$$

Os parâmetros P e D são obtidos pela fórmula:

$$\begin{aligned}P &= 8ac - 3b^2 = -8s_1, \\ D &= 64a^3e - 16a^2c^2 + 16ab^2c - 16a^2bd - 3b^4 = -64s_3 - 16s_1.\end{aligned}$$

Assim: $-8s_1 > 0$ e $-64s_3 - 16s_1 > 0$.

O produto das raízes $r_1r_2r_3r_4 = s_3$ e a soma das raízes $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0$, implicam que o termo $s_3 \neq 0$, para que a existência da fórmula de Binet seja possível.

□

Definição 24. O polinômio característico da sequência $(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ -Z-dovan é definido de acordo com a Definição 19, sendo:

$$x^z = s_1x^{(z-2)} + s_2x^{(z-3)} + \dots + s_{(z)}x^{(z-z)} \implies x^z - s_1x^{(z-2)} - s_2x^{(z-3)} - \dots - s_{(z)}x^{(z-z)} = 0$$

$$x^z - \left(\sum_{j=1}^{z-1} s_j x^{z-j-1}\right) = 0,$$

em que $s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)} \in \mathbb{Z}$, $r_1, r_2, r_3, \dots, r_z$ são as raízes, onde para realizar o cálculo das raízes do polinômio característico a partir do 5º, é necessário utilizar algum recurso computacional.

Definição 25. Para $n \in \mathbb{N}$, tem-se que a fórmula de Binet da sequência $(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ -Z-dovan é dada por:

$$\zeta_{(s_1, s_2, \dots, s_z)}^{(n)} = C_1r_1^n + C_2r_2^n + \dots + C_zr_z^n,$$

em que $C_1, C_2, \dots, C_z$ são os coeficientes, $r_1, r_2, \dots, r_z$ as raízes do polinômio característico.

O discriminante e as raízes do polinômio devem ser diferentes de zero. Isso pode ser facilmente verificado calculando os coeficientes da fórmula de Binet com o determinante de Vandermonde (BJÖRCK; PEREYRA, 1970; HORN; JOHNSON, 1994), conforme apresentado abaixo:

$$\text{Det} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_z \\ r_1^2 & r_2^2 & \dots & r_z^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_1^z & r_2^z & \dots & r_z^z \end{bmatrix} = \prod_{z \geq i > j \geq 2} (r_i - r_j).$$

O discriminante deve ser realizado de acordo com a ordem das equações e, se uma raiz for igual a outra, o determinante será igual a 0. Logo, não haverá fórmula Binet para a extensão da sequência da matriz.

Para moldar o produto raízes do polinômio da sequência $(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ -Z-dovan, tem-se que $r_1 r_2 \dots r_z = s_{(z-1)}$ e $r_1 + r_2 + \dots + r_z = 0$. Com isso, é possível concluir que $s_{(z-1)} \neq 0$, pois se esta condição for negativa, a fórmula de Binet não existirá.

A fórmula de Binet pode ser aplicado para a sequência $(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ -Z-dovan desde que as condições propostas sejam atendidas.

3.4.3 A Função Geradora

Uma função geradora consiste em resolver recorrências lineares cujos seus coeficientes sejam constantes (KOSHY, 2001). Esta técnica demonstrou um método de realizar o cálculo para obter os termos de uma sequência, sem precisar conhecer os seus elementos antecessores.

Teorema 28. *A função geradora da sequência (s_1, s_2) -Padovan, em que $n \in \mathbb{N}$, é dada por:*

$$g(P_{(n)(s_1, s_2)}, x) = \frac{1 + x}{1 - s_1 x^2 - s_2 x^3}.$$

Demonstração. Para números de Padovan, esta função é multiplicada por $s_1 x^2, s_2 x^3$ nas equações abaixo devido à sua relação de recorrência.

Assim, para a sequência (s_1, s_2) -Padovan, onde $P_0 = P_1 = P_2 = 1$, e $P_{(n)(s_1, s_2)}$, tem-se que:

$$g(P_{(n)(s_1, s_2)}, x) = P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + P_3 x^3 + P_4 x^4 + \dots \quad (3.28)$$

$$s_1 x^2 g(P_{(n)(s_1, s_2)}, x) = s_1 P_0 x^2 + s_1 P_1 x^3 + s_1 P_2 x^4 + s_1 P_3 x^5 + s_1 P_4 x^6 + \dots \quad (3.29)$$

$$s_2 x^3 g(P_{(n)(s_1, s_2)}, x) = s_2 P_0 x^3 + s_2 P_1 x^4 + s_2 P_2 x^5 + s_2 P_3 x^6 + s_2 P_4 x^7 + \dots \quad (3.30)$$

Baseado na Equação (3.28-3.29-3.30), tem-se que:

$$\begin{aligned} g(P_{(n)(s_1, s_2)}, x)(1 - s_1x^2 - s_2x^3) &= P_0 + P_1x + (P_2 - P_0)x^2 \\ g(P_{(n)(s_1, s_2)}, x)(1 - s_1x^2 - s_2x^3) &= 1 + x \\ g(P_{(n)(s_1, s_2)}, x) &= \frac{1 + x}{1 - s_1x^2 - s_2x^3}. \end{aligned}$$

□

Através da série de Taylor, em que apresenta a divisão direta da função geradora, é possível obter os termos de uma sequência. Dessa forma, o expoente da variável x representa a posição do termo da sequência e o seu respectivo coeficiente representa o termo da sequência, fundamentado no trabalho de Meyer e Rubinfeld (2005).

De modo similar, será realizada a investigação de outro teorema para a sequência (s_1, s_2, s_3) -Tridovan, de maneira análoga ao trabalho de Vieira, Alves e Catarino (2019c), apenas alterando os valores iniciais.

Teorema 29. *A função geradora da sequência (s_1, s_2, s_3) -Tridovan para $n \in \mathbb{N}$ é dada por:*

$$g(T_{(n)}, x) = \frac{1}{1 - s_1x^2 - s_2x^3 - s_3x^4}.$$

Demonstração. A função $g(T_{(n)}, x)$ é multiplicada por s_1x^2, s_2x^3 e s_3x^4 , de acordo com a fórmula de recorrência (Definição 18). Em que $T_{(0)} = 1, T_{(1)} = 0, T_{(2)} = 1, T_{(3)} = s_2 + s_3$, e $T_{(n)(s_1, s_2, s_3)}$. Assim, tem-se que:

$$g(T_{(n)(s_1, s_2, s_3)}, x) = T_{(0)} + T_{(1)}x + T_{(2)}x^2 + T_{(3)}x^3 + T_{(4)}x^4 + \dots \quad (3.31)$$

$$s_1x^2g(T_{(n)(s_1, s_2, s_3)}, x) = s_1T_{(0)}x^2 + s_1T_{(1)}x^3 + s_1T_{(2)}x^4 + s_1T_{(3)}x^5 + s_1T_{(4)}x^6 + \dots \quad (3.32)$$

$$s_2x^3g(T_{(n)(s_1, s_2, s_3)}, x) = s_2T_{(0)}x^3 + s_2T_{(1)}x^4 + s_2T_{(2)}x^5 + s_2T_{(3)}x^6 + s_2T_{(4)}x^7 + \dots \quad (3.33)$$

$$s_3x^4g(T_{(n)(s_1, s_2, s_3)}, x) = s_3T_{(0)}x^4 + s_3T_{(1)}x^5 + s_3T_{(2)}x^6 + s_3T_{(3)}x^7 + s_3T_{(4)}x^8 + \dots \quad (3.34)$$

De acordo com a Equação (3.31-3.32-3.33-3.34), percebe-se que:

$$\begin{aligned} g(T_{(n)(s_1, s_2, s_3)}, x)(1 - s_1x^2 - s_2x^3 - s_3x^4) &= T_{(0)} + T_{(1)}x + (T_{(2)} - T_{(0)})x^2 + (T_{(3)} - s_1T_{(1)} - s_2T_{(0)})x^3 \\ g(T_{(n)(s_1, s_2, s_3)}, x)(1 - s_1x^2 - s_2x^3 - s_3x^4) &= 1 \\ g(T_{(n)(s_1, s_2, s_3)}, x) &= \frac{1}{1 - s_1x^2 - s_2x^3 - s_3x^4}. \end{aligned}$$

□

Dados os resultados referentes às funções geradoras das sequências anteriores, pode-se obter a função geradora da sequência $(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ -Z-dovan.

Definição 26. A função geradora da sequência $(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ -Z-dovan para $n \in \mathbb{N}$ onde $Z_{(n)(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})} = Z_{(n)}$ é dada por:

$$g(Z_{(n)}, x) = \frac{x}{1 - (\sum_{i=1}^{z-1} s_i x^{i+1})},$$

em que z representa a ordem da sequência. Para esta definição, utiliza-se o caso da SP, com os respectivos valores iniciais iguais a $P_0 = 1, P_1 = 0, P_2 = 1$.

Contudo, pode-se concluir que a SP é um caso particular da sequência $(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ -Z-dovan, onde é obtida depois de atribuir os valores iguais a 1 para as variáveis definidas por s_1, s_2 .

3.5 Padovan afim e as suas propriedades

A seguir, seguindo a mesma perspectiva de evolução do conteúdo matemático, serão desenvolvidos estudos em relação a novas propriedades de sequências com características semelhantes à SP.

Vale lembrar que para a SP, pode-se obter os termos iniciais como sendo: $P_0 = P_1 = P_2 = 1$.

Definição 27. A SP Afim é definida por (VIEIRA; ALVES, 2018):

$$P_n = P_{n-2} + P_{n-3},$$

$n \geq 3$ e $n \in \mathbb{N}$, com $P_0 = a_0, P_1 = a_1, P_2 = a_2$ em que $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{N}$.

De acordo com a fórmula de Binet, função e matriz geradora dos números de Padovan demonstrados nas seções anteriores, doravante serão determinadas as propriedades para esta nova sequência.

A tabela abaixo pode mostrar como acontece a razão de convergência entre os termos vizinhos, para alguns valores de inicialização, até a forma generalizada ser obtida (ver Tabela 5).

Tabela 5 – Razão de convergência entre os termos vizinhos da SP Afim.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
P_n	2	2	2	4	4	6	8	10	14	18	24	32	42	56	74
$\frac{P_n}{P_{n+1}}$	1	1	2	1	1,5	1,33	1,25	1,4	1,28	1,33	1,33	1,31	1,33	1,32	1,32

Fonte: Elaborado pela autora

Como pode-se perceber, independente dos valores iniciais, esta sequência irá ter a mesma relação entre os termos vizinhos que os números de Padovan, resultando no número plástico com valor aproximado de 1,32.

Assim, para a sequência:

$$P_n = \{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, \dots\}$$

Com isso, tem-se que (SPINADEL; BUITRAGO, 2009):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{P_{n+1}} \approx 1,32.$$

O polinômio característico desta sequência é representado pelo mesmo da SP, visto que esta sequência possui a mesma propriedade encontrada na relação de recorrência dos números de Padovan. Logo, a fórmula de Binet será composta das mesmas raízes, enquanto que os coeficientes dependerão do vetor de inicialização.

Teorema 30. *A fórmula de Binet da SP Afim, é representada por:*

$$P(n) = A(x_1)^n + B(x_2)^n + C(x_3)^n,$$

sendo x_1, x_2, x_3 as raízes do polinômio característico da SP (Ver Teorema 12), $n \in \mathbb{Z}$ e A, B, C os coeficientes iguais a:

$$\begin{aligned} A &= \frac{a_2 - a_1x_2 - a_1x_3 + a_0x_2x_3}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \\ B &= \frac{a_2 - a_1x_1 - a_1x_3 + a_0x_1x_3}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \\ C &= \frac{a_2 - a_1x_1 - a_1x_2 + a_0x_1x_2}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}. \end{aligned}$$

Demonstração. Utilizando a recorrência $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$, com a generalização dos valores iniciais, sendo esses $P_0 = a_0, P_1 = a_1, P_2 = a_2$ e a sua equação característica semelhante à da SP, pode-se obter um sistema linear como:

$$\begin{cases} A + B + C &= a_0 \\ Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 &= a_1 \\ Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 &= a_2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, tem-se que:

$$\begin{aligned} A &= \frac{a_2 - a_1x_2 - a_1x_3 + a_0x_2x_3}{x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3} = \frac{a_2 - a_1x_2 - a_1x_3 + a_0x_2x_3}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \\ B &= \frac{a_2 - a_1x_1 - a_1x_3 + a_0x_1x_3}{x_2^2 - x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3} = \frac{a_2 - a_1x_1 - a_1x_3 + a_0x_1x_3}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \\ C &= \frac{a_2 - a_1x_1 - a_1x_2 + a_0x_1x_2}{x_3^2 + x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3} = \frac{a_2 - a_1x_1 - a_1x_2 + a_0x_1x_2}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}. \end{aligned}$$

□

Propriedade 7. Utilizando a matriz Q de Padovan para encontrar os valores desta nova sequência e o vetor linha $\mathbf{w}$ com os valores de inicialização, com $n \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \text{ e } Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entretanto:

$$\mathbf{w}Q^n = \begin{bmatrix} P_{n+2} & P_{n+1} & P_n \end{bmatrix}, n > 0.$$

Demonstração. Através do princípio da indução finita, tem-se que:

Para $n = 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}Q &= \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_0 & a_2 & a_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_1 + P_0 & P_2 & P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_3 & P_2 & P_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, a igualdade é válida.

Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\mathbf{w}Q^k = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} P_{k+2} & P_{k+1} & P_k \end{bmatrix}.$$

Agora, verificando que seja válido para $n = k + 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}Q^{k+1} &= \mathbf{w}Q^k Q \\ &= \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{k+2} & P_{k+1} & P_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{k+1} + P_k & P_{k+2} & P_{k+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{k+3} & P_{k+2} & P_{k+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Propriedade 8. A função geradora da SP Afim é dada por:

$$G(P_n, x) = \frac{P_0 + P_1 x + (P_2 - P_0)x^2}{(1 - x^2 - x^3)}.$$

Demonstração. Multiplicando a função $G(P_n, x) = P_0 + P_1x + P_2x^2 + P_3x^3 + P_4x^4 + \dots$ por x^2 e x^3 , tem-se:

$$\begin{aligned} G(P_n, x) &= P_0 + P_1x + P_2x^2 + P_3x^3 + P_4x^4 + \dots \\ x^2G(P_n, x) &= P_0x^2 + P_1x^3 + P_2x^4 + P_3x^5 + P_4x^6 + \dots \\ x^3G(P_n, x) &= P_0x^3 + P_1x^4 + P_2x^5 + P_3x^6 + P_4x^7 + \dots \end{aligned}$$

Assim, $G(P_n, x) - [x^2G(P_n, x) + x^3G(P_n, x)]$, com os valores iniciais $P_0 = a_0, P_1 = a_1, P_2 = a_2$, conclui-se que:

$$\begin{aligned} G(P_n, x)(1 - x^2 - x^3) &= P_0 + P_1x + (P_2 - P_0)x^2 \\ G(P_n, x)(1 - x^2 - x^3) &= P_0 + P_1x + (P_2 - P_0)x^2 \\ G(P_n, x) &= \frac{P_0 + P_1x + (P_2 - P_0)x^2}{(1 - x^2 - x^3)}. \end{aligned}$$

□

3.6 Relações Recorrentes Bi, Tri e n -dimensionais

De maneira sucinta, quando tem-se os elementos do tipo $a + bi$, em que a e b são os termos da SP, adequando-se à notação geral descrita na forma $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}i$, para um índice $n \in \mathbb{N}$, destacando a unidade imaginária i , em que $i^2 = -1$, pode-se avistar essa representação como um número complexo de Padovan (HARMAN, 1981). Com isso, de agora em diante, serão abordados mais elementos sobre este assunto.

3.6.1 Relações Recorrentes Bidimensionais

De modo semelhante como Oliveira, Alves e Paiva (2017), Vieira, Alves e Catarino (2019b) realizaram, respectivamente para a SF e para a sequência de Leonardo, nesta subseção serão discutidas, algumas propriedades inerentes às relações bidimensionais oriundas da recorrência da SP ($P(n) = P(n-2) + P(n-3)$).

Definição 28. Os números da forma $P(n, m)$ representarão os números da SP bidimensional e, devem satisfazer às seguintes condições bidimensionais de recorrência, em que $m, n, \in \mathbb{N}$:

$$P(n, m) = P(n-2, m) + P(n-3, m) \text{ e } P(n, m) = P(n, m-2) + P(n, m-3)$$

Com os seguintes valores iniciais definidos: $P(0, 0) = 1, P(1, 0) = 1, P(2, 0) = 1, P(0, 1) = 1 + i, P(0, 2) = 1 + i, P(1, 1) = 1 + i, P(1, 2) = 1 + i, P(2, 1) = 1 + i, P(2, 2) = 1 + i$ em que $i^2 = -1$ e $P(0) = P(1) = P(2) = 1, P(-1) = 0$.

Lema 1. Valem as seguintes propriedades:

$$(a) P(n, 0) = P(n),$$

- (b) $P(0, m) = P(m) + P(m-1)i$,
 (c) $P(n, 1) = P(n) + P(n)i$,
 (d) $P(1, m) = P(m) + P(m-1)i$.

Demonstração. (a) Sendo $P(n, m) = P(n-2, m) + P(n-3, m)$ e os valores iniciais $P(0, 0) = 1 = P(0)$, $P(1, 0) = 1 = P(1)$, $P(2, 0) = 1 = P(2)$ e aplicando o segundo princípio da indução finita sobre n , onde fixa $m = 0$ e varia $n = 0, 1, 2, \dots$. Observe:

$$\begin{aligned}
 P(n, 0) &= P(n-2, 0) + P(n-3, 0) : \\
 P(3, 0) &= P(1, 0) + P(0, 0) = 2 = P(3); \\
 P(4, 0) &= P(2, 0) + P(1, 0) = 2 = P(4); \\
 P(5, 0) &= P(3, 0) + P(2, 0) = 3 = P(5); \\
 P(6, 0) &= P(4, 0) + P(3, 0) = 4 = P(6); \\
 &\vdots \\
 P(n-3, 0) &= P(n-5, 0) + P(n-6, 0) = P(n-3); \\
 P(n-2, 0) &= P(n-4, 0) + P(n-5, 0) = P(n-2); \\
 P(n-1, 0) &= P(n-3, 0) + P(n-4, 0) = P(n-1); \\
 P(n, 0) &= P(n-2, 0) + P(n-3, 0) = P(n-2) + P(n-3) = P(n).
 \end{aligned}$$

Desse modo, verifica-se que vale a propriedade (a) $P(n, 0) = P(n)$.

De modo análogo, pode-se provar a validade (b) $P(0, m) = P(m) + P(m-1)i$, considerando a relação $P(n, m) = P(n, m-2) + P(n, m-3)$ para $P(0, 0) = 1 = P(0)$, $P(1, 0) = 1 = P(1)$, $P(2, 0) = 1 = P(2)$, $P(0, 1) = 1 + i$, $P(0, 2) = 1 + i$, analisando a recursividade para $n = 0$ e variando $m = 0, 1, 2, 3, \dots$. Percebe-se que:

$$\begin{aligned}
 P(0, m) &= P(0, m-2) + P(0, m-3) : \\
 P(0, 3) &= P(0, 1) + P(0, 0) = 2 + i = P(3) + P(2)i; \\
 P(0, 4) &= P(0, 2) + P(0, 1) = 2 + 2i = P(4) + P(3)i; \\
 P(0, 5) &= P(0, 3) + P(0, 2) = 3 + 2i = P(5) + P(4)i; \\
 P(0, 6) &= P(0, 4) + P(0, 3) = 4 + 3i = P(6) + P(5)i; \\
 &\vdots \\
 P(0, m-3) &= P(0, m-5) + P(0, m-6) = P(m-3) + P(m-4)i; \\
 P(0, m-2) &= P(0, m-4) + P(0, m-5) = P(m-2) + P(m-3)i; \\
 P(0, m-1) &= P(0, m-3) + P(0, m-4) = P(m-1) + P(m-2)i; \\
 P(0, m) &= P(0, m-2) + P(0, m-3) = P(m-2) + P(m-3)i \\
 &\quad + P(m-3) + P(m-4)i = P(m) + P(m-1)i.
 \end{aligned}$$

Demonstrando a propriedade (b) $P(0, m) = P(m) + P(m-1)i$.

Seguindo o mesmo princípio da indução, demonstra-se a propriedade $P(n, 1) = P(n) + P(n+1)i$ (c), relacionando a: $P(n, m) = P(n-2, m) + P(n-3, m)$ e para os valores iniciais $P(0) = P(1) = P(2) = 1, P(0, 1) = 1 + i, P(1, 1) = 1 + i, P(2, 1) = 1 + i$, fixando $m = 1$ e variando $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Segue que:

$$\begin{aligned}
 P(n, 1) &= P(n-2, 1) + P(n-3, 1) : \\
 P(3, 1) &= P(1, 1) + P(0, 1) = 2 + 2i = P(3) + P(3)i; \\
 P(4, 1) &= P(2, 1) + P(1, 1) = 2 + 2i = P(4) + P(4)i; \\
 P(5, 1) &= P(3, 1) + P(2, 1) = 3 + 3i = P(5) + P(5)i; \\
 P(6, 1) &= P(4, 1) + P(3, 1) = 4 + 4i = P(6) + P(6)i; \\
 &\vdots \\
 P(n-3, 1) &= P(n-5, 1) + P(n-6, 1) = P(n-3) + P(n-3)i; \\
 P(n-2, 1) &= P(n-4, 1) + P(n-5, 1) = P(n-2) + P(n-2)i; \\
 P(n-1, 1) &= P(n-3, 1) + P(n-4, 1) = P(n-1) + P(n-1)i; \\
 P(n, 1) &= P(n-2, 1) + P(n-3, 1) \\
 &= P(n-2) + P(n-2)i + P(n-3) + P(n-3)i \\
 &= P(n) + P(n)i.
 \end{aligned}$$

Provando que (c) $P(n, 1) = P(n) + P(n)i$.

Por fim, analogamente segue a prova de (d) $P(1, m) = P(m+1) + P(m)i$, considerando a relação $P(n, m) = P(n, m-2) + P(n, m-3)$ e os valores $P(0) = P(1) = P(2) = 1, P(1, 0) = 1, P(1, 1) = 1 + i, P(1, 2) = 1 + i$, fixando $n = 1$ e variando $m = 0, 1, 2, 3, \dots$. Note que:

$$\begin{aligned}
 P(1, m) &= P(1, m-2) + P(1, m-3) : \\
 P(1, 3) &= P(1, 1) + P(1, 0) = 2 + i = P(3) + P(2)i; \\
 P(1, 4) &= P(1, 2) + P(1, 1) = 2 + 2i = P(4) + P(3)i; \\
 P(1, 5) &= P(1, 3) + P(1, 2) = 3 + 2i = P(5) + P(4)i; \\
 P(1, 6) &= P(1, 4) + P(1, 3) = 4 + 3i = P(6) + P(5)i; \\
 &\vdots \\
 P(1, m-3) &= P(1, m-5) + P(1, m-6) = P(m-3) + P(m-4)i; \\
 P(1, m-2) &= P(1, m-4) + P(1, m-5) = P(m-2) + P(m-3)i; \\
 P(1, m-1) &= P(1, m-3) + P(1, m-4) = P(m-1) + P(m-2)i; \\
 P(1, m) &= P(1, m-2) + P(1, m-3) \\
 &= P(m-2) + P(m-3)i + P(m-3) + P(m-4)i
 \end{aligned}$$

$$= P(m) + P(m-1)i.$$

Demonstrando assim a última propriedade (d) $P(1, m) = P(m) + P(m-1)i$. $\square$

Teorema 31. Para os dois inteiros, $n, m \in \mathbb{N}$, os números na forma $P(n, m)$ são descritos por:

$$P(n, m) = (P(n)P(m)) + (P(n)P(m-1))i.$$

Demonstração. Fixando o valor do número natural n , pode-se realizar a demonstração através de indução sobre m . Para o valor de $m = 0$, existe a propriedade (b) $P(n, 0) = P(n)P(1) + P(n)P(-1)i = P(n)$ e $P(n, 1) = P(n)P(1) + P(n)P(0)i = P(n) + P(n)i$ (c), validadas anteriormente pelo Lema 1, onde $P(-1) = 0, P(0) = P(1) = P(2) = 1$, cujos valores iniciais são $P(0, 0) = 1, P(1, 0) = 1, P(2, 0) = 1, P(0, 1) = 1 + i, P(1, 1) = 1 + i, P(2, 1) = 1 + i, P(0, 2) = 1 + i, P(1, 2) = 1 + i, P(2, 2) = 1 + i$. Para isso, serão calculados alguns valores de $P(n, m)$, variando m .

Para $P(n, 2)$, utiliza-se a recorrência $P(n, m) = P(n, m-2) + P(n, m-3)$ com os valores iniciais $P(0, 0) = 1 = P(0), P(1, 0) = 1 = P(1), P(2, 0) = 1 = P(2), P(0, 2) = 1 + i, P(1, 2) = 1 + i, P(2, 2) = 1 + i$, com $m = 2$ fixo e $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, tem-se que:

$$P(n, 2) = P(n-2, 2) + P(n-3, 2) :$$

$$P(3, 2) = P(1, 2) + P(0, 2) = 2 + 2i = P(3) + P(3)i;$$

$$P(4, 2) = P(2, 2) + P(1, 2) = 2 + 2i = P(4) + P(4)i;$$

$$P(5, 2) = P(3, 2) + P(2, 2) = 3 + 3i = P(5) + P(5)i;$$

$$P(6, 2) = P(4, 2) + P(3, 2) = 4 + 4i = P(6) + P(6)i;$$

$\vdots$

$$P(n-3, 2) = P(n-5, 2) + P(n-6, 2) = P(n-3) + P(n-3)i;$$

$$P(n-2, 2) = P(n-4, 2) + P(n-5, 2) = P(n-2) + P(n-2)i;$$

$$P(n-1, 2) = P(n-3, 2) + P(n-4, 2) = P(n-1) + P(n-1)i;$$

$$\begin{aligned} P(n, 2) &= P(n-2, 2) + P(n-3, 2) \\ &= P(n-2) + P(n-2)i + P(n-3) + P(n-3)i \\ &= P(n) + P(n)i. \end{aligned}$$

Assim, $P(n, 2) = P(n) + P(n)i$.

Fixando o valor de $m = 3$, tem-se que:

$$P(n, 3) = P(n-2, 3) + P(n-3, 3) :$$

$$P(3, 3) = P(1, 3) + P(0, 3) = 4 + 2i = 2P(3) + P(3)i;$$

$$\begin{aligned}
P(4, 3) &= P(2, 3) + P(1, 3) = 4 + 2i = 2P(4) + P(4)i; \\
P(5, 3) &= P(3, 3) + P(2, 3) = 6 + 3i = 2P(5) + P(5)i; \\
P(6, 3) &= P(4, 3) + P(3, 3) = 8 + 4i = 2P(6) + P(6)i; \\
&\vdots \\
P(n-3, 3) &= P(n-5, 3) + P(n-6, 3) = 2P(n-3) + P(n-3)i; \\
P(n-2, 3) &= P(n-4, 3) + P(n-5, 3) = 2P(n-2) + P(n-2)i; \\
P(n-1, 3) &= P(n-3, 3) + P(n-4, 3) = 2P(n-1) + P(n-1)i; \\
P(n, 3) &= P(n-2, 3) + P(n-3, 3) \\
&= 2P(n-2) + P(n-2)i + 2P(n-3) + P(n-3)i \\
&= 2P(n) + P(n)i.
\end{aligned}$$

Contudo, supondo para $m = 0, 1, 2, \dots, k-2$, sejam válidas as seguintes identidades descritas:

$$\begin{aligned}
P(n, 0) &= P(n)1 + P(n)0i = P(n)P(0) + P(n)P(-1)i; \\
P(n, 1) &= P(n)1 + P(n)1i = P(n)P(1) + P(n)P(0)i; \\
P(n, 2) &= P(n)1 + P(n)1i = P(n)P(2) + P(n)P(1)i; \\
P(n, 3) &= P(n)2 + P(n)1i = P(n)P(3) + P(n)P(2)i; \\
&\vdots \\
P(n, k-3) &= P(n)P(k-3) + P(n)P(k-4)i \\
P(n, k-2) &= P(n)P(k-2) + P(n)P(k-3)i.
\end{aligned}$$

Demonstrando para $m = k$, a partir da recorrência $P(n, k) = P(n, k-2) + P(n, k-3)$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
P(n, k) &= P(n, k-2) + P(n, k-3) \\
P(n, k) &= P(n)P(k-2) + P(n)P(k-3)i \\
&\quad + P(n)P(k-3) + P(n)P(k-4)i \\
&= P(n)P(k) + P(n)P(k-1)i.
\end{aligned}$$

□

3.6.2 Relações Recorrentes Tridimensionais

De acordo com Harman (1981), onde este explica que os números denominados por $P(n, m)$ representam o conjunto dos gaussianos inteiros $G(n, m) = n + mi$, sendo n e m inteiros. Assim com o viés de verificar essa extensão dos termos da SP para uma dimensão complexa, serão explanadas as relações de recursividade do caso tridimensional para a SP.

Definição 29. A recorrência tridimensional da SP na forma $P(n, m, p)$, com $n, m, p \geq 0$, é dada por:

$$\begin{cases} P(n, m, p) = P(n-2, m, p) + P(n-3, m, p) \\ P(n, m, p) = P(n, m-2, p) + P(n, m-2, p) \\ P(n, m, p) = P(n, m, p-2) + P(n, m, p-3) \end{cases}$$

Em que valores iniciais são definidos como: $P(0, 0, 0) = 1 = P(0)$, $P(1, 0, 0) = 1 = P(1)$, $P(2, 0, 0) = 1 = P(2)$, $P(0, 1, 0) = 1 + i$, $P(0, 0, 1) = 1 + j$, $P(1, 1, 1) = 1 + i + j$, $P(0, 1, 1) = 1 + i + j$, $P(1, 0, 1) = 1 + j$, $P(1, 1, 0) = 1 + i$, $P(2, 1, 1) = 1 + i + j$, $P(2, 1, 0) = 1 + i$, $P(0, 2, 0) = 1 + i$, $P(0, 2, 1) = 1 + i + j$, $P(1, 2, 0) = 1 + i$, $P(0, 0, 2) = 1 + j$, $P(0, 1, 2) = 1 + i + j$, $P(1, 0, 2) = 1 + j$, $P(1, 1, 2) = 1 + i + j$, $P(1, 2, 1) = 1 + i + j$, $P(0, 2, 2) = 1 + i + j$, $P(2, 0, 1) = 1 + j$, e $i^2 = j^2 = -1$.

Lema 2. As seguintes propriedades são válidas para a SP:

- (a) $P(n, 0, 0) = P(n)$,
- (b) $P(n, 1, 1) = P(n) + P(n)i + P(n)j$,
- (c) $P(n, 1, 0) = P(n) + P(n)i$,
- (d) $P(n, 0, 1) = P(n) + P(n)j$.

Demonstração. Para demonstrar a propriedade (a) $P(n, 0, 0) = P(n)$, será considerada a relação $P(n, m, p) = P(n-2, m, p) + P(n-3, m, p)$ e os valores iniciais $P(0, 0, 0) = 1 = P(0)$, $P(1, 0, 0) = 1 = P(1)$, $P(2, 0, 0) = 1 = P(2)$. Assim, para $m = p = 0$, ou seja, $P(n, 0, 0) = P(n-2, 0, 0) + P(n-3, 0, 0)$, variando $n = (0, 1, 2, 3, \dots)$. Pode-se perceber que:

$$\begin{aligned} P(n, 0, 0) &= P(n-2, 0, 0) + P(n-3, 0, 0) : \\ P(3, 0, 0) &= P(1, 0, 0) + P(0, 0, 0) = 2 = P(3); \\ P(4, 0, 0) &= P(2, 0, 0) + P(1, 0, 0) = 2 = P(4); \\ P(5, 0, 0) &= P(3, 0, 0) + P(2, 0, 0) = 3 = P(5); \\ P(6, 0, 0) &= P(4, 0, 0) + P(3, 0, 0) = 4 = P(6); \\ &\vdots \\ P(n-3, 0, 0) &= P(n-5, 0, 0) + P(n-6, 0, 0) = P(n-3); \\ P(n-2, 0, 0) &= P(n-4, 0, 0) + P(n-5, 0, 0) = P(n-2); \\ P(n-1, 0, 0) &= P(n-3, 0, 0) + P(n-4, 0, 0) = P(n-1); \\ P(n, 0, 0) &= P(n-2, 0, 0) + P(n-3, 0, 0) \\ &= P(n-2) + P(n-3) = P(n). \end{aligned}$$

Agora para validar a propriedade (b) $P(n, 1, 1) = P(n) + P(n)i + P(n)j$, utiliza-se a relação $P(n, m, p) = P(n-2, m, p) + P(n-3, m, p)$ com os valores iniciais $P(0) =$

$1, P(1) = P(2) = 1, P(1, 1, 1) = 1 + i + j, P(0, 1, 1) = 1 + i + j$ e $P(2, 1, 1) = 1 + i + j$. Logo, a recursividade para $m = p = 1$, isto é, $P(n + 2, 1, 1) = P(n, 1, 1) + P(n - 1, 1, 1)$, onde $n = (0, 1, 2, 3, \dots)$, é tal que:

$$\begin{aligned}
 P(n, 1, 1) &= P(n - 2, 1, 1) + P(n - 3, 1, 1) : \\
 P(3, 1, 1) &= P(1, 1, 1) + P(0, 1, 1) = 2 + 2i + 2j = P(3) + P(3)i + P(3)j; \\
 P(4, 1, 1) &= P(2, 1, 1) + P(1, 1, 1) = 2 + 2i + 2j = P(4) + P(4)i + P(4)j; \\
 P(5, 1, 1) &= P(3, 1, 1) + P(2, 1, 1) = 3 + 3i + 3j = P(5) + P(5)i + P(5)j; \\
 P(6, 1, 1) &= P(4, 1, 1) + P(3, 1, 1) = 4 + 4i + 4j = P(6) + P(6)i + P(6)j; \\
 &\vdots \\
 P(n - 3, 1, 1) &= P(n - 5, 1, 1) + P(n - 6, 1, 1) = P(n - 3) + P(n - 3)i + P(n - 3)j; \\
 P(n - 2, 1, 1) &= P(n - 4, 1, 1) + P(n - 5, 1, 1) = P(n - 2) + P(n - 2)i + P(n - 2)j; \\
 P(n - 1, 1, 1) &= P(n - 3, 1, 1) + P(n - 4, 1, 1) = P(n - 1) + P(n - 1)i + P(n - 1)j; \\
 P(n, 1, 1) &= P(n - 2, 1, 1) + P(n - 3, 1, 1) \\
 &= P(n - 2) + P(n - 2)i + P(n - 2)j + P(n - 3) + P(n - 3)i + P(n - 3)j \\
 &= P(n) + P(n)i + P(n)j.
 \end{aligned}$$

Sendo assim, para a terceira propriedade (c) $P(n, 1, 0) = P(n) + P(n)i$ com $P(n, m, p) = P(n - 2, m, p) + P(n - 3, m, p)$ avaliando a recorrência para $m = 1$ e $p = 0$, ou seja, $P(n, 1, 0) = P(n - 2, 1, 0) + P(n - 3, 1, 0)$ onde $n = (0, 1, 2, 3, \dots)$ com $P(0) = P(1) = P(2) = 1, P(1, 1, 0) = 1 + i, P(0, 1, 0) = 1 + i$ e $P(2, 1, 0) = 1 + i$. Logo:

$$\begin{aligned}
 P(n, 1, 0) &= P(n - 2, 1, 0) + P(n - 3, 1, 0) : \\
 P(3, 1, 0) &= P(1, 1, 0) + P(0, 1, 0) = 2 + 2i = P(3) + P(3)i; \\
 P(4, 1, 0) &= P(2, 1, 0) + P(1, 1, 0) = 2 + 2i = P(4) + P(4)i; \\
 P(5, 1, 0) &= P(3, 1, 0) + P(2, 1, 0) = 3 + 3i = P(5) + P(5)i; \\
 P(6, 1, 0) &= P(4, 1, 0) + P(3, 1, 0) = 4 + 4i = P(6) + P(6)i; \\
 &\vdots \\
 P(n - 3, 1, 0) &= P(n - 5, 1, 0) + P(n - 6, 1, 0) = P(n - 3) + P(n - 3)i; \\
 P(n - 2, 1, 0) &= P(n - 4, 1, 0) + P(n - 5, 1, 0) = P(n - 2) + P(n - 2)i; \\
 P(n - 1, 1, 0) &= P(n - 3, 1, 0) + P(n - 4, 1, 0) = P(n - 1) + P(n - 1)i; \\
 P(n, 1, 0) &= P(n - 2, 1, 0) + P(n - 3, 1, 0) \\
 &= P(n - 2) + P(n - 2)i + P(n - 3) + P(n - 3)i \\
 &= P(n) + P(n)i.
 \end{aligned}$$

Por fim, utilizando a indução, pode-se demonstrar a propriedade (d) $P(n, 0, 1) = P(n) + P(n)j$ através da recorrência $P(n, m, p) = P(n - 2, m, p) + P(n - 3, m, p)$ para $m = 0$

e $p = 1$, isto é, $P(n+2, 0, 1) = P(n, 0, 1) + P(n-1, 0, 1)$ com a variação de $n = (0, 1, 2, 3, \dots)$ e os valores iniciais $P(0) = P(1) = P(2) = 1$, $P(1, 0, 1) = 1 + j$, $P(0, 0, 1) = 1 + j$ e $P(2, 0, 1) = 1 + j$. Com isso, percebe-se que:

$$\begin{aligned}
 P(n, 0, 1) &= P(n-2, 0, 1) + P(n-3, 0, 1) : \\
 P(3, 0, 1) &= P(1, 0, 1) + P(0, 0, 1) = 2 + 2j = P(3) + P(3)j; \\
 P(4, 0, 1) &= P(2, 0, 1) + P(1, 0, 1) = 2 + 2j = P(4) + P(4)j; \\
 P(5, 0, 1) &= P(3, 0, 1) + P(2, 0, 1) = 3 + 3j = P(5) + P(5)j; \\
 P(6, 0, 1) &= P(4, 0, 1) + P(3, 0, 1) = 4 + 4j = P(6) + P(6)j; \\
 &\vdots \\
 P(n-3, 0, 1) &= P(n-5, 0, 1) + P(n-6, 0, 1) = P(n-3) + P(n-3)j; \\
 P(n-2, 0, 1) &= P(n-4, 0, 1) + P(n-5, 0, 1) = P(n-2) + P(n-2)j; \\
 P(n-1, 0, 1) &= P(n-3, 0, 1) + P(n-4, 0, 1) = P(n-1) + P(n-1)j; \\
 P(n, 0, 1) &= P(n-2, 0, 1) + P(n-3, 0, 1) \\
 &= P(n-2) + P(n-2)j + P(n-3) + P(n-3)j \\
 &= P(n) + P(n)j.
 \end{aligned}$$

De modo análogo, aplicando o segundo princípio indutivo sobre n nas relações recursivas, tem-se que $P(n, 0, 0) = P(n)$, $P(n, 1, 1) = P(n) + P(n)i + P(n)j$, $P(n, 1, 0) = P(n) + P(n)i$ e $P(n, 0, 1) = P(n) + P(n)j$. Por indução, constata-se as propriedades em p , como: $P(n, 0, 0) = P(n)$, $P(p, 1, 1) = P(p) + P(p)i + P(p)j$, $P(p, 1, 0) = P(p) + P(p)i$ e $P(p, 0, 1) = P(p) + P(p)j$. $\square$

Lema 3. *Sejam válidas as seguintes propriedades:*

- (a) $P(0, m, 0) = P(m) + P(m-1)i$,
- (b) $P(0, m, 1) = P(m) + P(m-1)i + P(m)j$,
- (c) $P(1, m, 0) = P(m) + P(m-1)i$,
- (d) $P(1, m, 1) = P(m) + P(m-1)i + P(m)j$.

Demonstração. (a) A partir da recorrência $P(n, m, p) = P(n, m-2, p) + P(n, m-3, p)$ e com os valores iniciais $P(0) = P(1) = P(2) = 1$, $P(0, 0, 0) = 1$, $P(0, 1, 0) = 1 + i$ e $P(0, 2, 0) = 1 + i$, pode-se aplicar o segundo princípio da indução sobre m em $n = p = 0$.

Assim, variando $m = 1, 2, 3, \dots, k$, percebe-se que:

$$\begin{aligned}
 P(0, m, 0) &= P(0, m-2, 0) + P(0, m-3, 0) : \\
 P(0, 3, 0) &= P(0, 1, 0) + P(0, 0, 0) = 2 + i = P(3) + P(2)i; \\
 P(0, 4, 0) &= P(0, 2, 0) + P(0, 1, 0) = 2 + 2i = P(4) + P(3)i; \\
 P(0, 5, 0) &= P(0, 3, 0) + P(0, 2, 0) = 3 + 2i = P(5) + P(4)i;
 \end{aligned}$$

$$P(0, 6, 0) = P(0, 4, 0) + P(0, 3, 0) = 4 + 3i = P(6) + P(5)i;$$

$$\vdots$$

$$P(0, k - 3, 0) = P(0, k - 5, 0) + P(0, k - 6, 0) = P(k - 3) + P(k - 4)i;$$

$$P(0, k - 2, 0) = P(0, k - 4, 0) + P(0, k - 5, 0) = P(k - 2) + P(k - 3)i;$$

$$P(0, k - 1, 0) = P(0, k - 3, 0) + P(0, k - 4, 0) = P(k - 1) + P(k - 2)i;$$

$$\begin{aligned} P(0, k, 0) &= P(0, k - 2, 0) + P(0, k - 3, 0) \\ &= P(k - 2) + P(k - 3)i + P(k - 3) + P(k - 4)i \\ &= P(k) + P(k - 1)i. \end{aligned}$$

Validando a propriedade (a) $P(0, m, 0) = P(m) + P(m - 1)i$.

(b) Sendo $P(n, m, p) = P(n, m - 2, p) + P(n, m - 3, p)$ e com $P(0) = P(1) = P(2) = 1$, $P(0, 0, 1) = 1 + j$, $P(0, 1, 1) = 1 + i + j$, $P(0, 2, 1) = 1 + i + j$, de modo análogo como realizado para a demonstração do item (a), segue o mesmo princípio sobre m em $n = 0$ e $p = 1$. Assim para $m = k$:

$$P(0, m, 1) = P(0, m - 2, 1) + P(0, m - 3, 1) :$$

$$P(0, 3, 1) = P(0, 1, 1) + P(0, 0, 1) = 2 + i + 2j = P(3) + P(2)i + P(3)j;$$

$$P(0, 4, 1) = P(0, 2, 1) + P(0, 1, 1) = 2 + 2i + 2j = P(4) + P(3)i + P(4)j;$$

$$P(0, 5, 1) = P(0, 3, 1) + P(0, 2, 1) = 3 + 2i + 3j = P(5) + P(4)i + P(5)j;$$

$$P(0, 6, 1) = P(0, 4, 1) + P(0, 3, 1) = 4 + 3i + 4j = P(6) + P(5)i + P(6)j;$$

$$\vdots$$

$$P(0, k - 3, 1) = P(0, k - 5, 1) + P(0, k - 6, 1) = P(k - 3) + P(k - 4)i + P(k - 3)j;$$

$$P(0, k - 2, 1) = P(0, k - 4, 1) + P(0, k - 5, 1) = P(k - 2) + P(k - 3)i + P(k - 2)j;$$

$$P(0, k - 1, 1) = P(0, k - 3, 1) + P(0, k - 4, 1) = P(k - 1) + P(k - 2)i + P(k - 1)j;$$

$$\begin{aligned} P(0, k, 1) &= P(0, k - 2, 1) + P(0, k - 3, 1) \\ &= P(k - 2) + P(k - 3)i + P(k - 2)j + P(k - 3) + P(k - 4)i + P(k - 3)j \\ &= P(k) + P(k - 1)i + P(k)j. \end{aligned}$$

Validando a propriedade (b) $P(0, m, 1) = P(m) + P(m - 1)i + P(m)j$.

(c) Sendo $P(n, m, p) = P(n, m - 2, p) + P(n, m - 3, p)$ e $P(0) = P(1) = P(2) = 1$, $P(1, 0, 0) = 1$, $P(1, 1, 0) = 1 + i$, $P(1, 2, 0) = 1 + i$, analogamente como realizado anteriormente, segue o mesmo princípio sobre m em $n = 1$ e $p = 0$. Logo, para $m = k$, tem-se que:

$$P(1, m, 0) = P(1, m - 2, 0) + P(1, m - 3, 0) :$$

$$P(1, 3, 0) = P(1, 1, 0) + P(1, 0, 0) = 2 + i = P(3) + P(2)i;$$

$$P(1, 4, 0) = P(1, 2, 0) + P(1, 1, 0) = 2 + 2i = P(4) + P(3)i;$$

$$\begin{aligned}
P(1, 5, 0) &= P(1, 3, 0) + P(1, 2, 0) = 3 + 2i = P(5) + P(4)i; \\
P(1, 6, 0) &= P(1, 4, 0) + P(1, 3, 0) = 4 + 3i = P(6) + P(5)i; \\
&\vdots \\
P(1, k-3, 0) &= P(1, k-5, 0) + P(1, k-6, 0) = P(k-3) + P(k-4)i; \\
P(1, k-2, 0) &= P(1, k-4, 0) + P(1, k-5, 0) = P(k-2) + P(k-3)i; \\
P(1, k-1, 0) &= P(1, k-3, 0) + P(1, k-4, 0) = P(k-1) + P(k-2)i; \\
P(1, k, 0) &= P(1, k-2, 0) + P(1, k-3, 0) \\
&= P(k-2) + P(k-3)i + P(k-3) + P(k-4)i \\
&= P(k) + P(k-1)i.
\end{aligned}$$

Demonstrando a propriedade (c) $P(1, m, 0) = P(m) + P(m-1)i$.

(d) Sendo $P(n, m, p) = P(n, m-2, p) + P(n, m-3, p)$ e $P(0) = P(1) = P(2) = 1$, $P(1, 0, 1) = 1 + j$, $P(1, 1, 1) = 1 + i + j$, $P(1, 2, 1) = 1 + i + j$, de modo análogo segue o mesmo princípio sobre m em $n = p = 1$. Com isso, para $m = k$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
P(1, m, 1) &= P(1, m-2, 1) + P(1, m-3, 1) : \\
P(1, 3, 1) &= P(1, 1, 1) + P(1, 0, 1) = 2 + i + 2j = P(3) + P(2)i + P(3)j; \\
P(1, 4, 1) &= P(1, 2, 1) + P(1, 1, 1) = 2 + 2i + 2j = P(4) + P(3)i + P(4)j; \\
P(1, 5, 1) &= P(1, 3, 1) + P(1, 2, 1) = 3 + 2i + 3j = P(5) + P(4)i + P(5)j; \\
P(1, 6, 1) &= P(1, 4, 1) + P(1, 3, 1) = 4 + 3i + 4j = P(6) + P(5)i + P(6)j; \\
&\vdots \\
P(1, k-3, 1) &= P(1, k-5, 1) + P(1, k-6, 1) = P(k-3) + P(k-4)i + P(k-3)j; \\
P(1, k-2, 1) &= P(1, k-4, 1) + P(1, k-5, 1) = P(k-2) + P(k-3)i + P(k-2)j; \\
P(1, k-1, 1) &= P(1, k-3, 1) + P(1, k-4, 1) = P(k-1) + P(k-2)i + P(k-1)j; \\
P(1, k, 1) &= P(1, k-2, 1) + P(1, k-3, 1) \\
&= P(k-2) + P(k-3)i + P(k-2)j + P(k-3) + P(k-4)i + P(k-3)j \\
&= P(k) + P(k-1)i + P(k)j.
\end{aligned}$$

Sendo então validada a propriedade (d) $P(1, m, 1) = P(m) + P(m-1)i + P(m)j$. $\square$

Lema 4. *Valem as seguintes identidades:*

- (a) $P(0, 0, p) = P(p) + P(p-1)j$,
- (b) $P(0, 1, p) = P(p) + P(p)i + P(p-1)j$,
- (c) $P(1, 0, p) = P(p) + P(p-1)j$,
- (d) $P(1, 1, p) = P(p) + P(p)i + P(p-1)j$.

Demonstração. (a) Sendo $P(n, m, p) = P(n, m, p-2) + P(n, m, p-3)$ com os valores iniciais $P(0) = P(1) = P(2) = 1$, $P(0, 0, 0) = 1$, $P(0, 0, 1) = 1 + j$, $P(0, 0, 2) = 1 + j$ e, aplicando o

segundo princípio da indução sobre p para $n = m = 0$ e variando $p = 1, 2, 3, \dots, k$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 P(0, 0, p) &= P(0, 0, p-2) + P(0, 0, p-3) : \\
 P(0, 0, 3) &= P(0, 0, 1) + P(0, 0, 0) = 2 + j = P(3) + P(2)j; \\
 P(0, 0, 4) &= P(0, 0, 2) + P(0, 0, 1) = 2 + 2j = P(4) + P(3)j; \\
 P(0, 0, 5) &= P(0, 0, 3) + P(0, 0, 2) = 3 + 2j = P(5) + P(4)j; \\
 P(0, 0, 6) &= P(0, 0, 4) + P(0, 0, 3) = 4 + 3j = P(6) + P(5)j; \\
 &\vdots \\
 P(0, 0, k-3) &= P(0, 0, k-5) + P(0, 0, k-6) = P(k-3) + P(k-4)j; \\
 P(0, 0, k-2) &= P(0, 0, k-4) + P(0, 0, k-5) = P(k-2) + P(k-3)j; \\
 P(0, 0, k-1) &= P(0, 0, k-3) + P(0, 0, k-4) = P(k-1) + P(k-2)j; \\
 P(0, 0, k) &= P(0, 0, k-2) + P(0, 0, k-3) \\
 &= P(k-2) + P(k-3)j + P(k-3) + P(k-4)j \\
 &= P(k) + P(k-1)j.
 \end{aligned}$$

Sendo então validada a propriedade (a) $P(0, 0, p) = P(p) + P(p-1)j$.

(b) Sendo $P(n, m, p) = P(n, m, p-2) + P(n, m, p-3)$ com os valores iniciais $P(0) = P(1) = P(2) = 1$, $P(0, 1, 0) = 1 + i$, $P(0, 1, 1) = 1 + i + j$, $P(0, 1, 2) = 1 + i + j$ e, aplicando o segundo princípio da indução sobre p para $n = 0$ e $m = 1$ e variando $p = 1, 2, 3, \dots, k$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 P(0, 1, p) &= P(0, 1, p-2) + P(0, 1, p-3) : \\
 P(0, 1, 3) &= P(0, 1, 1) + P(0, 1, 0) = 2 + 2i + j = P(3) + P(3)i + P(2)j; \\
 P(0, 1, 4) &= P(0, 1, 2) + P(0, 1, 1) = 2 + 2i + 2j = P(4) + P(4)i + P(3)j; \\
 P(0, 1, 5) &= P(0, 1, 3) + P(0, 1, 2) = 3 + 3i + 2j = P(5) + P(5)i + P(4)j; \\
 P(0, 1, 6) &= P(0, 1, 4) + P(0, 1, 3) = 4 + 4i + 3j = P(6) + P(6)i + P(5)j; \\
 &\vdots \\
 P(0, 1, k-3) &= P(0, 1, k-5) + P(0, 1, k-6) = P(k-3) + P(k-3)i + P(k-4)j; \\
 P(0, 1, k-2) &= P(0, 1, k-4) + P(0, 1, k-5) = P(k-2) + P(k-2)i + P(k-3)j; \\
 P(0, 1, k-1) &= P(0, 1, k-3) + P(0, 1, k-4) = P(k-1) + P(k-1)i + P(k-2)j; \\
 P(0, 1, k) &= P(0, 1, k-2) + P(0, 1, k-3) \\
 &= P(k-2) + P(k-2)i + P(k-3)j + P(k-3) + P(k-3)i + P(k-4)j \\
 &= P(k) + P(k)i + P(k-1)j.
 \end{aligned}$$

Sendo então validada a propriedade (b) $P(0, 1, p) = P(p) + P(p)i + P(p-1)j$.

(c) Sendo $P(n, m, p) = P(n, m, p - 2) + P(n, m, p - 3)$ com os valores iniciais $P(0) = P(1) = P(2) = 1$, $P(1, 0, 0) = 1$, $P(1, 0, 1) = 1 + j$, $P(1, 0, 2) = 1 + j$ e, aplicando o segundo princípio da indução sobre p para $n = 1$ e $m = 0$ e variando $p = 1, 2, 3, \dots, k$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 P(1, 0, p) &= P(1, 0, p - 2) + P(1, 0, p - 3) : \\
 P(1, 0, 3) &= P(1, 0, 1) + P(1, 0, 0) = 2 + j = P(3) + P(2)j; \\
 P(1, 0, 4) &= P(1, 0, 2) + P(1, 0, 1) = 2 + 2j = P(4) + P(3)j; \\
 P(1, 0, 5) &= P(1, 0, 3) + P(1, 0, 2) = 3 + 2j = P(5) + P(4)j; \\
 P(1, 0, 6) &= P(1, 0, 4) + P(1, 0, 3) = 4 + 3j = P(6) + P(5)j; \\
 &\vdots \\
 P(1, 0, k - 3) &= P(1, 0, k - 5) + P(1, 0, k - 6) = P(k - 3) + P(k - 4)j; \\
 P(1, 0, k - 2) &= P(1, 0, k - 4) + P(1, 0, k - 5) = P(k - 2) + P(k - 3)j; \\
 P(1, 0, k - 1) &= P(1, 0, k - 3) + P(1, 0, k - 4) = P(k - 1) + P(k - 2)j; \\
 P(1, 0, k) &= P(1, 0, k - 2) + P(1, 0, k - 3) \\
 &= P(k - 2) + P(k - 3)j + P(k - 3) + P(k - 4)j \\
 &= P(k) + P(k - 1)j.
 \end{aligned}$$

Validando a propriedade (c) $P(1, 0, p) = P(p) + P(p - 1)j$.

(d) Sendo $P(n, m, p) = P(n, m, p - 2) + P(n, m, p - 3)$ com os valores iniciais $P(0) = P(1) = P(2) = 1$, $P(1, 1, 0) = 1 + i$, $P(1, 1, 1) = 1 + i + j$, $P(1, 1, 2) = 1 + i + j$ e, aplicando o segundo princípio da indução sobre p para $n = m = 1$ e variando $p = 1, 2, 3, \dots, k$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 P(1, 1, p) &= P(1, 1, p - 2) + P(1, 1, p - 3) : \\
 P(1, 1, 3) &= P(1, 1, 1) + P(1, 1, 0) = 2 + 2i + j = P(3) + P(3)i + P(2)j; \\
 P(1, 1, 4) &= P(1, 1, 2) + P(1, 1, 1) = 2 + 2i + 2j = P(4) + P(4)i + P(3)j; \\
 P(1, 1, 5) &= P(1, 1, 3) + P(1, 1, 2) = 3 + 3i + 2j = P(5) + P(5)i + P(4)j; \\
 P(1, 1, 6) &= P(1, 1, 4) + P(1, 1, 3) = 4 + 4i + 3j = P(6) + P(6)i + P(5)j; \\
 &\vdots \\
 P(1, 1, k - 3) &= P(1, 1, k - 5) + P(1, 1, k - 6) = P(k - 3) + P(k - 3)i + P(k - 4)j; \\
 P(1, 1, k - 2) &= P(1, 1, k - 4) + P(1, 1, k - 5) = P(k - 2) + P(k - 2)i + P(k - 3)j; \\
 P(1, 1, k - 1) &= P(1, 1, k - 3) + P(1, 1, k - 4) = P(k - 1) + P(k - 1)i + P(k - 2)j; \\
 P(1, 1, k) &= P(1, 1, k - 2) + P(1, 1, k - 3) \\
 &= P(k - 2) + P(k - 2)i + P(k - 3)j + P(k - 3) + P(k - 3)i + P(k - 4)j \\
 &= P(k) + P(k)i + P(k - 1)j.
 \end{aligned}$$

Demonstrando a propriedade (d) $P(1, 1, p) = P(p) + P(p)i + P(p-1)j$. $\square$

Teorema 32. Para os três inteiros, $n, m, p \in \mathbb{N}$, os números na forma $P(n, m, p)$ são descritos por:

$$P(n, m, p) = P(n)P(m)P(p) + P(n)P(m-1)P(p)i + \\ + P(n)P(m)P(p-1)j.$$

Demonstração. Assim, para $m = 2$ com $P(0, 2, 0) = 1 + i$, $P(0, 2, 1) = 1 + i + j$, $P(0, 2, 2) = 1 + i + j$, tem-se que:

$$\begin{aligned} P(0, 2, 3) &= P(0, 2, 1) + P(0, 2, 0) = 2 + 2i + j = P(3) + P(3)i + P(2)j; \\ P(0, 2, 4) &= P(0, 2, 2) + P(0, 2, 1) = 2 + 2i + 2j = P(4) + P(4)i + P(3)j; \\ P(0, 2, 5) &= P(0, 2, 3) + P(0, 2, 2) = 3 + 3i + 2j = P(5) + P(5)i + P(4)j; \\ P(0, 2, 6) &= P(0, 2, 4) + P(0, 2, 3) = 4 + 4i + 3j = P(6) + P(6)i + P(5)j; \\ &\vdots \\ P(0, 2, p-3) &= P(0, 2, p-5) + P(0, 2, p-6) = P(p-3) + P(p-3)i + P(p-4)j; \\ P(0, 2, p-2) &= P(0, 2, p-4) + P(0, 2, p-5) = P(p-2) + P(p-2)i + P(p-3)j; \\ P(0, 2, p-1) &= P(0, 2, p-3) + P(0, 2, p-4) = P(p-1) + P(p-1)i + P(p-2)j; \\ P(0, 2, p) &= P(0, 2, p-2) + P(0, 2, p-3) \\ &= P(p-2) + P(p-2)i + P(p-3)j \\ &\quad + P(p-3) + P(p-3)i + P(p-4)j \\ &= P(p) + P(p)i + P(p-1)j. \end{aligned}$$

Contudo, quando estimula-se o comportamento das propriedades apresentadas anteriormente para $m = 1, 2, 3, \dots, k$ tem-se que:

$$\begin{aligned} P(0, 0, p) &= P(0)P(p) + P(-1)P(p)i + P(0)P(p-1)j; \\ P(0, 1, p) &= P(1)P(p) + P(0)P(p)i + P(1)P(p-1)j; \\ P(0, 2, p) &= P(2)P(p) + P(1)P(p)i + P(2)P(p-1)j; \\ P(0, 3, p) &= P(3)P(p) + P(2)P(p)i + P(3)P(p-1)j; \\ P(0, 4, p) &= P(4)P(p) + P(3)P(p)i + P(4)P(p-1)j; \\ P(0, 5, p) &= P(5)P(p) + P(4)P(p)i + P(5)P(p-1)j; \\ &\vdots \\ P(0, k-3, p) &= P(0, k-5, p) + P(0, k-6, p) = P(k-3)P(p) + (P(k-4)P(p))i \\ &\quad + (P(k-3)P(p-1))j; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(0, k-2, p) &= P(0, k-4, p) + P(0, k-5, p) = P(k-2)P(p) + (P(k-3)P(p))i \\
&\quad + (P(k-2).P(p-1))j; \\
P(0, k-1, p) &= P(0, k-3, p) + P(0, k-2, p) = P(k-1)P(p) + (P(k-2)P(p))i \\
&\quad + (P(k-1)P(p-1))j; \\
P(0, k, p) &= P(0, k-2, p) + P(0, k-3, p) \\
&= P(k-2)P(p) + (P(k-3)P(p))i + (P(k-2)P(p-1))j; \\
&\quad + P(k-3)P(p) + (P(k-4)P(p))i + (P(k-3)P(p-1))j; \\
&= P(k)P(p) + (P(k-1)P(p))i + (P(k)P(p-1))j.
\end{aligned}$$

Com isso, prova-se a veracidade do Teorema 32, por meio da sua aplicação para $n = 1, 2, 3, \dots, k$, na situação apresentada a seguir:

$$\begin{aligned}
P(1, m, p) &= P(1)P(m)P(p) + P(1)P(m-1)P(p)i \\
&\quad + P(1)P(m)P(p-1)j; \\
P(2, m, p) &= P(2)P(m)P(p) + P(2)P(m-1)P(p)i \\
&\quad + P(2)P(m)P(p-1)j; \\
P(3, m, p) &= P(3)P(m)P(p) + P(3)P(m-1)P(p)i \\
&\quad + P(3)P(m)P(p-1)j; \\
P(4, m, p) &= P(4)P(m)P(p) + P(4)P(m-1)P(p)i \\
&\quad + P(4)P(m)P(p-1)j; \\
P(5, m, p) &= P(5)P(m)P(p) + P(5)P(m-1)P(p)i \\
&\quad + P(5)P(m)P(p-1)j; \\
P(6, m, p) &= P(6)P(m)P(p) + P(6)P(m-1)P(p)i \\
&\quad + P(6)P(m)P(p-1)j; \\
&\quad \vdots \\
P(k-3, m, p) &= P(k-3)P(m)P(p) + P(k-3)P(m-1)P(p)i \\
&\quad + P(k-3)P(m)P(p-1)j; \\
P(k-2, m, p) &= P(k-2)P(m)P(p) + P(k-2)P(m-1)P(p)i \\
&\quad + P(k-2)P(m)P(p-1)j; \\
P(k-1, m, p) &= P(k-1)P(m)P(p) + P(k-1)P(m-1)P(p)i \\
&\quad + P(k-1)P(m)P(p-1)j; \\
P(k, m, p) &= P(k-2, m, p) + P(k-3, m, p) \\
&= P(k-2)P(m)P(p) + P(k-2)P(m-1)P(p)i \\
&\quad + P(k-2)P(m)P(p-1)j + P(k-3)P(m)P(p) \\
&\quad + P(k-3)P(m-1)P(p)i + P(k-3)P(m)P(p-1)j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= P(k)P(m)P(p) + P(k)P(m-1)P(p)i \\
 &+ P(k)P(m)P(p-1)j.
 \end{aligned}$$

□

3.6.3 Relações Recorrentes n -dimensionais

Baseados nos trabalhos de Harman (1981) e Oliveira, Alves e Paiva (2017), serão definidas as relações recorrentes n -dimensionais da SP, designando assim uma expressão generalizada para os números hipercomplexos descritos na forma $P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n)$, em que n representa as variáveis. Os números hipercomplexos são definidos na forma $a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + \dots + a_ni_n$ em que $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ representam os números reais e $i_1, i_2, \dots, i_n$ são os símbolos que representam as unidades imaginárias inseridas (KANTOR; SOLODOVNIKOV, 1989).

Definição 30. *Seja $P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n)$ um número hipercomplexo de Padovan, com n variáveis e $n_1, n_2, n_3, \dots, n_n \in \mathbb{N}$, para $n \geq 3$, e o seguinte conjunto de unidades imaginárias $(\mu_1 = i, \mu_2 = j, \dots, \mu_n)$. Desse modo, são definidos os valores iniciais a seguir:*

$$\begin{aligned}
 P(0, 0, 0, \dots, 0) &= 0 \\
 P(1, 0, 0, \dots, 0) &= 1 \\
 P(0, 1, 0, \dots, 0) &= \mu_1 \\
 P(0, 0, 1, \dots, 0) &= \mu_2 \\
 P(0, 0, 0, 1, \dots, 0) &= \mu_3 \\
 P(0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0) &= \mu_4 \\
 &\vdots \\
 P(0, 0, 0, \dots, 1) &= \mu_{n-1} \\
 P(1, 1, 1, \dots, 1) &= 1 + \mu_1 + \dots + \mu_n \\
 P(0, 1, 1, \dots, 1) &= \mu_1 + \dots + \mu_n \\
 P(1, 0, 1, \dots, 1) &= 1 + \mu_2 + \dots + \mu_n \\
 P(1, 1, 0, \dots, 1) &= 1 + \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n \\
 &\vdots \\
 P(1, 1, 1, \dots, 1, 0) &= 1 + \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{n-1}.
 \end{aligned}$$

Assim, os números na forma $P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n)$ satisfazem às seguintes condições

n -dimensionais de recorrência:

$$\begin{aligned}
P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n) &= P(n_1 - 2, n_2, n_3, \dots, n_n) + P(n_1 - 3, n_2, n_3, \dots, n_n) \\
P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n) &= P(n_1, n_2 - 2, n_3, \dots, n_n) + P(n_1, n_2 - 3, n_3, \dots, n_n) \\
P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n) &= P(n_1, n_2, n_3 - 2, \dots, n_n) + P(n_1, n_2, n_3 - 3, \dots, n_n) \\
&\vdots \\
P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n) &= P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n - 2) + P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n - 3).
\end{aligned}$$

Teorema 33. Os números na forma $P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n)$, tal que $n_1, n_2, n_3, \dots, n_n \in \mathbb{N}$, são determinados por:

$$\begin{aligned}
P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n) &= (P(n_1)P(n_2)P(n_3) \dots P(n_n)) \\
&\quad + (P(n_1)P(n_2 - 1)P(n_3) \dots P(n_n))\mu_1 \\
&\quad + (P(n_1)P(n_2)P(n_3 - 1) \dots P(n_n))\mu_2 \\
&\quad + \dots + \\
&\quad + (P(n_1)P(n_2)P(n_3) \dots P(n_n - 1))\mu_n.
\end{aligned}$$

Demonstração. Partindo das demonstrações realizadas nas subseções anteriores, em que são válidos os teoremas $P(n, m) = P(n)P(m) + P(n)P(m-1)i$ e $P(n, m, p) = P(n)P(m)P(p) + P(n)P(m-1)P(p)i + P(n)P(m)P(p-1)j$. Dessa forma, por meio do passo indutivo, pode-se verificar que:

$$\begin{aligned}
P(n_1, n_2) &= P(n_1)P(n_2) + P(n_1)P(n_2 - 1)\mu_1 \\
P(n_1, n_2, n_3) &= P(n_1)P(n_2)P(n_3) + P(n_1)P(n_2 - 1)P(n_3)\mu_1 \\
&\quad + P(n_1)P(n_2)P(n_3 - 1)\mu_2 \\
P(n_1, n_2, n_3, n_4) &= P(n_1)P(n_2)P(n_3)P(n_4) \\
&\quad + P(n_1)P(n_2 - 1)P(n_3)P(n_4)\mu_1 \\
&\quad + P(n_1)P(n_2)P(n_3 - 1)P(n_4)\mu_2 \\
&\quad + P(n_1)P(n_2)P(n_3)P(n_4 - 1)\mu_3 \\
&\quad \vdots \\
P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n) &= (P(n_1)P(n_2)P(n_3) \dots P(n_n)) \\
&\quad + (P(n_1)P(n_2 - 1)P(n_3) \dots P(n_n))\mu_1 \\
&\quad + (P(n_1)P(n_2)P(n_3 - 1) \dots P(n_n))\mu_2 \\
&\quad + \dots \\
&\quad + (P(n_1)P(n_2)P(n_3) \dots P(n_n - 1))\mu_n.
\end{aligned}$$

□

3.6.4 Matrizes das Relações Recorrentes n -dimensionais

Doravante, serão discutidas as matrizes referentes às relações de recorrência analisadas anteriormente, onde baseado nos valores iniciais atribuídos, será utilizada a matriz:

$$\text{Para } Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ tem-se } Q^n = \begin{bmatrix} P(n-2) & P(n-3) & P(n-4) \\ P(n-1) & P(n-2) & P(n-3) \\ P(n-3) & P(n-4) & P(n-5) \end{bmatrix}, \text{ para todo } n \geq 5.$$

Teorema 34. *A matriz geradora da sequência bidimensional, é descrita por:*

$$Q^n \mathbf{a} = \begin{bmatrix} P(n-2) & P(n-3) & P(n-4) \\ P(n-1) & P(n-2) & P(n-3) \\ P(n-3) & P(n-4) & P(n-5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(m) + P(m-1)i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(n-2, m) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Onde $\mathbf{a}$ é o vetor coluna definido por $\begin{bmatrix} P(m) + P(m-1)i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $P(n, m) = P(n)P(m) + P(n)P(m-1)i$.

Demonstração. Utilizando o princípio da indução finita, tem-se que: Para $n = 5$, tem-se:

$$\begin{aligned} Q^5 \mathbf{a} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^5 \begin{bmatrix} P(m) + P(m-1)i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(m) + P(m-1)i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2P(m) + 2P(m-1)i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P(3, m) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, a igualdade é válida.

Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 Q^k \mathbf{a} &= Q^k \mathbf{a} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} P(m) + P(m-1)i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P(k-2) & P(k-3) & P(k-4) \\ P(k-1) & P(k-2) & P(k-3) \\ P(k-3) & P(k-4) & P(k-5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(m) + P(m-1)i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P(k-2, m) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Agora, verificando que seja válido para $n = k + 1$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 Q^{k+1} \mathbf{a} &= Q^k Q \mathbf{a} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(m) + P(m-1)i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P(k-2) & P(k-3) & P(k-4) \\ P(k-1) & P(k-2) & P(k-3) \\ P(k-3) & P(k-4) & P(k-5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(m) + P(m-1)i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P(k-3) + P(k-4) & P(k-2) & P(k-3) \\ P(k-2) + P(k-3) & P(k-1) & P(k-2) \\ P(k-4) + P(k-5) & P(k-3) & P(k-4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(m) + P(m-1)i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P(k-1) & P(k-2) & P(k-3) \\ P(k) & P(k-1) & P(k-2) \\ P(k-2) & P(k-3) & P(k-4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(m) + P(m-1)i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P(k-1, m) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

□

Teorema 35. Para a sequência Tridimensional, a matriz geradora é descrita por:

$$Q^n \mathbf{b} = \begin{bmatrix} P(n-2) & P(n-3) & P(n-4) \\ P(n-1) & P(n-2) & P(n-3) \\ P(n-3) & P(n-4) & P(n-5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(m-1)P(p)i + P(m)P(p-1)j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P(n-2, m, p) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Onde $\mathbf{b}$ é o vetor coluna definido por $\begin{bmatrix} P(m-1)P(p)i + P(m)P(p-1)j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e$

$$P(n, m, p) = P(n)P(m)P(p) + P(n)P(m-1)P(p)i + P(n)P(m)P(p-1)j.$$

Demonstração. Utilizando o princípio da indução finita, tem-se que:

Para $n = 5$, tem-se:

$$\begin{aligned} Q^5 \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^5 \begin{bmatrix} P(m-1)P(p)i + P(m)P(p-1)j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(m-1)P(p)i + P(m)P(p-1)j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P(3, m, p) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, a igualdade é válida.

Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$\begin{aligned} Q^k \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} P(m-1)P(p)i + P(m)P(p-1)j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P(k-2) & P(k-3) & P(k-4) \\ P(k-1) & P(k-2) & P(k-3) \\ P(k-3) & P(k-4) & P(k-5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(m-1)P(p)i + P(m)P(p-1)j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P(k-2, m, p) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Agora, verificando que seja válido para $n = k + 1$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 Q^{k+1}\mathbf{b} &= Q^k Q\mathbf{b} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(m-1)P(p)i + P(m)P(p-1)j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P(k-2) & P(k-3) & P(k-4) \\ P(k-1) & P(k-2) & P(k-3) \\ P(k-3) & P(k-4) & P(k-5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(m-1)P(p)i + P(m)P(p-1)j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P(k-3) + P(k-4) & P(k-2) & P(k-3) \\ P(k-2) + P(k-3) & P(k-1) & P(k-2) \\ P(k-4) + P(k-5) & P(k-3) & P(k-4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(m-1)P(p)i + P(m)P(p-1)j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P(k-1) & P(k-2) & P(k-3) \\ P(k) & P(k-1) & P(k-2) \\ P(k-2) & P(k-3) & P(k-4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(m-1)P(p)i + P(m)P(p-1)j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P(k-1, m, p) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

□

Teorema 36. A matriz geradora para a sequência n -dimensional de Padovan, com $Q(i, j)$ sendo o termo da matriz Q , em que i representa a linha e j a colunda. Assim, tem-se que:

$$Q^n \mathbf{y} = \begin{bmatrix} P(n_1-2) & P(n_1-3) & P(n_1-4) \\ P(n_1-1) & P(n_1-2) & P(n_1-3) \\ P(n_1-3) & P(n_1-4) & P(n_1-5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q(1, 1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(n_1-2, n_2, n_3, \dots, n_n) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Onde $\mathbf{y}$ é o vetor coluna efinido por $\begin{bmatrix} Q(1, 1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, em que:

$Q(1, 1) = (P(n_2-1)P(n_3) \dots P(n_n))\mu_1 + (P(n_1)P(n_2)P(n_3-1) \dots P(n_n))\mu_2 + \dots + (P(n_1)P(n_2)P(n_3) \dots P(n_n-1))\mu_n$, $\mu_1 = i, \mu_2 = j, \mu_2 = k, \dots, \mu_{n-2}$ são as unidades imaginárias inseridas, e:

$$\begin{aligned}
 P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n) &= (P(n_1)P(n_2)P(n_3) \dots P(n_n)) + \\
 &\quad + (P(n_1)P(n_2-1)P(n_3) \dots P(n_n))\mu_1 + \\
 &\quad + (P(n_1)P(n_2)P(n_3-1) \dots P(n_n))\mu_2 + \\
 &\quad + \dots + \\
 &\quad + (P(n_1)P(n_2)P(n_3) \dots P(n_n-1))\mu_n.
 \end{aligned}$$

Demonstração. Utilizando o princípio da indução finita, tem-se que:

Para $n = 5$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 Q^5 \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^5 \begin{bmatrix} Q(1, 1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q(1, 1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P(3, n_2, n_3, \dots, n_n) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Assim, a igualdade é válida.

Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 Q^k \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q(1, 1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P(k_1 - 2) & P(k_1 - 3) & P(k_1 - 4) \\ P(k_1 - 1) & P(k_1 - 2) & P(k_1 - 3) \\ P(k_1 - 3) & P(k_1 - 4) & P(k_1 - 5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q(1, 1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P(k_1 - 2, n_2, n_3, \dots, n_n) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Agora, verificando que seja válido para $n = k + 1$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 Q^{k+1} \mathbf{y} &= Q^k Q \mathbf{y} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q(1, 1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P(k_1 - 2) & P(k_1 - 3) & P(k_1 - 4) \\ P(k_1 - 1) & P(k_1 - 2) & P(k_1 - 3) \\ P(k_1 - 3) & P(k_1 - 4) & P(k_1 - 5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q(1, 1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} P(k_1 - 3) + P(k_1 - 4) & P(k_1 - 2) & P(k_1 - 3) \\ P(k_1 - 2) + P(k_1 - 3) & P(k_1 - 1) & P(k_1 - 2) \\ P(k_1 - 4) + P(k_1 - 5) & P(k_1 - 3) & P(k_1 - 4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q(1, 1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} P(k_1 - 1) & P(k_1 - 2) & P(k_1 - 3) \\ P(k_1) & P(k_1 - 1) & P(k_1 - 2) \\ P(k_1 - 2) & P(k_1 - 3) & P(k_1 - 4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q(1, 1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} P(k_1 - 1, n_2, n_3, \dots, n_n) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

□

3.7 Números Gaussianos de Padovan

De modo semelhante como ocorre uma representação complexa para a SF (PETHE; HORADAM, 1986; BERZSENYI, 1977), para os números de Padovan também é permitido realizar tal modelo de complexificação, sendo então citados os números inteiros gaussianos que são descritos primordialmente por Tasci (2018a).

Definição 31. *A fórmula de recorrência dos números gaussianos de Padovan, para $n \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}$, é dada por (TASCI, 2018a):*

$$GP_n = P_n + P_{n-1}i.$$

Definição 32. *Com os valores iniciais $GP_0 = 1, GP_1 = 1 + i, GP_2 = 1 + i$, e $n \geq 3$ e $n \in \mathbb{N}$, os números gaussianos de Padovan são escritos na forma (TASCI, 2018a):*

$$GP_n = GP_{n-2} + GP_{n-3}.$$

Assim, os primeiros valores dos números gaussianos de Padovan são: $1, 1 + i, 1 + i, 2 + i, 2 + 2i, 3 + 2i, 4 + 3i, 5 + 4i, 7 + 5i, 9 + 7i$. De posse disso, serão discutidas alguns teoremas e propriedades para que seja aprofundado o estudo relacionado à esses números.

Propriedade 9. *A Função Geradora dos números gaussianos de Padovan é dada por (TASCI, 2018a):*

$$g(GP_n, x) = \frac{1 + (1 + i)x + ix^2}{1 - x^2 - x^3}.$$

Demonstração. Multiplicando a função por x^2 , x^3 nas equações abaixo devido a sua relação de recorrência, tem-se:

$$g(GP_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} GP_n x^n = GP_0 + GP_1 x + GP_2 x^2 + \dots + GP_n x^n + \dots \quad (3.35)$$

$$x^2 g(GP_n, x) = GP_0 x^2 + GP_1 x^3 + GP_2 x^4 + \dots + GP_{n-2} x^n + \dots \quad (3.36)$$

$$x^3 g(GP_n, x) = GP_0 x^3 + GP_1 x^4 + GP_2 x^5 + \dots + GP_{n-3} x^n + \dots \quad (3.37)$$

Baseada na Equação (3.35-3.36+3.37), tem-se que: $(1 - x^2 - x^3)g(GP_n, x) = GP_0 + GP_1 x + (GP_2 - GP_0)x^2 + (GP_3 - GP_1 - GP_0)x^3 + \dots + (GP_n - GP_{n-2} - GP_{n-3})x^n + \dots$

Considerando os valores iniciais: $GP_0 = 1, GP_1 = 1 + i, GP_2 = 1 + i$ e a fórmula de recorrência, pode-se obter:

$$(1 - x^2 - x^3)g(GP_n, x) = 1 + (1 + i)x + ix^2$$

$$g(GP_n, x) = \frac{1 + (1 + i)x + ix^2}{1 - x^2 - x^3}.$$

□

Seguindo o princípio de estudo, foram realizadas pesquisas em torno da fórmula de Binet dos gaussianos de Padovan, e assim descoberto o seguinte teorema.

Teorema 37. *A Fórmula de Binet dos números gaussianos de Padovan, com $n \in \mathbb{Z}$, é descrita por (TASCI, 2018a):*

$$GP_n = (A + i\frac{A}{x_1})x_1^n + (B + i\frac{B}{x_2})x_2^n + (C + \frac{C}{x_3})x_3^n,$$

em que: $A = \frac{(x_2-1)(x_3-1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$, $B = \frac{(x_1-1)(x_3-1)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$, $C = \frac{(x_1-1)(x_2-1)}{(x_1-x_3)(x_2-x_3)}$ e x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação característica da SP ($x^3 - x - 1 = 0$).

Demonstração. Tomando como base a fórmula de Binet dada por:

$$GP_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n + \gamma x_3^n.$$

Utiliza-se a recorrência dos números gaussianos de Padovan (Definição 31) com os valores iniciais estabelecidos ($GP_0 = 1, GP_1 = 1 + i, GP_2 = 1 + i$), resolvendo o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma &= 1 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 &= 1 + i \\ \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2 &= 1 + i \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{x_2x_3 - x_3(1+i) - x_2(1+i) + 1+i}{x_1^2 - x_1x_3 + x_2x_3 - x_1x_2} = \frac{(x_2x_3 - x_3 - x_2 + 1) + i(1 - x_3 - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \\
 &= \frac{(x_2x_3 - x_3 - x_2 + 1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{i(1 - x_3 - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \\
 \beta &= \frac{x_1x_3 - x_3(1+i) - x_1(1+i) + 1+i}{x_2^2 + x_1x_3 - x_2x_3 - x_1x_2} = \frac{(x_1x_3 - x_3 - x_1 + 1) + i(1 - x_3 - x_1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \\
 &= \frac{(x_1x_3 - x_3 - x_1 + 1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \frac{i(1 - x_3 - x_1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \\
 \gamma &= \frac{x_1x_2 - x_1(1+i) - x_2(1+i) + 1+i}{x_3^2 - x_1x_3 - x_2x_3 + x_1x_2} = \frac{(x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1) + i(1 - x_2 - x_1)}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} \\
 &= \frac{(x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1)}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} + \frac{i(1 - x_2 - x_1)}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)}.
 \end{aligned}$$

Multiplicando a parte imaginária α por x_1 , β por x_2 e γ por x_3 , obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{(x_2x_3 - x_3 - x_2 + 1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{x_1}{x_1} \frac{i(1 - x_3 - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \\
 &= \frac{(x_2x_3 - x_3 - x_2 + 1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{i(x_1 - x_1x_3 - x_1x_2)}{x_1(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \\
 \beta &= \frac{(x_1x_3 - x_3 - x_1 + 1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \frac{x_2}{x_2} \frac{i(1 - x_3 - x_1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \\
 &= \frac{(x_1x_3 - x_3 - x_1 + 1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \frac{i(x_2 - x_2x_3 - x_2x_1)}{x_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \\
 \gamma &= \frac{(x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1)}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} + \frac{x_3}{x_3} \frac{i(1 - x_2 - x_1)}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} \\
 &= \frac{(x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1)}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} + \frac{i(x_3 - x_2x_3 - x_1x_3)}{x_3(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)}.
 \end{aligned}$$

A partir da fórmula de Binet da SP (Teorema 13) e das relações de Girard onde $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -1$ e $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, pode-se obter:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{(x_2x_3 - x_3 - x_2 + 1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{i(x_1x_2 + 1 - x_2 - x_3)}{x_1(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = A + i\frac{A}{x_1}, \\
 \beta &= \frac{(x_1x_3 - x_3 - x_1 + 1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \frac{i(x_1x_3 + 1 - x_1 - x_3)}{x_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = B + i\frac{B}{x_2}, \\
 \gamma &= \frac{(x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1)}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} + \frac{i(x_1x_2 + 1 - x_1 - x_3)}{x_3(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} = C + i\frac{C}{x_3}.
 \end{aligned}$$

Assim:

$$GP_n = \left(A + i\frac{A}{x_1}\right)x_1^n + \left(B + i\frac{B}{x_2}\right)x_2^n + \left(C + i\frac{C}{x_3}\right)x_3^n.$$

□

Teorema 38. *A soma dos n primeiros números inteiros gaussianos de Padovan, com $n \in \mathbb{N}$, são descritos por (TASCI, 2018a):*

$$\sum_{j=0}^n GP_j = GP_n + GP_{n+1} + GP_{n+2} - 2(1 + i).$$

Demonstração. Utilizando a relação de recorrência dos números gaussianos de Padovan, tem-se que:

$$GP_n = GP_{n-2} + GP_{n-3}.$$

Porém para que haja cancelamentos posteriormente, utiliza-se a seguinte relação:

$$GP_{n-2} = GP_n - GP_{n-3}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} GP_0 &= GP_2 - GP_{-1} \\ GP_1 &= GP_3 - GP_0 \\ GP_2 &= GP_4 - GP_1 \\ GP_3 &= GP_5 - GP_2 \\ &\vdots \\ GP_{n-3} &= GP_{n-1} - GP_{n-4} \\ GP_{n-2} &= GP_n - GP_{n-3} \\ GP_{n-1} &= GP_{n+1} - GP_{n-2} \\ GP_n &= GP_{n+2} - GP_{n-1}. \end{aligned}$$

Realizando os cancelamentos sucessivos, obtêm-se:

$$\sum_{j=0}^n GP_j = GP_n + GP_{n+1} + GP_{n+2} - GP_{-1} - GP_0 - GP_1.$$

Considerando os valores iniciais $GP_{-1} = i$, $GP_0 = 1$ e $GP_1 = 1 + i$, conclui-se que:

$$\sum_{j=0}^n GP_j = GP_n + GP_{n+1} + GP_{n+2} - 2(1 + i).$$

□

Além do mais, pode-se analisar outros teoremas inerentes ao Teorema 38.

Teorema 39. *A soma dos n primeiros termos pares gaussianos de Padovan são descritos por:*

$$\sum_{j=0}^n GP_{2j} = GP_{2n+1} - (1 + i).$$

Demonstração. Considerando a recorrência $GP_n = GP_{n-2} + GP_{n-3} \Leftrightarrow GP_{n-3} = GP_n - GP_{n-2}$, tem-se que:

$$\begin{aligned} GP_0 &= GP_3 - GP_1 \\ GP_2 &= GP_5 - GP_3 \\ GP_4 &= GP_7 - GP_5 \\ &\vdots \\ GP_{2n-2} &= GP_{2n+1} - GP_{2n-1} \\ GP_{2n} &= GP_{2n+3} - GP_{2n+1} \end{aligned}$$

Resultando em:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n GP_{2j} &= GP_{2n+3} - GP_1 \\ &= GP_{2j} = GP_{2n+3} - (1 + i). \end{aligned}$$

□

Teorema 40. *A soma dos n primeiros termos ímpares dos gaussianos de Padovan, são expressos por:*

$$\sum_{j=0}^n GP_{2j+1} = GP_{2n+4} - (1 + i).$$

Demonstração. Todavia, considerando apenas os números ímpares e a relação $GP_{n-3} = GP_n - GP_{n-2}$, ao somar todos esses números, tendo em vista os cancelamentos sucessivos dos termos de índice $2n$, obtêm-se a demonstração deste teorema. □

Prosseguindo na exploração dos somatórios que envolvem os números gaussianos de Padovan, tem-se que:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n GP_{2j} - \sum_{j=0}^n GP_{2j+1} &= GP_{2n+3} - (1 + i) - (GP_{2n+4} - (1 + i)) \\ &= GP_{2n+3} - GP_{2n+4}. \end{aligned}$$

Tasci (2018a) apresenta as matrizes para os números gaussianos de Padovan:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1+i & 1+i & 1 \\ 1+i & 1 & i \\ 1 & i & 1 \end{bmatrix} \text{ e } M^n = \begin{bmatrix} GP_{n+2} & GP_{n+1} & GP_n \\ GP_{n+1} & GP_n & GP_{n-1} \\ GP_n & GP_{n-1} & GP_{n-2} \end{bmatrix}.$$

Desse modo, sejam as matrizes Q e U apresentadas, pode-se compreender que $\det Q = 1 \neq 0$ e $\det U = -1 + 2i \neq 0$. Logo, essas matrizes admitem inversa. Assim,

analisa-se o produto matricial entre essas matrizes para $n \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\begin{aligned}
 QU &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i & 1+i & 1 \\ 1+i & 1 & i \\ 1 & i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+i & 1+i & 1+i \\ 1+i & 1+i & 1 \\ 1+i & 1 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} GP_3 & GP_2 & GP_1 \\ GP_2 & GP_1 & GP_0 \\ GP_1 & GP_0 & GP_{-1} \end{bmatrix} \\
 Q^2U &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i & 1+i & 1 \\ 1+i & 1 & i \\ 1 & i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2i & 2+i & 1+i \\ 2+i & 1+i & 1+i \\ 1+i & 1+i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} GP_4 & GP_3 & GP_2 \\ GP_3 & GP_2 & GP_1 \\ GP_2 & GP_1 & GP_0 \end{bmatrix} \\
 Q^3U &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i & 1+i & 1 \\ 1+i & 1 & i \\ 1 & i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2i & 2+2i & 2+i \\ 2+2i & 2+i & 1+i \\ 2+i & 1+i & 1+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} GP_5 & GP_4 & GP_3 \\ GP_4 & GP_3 & GP_2 \\ GP_3 & GP_2 & GP_1 \end{bmatrix} \\
 &\vdots \\
 Q^nU &= \begin{bmatrix} GP_{n+2} & GP_{n+1} & GP_n \\ GP_{n+1} & GP_n & GP_{n-1} \\ GP_n & GP_{n-1} & GP_{n-2} \end{bmatrix} \\
 Q^{n+1}U &= (Q^nU)Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} GP_{n+2} & GP_{n+1} & GP_n \\ GP_{n+1} & GP_n & GP_{n-1} \\ GP_n & GP_{n-1} & GP_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} GP_{n+3} & GP_{n+2} & GP_{n+1} \\ GP_{n+2} & GP_{n+1} & GP_n \\ GP_{n+1} & GP_n & GP_{n-1} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

De maneira semelhante como ocorre para o modelo de Fibonacci, pode-se analisar a propriedade comutativa do produto da matriz U pela matriz Q . Uma vez que nenhuma das seis matrizes Q de Padovan são simétricas, a propriedade comutativa para os números gaussianos de Padovan não é válida. Logo $UQ \neq QU$.

Doravante, será analisado o comportamento da matriz geradora Q para os números gaussianos de Padovan com índice inteiro não positivo. Primordialmente, será definida uma nova recorrência a partir da Definição 32, para que sejam facilitados os cálculos matemáticos realizados para esta análise.

Definição 33. *Os números gaussianos de Padovan negativos, são descritos na forma:*

$$GP_{(-n)} = GP_{(-n+3)} - GP_{(-n+1)},$$

$n > 0, n \in \mathbb{N}$ e com os mesmos valores iniciais considerados para os termos positivos destes números.

Assim, os primeiros termos para índice inteiro não positivo desses números gaussianos são descritos conforme mostrado na tabela abaixo (ver Tabela 6).

Tabela 6 – Primeiros termos com índice inteiro não positivo dos números gaussianos de Padovan.

GP_{-1}	GP_{-2}	GP_{-3}	GP_{-4}	GP_{-5}	GP_{-6}	GP_{-7}	GP_{-8}	GP_{-9}	GP_{-10}
i	1	0	i	1-i	-1+i	1	-i	-1+2i	2-2i

Fonte: Elaborado pela autora

Propriedade 10. *A Função Geradora dos números gaussianos de Padovan para os termos negativos dessa sequência, é dada por:*

$$g(GP_{-n}, x) = \frac{1 + (1+i)x + (1+i)x^2}{x^3 - x - 1}.$$

Demonstração. Realizando a multiplicação dos fatores x^3 e x na função geradora, tem-se:

$$g(GP_{-n}, x) = \sum_{n=0}^{\infty} GP_n x^n = GP_0 + GP_1 x + GP_2 x^2 + \dots + GP_n x^n + \dots \quad (3.38)$$

$$xg(GP_{-n}, x) = GP_0 x^1 + GP_1 x^2 + GP_2 x^3 + \dots + GP_{n-1} x^n + \dots \quad (3.39)$$

$$x^3 g(GP_{-n}, x) = GP_0 x^3 + GP_1 x^4 + GP_2 x^5 + \dots + GP_{n-3} x^n + \dots \quad (3.40)$$

Baseada na Equação (3.40-3.38+3.39), é fácil ver que:

$$(x^3 - x - 1)g(GP_{-n}, x) = GP_0 + GP_{-1}x + (GP_{-2} - GP_0)x^2 + (GP_{-3} - GP_{-1} - GP_0)x^3 + \dots + (GP_{-n} - GP_{-n-2} - GP_{-n-3})x^n + \dots$$

Considerando os mesmos valores iniciais definidos no início da seção, percebe-se que com $GP_0 = 1, GP_{-1} = i, GP_{-2} = 1$ obtêm-se:

$$(x^3 - x - 1)g(GP_{-n}, x) = -(GP_0 x + GP_{-1} x^2 + GP_0 + GP_{-1} x + GP_{-2} x^2)$$

$$(x^3 - x - 1)g(GP_{-n}, x) = 1 + (1+i)x + (1+i)x^2$$

$$g(GP_{-n}, x) = \frac{1 + (1+i)x + (1+i)x^2}{x^3 - x - 1}.$$

□

Teorema 41. *As matrizes desses números gaussianos com índice inteiro não positivo, são expressas por:*

$$Q^{-1}U = M^{-n}.$$

Assim:

$$Q^{-1} = Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1+i & 1+i & 1 \\ 1+i & 1 & i \\ 1 & i & 1 \end{bmatrix} e M^{-n} = \begin{bmatrix} GP_{-n+2} & GP_{-n+1} & GP_{-n} \\ GP_{-n+1} & GP_{-n} & GP_{-n-1} \\ GP_{-n} & GP_{-n-1} & GP_{-n-2} \end{bmatrix},$$

com $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Demonstrando pelo princípio da indução finita, serão analisados os produtos matriciais dessas matrizes para $n = 1, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \varrho^1 U &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i & 1+i & 1 \\ 1+i & 1 & i \\ 1 & i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+i & 1 & i \\ 1 & i & 1 \\ i & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} GP_1 & GP_0 & GP_{-1} \\ GP_0 & GP_{-1} & GP_{-2} \\ GP_{-1} & GP_{-2} & GP_{-3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Verificando para qualquer $n = k, \in \mathbb{N}$:

$$\varrho^k U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1+i & 1+i & 1 \\ 1+i & 1 & i \\ 1 & i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} GP_{-k+2} & GP_{-k+1} & GP_{-k} \\ GP_{-k+1} & GP_{-k} & GP_{-k-1} \\ GP_{-k} & GP_{-k-1} & GP_{-k-2} \end{bmatrix}.$$

Logo, para $n = k + 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} \varrho^{k+1} U &= \varrho(\varrho^k U) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} GP_{-k+2} & GP_{-k+1} & GP_{-k} \\ GP_{-k+1} & GP_{-k} & GP_{-k-1} \\ GP_{-k} & GP_{-k-1} & GP_{-k-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} GP_{-k+1} & GP_{-k} & GP_{-k} \\ GP_{-k} & GP_{-k-1} & GP_{-k-2} \\ GP_{-k-1} & GP_{-k-2} & GP_{-k-3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, pode-se provar a veracidade do teorema. $\square$

A matriz ϱ por não ser uma matriz simétrica, perde-se a validade da propriedade comutativa dos números gaussianos de Padovan. Com isso, serão discutidos algumas propriedades inerentes às matrizes estudadas nesta seção.

Propriedade 11. Para não positivo inteiro n, m tal que $3 \geq m < n$ e $m, n \in \mathbb{N}$, tem-se a seguinte propriedades para os números gaussianos de Padovan:

- (a) $GP_{n+m} = GP_{n+2}GP_m + GP_{n+1}GP_{m-1} + GP_nGP_{m-2}$,
- (b) $GP_{-n-m} = GP_{-n+2}GP_{-m} + GP_{-n+1}GP_{-m-1} + GP_{-n}GP_{-m-2}$.

Demonstração. De acordo com a matriz $M^n = \begin{bmatrix} GP_{n+2} & GP_{n+1} & GP_n \\ GP_{n+1} & GP_n & GP_{n-1} \\ GP_n & GP_{n-1} & GP_{n-2} \end{bmatrix}$, tem-se que:

$$\begin{aligned} M^{n+m} &= M^n M^m \\ \begin{bmatrix} GP_{n+m+2} & GP_{n+m+1} & GP_{n+m} \\ GP_{n+m+1} & GP_{n+m} & GP_{n+m-1} \\ GP_{n+m} & GP_{n+m-1} & GP_{n+m-2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} GP_{n+2} & GP_{n+1} & GP_n \\ GP_{n+1} & GP_n & GP_{n-1} \\ GP_n & GP_{n-1} & GP_{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} GP_{m+2} & GP_{m+1} & GP_m \\ GP_{m+1} & GP_m & GP_{m-1} \\ GP_m & GP_{m-1} & GP_{m-2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim: $GP_{n+m} = GP_{n+2}GP_m + GP_{n+1}GP_{m-1} + GP_nGP_{m-2}$ (a).

Para validar a propriedade (b), tem-se a matriz M^{-n} (ver Teorema 41) e, de modo análogo, realizar o mesmo procedimento feito para o teorema (a). $\square$

Ademais, são discutidos novos teoremas com base nos termos com índice inteiro não positivo desses números.

Teorema 42. *A soma dos inteiros gaussianos com índice inteiro não positivo de Padovan é descrita por:*

$$\sum_{j=1}^n GP_{-j} = GP_{-n+3} + GP_{-n+2} + 2(1+i).$$

Demonstração. Utilizando a relação de recorrência (Definição 33), tem-se que:

$$\begin{aligned} GP_{-1} &= GP_2 - GP_0 \\ GP_{-2} &= GP_1 - GP_{-1} \\ GP_{-3} &= GP_0 - GP_{-2} \\ GP_{-4} &= GP_{-1} - GP_{-3} \\ &\vdots \\ GP_{-n-2} &= GP_{-n+1} - GP_{-n-1} \\ GP_{-n-1} &= GP_{-n+2} - GP_{-n} \\ GP_{-n} &= GP_{-n+3} - GP_{-n+1} \end{aligned}$$

Através de cancelamentos sucessivos, é possível obter:

$$\sum_{j=1}^n GP_{-j} = GP_{-n+3} + GP_{-n+2} + GP_2 + GP_1.$$

Considerando os valores iniciais $GP_1 = GP_2 = 1 + i$, conclui-se que:

$$\sum_{j=1}^n GP_{-j} = GP_{-n+3} + GP_{-n+2} + 2(1+i).$$

$\square$

Teorema 43. *A soma dos números pares gaussianos de Padovan com índice inteiro não positivo são descritos por:*

$$\sum_{j=1}^n GP_{-2j} = GP_{-2n+3} + 1 + i.$$

Demonstração. Através da recorrência, é fácil ver que:

$$\begin{aligned} GP_{-2} &= GP_1 - GP_{-1} \\ GP_{-4} &= GP_{-1} - GP_{-3} \\ GP_{-6} &= GP_{-3} - GP_{-5} \\ &\vdots \\ GP_{-2n-4} &= GP_{2n-1} - GP_{-2n-3} \\ GP_{-2n-2} &= GP_{-2n+1} - GP_{-2n-1} \\ GP_{-2n} &= GP_{-2n+3} - GP_{-2n+1} \end{aligned}$$

De posse disso, é possível obter o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n GP_{-2j} &= GP_{-2n+3} + GP_1 \\ &= GP_{-2n+3} + 1 + i. \end{aligned}$$

□

Teorema 44. *A soma dos números de índices ímpares com índice inteiro não positivo dos números gaussianos de Padovan, são expressos por:*

$$\sum_{j=0}^n GP_{-2j-1} = GP_{-2n+2} + (1 + i).$$

Demonstração. Entretanto, ao realizar a soma apenas dos termos ímpares, pode-se perceber que ocorrerão cancelamentos sucessivos dos termos de índices $-2n$, é validado este teorema.

□

3.8 Números Duais de Padovan

Introduzido por Clifford (1871), um número dual é indicado por $d = a + \varepsilon a$, em que ε representa a unidade dual sujeita ao conjunto de regras $\varepsilon^2 = 0, 1\varepsilon = \varepsilon 1 = \varepsilon$ (SHOHAM, 2000). Depreende-se facilmente que $\varepsilon^n = 0, n \geq 2$ e $n \in \mathbb{N}$. Todavia, será definido o número dual de Padovan.

Definição 34. *Um número dual de Padovan é descrito pela recorrência (VIEIRA; ALVES, 2019c):*

$$DP_n = P_n + \varepsilon P_{n+1},$$

onde P_n representa um número de Padovan e ε designa a unidade dual.

Com isso, de acordo com a relação recorrente fundamental, dada por $DP_n = DP_{n-2} + DP_{n-3}$, e pela Definição 34, é possível obter: $DP_{n-2} + DP_{n-3} = P_{n-2} + \varepsilon P_{n-1} +$

$P_{n-3} + \varepsilon P_{n-2} = P_{n-2} + P_{n-3} + \varepsilon P_{n-1} + \varepsilon P_{n-2} = P_n + \varepsilon P_{n+1} = DP_n$. Diante disso, fundamentado nos trabalhos de Seenukul et al. (2015), Sokhuma (2013b) e na Seção 3.2.1, considera-se o conjunto de cinco matrizes:

$$Q_{P_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, Q_{P_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, Q_{P_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, Q_{P_4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q_{P_5} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observa-se ainda que existe uma sexta matriz obtida pela transposição de uma das matrizes apresentadas:

$$Q_{P_6} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = Q_{P_2}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

À vista disso, é então verificado que $\det Q_{P_1} = \det Q_{P_2} = \det Q_{P_3} = \det Q_{P_4} = \det Q_{P_5} = \det Q_{P_6} = 1$. E passando a tomar os seguintes conjuntos $Q_{P_1}^{-1}, Q_{P_2}^{-1}, Q_{P_3}^{-1}, Q_{P_4}^{-1}, Q_{P_5}^{-1}, Q_{P_6}^{-1}$ ou $Q_{P_1}^T, Q_{P_2}^T, Q_{P_3}^T, Q_{P_4}^T, Q_{P_5}^T, Q_{P_6}^T$ que representam o conjunto de suas matrizes inversas e de matrizes transpostas, respectivamente. De modo similar, verifica-se que ainda são encontrados os valores: $\det Q_{P_1}^T = \det Q_{P_2}^T = \det Q_{P_3}^T = \det Q_{P_4}^T = \det Q_{P_5}^T = \det Q_{P_6}^T = 1$ e $\det Q_{P_1}^{-1} = \det Q_{P_2}^{-1} = \det Q_{P_3}^{-1} = \det Q_{P_4}^{-1} = \det Q_{P_5}^{-1} = \det Q_{P_6}^{-1} = 1$.

Feito isso, utilizam-se:

$$Q_{P_1}^n = \begin{bmatrix} P_{n+2} & P_n & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_{n-1} & P_n \\ P_{n+3} & P_{n+1} & P_{n+2} \end{bmatrix}, Q_{P_2}^n = \begin{bmatrix} P_{n-1} & P_n & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_{n+2} & P_{n+3} \\ P_n & P_{n+1} & P_{n+2} \end{bmatrix}, Q_{P_3}^n = \begin{bmatrix} P_{n+2} & P_{n+3} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_{n+2} & P_n \\ P_n & P_{n+1} & P_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$Q_{P_4}^n = \begin{bmatrix} P_{n+2} & P_{n+3} & P_n \\ P_{n+3} & P_{n+2} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}, Q_{P_5}^n = \begin{bmatrix} P_{n+2} & P_{n+1} & P_{n+3} \\ P_n & P_{n-1} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_n & P_{n+2} \end{bmatrix}.$$

Sendo ainda válida a relação de transposição da matriz ($Q_{P_6} = Q_{P_2}^T$):

$$Q_{P_6}^n = (Q_{P_2}^n)^T = \begin{bmatrix} P_{n-1} & P_n & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_{n+2} & P_{n+3} \\ P_n & P_{n+1} & P_{n+2} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} P_{n-1} & P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n+2} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_{n+3} & P_{n+2} \end{bmatrix}.$$

Com base na Definição 34, e nas matrizes apresentadas, Vieira e Alves (2019c) definiram um novo conjunto de matrizes dos números duais de Padovan, sendo então:

$$\begin{aligned} D_1 Q_{P_1}^n &= \begin{bmatrix} DP_{n+2} & DP_n & DP_{n+1} \\ DP_{n+1} & DP_{n-1} & DP_n \\ DP_{n+3} & DP_{n+1} & DP_{n+2} \end{bmatrix}, D_2 Q_{P_2}^n = \begin{bmatrix} DP_{n-1} & DP_n & DP_{n+1} \\ DP_{n+1} & DP_{n+2} & DP_{n+3} \\ DP_n & DP_{n+1} & DP_{n+2} \end{bmatrix}, \\ D_3 Q_{P_3}^n &= \begin{bmatrix} DP_{n+2} & DP_{n+3} & DP_{n+1} \\ DP_{n+1} & DP_{n+2} & DP_n \\ DP_n & DP_{n+1} & DP_{n-1} \end{bmatrix}, D_4 Q_{P_4}^n = \begin{bmatrix} DP_{n+2} & DP_{n+3} & DP_n \\ DP_{n+3} & DP_{n+2} & DP_{n+1} \\ DP_{n+1} & DP_n & DP_{n-1} \end{bmatrix}, \\ D_5 Q_{P_5}^n &= \begin{bmatrix} DP_{n+2} & DP_{n+1} & DP_{n+3} \\ DP_n & DP_{n-1} & DP_{n+1} \\ DP_{n+1} & DP_n & DP_{n+2} \end{bmatrix}, D_6 Q_{P_6}^n = \begin{bmatrix} DP_{n-1} & DP_{n+1} & DP_n \\ DP_n & DP_{n+2} & DP_{n+1} \\ DP_{n+1} & DP_{n+3} & DP_{n+2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Teorema 45. De acordo com as matrizes duais de Padovan $D_i Q_{P_i}^n$ em que $1 \leq i \leq 6$ e $i, p \in \mathbb{N}$, tem-se (VIEIRA; ALVES, 2019c):

- (a) $D_i Q_{P_i}^n = Q_{P_i}^n (I + \varepsilon Q_{P_i}) = (I + \varepsilon Q_{P_i}) Q_{P_i}^n$ e $\det(D_i Q_{P_i}^n) = 1$, para $1 \leq i \leq 6$,
(b) $(D_i Q_{P_i}^n)^p = Q_{P_i}^{pn} (I + p\varepsilon Q_{P_i}) = (I + p\varepsilon Q_{P_i}) Q_{P_i}^{pn}$, para $1 \leq i \leq 6$ e $p \geq 1$.

Demonstração. (a) Considerando $i = 1$, tem-se que:

$$D_1 Q_{P_1}^n = \begin{bmatrix} DP_{n+2} & DP_n & DP_{n+1} \\ DP_{n+1} & DP_{n-1} & DP_n \\ DP_{n+3} & DP_{n+1} & DP_{n+2} \end{bmatrix}.$$

Feito isso, pode-se realizar a decomposição da matriz:

$$\begin{aligned} D_1 Q_{P_1}^n &= \begin{bmatrix} DP_{n+2} & DP_n & DP_{n+1} \\ DP_{n+1} & DP_{n-1} & DP_n \\ DP_{n+3} & DP_{n+1} & DP_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{n+2} + \varepsilon P_{n+3} & P_n + \varepsilon P_{n+1} & P_{n+1} + \varepsilon P_{n+2} \\ P_{n+1} + \varepsilon P_{n+2} & P_{n-1} + \varepsilon P_n & P_n + \varepsilon P_{n+1} \\ P_{n+3} + \varepsilon P_{n+4} & P_{n+1} + \varepsilon P_{n+2} & P_{n+2} + \varepsilon P_{n+3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{n+2} & P_n & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_{n-1} & P_n \\ P_{n+3} & P_{n+1} & P_{n+2} \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} P_{n+3} & P_{n+1} & P_{n+2} \\ P_{n+2} & P_n & P_{n+1} \\ P_{n+4} & P_{n+2} & P_{n+3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{De posse de: } Q_{P_1}^n = \begin{bmatrix} P_{n+3} & P_{n+1} & P_{n+2} \\ P_{n+2} & P_n & P_{n+1} \\ P_{n+4} & P_{n+2} & P_{n+3} \end{bmatrix}, \text{ tem-se que:}$$

$$\begin{aligned} D_1 Q_{P_1}^n &= Q_{P_1}^n + \varepsilon Q_{P_1}^{n+1} \\ &= Q_{P_1}^n (I + \varepsilon Q_{P_1}) \\ &= Q_{P_1}^n + \varepsilon Q_{P_1}^{1+n} \\ &= (I + \varepsilon Q_{P_1}) Q_{P_1}^n. \end{aligned}$$

Assim, verifica-se que:

$$(I + \varepsilon Q_{P_1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \end{bmatrix}.$$

Por fim, pode-se determinar:

$$\det(I + \varepsilon Q_{P_1}) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \end{bmatrix} = 1 + 0 + \varepsilon^3 - \varepsilon^2 - 0 - 0 = 1.$$

Validando a propriedade (a), visto que os demais casos são análogos ao demonstrado anteriormente.

Para demonstrar a propriedade (b), será realizada a indução matemática sobre p . Observando a propriedade comutativa descrita abaixo:

$$\begin{aligned} D_i Q_{P_i}^{2n} &= Q_{P_i}^n (I + \varepsilon Q_{P_i}) Q_{P_i}^n (I + \varepsilon Q_{P_i}) \\ &= Q_{P_i}^n (Q_{P_i}^n + \varepsilon Q_{P_i}^{n+1}) (I + \varepsilon Q_{P_i}) \\ &= Q_{P_i}^{2n} (I + \varepsilon Q_{P_i}) (I + \varepsilon Q_{P_i}) \\ &= Q_{P_i}^{2n} (I^2 + 2\varepsilon Q_{P_i} + \varepsilon^2 Q_{P_i}). \end{aligned}$$

Ressaltando a propriedade do número dual, $\varepsilon^n = 0, n \geq 2$, tem-se:

$$D_i Q_{P_i}^{2n} = Q_{P_i}^{2n} \cdot (I^2 + 2\varepsilon Q_{P_i}).$$

Supondo que seja válido para $p \in \mathbb{N}$, tem-se que:

No último passo, por indução, para todo $p \geq 1$, tem-se que:

$$\begin{aligned} D_i Q_{P_i}^{n(p+1)} &= D_i Q_{P_i}^{pn} D_i Q_{P_i}^n = Q_{P_i}^{pn} (I + p\varepsilon Q_{P_i}) Q_{P_i}^n (I + \varepsilon Q_{P_i}) \\ &= Q_{P_i}^{n(p+1)} (I + \varepsilon Q_{P_i} + p\varepsilon Q_{P_i} + p\varepsilon^2 Q_{P_i}) \\ &= Q_{P_i}^{n(p+1)} (I + (p+1)\varepsilon Q_{P_i}) \\ &= (I + (p+1)\varepsilon Q_{P_i}) Q_{P_i}^{n(p+1)}. \end{aligned}$$

□

Corolário 1. *Através das matrizes duais de Padovan $D_i Q_{P_i}^n$ para $1 \leq i \leq 6$ e $i, p \in \mathbb{N}$, tem-se que (VIEIRA; ALVES, 2019c):*

(a) $\det(D_i Q_{P_i}^{pn}) = 1$, para todo $p \geq 1$ e $1 \leq i \leq 6$,

(b) $DP_{n+2}^2 DP_{n-1} + DP_n^2 DP_{n+3} + DP_{n+1}^3 - (DP_{n+3} DP_{n-1} DP_{n+1} + 2DP_n DP_{n+1} DP_{n+2}) = 1$.

Demonstração. (a) De posse do Teorema 45, é possível escrever:

$$\begin{aligned}
 D_1 Q_{P_1}^{pn} &= Q_1^{pn} (I + p\varepsilon Q_{P_1}) \\
 &= \begin{bmatrix} P_{pn+2} & P_{pn} & P_{pn+1} \\ P_{pn+1} & P_{pn-1} & P_{pn} \\ P_{pn+3} & P_{pn+1} & P_{pn+2} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & p\varepsilon \\ p\varepsilon & 0 & 0 \\ p\varepsilon & p\varepsilon & 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} P_{pn+2} & P_{pn} & P_{pn+1} \\ P_{pn+1} & P_{pn-1} & P_{pn} \\ P_{pn+3} & P_{pn+1} & P_{pn+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & p\varepsilon \\ p\varepsilon & 1 & 0 \\ p\varepsilon & p\varepsilon & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Assim, o determinante será:

$$\begin{aligned}
 \det D_1 Q_{P_1}^{pn} &= \det \begin{bmatrix} P_{pn+2} & P_{pn} & P_{pn+1} \\ P_{pn+1} & P_{pn-1} & P_{pn} \\ P_{pn+3} & P_{pn+1} & P_{pn+2} \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & p\varepsilon \\ p\varepsilon & 1 & 0 \\ p\varepsilon & p\varepsilon & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \det(Q_{P_1}^{pn})(1 + 0 + p^3\varepsilon^3 - p^2\varepsilon^2 - 0 - 0) \\
 &= \det(Q_{P_1}^{pn})1 \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Ao realizar o mesmo procedimento para as demais matrizes duais, pode-se validar o corolário (a).

Verificando (b), tem-se que: $D_1 Q_{P_1}^n$. Logo: $\det D_i Q_{P_i}^n = 1$, resultando em: $\det D_1 Q_{P_1}^n = 1$. Diante disso:

$$\begin{aligned}
 \det D_1 Q_{P_1}^n &= \det \begin{bmatrix} DP_{n+2} & DP_n & DP_{n+1} \\ DP_{n+1} & DP_{n-1} & DP_n \\ DP_{n+3} & DP_{n+1} & DP_{n+2} \end{bmatrix} \\
 &= DP_{n+2}^2 DP_{n-1} + DP_n^2 DP_{n+3} + DP_{n+1}^3 \\
 &\quad - (DP_{n+3} DP_{n-1} DP_{n+1} + 2DP_n DP_{n+1} DP_{n+2}) \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

□

Doravante, discutiremos o conjunto das matrizes inversas duais de Padovan, com base nas matrizes duais $D_i Q_{P_i}^n$ para $1 \leq i \leq 6$. Assim, ressalta-se que os seus determinantes são todos diferentes de zero. Logo:

$$(D_1 Q_{P_1}^n) = \begin{bmatrix} DP_{n+2} & DP_n & DP_{n+1} \\ DP_{n+1} & DP_{n-1} & DP_n \\ DP_{n+3} & DP_{n+1} & DP_{n+2} \end{bmatrix}.$$

Teorema 46. De acordo com as matrizes duais inversas de Padovan $(D_i Q_{P_i}^n)^{-1}$ para $1 \leq i \leq 6$ e $n, p \in \mathbb{N}$, tem-se que (VIEIRA; ALVES, 2019c):

- (a) $(D_i Q_{P_i}^n)^{-1} = Q_{P_i}^{-n}(I - \varepsilon Q_{P_i})$ para $1 \leq i \leq 6$ e $\det(D_i Q_{P_i}^n)^{-1} = 1$,
- (b) $(D_i Q_{P_i}^{pn})^{-1} = Q_{P_i}^{-pn}(I - \varepsilon p Q_{P_i})$ para $1 \leq i \leq 6$ e $p \geq 1$,
- (c) $\det(D_i Q_{P_i}^{pn})^{-1} = 1$, para $1 \leq i \leq 6$ e $p \geq 1$.

Demonstração. Baseado no Teorema 45, sabe-se que $(D_i Q_{P_i}^n) = (I + \varepsilon Q_{P_i})Q_{P_i}^n = Q_{P_i}^n(I + \varepsilon Q_{P_i})$, para $1 \leq i \leq 6$. Feito isso, tem-se que, para $1 \leq i \leq 6$:

$$(D_i Q_{P_i}^n)^{-1} = (Q_{P_i}^n)^{-1}(I + \varepsilon Q_{P_i})^{-1}.$$

É possível observar ainda que: $(I + \varepsilon Q_{P_i})(I - \varepsilon Q_{P_i}) = (I - \varepsilon Q_{P_i})(I + \varepsilon Q_{P_i}) = I$, para $1 \leq i \leq 6$.

Obtendo assim: $(I + \varepsilon Q_{P_i})^{-1} = (I - \varepsilon Q_{P_i})$.

Para a matriz inversa dual de Padovan $D_1 Q_{P_1}^n$, é necessário saber que $(Q_{P_i}^n)^{-1} = (Q_{P_i}^{-n})$, e $(D_i Q_{P_i}^n)^{-1} = Q_{P_i}^{-n}(I - \varepsilon Q_{P_i})$. Assim:

$$\begin{aligned} (D_1 Q_{P_1}^n)^{-1} &= \begin{bmatrix} DP_{-n+2} & DP_{-n} & DP_{-n+1} \\ DP_{-n+1} & DP_{-n-1} & DP_{-n} \\ DP_{-n+3} & DP_{-n+1} & DP_{-n+2} \end{bmatrix} \\ &= (Q_{P_1}^{-n})(I - \varepsilon Q_{P_1}) \\ &= \begin{bmatrix} P_{-n+2} & P_{-n} & P_{-n+1} \\ P_{-n+1} & P_{-n-1} & P_{-n} \\ P_{-n+3} & P_{-n+1} & P_{-n+2} \end{bmatrix} (I - \varepsilon Q_{P_1}) \\ &= \begin{bmatrix} P_{-n+2} & P_{-n} & P_{-n+1} \\ P_{-n+1} & P_{-n-1} & P_{-n} \\ P_{-n+3} & P_{-n+1} & P_{-n+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1 & 0 \\ -\varepsilon & -\varepsilon & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Através da decomposição matricial realizada acima, pode-se validar $\det(D_i Q_{P_i}^n)^{-1} = 1$, para $1 \leq i \leq 6$, de modo análogo como realizado nos casos anteriores.

Para (b), tem-se que:

$$\begin{aligned} (D_i Q_{P_i}^{2n})^{-1} &= D_i Q_{P_i}^{-n} D_i Q_{P_i}^{-n} = Q_{P_i}^{-n}(I - \varepsilon Q_{P_i})Q_{P_i}^{-n}(I - \varepsilon Q_{P_i}) \\ &= Q_{P_i}^{-n}(Q_{P_i}^{-n} - \varepsilon Q_{P_i}^{1-n})(I - \varepsilon Q_{P_i}) \\ &= Q_{P_i}^{-2n}(I - \varepsilon Q_{P_i})^2 \\ &= Q_{P_i}^{-2n}(I - 2\varepsilon Q_{P_i} + \varepsilon^2 Q_{P_i}^2) \\ &= Q_{P_i}^{-2n}(I - 2\varepsilon Q_{P_i}). \end{aligned}$$

Verificando que:

$$(D_i Q_{P_i}^{2n})^{-1} (D_i Q_{P_i}^n)^{-1} = Q_{P_i}^{-2n} (I - 2\varepsilon Q_{P_i}) Q_{P_i}^{-n} (I - 2\varepsilon Q_{P_i}).$$

Pode-se perceber:

$$(D_i Q_{P_i}^{3n})^{-1} = Q_{P_i}^{-3n} (I - 3\varepsilon Q_{P_i}).$$

Dando continuidade ao processo de indução sobre p e $(D_i Q_{P_i}^{pn})^{-1} = Q_{P_i}^{-pn} (I - p\varepsilon Q_{P_i})$, com $p > 1$, tem-se que:

$$\begin{aligned} (D_i Q_{P_i}^{n(p+1)})^{-1} &= Q_{P_i}^{-pn} (I - p\varepsilon Q_{P_i}) Q_{P_i}^{-n} (I - \varepsilon Q_{P_i}) \\ &= Q_{P_i}^{-pn} Q_{P_i}^{-n} (I - p\varepsilon Q_{P_i}) (I - \varepsilon Q_{P_i}) \\ &= Q_{P_i}^{-n(p+1)} (I - \varepsilon Q_{P_i} - p\varepsilon Q_{P_i} + p\varepsilon Q_{P_i} \varepsilon Q_{P_i}) \\ &= Q_{P_i}^{-n(p+1)} (I - \varepsilon(p+1) Q_{P_i}). \end{aligned}$$

Para a demonstração do item (c), é possível tomar como base as propriedades discutidas e também utilizando o item (a), em que: $\det(D_i Q_{P_i}^n)^{-1} = 1$, tem-se que: $\det(D_i Q_{P_i}^{pn})^{-1} = 1$. $\square$

Considera-se o conjunto de matrizes duais transpostas que é indicado por:

$$\begin{aligned} (D_1 Q_{P_1}^n)^T &= \begin{bmatrix} DP_{n+2} & DP_{n+1} & DP_{n+3} \\ DP_n & DP_{n-1} & DP_{n+1} \\ DP_{n+1} & DP_n & DP_{n+2} \end{bmatrix}, (D_2 Q_{P_2}^n)^T = \begin{bmatrix} DP_{n-1} & DP_n & DP_n \\ DP_n & DP_{n+2} & DP_{n+1} \\ DP_{n+1} & DP_{n+3} & DP_{n+2} \end{bmatrix}, \\ (D_3 Q_{P_3}^n)^T &= \begin{bmatrix} DP_{n+2} & DP_{n+1} & DP_n \\ DP_{n+3} & DP_{n+2} & DP_{n+1} \\ DP_{n+1} & DP_n & DP_{n-1} \end{bmatrix}, (D_4 Q_{P_4}^n)^T = \begin{bmatrix} DP_{n+2} & DP_{n+3} & DP_{n+1} \\ DP_{n+3} & DP_{n+2} & DP_n \\ DP_n & DP_{n+1} & DP_{n-1} \end{bmatrix}, \\ (D_5 Q_{P_5}^n)^T &= \begin{bmatrix} DP_{n+2} & DP_n & DP_{n+1} \\ DP_{n+1} & DP_{n-1} & DP_n \\ DP_{n+3} & DP_{n+1} & DP_{n+2} \end{bmatrix}, (D_6 Q_{P_6}^n)^T = \begin{bmatrix} DP_{n-1} & DP_n & DP_{n+1} \\ DP_{n+1} & DP_{n+2} & DP_{n+3} \\ DP_n & DP_{n+1} & DP_{n+2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Teorema 47. Considerando a matrizes transpostas duais de Padovan $(D_i Q_{P_i}^n)^T$, para $1 \leq i \leq 6$ e $i, p \in \mathbb{N}$, tem-se que:

- (a) $(D_i Q_{P_i}^n)^T = (Q_{P_i}^n)^T (I + \varepsilon Q_{P_i})^T$, para $1 \leq i \leq 6$ e $\det(D_i Q_{P_i}^n)^T = 1$,
- (b) $(D_i Q_{P_i}^{pn})^T = (Q_{P_i}^{pn})^T (I + p\varepsilon Q_{P_i})^T$, para $1 \leq i \leq 6$ e $p \geq 1$.

Demonstração. Tendo em vista o Teorema 45, segue que:

$$\begin{aligned} (D_i Q_{P_i}^n)^T &= (Q_{P_i}^n (I + \varepsilon Q_{P_i}))^T \\ &= ((I + \varepsilon Q_{P_i}) Q_{P_i}^n)^T \\ &= (Q_{P_i}^n)^T (I + \varepsilon Q_{P_i})^T. \end{aligned}$$

Observa-se, ainda, que pode-se verificar para todos os casos que, para $1 \leq i \leq 6$:

$$\det(I + \varepsilon Q_{Pi})^T = 1.$$

Para o item (b), observa-se que:

$$\begin{aligned} (D_i Q_{Pi}^{2n})^T &= (D_i Q_{Pi}^n)^T (D_i Q_{Pi}^n)^T \\ &= (Q_{Pi}^n)^T (I + \varepsilon Q_{Pi})^T (Q_{Pi}^n)^T (I + \varepsilon Q_{Pi})^T \\ &= (Q_{Pi}^{2n})^T (I + \varepsilon Q_{Pi})^T (I + \varepsilon Q_{Pi})^T. \end{aligned}$$

Por outro lado, observa-se que:

$$\begin{aligned} (I + \varepsilon Q_{Pi})^T (I + \varepsilon Q_{Pi})^T &= (I + \varepsilon Q_{Pi})^T (I + \varepsilon Q_{Pi}) ((I + \varepsilon Q_{Pi})^T (I + \varepsilon Q_{Pi}))^T \\ &= (I + 2\varepsilon Q_{Pi})^T. \end{aligned}$$

Substituindo na expressão anterior, para $1 \leq i \leq 6$:

$$(D_i Q_{Pi}^{2n})^T = (Q_{Pi}^{2n})^T (I + 2\varepsilon Q_{Pi})^T.$$

No passo seguinte, vamos avalia-se o comportamento da matriz:

$$\begin{aligned} (D_i Q_{Pi}^{3n})^T &= (D_i Q_{Pi}^{2n})^T (D_i Q_{Pi}^n)^T \\ &= (Q_{Pi}^{2n})^T (Q_{Pi}^n)^T \\ &= (Q_{Pi}^{2n})^T (I + 2\varepsilon Q_{Pi})^T (Q_{Pi}^n)^T (I + \varepsilon Q_{Pi})^T \\ &= ((Q_{Pi}^{2n})^T (I + 2\varepsilon Q_{Pi})^T (Q_{Pi}^n)^T (I + \varepsilon Q_{Pi})^T) \\ &= (Q_{Pi}^{3n})^T (I + 3\varepsilon Q_{Pi})^T. \end{aligned}$$

Por indução, tem-se que para $p > 1$ e $1 \leq i \leq 6$:

$$(D_i Q_{Pi}^{pn})^T = (Q_{Pi}^{pn})^T (I + 3\varepsilon Q_{Pi})^T.$$

Com isso:

$$\begin{aligned} (D_i Q_{Pi}^{n(p+1)})^T &= ((D_i Q_{Pi}^{pn}) (D_i Q_{Pi}))^T = (D_i Q_{Pi}^{pn})^T (D_i Q_{Pi})^T \\ &= (Q_{Pi}^{pn})^T (I + p\varepsilon Q_{Pi})^T (Q_{Pi}^n)^T (I + \varepsilon Q_{Pi})^T \\ &= ((Q_{Pi}^{pn})^T (I + p\varepsilon Q_{Pi})^T (Q_{Pi}^n)^T (I + \varepsilon Q_{Pi})^T) \\ &= ((Q_{Pi}^{(p+1)n})^T (I + (p+1)\varepsilon Q_{Pi})^T). \end{aligned}$$

□

3.9 Quatérnios de Padovan

Um quatérnio é uma extensão dos números complexos, estudados em Álgebra Linear, desenvolvidos em 1843 por William Rowan Hamilton (1805-1865), existindo duas estruturas quaterniônicas, primeiramente: quatérnio em $\mathbb{R}$, possuindo componentes reais, e os quatérnios complexos (biquatérnios) em $\mathbb{C}$, possuindo variáveis complexas. Os quatérnios são compreendidos como somas formais de escalares com vetores usuais do espaço tridimensional, existindo quatro dimensões (OLIVEIRA, 2018).

Todavia, um quaternion é descrito por:

$$q = a + bi + cj + dk,$$

onde a, b, c são números reais e i, j, k a parte ortogonal na base $\mathbb{R}^3$. Tem-se ainda que $q_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$ e $q_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$ são dois quatérnios distintos. Assim, as operações escalares de adição, igualdade e multiplicação entre eles são:

$$q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k.$$

$q_1 = q_2$ apenas se $a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2$. E para $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se que $\alpha q_1 = \alpha a_1 + \alpha b_1i + \alpha c_1j + \alpha d_1k$.

Um número complexo é definido por $a + bi$, onde a e b são números reais e i é o número imaginário, não fazendo parte dos números reais, e possuindo a propriedade $i^2 = -1$. Assim, os quatérnios possuem quatro vetores de base $(1, i, j, k)$, existindo três componentes imaginários chamados i, j, k , onde essas são três raízes quadradas e diferentes. Esse produto quaterniônico é apresentado por Horadam (1993) sendo $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k = -ji, jk = i = -kj$ e $ki = j = -ik$. O conjugado e norma do quatérnio são descritas, respectivamente, como:

$$q^* = a - bi - cj - dk,$$

$$N(q) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

À vista disso, serão enunciadas algumas definições a respeito dos quatérnios de Padovan, a fórmula variante de Binet, função geradora, matriz geradora e algumas propriedades, tanto para os números naturais, assim como a sua extensão para índice inteiro não positivo.

Definição 35. *O quatérnio de Padovan é definido, com $n \geq 0, n \in \mathbb{N}, i^2 = j^2 = k^2 = -1$, pela equação (TASCI, 2018b; DISKAYA; MENKEN, 2019):*

$$QP_n = P_n + iP_{n+1} + jP_{n+2} + kP_{n+3}.$$

Definição 36. *A fórmula de recorrência do quatérnio de Padovan é definida como:*

$$QP_n = QP_{n-2} + QP_{n-3}.$$

Teorema 48. Para $n \in \mathbb{Z}$, a Fórmula de Binet para o quatérnio de Padovan é (TASCI, 2018b; DISKAYA; MENKEN, 2019):

$$QP_n = Aax_1^n + Bbx_2^n + Ccx_3^n,$$

em que x_1, x_2, x_3 são as raízes da equação $x^3 - x - 1 = 0$, e: $A = \frac{(x_2-1)(x_3-1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$, $B = \frac{(x_1-1)(x_3-1)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$, $C = \frac{(x_1-1)(x_2-1)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$, $a = 1 + x_1i + x_1^2j + x_1^3k$, $b = 1 + x_2i + x_2^2j + x_2^3k$, $c = 1 + x_3i + x_3^2j + x_3^3k$.

Demonstração. De posse da fórmula: $QP_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n + \gamma x_3^n$, pode-se utilizar a relação de recorrência dos quatérnios de Padovan (Definição 35) e os valores iniciais $QP_0 = 1 + i + j + 2k$, $QP_1 = 1 + i + 2j + 2k$, $QP_2 = 1 + 2i + 2j + 3k$, desenvolve-se o sistema de equações:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma &= 1 + i + j + 2k \\ \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 &= 1 + i + 2j + 2k \\ \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2 &= 1 + 2i + 2j + 3k \end{cases}$$

Assim, resolvendo o sistema, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{(1 + 2i + 2j + 3k) - x_2(1 + i + 2j + 2k) - x_3(1 + i + 2j + 2k) + x_2x_3(1 + i + j + 2k)}{x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3} \\ &= \frac{(1 - x_2 - x_3 + x_2x_3) + i(2 - x_2 - x_3 + x_2x_3) + j(2 - 2x_2 - 2x_3 + x_2x_3) + k(3 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_2x_3)}{(x_1 - x_3)(x_1 - x_2)}, \\ \beta &= \frac{(1 + 2i + 2j + 3k) - x_1(1 + i + 2j + 2k) - x_3(1 + i + 2j + 2k) + x_1x_3(1 + i + j + 2k)}{x_2^2 - x_2x_3 - x_1x_2 + x_1x_3} \\ &= \frac{(1 - x_1 - x_2 + x_1x_3) + i(2 - x_1 - x_3 + x_1x_3) + j(2 - 2x_1 - 2x_3 + x_1x_3) + k(3 - 2x_1 - 2x_3 + 2x_1x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \\ \gamma &= \frac{(1 + 2i + 2j + 3k) - x_1(1 + i + 2j + 2k) - x_2(1 + i + 2j + 2k) + x_1x_2(1 + i + j + 2k)}{x_3^2 + x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3} \\ &= \frac{(1 - x_1 - x_2 + x_1x_2) + i(2 - x_1 - x_2 + x_1x_2) + j(2 - 2x_1 - 2x_2 + x_1x_2) + k(3 - 2x_1 - 2x_2 + 2x_1x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}. \end{aligned}$$

Utilizando as relações de Girard: $x_1x_2x_3 = 1$, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ e $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -1$, e a fórmula de Binet da SP (Teorema 13), tem-se que:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{(x_2x_2 - x_2 - x_3 + 1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}(1 + x_1i + x_1^2j + x_1^3k) = \frac{(x_2 - 1)(x_3 - 1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}(1 + x_1i + x_1^2j + x_1^3k) \\ &= A(1 + x_1i + x_1^2j + x_1^3k), \\ \beta &= \frac{(x_1x_3 - x_1 - x_3 + 1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}(1 + x_2i + x_2^2j + x_2^3k) = \frac{(x_1 - 1)(x_3 - 1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}(1 + x_2i + x_2^2j + x_2^3k) \\ &= B(1 + x_2i + x_2^2j + x_2^3k), \\ \gamma &= \frac{(x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}(1 + x_3i + x_3^2j + x_3^3k) = \frac{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}(1 + x_3i + x_3^2j + x_3^3k) \\ &= C(1 + x_3i + x_3^2j + x_3^3k). \end{aligned}$$

Definindo $a = 1 + x_1i + x_1^2j + x_1^3k$, $b = 1 + x_2i + x_2^2j + x_2^3k$, $c = 1 + x_3i + x_3^2j + x_3^3k$, pode-se chegar em:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{(x_2 - 1)(x_3 - 1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}(1 + x_1i + x_1^2j + x_1^3k) = Aa, \\ \beta &= \frac{(x_1 - 1)(x_3 - 1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}(1 + x_2i + x_2^2j + x_2^3k) = Bb, \\ \gamma &= \frac{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}(1 + x_3i + x_3^2j + x_3^3k) = Cc.\end{aligned}$$

□

Propriedade 12. A função geradora do quatérnio de Padovan é dada por (TASCI, 2018b):

$$g(QP_n, x) = \frac{(1 + i + j + 2k) + (1 + i + 2j + 2k)x + (i + j + k)x^2}{1 - x^2 - x^3}.$$

Demonstração. Multiplicando a função por x^2 e x^3 , tem-se:

$$g(QP_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} QP_n x^n = QP_0 + QP_1x + QP_2x^2 + \dots + QP_n x^n + \dots \quad (3.41)$$

$$x^2 g(QP_n, x) = QP_0x^2 + QP_1x^3 + QP_2x^4 + \dots + QP_{n-2}x^n + \dots \quad (3.42)$$

$$x^3 g(QP_n, x) = QP_0x^3 + QP_1x^4 + QP_2x^5 + \dots + QP_{n-3}x^n + \dots \quad (3.43)$$

Baseada na Equação (3.41-3.42+3.43), tem-se que:

$$\begin{aligned}(1 - x^2 - x^3)g(QP_n, x) &= QP_0 + QP_1x + (QP_2 - QP_0)x^2 + (QP_3 - QP_1 - QP_0)x^3 + \dots \\ &\quad + (QP_n - QP_{n-2} - QP_{n-3})x^n + \dots\end{aligned}$$

Considerando os valores iniciais: $QP_0 = 1 + i + j + 2k$, $QP_1 = 1 + i + 2j + 2k$, $QP_2 = 1 + 2i + 2j + 3k$ e a fórmula de recorrência, pode-se obter:

$$\begin{aligned}(1 - x^2 - x^3)g(QP_n, x) &= QP_0 + QP_1x + (QP_2 - QP_0)x^2 \\ g(QP_n, x) &= \frac{(1 + i + j + 2k) + (1 + i + 2j + 2k)x + (i + j + k)x^2}{1 - x^2 - x^3}.\end{aligned}$$

□

Agora, será analisada a matriz geradora Q dos quatérnios de Padovan, através da matriz, com $n \in \mathbb{N}$:

$$Q^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{n-2} & P_{n-1} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-2} & P_{n-4} \\ P_{n-4} & P_{n-3} & P_{n-5} \end{bmatrix}, \text{ para todo } n \geq 5.$$

Propriedade 13. Para $n \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}$, a matriz geradora do quatérnio de Padovan é dada por (TASCI, 2018b):

$$\begin{aligned} Q^n \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} QP_{n+2} & QP_{n+1} & QP_n \\ QP_{n+1} & QP_n & QP_{n-1} \\ QP_n & QP_{n-1} & QP_{n-2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Demonstração. Realizando a demonstração por meio do princípio da indução finita, para $n = 5$, tem-se:

$$\begin{aligned} Q^5 \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^5 \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2QP_2 + 2QP_1 + QP_0 & 2QP_1 + 2QP_0 + QP_{-1} & 2QP_0 + 2QP_{-1} + QP_{-2} \\ QP_2 + 2QP_1 + QP_0 & QP_1 + 2QP_0 + QP_{-1} & QP_0 + 2QP_{-1} + QP_{-2} \\ QP_2 + QP_1 + QP_0 & QP_1 + QP_0 + QP_{-1} & QP_0 + QP_{-1} + QP_{-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} QP_7 & QP_6 & QP_5 \\ QP_6 & QP_5 & QP_4 \\ QP_5 & QP_4 & QP_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Verificando a validade para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\begin{aligned} Q^k \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{n-2} & P_{n-1} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-2} & P_{n-4} \\ P_{n-4} & P_{n-3} & P_{n-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} QP_{k+2} & QP_{k+1} & QP_k \\ QP_{k+1} & QP_k & QP_{k-1} \\ QP_k & QP_{k-1} & QP_{k-2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, verifica-se que seja válido para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}
 Q^{k+1} \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P_{k-2} & P_{k-1} & P_{k-3} \\ P_{k-3} & P_{k-2} & P_{k-4} \\ P_{k-4} & P_{k-3} & P_{k-5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P_{k-1} & P_k & P_{k-2} \\ P_{k-2} & P_{k-1} & P_{k-3} \\ P_{k-3} & P_{k-2} & P_{k-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} QP_{k+3} & QP_{k+2} & QP_{k+1} \\ QP_{k+2} & QP_{k+1} & QP_k \\ QP_{k+1} & QP_k & QP_{k-1} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Vale ressaltar que a matriz Q utilizada pode ser alterada por uma das seis matrizes válidas de Padovan e obtendo, conseqüentemente, os termos da matriz geradora Q dos quatérnios de Padovan. $\square$

Teorema 49. *A soma dos n primeiros termos quatérnios de Padovan é descrita por:*

$$\sum_{m=0}^n QP_m = QP_n + QP_{n+1} + QP_{n+2} - (2 + 3i + 4j + 5k).$$

Demonstração. Utilizando a relação de recorrência dos quatérnios de Padovan, tem-se que:

$$QP_n = QP_{n-2} + QP_{n-3}.$$

Porém para que haja cancelamentos posteriormente, utiliza-se a seguinte relação:

$$QP_{n-2} = QP_n - QP_{n-3}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 QP_0 &= QP_2 - QP_{-1} \\
 QP_1 &= QP_3 - QP_0 \\
 QP_2 &= QP_4 - QP_1 \\
 QP_3 &= QP_5 - QP_2 \\
 &\vdots \\
 QP_{n-3} &= QP_{n-1} - QP_{n-4} \\
 QP_{n-2} &= QP_n - QP_{n-3} \\
 QP_{n-1} &= QP_{n+1} - QP_{n-2} \\
 QP_n &= QP_{n+2} - QP_{n-1}.
 \end{aligned}$$

Através de operações algébricas, pode-se realizar alguns cancelamentos, obtendo:

$$\sum_{m=0}^n QP_m = QP_n + QP_{n+1} + QP_{n+2} - QP_{-1} - QP_0 - QP_1.$$

Considerando os valores iniciais $QP_{-1} = i + j + k$, $QP_0 = 1 + i + j + 2k$ e $QP_1 = 1 + i + 2j + 2k$, conclui-se que:

$$\sum_{m=0}^n QP_m = QP_n + QP_{n+1} + QP_{n+2} - (2 + 3i + 4j + 5k).$$

□

Teorema 50. *A soma dos n primeiros termos pares dos quatérnios de Padovan é (TASCI, 2018b):*

$$\sum_{m=1}^n QP_{2m} = QP_{2n+3} - (2 + 2i + 3j + 4k).$$

Demonstração. Através da recorrência $QP_n = QP_{n-2} + QP_{n-3} \Leftrightarrow QP_{n-3} = QP_n - QP_{n-2}$, tem-se que:

$$\begin{aligned} QP_2 &= QP_5 - QP_3 \\ QP_4 &= QP_7 - QP_5 \\ &\vdots \\ QP_{2n-2} &= QP_{2n+1} - QP_{2n-1} \\ QP_{2n} &= QP_{2n+3} - QP_{2n+1}. \end{aligned}$$

Obtendo:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n QP_{2m} &= QP_{2n+3} - QP_3 \\ &= QP_{2m} = QP_{2n+3} - (2 + 2i + 3j + 4k). \end{aligned}$$

□

Teorema 51. *A soma dos n primeiros termos ímpares dos quatérnios de Padovan, são expressos por (TASCI, 2018b):*

$$\sum_{m=0}^n QP_{2m+1} = QP_{2n+4} - (1 + 2i + 2j + 3k).$$

Demonstração. Levando em consideração apenas os números ímpares e a relação $QP_{n-3} = QP_n - QP_{n-2}$, pode-se somar todos esses números e cancelar os termos de índice $2n$, valida-se este teorema. □

Doravante, será analisado o comportamento dos termos com índices inteiros não positivos dos quatérnios de Padovan.

Definição 37. A fórmula de recorrência dos quatérnios de Padovan para índice inteiro não positivo, para todo $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, é dada por:

$$QP_{-n} = QP_{-n+3} - QP_{-n+1}.$$

Definição 38. O quatérnio de Padovan, para índice inteiro não positivo, para todo $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, é definido pela equação:

$$QP_{-n} = P_{-n} + iP_{-n+1} + jP_{-n+2} + kP_{-n+3}.$$

Propriedade 14. A função geradora dos quatérnios de Padovan para índice inteiro não positivo, é descrita por:

$$g(QP_{-n}, x) = \frac{-(1+i+j+2k) - (1+2i+2j+3k)x - (1+i+2j+2k)x^2}{x^3 - x - 1}.$$

Demonstração. Multiplicando a função por x e x^3 , tem-se:

$$g(QP_{-n}, x) = \sum_{n=0}^{\infty} QP_{-n}x^n = QP_0 + QP_{-1}x + QP_{-2}x^2 + \dots + QP_{-n}x^n + \dots \quad (3.44)$$

$$xg(QP_{-n}, x) = QP_0x + QP_{-1}x^2 + QP_{-2}x^3 + \dots + QP_{-n-1}x^n + \dots \quad (3.45)$$

$$x^3g(QP_{-n}, x) = QP_0x^3 + QP_{-1}x^4 + QP_{-2}x^5 + \dots + QP_{-n-3}x^n + \dots \quad (3.46)$$

Com base na Equação (3.46-3.45+3.44), tem-se que:

$$\begin{aligned} (x^3 - x - 1)g(QP_{-n}, x) &= -QP_0 - (QP_0 + QP_{-1})x - (QP_{-2} + QP_{-1})x^2 \\ &\quad + (QP_0 - QP_{-2} - QP_{-3})x^3 + \dots + (QP_{-n-3} - QP_{-n} - QP_{-n-1})x^n + \dots \end{aligned}$$

Considerando os valores iniciais: $QP_0 = 1 + i + j + 2k$, $QP_{-1} = i + j + k$, $QP_{-2} = 1 + j + k$ e a fórmula de recorrência, pode-se obter:

$$\begin{aligned} (x^3 - x - 1)g(QP_{-n}, x) &= -QP_0 - (QP_0 + QP_{-1})x - (QP_{-2} + QP_{-1})x^2 \\ g(QP_{-n}, x) &= \frac{-(1+i+j+2k) - (1+2i+2j+3k)x - (1+i+2j+2k)x^2}{x^3 - x - 1}. \end{aligned}$$

□

A matriz geradora Q dos quatérnios de Padovan, para índice inteiro não positivo, pode ser analisada calculando a inversa da matriz Q , utilizada para verificar o comportamento dos termos positivos da sequência. Assim, tem-se que:

$$\varrho = Q^{-n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{-n-2} & P_{-n-1} & P_{-n-3} \\ P_{-n-3} & P_{-n-2} & P_{-n-4} \\ P_{-n-4} & P_{-n-3} & P_{-n-5} \end{bmatrix}.$$

Propriedade 15. Para $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, a matriz geradora dos quatérnios de Padovan, com índice inteiro não positivo, é dada por:

$$\begin{aligned} \varrho \cdot \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} QP_{-n+2} & QP_{-n+1} & QP_{-n} \\ QP_{-n+1} & QP_{-n} & QP_{-n-1} \\ QP_{-n} & QP_{-n-1} & QP_{-n-2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Demonstração. Analisando a igualdade para $n = 1$, pelo princípio da indução finita:

$$\begin{aligned} \varrho \cdot \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \\ QP_2 - QP_0 & QP_1 - QP_{-1} & QP_0 - QP_{-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \\ QP_{-1} & QP_{-2} & QP_{-3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Constatando a validade para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \varrho \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{-n-2} & P_{-n-1} & P_{-n-3} \\ P_{-n-3} & P_{-n-2} & P_{-n-4} \\ P_{-n-4} & P_{-n-3} & P_{-n-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} QP_{-k+2} & QP_{-k+1} & QP_{-k} \\ QP_{-k+1} & QP_{-k} & QP_{-k-1} \\ QP_{-k} & QP_{-k-1} & QP_{-k-2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Concluindo a demonstração, verifica-se a validade para $n = k + 1$:

$$\varrho^{k+1} \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} P_{-k-2} & P_{-k-1} & P_{-k-3} \\ P_{-k-3} & P_{-k-2} & P_{-k-4} \\ P_{-k-4} & P_{-k-3} & P_{-k-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P_{-k-3} & P_{-k-2} & P_{-k-4} \\ P_{-k-4} & P_{-k-3} & P_{-k-5} \\ P_{-k-5} & P_{-k-4} & P_{-k-6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} QP_{-k+1} & QP_{-k} & QP_{-k-1} \\ QP_{-k} & QP_{-k-1} & QP_{-k-2} \\ QP_{-k-1} & QP_{-k-2} & QP_{-k-3} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

□

Teorema 52. *A soma dos n primeiros termos com índice inteiro não positivo dos quatérnios de Padovan, são expressos por:*

$$\sum_{m=1}^n QP_{-m} = QP_{-n+3} + QP_{-n+2} + (2 + 3i + 4j + 5k).$$

Demonstração. Utilizando a relação de recorrência dos quatérnios de Padovan, com $n \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$QP_{-n} = QP_{-n+3} - QP_{-n+1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 QP_{-1} &= QP_2 - QP_0 \\
 QP_{-2} &= QP_1 - QP_{-1} \\
 QP_{-3} &= QP_0 - QP_{-2} \\
 QP_{-4} &= QP_{-1} - QP_{-3} \\
 &\vdots \\
 QP_{-n-3} &= QP_{-n} - QP_{-n-2} \\
 QP_{-n-2} &= QP_{-n+1} - QP_{-n-1} \\
 QP_{-n-1} &= QP_{-n+2} - QP_{-n} \\
 QP_{-n} &= QP_{-n+3} - QP_{-n+1}.
 \end{aligned}$$

Através de cancelamentos sucessivos, obtêm-se:

$$\sum_{m=0}^n QP_m = QP_{-n+3} + QP_{-n+2} + QP_2 + QP_1.$$

Considerando os valores iniciais $QP_1 = 1 + i + 2j + 2k$, $QP_2 = 1 + 2i + 2j + 3k$, conclui-se que:

$$\sum_{m=0}^n QP_m = QP_{-n+3} + QP_{-n+2} + (2 + 3i + 4j + 5k).$$

□

Teorema 53. *A soma dos n primeiros termos pares, com índice inteiro não positivo, dos quatérnios de Padovan é:*

$$\sum_{m=1}^n QP_{-2m} = QP_{2n+3} - (1 + i + 2j + 2k).$$

Demonstração. Utilizando a recorrência $QP_{-n} = QP_{-n+3} - QP_{-n+1}$, observa-se que

$$\begin{aligned} QP_{-2} &= QP_1 - QP_{-1} \\ QP_{-4} &= QP_{-1} - QP_{-3} \\ QP_{-6} &= QP_{-3} - QP_{-5} \\ &\vdots \\ QP_{-2n-2} &= QP_{-2n+1} - QP_{-2n-1} \\ QP_{-2n} &= QP_{-2n+3} - QP_{-2n+1}. \end{aligned}$$

Com isso, tem-se que:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n QP_{-2m} &= QP_{-2n+3} + QP_1 \\ &= QP_{-2n} = QP_{-2n+3} + (1 + i + 2j + 2k). \end{aligned}$$

□

Teorema 54. *A soma dos n primeiros termos ímpares, com índice inteiro não positivo, dos quatérnios de Padovan, são expressos por:*

$$\sum_{m=1}^n QP_{-2m-1} = QP_{-2n+2} + (1 + 2i + 2j + 3k).$$

Demonstração. De modo análogo como realizado para a demonstração dos teoremas anteriores, pode-se facilmente validar também este teorema, realizando os cancelamentos sucessivos das operações algébricas. □

3.10 Octônios de Padovan

Após a definição dos quatérnios J. T. Graves perguntou à Hamilton sobre álgebras de dimensões maiores, tentando definí-las como sendo de oito e dezesseis dimensões. Porém, segundo Karatas e Halici (2017), Graves encontrou divisões por zero na álgebra de dezesseis dimensões, definindo então somente os octônios em 1845, como sendo então não comutativa, não-associativa e normatizada.

Kecilioglu e Akkus (2015) definiu os octônios como sendo no campo dos números $\mathbb{R}$, escrevendo como:

$$p = p' + p''e,$$

onde $p', p'' \in H = \{a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \mid \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \mathbf{ijk} = -1, a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$, é a divisão da álgebra dos quatérnios. A adição e multiplicação entre dois octônios, $p = p' + p''e$ e $q = q' + q''e$ é dada através de:

$$\begin{aligned} p + q &= (p' + q') + (p'' + q'')e, \\ pq &= (p'q' - \overline{q''}p'') + (q''p' + p''\overline{q'})e, \end{aligned}$$

em que $\overline{q'}$ e $\overline{q''}$ são os conjugados dos quatérnios q' e q'' , respectivamente. Portanto, $\mathbb{O}$ é a álgebra dos octonions, numa base natural no espaço sobre $\mathbb{R}$ formado pelos elementos: $e_0 = 1, e_1 = \mathbf{i}, e_2 = \mathbf{j}, e_3 = \mathbf{k}, e_4 = e, e_5 = \mathbf{ie}, e_6 = \mathbf{je}, e_7 = \mathbf{ke}$ e a multiplicação desses números é mostrada na Tabela 7.

Tabela 7 – Tabela de multiplicação dos octônios de $\mathbb{O}$.

.	1	e ₁	e ₂	e ₃	e ₄	e ₅	e ₆	e ₇
1	1	e ₁	e ₂	e ₃	e ₄	e ₅	e ₆	e ₇
e ₁	e ₁	-1	e ₃	-e ₂	e ₅	-e ₄	-e ₇	e ₆
e ₂	e ₂	-e ₃	-1	e ₁	e ₆	e ₇	-e ₄	-e ₅
e ₃	e ₃	e ₂	-e ₁	-1	e ₇	-e ₆	e ₅	-e ₄
e ₄	e ₄	-e ₅	-e ₆	-e ₇	-1	e ₁	e ₂	e ₃
e ₅	e ₅	e ₄	-e ₇	e ₆	-e ₁	-1	-e ₃	e ₂
e ₆	e ₆	e ₇	e ₄	-e ₅	-e ₂	e ₃	-1	-e ₁
e ₇	e ₇	-e ₆	e ₅	e ₄	-e ₃	-e ₂	e ₁	-1

Fonte: Kecilioglu e Akkus (2015)

Com isso, os octônios utilizam a seguinte notação:

$$p = \sum_{s=0}^7 p_s e_s,$$

em que p_s é o coeficiente real, com $p \in \mathcal{O}$, escrito na forma $p = Re(p) + Im(p)$, onde $Re(p) = p_0$ representando a parte real e $Im(p) = \sum_{s=1}^7 p_s e_s$ representando a parte imaginária. O conjugado de p é definido para todo $p, q \in \mathbb{O}$, como:

$$\overline{\overline{p}} = p, \overline{(p + q)} = \overline{p} + \overline{q}, \overline{pq} = \overline{q}\overline{p}.$$

A norma de p é definida por:

$$N_p = p\overline{p} = \overline{p}p = \sum_{s=0}^7 p_s^2.$$

O inverso do octonion diferente de zero, com $p \in \mathbb{O}$, é dado por:

$$p^{-1} = \frac{\bar{p}}{N_p}.$$

Para todo $p, q \in \mathbb{O}$:

$$\begin{aligned} N_{pq} &= N_p N_q, \\ (pq)^{-1} &= q^{-1} p^{-1}. \end{aligned}$$

$\mathbb{O}$ não é comutativa, não associativa, mas é alternativa: $p(pq) = p^2 q, (qp)p = qp^2, (pq)p = p(qp) := pqp$.

Definição 39. Para $n \geq 0$, os octônios de Padovan são definidos por (TASYURDU; AKPINAR, 2019):

$$OP_n = \sum_{s=0}^7 P_{n+s} e_s,$$

e o seu conjugado é dado por (TASYURDU; AKPINAR, 2019):

$$\overline{OP_n} = P_n - \sum_{s=1}^7 P_{n+s} e_s.$$

Definição 40. A fórmula de recorrência dos octônios de Padovan, é dada por (TASYURDU; AKPINAR, 2019):

$$OP_n = OP_{n-2} + OP_{n-3},$$

onde $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$.

Teorema 55. A função geradora dos octônios de Padovan, OP_n , é dada por (TASYURDU; AKPINAR, 2019):

$$g(OP_n, x) = \frac{1}{1 - x^2 - x^3} \sum_{s=0}^7 (P_s + P_{s+1}x + P_{s-1}x^2) e_s.$$

Demonstração. De posse da função:

$$g(OP_n, x) = OP_0 + OP_1 x + OP_2 x^2 + \dots + OP_n x^n + \dots$$

Pode-se realizar a multiplicação dessa função por x^2 e x^3 , resultando:

$$\begin{aligned} x^2 g(OP_n, x) &= OP_0 x^2 + OP_1 x^3 + OP_2 x^4 + \dots + OP_{n-2} x^n + \dots \\ x^3 g(OP_n, x) &= OP_0 x^3 + OP_1 x^4 + OP_2 x^5 + \dots + OP_{n-3} x^n + \dots \end{aligned}$$

Assim, realizando $g(OP_n, x) - x^2g(OP_n, x) - x^3g(OP_n, x)$, tem-se que:

$$(1 - x^2 - x^3)g(OP_n, x) = OP_0 + OP_1x + (OP_2 - OP_0)x^2 + (OP_3 - OP_1 - OP_0)x^3 + \dots$$

$$(1 - x^2 - x^3)g(OP_n, x) = OP_0 + OP_1x + (OP_2 - OP_0)x^2$$

$$g(OP_n, x) = \frac{1}{(1 - x^2 - x^3)} \sum_{s=0}^7 (P_s + P_{s+1}x + P_{s-1}x^2)e_s.$$

□

Teorema 56. A fórmula de Binet dos octônios de Padovan, com $n \in \mathbb{Z}$, é dada por (TASYURDU; AKPINAR, 2019):

$$OP_n = A\alpha_o x_1^n + B\beta_o x_2^n + C\gamma_o x_3^n,$$

em que x_1, x_2, x_3 são as raízes do polinômio característico $x^3 - x - 1 = 0$,

$$A = \frac{(x_2 - 1)(x_3 - 1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, B = \frac{(x_1 - 1)(x_3 - 1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, C = \frac{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)},$$

$$\alpha_o = 1 + x_1i + x_1^2j + x_1^3k + x_1^4e + x_1^5ie + x_1^6je + x_1^7ke,$$

$$\beta_o = 1 + x_2i + x_2^2j + x_2^3k + x_2^4e + x_2^5ie + x_2^6je + x_2^7ke,$$

$$\gamma_o = 1 + x_3i + x_3^2j + x_3^3k + x_3^4e + x_3^5ie + x_3^6je + x_3^7ke.$$

Demonstração. Através da fórmula de Binet $OP_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n + \gamma x_3^n$ e da recorrência dos octônios de Padovan $OP_n = \sum_{s=0}^7 P_{n+s}e_s$, com os valores iniciais $OP_0 = 1+i+j+2k+2e+3ie+4je+5ke$, $OP_1 = 1+i+2j+2k+3e+4ie+5je+7ke$ e $OP_2 = 1+2i+2j+3k+4e+5ie+8je+9ke$, é possível obter o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma &= 1 + i + j + 2k + 2e + 3ie + 4je + 5ke \\ \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 &= 1 + i + 2j + 2k + 3e + 4ie + 5je + 7ke \\ \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2 &= 1 + 2i + 2j + 3k + 4e + 5ie + 8je + 9ke \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, tem-se que:

$$\alpha = \frac{(1 + 2i + 2j + 3k + 4e + 5ie + 8je + 9ke) + (-x_2 - x_3)(1 + i + 2j + 2k + 3e + 4ie + 5je + 7ke)}{x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3} + \frac{x_2x_3(1 + i + j + 2k + 2e + 3ie + 4je + 5ke)}{x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3},$$

$$\beta = \frac{(1 + 2i + 2j + 3k + 4e + 5ie + 8je + 9ke) + (-x_1 - x_3)(1 + i + 2j + 2k + 3e + 4ie + 5je + 7ke)}{x_2^2 - x_2x_3 - x_1x_2 + x_1x_3} + \frac{x_1x_3(1 + i + j + 2k + 2e + 3ie + 4je + 5ke)}{x_2^2 - x_2x_3 - x_1x_2 + x_1x_3},$$

$$\gamma = \frac{(1 + 2i + 2j + 3k + 4e + 5ie + 8je + 9ke) + (-x_1 - x_2)(1 + i + 2j + 2k + 3e + 4ie + 5je + 7ke)}{x_3^2 + x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3} + \frac{x_1x_2(1 + i + j + 2k + 2e + 3ie + 4je + 5ke)}{x_3^2 + x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3}.$$

Através das relações de Girard: $x_1x_2x_3 = 1$, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ e $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -1$, e da fórmula de Binet da SP (Teorema 13), é fácil ver que:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{(x_2x_2 - x_2 - x_3 + 1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}(1 + x_1i + x_1^2j + x_1^3k + x_1^4e + x_1^5ie + x_1^6je + x_1^7ke) \\
&= \frac{(x_2 - 1)(x_3 - 1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}(1 + x_1i + x_1^2j + x_1^3k + x_1^4e + x_1^5ie + x_1^6je + x_1^7ke) \\
&= A(1 + x_1i + x_1^2j + x_1^3k + x_1^4e + x_1^5ie + x_1^6je + x_1^7ke), \\
\beta &= \frac{(x_1x_3 - x_1 - x_3 + 1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}(1 + x_2i + x_2^2j + x_2^3k + x_2^4e + x_2^5ie + x_2^6je + x_2^7ke) \\
&= \frac{(x_1 - 1)(x_3 - 1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}(1 + x_2i + x_2^2j + x_2^3k + x_2^4e + x_2^5ie + x_2^6je + x_2^7ke) \\
&= B(1 + x_2i + x_2^2j + x_2^3k + x_2^4e + x_2^5ie + x_2^6je + x_2^7ke), \\
\gamma &= \frac{(x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}(1 + x_3i + x_3^2j + x_3^3k + x_3^4e + x_3^5ie + x_3^6je + x_3^7ke) \\
&= \frac{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}(1 + x_3i + x_3^2j + x_3^3k + x_3^4e + x_3^5ie + x_3^6je + x_3^7ke) \\
&= C(1 + x_3i + x_3^2j + x_3^3k + x_3^4e + x_3^5ie + x_3^6je + x_3^7ke).
\end{aligned}$$

Definindo $\alpha_o = (1 + x_1i + x_1^2j + x_1^3k + x_1^4e + x_1^5ie + x_1^6je + x_1^7ke)$, $\beta_o = (1 + x_2i + x_2^2j + x_2^3k + x_2^4e + x_2^5ie + x_2^6je + x_2^7ke)$ e $\gamma_o = (1 + x_3i + x_3^2j + x_3^3k + x_3^4e + x_3^5ie + x_3^6je + x_3^7ke)$, conclui-se que:

$$\alpha = A\alpha_o, \beta = B\beta_o, \gamma = C\gamma_o.$$

□

Para analisar a propriedade da matriz geradora dos octônios de Padovan, será utilizada a matriz geradora, com $n \in \mathbb{N}$:

$$Q^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{n-2} & P_{n-3} & P_{n-4} \\ P_{n-1} & P_{n-2} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-4} & P_{n-5} \end{bmatrix}, \text{ para todo } n \geq 5.$$

Propriedade 16. Para $n \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}$, a matriz geradora dos octônios de Padovan é dada por:

$$\begin{aligned}
Q^n \begin{bmatrix} OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} & OP_{-2} & OP_{-3} \\ OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} & OP_{-2} & OP_{-3} \\ OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} OP_{n-2} & OP_{n-3} & OP_{n-4} \\ OP_{n-1} & OP_{n-2} & OP_{n-3} \\ OP_{n-3} & OP_{n-4} & OP_{n-5} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Demonstração. Constatando a veracidade para $n = 5$, pelo princípio da indução finita:

$$\begin{aligned}
 Q^5 \begin{bmatrix} OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} & OP_{-2} & OP_{-3} \\ OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^5 \begin{bmatrix} OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} & OP_{-2} & OP_{-3} \\ OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} & OP_{-2} & OP_{-3} \\ OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2OP_{-2} + OP_{-1} + OP_{-3} & 2OP_{-3} + OP_{-2} + OP_{-4} & 2OP_{-4} + OP_{-3} + OP_{-5} \\ 2OP_{-2} + 2OP_{-1} + OP_{-3} & 2OP_{-3} + 2OP_{-2} + OP_{-4} & 2OP_{-4} + 2OP_{-3} + OP_{-5} \\ OP_{-2} + OP_{-1} + OP_{-3} & OP_{-3} + OP_{-2} + OP_{-4} & OP_{-4} + OP_{-3} + OP_{-5} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} OP_3 & OP_2 & OP_1 \\ OP_4 & OP_3 & OP_2 \\ OP_2 & OP_1 & OP_0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Supondo a validade para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 Q^k \begin{bmatrix} OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} & OP_{-2} & OP_{-3} \\ OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} & OP_{-2} & OP_{-3} \\ OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} OP_{k-2} & OP_{k-3} & OP_{k-4} \\ OP_{k-1} & OP_{k-2} & OP_{k-3} \\ OP_{k-3} & OP_{k-4} & OP_{k-5} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Por fim, verifica-se a validade para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}
 Q^{k+1} \begin{bmatrix} OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} & OP_{-2} & OP_{-3} \\ OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} & OP_{-2} & OP_{-3} \\ OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P_{k-2} & P_{k-3} & P_{k-4} \\ P_{k-1} & P_{k-2} & P_{k-3} \\ P_{k-3} & P_{k-4} & P_{k-5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} & OP_{-2} & OP_{-3} \\ OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P_{k-1} & P_{k-2} & P_k \\ P_k & P_{k-1} & P_{k+1} \\ P_{k-2} & P_{k-3} & P_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} & OP_{-2} & OP_{-3} \\ OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} OP_{k-1} & OP_{k-2} & OP_k \\ OP_k & OP_{k-1} & OP_{k+1} \\ OP_{k-2} & OP_{k-3} & OP_{k-1} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

□

A matriz geradora Q utilizada como base para o estudo dos octônios de Padovan, pode ser alterada por uma das seis matrizes válidas de Padovan e, consequentemente a sua matriz de bloco a qual está sendo multiplicada, obtendo assim os termos dos octônios de Padovan.

Algumas propriedades inerentes aos octônios de Padovan, serão estudadas a seguir.

Teorema 57. *A soma dos n primeiros termos octônios de Padovan é dada por:*

$$\sum_{m=1}^n OP_m = OP_n + OP_{n+1} + OP_{n+2} - \left(\sum_{s=0}^7 (P_s + P_{s+1} + P_{s+2}) e_s \right).$$

Demonstração. Utilizando a Definição 40, pode-se obter a relação:

$$OP_{n-2} = OP_n - OP_{n-3}.$$

Logo,

$$OP_1 = OP_3 - OP_0$$

$$OP_2 = OP_4 - OP_1$$

$$OP_3 = OP_5 - OP_2$$

$$OP_4 = OP_6 - OP_3$$

$$OP_5 = OP_7 - OP_4$$

$$\vdots$$

$$OP_{n-3} = OP_{n-1} - OP_{n-4}$$

$$OP_{n-2} = OP_n - OP_{n-3}$$

$$OP_{n-1} = OP_{n+1} - OP_{n-2}$$

$$OP_n = OP_{n+2} - OP_{n-1}.$$

Realizando cancelamentos sucessivos, tem-se que:

$$\sum_{m=1}^n OP_m = OP_n + OP_{n+1} + OP_{n+2} - OP_0 - OP_1 - OP_2.$$

Atribuindo a Definição 39, tem-se que:

$$\sum_{m=1}^n OP_m = OP_n + OP_{n+1} + OP_{n+2} - \left(\sum_{s=0}^7 (P_s + P_{s+1} + P_{s+2}) e_s \right).$$

□

Teorema 58. *A soma dos n primeiros termos pares dos octônios de Padovan é dada por:*

$$\sum_{m=1}^n OP_{2m} = OP_{2n+3} - \left(\sum_{s=0}^7 P_{s+3} e_s \right).$$

Demonstração. Utilizando a Definição 40, tem-se $OP_n = OP_{n-2} + OP_{n-3} \Leftrightarrow OP_{n-3} = OP_n - OP_{n-2}$, e de modo análogo à demonstração anterior, tem-se que:

$$\begin{aligned} OP_2 &= OP_5 - OP_3 \\ OP_4 &= OP_7 - OP_5 \\ &\vdots \\ OP_{2n-2} &= OP_{2n+1} - OP_{2n-1} \\ OP_{2n} &= OP_{2n+3} - OP_{2n+1}. \end{aligned}$$

Resultando:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n OP_{2m} &= OP_{2n+3} - OP_3 \\ &= OP_{2n} = OP_{2n+3} - \left(\sum_{s=0}^7 P_{s+3} e_s \right). \end{aligned}$$

□

Teorema 59. *A soma dos n primeiros termos ímpares dos octônios de Padovan, são descritos por:*

$$\sum_{m=0}^n OP_{2m+1} = OP_{2n+4} - \left(\sum_{s=0}^7 P_{s+2} e_s \right).$$

Demonstração. Considerando apenas a relação $OP_{n-3} = OP_n - OP_{n-2}$ e os termos ímpares, realiza-se o somatório e os cancelamentos desses termos com índice $2n$, validando assim o teorema. □

A seguir, será analisado o comportamento dos termos com índices inteiros não positivos dos octônios de Padovan.

Definição 41. *Para todo $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, a fórmula de recorrência dos octônios de Padovan para índice inteiro não positivo, é dada por (VIEIRA; ALVES; CATARINO, no prelo a):*

$$OP_{-n} = OP_{-n+3} - OP_{-n+1}.$$

Definição 42. *Para todo $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, o octonion de Padovan, para índice inteiro não positivo, é definido pela equação (VIEIRA; ALVES; CATARINO, no prelo a):*

$$OP_{-n} = \sum_{s=0}^7 P_{-n+s} e_s.$$

Propriedade 17. *A função geradora dos octônios de Padovan para índice inteiro não positivo, é expressa por (VIEIRA; ALVES; CATARINO, no prelo a):*

$$g(OP_{-n}, x) = \frac{-\left(\sum_{s=0}^7 P_s e_s\right) - \left(\sum_{s=0}^7 (P_s + P_{s-1}) e_s\right) x - \left(\sum_{s=0}^7 (P_{s-2} + P_{s-1}) e_s\right) x^2}{x^3 - x - 1}.$$

Demonstração. Realizando a multiplicação da função por x e x^3 , tem-se que:

$$\begin{aligned} g(OP_{-n}, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} OP_{-n}x^n = OP_0 + OP_{-1}x + OP_{-2}x^2 + \dots + OP_{-n}x^n + \dots \\ xg(OP_{-n}, x) &= OP_0x + OP_{-1}x^2 + OP_{-2}x^3 + \dots + OP_{-n-1}x^n + \dots \\ x^3g(OP_{-n}, x) &= OP_0x^3 + OP_{-1}x^4 + OP_{-2}x^5 + \dots + OP_{-n-3}x^n + \dots \end{aligned}$$

Baseado na equação $x^3g(OP_{-n}, x) - (xg(OP_{-n}, x) + g(OP_{-n}, x))$, tem-se que:

$$\begin{aligned} (x^3 - x - 1)g(OP_{-n}, x) &= -OP_0 - (OP_0 + OP_{-1})x - (OP_{-2} + OP_{-1})x^2 \\ &\quad + (OP_0 - OP_{-2} - OP_{-3})x^3 + \dots + (OP_{-n-3} - OP_{-n} - OP_{-n-1})x^n + \dots \end{aligned}$$

Considerando a fórmula de recorrência (Definição 39), pode-se obter:

$$\begin{aligned} (x^3 - x - 1)g(OP_{-n}, x) &= -OP_0 - (OP_0 + OP_{-1})x - (OP_{-2} + OP_{-1})x^2 \\ g(OP_{-n}, x) &= \frac{-\left(\sum_{s=0}^7 P_s e_s\right) - \left(\sum_{s=0}^7 (P_s + P_{s-1})e_s\right)x - \left(\sum_{s=0}^7 (P_{s-2} + P_{s-1})e_s\right)x^2}{x^3 - x - 1}. \end{aligned}$$

□

Para analisar a matriz geradora Q dos octônios de Padovan para índice inteiro não positivo, calcula-se a inversa da matriz base Q estudada nesse projeto. Assim, tem-se que:

$$\varrho = Q^{-n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{-n-2} & P_{-n-3} & P_{-n-4} \\ P_{-n-1} & P_{-n-2} & P_{-n-3} \\ P_{-n-3} & P_{-n-4} & P_{-n-5} \end{bmatrix}.$$

Propriedade 18. Para $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, a matriz geradora dos octônios de Padovan, com índice inteiro não positivo, é dada por (VIEIRA; ALVES; CATARINO, no prelo a):

$$\begin{aligned} \varrho \cdot \begin{bmatrix} OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} & OP_{-2} & OP_{-3} \\ OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} & OP_{-2} & OP_{-3} \\ OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} OP_{-n-2} & OP_{-n-3} & OP_{-n-4} \\ OP_{-n-1} & OP_{-n-2} & OP_{-n-3} \\ OP_{-n-3} & OP_{-n-4} & OP_{-n-5} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Demonstração. Averiguando a igualdade para $n = 1$, por meio do princípio da indução

finita:

$$\begin{aligned}
 \varrho \cdot \begin{bmatrix} OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} & OP_{-2} & OP_{-3} \\ OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} & OP_{-2} & OP_{-3} \\ OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \\ OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} - OP_{-3} & OP_{-2} - OP_{-4} & OP_{-3} - OP_{-5} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \\ OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-4} & OP_{-5} & OP_{-6} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Supondo a validade para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 \varrho \begin{bmatrix} OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} & OP_{-2} & OP_{-3} \\ OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} & OP_{-2} & OP_{-3} \\ OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P_{-n-2} & P_{-n-3} & P_{-n-4} \\ P_{-n-1} & P_{-n-2} & P_{-n-3} \\ P_{-n-3} & P_{-n-4} & P_{-n-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} & OP_{-2} & OP_{-3} \\ OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} OP_{-k-2} & OP_{-k-3} & OP_{-k-4} \\ OP_{-k-1} & OP_{-k-2} & OP_{-k-3} \\ OP_{-k-3} & OP_{-k-4} & OP_{-k-5} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Agora, verificando que seja válido para $n = k + 1$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \varrho^{k+1} \begin{bmatrix} OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} & OP_{-2} & OP_{-3} \\ OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} & OP_{-2} & OP_{-3} \\ OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P_{-k-2} & P_{-k-3} & P_{-k-4} \\ P_{-k-1} & P_{-k-2} & P_{-k-3} \\ P_{-k-3} & P_{-k-4} & P_{-k-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} & OP_{-2} & OP_{-3} \\ OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P_{-k-3} & P_{-k-4} & P_{-k-5} \\ P_{-k-2} & P_{-k-3} & P_{-k-4} \\ P_{-k-4} & P_{-k-5} & P_{-k-6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} & OP_{-2} & OP_{-3} \\ OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} OP_{-k-3} & OP_{-k-4} & OP_{-k-5} \\ OP_{-k-2} & OP_{-k-3} & OP_{-k-4} \\ OP_{-k-4} & OP_{-k-5} & OP_{-k-6} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

□

Algumas propriedades inerentes aos octônios de Padovan com índice inteiro não positivo, serão analisadas a seguir.

Teorema 60. *A soma dos n primeiros termos com índice inteiro não positivo dos octônios de Padovan, são expressos por (VIEIRA; ALVES; CATARINO, no prelo a):*

$$\sum_{m=1}^n OP_{-m} = OP_{-n+3} + OP_{-n+2} + \left(\sum_{s=0}^7 (P_{s+1} + P_{s+2}) e_s \right).$$

Demonstração. Utilizando a relação de recorrência dos octônios de Padovan, com $n \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$OP_{-n} = OP_{-n+3} - OP_{-n+1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} OP_{-1} &= OP_2 - OP_0 \\ OP_{-2} &= OP_1 - OP_{-1} \\ OP_{-3} &= OP_0 - OP_{-2} \\ OP_{-4} &= OP_{-1} - OP_{-3} \\ &\vdots \\ OP_{-n-3} &= OP_{-n} - OP_{-n-2} \\ OP_{-n-2} &= OP_{-n+1} - OP_{-n-1} \\ OP_{-n-1} &= OP_{-n+2} - OP_{-n} \\ OP_{-n} &= OP_{-n+3} - OP_{-n+1}. \end{aligned}$$

Através de cancelamentos sucessivos, obtêm-se:

$$\sum_{m=1}^n OP_{-m} = OP_{-n+3} + OP_{-n+2} + OP_2 + OP_1.$$

Considerando os valores iniciais e a Definição 40, conclui-se que:

$$\sum_{m=1}^n OP_{-m} = OP_{-n+3} + OP_{-n+2} + \left(\sum_{s=0}^7 (P_{s+1} + P_{s+2}) e_s \right).$$

□

Teorema 61. *A soma dos n primeiros termos pares, com índice inteiro não positivo, dos octônios de Padovan é (VIEIRA; ALVES; CATARINO, no prelo a):*

$$\sum_{m=1}^n OP_{-2m} = OP_{2n+3} - \left(\sum_{s=0}^7 P_{s+1} e_s \right).$$

Demonstração. Utilizando a recorrência $OP_{-n} = OP_{-n+3} - OP_{-n+1}$, observa-se que

$$\begin{aligned} OP_{-2} &= OP_1 - OP_{-1} \\ OP_{-4} &= OP_{-1} - OP_{-3} \\ OP_{-6} &= OP_{-3} - OP_{-5} \\ &\vdots \\ OP_{-2n-2} &= OP_{-2n+1} - OP_{-2n-1} \\ OP_{-2n} &= OP_{-2n+3} - OP_{-2n+1}. \end{aligned}$$

Com isso, tem-se que:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n OP_{-2m} &= OP_{-2n+3} + OP_1 \\ &= OP_{-2n} = OP_{-2n+3} + \left(\sum_{s=0}^7 P_{s+1} e_s \right). \end{aligned}$$

□

De modo análogo como realizado para a demonstração dos teoremas anteriores, pode-se facilmente validar também este teorema, realizando os cancelamentos sucessivos das operações algébricas.

Teorema 62. *A soma dos n primeiros termos ímpares, com índice inteiro não positivo, dos octônios de Padovan, são expressos por (VIEIRA; ALVES; CATARINO, no prelo a):*

$$\sum_{m=1}^n OP_{-2m-1} = OP_{-2n+2} + \left(\sum_{s=0}^7 P_{s+2} e_s \right).$$

3.11 Sedenios de Padovan

Desenvolvida por Cayley–Dickson (BILGICI, 2017), os números sedenios possuem 16 dimensões, sendo então denotada por $\mathbb{S}$ e aplicada em diversas áreas da ciência, tais como: gravidade linear e teoria eletromagnética. Os sedenios são números hipercomplexos e semelhantes aos quáternios e octônios, estudados anteriormente.

Doravante, serão utilizados os elementos $e_0, e_1, e_2, \dots, e_{15}$, em que e_0 é o elemento unitário e $e_1, e_2, \dots, e_{15}$ são as unidades imaginárias. Sendo então o sedenion S escrito por:

$$S = \sum_{i=0}^{15} a_i e_i,$$

em que $a_0, a_1, \dots, a_{15}$ são reais.

Imaeda e Imaeda (2000) definiram os sedenios como:

$$S = (O_1; O_2) \in \mathbb{S}, O_1, O_2 \in \mathbb{O},$$

onde $\mathbb{O}$ é a álgebra dos octônios sobre os reais. Assim, percebe-se que um sedenion é um par ordenado de dois octônios, tendo o seu conjugado definido como $\bar{S} = (O_1; -O_2)$. O produto de dois sedenios $S_1 = (O_1; O_2)$ e $S_2 = (O_3; O_4)$ é dado por:

$$S_1 S_2 = (O_1 O_3 + \rho \bar{O}_4 O_2; O_2 \bar{O}_3 + O_4 O_1),$$

em que $\rho = -1$ e e_8 o parâmetro gerador.

Para $i \equiv e_1$, onde $i = 0, 1, 2, \dots, 15$, Cawagas (2004) construiu uma tabela de multiplicação para a base de $\mathbb{S}$, como mostra na Tabela 8.

Tabela 8 – Tabela de multiplicação dos sedenios de $\mathbb{S}$.

.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	-0	3	-2	5	-4	-7	6	9	-8	-11	10	-13	12	15	-14
2	2	-3	-0	1	6	7	-4	-5	10	11	-8	-9	-14	-15	12	13
3	3	2	-1	-0	7	-6	5	-4	11	-10	9	-8	-15	14	-13	12
4	4	-5	-6	-7	-0	1	2	3	12	13	14	15	-8	-9	-10	-11
5	5	4	-7	6	-1	-0	-3	2	13	-12	15	-14	9	-8	11	-10
6	6	7	4	-5	-2	3	-0	-1	14	-15	-12	13	10	-11	-8	9
7	7	-6	5	4	-3	-2	1	-0	15	14	-13	-12	11	10	-9	-8
8	8	-9	-10	-11	-12	-13	-14	-15	-0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	8	-11	10	-13	12	15	-14	-1	-0	-3	2	-5	4	7	-6
10	10	11	8	-9	-14	-15	12	13	-2	3	-0	-1	-6	-7	4	5
11	11	-10	9	8	-15	14	-13	12	-3	-2	1	-0	-7	6	-5	4
12	12	13	14	15	8	-9	-10	-11	-4	5	6	7	-0	-1	-2	-3
13	13	-12	15	-14	9	8	11	-10	-5	-4	7	-6	1	-0	3	-2
14	14	-15	-12	13	10	-11	8	9	-6	-7	-4	5	2	-3	-0	1
15	15	14	-13	-12	11	10	-9	8	-7	6	-5	-4	3	2	-1	-0

Fonte: Bilgici (2017)

Definição 43. Para $n \geq 0$, os sedenios de Padovan são definidos por:

$$SP_n = \sum_{s=0}^{15} P_{n+s} e_s.$$

Definição 44. A fórmula de recorrência dos sedenios de Padovan, é dada por:

$$SP_n = SP_{n-2} + SP_{n-3},$$

onde $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$.

Teorema 63. A função geradora dos sedenios de Padovan, SP_n , é descrita por:

$$g(SP_n, x) = \frac{1}{1 - x^2 - x^3} \sum_{s=0}^{15} (P_s + P_{s+1}x + P_{s-1}x^2) e_s.$$

Demonstração. Dada a função:

$$g(SP_n, x) = SP_0 + SP_1x + SP_2x^2 + \dots + SP_nx^n + \dots$$

Realiza-se a multiplicação dessa função por x^2 e x^3 , obtendo:

$$x^2g(SP_n, x) = SP_0x^2 + SP_1x^3 + SP_2x^4 + \dots + SP_{n-2}x^n + \dots$$

$$x^3g(SP_n, x) = SP_0x^3 + SP_1x^4 + SP_2x^5 + \dots + SP_{n-3}x^n + \dots$$

Com isso, pode-se realizar a operação $g(SP_n, x) - x^2g(SP_n, x) - x^3g(SP_n, x)$, resultando:

$$(1 - x^2 - x^3)g(SP_n, x) = SP_0 + SP_1x + (SP_2 - SP_0)x^2 + (SP_3 - SP_1 - SP_0)x^3 + \dots$$

$$(1 - x^2 - x^3)g(SP_n, x) = SP_0 + SP_1x + (SP_2 - SP_0)x^2$$

$$g(SP_n, x) = \frac{1}{(1 - x^2 - x^3)} \sum_{s=0}^{15} (P_s + P_{s+1}x + P_{s-1}x^2)e_s.$$

□

Teorema 64. A fórmula de Binet dos sedenios de Padovan, com $n \in \mathbb{Z}$, é dada por:

$$SP_n = A\alpha_s x_1^n + B\beta_s x_2^n + C\gamma_s x_3^n,$$

em que x_1, x_2, x_3 são as raízes do polinômio característico $x^3 - x - 1 = 0$,

$$A = \frac{(x_2 - 1)(x_3 - 1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, B = \frac{(x_1 - 1)(x_3 - 1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, C = \frac{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)},$$

$$\alpha_s = \sum_{s=0}^{15} x_1^s e_s, \beta_s = \sum_{s=0}^{15} x_2^s e_s, \gamma_s = \sum_{s=0}^{15} x_3^s e_s.$$

Demonstração. Através da fórmula de Binet $SP_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n + \gamma x_3^n$ e da recorrência dos sedenios de Padovan $SP_n = \sum_{s=0}^{15} P_{n+s} e_s$, com os valores iniciais $SP_0 = \sum_{s=0}^{15} P_s e_s$, $SP_1 = \sum_{s=0}^{15} P_{s+1} e_s$ e $SP_2 = \sum_{s=0}^{15} P_{s+2} e_s$, obtêm-se o sistema de equações:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma &= \sum_{s=0}^{15} P_s e_s \\ \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 &= \sum_{s=0}^{15} P_{s+1} e_s \\ \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2 &= \sum_{s=0}^{15} P_{s+2} e_s \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, tem-se que:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\left(\sum_{s=0}^{15} P_{s+2}e_s\right) + (-x_2 - x_3)\left(\sum_{s=0}^{15} P_{s+1}e_s\right) + x_2x_3\left(\sum_{s=0}^{15} P_se_s\right)}{x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3}, \\ \beta &= \frac{\left(\sum_{s=0}^{15} P_{s+2}e_s\right) + (-x_1 - x_3)\left(\sum_{s=0}^{15} P_{s+1}e_s\right) + x_1x_3\left(\sum_{s=0}^{15} P_se_s\right)}{x_2^2 - x_2x_3 - x_1x_2 + x_1x_3}, \\ \gamma &= \frac{\left(\sum_{s=0}^{15} P_{s+2}e_s\right) + (-x_1 - x_2)\left(\sum_{s=0}^{15} P_{s+1}e_s\right) + x_1x_2\left(\sum_{s=0}^{15} P_se_s\right)}{x_3^2 + x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3}.\end{aligned}$$

Utilizando as relações de Girard: $x_1x_2x_3 = 1$, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ e $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -1$, e da fórmula de Binet da SP (Teorema 13), tem-se que:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{(x_2x_2 - x_2 - x_3 + 1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \sum_{s=0}^{15} x_1^s e_s = \frac{(x_2 - 1)(x_3 - 1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \sum_{s=0}^{15} x_1^s e_s = A \sum_{s=0}^{15} x_1^s e_s, \\ \beta &= \frac{(x_1x_3 - x_1 - x_3 + 1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \sum_{s=0}^{15} x_2^s e_s = \frac{(x_1 - 1)(x_3 - 1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \sum_{s=0}^{15} x_2^s e_s = B \sum_{s=0}^{15} x_2^s e_s, \\ \gamma &= \frac{(x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \sum_{s=0}^{15} x_3^s e_s = \frac{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \sum_{s=0}^{15} x_3^s e_s = C \sum_{s=0}^{15} x_3^s e_s.\end{aligned}$$

Definindo $\alpha_s = \sum_{s=0}^{15} x_1^s e_s$, $\beta_s = \sum_{s=0}^{15} x_2^s e_s$ e $\gamma_s = \sum_{s=0}^{15} x_3^s e_s$, pode-se concluir que:

$$\alpha = A\alpha_s, \beta = B\beta_s, \gamma = C\gamma_s.$$

□

A matriz geradora dos sedenios de Padovan, será estudada com base na matriz geradora aprofundada no início desse projeto, em que $n \in \mathbb{N}$:

$$Q^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{n-2} & P_{n-3} & P_{n-4} \\ P_{n-1} & P_{n-2} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-4} & P_{n-5} \end{bmatrix}, \text{ para todo } n \geq 5.$$

Propriedade 19. Para $n \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}$, a matriz geradora dos sedenios de Padovan é dada por:

$$\begin{aligned}Q^n \begin{bmatrix} SP_{-2} & SP_{-3} & SP_{-4} \\ SP_{-1} & SP_{-2} & SP_{-3} \\ SP_{-3} & SP_{-4} & SP_{-5} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} SP_{-2} & SP_{-3} & SP_{-4} \\ SP_{-1} & SP_{-2} & SP_{-3} \\ SP_{-3} & SP_{-4} & SP_{-5} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} SP_{n-2} & SP_{n-3} & SP_{n-4} \\ SP_{n-1} & SP_{n-2} & SP_{n-3} \\ SP_{n-3} & SP_{n-4} & SP_{n-5} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Demonstração. Utilizando o princípio da indução finita, para verificar a igualdade para $n = 5$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 Q^5 \begin{bmatrix} SP_{-2} & SP_{-3} & SP_{-4} \\ SP_{-1} & SP_{-2} & SP_{-3} \\ SP_{-3} & SP_{-4} & SP_{-5} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^5 \begin{bmatrix} SP_{-2} & SP_{-3} & SP_{-4} \\ SP_{-1} & SP_{-2} & SP_{-3} \\ SP_{-3} & SP_{-4} & SP_{-5} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SP_{-2} & SP_{-3} & SP_{-4} \\ SP_{-1} & SP_{-2} & SP_{-3} \\ SP_{-3} & SP_{-4} & SP_{-5} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2SP_{-2} + SP_{-1} + SP_{-3} & 2SP_{-3} + SP_{-2} + SP_{-4} & 2SP_{-4} + SP_{-3} + SP_{-5} \\ 2SP_{-2} + 2SP_{-1} + SP_{-3} & 2SP_{-3} + 2SP_{-2} + SP_{-4} & 2SP_{-4} + 2SP_{-3} + SP_{-5} \\ SP_{-2} + SP_{-1} + SP_{-3} & SP_{-3} + SP_{-2} + SP_{-4} & SP_{-4} + SP_{-3} + SP_{-5} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} SP_3 & SP_2 & SP_1 \\ SP_4 & SP_3 & SP_2 \\ SP_2 & SP_1 & SP_0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Dessa forma, supondo a veracidade para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 Q^k \begin{bmatrix} SP_{-2} & SP_{-3} & SP_{-4} \\ SP_{-1} & SP_{-2} & SP_{-3} \\ SP_{-3} & SP_{-4} & SP_{-5} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} SP_{-2} & SP_{-3} & SP_{-4} \\ SP_{-1} & SP_{-2} & SP_{-3} \\ SP_{-3} & SP_{-4} & SP_{-5} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} SP_{k-2} & SP_{k-3} & SP_{k-4} \\ SP_{k-1} & SP_{k-2} & SP_{k-3} \\ SP_{k-3} & SP_{k-4} & SP_{k-5} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Assim, verifica-se que seja válido para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}
 Q^{k+1} \begin{bmatrix} SP_{-2} & SP_{-3} & SP_{-4} \\ SP_{-1} & SP_{-2} & SP_{-3} \\ SP_{-3} & SP_{-4} & SP_{-5} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SP_{-2} & SP_{-3} & SP_{-4} \\ SP_{-1} & SP_{-2} & SP_{-3} \\ SP_{-3} & SP_{-4} & SP_{-5} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P_{k-2} & P_{k-3} & P_{k-4} \\ P_{k-1} & P_{k-2} & P_{k-3} \\ P_{k-3} & P_{k-4} & P_{k-5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SP_{-2} & SP_{-3} & SP_{-4} \\ SP_{-1} & SP_{-2} & SP_{-3} \\ SP_{-3} & SP_{-4} & SP_{-5} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P_{k-1} & P_{k-2} & P_k \\ P_k & P_{k-1} & P_{k+1} \\ P_{k-2} & P_{k-3} & P_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SP_{-2} & SP_{-3} & SP_{-4} \\ SP_{-1} & SP_{-2} & SP_{-3} \\ SP_{-3} & SP_{-4} & SP_{-5} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} SP_{k-1} & SP_{k-2} & SP_k \\ SP_k & SP_{k-1} & SP_{k+1} \\ SP_{k-2} & SP_{k-3} & SP_{k-1} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Vale salientar que pode-se utilizar qualquer uma das seis matrizes geradoras válidas de Padovan, alterando a matriz de bloco a qual está sendo multiplicada. $\square$

Doravante, serão discutidas algumas propriedades referentes aos sedenios de Padovan.

Teorema 65. *A soma dos n primeiros termos sedenios de Padovan é expressa por:*

$$\sum_{m=1}^n SP_m = SP_n + SP_{n+1} + SP_{n+2} - \left(\sum_{s=0}^{15} (P_s + P_{s+1} + P_{s+2}) e_s \right).$$

Demonstração. Através da Definição 44, obtêm-se a relação:

$$SP_{n-2} = SP_n - SP_{n-3}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} SP_1 &= SP_3 - SP_0 \\ SP_2 &= SP_4 - SP_1 \\ SP_3 &= SP_5 - SP_2 \\ SP_4 &= SP_6 - SP_3 \\ SP_5 &= SP_7 - SP_4 \\ &\vdots \\ SP_{n-3} &= SP_{n-1} - SP_{n-4} \\ SP_{n-2} &= SP_n - SP_{n-3} \\ SP_{n-1} &= SP_{n+1} - SP_{n-2} \\ SP_n &= SP_{n+2} - SP_{n-1}. \end{aligned}$$

Através de cancelamentos sucessivos, é fácil ver que:

$$\sum_{m=1}^n SP_m = SP_n + SP_{n+1} + SP_{n+2} - SP_0 - SP_1 - SP_2.$$

Com isso, de posse da Definição 43, tem-se que:

$$\sum_{m=1}^n SP_m = SP_n + SP_{n+1} + SP_{n+2} - \left(\sum_{s=0}^{15} (P_s + P_{s+1} + P_{s+2}) e_s \right).$$

□

Teorema 66. *A soma dos n primeiros termos pares dos sedenios de Padovan é dado por:*

$$\sum_{m=1}^n SP_{2m} = SP_{2n+3} - \left(\sum_{s=0}^{15} P_{s+3} e_s \right).$$

Demonstração. De posse da Definição 44, tem-se $SP_n = SP_{n-2} + SP_{n-3} \Leftrightarrow SP_{n-3} = SP_n - SP_{n-2}$. Assim, de modo análogo à demonstração anterior, é fácil ver que:

$$\begin{aligned} SP_2 &= SP_5 - SP_3 \\ SP_4 &= SP_7 - SP_5 \\ &\vdots \\ SP_{2n-2} &= SP_{2n+1} - SP_{2n-1} \\ SP_{2n} &= SP_{2n+3} - SP_{2n+1}. \end{aligned}$$

Com isso, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n SP_{2m} &= SP_{2n+3} - SP_3 \\ &= SP_{2n} = SP_{2n+3} - \left(\sum_{s=0}^{15} P_{s+3} e_s \right). \end{aligned}$$

□

Teorema 67. *A soma dos n primeiros termos ímpares dos sedenios de Padovan, são expressos por:*

$$\sum_{m=0}^n SP_{2m+1} = SP_{2n+4} - \left(\sum_{s=0}^{15} P_{s+2} e_s \right).$$

Demonstração. Para demonstrar tal teorema, considera-se a relação $SP_{n-3} = SP_n - SP_{n-2}$ e os seus respectivos termos ímpares. Assim, realiza-se a soma desses termos e posteriormente os cancelamentos com índice $2n$. □

Doravante, será analisado o comportamento dos termos com índices inteiros não positivos dos sedenios de Padovan.

Definição 45. *Para todo $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, a fórmula de recorrência dos sedenios de Padovan para índice inteiro não positivo, é dada por:*

$$SP_{-n} = SP_{-n+3} - SP_{-n+1}.$$

Definição 46. *Para todo $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, o sedenios de Padovan, para índice inteiro não positivo, é definido pela equação:*

$$SP_{-n} = \sum_{s=0}^{15} P_{-n+s} e_s.$$

Propriedade 20. *Os sedenios de Padovan, possuem a sua função geradora para índice inteiro não positivo expressa por:*

$$g(SP_{-n}, x) = \frac{-\left(\sum_{s=0}^{15} P_s e_s\right) - \left(\sum_{s=0}^{15} (P_s + P_{s-1}) e_s\right) x - \left(\sum_{s=0}^{15} (P_{s-2} + P_{s-1}) e_s\right) x^2}{x^3 - x - 1}.$$

Demonstração. Realizando a operação multiplicativa da função por x e x^3 , tem-se que:

$$\begin{aligned} g(SP_{-n}, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} SP_{-n}x^n = SP_0 + SP_{-1}x + SP_{-2}x^2 + \dots + SP_{-n}x^n + \dots \\ xg(SP_{-n}, x) &= SP_0x + SP_{-1}x^2 + SP_{-2}x^3 + \dots + SP_{-n-1}x^n + \dots \\ x^3g(SP_{-n}, x) &= SP_0x^3 + SP_{-1}x^4 + SP_{-2}x^5 + \dots + SP_{-n-3}x^n + \dots \end{aligned}$$

Baseado na equação $x^3g(SP_{-n}, x) - (xg(SP_{-n}, x) + g(SP_{-n}, x))$, tem-se que:

$$\begin{aligned} (x^3 - x - 1)g(SP_{-n}, x) &= -SP_0 - (SP_0 + SP_{-1})x - (SP_{-2} + SP_{-1})x^2 \\ &\quad + (SP_0 - SP_{-2} - SP_{-3})x^3 + \dots + (SP_{-n-3} - SP_{-n} - SP_{-n-1})x^n + \dots \end{aligned}$$

Considerando a fórmula de recorrência (Definição 43), pode-se obter:

$$\begin{aligned} (x^3 - x - 1)g(SP_{-n}, x) &= -SP_0 - (SP_0 + SP_{-1})x - (SP_{-2} + SP_{-1})x^2 \\ g(SP_{-n}, x) &= \frac{-\left(\sum_{s=0}^{15} P_s e_s\right) - \left(\sum_{s=0}^{15} (P_s + P_{s-1}) e_s\right)x - \left(\sum_{s=0}^{15} (P_{s-2} + P_{s-1}) e_s\right)x^2}{x^3 - x - 1}. \end{aligned}$$

□

Para analisar a matriz geradora Q dos sedenios de Padovan para índice inteiro não positivo, é calculada a matriz inversa da matriz base Q (ver Seção 3.2.1). Assim, tem-se que:

$$\varrho = Q^{-n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{-n-2} & P_{-n-3} & P_{-n-4} \\ P_{-n-1} & P_{-n-2} & P_{-n-3} \\ P_{-n-3} & P_{-n-4} & P_{-n-5} \end{bmatrix}.$$

Propriedade 21. Para $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, a matriz geradora dos sedenios de Padovan, com índice inteiro não positivo, é dada por:

$$\begin{aligned} \varrho \cdot \begin{bmatrix} SP_{-2} & SP_{-3} & SP_{-4} \\ SP_{-1} & SP_{-2} & SP_{-3} \\ SP_{-3} & SP_{-4} & SP_{-5} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} SP_{-2} & SP_{-3} & SP_{-4} \\ SP_{-1} & SP_{-2} & SP_{-3} \\ SP_{-3} & SP_{-4} & SP_{-5} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} SP_{-n-2} & SP_{-n-3} & SP_{-n-4} \\ SP_{-n-1} & SP_{-n-2} & SP_{-n-3} \\ SP_{-n-3} & SP_{-n-4} & SP_{-n-5} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Demonstração. Por meio do princípio da indução finita, para $n = 1$, verifica-se a igualdade:

$$\begin{aligned}
 \varrho \cdot \begin{bmatrix} SP_{-2} & SP_{-3} & SP_{-4} \\ SP_{-1} & SP_{-2} & SP_{-3} \\ SP_{-3} & SP_{-4} & SP_{-5} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SP_{-2} & SP_{-3} & SP_{-4} \\ SP_{-1} & SP_{-2} & SP_{-3} \\ SP_{-3} & SP_{-4} & SP_{-5} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} SP_{-3} & SP_{-4} & SP_{-5} \\ SP_{-2} & SP_{-3} & SP_{-4} \\ SP_{-1} - SP_{-3} & SP_{-2} - SP_{-4} & SP_{-3} - SP_{-5} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} SP_{-3} & SP_{-4} & SP_{-5} \\ SP_{-2} & SP_{-3} & SP_{-4} \\ SP_{-4} & SP_{-5} & SP_{-6} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Assim, supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \varrho \begin{bmatrix} SP_{-2} & SP_{-3} & SP_{-4} \\ SP_{-1} & SP_{-2} & SP_{-3} \\ SP_{-3} & SP_{-4} & SP_{-5} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} SP_{-2} & SP_{-3} & SP_{-4} \\ SP_{-1} & SP_{-2} & SP_{-3} \\ SP_{-3} & SP_{-4} & SP_{-5} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P_{-n-2} & P_{-n-3} & P_{-n-4} \\ P_{-n-1} & P_{-n-2} & P_{-n-3} \\ P_{-n-3} & P_{-n-4} & P_{-n-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SP_{-2} & SP_{-3} & SP_{-4} \\ SP_{-1} & SP_{-2} & SP_{-3} \\ SP_{-3} & SP_{-4} & SP_{-5} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} SP_{-k-2} & SP_{-k-3} & SP_{-k-4} \\ SP_{-k-1} & SP_{-k-2} & SP_{-k-3} \\ SP_{-k-3} & SP_{-k-4} & SP_{-k-5} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Logo, é analisado que seja válido para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}
 \varrho^{k+1} \begin{bmatrix} SP_{-2} & SP_{-3} & SP_{-4} \\ SP_{-1} & SP_{-2} & SP_{-3} \\ SP_{-3} & SP_{-4} & SP_{-5} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SP_{-2} & SP_{-3} & SP_{-4} \\ SP_{-1} & SP_{-2} & SP_{-3} \\ SP_{-3} & SP_{-4} & SP_{-5} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P_{-k-2} & P_{-k-3} & P_{-k-4} \\ P_{-k-1} & P_{-k-2} & P_{-k-3} \\ P_{-k-3} & P_{-k-4} & P_{-k-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SP_{-2} & SP_{-3} & SP_{-4} \\ SP_{-1} & SP_{-2} & SP_{-3} \\ SP_{-3} & SP_{-4} & SP_{-5} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P_{-k-3} & P_{-k-4} & P_{-k-5} \\ P_{-k-2} & P_{-k-3} & P_{-k-4} \\ P_{-k-4} & P_{-k-5} & P_{-k-6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SP_{-2} & SP_{-3} & SP_{-4} \\ SP_{-1} & SP_{-2} & SP_{-3} \\ SP_{-3} & SP_{-4} & SP_{-5} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} SP_{-k-3} & SP_{-k-4} & SP_{-k-5} \\ SP_{-k-2} & SP_{-k-3} & SP_{-k-4} \\ SP_{-k-4} & SP_{-k-5} & SP_{-k-6} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

□

A seguir serão estudadas algumas propriedades inerentes aos sedenios de Padovan com índice inteiro não positivo.

Teorema 68. *A soma dos n primeiros termos com índice inteiro não positivo dos sedenios de Padovan, são expressos por:*

$$\sum_{m=1}^n SP_{-m} = SP_{-n+3} + SP_{-n+2} + \left(\sum_{s=0}^{15} (P_{s+1} + P_{s+2}) e_s \right).$$

Demonstração. Utilizando a relação de recorrência dos sedenios de Padovan, com $n \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$SP_{-n} = SP_{-n+3} - SP_{-n+1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} SP_{-1} &= SP_2 - SP_0 \\ SP_{-2} &= SP_1 - SP_{-1} \\ SP_{-3} &= SP_0 - SP_{-2} \\ SP_{-4} &= SP_{-1} - SP_{-3} \\ &\vdots \\ SP_{-n-3} &= SP_{-n} - SP_{-n-2} \\ SP_{-n-2} &= SP_{-n+1} - SP_{-n-1} \\ SP_{-n-1} &= SP_{-n+2} - SP_{-n} \\ SP_{-n} &= SP_{-n+3} - SP_{-n+1}. \end{aligned}$$

Através de cancelamentos sucessivos, obtêm-se:

$$\sum_{m=1}^n SP_{-m} = SP_{-n+3} + SP_{-n+2} + SP_2 + SP_1.$$

Considerando os valores iniciais através da Recorrência 43, conclui-se que:

$$\sum_{m=1}^n SP_{-m} = SP_{-n+3} + SP_{-n+2} + \left(\sum_{s=0}^{15} (P_{s+1} + P_{s+2}) e_s \right).$$

□

Teorema 69. *A soma dos n primeiros termos pares, com índice inteiro não positivo, dos sedenios de Padovan é:*

$$\sum_{m=1}^n SP_{-2m} = SP_{2n+3} - \left(\sum_{s=0}^{15} P_{s+1} e_s \right).$$

Demonstração. Utilizando a recorrência $SP_{-n} = SP_{-n+3} - SP_{-n+1}$, observa-se que

$$\begin{aligned} SP_{-2} &= SP_1 - SP_{-1} \\ SP_{-4} &= SP_{-1} - SP_{-3} \\ SP_{-6} &= SP_{-3} - SP_{-5} \\ &\vdots \\ SP_{-2n-2} &= SP_{-2n+1} - SP_{-2n-1} \\ SP_{-2n} &= SP_{-2n+3} - SP_{-2n+1}. \end{aligned}$$

Com isso, tem-se que:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n SP_{-2m} &= SP_{-2n+3} + SP_1 \\ &= SP_{-2n} = SP_{-2n+3} + \left(\sum_{s=0}^{15} P_{s+1} e_s \right). \end{aligned}$$

□

De modo análogo como realizado para a demonstração dos teoremas anteriores, pode-se facilmente validar também este teorema, realizando os cancelamentos sucessivos das operações algébricas.

Teorema 70. *A soma dos n primeiros termos ímpares, com índice inteiro não positivo, dos sedenios de Padovan, são expressos por:*

$$\sum_{m=1}^n SP_{-2m-1} = SP_{-2n+2} + \left(\sum_{s=0}^{15} P_{s+2} e_s \right).$$

Para um melhor entendimento da análise investigativa da história da SP, foi realizada a construção do campo epistêmico-matemático do assunto abordado nesta pesquisa (ver Apêndice E).

4 UMA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA: O ESTUDO DO MODELO DE PADOVAN NO CURSO DE LICENCIATURA

Aplicada no curso de Licenciatura em Matemática do IFCE, *campus* Fortaleza, na disciplina de HM, este trabalho realizou o processo evolutivo matemático da SP, através de uma transposição didática. Contudo, desenvolveu-se um estudo e aprofundamento do campo epistêmico-matemático, explorando a generalização e complexificação da SP, diante de uma abordagem epistemológica, cognitiva e didática no campo de formação inicial de professores de Matemática.

Doravante, serão discutidas algumas situações didáticas compostas por situações-problema, fundamentadas na TSD, analisando a metodologia empregada e as suas concepções. Vale ressaltar, que serão analisados os possíveis comportamentos e soluções manifestados pelos discentes durante as discussões das situações-problema, caracterizando assim a fase de concepção e análise *a priori* da ED.

4.1 Concepções das Situações Didáticas

Na fase anterior da ED, análise prévia, a generalização e complexificação da SP foi desenvolvida no campo epistêmico-matemático fundamentando a concepção das situações-problema. Durante esta etapa da ED, destaca-se a concepção das situações didáticas onde as variáveis são definidas de acordo com uma perspectiva microdidática para que haja conexão entre os processos matemáticos sobre a SP com as situações-problema propostas. Uma situação-problema é uma questão discursiva, porém com enunciados claros e objetivos, em que o objetivo principal é utilizar de forma implícita os objetivos matemáticos que visam ser alcançados por meio da resolução do problema (ALMOULOU, 2016). Todavia, ressaltar-se a importância de depois de desenvolvido o campo epistêmico-matemático, referente ao processo evolutivo matemático da SP, com foco na generalização e complexificação, é necessário transformá-lo em conteúdo a ser ensinado, visto que os conteúdos discutidos no capítulo anterior, são abordados na licenciatura de Matemática Pura.

Diante disso, a concepção da situação didática deste trabalho, consta no processo de generalização e complexificação da SP como um conteúdo a ser ensinado em sala de aula, formulando uma hipótese didática em que refere-se ao desenvolvimento do processo

indutivo do estudante para a generalização e complexificação da SP, com o viés de investigar e explorar os teoremas e propriedades desenvolvidos de forma inédita nesta pesquisa, diante do contexto de ensino de HM e fundamentada na metodologia de pesquisa da ED em associação com uma metodologia de ensino que é a TSD. A escolha da disciplina de HM foi bastante relevante, visto que esta associa-se à epistemologia dos conceitos matemáticos empregados na pesquisa, podendo assim enfatizar a evolução algébrica da SP.

Revisitando os conteúdos matemáticos desenvolvidos no campo epistêmico-matemático, tem-se: relações recorrentes de Padovan, generalização do Modelo de Padovan, sequência $(s_1, s_2, \dots, s_z)$ -Z-dovan, Padovan Afim, relações recorrentes n -dimensionais, números gaussianos, duais, quatérnios, octônios e sedenios. Diante disso, foram selecionados os seguintes conteúdos: fórmula de Binet, forma matricial para os números inteiros, Padovan Afim, relações recorrentes bidimensionais, números gaussianos e quatérnios. Assim, foram elaboradas seis situações-problema inerentes à esses assuntos, norteando os estudantes para o processo de generalização e complexificação da SP.

Ressalta-se ainda que esses conteúdos foram selecionados por exigirem pouco conhecimento matemático dos estudantes, pois as suas propriedades e teoremas são validados por meio de passos indutivos. Na próxima seção, análise *a priori*, são propostas situações-problema e analisado os possíveis comportamentos dos discentes.

4.2 Análise *a Priori* das Situações Didáticas

De acordo com a ED, nesta etapa são descritas as escolhas e definidas as variáveis para direcionar um plano de ação atendendo os objetivos da pesquisa. Partindo de uma ação descritiva e preditiva visando prever o comportamento dos discentes em cada fase da TSD elaboradas e, havendo um levantamento de algumas hipóteses didáticas relacionadas às situações-problema, caracterizando assim uma análise preliminar.

Com o viés na exploração da generalização e complexificação da sequência, foram elaboradas seis situações-problema, referendadas nas definições estabelecidas anteriormente. A escolha dos conteúdos foi realizada com base nos conhecimentos prévios dos estudantes, segundo as disciplinas apuradas como pré-requisito para cursar HM no curso de Licenciatura em Matemática do IFCE. A quantidade das situações-problema propostas, deu-se após um planejamento de aula, visando atingir apenas uma parte do semestre.

Assim, iniciando com o processo de construção dessa sequência, seguindo com alguns teoremas e propriedades, será investigado o processo de generalização e complexificação, relacionando com outros conteúdos de matemática.

Situação-problema (1): *A SP a qual, o nome foi atribuído ao arquiteto italiano Richard Padovan (1935 -), nascido na cidade de Pádua (STEWART, 1996), é uma espécie*

de parente da SF, linear, recorrente, aritmética, e de números inteiros. Sendo a SP, uma sequência de terceira ordem. Gérard Cordonnier (1907 – 1977) também desenvolveu alguns estudos acerca destes números, mais especificamente sobre o número plástico (número radiante), com isso a sequência também é conhecida como sequência de Cordonnier.

Definição 47. Esta sequência possui a seguinte relação de recorrência com $n \in \mathbb{N}$:

$$P_n = P_{n-2} + P_{n-3},$$

$n \geq 3$, onde $\{P_n\}$ é o n -ésimo termo da sequência e os primeiros termos são: $P_0 = P_1 = P_2 = 1$.

Assim, os primeiros dez termos dessa sequência são dados por: 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9.

Seja P_n a SP e ψ a constante plástica definida como (SPINADEL; BUITRAGO, 2009):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} \approx \psi \approx 1,32.$$

Voet e Schoonjans (2012) descreveram o polinômio característico dessa sequência, como sendo um polinômio de terceiro grau, descrita por: $x^3 - x - 1 = 0$, em que possui duas raízes complexas e conjugadas, e uma raiz real $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}}} \approx 1,32$.

Com base nisso, dado o polinômio característico da sequência e sendo ψ a raiz real e α, β as complexas conjugadas, respectivamente, podemos então escrever uma função baseado nesses dados, em que seja possível encontrar os termos dessa sequência sem utilizar a recorrência? (Fórmula de Binet).

Situação de ação: nesta primeira fase, os estudantes deverão ter em mente a forma geral da fórmula de Binet, dada por: $f(n) = A_1x_1^n + A_2x_2^n + \dots + A_rx_r^n$, em que $A_1, A_2, \dots, A_r$ são os coeficientes e $x_1, x_2, \dots, x_r$ as raízes do polinômio característico da sequência (WITFORD, 1977). Assim, será possível estabelecer a fórmula variante de Binet para a SP.

Situação de formulação: a partir da fórmula obtida na fase anterior, os estudantes deverão buscar os valores dos coeficientes da fórmula de Binet (α, β, ψ) . Para isso, montarão o sistema de equações lineares, inserindo os valores iniciais da sequência, definidos na situação-problema.

Situação de validação: os estudantes deverão resolver o sistema de equação linear com três variáveis, obtendo assim os valores dos coeficientes. Além disso, já conhecendo os valores das três raízes da equação característica, é possível que sejam substituídos valores para a variável n , encontrando os termos da sequência sem utilizar a recorrência.

Situação de institucionalização: retomando o domínio da situação, o docente deverá revelar aos estudantes o objetivo da atividade, sendo portanto, a determinação da fórmula de Binet da SP. Por fim, o docente deverá avaliar as respostas obtidas, esperando que

encontrem a fórmula variante de Binet em função das raízes (α, β, ψ) , sendo a última a única solução real, denominada de número plástico. Contudo, $P(n) = A\psi^n + B\alpha^n + C\beta^n$, em que $A = \frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{(\psi-\alpha)(\psi-\beta)}$, $B = \frac{(\psi-1)(\beta-1)}{(\alpha-\psi)(\alpha-\beta)}$, $C = \frac{(\psi-1)(\alpha-1)}{(\beta-\psi)(\beta-\alpha)}$.

Situação-problema (2): *Uma forma de obter qualquer elemento de uma sequência linear e recursiva é através da matriz geradora (FALCON; PLAZA, 2007). Esta técnica foi aplicada para a SF, e nesta atividade a mesma ideia será aplicada para os números de Padovan. A SP possui uma matriz Q de ordem 3, a qual quando elevada a n -ésima potência, pode-se obter os termos desta sem o cálculo da recursividade.*

A matriz geradora da SP, é dada por (SOKHUMA, 2013b):

$$\text{Para } Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ tem-se } Q^n = \begin{bmatrix} P_{n-2} & P_{n-3} & P_{n-4} \\ P_{n-1} & P_{n-2} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-4} & P_{n-5} \end{bmatrix}, \text{ para todo } n \geq 5.$$

Com base nisso, encontre a matriz geradora da SP para os termos com índice inteiro não positivo da sequência.

Situação de ação: Realizando procedimentos mais imediatos, para obter a resolução dessa situação-problema proposta, os estudantes devem então calcular alguns termos com base na recorrência $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$, $n \geq 3$ abordada na atividade anterior. Assim, devem substituir o valor de n com números menores do que 3, obtendo os seguintes termos da sequência $P_{-1} = 0, P_{-2} = 1, P_{-3} = P_{-4} = 0, P_{-5} = 1, P_{-6} = -1, P_{-7} = 1, P_{-8} = 0, P_{-9} = -1, P_{-10} = 2$.

Situação de formulação: Utilizando um esquema de natureza teórica, contendo um raciocínio mais elaborado, os estudantes tomam como base, conceitos matemáticos primordiais como $QQ^{-1} = I$, calculando a matriz inversa ($Q^{-1} = \varrho$), e obtendo:

$$\text{Para } \varrho = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ tem-se } \varrho^n = \begin{bmatrix} P_{-n-2} & P_{-n-3} & P_{-n-4} \\ P_{-n-1} & P_{-n-2} & P_{-n-3} \\ P_{-n-3} & P_{-n-4} & P_{-n-5} \end{bmatrix}, n > 0.$$

Situação de validação: Formalizando a linguagem utilizada nas etapas anteriores da TSD e, de posse da matriz geradora, é realizada a devida demonstração utilizando o princípio da indução finita. Observa-se um certo cuidado ao realizar essa demonstração, visto que a matriz está elevada à potência negativa, podendo o discente confundir-se em algum passo do processo indutivo.

Situação de institucionalização: Na etapa final, o docente mostra aos estudantes, a intenção de encontrar uma generalização da matriz geradora para os números de índice inteiro não positivo, realizando uma extensão dessa sequência para os índices inteiros não positivos. Vale salientar que esse assunto não foi encontrado até então na área de Matemática Pura, fazendo com que os alunos realizem o processo de evolução da sequência, apresentando um certo grau de ineditismo.

Situação-problema (3): Baseado em trabalhos de Gulec e Taskara (2012), Cıvıv e Türkmen (2008) e, de acordo com a Tabela 9, são representados os termos da sequência (s_1, s_2) -Padovan. Com isso, verifique se existe alguma relação dessa tabela com os termos $(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, \dots)$. Caso exista, explique-a detalhadamente e determine alguns termos dessa sequência.

Tabela 9 – Termos da sequência (s_1, s_2) -Padovan.

n	B_n
0	1
1	1
2	1
3	$s_1 + s_2$
4	$s_1 + s_2$
5	$s_1(s_1 + s_2) + s_2$

Fonte: Elaborado pela autora

É possível obtermos uma matriz geradora para esta sequência estudada? Se sim, demonstre-a (VIEIRA; ALVES; CATARINO, no prelo b).

Situação de ação: Com base na Tabela 9, é esperado que os estudantes relacionem os termos dessa sequência apresentada com a SP, obtendo a relação $B_n = s_1 B_{n-2} + s_2 B_{n-3}$, $n \geq 3$, com $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$ e valores iniciais $B_0 = B_1 = B_2 = 1$, sendo possível generalizar os coeficientes da SP.

Situação de formulação: a matriz geradora deve ser obtida nesse momento, tendo como base as matrizes estudadas anteriormente por Seenukul et al. (2015), Sokhuma (2013b). Logo, tem-se que o operador é construído na primeira coluna da matriz, carregando consigo os coeficientes da fórmula de recorrência da sequência. As demais linhas e colunas são mantidas e, é necessária a inserção de um vetor com os valores de inicialização da sequência, sendo portanto, multiplicado à esquerda da matriz. Por fim, a seguinte matriz

$$\text{deverá ser obtida: } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 \\ s_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_3 & B_2 & B_1 \end{bmatrix}. \text{ Ao elevar à } n\text{-ésima potência,}$$

$$\text{tem-se que: } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 \\ s_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} B_{n+2} & B_{n+1} & B_n \end{bmatrix}.$$

Situação de validação: a demonstração deverá ocorrer por meio de indução matemática da matriz geradora, validando o teorema matemático estudado nessa atividade proposta.

Situação de institucionalização: durante essa fase, o docente apresentará o processo

de construção de uma matriz geradora de uma sequência linear e recorrente, ressaltando a importância do vetor de inicialização. Com base na perspectiva da TSD, é então apresentado o modelo de generalização da SP, visando a compreensão dos estudantes em relação aos conteúdos abordados.

Situação-problema (4): Segundo Harman (1981), podemos estabelecer a relação $a + bi$, onde a e b são termos de uma determinada sequência e, i a unidade imaginária, em que $i^2 = -1$. Assim, de maneira semelhante como realizado nos trabalhos de Vieira, Alves e Catarino (2019b), Oliveira, Alves e Paiva (2017) para outras sequências numéricas, podemos aplicá-la para a SP, utilizando a relação $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}i$, com $n \in \mathbb{N}$. Assim, com base na recorrência unidimensional de Padovan, podemos então estabelecer uma relação bidimensional desta sequência: $P(n, m) = P(n-2, m) + P(n-3, m)$ e $P(n, m) = P(n, m-2) + P(n, m-3)$.

Logo, utilizando os seguintes valores iniciais definidos: $P(0, 0) = 1, P(1, 0) = 1, P(2, 0) = 1, P(0, 1) = 1 + i, P(0, 2) = 1 + i, P(1, 1) = 1 + i, P(1, 2) = 1 + i, P(2, 1) = 1 + i, P(2, 2) = 1 + i$ em que $P(0) = P(1) = P(2) = 1, P(-1) = 0$, foi possível obter as propriedades $P(n, 0) = P(n)$ e $P(0, m) = P(m) + P(m-1)i$. Com base nisso, é possível estabelecer uma relação para os números na forma $P(n, m)$, em que os dois inteiros, $n, m \in \mathbb{N}$? Demonstre-a.

Situação de ação: a partir das duas propriedades estabelecidas $P(n, 0) = P(n)$ e $P(0, m) = P(m) + P(m-1)i$, os estudantes devem perceber para a primeira propriedade, o valor de m foi fixado como 0, e n foi variado. Na segunda propriedade o valor de n foi fixado como 0 e m foi variado. Assim, devem seguir o mesmo raciocínio, fixando para o valor 1. Logo: Fixando $m = 1$ e variando $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Segue que:

$$P(n, 1) = P(n-2, 1) + P(n-3, 1) :$$

$$P(3, 1) = P(1, 1) + P(0, 1) = 2 + 2i = P(3) + P(3)i;$$

$$P(4, 1) = P(2, 1) + P(1, 1) = 2 + 2i = P(4) + P(4)i;$$

$$P(5, 1) = P(3, 1) + P(2, 1) = 3 + 3i = P(5) + P(5)i;$$

$$P(6, 1) = P(4, 1) + P(3, 1) = 4 + 4i = P(6) + P(6)i;$$

$$\vdots$$

$$P(n-3, 1) = P(n-5, 1) + P(n-6, 1) = P(n-3) + P(n-3)i;$$

$$P(n-2, 1) = P(n-4, 1) + P(n-5, 1) = P(n-2) + P(n-2)i;$$

$$P(n-1, 1) = P(n-3, 1) + P(n-4, 1) = P(n-1) + P(n-1)i;$$

$$P(n, 1) = P(n-2, 1) + P(n-3, 1)$$

$$= P(n-2) + P(n-2)i + P(n-3) + P(n-3)i$$

$$= P(n) + P(n)i.$$

Obtendo $P(n, 1) = P(n) + P(n)i$.

Fixando $n = 1$ e variando $m = 0, 1, 2, 3, \dots$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 P(1, m) &= P(1, m-2) + P(1, m-3) : \\
 P(1, 3) &= P(1, 1) + P(1, 0) = 2 + i = P(3) + P(2)i; \\
 P(1, 4) &= P(1, 2) + P(1, 1) = 2 + 2i = P(4) + P(3)i; \\
 P(1, 5) &= P(1, 3) + P(1, 2) = 3 + 2i = P(5) + P(4)i; \\
 P(1, 6) &= P(1, 4) + P(1, 3) = 4 + 3i = P(6) + P(5)i; \\
 &\vdots \\
 P(1, m-3) &= P(1, m-5) + P(1, m-6) = P(m-3) + P(m-4)i; \\
 P(1, m-2) &= P(1, m-4) + P(1, m-5) = P(m-2) + P(m-3)i; \\
 P(1, m-1) &= P(1, m-3) + P(1, m-4) = P(m-1) + P(m-2)i; \\
 P(1, m) &= P(1, m-2) + P(1, m-3) \\
 &= P(m-2) + P(m-3)i + P(m-3) + P(m-4)i \\
 &= P(m) + P(m-1)i.
 \end{aligned}$$

Obtendo a propriedade $P(1, m) = P(m) + P(m-1)i$.

Situação de formulação: Com base nas propriedades fornecidas, e nas calculadas, os estudantes deverão perceber, de modo intuitivo, que para os dois inteiros, $n, m \in \mathbb{N}$, os números na forma $P(n, m)$ formam a relação bidimensional: $P(n, m) = (P(n)P(m)) + (P(n)P(m-1))i$.

Situação de validação: a partir da relação bidimensional generalizada dos números de Padovan, é possível validar esta propriedade por meio segundo princípio da indução finita sobre n ou m e fixando o valor do número natural.

Situação de institucionalização: é o momento em que o docente verifica as resoluções dos estudantes e, revela o início do processo de complexificação da SP, obtendo as relações bidimensionais destes números, a partir da inserção de uma unidade imaginária.

Situação-problema (5): Com base nos trabalhos de Pethe e Horadam (1986), Berzsenyi (1977), em que é realizada uma representação complexa dos números de Fibonacci, temos então uma sequência, definida por Tasci (2018a) como números gaussianos de Padovan, com os valores iniciais $GP_0 = 1, GP_1 = 1 + i, GP_2 = 1 + i, n \geq 3$ e $n \in \mathbb{N}$. Assim, tem-se que a sua fórmula de recorrência é dada por: $GP_n = P_n + P_{n-1}i$, sendo descritos na forma: $GP_n = GP_{n-2} + GP_{n-3}$.

Tasci (2018a) apresenta ainda as matrizes para os números gaussianos de Padovan, como sendo $Q^n U = M^n$, em que:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1+i & 1+i & 1 \\ 1+i & 1 & i \\ 1 & i & 1 \end{bmatrix} \text{ e } M^n = \begin{bmatrix} GP_{n+2} & GP_{n+1} & GP_n \\ GP_{n+1} & GP_n & GP_{n-1} \\ GP_n & GP_{n-1} & GP_{n-2} \end{bmatrix}.$$

Diante disso, encontre a matriz geradora dos gaussianos de Padovan, para índices inteiros não positivos. Demonstre.

Situação de ação: com base na recorrência dos gaussianos de Padovan ($GP_n = GP_{n-2} + GP_{n-3}$) e os seus valores iniciais $GP_0 = 1, GP_1 = 1 + i, GP_2 = 1 + i$, os estudantes deverão obter os termos com índice inteiro não positivos, podendo ainda estabelecer uma nova fórmula de recorrência para tal comportamento.

Situação de formulação: tendo em vista a matriz geradora Q , para o termos positivos dessa sequência, os estudantes deverão calcular a inversa desta matriz, mantendo o formato da matriz U . É interessante utilizar a propriedade $QQ^{-1} = I$, onde I é a matriz identidade. Com isso, ao multiplicar a matriz inversa de Q pela matriz U , será obtida uma nova matriz M com os respectivos valores dos números gaussianos de Padovan com índice inteiro não positivo. Logo: $Q^{-1}U = M^{-n}$.

$$Q^{-1} = Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1+i & 1+i & 1 \\ 1+i & 1 & i \\ 1 & i & 1 \end{bmatrix} \text{ e } M^{-n} = \begin{bmatrix} GP_{-n+2} & GP_{-n+1} & GP_{-n} \\ GP_{-n+1} & GP_{-n} & GP_{-n-1} \\ GP_{-n} & GP_{-n-1} & GP_{-n-2} \end{bmatrix},$$

com $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$.

Situação de validação: a demonstração desta atividade, deverá proceder por meio do princípio da indução finita, validando assim o teorema obtido.

Situação de institucionalização: após as resoluções dos estudantes e a conferência dessas por parte do docente, é então revelada a intenção da atividade. Assim, trata-se dos números gaussianos de Padovan, para índices inteiros não positivos, generalizando essa sequência para os números inteiros, dando assim, continuidade ao processo de complexificação desta sequência.

Situação-problema (6): *Um quaternion é dado por uma extensão dos números complexos, desenvolvidos por William Rowan Hamilton (1805-1865), em que possui duas estruturas quaterniônicas, sendo elas: os quatérnios em $\mathbb{R}$, possuindo componentes reais, e os quatérnios complexos (biquatérnios) em $\mathbb{C}$, possuindo variáveis complexas. Assim, os quatérnios são compreendidos como somas formais de escalares com vetores usuais do espaço tridimensional, existindo quatro dimensões (OLIVEIRA, 2018).*

Contudo, baseado nos trabalhos de Tasci (2018b), Diskaya e Menken (2019), tem-se que um quaternion de Padovan é definido, com $n \geq 0, n \in \mathbb{N}, i^2 = j^2 = k^2 = -1$, pela equação:

$$QP_n = P_n + iP_{n+1} + jP_{n+2} + kP_{n+3}.$$

Assim, a sua fórmula de recorrência, com os valores iniciais $QP_0 = 1 + i + j + 2k, QP_1 = 1 + i + 2j + 2k, QP_2 = 1 + 2i + 2j + 3k$, é definida por:

$$QP_n = QP_{n-2} + QP_{n-3}.$$

À vista disso, utiliza-se a matriz geradora dos quatérnios de Padovan, através da matriz, com $n \in \mathbb{N}$: $Q^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{n-2} & P_{n-1} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-2} & P_{n-4} \\ P_{n-4} & P_{n-3} & P_{n-5} \end{bmatrix}$, para todo $n \geq 5$.

Logo, para $n \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}$, temos que a matriz geradora do quaternion de Padovan é dada por (TASCI, 2018b):

$$Q^n \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} QP_{n+2} & QP_{n+1} & QP_n \\ QP_{n+1} & QP_n & QP_{n-1} \\ QP_n & QP_{n-1} & QP_{n-2} \end{bmatrix}.$$

Diante disso, encontre a matriz geradora dos quatérnios de Padovan, para índices inteiros não positivos. Demonstre.

Situação de ação: considerando a fórmula de recorrência para a obtenção dos quatérnios de Padovan positivos, os estudantes deverão calcular os termos para os números inteiros não positivos, com índice inteiro não positivos. Assim, deverão utilizar a recorrência $QP_n = QP_{n-2} + QP_{n-3}$ e os seus respectivos termos iniciais $QP_0 = 1 + i + j + 2k$, $QP_1 = 1 + i + 2j + 2k$, $QP_2 = 1 + 2i + 2j + 3k$.

Situação de formulação: visando obter a matriz geradora dos quatérnios de Padovan para índices inteiros não positivos, é necessário que seja calculada a inversa da matriz geradora Q desses números, fornecida na questão. Obtendo assim:

$$\varrho = Q^{-n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{-n-2} & P_{-n-1} & P_{-n-3} \\ P_{-n-3} & P_{-n-2} & P_{-n-4} \\ P_{-n-4} & P_{-n-3} & P_{-n-5} \end{bmatrix}.$$

Com isso, ao obter os termos desta sequência estimada na questão e, calculando a inversa dessa matriz, tem-se que para $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, a matriz geradora dos quatérnios de Padovan, com índice inteiro não positivo, é dada por:

$$\begin{aligned} \varrho \cdot \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} QP_{-n+2} & QP_{-n+1} & QP_{-n} \\ QP_{-n+1} & QP_{-n} & QP_{-n-1} \\ QP_{-n} & QP_{-n-1} & QP_{-n-2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Situação de validação: a veracidade ocorrerá por meio do princípio da indução finita, demonstrando a forma matricial para os números inteiros não positivos.

Situação de institucionalização: o docente deverá verificar as resoluções obtidas, apresentando aos estudantes a forma matricial dos quatérnios de Padovan, para índices

inteiros não positivos, generalizando essa sequência quaterniônica para os números inteiros. Com isso, é finalizado o processo de complexificação desta sequência.

4.3 Experimentação

A fase da experimentação ocorreu no IFCE, *campus* Fortaleza, no curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de HM obrigatória para o sexto semestre, em 2019.2 e 2020.1, com os oito estudantes matriculados nos referidos semestres. Esta pesquisa possui o parecer aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) (Anexo B), sendo então disponibilizado o TCLE (Apêndice B) assinado pelos alunos participantes desta pesquisa.

Todavia, a aplicação aconteceu durante duas semanas com cinco sessões didáticas, em ambos os semestres, com durações de duas horas cada aula, realizadas através de situações didáticas fundamentadas na TSD, em ambos os semestres. As situações-problema propostas foram desenvolvidas por meio de listas de exercícios, onde posteriormente ocorreram discussões em grupos formados, visando a elaboração de estratégias de soluções descritas no quadro branco e/ou papel.

No primeiro dia, foi apresentada a SP através dos fatos históricos e evolutivos desta sequência, ressaltando o seu viés epistemológico-matemático. Nos demais dias, foram discutidas as seis situações-problema propostas, objetivando analisar a evolução deste objeto matemático em estudo, com foco no processo de generalização e complexificação. Para a coleta de dados, foram realizados alguns procedimentos, tais como: registros fotográficos durante as produções, gravação de áudio dos depoimentos dos discentes.

No capítulo a seguir, os dados e resultados coletados durante a execução da TSD serão apresentados e discutidos, baseados nas produções mais relevantes desta pesquisa.

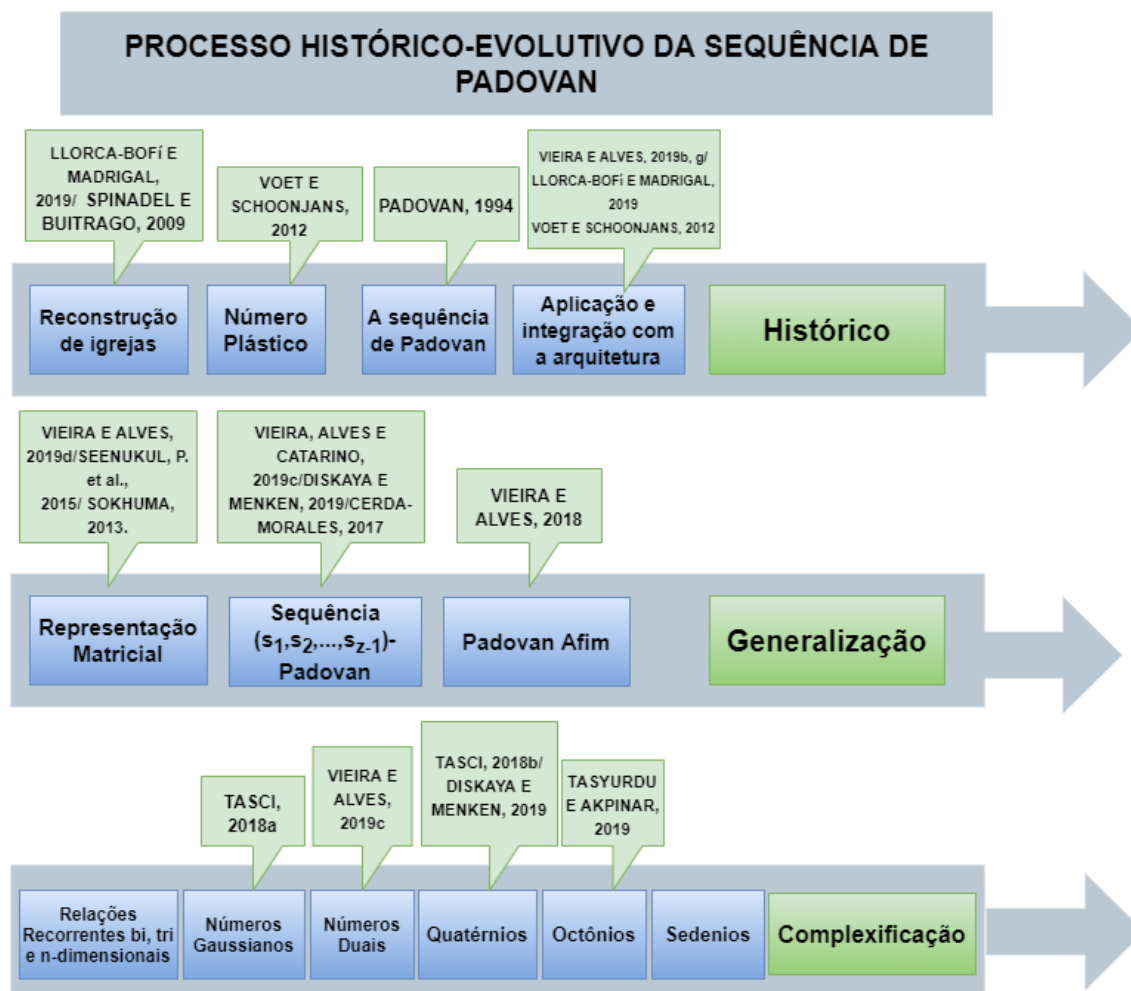
5 ANÁLISES E DISCUSSÕES DOS DA-

DOS

Na aplicação é importante destacar possíveis correções e ajustes locais, sendo indicados então apenas alguns elementos que considera-se mais relevantes nesta pesquisa durante o processo de experimentação (ALMOULOU, 2007). Sobretudo, ressalta-se que após a experimentação, existe um retorno para à análise *a posteriori*, avaliando e analisando os resultados obtidos e explorando os dados para que haja uma contribuição dos conhecimentos didáticos durante a transmissão do conteúdo.

A Figura 15 ilustra o processo histórico-evolutiva da SP para a abordagem de generalização e complexificação. Assim, pode-se perceber que essa sequência vem evoluindo o seu processo histórico recentemente. A generalização é desenvolvida em três partes, sendo elas: representação matricial, onde apresenta uma abordagem a partir da matriz geradora de Padovan (SEENUKUL et al., 2015; SOKHUMA, 2013b) até a SP de ordem z (VIEIRA; ALVES, 2019d); a sequência $(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ -Padovan, onde são generalizados os coeficientes da SP até a sequência de Z -dovan; e a SP afim, onde são generalizados os termos iniciais da SP (VIEIRA; ALVES, 2018). Para o processo de complexificação, é realizada uma divisão em seis partes, a saber: as relações bi, tri e n -dimensionais, em que são inseridas unidades imaginárias na SP de i (bidimensional) até a unidade μ_n (n -dimensional); os números gaussianos de Padovan, desenvolvidos por Tasci (2018a) para os números positivos, esses números utilizam a inserção da unidade imaginária i , porém neste trabalho foi realizada uma abordagem para os números inteiros não positivos; os números duais, apresentam o processo de complexificação inserindo ε que designa a unidade dual; os quatérnios de Padovan representam os termos da sequência em quatro dimensões, sendo então desenvolvido por Tasci (2018b) para os números positivos, porém neste trabalho foram estudadas algumas propriedades até então não encontradas na literatura, e desenvolvida a sua extensão para os números inteiros não positivos; os octônios e sedenios são respectivamente os números de Padovan em oito e dezesseis dimensões, não sendo encontrado nenhum trabalho na literatura à respeito dos termos de Padovan.

Figura 15 – Processo histórico-evolutiva da SP.



Fonte: Elaborado pela autora

Visando realizar uma transposição didática sobre o processo de generalização e complexificação dessa sequência, foram selecionados alguns conteúdos para serem trabalhados na fase de experimentação dessa pesquisa, criando assim situações-didáticas. Diante disso, a TSD foi utilizada para fundamentar a fase de experimentação da ED.

Após a análise *a posteriori*, é importante que haja uma validação dos elementos utilizados na fase de experimentação da ED, comparando os resultados discutidos pelos discentes, levantando possíveis questionamentos e analisando a evolução ou não da engenharia sugerida. As situações-problema discutidas devem ser consideradas, como variáveis micro didáticas, que segundo Almouloud (2016) essas são “relativas à organização local da sequência, isto é, a organização de uma sessão ou de uma fase da experimentação”.

Na próxima seção, são discutidas as fases da TSD durante o momento de aplicação da resolução das situações propostas, observando o comportamento dos estudantes a partir de seus conhecimentos prévios. Essas atividades foram elaboradas para trabalhar o processo histórico-evolutiva dessa sequência e validar os seus teoremas e propriedades. Contudo,

foi possível perceber alguns obstáculos epistemológicos existentes e entraves cognitivos diante da dificuldade inicial dos estudantes em trabalhar com uma sequência de terceira ordem. Ressalta-se que um obstáculo epistemológico, segundo Rodrigues e Grubba (2012) "são uma espécie de contrapensamento que podem surgir no momento da constituição do conhecimento ou numa fase posterior."

A seguir são realizadas as observações e discussões baseados nos registros armazenados durante as aplicações, tendo enfoque na ED e na TSD, validando de forma interna esta pesquisa.

5.1 *Análise a Posteriori e Validação Interna da Pesquisa*

A validação ocorreu com o desenvolvimento de situações didáticas, através de atividades propostas, com o viés de instigar o lado investigativo do aluno, fornecendo conhecimentos necessários para as respectivas resoluções, efetivando assim o contrato didático. Com isso, as situações-problema possibilitaram o entendimento e compreensão de conteúdos inerentes ao processo de generalização e complexificação da SP, discutindo-as de acordo com as variáveis didáticas.

As variáveis são selecionadas de acordo com o modo das questões propostas, direcionando o estudante a compreender uma parte do processo de generalização e complexificação da SP, iniciando com a fórmula de Binet, dada por uma fórmula fechada para determinar os termos da SP. Dando continuidade à esse processo, foi então analisada a compreensão em torno da extensão da sequência para os números inteiros, em sua forma matricial. E por fim do processo de generalização, foi investigada a generalização dos coeficientes da fórmula de recorrência dos números de Padovan. Para o processo de complexificação, foi então examinada as relações bidimensionais, inserindo unidades imaginárias nessa sequência. Seguindo com um novo conjunto numérico conhecido como quatérnios, adaptando para os números de Padovan. Durante a fase de validação, foi utilizado, em muitas vezes, o método de indução matemática para validar os teoremas e propriedades, visto que esse é um método de demonstração conhecido pela turma.

A aplicação teve início com a distribuição da lista e orientando aos alunos que interagissem entre si. Assim, conforme Oliveira (2018) os estudantes irão buscar "sistematizar uma estratégia de resolução para, em seguida, formular argumentos que possam ser validados posteriormente". Os registros foram realizados através de gravações de áudios e fotos.

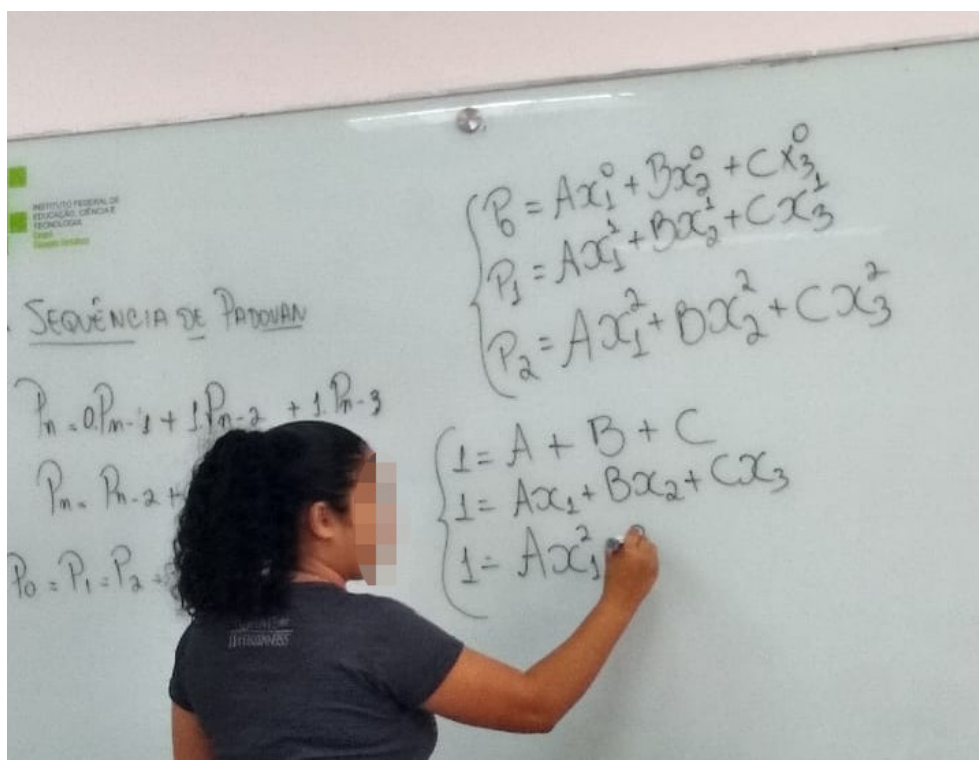
A situação-problema 1, tem por objetivo estabelecer a fórmula variante de Binet para a SP, apresentando inicialmente o conceito da fórmula de Binet segundo Witford (1977) para sequências lineares recursivas e os estudos referentes à SP, dando uma base teórica aos estudantes para resolverem a atividade proposta. Durante a coleta de dados

desta questão, constatou-se que os alunos sentiram dificuldade na elaboração e resolução de sistemas lineares com três equações, porém no decorrer da atividade conseguiram chegar à resolução correta.

Assim, na Figura 16, verifica-se a fase da ação e formulação acontecendo com o Aluno A, onde este consegue montar o sistema linear a partir da fórmula de Binet geral dada pela equação $P_n = Ax_1^n + Bx_2^n + Cx_3^n$, percebendo a existência de três raízes e coeficientes de acordo com o seu polinômio característico. Contudo, ao substituir os valores iniciais da sequência nessa fórmula variante de Binet, pode-se chegar ao sistema apresentado pelo Aluno A.

Ressalta-se que, pelo fato do polinômio característico possuir raízes complexas e extensas, o aluno optou por determinar os coeficientes em função das suas respectivas raízes, denotadas de x_1, x_2 e x_3 , de forma a facilitar os cálculos.

Figura 16 – Fase da Ação e Formulação pelo Aluno A - Fórmula variante de Binet.



Fonte: Dados da pesquisa

Tendo como objetivo demonstrar a formulação, na Figura 17, é possível verificar a validação da situação proposta pelo Aluno B. A resolução desse sistema deu-se pelo método de Cramer, obtendo a resolução apresentada abaixo. Assim, percebe-se na institucionalização, que o objetivo dessa atividade foi alcançado, validando a conjectura apresentada pelos alunos durante as demais fases.

Figura 17 – Fase da Validação pelo Aluno B - Fórmula variante de Binet.

$$\begin{aligned}
 P(n) &= Ax_1^n + Bx_2^n + Cx_3^n \\
 x_1 &= \psi; x_2 = \alpha; x_3 = \beta \\
 P_0 &= P_1 = P_2 = 1 \\
 \begin{cases} A+B+C=1 \\ A\psi+B\alpha+C\beta=1 \\ A\psi^2+B\alpha^2+C\beta^2=1 \end{cases} & \quad \begin{aligned} A &= \frac{-\alpha + \alpha\beta - \beta + 1}{\psi^2 - \psi\alpha - \psi\beta + \alpha\beta} = \frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{(\psi-\alpha)(\psi-\beta)} \\ B &= \frac{-\psi + \psi\beta - \beta + 1}{\alpha^2 - \psi\alpha + \psi\beta - \alpha\beta} = \frac{(\psi-1)(\beta-1)}{(\alpha-\psi)(\alpha-\beta)} \\ C &= \frac{-\psi + \psi\alpha - \alpha + 1}{\beta^2 - \psi\alpha - \psi\beta - \alpha\beta} = \frac{(\psi-1)(\alpha-1)}{(\beta-\psi)(\beta-\alpha)} \end{aligned} \\
 P(n) &= A\psi^n + B\alpha^n + C\beta^n \\
 \text{Se } n=0 & \quad A = \frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{(\psi-\alpha)(\psi-\beta)}, B = \frac{(\psi-1)(\beta-1)}{(\alpha-\psi)(\alpha-\beta)} \text{ e } C = \frac{(\psi-1)(\alpha-1)}{(\beta-\psi)(\beta-\alpha)}
 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Na situação-problema 2 é apresentada aos alunos a matriz geradora de Sokhuma (2013b) de ordem 3, para a SP, propondo aos estudantes que obtenham uma nova matriz geradora, de mesma ordem, para os termos inteiros não positivos da sequência. Diante disso, tem-se na Figura 18 o início da ação acontecendo, onde o Aluno D substituiu os valores de n da definição da recorrência original da sequência.

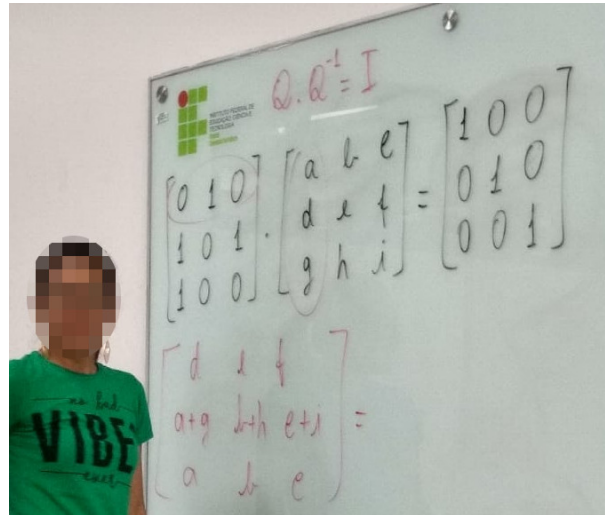
Figura 18 – Fase da Ação pelo Aluno D - Matriz geradora de Padovan para os números inteiros não positivos da sequência.

$$\begin{aligned}
 &P_2 - P_{2-2} = P_{2-3} \\
 &P_n = P_{n-2} + P_{n-3} \\
 &P_2 = P_0 + P_{-1} \\
 &P_{-1} - P_{-1} = 1 - 1 = 0 \\
 &P_2 = P_{-1} + P_{-2} \\
 &1 = 0 + P_{-2} \\
 &P_{-2} = 1 \\
 &P_0 = P_{-2} + P_{-3} \\
 &1 = 1 + P_{-3} \\
 &P_{-3} = 0 \\
 &P_{-1} = P_{-3} + P_{-4} \\
 &0 = 0 + P_{-4} \rightarrow P_{-4} = 0
 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa

A formulação dessa situação, teve início com o cálculo da matriz inversa, dada pela relação algébrica $QQ^{-1} = I$, como mostrada na Figura 19 pelo Aluno C, onde realizando a multiplicação dessas matrizes, pode-se chegar à matriz inversa.

Figura 19 – Fase da Formulação pelo Aluno C - Matriz geradora de Padovan para os números inteiros não positivos da sequência.



$$Q \cdot Q^{-1} = I$$

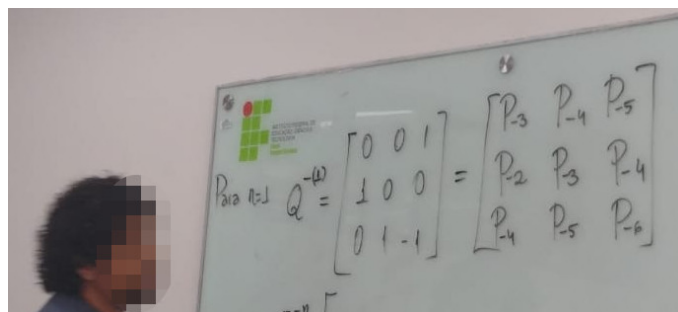
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d & e & f \\ a+g & b+h & c+i \\ a & b & c \end{bmatrix} =$$

Fonte: Dados da pesquisa

Dando continuidade ao processo de formulação, o Aluno D concluiu a obtenção da matriz inversa e dos termos gerados da SP (ver Figura 20), visto que os demais estudantes encontraram dificuldade em visualizar os termos obtidos na matriz Q , com os termos não positivos SP. Porém o Aluno D conseguiu compreender e explicar para os demais colegas, o comportamento dessa matriz ao ser elevada à n -ésima potência.

Figura 20 – Continuação da Fase da Formulação pelo Aluno D - Matriz geradora de Padovan para os números inteiros não positivos da sequência.



$$Q^{-n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{-3} & P_{-4} & P_{-5} \\ P_{-2} & P_{-3} & P_{-4} \\ P_{-4} & P_{-5} & P_{-6} \end{bmatrix}$$

Fonte: Dados da pesquisa

A validação foi obtida por meio do princípio da indução finita, discutida e proposta pelos alunos, tendo o devido cuidado com a matriz inversa, assim os estudantes conseguiram demonstrar a validade desta propriedade, selecionando a resolução do Aluno B para

apresentação neste trabalho, onde o mesmo denominou a matriz Q^{-1} de Q , como mostrado na Figura 21.

Figura 21 – Fase da Validação pelo Aluno B - Matriz geradora de Padovan para os números inteiros não positivos da sequência.

Handwritten mathematical work showing the derivation of the Padovan matrix Q for $n=3$ and its generalization for $n=K$ and $n=K+1$.

For $n=3$:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{-3} & p_{-4} & p_{-5} \\ p_{-2} & p_{-3} & p_{-4} \\ p_{-4} & p_{-5} & p_{-6} \end{bmatrix}$$

For $n=K$, $K \in \mathbb{N}$:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^K = \begin{bmatrix} p_{K-2} & p_{K-3} & p_{K-4} \\ p_{K-1} & p_{K-2} & p_{K-3} \\ p_{K-3} & p_{K-4} & p_{K-5} \end{bmatrix}$$

For $n=K+1$:

$$Q^{K+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^K \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{K-2} & p_{K-3} & p_{K-4} \\ p_{K-1} & p_{K-2} & p_{K-3} \\ p_{K-3} & p_{K-4} & p_{K-5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_{K-3} & p_{K-4} & p_{K-2}-p_{K-4} \\ p_{K-2} & p_{K-3} & p_{K-1}-p_{K-3} \\ p_{K-4} & p_{K-5} & p_{K-3}-p_{K-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{K-3} & p_{K-4} & p_{K-5} \\ p_{K-2} & p_{K-3} & p_{K-4} \\ p_{K-4} & p_{K-5} & p_{K-6} \end{bmatrix}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Finalizando essa atividade com a institucionalização, foi possível obter a matriz inversa da SP para os termos inteiros não positivos e demonstrada anteriormente.

A situação-problema 3, encerra o processo de generalização da SP, em que foram generalizados os coeficientes da sequência. Pode-se então, identificar a fase da ação na Figura 22, onde o Aluno G, compara essa sequência coma SP, e assim consegue estabelecer a sua respectiva fórmula de recorrência, percebendo a inserção das variáveis, s_1, s_2 nos coeficientes.

Figura 22 – Fase da ação pelo Aluno G – Generalização dos coeficientes da recorrência de Padovan.

Handwritten mathematical work on a whiteboard showing the generalization of the Padovan recurrence relation.

The recurrence relation is written as:

$$B_n = 1, 1, 1, h_1 + h_2, h_1 + h_2, h_1(h_1 + h_2) + h_2, \dots$$

The general formula for B_n is written as:

$$B_n = h_1 B_{n-2} + h_2 B_{n-3}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Na fase de formulação, foi possível obter a forma matricial dessa sequência, de acordo com a matriz geradora de Padovan e com o vetor de inicialização estudado na primeira situação-problema. Assim, o Aluno H, conseguiu compreender que a primeira coluna da matriz geradora traz consigo os valores dos coeficientes da fórmula de recorrência, como mostrado na Figura 23.

Figura 23 – Fase da formulação pelo Aluno H - Generalização dos coeficientes da recorrência de Padovan.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ r_1 & 0 & 1 \\ r_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + r_2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_3 & B_2 & B_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} B_{n+2} & B_{n+1} & B_n \end{bmatrix}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Na Figura 24, temos o Aluno D, utilizando o passo indutivo matemático, dando início ao processo de validação da matriz. Ressalta-se que o primeiro passo da validação para $n = 1$, foi realizado pelo Aluno H, ao obter a matriz (ver Figura 23).

Figura 24 – Fase da validação pelo Aluno D - Generalização dos coeficientes da recorrência de Padovan.

Para $n = k \quad k \in \mathbb{N}$
 Supondo que seja válido para k

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ S_1 & 0 & 1 \\ S_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} B_{k+2} & B_{k+1} & B_k \end{bmatrix}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Por fim, tem-se o Aluno D, na Figura 25, realizando a continuação do processo de validação, onde é verificado a veracidade para $n = k + 1$. Contudo, é possível validar o teorema apresentado com caráter de ineditismo na literatura e em artigos de Matemática Pura, referentes aos números de Padovan.



INSTITUTO TECNOLÓGICO
DE CHETUMAL
CETUMAL

$B_n = (1, 1, 1, t_1+t_2, t_1+t_2, t_1+t_2, t_1+t_2, t_1+t_2, t_1+t_2) + t_2, t_1+t_2) + t_2, t_1+t_2) + \dots$

Proponemos que
 $\bullet$ válidos para
 $K \pm 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ S_1 & 0 & 1 \\ S_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^K$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ S_1 & 0 & 1 \\ S_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para $n = K \quad K \in \mathbb{N}$
 Supondo que seja
 válido para K

$$\begin{bmatrix} B_{K+2} & B_{K+1} & B_K \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ S_1 & 0 & 1 \\ S_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 B_{K+1} + S_2 B_K & B_{K+2} & B_{K+1} \\ B_{K+3} & B_{K+2} & B_{K+1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B_{K+2} & B_{K+1} & B_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{K+2+1} & B_{K+1+1} & B_{K+1+1} \end{bmatrix}$$

[illegible]

Destaca-se que foram realizadas cinco aulas *online*, com o tempo de duração de

duas horas, contando com a participação de todos os alunos matriculados, uma vez que o IFCE disponibilizou *chips* com dados móveis e *tablets* para aqueles que não possuíam acesso à internet. Logo, temos que na situação-problema 4, é apresentada a relação de recorrência da SP, com a inserção da unidade imaginária i , fornecendo ainda os seus valores iniciais na forma bidimensional, bem como duas propriedades. Assim, temos nas Figuras 27 e 28, a fase da ação acontecendo pelo Aluno E e pelo Aluno G, respectivamente, obtendo mais duas propriedades tais como: $P(n, 1) = P(n) + P(n)i$ e $P(1, m) = P(m) + P(m-1)i$.

Figura 27 – Fase da ação pelo Aluno E - Relações Bidimensionais de Padovan.

$$P(n, m) = P(n, m-2) + P(n, m-3)$$

$$P(1, 3) = P(1, 1) + P(1, 0) = 1+i+1=2+i = P(3) + P(2)i$$

$$P(1, 4) = P(1, 2) + P(1, 1) = 1+i+1+i=2+2i = P(4) + P(3)i$$

$$P(1, 5) = P(1, 3) + P(1, 2) = 2+i+1+i=3+2i = P(5) + P(4)i$$

$$P(1, 6) = P(1, 4) + P(1, 3) = 2+2i+2+i=4+3i = P(6) + P(5)i$$

$$P(1, m) = P(m) + P(m-1)i$$

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 28 – Finalização da fase da ação pelo Aluno G - Relações Bidimensionais de Padovan.

$$P(n, m) = P(n-2, m) + P(n-3, m)$$

$$P(3, 1) = P(1, 1) + P(0, 1) = (1+i) + (1+i) = 2+2i = P(3) + P(3)i$$

$$P(4, 1) = P(2, 1) + P(1, 1) = (1+i) + (1+i) = 2+2i = P(4) + P(4)i$$

$$P(5, 1) = P(3, 1) + P(2, 1) = [(1+i) + (1+i)] + (1+i) = 3+3i = P(5) + P(5)i$$

$$P(m, 1) = P(m-2, 1) + P(m-3, 1) = [P(m) + P(m-1)i]$$

Fonte: Dados da pesquisa

Durante a fase da formulação, os estudantes puderam generalizar a relação bidimensional de Padovan, obtendo a fórmula $P(n, m) = P(n)P(m) + P(n)P(m-1)i$. Logo, na Figura 29, observou-se a fase da validação pelo Aluno A, onde é utilizado o segundo princípio da indução finita, para demonstrar a veracidade da resolução. Percebemos assim que foi fixado o valor de n , utilizando as propriedades já encontradas e, variado o valor de m .

Figura 29 – Fase da validação pelo Aluno A - Relações Bidimensionais de Padovan.

Fixando $m=2$

$$P(n, 2) = P(n-2, 2) + P(n-3, 2)$$

$$P(3, 2) = P(1, 2) + P(0, 2) = 2 + 2i = P(3) + P(3)i$$

$$P(4, 2) = P(2, 2) + P(1, 2) = 2 + 2i = P(4) + P(4)i$$

$$P(5, 2) = P(3, 2) + P(2, 2) = 3 + 3i = P(5) + P(5)i$$

$$P(6, 2) = P(4, 2) + P(3, 2) = 4 + 4i = P(6) + P(6)i$$

$$\vdots$$

$$P(n, 2) = P(n) + P(n)i$$

Variando $m=0, 1, \dots, K$

$$P(n, 0) = 1 \cdot P(n) + 0 \cdot P(n)i = P(0)P(n) + P(-1)P(n)i$$

$$P(n, 1) = 1 \cdot P(n) + 1 \cdot P(n)i = P(1)P(n) + P(0)P(n)i$$

$$P(n, 2) = 1 \cdot P(n) + 1 \cdot P(n)i = P(2)P(n) + P(1)P(n)i$$

$$\vdots$$

$$P(n, K-3) = P(K-3)P(n) + P(K-4)P(n)i$$

$$P(n, K-2) = P(K-2)P(n) + P(K-3)P(n)i$$

$$P(n, K-1) = P(K-1)P(n) + P(K-2)P(n)i$$

$$P(n, K) = P(n, K-2) + P(n, K-3)$$

$$= P(K-2)P(n) + P(K-3)P(n)i + P(K-3)P(n) + P(K-4)P(n)i$$

$$= P(K)P(n) + P(K-1)P(n)i$$

Fonte: Dados da pesquisa

Na situação-problema 5, tem-se a continuação do processo de complexificação, onde são estudados os números gaussianos de Padovan, com base no trabalho de Tasci (2018a). Desse modo, é investigada a extensão dessa sequência complexa para os números inteiros não positivos, explorando a sua forma matricial. Contudo, temos a fase da ação acontecendo pelo Aluno C (ver Figura 30), onde são obtidos os termos gaussianos de Padovan inteiros não positivos.

Figura 30 – Fase da ação pelo Aluno C - Números gaussianos de Padovan.

$\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1+i \\ 2+2i \end{matrix}$

→ $(1+i) - 1 = i \rightarrow GP-1$

→ $(1+i) - i = 1 \rightarrow GP-2$

→ $(1) - 1 = 0 \rightarrow GP-3$

→ $i - 0 = i \rightarrow GP-4$

→ $1 - i \rightarrow GP-5$

→ $0 - (1-i) = -1+i \rightarrow GP-6$

→ $i - (-1+i) = 1 \rightarrow GP-7$

→ $1 - i - 1 = -i \rightarrow GP-8$

→ $-1+i + i = -1+2i \rightarrow GP-9$

→ $1 - (-1+2i) = 2-2i \rightarrow GP-10$

Fonte: Dados da pesquisa

Contudo, foi então calculada a matriz inversa da matriz geradora Q , permanecendo com a fórmula $Q^n U = M^n$, fornecida para a obtenção da forma matricial dos gaussianos de Padovan positivos. Destaca-se que pelo fato dessa situação-problema ser aplicada de

utilizando o princípio da indução finita, conforme realizada pelo Aluno D (ver Figura 33). Percebe-se ainda que o Aluno D denominou a matriz inversa de Q pela notação ϕ , facilitando o processo demonstrativo.

Figura 33 – Fase da validação pelo Aluno D - Números gaussianos de Padovan.

POR PIF, TEMOS QUE:
 PARA $n = 3$:

$$\Phi \cdot U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1+i & 1+i & 1 \\ 1+i & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+i & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} GP_3 & GP_0 & GP_{-1} \\ GP_0 & GP_{-1} & GP_{-2} \\ GP_{-1} & GP_{-2} & GP_{-3} \end{bmatrix}$$

 PARA $n = k$, COM $k \in \mathbb{N}$:

$$\Phi \cdot U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1+i & 1+i & 1 \\ 1+i & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

 PARA $n = k+1$:

$$\Phi^{k+1} \cdot U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} GP_{k+2} & GP_{k+1} & GP_k \\ GP_{k+1} & GP_k & GP_{k-1} \\ GP_k & GP_{k-1} & GP_{k-2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} GP_{k+1} & GP_k & GP_{k-1} \\ GP_k & GP_{k-1} & GP_{k-2} \\ GP_{k-1} & GP_{k-2} & GP_{k-3} \end{bmatrix}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Por fim, a situação-problema 6, aborda a álgebra quaterniônica, estudando os quatérnios de Padovan. Assim, são inseridas unidades imaginárias nessa sequência, estudando o processo de complexificação desses números, fundamentada no trabalho de Tasci (2018b). Diante disso, foi explorada a forma matricial e o comportamento desses termos inteiros não positivos, analisando os números inteiros não positivos. Logo, tem-se a fase da ação acontecendo pelo Aluno G, visualizada na Figura 34, onde são calculados os quatérnios de Padovan com índices inteiros não positivos.

Figura 34 – Fase da ação pelo Aluno G - Quatérnios de Padovan.

Sabendo que $P_0 = P_1 = P_2 = 1$, $P_3 = 2$, $P_4 = 2$, $P_5 = 3$
 $(\dots, QP_{-1}, QP_{-2}, QP_{-3}, QP_{-4}, QP_{-5}, QP_{-6}, \dots)$
 $QP_0 = P_0 + iP_1 + jP_2 + kP_3 \Rightarrow QP_0 = 1 + i + j + 2k$
 $QP_1 = P_1 + iP_2 + jP_3 + kP_4 \Rightarrow QP_1 = 1 + i + 2j + 2k$
 $QP_2 = P_2 + iP_3 + jP_4 + kP_5 \Rightarrow QP_2 = 1 + 2i + 2j + 3k$
 Daí, utilizando a lei de recorrência $QP_n = QP_{n-2} + QP_{n-3}$
 temos:
 $QP_3 = QP_0 + QP_{-1} \Rightarrow QP_3 = QP_2 - QP_0 = 1 + 2i + 2j + 3k - 1 - i - j - 2k = i + j + k$
 $\Rightarrow QP_{-1} = i + j + k$
 $QP_{-2} = QP_1 - QP_{-1} = 1 + i + 2j + 2k - i - j - k = 1 + j + k$
 $QP_{-3} = QP_2 - QP_{-2} = 1 + 2i + 2j + 3k - 1 - j - k = 1 + i + k$
 $QP_{-4} = QP_3 - QP_{-3} = i + j + k - 1 - i - k = j$
 $QP_{-5} = QP_{-2} - QP_{-4} = 1 + j + k - j = 1 + k$
 $QP_{-6} = QP_{-3} - QP_{-5} = i + k - 1 - k = i - 1$
 $QP_{-7} = QP_{-4} - QP_{-6} = j + 1 - i = 1 - i + j$
 $QP_{-8} = QP_{-5} - QP_{-7} = 1 + k - 1 - i - j = k - i - j$
 $QP_{-9} = QP_{-6} - QP_{-8} = -1 + i - i + j - k = -1 + j - k$
 $QP_{-10} = QP_{-7} - QP_{-9} = 1 - i + j + 1 - j + k = 2 - i + k$

Fonte: Dados da pesquisa

Após o cálculo dos termos dessa sequência para os números inteiros não positivos, o Aluno E percebeu que a matriz geradora é a mesma utilizada para o cálculo dos gaussianos, estudada na situação-problema anterior. Sendo assim foi empregada a matriz inversa de Q de Padovan, calculada por meio de recursos tecnológicos de livre escolha, visando favorecer a resolução desta atividade proposta. Dessa forma, tem-se a fase da formulação pelo Aluno E, na Figura 35, com a matriz inversa de Q multiplicada pela matriz dos quatérnios, alcançando assim a forma matricial dos quatérnios de Padovan com índices inteiros não positivos.

Figura 35 – Fase da formulação pelo Aluno E - Quatérnios de Padovan.

$$Q^{-3} \cdot QP = \begin{bmatrix} QP_2 - QP_0 & QP_1 - QP_{-1} & QP_0 - QP_{-2} \\ -QP_1 + QP_2 + QP_0 & -QP_0 + QP_1 + QP_{-1} & -QP_0 + QP_{-1} + QP_{-2} \\ QP_2 - QP_1 & QP_1 - QP_0 & QP_0 - QP_{-1} \end{bmatrix}$$

$$Q^{-3} \cdot QP = \begin{bmatrix} 1 + 2i + 2j + 2k - 1 - i - j - 2k & 1 + i + 2j + 2k - i - j - k & 1 + i + j + 2k - 1 - j - k \\ -1 - 2i - 2j - 2k + 1 + i + j + 2k + 1 + i + j + 2k & -1 - i - 2j - 2k + 1 + i + j + 2k + i + j + k & -1 - i - j - 2k + 1 + i + j + 2k \\ 1 + 2i + 2j + 2k - 1 - i - j - 2k & 1 + i + 2j + 2k - 1 - i - j - 2k & 1 + i + j + 2k - i - j - k \end{bmatrix}$$

$$Q^{-3} \cdot QP = \begin{bmatrix} i + j + k & 1 + j + k & i + k \\ 1 + j + k & i + k & j \\ i + k & j & 1 + k \end{bmatrix}$$

$$Q^{-3} \cdot QP = \begin{bmatrix} QP_{-1} & QP_{-2} & QP_{-3} \\ QP_{-2} & QP_{-3} & QP_{-4} \\ QP_{-3} & QP_{-4} & QP_{-5} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$Q^{-n} \cdot QP = \begin{bmatrix} QP_{-n+2} & QP_{-n+1} & QP_{-n} \\ QP_{-n+1} & QP_{-n} & QP_{-n-1} \\ QP_{-n} & QP_{-n-1} & QP_{-n-2} \end{bmatrix}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Finalizando a situação-problema 6, tem-se a fase da validação, em que o Aluno H (ver Figura 36), utiliza o princípio da indução finita, demonstrando a veracidade da forma matricial do quatérnios de Padovan com índice inteiro não positivo.

Figura 36 – Fase da validação pelo Aluno H - Quatérnios de Padovan.

$p/N=1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \\ QP_{-1} & QP_{-2} & QP_{-3} \end{bmatrix}$$

$p/N=k, k \in \mathbb{N}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} QP_k & QP_{k-1} & QP_{k-2} \\ QP_{k-1} & QP_{k-2} & QP_{k-3} \\ QP_{k-2} & QP_{k-3} & QP_{k-4} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} QP_{k+1} & QP_k & QP_{k-1} \\ QP_k & QP_{k-1} & QP_{k-2} \\ QP_{k-1} & QP_{k-2} & QP_{k-3} \end{bmatrix}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Nesta seção foi feita uma análise e discussão das resoluções das situações-problema propostas aos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática e, ainda categorizadas de acordo com a Tabela 10. Foi realizada uma comparação entre as fases de análise *a priori* e a *posteriori* baseado nos dados coletados durante a experimentação, validando portanto esta pesquisa. Vale salientar que essa validação ocorreu de forma interna, visto que foram analisadas apenas as produções observadas neste trabalho. A fase de institucionalização da TSD, tem grande importância durante essa validação, visto que é nesta etapa que acontece a comprovação do entendimento e construção dos conceitos matemáticos vistos em sala de aula.

No decurso das resoluções das situações-problema, os obstáculos epistemológicos e cognitivos foram identificados, observando a dificuldade dos estudantes em formular algumas propriedades matemáticas, bem como a sua validação. Esse fato é evidenciado quando determinado aluno relata através da frase "não sei utilizar o princípio da indução finita". Porém, esses obstáculos foram superados com a troca de informações entre os demais estudantes.

Na Tabela 10, observa-se ainda a institucionalização dos conceitos matemáticos abordados nas atividades propostas, em torno do processo de generalização. Com isso, na primeira situação-problema, foi possível estabelecer a fórmula variante de Binet, iniciando os estudos sobre SP, observando uma certa dificuldade na resolução de sistema de equação linear com três equações. Na segunda situação-problema foi possível realizar uma extensão da sequência para os números inteiros não positivos, estabelecendo a sua forma matricial a partir da matriz geradora base, a fim de obter os termos da sequência, sem necessitar conhecer os seus termos anteriores. Na terceira situação-problema, foi realizada uma comparação da SP com outros números sequenciais, observando assim a generalização dos coeficientes da recorrência de Padovan, denominada neste trabalho de sequência (s_1, s_2) -Padovan.

Tabela 10 – Categorização das resoluções das situações-problema propostas referentes à generalização.

Situação-problema 1	
Ação	Busca nos conhecimentos prévios sobre a fórmula variante de Binet fechada.
Formulação	Construção do sistema de equação linear.
Validação	Resolução do sistema de equação para obtenção dos coeficientes com base nas raízes do polinômio.
Institucionalização	Estabelecimento da Fórmula variante de Binet da SP ($P_n = Ax_1^n + Bx_2^n + Cx_3^n$).
Situação-problema 2	
Ação	Obtenção dos termos inteiros não positivos da SP.
Formulação	Construção da forma matricial da extensão da SP para os números inteiros não positivos, com base em $QQ^{-1} = I$.
Validação	Validação da matriz geradora para os termos com índices inteiros não positivos da sequência por indução matemática.
Institucionalização	Estabelecimento da forma matricial da SP negativa, em que $Q^{-1} = \varrho$. Logo: $\text{Para } \varrho = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$ $\text{tem-se } \varrho^n = \begin{bmatrix} P_{-n-2} & P_{-n-3} & P_{-n-4} \\ P_{-n-1} & P_{-n-2} & P_{-n-3} \\ P_{-n-3} & P_{-n-4} & P_{-n-5} \end{bmatrix}, n > 0.$
Situação-problema 3	
Ação	Estabelecimento da recorrência generalizada dos coeficientes comparando-a com a SP.
Formulação	Construção da forma matricial da sequência com coeficientes generalizados.
Validação	Validação da matriz por meio do princípio da indução finita.
Institucionalização	Forma matricial da sequência (s_1, s_2) -Padovan com coeficientes generalizados $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 \\ s_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} B_{n+2} & B_{n+1} & B_n \end{bmatrix}.$

Fonte: Elaborado pela autora

Já na Tabela 11, é então realizada uma institucionalização referente ao processo de complexificação dos números de Padovan, evidenciados nas atividades discutidas. Contudo, na quarta situação-problema, foi obtida a relação bidimensional da sequência, de forma generalizada, inserindo apenas uma unidade imaginária. A quinta situação-problema, estudou a matriz geradora dos números gaussianos de Padovan para índices inteiros não positivos. E por fim, na sexta situação-problema, com base na matriz geradora dos quaternions de Padovan, investigou-se a sua forma matricial generalizada, obtendo assim os índices inteiros não positivos.

Tabela 11 – Categorização das resoluções das situações-problema propostas referentes à complexificação.

Situação-problema 4	
Ação	Obtenção de novas propriedades variando n, m .
Formulação	Determinação da forma bidimensional de Padovan, com a inserção da unidade imaginária i .
Validação	Validação da forma generalizada bidimensional da SP, por meio do segundo princípio da indução finita.
Institucionalização	Relação bidimensional de Padovan generalizada ($P(n, m) = P(n)P(m) + P(n)P(m-1)i$).
Situação-problema 5	
Ação	Obtenção dos termos inteiros não positivos dos números gaussianos de Padovan.
Formulação	Construção da forma matricial da extensão dos gaussianos de Padovan para os números inteiros não positivos.
Validação	Validação da matriz geradora dos gaussianos de Padovan, para os termos com índices inteiros não positivos por indução matemática.
Institucionalização	Forma matricial dos gaussianos de Padovan para índices inteiros não positivos, tem-se que: $Q^{-1}U = M^{-n}.$ Assim: $Q^{-1} = \varrho = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 1+i & 1+i & 1 \\ 1+i & 1 & i \\ 1 & i & 1 \end{bmatrix}$ e $M^{-n} = \begin{bmatrix} GP_{-n+2} & GP_{-n+1} & GP_{-n} \\ GP_{-n+1} & GP_{-n} & GP_{-n-1} \\ GP_{-n} & GP_{-n-1} & GP_{-n-2} \end{bmatrix}, \text{ com } n > 0 \text{ e } n \in \mathbb{N}.$
Situação-problema 6	
Ação	Obtenção dos termos inteiros não positivos dos quatérnios de Padovan.
Formulação	Construção da forma matricial dos quatérnios de Padovan para índices inteiros não positivos.
Validação	Validação da matriz geradora dos quatérnios de Padovan, para os termos com índices inteiros não positivos por indução matemática.
Institucionalização	Forma matricial dos quatérnios de Padovan para índices inteiros não positivos, com: $\varrho = Q^{-n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{-n-2} & P_{-n-1} & P_{-n-3} \\ P_{-n-3} & P_{-n-2} & P_{-n-4} \\ P_{-n-4} & P_{-n-3} & P_{-n-5} \end{bmatrix}.$ Assim, tem-se que: $\varrho \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} QP_{-n+2} & QP_{-n+1} & QP_{-n} \\ QP_{-n+1} & QP_{-n} & QP_{-n-1} \\ QP_{-n} & QP_{-n-1} & QP_{-n-2} \end{bmatrix}, \text{ com } n > 0 \text{ e } n \in \mathbb{N}.$

Fonte: Elaborado pela autora

Ressaltamos que algumas desvantagens em coletar os dados de forma *online*, tais como: o compartilhamento de tela do recurso utilizado ser permitido somente por um participante de cada vez, uma vez que os estudantes não puderam compartilhar as suas telas, de modo simultâneo para que fossem visualizadas as suas respectivas soluções; ocorreu oscilação da conexão de rede, de alguns estudantes, em determinados momentos, ocorrendo a entrada e saída dos usuários da sala de reuniões; e, um atraso em analisar as soluções dos estudantes, devido a maneira *online* de como os dados foram coletados, necessitando verificar a resolução de cada usuário de maneira remota.

Por fim, foi possível considerar alguns pontos positivos, com a utilização da ferramenta, sendo portanto a mais importante, o fato de ser possível dar continuidade à coleta de dados, não prejudicando o andamento da pesquisa. Vale ainda destacar, que apenas um estudante não continuou a participar da pesquisa durante a pandemia, informando que não havia computador e nem celular disponível e para utilizar o determinado recurso computacional, enviando portanto as suas soluções via *WhatsApp*. Contudo, foi possível finalizar a fase de experimentação e validação, não havendo prejuízo para a pesquisa.

6 Considerações Finais

Tendo em vista os objetivos traçados na pesquisa, e seguindo as orientações didático-metodológicas fundamentadas na ED e da TSD, foi realizada, durante a primeira etapa deste projeto, uma análise preliminar (prévias) do objeto matemático, através de um resgate de alguns artigos científicos recentemente publicados, bem como o estudo de obras específicas que trazem algumas narrativas históricas relativas à SP.

Sobre esta fundamentação, é pertinente destacar que o desenvolvimento do projeto permitiu realizar uma discussão pormenorizada de trabalhos, publicados em periódicos de Matemática Pura, que abordam o processo de generalização da SP e a sua complexificação, sistematicamente negligenciada por livros de HM consultados, ressaltando a ausência do conteúdo de SP.

Nesse sentido, a partir do levantamento e análise bibliográfica, foi catalogado e organizado um conjunto de modelos visando realizar, de forma inédita neste trabalho, a generalização e complexificação da SP, com foco para a matriz geradora generalizada, generalização dos valores iniciais e dos coeficientes, com a sequência $(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ -Z-dovan, fórmula de Binet, algumas relações n -dimensionais, números gaussianos, quatérnios, entre outros tópicos matemáticos. Assim, foi possível realizar uma análise do desenvolvimento matemático de generalização e complexificação da SP alcançando os dois primeiros objetivos específicos da pesquisa.

Nessa perspectiva matemática, foram selecionados os conteúdos da fórmula de Binet, extensão para os números inteiros não positivos e a sequência (s_1, s_2) -Padovan para o processo de generalização. Para a complexificação da sequência, foram selecionados os conteúdos: relações bidimensionais, números gaussianos e quatérnios de Padovan. Assim, foi realizada uma transposição do assunto para o contexto didático-cognitivo, ressaltando o seu modelo histórico e permitindo uma discussão dos conceitos e relações matemáticas. Contudo, essa pesquisa foi aplicada na disciplina de HM, no curso de Licenciatura em Matemática do IFCE, após uma minuciosa análise da matriz curricular.

Entretanto, existe uma resistência dos docentes e discentes em relação ao estudo das relações matemáticas e suas conjecturas nas aulas de HM, visto que muitas vezes são estudados apenas a biografia dos matemáticos e os seus respectivos períodos históricos em que foram desenvolvidas as definições matemáticas. Porém, esse estudo é contraditório ao que se reflete na matriz curricular do curso de Licenciatura em Matemática, negligenciando o processo evolutivo epistemológico-matemático de novas relações matemáticas, como apresentado em livros dessa disciplina, em que não discute propriedades matemáticas recentes (OLIVEIRA, 2018).

Durante a aplicação das atividades propostas, alguns obstáculos epistemológicos foram diagnosticados em relação a formulação das propriedades matemáticas e o seu processo de validação. Esse, portanto, foram superados por meio de interações entre os demais estudantes participantes da pesquisa.

As construções matemáticas, vistas de forma inéditas neste trabalho, permitiu superar alguns obstáculos epistemológicos, criando conceitos matemáticos até então não conhecidos para essa sequência estudada. Com isso, observa-se nesta pesquisa, o surgimento da generalização da ordem da sequência, dos seus valores iniciais e dos coeficientes da fórmula de recorrência. Percebe-se também o surgimento dos quatérnios, octônios e sedenios, sendo uma extensão dos números complexos.

A ED em associação com a TSD serviu como um aporte teórico para nortear os percursos metodológicos desta pesquisa (ver Apêndice E), contribuindo para a área de ensino e para a área de matemática, compreendendo a SP e o seu processo de generalização e complexificação. Vale ressaltar que a generalização da sequência foi dada em torno da sua ordem de extensão, obtendo a construção da sua forma matricial, polinômio característico, função geradora e fórmula de Binet. Os valores iniciais também foram generalizados, sendo chamada de Padovan Afim. Os coeficientes da recorrência finalizam o processo de generalização, estabelecendo a sua matriz geradora, fórmula de Binet, função geradora e polinômio característico. O processo de complexificação deu início, neste trabalho, com a inserção de unidades imaginárias, destacando assim as relações recorrentes bi, tri e n -dimensionais. Esse processo seguiu com os números gaussianos, duais, quatérnios, octônios e sedenios, permitindo alcançar o primeiro objetivo específico deste trabalho.

Diante da microengenharia didática e transposição didática, é importante destacar que a sequência foi estudada criando situações de ensino com base na TSD, e analisadas e discutidas por meio de situações-problema de conteúdos selecionados previamente, visando compreender o processo histórico-evolutiva da SP e, atingindo os dois últimos objetivos específicos desta pesquisa.

Destaca-se ainda a contribuição do arquiteto Richard Padovan para este trabalho, uma vez que este foi o criador da sequência, a qual foi objeto de estudo desta pesquisa. Diante disso, pode-se verificar que a ideia da SP aplicada à arquitetura proporcionou um desdobramento e repercussão na área matemática e em outros campos, tais como na área de ensino. É importante ressaltar ainda que, por não ser um matemático, Padovan não pôde realizar mais colaborações para o desenvolvimento deste projeto, conforme conversa via e-mail com o próprio autor, o qual encontra-se vivo até a presente data.

A utilização do recurso computacional permitiu facilitar a busca pelas raízes dos polinômios característicos, assim como a sua visualização em 3D por meio do fractal de Newton, através da ferramenta do Google Colab (ver Apêndice F). Foi possível ainda aproximar esta sequência com objetos existentes na natureza, por meio desta técnica de

visualização, facilitando assim o processo de ensino deste conteúdo. Para trabalhos futuros, pode-se realizar um aprofundamento em torno dos fractais de Newton, como forma de visualização da SP, bem como a aplicação desta sequência em outras áreas.

É importante ressaltar que ocorreram algumas limitações durante a pesquisa, destacando o fato de que nem todos os alunos conseguiram resolver todas as situações-problema propostas. Porém com o auxílio dos outros sujeitos participantes, foi possível discutir essas atividades, havendo um entendimento e compreensão dos membros que não haviam conseguido resolvê-las, dando continuidade ao processo. De fato, é considerável ainda apresentar algumas dificuldades oriundas da aplicação remota, onde alunos não puderam participar das aulas devido à perda de conexão, revisando o conteúdo na aula posterior.

Por fim, a presente pesquisa permitiu a oportunizar os estudantes, professores em formação inicial, ampliar os seus conhecimentos matemáticos na área de sequências lineares e recorrentes, mais especificamente na SP, através de relações matemáticas estudadas com caráter de ineditismo. Contudo, espera-se que essa dissertação sirva como suporte para outros trabalhos que buscam explorar matematicamente assuntos não triviais, com aporte na TSD, e que não são estudados em curso de formação inicial de professores de matemática.

Ressalta-se ainda a perspectiva de pesquisa futura contando com a contribuição de pesquisadores oriundos de Portugal, a saber: professora doutora Paula Maria Machado Cruz Catarino, professora doutora Anabela Maria Ferreira Borges Varela Rodrigues e professor doutor Paulo José Martins Vasco.

Referências

- AARTS, J.; FOKKINK, R.; KRUIJTZER, G. Morphic numbers. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, v. 5, n. 2, p. 56–58, 2001.
- ALMOULOUD, S. A. *Fundamentos da Didática da Matemática*. 3. ed. [S.l.]: São Paulo: Editora UFPR, 2007.
- ALMOULOUD, S. A. Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. *REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática - Florianópolis (SC)*, v. 11, n. 2, p. 109–141, 2016.
- ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. de Queiroz e S. Engenharia didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no gt-19/anped. *REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 3, n. 6, p. 62–77, 2008.
- ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. da. Engenharia didática: evolução e diversidade. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação em Matemática, Florianópolis*, v. 7, n. 2, p. 22–52, 2012.
- ALVES, C. M. F. S. J. *Fractais: conceitos básicos, representações gráficas e aplicações ao ensino não universitário*. Dissertação (Mestrado), 2007.
- ALVES, F. R. V. Uma discussão de artigos envolvendo propriedades da sequência de fibonacci apoiada na tecnologia. *Anais do VI HTEM*, p. 1–17, 2013. Disponível em: <http://htem2013.dm.ufscar.br/anais/anais_do_vi_htem_ufscar_2013.html>.
- ALVES, F. R. V. Análise preliminar e análise a priori: Situações didáticas envolvendo a noção de integrais múltiplas. *Reportes de Investigación*, p. 1–9, 2014.
- ALVES, F. R. V. Sobre a evolução histórica do modelo de fibonacci: a classe das funções hiperbólicas de fibonacci. *Revista Vydia Educação*, v. 35, p. 133–148, 2015. Disponível em: <<http://periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA>>.
- ALVES, F. R. V. Didática de matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. *Interfaces da Educação, Paranaíba*, v. 7, n. 21, p. 131–150, 2016a.
- ALVES, F. R. V. Engenharia didática (análises preliminares e análise a priori): o caso das equações diferenciais de segunda ordem. *Ensino de Ciências e Tecnologia em Revista*, n. 2, p. 1–22, 2016b.
- ALVES, F. R. V. Engenharia didática: implicações para a pesquisa no âmbito do ensino em análise complexa - ac. *Ciência e Natura*, v. 38, n. 2, p. 694–715, 2016c.
- ALVES, F. R. V. Mestrado (acadêmico) em ensino de ciências e matemática: A proposta do instituto federal do ceará (ifce). *Revista Contexto & Educação*, n. 105, p. 305–340, 2018.
- ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Engenharia didática de formação (edf): Repercussões para a formação do professor de matemática no brasil. *Educação Matemática em Revista - RS*, v. 2, n. 18, p. 121–137, 2017. Disponível em: <http://sbemrs.org/revista/index.php/2011_1/article/viewFile/304/222>.

- ALVES, F. R. V.; MARINHO, M. R. M. Engenharia didática no contexto da transição complexa do cálculo-tcc: o caso da série de laurent. *Revista Eletrônica de Investigación en Educación en Ciencias*, v. 12, n. 2, p. 63–89, 2017.
- ALVES, F. R. V.; NETO, H. B. A existência de sequência de fibonacci no campo dos inteiros: uma atividade de investigação apoiada nos pressupostos da sequência fedathi. *Boletim Gepem*, n. 59, p. 135–140, 2011. Disponível em: <<http://www.ufrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=article&op=view&path%5B%5D=64>>.
- ALVES, F. R. V. et al. Engenharia didática para o ensino da sequência de padovan: Um estudo da extensão para o campo dos números inteiros. In: *Ensino de Ciências e Educação Matemática 3*. Ponta Grossa, PR: Atena Editora, 2019. v. 3, cap. 2, p. 10–18.
- ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 9, n. 3, p. 281–308, 1988.
- ARTIGUE, M. et al. *Ingenieria Didactica en Educación Matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. [S.l.]: Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, 1995.
- ASTOLFI, J. P. El trabajo didáctico de los obstáculos, en el corazón de los aprendizajes científicos. *Enseñanza de las Ciencias*, v. 12, n. 2, p. 206–216, 1994.
- BACANI, J.; RABAGO, J. F. On generalized fibonacci numbers. *Applied Mathematical Sciences*, v. 9, n. 52, p. 2595–2607, 03 2015.
- BACHELARD, G. *A Formação do Espírito Científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento - tradução Esteia dos Santos Abreu*. 5ª reimpressão. ed. [S.l.]: Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.
- BAGUR, B. *The Padovan Sequence in Menorca*. 2014. Disponível em: <<https://thematematicaltourist.wordpress.com/2015/05/25/the-padovan-sequence-in-menorca/>>.
- BERGLUND, J. Analyzing the galois groups of fifth-degree and fourth-degree polynomials. *Undergraduate Review*, v. 7, p. 22–28, 2011.
- BERZSENYI, G. Gaussian fibonacci numbers. *The Fibonacci Quarterly*, v. 15, p. 233–236, 1977.
- BILGICI, G. Fibonacci and lucas sedenions. *Journal of Integer Sequences*, v. 20, p. 1–11, 2017.
- BJÖRCK, A.; PEREYRA, V. Solution of vandermonde systems of equations. *Mathematics of Computation*, v. 112, n. 24, p. 893–903, 1970.
- BROUSSEAU, G. La problématique et l'enseignement de la mathématiques. In: COMPTES RENDUS DE LA XXVIII^E REENCONTRE ORGANISÉE PAR LA COMMISSION INTERNATIONALE POUR L'ETUDE ET L'AMÉLIORATION DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES. LOUVAIN-LA-NEUVE. [S.l.], 1976. p. 101–117.
- BROUSSEAU, G. D'un problème à l'étude à priori d'une situation didactique. *Deuxième École d'Été de Didactique des mathématiques, Olivet*, p. 39–60, 1982.

- BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 7, n. 2, p. 33–115, 1986a.
- BROUSSEAU, G. *Theorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Tese (Doutorado) — These d'état, Université de Bordeaux I, 1986b.
- BROUSSEAU, G. *Theory of didactical situations in mathematics*. [S.l.]: Dordrecht: Kluwer, 1997.
- BROUSSEAU, G. Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática*, v. 12, n. 1, p. 5–38, 2000.
- BROUSSEAU, G. *Theory of Didactical Situations in Mathematics Didactique de Mathématiques, 1970–1990*. 19. ed. [S.l.]: Mathematics Education Library, 2002.
- BROUSSEAU, G. *Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino*. [S.l.]: São Paulo: Ática, 2008.
- BURTON, A. *Newton's method and fractals*. [S.l.]: Technical manuscript, Whitman College, 2009.
- CARREIRA, A. S.; ANDRADE, C. A. D. *Geometria a várias dimensões – Fractais*. [S.l.]: Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, 1999.
- CATARINO, P. M. M. C. Bicomplex k-pell quaternions. *Computational Methods and Function Theory*, v. 19, n. 3, p. 1–12, 2018.
- CATARINO, P. M. M. C. k-pell, k-pell–lucas and modified k-pell sedenions. *Asian-European Journal of Mathematics*, v. 12, n. 2, 2019.
- CAWAGAS, R. E. On the structure and zero divisors of the cayley-dickson sedenion algebra. *Discussiones Mathematicae - General Algebra and Applications*, v. 24, p. 251–265, 2004.
- CERDA-MORALES, G. The (s,t)-padovan and (s,t)-perrin matrix sequences. *Submetid*, p. 1–9, fev 2017. Disponível em: <<https://www.researchgate.net/publication/313344447>>.
- CERECEDA, J. L. Binet's formula for generalized tribonacci numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, v. 46, p. 1–9, 04 2015.
- CHEVALLARD, Y. *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. [S.l.]: Buenos Aires: Aique, 1998.
- CIVCIV, H.; TÜRKMEN, R. On the (s,t)-fibonacci and fibonacci matrix sequences. *Ars Combin*, n. 87, p. 161–173, 2008.
- CLAUDIO, D. M.; MARINS, J. M. *Cálculo Numérico Computacional – Teoria e Prática*. [S.l.]: São Paulo: Atlas, 2000.
- CLIFFORD, M. A. Preliminary sketch of bi-quaternions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, v. 4, p. 381–395, 1871.
- DISKAYA, O.; MENKEN, H. On the split (s,t)-padovan and (s,t)-perrin quaternions. *International Journal of Applied Mathematics and Informatics*, v. 13, p. 25–28, 2019.

- ERCOLANO, J. Matrix generators of pell sequences. *The Fibonacci Quarterly*, v. 17, n. 1, p. 71–77, feb. 1979.
- FALCON, S.; PLAZA, A. On the fibonacci k-numbers. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 32, n. 5, p. 1615–1624, 2007.
- FAMILTON, J. *Quaternions: A History of Complex Noncommutative Rotation Groups in Theoretical Physics*. Tese (Doutorado) — Columbia University, 2015.
- FERREIRA, R. de C. *Números Mórficos*. Dissertação (Mestrado) — Mestrado Profissional em Matemática - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2015.
- GOMES, C. A.; OLIVEIRA, O. R. B. de. O teorema de cayley-hamilton. *IME-USP-Oswaldo Rio Branco de Oliveira*, p. 1–11, 2019.
- GULEC, H. H.; TASKARA, N. On the (s,t)-pell and (s,t)-pell-lucas sequences and their matrix representations. *Applied Mathematics Letters*, n. 25, p. 1554–1559, 2012.
- HARE, K.; PRODINGER, H.; SHALLIT, J. Three series for the generalized golden mean. *Fibonacci Quarterly*, v. 52, p. 307–313, 2014.
- HARMAN, C. J. Complex fibonacci numbers. *The Fibonacci Quarterly*, v. 19, p. 82–86, 1981.
- HORADAM, A. F. Quaternion recurrence relations. *Ulam Quarterly*, v. 2, p. 23–33, 1993.
- HORN, R. A.; JOHNSON, C. R. *Topics in Matrix Analysis*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1994.
- HUNTLEY, H. E. *A divina proporção: Um ensaio sobre a Beleza na Matemática*. Tradução Luís Carlos Ascêncio Nunes. [S.l.]: Editora da Universidade de Brasília, 1985.
- IMAEDA, K.; IMAEDA, M. Sedenions: algebra and analysis. *Applied Mathematics and Computation*, v. 115, p. 77–88, 2000.
- INTERNATIONAL, I. M. *Les anciens membres de l'IMI*. 2019. Acesso: 10-Fevereiro-2019. Disponível em: <<https://www.metapsychique.org/les-anciens-membres-de-limi/>>.
- KANTOR, I.; SOLODOVNIKOV, A. S. *Hypercomplex Numbers - An Elementary Introduction to Algebras Translated by A. Shenitzer*. [S.l.: s.n.], 1989.
- KARATAS, A.; HALICI, S. Horadam octonions. *Analele stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta*, v. 25, n. 3, p. 97–106, 2017.
- KECILIOGLU, O.; AKKUS, I. The fibonacci octonions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, v. 25, n. 1, p. 151–158, 2015.
- KNOPP, K. *Theory and Applications of Infinite Series*. [S.l.]: Dover Publications Inc., Nova Iorque, EUA, 1990.
- KOSHY, T. *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. Wiley-Interscience, 2001. ISBN 0471399698. Disponível em: <<https://www.amazon.com/Fibonacci-Lucas-Numbers-Applications-Thomas/dp/0471399698?SubscriptionId=0JYN1NVW651KCA56C102&tag=techkie-20&linkCode=xm2&camp=2025&creative=165953&creativeASIN=0471399698>>.

- LABORDE, C. Affronter la complexité des situations didactiques d'apprentissage des mathématiques en classe: défis et tentatives. *Didaskalia*, n. 1, p. 97–112, 1997.
- LLORCA-BOFÍ, J.; MADRIGAL, J. J. Van der laan and messiaen's creative freedom from a system. *ACE: Architecture, City and Environment*, v. 14, n. 40, p. 275–296, 2019.
- LOPES, A. R. C. *Conhecimento escolar: ciência e cotidiano*. [S.l.]: Rio de Janeiro: EdUERJ, 1999. 236 p.
- MANGUEIRA, M. C. dos S. et al. The hybrid numbers of padovan and some identities. *Annales Mathematicae Silesianae*, Sciendo, Berlin, n. 0, p. 000010247820200019, 2020. Disponível em: <<https://content.sciendo.com/view/journals/amsil/ahead-of-print/article-10.2478-amsil-2020-0019/article-10.2478-amsil-2020-0019.xml>>.
- MARGOLINAS, C. Connaissance et savoir des distinctions frontalières? *Sociologie et didactiques: vers une transgression des frontières*, Lausanne, Suisse, p. 1–39, 2012.
- MAROHNIC, L.; STRMECKI, T. Plastic number: Construction and applications. *Advanced Research in Scientific Areas*, p. 3–7, dec 2012.
- MELZER, E. E. M. A teorias de chevallard e fleck: Relações entre a transposição didática e o tráfego de pensamentos. In: EDUCERE- XII CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO. [S.l.], 2015. p. 460–474.
- MEYER, A. R.; RUBINFELD, R. Generating functions. In: MATHEMATICS FOR COMPUTER SCIENCE - COURSE NOTES - MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY. [S.l.], 2005. p. 1–13.
- MONNEROT-DUMAINE, A. *The Fibonacci Word fractal*. [S.l.]: Hal - archives-ouvertes, 24 pages, 25 figures, 2009.
- OLIVEIRA, G. P.; ARAUJO, P. B. Uma abordagem para o ensino de lugares geométricos com o geogebra. *Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT*, v. 7, n. 2, p. 209–222, 2012.
- OLIVEIRA, R. R. de. *Engenharia Didática sobre o Modelo de Complexificação da Sequência Generalizada de Fibonacci: Relações Recorrentes N-dimensionais e Representações Polinomiais e Matriciais*. Dissertação (Mestrado) — Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE), 2018.
- OLIVEIRA, R. R. de; ALVES, F. R. V.; PAIVA, R. E. B. Identidades bi e tridimensionais para os números de fibonacci na forma complexa. *C.Q.D.-Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, v. 11, n. 2, p. 91–106, 2017.
- OLIVEIRA, R. R. de; ALVES, F. R. V.; SILVA, S. A. da. Uma proposta de atividades com enfoque na teoria das situações didáticas: identidades bi e tridimensionais fibonaccianas. *Caminhos da Educação Matemática em Revista (Online)*, v. 9, n. 3, p. 1–13, 2019.
- OLIVEIRA, R. R. de et al. Engenharia didática: Análises prévias e a priori para a concepção de um objeto de aprendizagem (investigação). In: A VOZ DOS PROFESSORES DE C&T - ENCONTRO INTERNACIONAL - UTAD PORTUGAL. [S.l.], 2018.

- PADOVAN, R. *Dom Hans van der Laan: modern primitive*. [S.l.]: Amsterdam, Architecture & Natura Press, 1994.
- PADOVAN, R. Dom hans van der laan and the plastic number. *Nexus Network Journal*, v. 4, p. 181–193, 01 2002.
- PAIS, L. C. *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa*. 2ª ed. ed. [S.l.]: Belo Horizonte: Autêntica, 2002.
- PAIS, L. C. *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa*. 3. ed. [S.l.]: Belo Horizonte: Autêntica, 2011.
- PERRIN-GLORIAN, M. J.; BELLEMAIN, P. M. B. L'ingenierie didactique entre recherche et ressource pour l'enseignement et la formation desmaîtres. In: I SEMINÁRIO LATINO-AMERICANO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA - LADIMA. 2016. p. 1–51. Disponível em: <http://ladima.tuseon.com.br/uploads/file_manager/source/d7322ed717dedf1eb4e6e52a37ea7bcd/oficinas/CONFER%C3%8ANCIA%203%20-%20FRANC%C3%8AS.pdf>.
- PETHE, S.; HORADAM, A. F. Generalized fibonacci gaussian numbers. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, v. 33, p. 37–48, 1986.
- REES, E. L. Graphical discussion of the roots of a quartic equation. *The American Mathematical Monthly*, v. 2, n. 29, p. 51–55, 1992.
- RODRIGUES, H. W.; GRUBBA, L. S. Bachelard e os obstáculos epistemológicos à pesquisa científica do direito. *Sequência: Estudos Jurídicos e Políticos*, v. 33, n. 64, p. 307–333, 2012.
- SANTOS, A. A. dos. *Engenharia Didática sobre o Estudo e Ensino da Fórmula de Binet como modelo de generalização e extensão da Sequência de Fibonacci*. Dissertação (Mestrado) — Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE), 2017.
- SANTOS, A. dos; ALVES, F. R. V. A engenharia didática em articulação com a teoria das situações didáticas como percurso metodológico ao estudo e ensino de matemática. *Acta Scientiae*, v. 19, n. 3, p. 447–465, maio/jun 2017.
- SANTOS, J. H. R.; BONILLA, H. *Organografia das fanerógamas*. 2003. Monografia Universidade do Estado do Ceará - UECE.
- SEENUKUL, P. et al. Matrices which have similar properties to padovan q -matrix and its generalized relations. *Sakon Nakhon Rajabhat University Journal of Science and Technology*, v. 7, n. 2, p. 90–94, 2015.
- SHOHAM, M. On grassmann's products and clifford's dual unit. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON HISTORY OF MACHINES AND MECHANISMS PROCEEDINGS HMM 2000. [S.l.], 2000. p. 173–180.
- SILVA, I. C. da. *Recorrências: uma abordagem sobre sequências recursivas para aplicações no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) — Mestrado Profissional em Matemática - Universidade de Brasília, 2015.

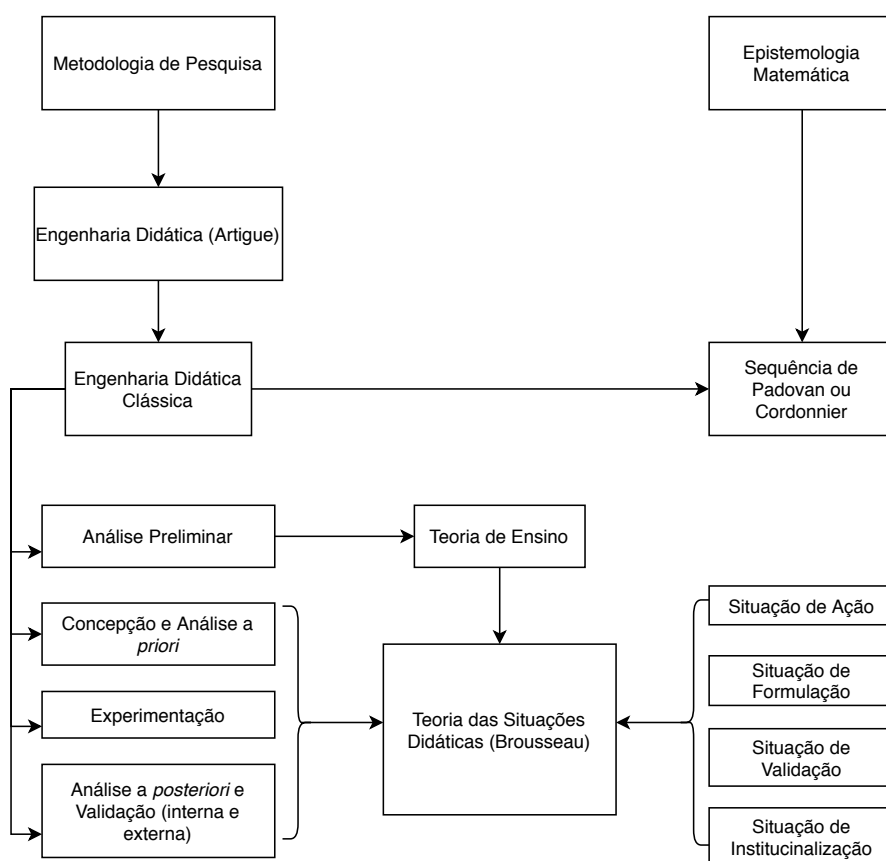
- SOKHUMA, K. Matrices formula for padovan and perrin sequences. *Applied Mathematical Sciences*, v. 7, n. 142, p. 7093–7096, 2013a.
- SOKHUMA, K. Padovan q-matrix and the generalized relations. *Applied Mathematical Sciences*, v. 7, p. 2777–2780, 01 2013b.
- SOYKAN, Y. Generalized pell-padovan numbers. *Asian Journal of Advanced Research and Reports*, v. 11, n. 2, p. 8–28, 2020.
- SPINADEL, V. M. W. de; BUITRAGO, A. R. Towards van der laan's plastic number in the plane. *Journal for Geometry and Graphics*, v. 13, n. 2, p. 163–175, 2009.
- STEWART, I. Tales of a neglected number. *Mathematical Recreations - Scientific American*, v. 274, p. 102–103, 1996.
- Sá, L. S. C.; SPREAFICO, E. V. P. Sobre um novo método de inversão de matrizes de vandermonde para solução de recorrências lineares homogêneas de ordem superior. *Revista Eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática*, v. 8, n. 1, p. 64–72, 2020.
- TAHER, R. B.; RACHIDI, M. Solving some generalized vandermonde systems and inverse of their associate matrices via new approaches for the binet formula. *Applied Mathematics and Computation*, v. 290, p. 267–280, 2016.
- TAS, S.; KARADUMAN, E. The padovan sequences in finite groups. *Chiang Mai Journal of Science*, v. 41, p. 456–462, 09 2014.
- TASCI, D. Gaussian padovan and gaussian pell-padovan sequences. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara-Series A1 Mathematics and Statistics*, v. 67, p. 82–88, 2018a.
- TASCI, D. Padovan and pell-padovan quaternions. *Journal of Science and Arts*, v. 42, n. 1, p. 125–132, 2018b.
- TASYURDU, Y.; AKPINAR, A. Padovan and pell-padovan octonions. *Proceedings of International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME 2019)*, v. 11(Special Issue), p. 114–122, 2019.
- TEIXEIRA, P. J. M.; PASSOS, C. C. M. Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de guy brousseau. *Zetetiké-FE/Unicamp*, v. 21, n. 39, p. 155–168, 2013.
- TEODORO, M. M.; AGUILAR, J. *O método de Newton e fractais*. Dissertação (Mestrado) — Mestrado Profissional em Matemática - Universidade Federal de São João del-Rei, 2015.
- VERRET, M. *Le temps des études*. [S.l.]: Paris: Honoré Champion, 1975.
- VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. Sequência padovan afim e as suas propriedades. *Revista Thema*, v. 15, n. 4, p. 1269–1276, 2018.
- VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. Explorando a sequência de padovan através de investigação histórica e abordagem epistemológica. *Boletim Gepem*, v. 74, p. 161–169, 2019a.
- VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. Identidades tribonacci. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, n. 1, p. 216–226, 2019b.

- VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. Os números duais de padovan. *Revista de Matemática da UFOP - RMAT*, v. 2, p. 52–61, 2019c.
- VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. Propriedades das extensões da sequência de padovan. *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, v. 15, p. 24–40, 2019d.
- VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. Sequences of tridovan and their identities. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, v. 25, n. 3, p. 185–197, 2019e.
- VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. Engenharia didática e a sequência de padovan e tridovan: uma análise preliminar e a priori. *UNION - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, v. 16, n. 59, p. 227–251, 2020.
- VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Alternative views of some extensions of the padovan sequence with the google colab. *Anale. Seria Informatica*, XVII, n. 2, p. 266–273, 2019a.
- VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Relações bidimensionais e identidades da sequência de leonardo. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, n. 2, p. 156–173, 2019b.
- VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Sequência matricial (s_1, s_2, s_3) -tridovan: aspectos históricos e propriedades. *C.Q.D.-Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, v. 16, p. 100–121, 2019c.
- VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Uma exploração da sequência de padovan num curso de licenciatura em matemática. *Indagatio Didactica*, v. 11, n. 4, p. 261–279, 2019d.
- VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A historical analysis of the padovan sequence. *International Journal of Trends in Mathematics Education Research*, v. 3, n. 1, p. 8–12, 2020.
- VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A extensão dos octônios de padovan para inteiros não positivos. *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, p. 1–8, no prelo a.
- VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Uma engenharia didática no processo de investigação da generalização da sequência de padovan: uma experiência em um curso de licenciatura. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática - Acta Scientiae Ulbra*, no prelo b.
- VOET, C.; SCHOONJANS, Y. Benidictine thought as a catalist for 20tm century liturgical space: the motivation behind dom hans van der laan s aesthetic church arquitecture. *Proceeding of the 2nd international conference of the Europa Architetural History of Network*, p. 255–261, 2012.
- WILSON, E. Pascal's triangle. *The Scales of Mt. Meru*, p. 1–18, 1993.
- WITFORD, A. K. Binet's formula generalized. the fibonacci quarterly. *The Fibonacci Quarterly*, v. 15, n. 1, p. 21, 1977.
- YILMAZ, N.; TASKARA, N. Matrix sequences in terms of padovan and perrin numbers. *Journal of Applied Mathematics*, p. 1–7, 2013.

ZIERLER, N. Linear recurring sequences. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, v. 7, n. 1, p. 31–48, march 1959.

Apêndices

APÊNDICE A – Estrutura da Pesquisa baseada em Engenharia Didática em associação com a Teoria das Situações Didáticas



Fonte: Elaborado pela autora

APÊNDICE B – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido



INSTITUTO FEDERAL
DO ESTADO DO CEARÁ - IFCE
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA - PGECEM

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DO ESTADO DO CEARÁ - IFCE
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA - PGECEM

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

“Engenharia Didática (ED): o caso da Sequência de Padovan ou Cordonnier”

Pesquisadora: Renata Passos Machado Vieira

Orientador: Dr. Francisco Regis Vieira Alves

1. Identificação

Você está sendo convidado a participar como voluntário de uma pesquisa de tema: “Engenharia Didática (ED): o caso da Sequência de Padovan ou Cordonnier” pesquisado pela aluna Renata Passos Machado Vieira. Este documento nominado de termo de consentimento livre e esclarecido, visa assegurar os seus direitos como participante, sendo elaborado em duas vias, uma que deverá ficar com você e a outra com a pesquisadora.

Leia atentamente todo o documento, caso haja dúvidas favor comunicar à pesquisadora para que essas sejam sanadas. Você poderá leva-lo para casa, a fim de ler com mais calma e tranquilidade, consultando os seus familiares quando necessário. Não haverá nenhum tipo de penalidade, caso não concorde em participar ou retirar a sua autorização em qualquer momento.

2. Justificativa e objetivos

Justifica-se esta pesquisa no fato de que livros de História da Matemática apresentam discussões superficiais sobre os conceitos matemáticos e as relações oriundas da Sequência de Padovan.

Objetivo geral:

Averiguar os comportamentos e obstáculos epistemológicos surgidos a partir da aplicação das situações didáticas projetadas para o ensino da sequência de Padovan e seu modelo de generalização, comparando-as com as previsões iniciais.

Objetivos Específicos:

- Identificar possíveis percursos metodológicos para o ensino da sequência de Padovan e seu modelo de generalização;
- Examinar se a estrutura axiomática e epistemológica natural do objeto matemático: sequência de Padovan, bem como seu modelo de generalização, com o objetivo de identificar as necessidades de procedimentos de transposição didática ao longo do desenvolvimento do assunto proposto.

3. Procedimentos

Participando do estudo você será convidado a:

Rubrica do pesquisador: _____

Rubrica do participante: _____



INSTITUTO FEDERAL
CEARÁ
Campus Fortaleza

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DO ESTADO DO CEARÁ - IFCE
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA - PGECM

- ✓ Participar da pesquisa que será aplicada em forma de aulas com duração de noventa (90) minutos, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, campus Fortaleza.
- ✓ A previsão de início das aulas de aplicação é de:
- ✓ As aulas serão registradas através de fotos, gravações de áudio e anotações das produções dos participantes.
- ✓ Serão aplicados questionários, com situações-problema propostos de forma de lista de exercícios, com tempo de noventa (90) minutos para as respostas.
- ✓ Os dados coletados serão utilizados somente para a pesquisa e os resultados serão mostrados através de revistas especializadas na área de investigação e/ou encontros científicos e na dissertação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, promovido pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (PGECM/IFCE) no campus Fortaleza, sem expor a identificação dos participantes.

4. Desconfortos e Riscos

Você não deve participar deste estudo, caso venha sentir-se constrangido com algum dos procedimentos anteriormente citados, tendo a liberdade de deixar de participar do estudo em qualquer momento, sem haver nenhum prejuízo para a sua conduta.

5. Benefícios

Os participantes terão a oportunidade de participar de situações didáticas possibilitando aos discentes da Licenciatura em Matemática desenvolver uma concepção epistemológica da História da Matemática através de estudos de definições, teoremas e propriedades matemáticas inerentes à Sequência de Padovani (Cordonnier). Assim, contribuirão com a formação inicial dos professores.

6. Acompanhamento e Assistência

O participante tem a garantia ao acesso, em qualquer etapa do estudo para esclarecimentos de eventuais dúvidas na instituição em que você estuda. Para maiores informações nosso contato é (85) 9 99108052, e-mail: re.passosm@gmail.com.

7. Sigilo e Privacidade

Você tem a garantia de que a sua identidade será mantida em sigilo e nenhuma informação será dada à terceiros que não faça parte da equipe de pesquisadores. Durante a divulgação dos resultados desse estudo, o seu nome não será revelado.

Rubrica do pesquisador: _____

Rubrica do participante: _____



INSTITUTO FEDERAL
CEARÁ
Campus Fortaleza

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DO ESTADO DO CEARÁ - IFCE
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA - PGECM

8. Ressarcimento e Indenização

Não existirão despesas para o participante em qualquer fase da pesquisa e também o mesmo não receberá nenhuma remuneração para participar do estudo. Você terá garantia ao direito de indenização caso algum dos itens anteriores seja violado.

9. Contato

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, você poderá entrar em contato com a pesquisadora Renata Passos Machado Vieira pelo celular (85) 9 99108052 ou pelo e-mail: re.passosm@gmail.com. Em caso de dúvidas e reclamações sobre a sua participação, além de questões de ética do estudo, você deverá entrar em contato com a secretária do Comitê de Ética e Pesquisa (CEP) do IFCE, das 8h às 12h e das 13h às 17h, localizada na Rua Jorge Dumar, nº 1703, Jardim América, no IFCE Reitoria, Fortaleza-CE, 60410-426, fone: (85) 34012332, e-mail: cep@ifce.edu.br

10. Observações Finais

Ao assinar este termo, o participante concorda voluntariamente em participar desta pesquisa e permite o registro de fotos, áudios e anotações de suas produções durante a aplicação da pesquisa, desde que possa retirar seu consentimento a qualquer momento sem penalidade ou prejuízos de qualquer natureza.

11. Consentimento Livre e Esclarecido

Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais de riscos e o incômodo que esta possa acarretar, aceito participar e declaro estar recebendo uma via original deste documento assinada pelo pesquisador e por mim, tendo todas as folhas por nós rubricadas:

Nome do(a) participante:

e-mail (opcional):

(Assinatura do participante ou nome e assinatura do seu RESPONSÁVEL LEGAL)

Data: ____/____/____.

Rubrica do pesquisador: _____

Rubrica do participante: _____



INSTITUTO FEDERAL
DO ESTADO DO CEARÁ - IFCE
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA - PGECM

Responsabilidade do Pesquisador:

Asseguro ter cumprido as exigências da resolução 466/2012 CNS/MS e complementares na elaboração do protocolo e na obtenção deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Asseguro também, ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Informo que o estudo foi aprovado pelo CEP perante o qual o projeto foi apresentado e pela CONEP, quando pertinente. Comprometo-me a utilizar o material e os dados obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

Pesquisadora,

Renata Passos Machado Vieira

Fortaleza, ____ de ____ de ____

Rubrica do pesquisador: _____

Rubrica do participante: _____

APÊNDICE C – Matrizes Geradoras Q de Tridovan válidas

Sendo os valores iniciais da sequência de Tridovan iguais a: $P_{3(0)} = 1, P_{3(1)} = 0, P_{3(2)} = P_{3(3)} = 1$, existem vinte e quatro matrizes válidas de ordem 4, sendo uma já exposta na subseção 3.2.2. Assim, seguem as outras vinte e três, com $n \in \mathbb{N}$:

Matriz 1. Para $Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se

$$Q_3^n = \begin{bmatrix} P_{3(n)} & P_{3(n+1)} & P_{3(n-2)} & P_{3(n-1)} \\ P_{3(n-1)} & P_{3(n)} & P_{3(n-3)} & P_{3(n-2)} \\ P_{3(n-2)} & P_{3(n-1)} & P_{3(n-4)} & P_{3(n-3)} \\ (P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)}) & (P_{3(n-1)} + P_{3(n-2)}) & (P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)}) & (P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}) \end{bmatrix}, \text{ para todo}$$

$n \geq 5$.

Demonstração. Aplicando o princípio da indução, tem-se que:

Para $n = 5$, tem-se:

$$\begin{aligned} Q_3^5 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{3(5)} & P_{3(6)} & P_{3(3)} & P_{3(4)} \\ P_{3(4)} & P_{3(5)} & P_{3(2)} & P_{3(3)} \\ P_{3(3)} & P_{3(4)} & P_{3(1)} & P_{3(2)} \\ (P_{3(3)} + P_{3(2)}) & (P_{3(4)} + P_{3(3)}) & (P_{3(1)} + P_{3(0)}) & (P_{3(2)} + P_{3(1)}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, a igualdade é válida.

Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\begin{aligned} Q_3^k &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k \\ &= \begin{bmatrix} P_{3(k)} & P_{3(k+1)} & P_{3(k-2)} & P_{3(k-1)} \\ P_{3(k-1)} & P_{3(k)} & P_{3(k-3)} & P_{3(k-2)} \\ P_{3(k-2)} & P_{3(k-1)} & P_{3(k-4)} & P_{3(k-3)} \\ (P_{3(k-2)} + P_{3(k-3)}) & (P_{3(k-1)} + P_{3(k-2)}) & (P_{3(k-4)} + P_{3(k-5)}) & (P_{3(k-3)} + P_{3(k-4)}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Agora, verificando que seja válido para $n = k + 1$, tem-se:

$$\begin{aligned}
Q_3^{k+1} &= Q_3^k Q_3 \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} P_{3(k)} & P_{3(k+1)} & P_{3(k-2)} & P_{3(k-1)} \\ P_{3(k-1)} & P_{3(k)} & P_{3(k-3)} & P_{3(k-2)} \\ P_{3(k-2)} & P_{3(k-1)} & P_{3(k-4)} & P_{3(k-3)} \\ (P_{3(k-2)} + P_{3(k-3)}) & (P_{3(k-1)} + P_{3(k-2)}) & (P_{3(k-4)} + P_{3(k-5)}) & (P_{3(k-3)} + P_{3(k-4)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} P_{3(k+1)} & P_{3(k)} + P_{3(k-2)} + P_{3(k-1)} & P_{3(k-1)} & P_{3(k)} \\ P_{3(k)} & P_{3(k-1)} + P_{3(k-3)} + P_{3(k-2)} & P_{3(k-2)} & P_{3(k-1)} \\ P_{3(k-1)} & P_{3(k-2)} + P_{3(k-4)} + P_{3(k-3)} & P_{3(k-3)} & P_{3(k-2)} \\ P_{3(k-1)} + P_{3(k-2)} & P_{3(k)} + P_{3(k-1)} & P_{3(k-3)} + P_{3(k-4)} & P_{3(k-2)} + P_{3(k-3)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} P_{3(k+1)} & P_{3(k+2)} & P_{3(k-1)} & P_{3(k)} \\ P_{3(k)} & P_{3(k+1)} & P_{3(k-2)} & P_{3(k-1)} \\ P_{3(k-1)} & P_{3(k)} & P_{3(k-3)} & P_{3(k-2)} \\ (P_{3(k-1)} + P_{3(k-2)}) & (P_{3(k)} + P_{3(k-1)}) & (P_{3(k-3)} + P_{3(k-4)}) & (P_{3(k-2)} + P_{3(k-3)}) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Matriz 2. Para $Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se

$$Q_3^n = \begin{bmatrix} P_{3(n)} & P_{3(n+1)} & P_{3(n-1)} & P_{3(n-2)} \\ P_{3(n-1)} & P_{3(n)} & P_{3(n-2)} & P_{3(n-3)} \\ (P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)}) & (P_{3(n-1)} + P_{3(n-2)}) & (P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}) & (P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)}) \\ P_{3(n-2)} & P_{3(n-1)} & P_{3(n-3)} & P_{3(n-4)} \end{bmatrix},$$

para todo $n \geq 5$.

Demonstração. Baseado nisso, as demais matrizes válidas poderão ser demonstradas utilizando o mesmo princípio utilizado na matriz C.

□

Matriz 3. Para $Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se

$$Q_3^n = \begin{bmatrix} P_{3(n)} & P_{3(n-3)} & P_{3(n-1)} & P_{3(n-2)} \\ P_{3(n-1)} & P_{3(n-4)} & P_{3(n-2)} & P_{3(n-3)} \\ P_{3(n+1)} & P_{3(n-2)} & P_{3(n)} & P_{3(n-1)} \\ (P_{3(n-1)} + P_{3(n-2)}) & (P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)}) & (P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)}) & (P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}) \end{bmatrix}, \text{ para todo } n \geq 5.$$

Matriz 4. Para $Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se

$$Q_3^n = \begin{bmatrix} P_{3(n)} & P_{3(n-3)} & P_{3(n-2)} & P_{3(n-1)} \\ P_{3(n-1)} & P_{3(n-4)} & P_{3(n-3)} & P_{3(n-2)} \\ (P_{3(n-1)} + P_{3(n-2)}) & (P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)}) & (P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}) & (P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)}) \\ P_{3(n+1)} & P_{3(n-2)} & P_{3(n-1)} & P_{3(n)} \end{bmatrix}, \text{ para todo } n \geq 5.$$

Matriz 5. Para $Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se

$$Q_3^n = \begin{bmatrix} P_{3(n)} & P_{3(n-2)} & P_{3(n-1)} & P_{3(n-3)} \\ (P_{3(n-1)} + P_{3(n-2)}) & (P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}) & (P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)}) & (P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)}) \\ P_{3(n+1)} & P_{3(n-1)} & P_{3(n)} & P_{3(n-2)} \\ P_{3(n-1)} & P_{3(n-3)} & P_{3(n-2)} & P_{3(n-4)} \end{bmatrix}, \text{ para todo } n \geq 5.$$

Matriz 6. Para $Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se

$$Q_3^n = \begin{bmatrix} P_{3(n)} & P_{3(n-1)} & P_{3(n-3)} & P_{3(n-2)} \\ P_{3(n+1)} & P_{3(n)} & P_{3(n-2)} & P_{3(n-1)} \\ P_{3(n-1)} & P_{3(n-2)} & P_{3(n-4)} & P_{3(n-3)} \\ (P_{3(n-1)} + P_{3(n-2)}) & (P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)}) & (P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)}) & (P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}) \end{bmatrix}, \text{ para}$$

todo $n \geq 5$.

Matriz 7. Para $Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se

$$Q_3^n = \begin{bmatrix} P_{3(n)} & P_{3(n-2)} & P_{3(n-3)} & P_{3(n-1)} \\ (P_{3(n-1)} + P_{3(n-2)}) & (P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}) & (P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)}) & (P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)}) \\ P_{3(n-1)} & P_{3(n-3)} & P_{3(n-4)} & P_{3(n-2)} \\ P_{3(n+1)} & P_{3(n-1)} & P_{3(n-2)} & P_{3(n)} \end{bmatrix}, \text{para todo}$$

$n \geq 5$.

Matriz 8. Para $Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se

$$Q_3^n = \begin{bmatrix} P_{3(n-4)} & P_{3(n-1)} & P_{3(n-2)} & P_{3(n-3)} \\ P_{3(n-3)} & P_{3(n)} & P_{3(n-1)} & P_{3(n-2)} \\ P_{3(n-2)} & P_{3(n+1)} & P_{3(n)} & P_{3(n-1)} \\ (P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)}) & (P_{3(n-1)} + P_{3(n-2)}) & (P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)}) & (P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}) \end{bmatrix}, \text{ para}$$

todo $n \geq 5$.

Matriz 9. Para $Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se

$$Q_3^n = \begin{bmatrix} (P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}) & (P_{3(n-1)} + P_{3(n-2)}) & (P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)}) & (P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)}) \\ P_{3(n-2)} & P_{3(n)} & P_{3(n-3)} & P_{3(n-1)} \\ P_{3(n-3)} & P_{3(n-1)} & P_{3(n-4)} & P_{3(n-2)} \\ P_{3(n-1)} & P_{3(n+1)} & P_{3(n-2)} & P_{3(n)} \end{bmatrix}, \text{ para}$$

todo $n \geq 5$.

Matriz 10. Para $Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se

$$Q_3^n = \begin{bmatrix} P_{3(n-4)} & P_{3(n-1)} & P_{3(n-3)} & P_{3(n-2)} \\ P_{3(n-3)} & P_{3(n)} & P_{3(n-2)} & P_{3(n-1)} \\ (P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)}) & (P_{3(n-1)} + P_{3(n-2)}) & (P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}) & (P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)}) \\ P_{3(n-2)} & P_{3(n+1)} & P_{3(n-1)} & P_{3(n)} \end{bmatrix}, \text{ para}$$

todo $n \geq 5$.

Matriz 11. Para $Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se

$$Q_3^n = \begin{bmatrix} (P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}) & (P_{3(n-1)} + P_{3(n-2)}) & (P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)}) & (P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)}) \\ P_{3(n-2)} & P_{3(n)} & P_{3(n-1)} & P_{3(n-3)} \\ P_{3(n-1)} & P_{3(n+1)} & P_{3(n)} & P_{3(n-2)} \\ P_{3(n-3)} & P_{3(n-1)} & P_{3(n-2)} & P_{3(n-4)} \end{bmatrix}, \text{ para}$$

todo $n \geq 5$.

Matriz 12. Para $Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se

$$Q_3^n = \begin{bmatrix} P_{3(n)} & P_{3(n-2)} & P_{3(n+1)} & P_{3(n-1)} \\ P_{3(n-2)} & P_{3(n-4)} & P_{3(n-1)} & P_{3(n-3)} \\ P_{3(n-1)} & P_{3(n-3)} & P_{3(n)} & P_{3(n-2)} \\ (P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)}) & (P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)}) & (P_{3(n-1)} + P_{3(n-2)}) & (P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}) \end{bmatrix}, \text{ para todo}$$

$n \geq 5$.

Matriz 13. Para $Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se

$$Q_3^n = \begin{bmatrix} P_{3(n)} & P_{3(n-1)} & P_{3(n+1)} & P_{3(n-2)} \\ (P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)}) & (P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}) & (P_{3(n-1)} + P_{3(n-2)}) & (P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)}) \\ P_{3(n-1)} & P_{3(n-2)} & P_{3(n)} & P_{3(n-3)} \\ P_{3(n-2)} & P_{3(n-3)} & P_{3(n-1)} & P_{3(n-4)} \end{bmatrix}, \text{ para}$$

todo $n \geq 5$.

Matriz 14. Para $Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se

$$Q_3^n = \begin{bmatrix} P_{3(n-4)} & P_{3(n-3)} & P_{3(n-1)} & P_{3(n-2)} \\ (P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)}) & (P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}) & (P_{3(n-1)} + P_{3(n-2)}) & (P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)}) \\ P_{3(n-3)} & P_{3(n-2)} & P_{3(n)} & P_{3(n-1)} \\ P_{3(n-2)} & P_{3(n-1)} & P_{3(n+1)} & P_{3(n)} \end{bmatrix}, \text{ para}$$

todo $n \geq 5$.

Matriz 15. Para $Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se

$$Q_3^n = \begin{bmatrix} (P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}) & (P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)}) & (P_{3(n-1)} + P_{3(n-2)}) & (P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)}) \\ P_{3(n-1)} & P_{3(n)} & P_{3(n+1)} & P_{3(n-2)} \\ P_{3(n-2)} & P_{3(n-1)} & P_{3(n)} & P_{3(n-3)} \\ P_{3(n-3)} & P_{3(n-2)} & P_{3(n-1)} & P_{3(n-4)} \end{bmatrix}, \text{ para todo}$$

$n \geq 5$.

Matriz 16. Para $Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se

$$Q_3^n = \begin{bmatrix} (P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}) & (P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)}) & (P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)}) & (P_{3(n-1)} + P_{3(n-2)}) \\ P_{3(n-1)} & P_{3(n)} & P_{3(n-2)} & P_{3(n+1)} \\ P_{3(n-3)} & P_{3(n-2)} & P_{3(n-4)} & P_{3(n-1)} \\ P_{3(n-2)} & P_{3(n-1)} & P_{3(n-3)} & P_{3(n)} \end{bmatrix}, \text{ para}$$

todo $n \geq 5$.

Matriz 17. Para $Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se

$$Q_3^n = \begin{bmatrix} P_{3(n-4)} & P_{3(n-3)} & P_{3(n-2)} & P_{3(n-1)} \\ (P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)}) & (P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}) & (P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)}) & (P_{3(n-1)} + P_{3(n-2)}) \\ P_{3(n-2)} & P_{3(n-1)} & P_{3(n)} & P_{3(n+1)} \\ P_{3(n-3)} & P_{3(n-2)} & P_{3(n-1)} & P_{3(n)} \end{bmatrix}, \text{ para}$$

todo $n \geq 5$.

Matriz 18. Para $Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se

$$Q_3^n = \begin{bmatrix} P_{3(n-4)} & P_{3(n-2)} & P_{3(n-1)} & P_{3(n-3)} \\ P_{3(n-2)} & P_{3(n)} & P_{3(n+1)} & P_{3(n-1)} \\ P_{3(n-3)} & P_{3(n-1)} & P_{3(n)} & P_{3(n-2)} \\ (P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)}) & (P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)}) & (P_{3(n-1)} + P_{3(n-2)}) & (P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}) \end{bmatrix}, \text{ para}$$

todo $n \geq 5$.

$$\textbf{Matriz 19. Para } Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ tem-se}$$

$$Q_3^n = \begin{bmatrix} (P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}) & (P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)}) & (P_{3(n-1)} + P_{3(n-2)}) & (P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)}) \\ P_{3(n-3)} & P_{3(n-4)} & P_{3(n-1)} & P_{3(n-2)} \\ P_{3(n-2)} & P_{3(n-3)} & P_{3(n)} & P_{3(n-1)} \\ P_{3(n-1)} & P_{3(n-2)} & P_{3(n+1)} & P_{3(n)} \end{bmatrix}, \text{ para}$$

todo $n \geq 5$.

$$\textbf{Matriz 20. Para } Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ tem-se}$$

$$Q_3^n = \begin{bmatrix} P_{3(n)} & P_{3(n-2)} & P_{3(n-1)} & P_{3(n+1)} \\ P_{3(n-2)} & P_{3(n-4)} & P_{3(n-3)} & P_{3(n-1)} \\ (P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)}) & (P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)}) & (P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}) & (P_{3(n-1)} + P_{3(n-2)}) \\ P_{3(n-1)} & P_{3(n-3)} & P_{3(n-2)} & P_{3(n)} \end{bmatrix}, \text{ para todo}$$

$n \geq 5$.

$$\textbf{Matriz 21. Para } Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ tem-se}$$

$$Q_3^n = \begin{bmatrix} P_{3(n)} & P_{3(n-1)} & P_{3(n-2)} & P_{3(n+1)} \\ (P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)}) & (P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}) & (P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)}) & (P_{3(n-1)} + P_{3(n-2)}) \\ P_{3(n-2)} & P_{3(n-3)} & P_{3(n-4)} & P_{3(n-1)} \\ P_{3(n-1)} & P_{3(n-2)} & P_{3(n-3)} & P_{3(n)} \end{bmatrix}, \text{ para}$$

todo $n \geq 5$.

Matriz 22. Para $Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se

$$Q_3^n = \begin{bmatrix} P_{3(n-4)} & P_{3(n-2)} & P_{3(n-3)} & P_{3(n-1)} \\ P_{3(n-2)} & P_{3(n)} & P_{3(n-1)} & P_{3(n+1)} \\ (P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)}) & (P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)}) & (P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}) & (P_{3(n-1)} + P_{3(n-2)}) \\ P_{3(n-3)} & P_{3(n-1)} & P_{3(n-2)} & P_{3(n)} \end{bmatrix}, \text{ para}$$

todo $n \geq 5$.

Matriz 23. Para $Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se

$$Q_3^n = \begin{bmatrix} (P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}) & (P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)}) & (P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)}) & (P_{3(n-1)} + P_{3(n-2)}) \\ P_{3(n-3)} & P_{3(n-4)} & P_{3(n-2)} & P_{3(n-1)} \\ P_{3(n-1)} & P_{3(n-2)} & P_{3(n)} & P_{3(n+1)} \\ P_{3(n-2)} & P_{3(n-3)} & P_{3(n-1)} & P_{3(n)} \end{bmatrix}, \text{ para todo}$$

$n \geq 5$.

APÊNDICE D – Algumas Matrizes Geradoras Q de Tetradovan válidas

Tendo em vista que a quantidade de matrizes válidas, de ordem 5, da sequência de Tetradovan são 120, neste apêndice serão mostradas apenas 6, com $n \in \mathbb{N}$, e sendo os termos iniciais da sequência descritos como: $P_{4(0)} = 1, P_{4(1)} = 0, P_{4(2)} = P_{4(3)} = 1, P_{4(4)} = 2$. Além disso, seja $Q_4(i, j)$ o termo da matriz Q_4 , representado por i a linha e j a coluna, nas demais matrizes abaixo.

$$\textbf{Matriz 1. Para } Q_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ tem-se}$$

$$Q_4^n = \begin{bmatrix} Q_4(1,1) & Q_4(1,2) & Q_4(1,3) & Q_4(1,4) & Q_4(1,5) \\ Q_4(2,1) & Q_4(2,2) & Q_4(2,3) & Q_4(2,4) & Q_4(2,5) \\ Q_4(3,1) & Q_4(3,2) & Q_4(3,3) & Q_4(3,4) & Q_4(3,5) \\ Q_4(4,1) & Q_4(4,2) & Q_4(4,3) & Q_4(4,4) & Q_4(4,5) \\ Q_4(5,1) & Q_4(5,2) & Q_4(5,3) & Q_4(5,4) & Q_4(5,5) \end{bmatrix}, \text{ para todo } n \geq 7.$$

Sendo cada termo representado por:

$$\begin{aligned} Q_4^n(1,1) &= P_{4(n)}, \\ Q_4^n(1,2) &= P_{4(n-1)}, \\ Q_4^n(1,3) &= P_{4(n-2)}, \\ Q_4^n(1,4) &= P_{4(n-4)}, \\ Q_4^n(1,5) &= P_{4(n-3)}, \\ Q_4^n(2,1) &= P_{4(n+1)}, \\ Q_4^n(2,2) &= P_{4(n)}, \\ Q_4^n(2,3) &= P_{4(n-1)}, \\ Q_4^n(2,4) &= P_{4(n-3)}, \\ Q_4^n(2,5) &= P_{4(n-2)}, \\ Q_4^n(3,1) &= P_{4(n-1)} + P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)}, \\ Q_4^n(3,2) &= P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)}, \\ Q_4^n(3,3) &= P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)}, \end{aligned}$$

$$Q_4^n(3, 4) = P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)} + P_{4(n-7)},$$

$$Q_4^n(3, 5) = P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)},$$

$$Q_4^n(4, 1) = P_{4(n-1)},$$

$$Q_4^n(4, 2) = P_{4(n-2)},$$

$$Q_4^n(4, 3) = P_{4(n-3)},$$

$$Q_4^n(4, 4) = P_{4(n-5)},$$

$$Q_4^n(4, 5) = P_{4(n-4)},$$

$$Q_4^n(5, 1) = P_{4(n-1)} + P_{4(n-2)},$$

$$Q_4^n(5, 2) = P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)},$$

$$Q_4^n(5, 3) = P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)},$$

$$Q_4^n(5, 4) = P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)},$$

$$Q_4^n(5, 5) = P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)}.$$

Demonstração. Pelo princípio da indução, tem-se que:

Para $n = 7$, tem-se:

$$Q_4^7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^7 = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 10 & 7 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 6 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Q_4(1, 1) & Q_4(1, 2) & Q_4(1, 3) & Q_4(1, 4) & Q_4(1, 5) \\ Q_4(2, 1) & Q_4(2, 2) & Q_4(2, 3) & Q_4(2, 4) & Q_4(2, 5) \\ Q_4(3, 1) & Q_4(3, 2) & Q_4(3, 3) & Q_4(3, 4) & Q_4(3, 5) \\ Q_4(4, 1) & Q_4(4, 2) & Q_4(4, 3) & Q_4(4, 4) & Q_4(4, 5) \\ Q_4(5, 1) & Q_4(5, 2) & Q_4(5, 3) & Q_4(5, 4) & Q_4(5, 5) \end{bmatrix}.$$

Sendo os elementos expressos por:

$$Q_4(1, 1) = P_{4(7)},$$

$$Q_4(1, 2) = P_{4(6)},$$

$$Q_4(1, 3) = P_{4(5)},$$

$$Q_4(1, 4) = P_{4(3)},$$

$$Q_4(1, 5) = P_{4(4)},$$

$$Q_4(2, 1) = P_{4(8)},$$

$$Q_4(2, 2) = P_{4(7)},$$

$$Q_4(2, 3) = P_{4(6)},$$

$$Q_4(2, 4) = P_{4(4)},$$

$$Q_4(2, 5) = P_{4(5)},$$

$$Q_4(3, 1) = P_{4(6)} + P_{4(5)} + P_{4(4)},$$

$$Q_4(3, 2) = P_{4(5)} + P_{4(4)} + P_{4(3)},$$

$$Q_4(3, 3) = P_{4(4)} + P_{4(3)} + P_{4(2)},$$

$$Q_4(3, 4) = P_{4(2)} + P_{4(1)} + P_{4(0)},$$

$$Q_4(3, 5) = P_{4(3)} + P_{4(2)} + P_{4(1)},$$

$$Q_4(4, 1) = P_{4(6)},$$

$$Q_4(4, 2) = P_{4(5)},$$

$$Q_4(4, 3) = P_{4(4)},$$

$$Q_4(4, 4) = P_{4(2)},$$

$$Q_4(4, 5) = P_{4(3)},$$

$$Q_4(5, 1) = P_{4(6)} + P_{4(5)},$$

$$Q_4(5, 2) = P_{4(5)} + P_{4(4)},$$

$$Q_4(5, 3) = P_{4(4)} + P_{4(3)},$$

$$Q_4(5, 4) = P_{4(2)} + P_{4(1)},$$

$$Q_4(5, 5) = P_{4(3)} + P_{4(2)}.$$

Assim, a igualdade é válida.

Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$Q_4^k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Q_4(1, 1) & Q_4(1, 2) & Q_4(1, 3) & Q_4(1, 4) & Q_4(1, 5) \\ Q_4(2, 1) & Q_4(2, 2) & Q_4(2, 3) & Q_4(2, 4) & Q_4(2, 5) \\ Q_4(3, 1) & Q_4(3, 2) & Q_4(3, 3) & Q_4(3, 4) & Q_4(3, 5) \\ Q_4(4, 1) & Q_4(4, 2) & Q_4(4, 3) & Q_4(4, 4) & Q_4(4, 5) \\ Q_4(5, 1) & Q_4(5, 2) & Q_4(5, 3) & Q_4(5, 4) & Q_4(5, 5) \end{bmatrix}.$$

Sendo os elementos expressos por:

$$Q_4(1, 1) = P_{4(k)},$$

$$Q_4(1, 2) = P_{4(k-1)},$$

$$Q_4(1, 3) = P_{4(k-2)},$$

$$Q_4(1, 4) = P_{4(k-4)},$$

$$Q_4(1, 5) = P_{4(k-3)},$$

$$Q_4(2, 1) = P_{4(k+1)},$$

$$Q_4(2, 2) = P_{4(k)},$$

$$Q_4(2, 3) = P_{4(k-1)},$$

$$Q_4(2, 4) = P_{4(k-3)},$$

$$Q_4(2, 5) = P_{4(k-2)},$$

$$Q_4(3, 1) = P_{4(k-1)} + P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)},$$

$$Q_4(3, 2) = P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)},$$

$$Q_4(3, 3) = P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)},$$

$$Q_4(3, 4) = P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)} + P_{4(k-7)},$$

$$Q_4(3, 5) = P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)},$$

$$\begin{aligned}
Q_4(4, 1) &= P_{4(k-1)}, \\
Q_4(4, 2) &= P_{4(k-2)}, \\
Q_4(4, 3) &= P_{4(k-3)}, \\
Q_4(4, 4) &= P_{4(k-5)}, \\
Q_4(4, 5) &= P_{4(k-4)}, \\
Q_4(5, 1) &= P_{4(k-1)} + P_{4(k-2)}, \\
Q_4(5, 2) &= P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)}, \\
Q_4(5, 3) &= P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)}, \\
Q_4(5, 4) &= P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)}, \\
Q_4(5, 5) &= P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)}.
\end{aligned}$$

Agora, verificando que seja válido para $n = k + 1$, tem-se:

$$\begin{aligned}
Q_4^{k+1} &= Q_4^k Q_4 \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} Q_4(1, 1) & Q_4(1, 2) & Q_4(1, 3) & Q_4(1, 4) & Q_4(1, 5) \\ Q_4(2, 1) & Q_4(2, 2) & Q_4(2, 3) & Q_4(2, 4) & Q_4(2, 5) \\ Q_4(3, 1) & Q_4(3, 2) & Q_4(3, 3) & Q_4(3, 4) & Q_4(3, 5) \\ Q_4(4, 1) & Q_4(4, 2) & Q_4(4, 3) & Q_4(4, 4) & Q_4(4, 5) \\ Q_4(5, 1) & Q_4(5, 2) & Q_4(5, 3) & Q_4(5, 4) & Q_4(5, 5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} Q'_4(1, 1) & Q'_4(1, 2) & Q'_4(1, 3) & Q'_4(1, 4) & Q'_4(1, 5) \\ Q'_4(2, 1) & Q'_4(2, 2) & Q'_4(2, 3) & Q'_4(2, 4) & Q'_4(2, 5) \\ Q'_4(3, 1) & Q'_4(3, 2) & Q'_4(3, 3) & Q'_4(3, 4) & Q'_4(3, 5) \\ Q'_4(4, 1) & Q'_4(4, 2) & Q'_4(4, 3) & Q'_4(4, 4) & Q'_4(4, 5) \\ Q'_4(5, 1) & Q'_4(5, 2) & Q'_4(5, 3) & Q'_4(5, 4) & Q'_4(5, 5) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Realizando a operação matemática, encontra-se que:

$$\begin{aligned}
Q'_4(1, 1) &= P_{4(k-1)} + P_{4(k-2)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-3)} = P_{4(k+1)}, \\
Q'_4(1, 2) &= P_{4(k)}, \\
Q'_4(1, 3) &= P_{4(k-1)}, \\
Q'_4(1, 4) &= P_{4(k-3)}, \\
Q'_4(1, 5) &= P_{4(k-2)}, \\
Q'_4(2, 1) &= P_{4(k)} + P_{4(k-1)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-2)} = P_{4(k+2)}, \\
Q'_4(2, 2) &= P_{4(k+1)}, \\
Q'_4(2, 3) &= P_{4(k)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q'_4(2, 4) &= P_{4(k-2)}, \\
Q'_4(2, 5) &= P_{4(k-1)}, \\
Q'_4(3, 1) &= P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)} + \\
&\quad P_{4(k-7)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)} = P_{4(k)} + P_{4(k-1)} + P_{4(k-2)}, \\
Q'_4(3, 2) &= P_{4(k-1)} + P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)}, \\
Q'_4(3, 3) &= P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)}, \\
Q'_4(3, 4) &= P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)}, \\
Q'_4(3, 5) &= P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)}, \\
Q'_4(4, 1) &= P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-4)} = P_{4(k)}, \\
Q'_4(4, 2) &= P_{4(k-1)}, \\
Q'_4(4, 3) &= P_{4(k-2)}, \\
Q'_4(4, 4) &= P_{4(k-4)}, \\
Q'_4(4, 5) &= P_{4(k-3)}, \\
Q'_4(5, 1) &= P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} = \\
&\quad P_{4(k)} + P_{4(k-1)}, \\
Q'_4(5, 2) &= P_{4(k-1)} + P_{4(k-2)}, \\
Q'_4(5, 3) &= P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)}, \\
Q'_4(5, 4) &= P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)}, \\
Q'_4(5, 5) &= P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)}.
\end{aligned}$$

□

Matriz 2. Para $Q_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se

$$Q_4^n = \begin{bmatrix} Q_4(1, 1) & Q_4(1, 2) & Q_4(1, 3) & Q_4(1, 4) & Q_4(1, 5) \\ Q_4(2, 1) & Q_4(2, 2) & Q_4(2, 3) & Q_4(2, 4) & Q_4(2, 5) \\ Q_4(3, 1) & Q_4(3, 2) & Q_4(3, 3) & Q_4(3, 4) & Q_4(3, 5) \\ Q_4(4, 1) & Q_4(4, 2) & Q_4(4, 3) & Q_4(4, 4) & Q_4(4, 5) \\ Q_4(5, 1) & Q_4(5, 2) & Q_4(5, 3) & Q_4(5, 4) & Q_4(5, 5) \end{bmatrix}, \text{ para todo } n \geq 7.$$

Onde os termos são representados por:

$$\begin{aligned}
Q_4^n(1, 1) &= P_{4(n)}, \\
Q_4^n(1, 2) &= P_{4(n-2)}, \\
Q_4^n(1, 3) &= P_{4(n-1)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_4^n(1, 4) &= P_{4(n-3)}, \\
Q_4^n(1, 5) &= P_{4(n-4)}, \\
Q_4^n(2, 1) &= P_{4(n-1)} + P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)}, \\
Q_4^n(2, 2) &= P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)}, \\
Q_4^n(2, 3) &= P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)}, \\
Q_4^n(2, 4) &= P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)}, \\
Q_4^n(2, 5) &= P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)} + P_{4(n-7)}, \\
Q_4^n(3, 1) &= P_{4(n+1)}, \\
Q_4^n(3, 2) &= P_{4(n-1)}, \\
Q_4^n(3, 3) &= P_{4(n)}, \\
Q_4^n(3, 4) &= P_{4(n-2)}, \\
Q_4^n(3, 5) &= P_{4(n-3)}, \\
Q_4^n(4, 1) &= P_{4(n-1)} + P_{4(n-2)}, \\
Q_4^n(4, 2) &= P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)}, \\
Q_4^n(4, 3) &= P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)}, \\
Q_4^n(4, 4) &= P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)}, \\
Q_4^n(4, 5) &= P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)}, \\
Q_4^n(5, 1) &= P_{4(n-1)}, \\
Q_4^n(5, 2) &= P_{4(n-3)}, \\
Q_4^n(5, 3) &= P_{4(n-2)}, \\
Q_4^n(5, 4) &= P_{4(n-4)}, \\
Q_4^n(5, 5) &= P_{4(n-5)}.
\end{aligned}$$

Demonstração. Utilizando o princípio da indução finita como realizado na Matriz 1, pode-se demonstrar essa e as demais matrizes transcritas no decorrer deste apêndice.

□

Matriz 3. Para $Q_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se

$$Q_4^n = \begin{bmatrix} Q_4(1, 1) & Q_4(1, 2) & Q_4(1, 3) & Q_4(1, 4) & Q_4(1, 5) \\ Q_4(2, 1) & Q_4(2, 2) & Q_4(2, 3) & Q_4(2, 4) & Q_4(2, 5) \\ Q_4(3, 1) & Q_4(3, 2) & Q_4(3, 3) & Q_4(3, 4) & Q_4(3, 5) \\ Q_4(4, 1) & Q_4(4, 2) & Q_4(4, 3) & Q_4(4, 4) & Q_4(4, 5) \\ Q_4(5, 1) & Q_4(5, 2) & Q_4(5, 3) & Q_4(5, 4) & Q_4(5, 5) \end{bmatrix}, \text{ para todo } n \geq 7.$$

Onde os termos são representados por:

$$\begin{aligned}
Q_4^n(1, 1) &= P_{4(n)}, \\
Q_4^n(1, 2) &= P_{4(n-2)}, \\
Q_4^n(1, 3) &= P_{4(n-1)}, \\
Q_4^n(1, 4) &= P_{4(n-4)}, \\
Q_4^n(1, 5) &= P_{4(n-3)}, \\
Q_4^n(2, 1) &= P_{4(n-1)} + P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)}, \\
Q_4^n(2, 2) &= P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)}, \\
Q_4^n(2, 3) &= P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)}, \\
Q_4^n(2, 4) &= P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)} + P_{4(n-7)}, \\
Q_4^n(2, 5) &= P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)}, \\
Q_4^n(3, 1) &= P_{4(n+1)}, \\
Q_4^n(3, 2) &= P_{4(n-1)}, \\
Q_4^n(3, 3) &= P_{4(n)}, \\
Q_4^n(3, 4) &= P_{4(n-3)}, \\
Q_4^n(3, 5) &= P_{4(n-2)}, \\
Q_4^n(4, 1) &= P_{4(n-1)}, \\
Q_4^n(4, 2) &= P_{4(n-3)}, \\
Q_4^n(4, 3) &= P_{4(n-2)}, \\
Q_4^n(4, 4) &= P_{4(n-5)}, \\
Q_4^n(4, 5) &= P_{4(n-4)}, \\
Q_4^n(5, 1) &= P_{4(n-1)} + P_{4(n-2)}, \\
Q_4^n(5, 2) &= P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)}, \\
Q_4^n(5, 3) &= P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)}, \\
Q_4^n(5, 4) &= P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)}, \\
Q_4^n(5, 5) &= P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)},
\end{aligned}$$

Matriz 4. Para $Q_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se

$$Q_4^n = \begin{bmatrix} Q_4(1, 1) & Q_4(1, 2) & Q_4(1, 3) & Q_4(1, 4) & Q_4(1, 5) \\ Q_4(2, 1) & Q_4(2, 2) & Q_4(2, 3) & Q_4(2, 4) & Q_4(2, 5) \\ Q_4(3, 1) & Q_4(3, 2) & Q_4(3, 3) & Q_4(3, 4) & Q_4(3, 5) \\ Q_4(4, 1) & Q_4(4, 2) & Q_4(4, 3) & Q_4(4, 4) & Q_4(4, 5) \\ Q_4(5, 1) & Q_4(5, 2) & Q_4(5, 3) & Q_4(5, 4) & Q_4(5, 5) \end{bmatrix}, \text{ para todo } n \geq 7.$$

Onde os termos são representados por:

$$\begin{aligned}
Q_4^n(1, 1) &= P_{4(n)}, \\
Q_4^n(1, 2) &= P_{4(n-3)}, \\
Q_4^n(1, 3) &= P_{4(n-2)}, \\
Q_4^n(1, 4) &= P_{4(n-1)}, \\
Q_4^n(1, 5) &= P_{4(n-4)}, \\
Q_4^n(2, 1) &= P_{4(n-1)} + P_{4(n-2)}, \\
Q_4^n(2, 2) &= P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)}, \\
Q_4^n(2, 3) &= P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)}, \\
Q_4^n(2, 4) &= P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)}, \\
Q_4^n(2, 5) &= P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)}, \\
Q_4^n(3, 1) &= P_{4(n-1)} + P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)}, \\
Q_4^n(3, 2) &= P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)}, \\
Q_4^n(3, 3) &= P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)}, \\
Q_4^n(3, 4) &= P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)}, \\
Q_4^n(3, 5) &= P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)} + P_{4(n-7)}, \\
Q_4^n(4, 1) &= P_{4(n+1)}, \\
Q_4^n(4, 2) &= P_{4(n-2)}, \\
Q_4^n(4, 3) &= P_{4(n-1)}, \\
Q_4^n(4, 4) &= P_{4(n)}, \\
Q_4^n(4, 5) &= P_{4(n-3)}, \\
Q_4^n(5, 1) &= P_{4(n-1)}, \\
Q_4^n(5, 2) &= P_{4(n-4)}, \\
Q_4^n(5, 3) &= P_{4(n-3)}, \\
Q_4^n(5, 4) &= P_{4(n-2)}, \\
Q_4^n(5, 5) &= P_{4(n-5)}.
\end{aligned}$$

Matriz 5. Para $Q_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se

$$Q_4^n = \begin{bmatrix} Q_4(1,1) & Q_4(1,2) & Q_4(1,3) & Q_4(1,4) & Q_4(1,5) \\ Q_4(2,1) & Q_4(2,2) & Q_4(2,3) & Q_4(2,4) & Q_4(2,5) \\ Q_4(3,1) & Q_4(3,2) & Q_4(3,3) & Q_4(3,4) & Q_4(3,5) \\ Q_4(4,1) & Q_4(4,2) & Q_4(4,3) & Q_4(4,4) & Q_4(4,5) \\ Q_4(5,1) & Q_4(5,2) & Q_4(5,3) & Q_4(5,4) & Q_4(5,5) \end{bmatrix}, \text{ para todo } n \geq 7.$$

Onde os termos são representados por:

$$\begin{aligned} Q_4^n(1,1) &= P_{4(n)}, \\ Q_4^n(1,2) &= P_{4(n-3)}, \\ Q_4^n(1,3) &= P_{4(n-2)}, \\ Q_4^n(1,4) &= P_{4(n-4)}, \\ Q_4^n(1,5) &= P_{4(n-1)}, \\ Q_4^n(2,1) &= P_{4(n-1)} + P_{4(n-2)}, \\ Q_4^n(2,2) &= P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)}, \\ Q_4^n(2,3) &= P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)}, \\ Q_4^n(2,4) &= P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)}, \\ Q_4^n(2,5) &= P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)}, \\ Q_4^n(3,1) &= P_{4(n-1)} + P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)}, \\ Q_4^n(3,2) &= P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)}, \\ Q_4^n(3,3) &= P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)}, \\ Q_4^n(3,4) &= P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)} + P_{4(n-7)}, \\ Q_4^n(3,5) &= P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)}, \\ Q_4^n(4,1) &= P_{4(n-1)}, \\ Q_4^n(4,2) &= P_{4(n-4)}, \\ Q_4^n(4,3) &= P_{4(n-3)}, \\ Q_4^n(4,4) &= P_{4(n-5)}, \\ Q_4^n(4,5) &= P_{4(n-1)}, \\ Q_4^n(5,1) &= P_{4(n+1)}, \\ Q_4^n(5,2) &= P_{4(n-2)}, \\ Q_4^n(5,3) &= P_{4(n-1)}, \\ Q_4^n(5,4) &= P_{4(n-3)}, \\ Q_4^n(5,5) &= P_{4(n)}. \end{aligned}$$

$$\textbf{Matriz 6. Para } Q_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ tem-se}$$

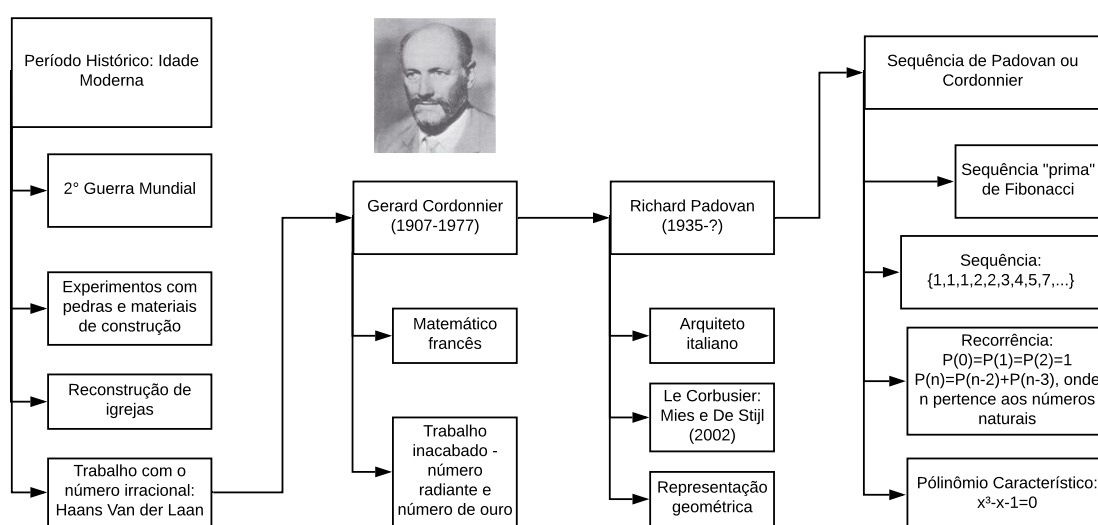
$$Q_4^n = \begin{bmatrix} Q_4(1,1) & Q_4(1,2) & Q_4(1,3) & Q_4(1,4) & Q_4(1,5) \\ Q_4(2,1) & Q_4(2,2) & Q_4(2,3) & Q_4(2,4) & Q_4(2,5) \\ Q_4(3,1) & Q_4(3,2) & Q_4(3,3) & Q_4(3,4) & Q_4(3,5) \\ Q_4(4,1) & Q_4(4,2) & Q_4(4,3) & Q_4(4,4) & Q_4(4,5) \\ Q_4(5,1) & Q_4(5,2) & Q_4(5,3) & Q_4(5,4) & Q_4(5,5) \end{bmatrix}, \text{ para todo } n \geq 7.$$

Onde os termos são representados por:

$$\begin{aligned} Q_4^n(1,1) &= P_{4(n)}, \\ Q_4^n(1,2) &= P_{4(n-4)}, \\ Q_4^n(1,3) &= P_{4(n-3)}, \\ Q_4^n(1,4) &= P_{4(n-1)}, \\ Q_4^n(1,5) &= P_{4(n-2)}, \\ Q_4^n(2,1) &= P_{4(n-1)}, \\ Q_4^n(2,2) &= P_{4(n-5)}, \\ Q_4^n(2,3) &= P_{4(n-4)}, \\ Q_4^n(2,4) &= P_{4(n-2)}, \\ Q_4^n(2,5) &= P_{4(n-3)}, \\ Q_4^n(3,1) &= P_{4(n-1)} + P_{4(n-2)}, \\ Q_4^n(3,2) &= P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)}, \\ Q_4^n(3,3) &= P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)}, \\ Q_4^n(3,4) &= P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)}, \\ Q_4^n(3,5) &= P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)}, \\ Q_4^n(4,1) &= P_{4(n+1)}, \\ Q_4^n(4,2) &= P_{4(n-3)}, \\ Q_4^n(4,3) &= P_{4(n-2)}, \\ Q_4^n(4,4) &= P_{4(n)}, \\ Q_4^n(4,5) &= P_{4(n-1)}, \\ Q_4^n(5,1) &= P_{4(n-1)} + P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)}, \\ Q_4^n(5,2) &= P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)} + P_{4(n-7)}, \\ Q_4^n(5,3) &= P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)}, \\ Q_4^n(5,4) &= P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)}, \\ Q_4^n(5,5) &= P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)}, \end{aligned}$$

APÊNDICE E – Campo

Epistêmico-Matemático da Sequência de Padovan ou Cordonnier



Fonte: Elaborado pela autora

APÊNDICE F – Fractal de Newton como forma de visualização alternativa de sequências lineares e recorrentes

O presente estudo foi baseado no trabalho de Vieira, Alves e Catarino (2019a), o qual realizaram uma forma de visualizar as extensões da SP, investigando as raízes dos seus respectivos polinômios característicos.

O método de Newton é bastante conhecido para realizar o cálculo de aproximações sucessivas dos zeros polinomiais, podendo convergir rapidamente, caso a iteração tenha início próximo da raiz desejada. Porém quando a iteração começa longe da raiz desejada, deve-se tomar bastante cuidado para não ocorrer erros nesse método (TEODORO; AGUILAR, 2015).

Exemplificado no trabalho de Teodoro e Aguilar (2015), em que transforma o polinômio dessa sequência numa função, construindo assim o seu gráfico. Assim, aplica-se a fórmula do método de Newton, $f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ e decide-se o valor inicial para começar as iterações para obter a raiz.

Os fractais apresentam grande importância na área de investigação matemática podendo assumir uma infinidade de formas e difíceis conclusões para elas (BURTON, 2009). Segundo Carreira e Andrade (1999), os fractais caracterizam-se por possuir pelo menos uma das seguintes propriedades: a) auto-semelhança – onde um pedaço do fractal é similar ao restante da figura; b) complexidade infinita – apresentando um número infinito de interações no fractal; c) dimensão fractal – diferente da geometria euclidiana, nem sempre o fractal possui a dimensão inteira, podendo ser fracionária.

Esses fractais podem ser classificados ainda segundo a forma como são gerados (ALVES, 2007): a) fractais definidos por uma relação de recorrência em cada ponto do espaço, verificando se a sequência tende ou não para o infinito; b) fractais aleatórios que são gerados por processos estocásticos; c) ponto fixo de um sistema de funções iteradas, onde o conjunto de funções são aplicados de forma sucessivas.

A aplicação dos fractais é realizada de acordo com a modelagem dos objetos comparando com a sua geometria fractal, considerando diversos fatores de aproximação, dependendo do seu grau de exatidão. Esses fractais podem ser aplicados em diversas áreas, destacando a área da matemática, sendo possível analisar algumas sequências lineares e recorrentes.

Como toda sequência possui um polinômio característico variando de acordo com a sua ordem, tornando-se necessário o cálculo de obtenção de suas respectivas raízes. Sendo assim, uma das maneiras de se conhecer a raiz de uma equação matemática de uma sequência linear e recorrente, pode ser através do método fractal de Newton, onde é possível visualizar as raízes com esse recurso computacional, e ainda, diagnosticar aplicações em diversas áreas, tais como ciências da natureza e física.

Um exemplo é o caso da SF, em que no trabalho de Monnerot-Dumaine (2009) é construído o seu fractal e analisados os seus resultados criando propriedades e padrões de acordo com a figura formada. Com a utilização do fractal de Newton como forma de visualização alternativa de sequências lineares e recorrentes, pode-se analisar as suas raízes e diagnosticar a sua aplicação no cotidiano, pois muitas vezes são conjecturadas fórmulas e definições matemáticas dessas sequências, sem conhecer a sua real aplicação e visualização. O fractal de Newton é, portanto, uma arte fractal em que transforma as funções matemáticas numa mídia podendo ser imagens, músicas e animações.

Doravante, é realizado esse método com a ferramenta do Google Colab para a SP, Tridovan e Tetradovan, bem como realizadas algumas discussões dos seus respectivos fractais gerados.

Google Colab é uma ferramenta gratuita hospedada pela Google, sendo então executada na nuvem. Esse recurso permite realizar simulações computacionais com suporte para Python e algumas bibliotecas já instaladas, sendo então salvos os arquivos no Drive e o processo de configuração realizado de forma fácil e rápida.

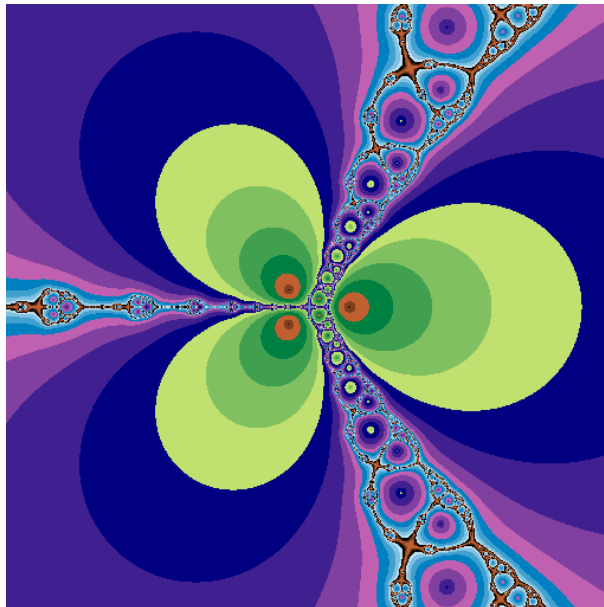
A escolha dessa ferramenta para computação matemática foi fundamentada pelo fato desse *software* ser gratuito, de fácil manuseio, além de possuir hospedagem na nuvem. Com isso, as imagens das funções serão geradas a partir desse recurso computacional. As figuras plotadas e apresentadas mais adiante, caracterizam-se como fractais feitos através de uma recorrência em cada ponto do seu espaço.

Assim, foi desenvolvido o código na linguagem *Phyton* para plotar os fractais de acordo com o método de Newton e com a equação característica da sequência, sendo então mostrados nas figuras abaixo, e analisadas de acordo com as suas bolsas e lóbulos.

Para a função da SP ($f(x) = x^3 - x - 1$), tem-se o seguinte fractal de Newton gerado, como mostrado na Figura 37. Assim, nota-se a existência de três lóbulos, um mais central e dois mais laterais. Esses lóbulos representam as raízes da função, onde traçando uma linha horizontal, representando o eixo x do plano cartesiano, verifica-se que apenas um está nessa posição. Assim, visualizamos a existência de apenas uma raiz real, sendo aproximadamente 1,32. Na linha vertical, eixo y , nota-se a existência de dois lóbulos, representando as raízes complexas. A cor alaranjada na parte central de cada lóbulo, representa o valor exato da raiz e, as outras cores em volta dos lóbulos representam

a quantidade de iterações. Com isso, quanto mais distante do lóbulo laranja, mais distante estará do valor da raiz da função.

Figura 37 – Fractal de Newton da SP.



Fonte: Elaborado pela autora

De acordo com o método de Newton realizado nessa aplicação, destaca-se a realização de seis iterações para encontrar as raízes. Assim, analisando a figura pode-se notar que existem oito variações de cores em cada lóbulo, sendo essas a quantidade máxima de iterações existentes até encontrar o valor da raiz que está localizado no lóbulo de cor laranja.

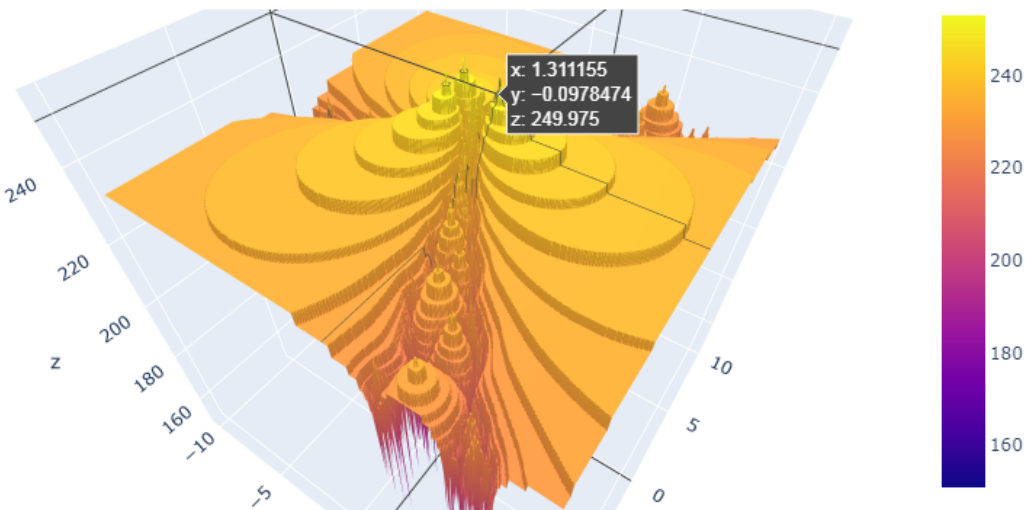
Os três traços apresentados na Figura 37, mostram a descontinuidade da raiz, limitando para qual raiz irá tender, dependendo do chute inicial. É importante ainda destacar que o intervalo inserido no código em *Phyton* para plotar o fractal de Newton foi $[-10,10]$, realizando assim a busca pelas raízes dessa função.

Uma visualização em 3D do fractal de Newton de Padovan é mostrada na Figura 38, destacando que as três raízes agora são representadas pelas montanhas, onde quanto mais no topo, mais próximo está do valor da raiz, e quanto mais na base, mais distante do valor da raiz. A escala ao lado da figura, mostra a proximidade com as raízes, onde quando mais voltado para a cor alaranjada, mais perto está do valor da raiz. É possível navegar com o mouse em cima das montanhas, mostrando os valores na tela.

Com isso, diante dessa perspectiva, pode-se perceber a existência de três eixos, onde os eixos x e y mostram os valores das iterações para obter a raiz. Na Figura 38, tem-se o valor $x = 1,311155$ e $y = -0,0978474$, em que o valor de y está bem próximo de zero, não existindo parte imaginária, já o valor de x é dado por aproximadamente 1,32, conhecido

como número plástico (discutido nesta pesquisa). O eixo z representa a proximidade com o valor exato da raiz, onde tem-se o valor $z = 249,975$, em que de acordo com a escala ao lado, os valores acima de 260 estão mais próximos do lóbulo laranja, portanto mais próximo do valor correto.

Figura 38 – Fractal de Newton da SP em 3D.



Fonte: Elaborado pela autora

Antes de analisar o fractal de Newton da sequência de Tridovan, será realizado um breve estudo sobre a razão de convergência dessa extensão. Pode-se perceber, como mostrado na Tabela 12, que realizando a divisão de um termo pelo o seu anterior, essa nova sequência converge para o valor 1,46. Assim, percebe-se que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{3(n+1)}}{P_{3(n)}} \approx 1,46.$$

Tabela 12 – Análise da convergência entre os termos vizinhos de Tridovan.

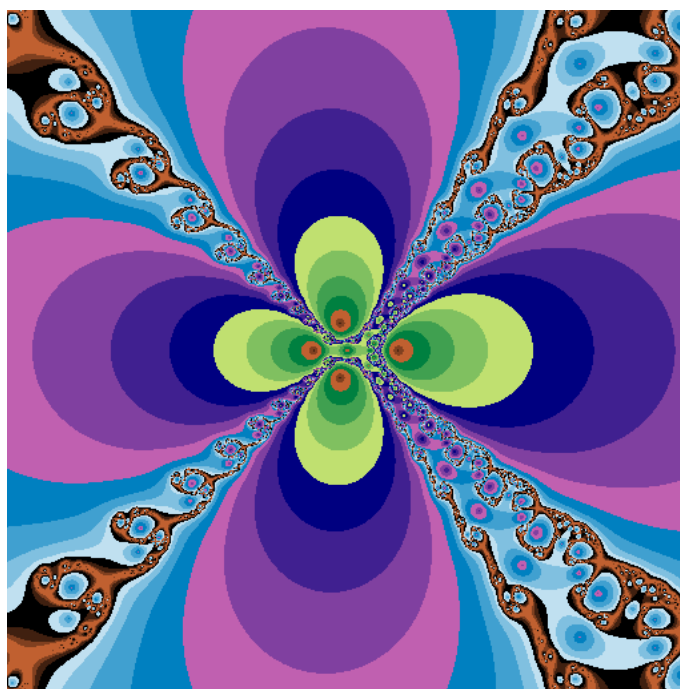
n	$P_{3(n)}$	$\frac{P_{3(n+1)}}{P_{3(n)}}$	n	$P_{3(n)}$	$\frac{P_{3(n+1)}}{P_{3(n)}}$
0	1	0	8	8	1,37
1	0	$\frac{1}{0}$	9	11	1,54
2	1	1	10	17	1,411
3	1	2	11	24	1,5
4	2	1	12	36	1,44
5	2	2	13	52	1,48
6	4	1,25	14	77	1,45
7	5	1,6	15	112	1,46

Fonte: Elaborado pela autora

Contudo, a equação dessa sequência como vista no Teorema 16 ($x^4 - x^2 - x - 1 = 0$), possui quatro raízes, duas complexas, uma real positiva e outra real negativa. Ressalta-se que a raiz real positiva possui valor de aproximadamente 1,46, que é o mesmo valor da razão de convergência entre os termos vizinhos dessa sequência.

Com isso, construindo o fractal de Newton dessa sequência, a partir de sua função ($f(x) = x^4 - x^2 - x - 1$), tem-se, como mostrado na Figura 39, a existência de quatro traços, gerados a partir da ramificação do traço central encontrado no fractal de Padovan (ver Figura 37). Verifica-se ainda a presença de quatro lóbulos, sendo portanto traçado uma linha horizontal na imagem, e verificada a existência de duas raízes reais. Observa-se que uma está ao lado esquerdo e a outra ao lado direito, sendo a primeira a raiz real negativa e, a segunda a raiz real positiva. Esta última representa, portanto, o valor aproximado de 1,46. As demais que estão localizadas no eixo vertical, são as raízes complexas. Percebe-se ainda uma diminuição do lóbulo laranja e o aumento de cores, existindo mais iterações até obter os valores exatos das raízes.

Figura 39 – Fractal de Newton da sequência de Tridovan.

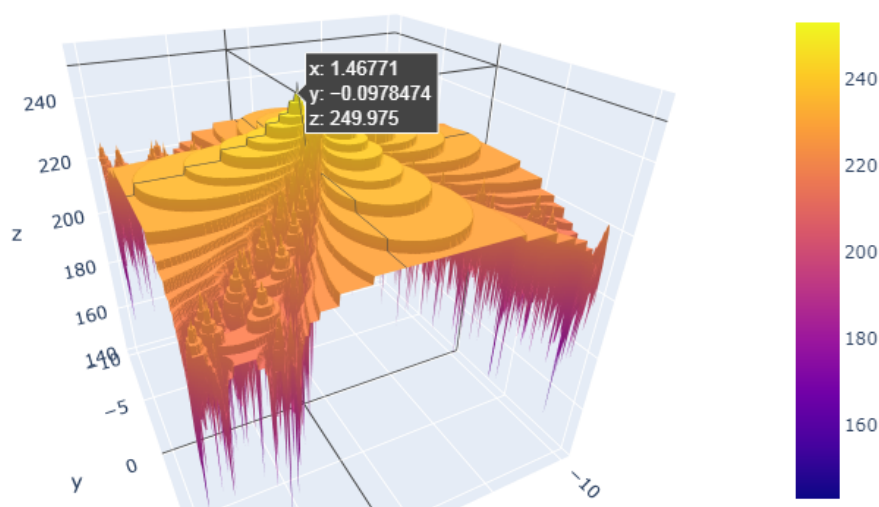


Fonte: Elaborado pela autora

A sua representação em 3D do fractal é mostrada na Figura 40, analisando as suas quatro raízes representadas pelas montanhas, de modo análogo como realizado para a SP. Contudo, é notável destacar a busca pela raiz real, onde tem-se os valores de $x = 1,46771$, $y = -0,0978474$ e $z = 249,975$. De acordo com esses valores, percebe-se que y é aproximadamente inexistente, não existindo portanto a parte imaginária, e z está bem próximo da escala laranja (valor 260). Para o valor de x , é possível notar a sua aproximação

com o valor de convergência entre os termos vizinhos da seqüência, dado por 1,46.

Figura 40 – Fractal de Newton da seqüência de Tridovan 3D.



Fonte: Elaborado pela autora

Para a construção do fractal de Newton da seqüência de Tetradovan, será analisada a sua razão de convergência entre os termos vizinhos dessa seqüência. Analisando de forma similar como realizado para os números de Tridovan, pode-se estabelecer a razão de convergência entre os termos vizinhos de acordo com a Tabela 13.

Tabela 13 – Análise da convergência entre os termos vizinhos de Tridovan.

n	$P_{4(n)}$	$\frac{P_{4(n+1)}}{P_{4(n)}}$	n	$P_{4(n)}$	$\frac{P_{4(n+1)}}{P_{4(n)}}$
0	1	0	8	10	1,6
1	0	$\frac{1}{2}$	9	16	1,5
2	1	1	10	24	1,5416
3	1	2	11	37	1,5405
4	2	1,5	12	57	1,5263
5	3	1,33	13	87	1,54
6	4	1,75	14	134	1,529
7	7	1,42	15	205	1,53

Fonte: Elaborado pela autora

Portanto, pode-se estabelecer que:

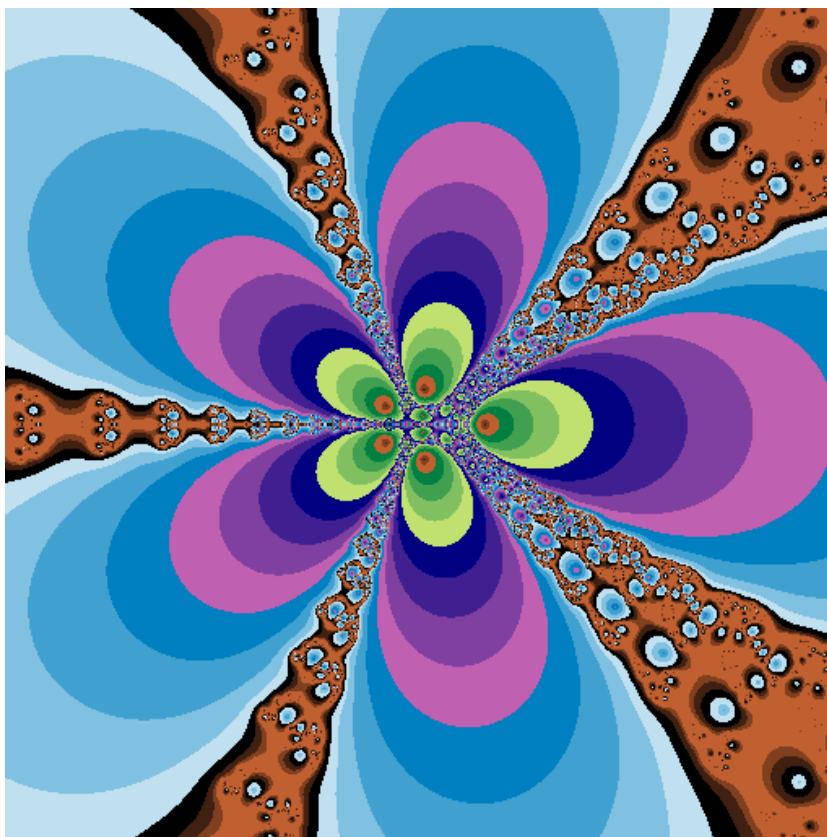
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{4(n+1)}}{P_{4(n)}} \approx 1,53.$$

A equação dessa seqüência, como estudada no Teorema 20, possui cinco raízes, sendo quatro complexas e uma real, onde essa raiz real apresenta o valor de aproximadamente 1,53, o mesmo valor da razão de convergência entre os termos vizinhos desta seqüência.

Algumas propriedades inerentes à esses números foram estudadas no trabalho de Vieira e Alves (2019d).

Por fim, tem-se a construção do fractal Tetradovan a partir de sua função ($f(x) = x^5 - x^3 - x^2 - x - 1$), sendo representado pela Figura 41. Nota-se a presença de cinco traços, limitando a descontinuidade das raízes. Esse fractal apresenta ainda cinco lóbulos, representando as raízes da função. Analisando-as através de um traço horizontal no centro da imagem, verifica-se a existência de apenas uma raiz real e as demais que estão fora desse eixo são as raízes complexas. Essa raiz real, apresenta o seu valor aproximado como sendo 1,53, podendo ser encontrado através da análise da Figura 41. Nota-se ainda a diminuição do lóbulo laranja.

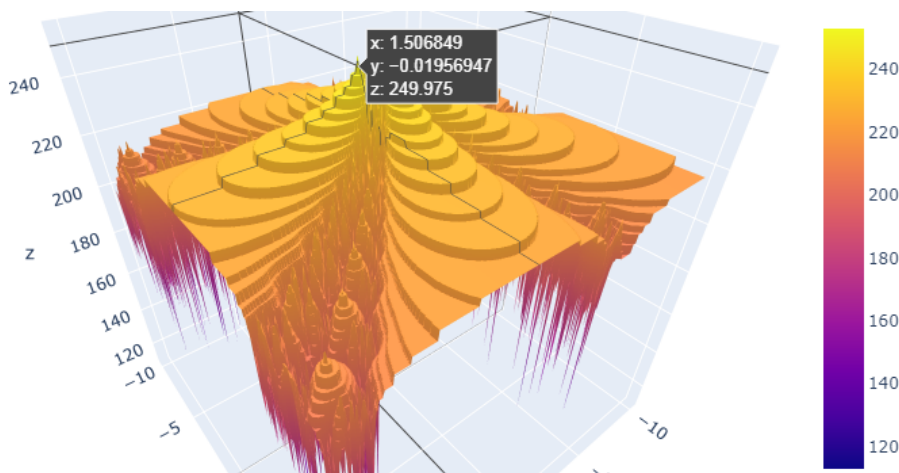
Figura 41 – Fractal de Newton da sequência de Tetradovan.



Fonte: Elaborado pela autora

A visualização do fractal em uma perspectiva 3D, é mostrada na Figura 42, onde é realizada uma análise das suas cinco raízes representadas pelas montanhas. Com isso, durante a busca pelo valor da raiz real, nota-se os valores de $x = 1,506849$, $y = -0,01956947$ e $z = 249,975$. Assim, percebe-se a aproximação da variável x com o valor 1,53, visto anteriormente como sendo uma solução real e a razão de convergência entre os termos vizinhos desta sequência.

Figura 42 – Fractal de Newton da sequência de Tetradovan 3D.



Fonte: Elaborado pela autora

Inserindo as figuras dos fractais no plano cartesiano, podemos estimar o valor das raízes, verificando que as cores mais distantes da cor laranja serão os valores mais distantes dos valores das raízes. Já os valores mais próximos do lóbulo de alaranjado, serão os mais próximos de zero, ou seja, mais próximos dos valores das raízes da função. Esse processo de busca em grade pela raiz, lóbulos, representa o método de Newton. Assim, realizando as substituições sucessivas a fim de encontrar a raiz da função e, com a utilização do recurso computacional Google Colab, facilita o cálculo e obtenção das raízes.

Diante dessa análise, pode-se estabelecer um certo padrão de crescimento dos traços, onde inicialmente existem três, sendo um central e dois laterais, em que a partir das extensões, esse traço central irá se dividir, transformando-o em dois. Quando não existe o traço central, significa que este já foi dividido na extensão anterior, aparecendo novamente na próxima extensão da sequência.

Os lóbulos representam as raízes da função, verificando ainda as suas raízes reais e complexas ao traçar uma linha horizontal no centro da imagem. Assim, os lóbulos localizados no eixo horizontal representarão as raízes reais, e os localizados no eixo vertical, as raízes complexas.

Trazendo os fractais de Newton da SP, Tridovan e Tetradovan para os objetos existentes na natureza, pode-se notar semelhanças desses com flores vistas numa perspectiva de cima para baixo, em que os seus lóbulos representam as pétalas e sépalas. Com isso, o fractal de Newton da SP representa uma flor trímera, com três pétalas e três sépalas; o fractal de Newton da sequência de Tridovan, representa uma flor tetrâmera com quatro pétalas e quatro sépalas; e o fractal de Newton da sequência de Tetradovan uma flor pentâmera, com cinco pétalas e cinco sépalas (SANTOS; BONILLA, 2003).

Observa-se a semelhança com a flor gerânio, variando de acordo com as suas

pétalas. Percebe-se na Figura 43 essa flor com quatro pétalas, com os cantos arredondados, aproximando-se de uma elipse. É importante notar ainda as alternância de cores das flores, conforme acontece nos lóbulos das figuras anteriormente discutidas. Essa espécie pertence a um grupo de ervas de pequeno arbusto do gênero *Geranium* e *Pelargonium*, conhecida também como sardinheiras. Reunindo cerca de 300 espécies, essas flores são encontradas nas regiões temperadas e tropicais de altitude, das quais várias são cultivadas como ornamentais ou para extração de tanino e tinturas.

Figura 43 – Flor gerânio.



Fonte: Retirada do site Pixabay

Vale ressaltar que essas figuras geradas pelo Google Colab apresentam uma forma de visualização, podendo ainda serem vistas por um outro ângulo diferente desse mostrado no trabalho.

Anexos

ANEXO A – Matriz Curricular do Curso

de Licenciatura em Matemática do

Instituto Federal de Educação, Ciência e

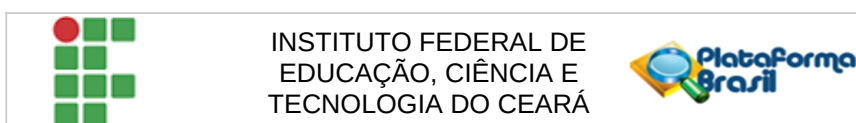
Tecnologia do Ceará (IFCE)

 INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ DIRETORIA DE ENSINO Matrizes Curriculares										
--Matriz-- 3908 - Licenciatura em Matemática IV (2012/1)										
--Curso-- 01402 - Licenciatura em Matemática										
--Nível-- Superior										
--Periodicidade-- Período										
--Regime-- Não-seriado										
--Situação-- Matriz em Vigor										
--Per. Letivo Inicial-- 2012/1										
--C.H. Disciplinas-- 3000										
Per.	Componentes Curriculares			Co-Requisitos				Carga Horária		Pré-requisitos
	Código	Descrição	Núcleo	OPT	Hab.	Cred.				
1	01.402.01	GEOMETRIA PLANA E CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS	COM	N	57	4	0	80		
1	01.402.02	MATEMÁTICA DISCRETA	COM	N	57	4	0	80		
1	01.402.03	MATEMÁTICA ELEMENTAR I	COM	N	57	4	0	80		
1	01.402.04	HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO NO BRASIL	COM	N	57	2	0	40		
1	01.402.05	COMUNICAÇÃO E LINGUAGEM	COM	N	57	3	0	60		
1	01.402.06	INICIAÇÃO A FILOSOFIA	COM	N	57	3	0	60		
2	01.402.07	CÁLCULO I	COM	N	57	4	0	80		01.402.03
2	01.402.08	LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA	COM	N	57	2	0	40		
2	01.402.09	MATEMÁTICA ELEMENTAR II	COM	N	57	4	0	80		01.402.01+01.402.02
2	01.402.10	FUNDAMENTOS SOCIOFILOSÓFICOS DA EDUCAÇÃO	COM	N	57	4	0	80		
2	01.402.11	PSICOLOGIA DO DESENVOLVIMENTO	COM	N	57	2	0	40		
2	01.402.12	LIBRAS	COM	N	57	2	0	40		
2	01.402.13	METODOLOGIA DO TRABALHO CIENTÍFICO I	COM	N	57	2	0	40		
3	01.402.14	ÁLGEBRA LINEAR	COM	N	57	4	0	80		01.402.08
3	01.402.15	CÁLCULO II	COM	N	57	4	0	80		01.402.07
3	01.402.16	INFORMÁTICA APLICADA AO ENSINO DA MATEMÁTICA	COM	N	57	4	0	80		01.402.01+01.402.07
3	01.402.17	PROJETOS SOCIAIS	COM	N	57	2	0	40		
3	01.402.18	POLÍTICAS EDUCACIONAIS	COM	N	57	3	0	60		
3	01.402.19	PSICOLOGIA DA APRENDIZAGEM	COM	N	57	3	0	60		01.402.11

ANEXO A. Matriz Curricular do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

 INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ DIRETORIA DE ENSINO Matrizes Curriculares												
4	01.402.20	CÁLCULO III	COM	N	57	4	0	80				01.402.14 + 01.402.15
4	01.402.21	GEOMETRIA ESPACIAL E PROJETIVA	COM	N	57	4	0	80				01.402.01 + 01.402.14
4	01.402.22	METODOLOGIA DO ENSINO DA MATEMÁTICA	COM	N	57	4	0	80				01.402.08 + 01.402.15
4	01.402.23	TEORIA DOS NÚMEROS	COM	N	57	4	0	80				01.402.02
4	01.402.24	DIDÁTICA GERAL	COM	N	57	4	0	80				
5	01.402.25	CÁLCULO IV	COM	N	57	4	0	80				01.402.20
5	01.402.26	ESTRUTURAS ALGÉBRICAS	COM	N	57	4	0	80				01.402.14 + 01.402.23
5	01.402.27	CURRÍCULOS E PRÁTICAS EDUCATIVAS	COM	N	57	3	0	60				
5	01.402.28	MECÂNICA NEWTONIANA	COM	N	57	4	0	80				01.402.15
5	01.402.29	ESTÁGIO I	COM	N	57	5	0	100				
6	01.402.30	EDO E SÉRIES	COM	N	57	4	0	80				
6	01.402.31	HISTÓRIA DA MATEMÁTICA	COM	N	57	4	0	80				01.402.01 + 01.402.15 + 01.402.23
6	01.402.32	ELETRICIDADE E MAGNETISMO	COM	N	57	4	0	80				01.402.25 + 01.402.28
6	01.402.33	ESTÁGIO II	COM	N	57	8	0	160				
7	01.402.34	CÁLCULO NUMÉRICO	COM	N	57	4	0	80				01.402.20
7	01.402.35	FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA	COM	N	57	4	0	80				01.402.25 + 01.402.30
7	01.402.36	METODOLOGIA DO TRABALHO CIENTÍFICO II	COM	N	57	2	0	40				01.402.13
7	01.402.37	ESTÁGIO III	COM	N	57	7	0	140				
7	01.402.38	OPTATIVA 71	COM	S	57	3	0	60				
8	01.402.39	INTRODUÇÃO A ANÁLISE	COM	N	57	4	0	80				
8	01.402.40	PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	COM	N	57	4	0	80				01.402.02 + 01.402.15
8	01.402.41	PROGRESSÕES E MATEMÁTICA FINANCEIRA	COM	N	57	3	0	60				
8	01.402.42	OPTATIVA 81	COM	S	57	4	0	80				
8	01.402.43	TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO	COM	N	57	2	0	40				
Código Sigla		Habilitação			Créd.		Carga Horária					
Básica	Obrig.	Estágio	Optativa	Eletiva	At. Comp.	Proj. Final	Min.	Créd.				
57	57	DISC. BÁSICAS - LICENCIATURA EM MATEMÁTICA	Sim	0			0	0	0	0	0	0

ANEXO B – Parecer do Comitê de Ética em Pesquisa



PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: Engenharia Didática (ED): o caso da Sequência de Padovan ou Cordonnier

Pesquisador: Renata Passos

Área Temática:

Versão: 1

CAAE: 11713719.6.0000.5589

Instituição Proponente: INSTITUTO FEDERAL DE EDUCACAO, CIENCIA E TECNOLOGIA DO CEARA

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 3.314.835

Apresentação do Projeto:

O projeto propõe uma metodologia de ensino levando em consideração a engenharia didática na sequência de Padovan ou Cordonnier para alunos do curso de licenciatura em matemática do IFCE CAMPUS/FORTALEZA. O trabalho apresenta boa fundamentação para o que propõe e é importante para dar subsídios aos futuros docentes.

Objetivo da Pesquisa:

Objetivo Primário:

retratar os elementos de estudo referentes à generalização da sequência de Padovan, promovendo a identificação, descrição e exploração do modelo de Padovan oriundos de uma ação investigativa e indutiva.

Objetivo Secundário:

- (i) analisar o desenvolvimento histórico e epistemológico matemático da sequência de Padovan e da sua generalização;
- (ii) analisar as matrizes e funções geradoras da sequência de Padovan e o caso da generalização;
- (iii) analisar e desenvolver os quaternions e octonions de Padovan e a sua generalização;
- (iv) escrever as situações didáticas envolvendo os conteúdos desenvolvidos acerca da sequência de Padovan.

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703

Bairro: Jardim América

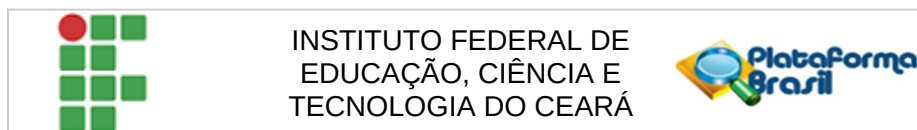
UF: CE

Município: FORTALEZA

Telefone: (85)3401-2332

CEP: 60.410-426

E-mail: cep@ifce.edu.br



Continuação do Parecer: 3.314.835

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

RISCOS:

O trabalho cita como riscos o constrangimento dos alunos. No entanto, o TCLE deixa claro que serão feitos fotos, vídeos e áudios durante as aulas, além disso cita que os dados serão publicados, mas garante o sigilo e que nenhuma informação será dada à terceiros que não faça parte da equipe de pesquisadores. Durante a divulgação dos resultados desse estudo, o nome dos envolvidos não será revelado.

NO TCLE também está garantido o ressarcimento das despesas diretamente decorrentes da participação na pesquisa e à indenização pelos danos resultantes desta, nos termos da Lei.

Assim sendo, o TCLE deixa bem claro sobre como serão obtidos utilizados os dados. Então ao assinar esse documento o estudante concordo inclusive com a realização de fotos, vídeos e audios.

BENEFÍCIOS:

Os participantes terão a oportunidade de participar de situações didática possibilitando aos discentes da Licenciatura em Matemática desenvolver um concepção epistemológica da História da Matemática através de estudos de definições teoremas e propriedades matemáticas inerentes à Sequência de Padovan (Cordonnier). Assim, contribuirão com a formação inicial dos professores.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

O trabalho é interessante, pois propõe formas de ensinar o assunto buscando melhor compreensão pelos alunos (futuros docentes) e assim facilita a reprodução dessas informações na sala de aula.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

Estão claros e não apresentam incoerências que inviabilizam a aprovação do trabalho.

Recomendações:

Sem recomendações.

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703

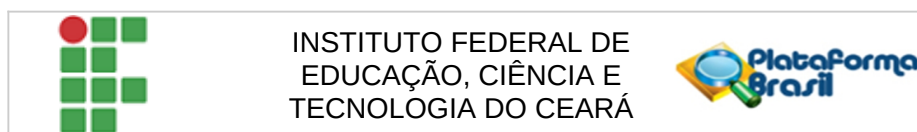
Bairro: Jardim América

UF: CE **Município:** FORTALEZA

Telefone: (85)3401-2332

CEP: 60.410-426

E-mail: cep@ifce.edu.br



Continuação do Parecer: 3.314.835

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

Sem inadequações ou pendências.

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_1324263.pdf	11/04/2019 14:34:47		Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLMaioridade.pdf	11/04/2019 14:18:06	Renata Passos	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	projeto_de_pesquisa_renata.pdf	11/04/2019 14:15:29	Renata Passos	Aceito
Outros	declaracaodecompromisso.pdf	10/04/2019 23:01:04	Renata Passos	Aceito
Outros	declaracaogarantiaderegresso.pdf	10/04/2019 23:00:38	Renata Passos	Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	termodeautorizacao.pdf	10/04/2019 22:59:07	Renata Passos	Aceito
Folha de Rosto	folhaderosto.pdf	10/04/2019 22:58:04	Renata Passos	Aceito
Orçamento	orcamento.pdf	10/04/2019 22:54:38	Renata Passos	Aceito
Cronograma	planejamento.pdf	10/04/2019 22:54:23	Renata Passos	Aceito

Situação do Parecer:

Aprovado

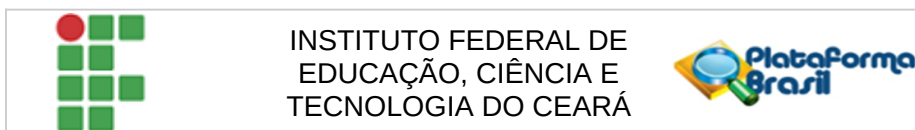
Necessita Apreciação da CONEP:

Não

FORTALEZA, 09 de Maio de 2019

Assinado por:
PAULO HENRIQUE NOBRE PARENTE
 (Coordenador(a))

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703
Bairro: Jardim América **CEP:** 60.410-426
UF: CE **Município:** FORTALEZA
Telefone: (85)3401-2332 **E-mail:** cep@ifce.edu.br



Continuação do Parecer: 3.314.835

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703
Bairro: Jardim América **CEP:** 60.410-426
UF: CE **Município:** FORTALEZA
Telefone: (85)3401-2332 **E-mail:** cep@ifce.edu.br