



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ
IFCE *CAMPUS* FORTALEZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
- PPGECM

MARIA GRACIENE MOREIRA DOS SANTOS

SITUAÇÕES DIDÁTICAS PROFISSIONAIS NA FORMAÇÃO CONTINUADA DO
PROFESSOR DE MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE SOBRE O ENSINO DE
SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

FORTALEZA
2024

MARIA GRACIENE MOREIRA DOS SANTOS

SITUAÇÕES DIDÁTICAS PROFISSIONAIS NA FORMAÇÃO CONTINUADA DO
PROFESSOR DE MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE SOBRE O ENSINO DE
SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Dissertação de Mestrado Acadêmico apresentada ao programa de Pós-graduação em Ensino Ciências e Matemática (PGECM) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) – *Campus* Fortaleza, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre.

Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.

Coorientador: Prof. Dr. Francisco José de Lima.

FORTALEZA
2024

Dados Internacionais de Catalogação na
Publicação Instituto Federal do Ceará - IFCE
Sistema de Bibliotecas - SIBI

Ficha catalográfica elaborada pelo SIBI/IFCE, com os dados fornecidos
pelo(a) autor(a)

S237s Santos, Maria Graciene Moreira dos.

SITUAÇÕES DIDÁTICAS PROFISSIONAIS NA FORMAÇÃO
CONTINUADA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE SOBRE
O ENSINO DE SISTEMAS DE
EQUAÇÕES LINEARES / Maria Graciene Moreira dos Santos. - 2024.
182 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado) - Instituto Federal do Ceará, Mestrado em Ensino de
Ciências e Matemática, Campus Fortaleza, 2024.

Orientação: Prof. Dr. FRANCISCO RÉGIS VIEIRA ALVES.

Coorientação: Prof. Dr. FRANCISCO JOSÉ DE LIMA.

1. ENSINO DE SISTEMAS LINEARES. 2. ENGENHARIA DIDÁTICA DE
FORMAÇÃO. 3. DIDÁTICA PROFISSIONAL. 4. TEORIA DAS SITUAÇÕES
DIDÁTICAS. 5. SITUAÇÃO DIDÁTICA PROFISSIONAL. I. Título.

CDD 510.07

MARIA GRACIENE MOREIRA DOS SANTOS

SITUAÇÕES DIDÁTICAS PROFISSIONAIS NA FORMAÇÃO CONTINUADA DO
PROFESSOR DE MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE SOBRE O ENSINO DE
SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Dissertação de Mestrado Acadêmico
apresentada ao programa de Pós-
graduação em Ensino de Ciências e
Matemática do Instituto Federal de
Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
(IFCE) - *Campus* Fortaleza, como
requisito parcial para obtenção do Título
de Mestre.

Área de concentração: Ensino de
Matemática.

Aprovado (a) em: ____ / ____ / ____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves (Orientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Prof. Dr. Francisco José de Lima (coorientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Profa. Dra. Elisângela Bastos de Melo Espíndola
Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)

Profa. Dra. Francisca Cláudia Fernandes Fontenele
Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA)

Profa. Dra. Marluce Alves dos Santos
Universidade do Estado da Bahia (UNEB)

Profa. Dra. Katia Vigo Ingar
Universidad Nacional del Callao (UNAC)

Dedico este trabalho àqueles que foram designados por uma divina providência para serem meus anjos da guarda neste plano terreno: meus pais, **João Cândido** e **Aparecida Moreira** (*in memoriam*), por todo amor, dedicação, companheirismo e por todos os ensinamentos.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a DEUS pelo dom da vida, por me fortalecer diante dos obstáculos enfrentados e pelo constante cuidado que Ele tem para comigo. Reconheço que todas as realizações são fruto de sua graça, e não de méritos próprios.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves pela oportunidade cedida e por me acompanhar nessa etapa. Sua competência, dedicação e paciência na orientação foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Francisco José de Lima, meu coorientador, por compartilhar seus conhecimentos e experiências.

À minha amiga, Renata Teófilo, por estar ao meu lado desde o início, oferecendo auxílio e compartilhando conhecimentos e materiais que contribuíram imensamente para o meu crescimento acadêmico.

Ao prof. Dr. Júnio Moreira, por todo apoio, direcionamento e por sempre promover sugestões que me auxiliassem a desenvolver melhor a condução de toda aplicação prática.

A todos os professores membros da banca, pela disposição em revisar esta pesquisa e por oferecer sugestões que contribuíram para melhoria deste trabalho.

Aos docentes do programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Fortaleza, pela dedicação em transmitir conhecimentos que enriqueceram minha trajetória acadêmica.

Aos colegas da turma, pela troca de experiências e saberes.

Aos professores participantes da pesquisa, que foram fundamentais para obtenção dos dados obtidos.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro concedido. Essa assistência foi crucial para que eu pudesse alcançar esta conquista.

“Si possum videre further, est stantium
super humeros gigantes.”

(Isaac Newton)

RESUMO

Esta pesquisa foi desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE). O interesse central da pesquisa foi proporcionar aos professores uma formação específica, com o uso de Situações Didáticas Profissionais, realizando um exame das eventuais dificuldades e obstáculos que estes profissionais relatam a respeito do ensino de sistemas de equações lineares. A escolha do objeto matemático foi respaldada pela sua extrema relevância no desenvolvimento matemático dos estudantes, estendendo sua influência para diversos domínios da matemática, bem como por ser um desafio significativo para os professores do Ensino Médio. O objetivo geral desta pesquisa foi avaliar o papel das Situações Didáticas Profissionais na formação do professor de matemática, especificamente no contexto do ensino de sistemas de equações lineares, analisando seu impacto e contribuição para o processo formativo. A pesquisa fundamentou-se na articulação standard entre a Teoria das Situações Didáticas (TSD) e a Didática Profissional (DP), que embasaram a modelagem da Situação Didática Profissional (SDP) e a análise dos conceitos organizadores das ações dos professores no desenvolvimento destas SDPs. A metodologia empregada no desenvolvimento desta pesquisa foi a Engenharia Didática de Formação (EDF), utilizando como participantes um grupo de cinco cursistas matriculados no curso de Especialização em Ensino de Matemática oferecido pela instituição. Foram promovidos quatro encontros formativos, sendo estes realizados no Instituto Federal da cidade de Juazeiro do Norte, Ceará. A coleta de dados foi realizada por meio de questionários, gravações de áudios e registros fotográficos das SDPs desenvolvidas. A partir dos dados coletados, foi possível uma compreensão mais clara das concepções e abordagens de ensino adotadas pelos professores em relação ao tópico matemático em questão, bem como permitiu identificar conceitos organizadores das ações, cruciais para a construção do perfil do professor competente. Diante disso, considera-se que as Situações Didáticas Profissionais podem indicar um itinerário para a construção e aprimoramento de conceitos pragmáticos. Por fim, espera-se que os resultados desta pesquisa proporcionem um avanço na formação dos professores participantes no ensino de sistemas de equações lineares, bem como em sua prática, promovendo a reflexão e o aprimoramento contínuo.

Palavras-chave: Ensino de Sistemas Lineares. Engenharia Didática de Formação. Didática Profissional. Teoria das Situações Didáticas. Situação Didática Profissional.

ABSTRACT

This research was developed in the Postgraduate Program in Science and Mathematics Teaching at the Federal Institute of Education, Science and Technology of Ceará (IFCE). The central interest of the research was to provide teachers with specific training, using Professional Didactic Situations, examining the possible difficulties and obstacles that these professionals report regarding teaching systems of linear equations. The choice of the mathematical object was supported by its extreme relevance in the mathematical development of students, extending its influence to different domains of mathematics, as well as by being a significant challenge for high school teachers. The general objective of this research was to evaluate the role of Professional Didactic Situations in the training of mathematics teachers, specifically in the context of teaching systems of linear equations, analyzing their impact and contribution to the training process. The research was based on the standard articulation between the Theory of Didactic Situations (TSD) and Professional Didactics (DP), which supported the modeling of the Professional Didactic Situation (SDP) and the analysis of the organizing concepts of teachers' actions in the development of these SDPs. The methodology used in the development of this research was Engineering Didactic Training (EDF), using as participants a group of five students enrolled in the Specialization course in Mathematics Teaching offered by the institution. Four training meetings were held, held at the Federal Institute in the city of Juazeiro do Norte, Ceará. Data collection was carried out through questionnaires, audio recordings and photographic records of the SDPs developed. From the data collected, it was possible to gain a clearer understanding of the conceptions and teaching approaches adopted by teachers in relation to the mathematical topic in question, as well as identifying organizing concepts for actions, crucial for building the profile of a competent teacher. Given this, it is considered that Professional Didactic Situations can indicate an itinerary for the construction and improvement of pragmatic concepts. Finally, it is expected that the results of this research will provide an advance in the training of teachers participating in teaching systems of linear equations, as well as in their practice, promoting reflection and continuous improvement.

Keywords: Teaching Linear Systems. Didactic Engineering Training. Professional Didactics. Theory of Didactic Situations. Professional Teaching Situation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Engenharia de 1ª e 2ª geração	28
Figura 2 - Correntes que compõem a Didática Profissional	41
Figura 3 - Tetraedro agrupando os elementos envolvidos na formação profissional	50
Figura 4 - Resolução de P3 da SDP I	112
Figura 5 - Resolução de P4 da SDP I	113
Figura 6 - Resolução de P4 dos itens (b, c e d) SDP I	115
Figura 7- P1 e P3 apresentando a resolução e validação da SDP I	116
Figura 8 - Resolução da SDP II do sujeito P1.....	119
Figura 9 - Resolução da SDP II do sujeito P2.....	120
Figura 10 - Resolução da SDP II do sujeito P3.....	120
Figura 11 - Resolução da SDP II do sujeito P5.....	121
Figura 12 - Resolução dos itens (b e c) da SDP II do sujeito P2	123
Figura 13 - Resolução dos itens (b e c) da SDP II do sujeito P4	123
Figura 14 - P3 apresentando a resolução da SDP II	124
Figura 15 - P5 apresentando a resolução da SDP II	124
Figura 16 - Resolução da SDP III do sujeito P1.....	128
Figura 17 - Resolução da SDP III do sujeito P2.....	128
Figura 18 - Resolução da SDP III do sujeito P4.....	129
Figura 19 - Resolução da SDP III do sujeito P5.....	130
Figura 20 - Resolução geométrica descrita por P1 para a SDP III.....	132
Figura 21 - P4 apresentando a resolução da SDP III	133
Figura 22 - P5 apresentando a resolução da SDP III	133
Figura 23 - Representação gráfica no GeoGebra para modelagem da SDP IV disponibilizada pela pesquisadora	135
Figura 24 - Ação de modelização da SDP IV no GeoGebra realizada pelos professores P2 e P5.....	135

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Engenharia de 1ª e 2ª geração.....	31
Quadro 2 - Engenharia Didática para Investigação (IDR) e Engenharia Didática de Desenvolvimento (IDD)	33
Quadro 3 - Teorias da Didática das Disciplinas e sua Adaptação no contexto da Didática Profissional.....	50
Quadro 4 - Comparativo entre as situações	54
Quadro 5 - Binômios de referência para análise da competência do professor de matemática.....	55
Quadro 6 - Compilação de estudos acadêmicos associados à pesquisa	61
Quadro 7 - Dissertações selecionadas para revisão de literatura.....	72
Quadro 8 - Livros didáticos em uso pelos professores das escolas participantes...	77
Quadro 9 - Informações sobre a identificação dos professores participantes	83
Quadro 10 - Informação sobre a formação dos professores	83
Quadro 11 - Respostas dos professores quanto ao uso de recursos tecnológicos para o ensino.....	84
Quadro 12 - Plano de ação.....	93
Quadro 13 - Problema utilizado na Situação Didática Profissional I (SDP I).....	94
Quadro 14 - Problema utilizado na Situação Didática Profissional II (SDP II).....	96
Quadro 15 - Problema utilizado na Situação Didática Profissional III (SDP III).....	101
Quadro 16 - Problema utilizado na Situação Didática Profissional IV (SDP IV)	104
Quadro 17 - Descrição do cronograma de realização do projeto.....	109
Quadro 18 - Cláusulas do contrato didático efetuado entre a pesquisadora e os professores participantes.....	110

LISTA DE SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
DM	Didática da Matemática
DP	Didática Profissional
ED	Engenharia Didática
EDD	Engenharia Didática de Desenvolvimento
EDF	Engenharia Didática de Formação
IFCE	Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Ceará
IREM	<i>Institut Universitaire de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques</i>
SD	Situação Didática
SDP	Situação Didática Profissional
SI	Sistema Impossível
SP	Situação Profissional
SPD	Sistema Possível e Determinado
SPI	Sistema Possível e Indeterminado
TCLE	Termo de consentimento Livre e Esclarecido
TSD	Teoria da Situação Didática
UT	Unidade de Trabalho

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	16
2 REFERENCIAL TEÓRICO E METODOLÓGICO	24
2.1 Engenharia Didática	24
2.2 Engenharia Didática de Formação	30
2.3 Teoria das Situações Didáticas	35
2.4 Didática Profissional	40
2.4.1 Engenharia de Formação.....	41
2.4.2 Psicologia Ergonômica.....	43
2.4.3 Psicologia do Desenvolvimento (Conceituação na ação)	47
2.4.4 Didática das Disciplinas	48
2.5 Análise do Trabalho.....	51
2.5 Situação Didática Profissional	55
2.5.1 Utilização da Situação Didática Profissional em Pesquisas Acadêmicas: Uma Revisão	61
3 ANÁLISES PRELIMINARES	65
3.1 Abordagem histórica dos Sistemas de Equações Lineares.....	66
3.2 Representação algébrica dos Sistemas Lineares.....	68
3.2.1 Método do escalonamento	70
3.4 Revisão de Literatura.....	72
3.5 Orientações curriculares relacionadas ao ensino de Sistemas de Equações Lineares	75
3.6 Abordagem dos sistemas nos livros didáticos.....	77
3.6.1 Livro Didático I	78
3.6.2 Livro Didático II	79
3.7 O <i>software</i> GeoGebra como aporte para o ensino de sistemas de equações lineares	81
3.8 Análise do ensino de sistemas de equações lineares conduzida junto aos professores envolvidos na pesquisa	82
3.8.1 Questionário 1 (primeira seção).....	82
3.8.2 Questionário 2 (segunda seção)	83
3.8.3 Questionário 1 (terceira seção).....	84

3.8.4 Pesquisa com o grupo de professores (Grupo Focal)	85
4 ANÁLISE A <i>PRIORI</i>	92
4.1 Planejamento e concepção das Situações Didáticas Profissionais	92
4.1.1 Situação Didática Profissional I	93
4.1.2 Situação Didática Profissional II	96
4.1.3 Situação Didática Profissional III	100
4.1.4 Situação Didática Profissional IV	103
5. EXPERIMENTAÇÃO	108
5.1 Lócus e instrumentos de investigação	108
5.2 Procedimentos realizados e sujeitos da aplicação	109
5.2.1 Experimentação da SDP I	110
5.2.2 Experimentação da SDP II	117
5.2.3 Experimentação da SDP III	127
5.2.4 Experimentação da SDP IV	134
5.2.5 Questionário Final	144
6 ANÁLISE A <i>POSTERIORI</i> E VALIDAÇÃO INTERNA	149
6.1 Análise <i>a posteriori</i> e validação da SDP I	149
6.2 Análise <i>a posteriori</i> e validação da SDP II	150
6.3 Análise <i>a posteriori</i> e validação da SDP III	152
6.4 Análise <i>a posteriori</i> e validação da SDP IV	154
6.6 Conceitos pragmáticos manifestados pelos professores (organizadores da ação)	156
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS	161
REFERÊNCIAS	166
APÊNDICE A – Questionário para levantamento de perfil demográfico dos sujeitos da pesquisa	175
APÊNDICE B – Entrevista Grupo Focal	176
APÊNDICE C – Situações Didáticas Profissionais aplicadas com os professores	177
APÊNDICE D – Questionário Final	179
Anexo A – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido - TCLE	180

1 INTRODUÇÃO

Na jornada desafiadora da educação, em que o processo de aprendizagem é o elemento norteador, o papel fundamental dos educadores se destaca na edificação do saber. Contudo, nas intrincadas teias do ensino, surgem obstáculos que muitas vezes desafiam a confiança e a eficácia dos educadores. Giaretta, Oro e Rico (2014, p. 1-2), destacam obstáculos referentes ao campo epistêmico, ao enfatizarem que no contexto escolar “existe uma grande parcela de professores com lacunas conceituais nos diversos componentes curriculares, o que os torna inseguros quanto à sua prática pedagógica, ou os limita ao uso do livro didático como ferramenta de ensino”.

Estas lacunas conceituais contribuem para que estes professores se sintam inseguros em relação à sua prática de ensino, devido às suas próprias limitações no entendimento de alguns temas. Além disso, a falta de aprofundamento teórico pode levá-los a adotar o livro didático como sua principal ferramenta de ensino e, em alguns casos, a única, fazendo com que se sintam mais confiantes ao seguir as informações fornecidas nele, ao invés de desenvolver as suas próprias abordagens e estratégias de ensino. No caso, a dependência do livro didático pode restringir a criatividade pedagógica e a adaptação das aulas às necessidades e características específicas dos alunos.

Tratando-se ainda de lacunas conceituais na formação docente, Paulo Freire (2011) aborda a importância de os educadores terem um profundo conhecimento dos conteúdos que ensinam. No contexto das lacunas conceituais entre professores, Freire (2011) argumenta que os educadores devem superar sua própria alienação em relação ao conhecimento, o que implica uma compreensão crítica e significativa dos conteúdos. O autor enfatiza que os professores não devem apenas transmitir informações aos alunos de maneira mecânica, mas sobretudo devem engajar-se em um diálogo genuíno com eles, estabelecendo conexões entre os conteúdos e a realidade vivida pelos alunos.

Ademais, existem outros conhecimentos essenciais para o ensino que vão além do domínio puramente conteudista, mas que possuem uma relação de dependência destes. Lópes (2012) destaca a importância de os professores possuírem conhecimento acerca das concepções e equívocos que alguns alunos

podem desenvolver sobre um determinado objeto matemático. O autor acrescenta ainda que este conhecimento desempenha um papel fundamental no ensino, possibilitando que o professor realize uma série de tarefas essenciais, como: (a) identificar com precisão os pontos em que os alunos podem se sentir confusos; (b) adaptar a forma como o conteúdo é apresentado, para atender às necessidades dos alunos e (c) enfatizar aspectos que podem levar a interpretações errôneas dos tópicos de ensino.

Conforme ressaltado por Paín (2017), o professor desempenha um papel singular, pois é o único profissional incumbido não apenas de dominar o conteúdo de sua disciplina, mas também de compreender o conhecimento prévio do aluno e determinar qual abordagem pedagógica é mais eficaz para a aprendizagem.

Alinhado a essa perspectiva, Hargreaves (1994) enfatiza a importância de os educadores continuarem desenvolvendo conhecimentos e habilidades ao longo de suas carreiras, como uma resposta aos desafios apontados por Giaretta, Oro e Rico (2014), Paín (2017) e López (2012). Em sua abordagem abrangente sobre a situação da educação global, Hargreaves (1994) destaca que para promover uma educação de qualidade, os professores devem estar dispostos a enfrentar suas zonas de desconforto, reconhecendo a necessidade constante de aprimoramento profissional.

Por outro lado, Giaretta, Oro e Rico (2014) argumentam que as formações oferecem um ambiente propício para compartilhar experiências práticas entre os educadores. Isso não apenas permite uma reflexão profunda e uma redefinição das estratégias de ensino, como também impulsiona um estudo mais detalhado dos conteúdos matemáticos envolvidos. Além disso, a adequação desses conteúdos ao currículo vigente é considerada, garantindo uma abordagem educacional consistente com a proposta pedagógica da escola.

Ambas as perspectivas convergem, ao destacar a importância do desenvolvimento contínuo dos educadores para confrontar desafios, preencher lacunas e aperfeiçoar sua prática. Enquanto Hargreaves (1994) destaca a importância de enfrentar as zonas de desconforto pessoais, Giaretta, Oro e Rico (2014) reforçam a relevância das formações como meios eficazes de alcançar esses objetivos, por meio do compartilhamento de experiências e da busca conjunta por aprimoramento.

Considerando esses aspectos, nosso objetivo é contribuir para a formação dos professores por meio de uma formação específica, utilizando Situações Didáticas Profissionais (SDPs). Pretendemos examinar as possíveis dificuldades e obstáculos que esses profissionais enfrentam em seu ambiente de trabalho. Nesse sentido, o tópico escolhido para a colaboração na formação de professores de matemática foi "sistemas de equações lineares".

A motivação para a escolha desse objeto matemático encontra-se ancorada em três razões fundamentais. Primeiro, a relevância do tópico para o desenvolvimento integral dos estudantes, fornecendo as bases necessárias para a compreensão de conceitos mais avançados em matemática. Em segundo lugar, a constatação de que os sistemas de equações lineares desempenham um papel crucial não apenas na Educação Básica, mas também são fundamentais para o sucesso acadêmico dos alunos em disciplinas de nível superior nas áreas das Ciências Exatas.

Além disso, uma terceira razão para esta escolha pode ser justificada pela observação de que os alunos da Educação Básica frequentemente enfrentam dificuldades nesse tópico, conforme evidenciado em estudos anteriores (FREITAS, 1999; BATTAGLIOLI, 2008; PONTE, BRANCO E MATOS, 2009; JORDÃO, 2011). Assim, a abordagem pedagógica e estratégias de ensino relacionadas aos sistemas de equações lineares assumem um papel crucial na superação dessas dificuldades e no fortalecimento das bases matemáticas dos alunos, desde as etapas iniciais de sua formação acadêmica.

Nessa perspectiva, torna-se crucial para aqueles que almejam atuar nas ciências que empregam a matemática, tanto como objeto de estudo quanto como instrumento prático, possuir uma compreensão aprofundada de seus conceitos fundamentais (COIMBRA, 2008; MACHADO, 2004). Nesse sentido, esta pesquisa aborda a necessidade de formação continuada, não apenas para preencher lacunas no entendimento dos professores sobre sistemas de equações, mas também para aprimorar suas práticas pedagógicas diante da complexidade desse tema.

Diante desse cenário, e considerando o professor como peça fundamental no processo, surge uma justificativa premente para a realização deste estudo: a demanda por uma atenção dedicada à formação continuada de professores de matemática em serviço, tendo em vista os desafios e obstáculos que frequentemente permeiam seu ambiente de atuação.

No contexto da formação de professores em exercício, nota-se que seu crescimento intelectual está intrinsecamente vinculado a diversos fatores, sendo um deles a reflexão sobre sua própria ação no contexto do ensino. Nesse âmbito, a abordagem conhecida como Didática Profissional (DP) foi concebida, destacando-se por ser uma maneira de desenvolver a formação profissional, com foco na análise do trabalho.

Dada a necessidade de estabelecer um ambiente de aprendizagem que possibilite ao professor, tanto oportunidades para ação, quanto para reflexão, e que proporcione ao pesquisador objetos de análise, considerou-se as dialéticas intrínsecas à Teoria das Situações Didáticas (TSD) como base teórica para construir e conduzir as sessões formativas, como um guia para estruturar as sessões de formação.

Nesse cenário, com o objetivo de enriquecer a atuação profissional do professor, traz-se a proposta de implementação de um curso de formação destinado a professores atuantes. Este curso foi conduzido por meio do desenvolvimento e da aplicação de Situações Didáticas Profissionais, enquanto proposta teórica fundamentada na DP e na TSD.

As Situações Didáticas Profissionais (SDPs), segundo Alves e Catarino (2019, p. 124) trata-se de um “conjunto de situações ou situação característica, fundamental para o exercício efetivo do ofício do professor. Envolve elementos afeitos à modelização e teorização visando antever determinados obstáculos para a atividade da sala de aula”.

Assim, as SDPs têm como intuito analisar as atividades desenvolvidas pelos professores, principalmente no que tange aos conceitos organizadores da ação (conceitos pragmáticos), buscando uma reflexão dos obstáculos profissionais relacionados ao ensino do objeto matemático em questão. Essa prática denominada, de acordo com Salles (2004), por formação continuada em serviço, uma vez que analisa os obstáculos e as necessidades específicas no âmbito da sala de aula, buscando, com efeito, subsidiar o desenvolvimento de competências laborais.

Flóride e Steinle (2008) destacam que a formação continuada em serviço é concebida como um processo educacional que tem lugar no próprio ambiente de trabalho, sendo especialmente relevante para os professores, uma vez que traz consigo as nuances do cotidiano escolar. Nesse contexto, o ambiente escolar se

converte no local de execução dessa formação, a qual é elaborada e desenvolvida em sintonia com a realidade específica da escola e suas necessidades.

Para isso, esta pesquisa se apoiou em estruturas teóricas cultivadas entre as décadas de 70 e 90 na França, no contexto da Didática da Matemática¹. Entre essas abordagens destacam-se a Engenharia Didática de Formação (EDF), a Teoria das Situações Didáticas (TSD) e a Didática Profissional (DP).

A Engenharia Didática de Formação (EDF) se originou dos fundamentos da Engenharia Didática Clássica (ED). A ED, de maneira geral, se manifesta como uma abordagem metodológica de pesquisa. Ela concentra-se no desenvolvimento, implementação, observação, análise e avaliação de situações didáticas no contexto da sala de aula, visando à promoção da aprendizagem de um conteúdo específico (ARTIGUE, 2014).

Por outro lado, a EDF expande seu escopo para abranger o papel do educador, almejando enriquecer a concepção de atividades que propiciem o desenvolvimento de competências essenciais à prática pedagógica. Esse enfoque visa impulsionar a concepção de recursos e programas de capacitação destinados aos professores no âmbito da Educação Básica. Com isso, oferece uma contribuição significativa ao aprimoramento das habilidades do professor, respaldando a criação e implementação de situações de aprendizado voltadas para o ensino da Matemática (PERRÍN-GLORIAN; BELLEMAIN, 2019).

O segundo cenário aborda a Teoria das Situações Didáticas (TSD), concebida por Guy Brousseau (1988, 2002, 2008, 2011). Essa teoria é delineada pela interação entre o professor, o aluno e o saber, por meio de uma situação didática. A TSD oferece um quadro conceitual que abrange a interação complexa entre o professor, os alunos e os conteúdos de aprendizado.

Por último, temos a Didática Profissional (DP), que considera a formação e o desenvolvimento contínuo do adulto enquanto profissional. Essa abordagem não se limita a um campo específico, mas se aplica de maneira abrangente, inclusive para os professores. Na realidade, o professor é percebido como um elemento fundamental no sistema educacional, muitas vezes comparado a um "operário da

¹ A Didática da Matemática estuda atividades didáticas que priorizam o ensino da parte específica dos saberes matemáticos, fornecendo explicações, conceitos e teorias, bem como meios de previsão e análise; reunindo resultados advindos dos comportamentos cognitivos dos alunos, além dos tipos de situações empregadas e os fenômenos de comunicação do saber (BROUSSEAU, 1986 apud TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p. 157).

educação" ou um "operador educacional". Esse papel atribui ao professor um grande impacto na transformação social, uma vez que ele desempenha um papel central na formação das gerações futuras e na moldagem do ambiente educacional (ALVES, 2020, p. 401).

Assim, o desenvolvimento desta pesquisa é pautado em uma investigação acerca do papel do professor de matemática. Em face disto, buscamos responder ao seguinte questionamento: **De que forma uma abordagem com Situações Didáticas Profissionais pode contribuir para o desenvolvimento de competências pedagógicas e aprimoramento do processo formativo?**

Para responder a tal questionamento, traçamos como objetivo geral para esta pesquisa: **Avaliar o papel das Situações Didáticas Profissionais na formação do professor de matemática, especificamente no contexto do ensino de sistemas de equações lineares, analisando seu impacto e contribuição para o processo formativo.**

Com o propósito de alcançar o objetivo geral delineado, apresentam-se ainda os seguintes objetivos específicos:

- 1 Explorar as concepções dos professores, suas abordagens de ensino e os obstáculos enfrentados no ensino de sistemas de equações lineares;
- 2 Desenvolver um conjunto de estratégias para o ensino de sistemas lineares durante a formação com os professores, por meio da criação de Situações Didáticas Profissionais, no intuito de promover uma reflexão sobre os desafios envolvidos;
- 3 Identificar os conceitos pragmáticos manifestados pelos professores ao longo do processo formativo;
- 4 Investigar o processo de construção ou adaptação dos conceitos organizadores da ação eficaz, denominados conceitos pragmáticos, por meio da reflexão sobre o trabalho docente durante a participação em Situações Didáticas Profissionais (SDPs).

A seguir, são apresentados os principais teóricos utilizados como base para a condução desta pesquisa: sobre a Engenharia Didática Clássica e de Formação, destacam-se os trabalhos de Artigue (1988, 1995, 1996), Almouloud (2007), Laborde (1997), Alves e Catarino (2017), Perrín-Glorian (2009, 2019), Margolinas et al. (2011), Tempier e Chambris (2017), Alves (2018), Perrín-Glorian e Bellemain (2019). No que se refere à Teoria das Situações Didáticas e outras teorias que a alicerçam,

acentuam-se os trabalhos de Brousseau (1988, 2002, 2008, 2011), Alves (2016b, 2017) e Almouloud (2007). Em relação à Didática Profissional, apresentam-se as obras de Pastré (1999, 2002, 2004, 2011), Pastré et al. (2006), Gruber et al. (2017), Savoyant (1974). E tratando-se da Situação Didática Profissional, destaca-se Alves (2018, 2019, 2020, 2021) Alves e Catarino (2019) e Alves e Jucá (2019). Todos esses trabalhos compõem o *corpus* teórico para a elaboração do percurso da pesquisa, entre outras obras relevantes de modo paralelo.

O trabalho foi desenvolvido e subdividido em sete capítulos. No *capítulo 1*, contemplamos esta introdução, em que trazemos uma breve explanação sobre os conhecimentos necessários para atuação dos professores e a relevância das formações continuadas de professores em serviço, destacando como elas desempenham um papel essencial no aprimoramento das práticas educacionais e no desenvolvimento de competências profissionais. Além disso, abordamos a problemática central que orienta esta pesquisa, contextualizando-a dentro do cenário educacional atual, a justificativa que nos motivou a desenvolver esse trabalho, bem como seus objetivos gerais e específicos.

O *capítulo 2* traz os referenciais teóricos e metodológico da pesquisa. Dividimos os tópicos em subseções: na primeira subseção, trouxemos a evolução histórica da Engenharia Didática, nossa metodologia de pesquisa, focando em sua extensão (Engenharia Didática de Formação) que dá ênfase ao papel do professor. Na segunda subseção, aborda-se a Teoria das Situações Didáticas e suas dialéticas. Na terceira subseção, expomos a vertente Didática Profissional e nela buscamos apresentar suas correntes, prática (Engenharia de Formação) e teóricas (Psicologia Ergonômica, Psicologia do Desenvolvimento e a Didática das Disciplinas). Na sequência, apresentamos a noção do termo Situação Didática Profissional e exploramos pesquisas que empregaram essa abordagem na formação de professores. O objetivo é destacar tanto a aplicação prática dessas situações quanto as contribuições específicas que elas proporcionaram em cada contexto de ensino.

No *capítulo 3*, aborda-se o desenvolvimento da metodologia desenvolvida. Nas análises preliminares reservamos nosso olhar aos campos epistemológico, didático e cognitivo. Em seguida, apresentamos uma discussão sobre a aplicação de um questionário inicial e de uma pesquisa de grupo focal, no intuito de caracterizar os participantes e identificar os obstáculos enfrentados por eles em sala de aula.

O *capítulo 4* é destinado à análise *a priori*. Neste capítulo descrevemos a concepção das Situações Didáticas Profissionais apresentadas aos participantes durante a formação. Adicionalmente, identificamos as variáveis didáticas que condicionam o contexto, o que nos possibilitou antecipar algumas ações e estratégias que os professores poderiam adotar. Isso envolveu uma previsão dos comportamentos que esses profissionais poderiam manifestar, bem como as possíveis soluções que poderiam surgir ao longo das sessões de formação.

No *capítulo 5* descrevemos a experimentação, na qual delineamos as fases de progresso da pesquisa e detalhamos o processo metodológico adotado. Nesse contexto, fornecemos uma caracterização do público-alvo selecionado, especificamos o local onde a pesquisa foi conduzida e esclarecemos os procedimentos empregados para a coleta de dados.

No *capítulo 6* apresentamos a análise *a posteriori* e a validação das SDPs aplicadas aos sujeitos nos encontros formativos, buscando um confronto do que foi previsto na análise *a priori*.

Por fim, no *capítulo 7* apresentamos as considerações finais, os principais resultados obtidos na pesquisa, os dados mais relevantes, suas limitações e sugerimos ideias para pesquisas futuras.

2 REFERENCIAL TEÓRICO E METODOLÓGICO

Neste capítulo abordamos os procedimentos metodológicos utilizados nesta pesquisa, delineando as estratégias adotadas para coleta e análise de dados. O desenvolvimento desta dissertação emprega a Engenharia Didática de Formação como metodologia de pesquisa. Posteriormente, apresentamos os referenciais teóricos que fundamentam e orientam a investigação, destacando a base da Teoria das Situações Didáticas (TSD) e da Didática Profissional (DP). A DP foi explorada como uma vertente fundamental para a interpretação dos dados coletados, enquanto a TSD foi empregada como uma abordagem teórica para o ensino e modelização das situações.

A decisão de adotar a Engenharia Didática de Formação como metodologia de pesquisa foi motivada pela ênfase dessa abordagem na análise do papel formativo do professor, o que está alinhado aos objetivos deste estudo.

2.1 Engenharia Didática

A Engenharia Didática Clássica (ED), também conhecida como Engenharia Didática de 1ª geração, teve seus primórdios na década de 60, quando Brousseau lançou as bases dessa abordagem com sua obra *Les Mathématiques du Cours Préparatoire* (BROUSSEAU, 1965). No entanto, foi somente em 1982 que a metodologia ganhou destaque, graças ao trabalho de Yves Chevallard, que a retomou e começou a difundi-la mais amplamente.

Posteriormente, Michèle Artigue também desempenhou um papel significativo na consolidação e disseminação da Engenharia Didática. Ao final da década de 80, Artigue publicou um artigo fundamental na revista *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, no qual sistematiza os princípios da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1988), que desempenhou um papel crucial na popularização da ED como uma metodologia de pesquisa, tanto na França quanto no exterior.

Conforme Artigue (1995), a Engenharia Didática (ED) é uma metodologia de pesquisa que permite ao professor elaborar um plano de ensino com o propósito de desenvolver, realizar, observar e analisar as situações didáticas destinadas ao planejamento da prática docente. A autora apresenta uma definição fundamental para a ED, ao apontar que se trata de “uma sequência de aula(s) concebida(s),

organizada(s) e articulada(s) no tempo, de forma coerente, por um professor-engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para uma certa população de alunos” (ARTIGUE, 1995, p. 61). Ainda, de modo mais pormenorizado, a autora descreve que:

A noção de Engenharia Didática emergiu em Didática da Matemática no início da década de 80, com o objetivo de etiquetar uma forma de trabalho didático: aquela que era comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apoia nos conhecimentos científicos do seu domínio, aceita submeter-se a um controle do tipo científico mas, ao mesmo tempo, se encontra obrigado a trabalhar sobre objetos muito mais complexos do que os objetos depurados da ciência e, portanto, a estudar de uma forma prática, com todos os meios ao seu alcance, problemas de que a ciência não quer ou ainda não é capaz de se encarregar (ARTIGUE, 1988, p.193).

No trecho mencionado, a autora define a ED como uma metodologia que se baseia na ideia de que o trabalho didático, seja de um professor ou de um pesquisador, pode ser comparado ao trabalho de um engenheiro. Assim como um engenheiro se apoia em conhecimentos científicos para realizar um projeto complexo, quem usa a ED se baseia em princípios teóricos para projetar e conduzir situações didáticas. No entanto, também enfrenta variáveis complexas e imprevisíveis no contexto da sala de aula, que não podem ser totalmente controladas pela teoria científica.

Segundo Artigue (1995), a ED caracteriza-se por um esquema experimental que se baseia na implementação de realizações didáticas no âmbito da sala de aula. Além disso, a ED pode ser considerada uma metodologia de pesquisa experimental devido ao seu registro específico e ao método de validação associado, que envolve a comparação entre as análises *a priori* e *a posteriori*. Conforme Almouloud (2007), uma das peculiaridades da ED é o seu processo interno de validação, que não necessariamente requer a aplicação de pré-testes ou pós-testes.

A Engenharia Didática, de acordo com Margolinas e Drijvers (2015), encontra sua consolidação como metodologia para pesquisas didáticas por três razões fundamentais. A primeira dessas razões está relacionada à necessidade de compreender e examinar o conhecimento prévio e adquirido pelos alunos envolvidos em situações significativas e investigativas. A segunda razão diz respeito à capacidade da ED de prever, pelo menos em parte, o comportamento dos estudantes, o que possibilita o aperfeiçoamento e a orientação das escolhas

didáticas. A terceira razão, como destacada pelos autores, enfatiza a importância da participação dos pesquisadores na pesquisa e na ação educacional. Ao envolver-se com os atores do ambiente educacional, como professores e alunos, o pesquisador tem a oportunidade de observar e vivenciar os constrangimentos, obstáculos e conveniências inerentes ao contexto da sala de aula.

Nesse contexto, estabelece-se a distinção de dois níveis de organização da pesquisa relacionados às variáveis didáticas: a microengenharia e a macroengenharia. Além disso, são identificados dois tipos de validação, a externa e a interna. Tratando-se dos níveis de organização da pesquisa, Artigue (1988) fornece a seguinte definição para ambos os níveis de realizações didáticas:

[...] se distinguem, classicamente, dois níveis, o da micro-engenharia e o da macro-engenharia, conforme a importância da realização didática implicada na investigação. As investigações de micro-engenharia são mais fáceis de iniciar, mas, se permitem ter em conta, de forma local, a complexidade do fenómeno sala de aula, não permitem compor essa complexidade com a complexidade essencial dos fenómenos ligados à duração nas relações ensino/aprendizagem. Também não permitem necessariamente um recorte coerente dos objetos de conhecimento. As investigações de macro-engenharia são, pois, apesar de todas as dificuldades metodológicas e institucionais que apresentam, incontornáveis (ARTIGUE, 1988, p.196).

A autora apresenta uma distinção relacionada à complexidade das observações e aos processos de duração envolvidos no ensino e na aprendizagem. Em uma microengenharia, as realizações didáticas e a análise das situações didáticas são mais simples, mas não permitem uma compreensão abrangente da maturação da aprendizagem. Em contrapartida, nas macroengenharias, é possível realizar investigações mais aprofundadas, porém, isso requer enfrentar desafios metodológicos mais complexos.

Alves (2016a) destaca que a microengenharia está focada nos fenômenos que se desenrolam no contexto da sala de aula. Assim, “neste nível, podemos estudar determinado assunto no âmbito da complexidade da classe” (p. 70), ao passo que a macroengenharia se caracteriza por uma investigação mais abrangente, que frequentemente enfrenta desafios de natureza metodológica e/ou institucional.

Este estudo se caracteriza como uma microengenharia, uma vez que tem como objetivo observar e aperfeiçoar uma Engenharia Didática de Formação (EDF) relativa ao conteúdo de sistemas de equações lineares, com foco no

desenvolvimento e na formação continuada de professores em sala de aula. Destaca-se que a classificação como EDF decorre da natureza específica dos objetivos da pesquisa e dos sujeitos envolvidos.

No que diz respeito aos tipos de validação da ED, Laborde (1997) define a validação externa e a validação interna. Conforme a autora, a validação externa tem como objetivo avaliar o desempenho dos estudantes durante a realização da situação didática. Este processo pode ser conduzido através da comparação entre as produções iniciais e finais desenvolvidas pelos estudantes, bem como pela aplicação e análise de questionários e entrevistas, ou mesmo pela comparação com outros grupos, como grupos experimentais ou grupos de controle.

Por outro lado, a validação interna concentra-se na descrição abrangente dos estudantes, analisando seu comportamento e desenvolvimento cognitivo durante a execução da situação didática. Este tipo de validação envolve um acompanhamento individualizado de cada um dos sujeitos envolvidos, permitindo a seleção de situações específicas que, posteriormente, serão minuciosamente apreciadas e interpretadas. A validação interna desempenha um papel crucial no processo de validação da pesquisa didática (LABORDE, 1997).

De acordo com Almouloud e Coutinho (2008), uma das características da ED que merece destaque é a sua opção de validação interna. Em contraste com outras metodologias de pesquisa, a ED oferece a possibilidade de realizar a validação internamente. Isso significa que, ao conceber e executar uma etapa ou uma engenharia didática, a validação ocorre como parte integrante do processo. Durante essa etapa, é feita uma comparação entre as perspectivas teóricas iniciais e o desenvolvimento real observado no contexto da sala de aula. Esse confronto constante entre a teoria e a prática, orienta ajustes, melhorias e/ou novas reflexões no processo de ensino-aprendizagem. Alves e Catarino (2017) ainda acrescentam que a ED proporciona uma prática de intervenção controlada, permitindo uma compreensão detalhada dos fenômenos de ensino-aprendizagem.

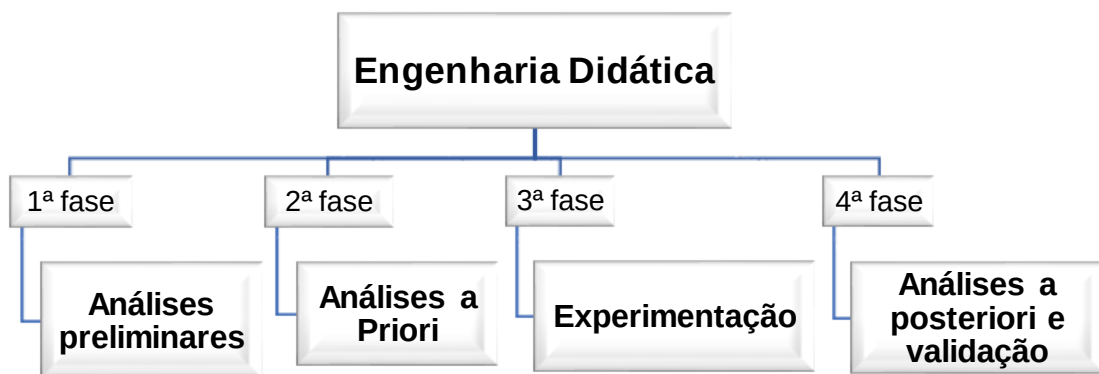
É importante ressaltar que essa análise comparativa entre o que se espera alcançar e os resultados obtidos não deve necessariamente ser realizada apenas ao final da sequência programada. Pelo contrário, ela deve ocorrer de forma contínua, a cada etapa do processo educacional. É fundamental destacar que essa análise não se limita a contrastar o conhecimento dos alunos antes e depois da realização da

ED. Em vez disso, seu propósito principal é compreender os processos de construção do conhecimento ao longo do desenvolvimento do tema (BITTAR, 2017).

Além disso, é importante destacar que o registro empírico resultante das investigações conduzidas a partir da ED oferece dados cruciais para a validação interna do estudo. Essa validação é estabelecida com base no confronto entre a análise *a priori*, que se apoia em um quadro teórico, e a análise *a posteriori*, que é orientada pela dimensão prática da pesquisa.

Segundo Artigue (1996), com o objetivo de abordar todas as particularidades envolvidas no planejamento, execução e análise de realizações didáticas no campo das pesquisas em Didática da Matemática, a ED propõe uma estruturação em quatro fases distintas: análises preliminares; concepção e análise *a priori*; experimentação; e, por fim, a análise *a posteriori* e validação, que envolvem reflexão, avaliação e orientação de novas construções, sendo estas apresentadas no esquema da Figura (1):

Figura 1 - Engenharia de 1ª e 2ª geração



Fonte: Elaboração da autora (2022).

A etapa de análise preliminar compreende uma revisão do referencial teórico e uma investigação sobre como o conhecimento é transmitido ao estudante, bem como a exploração de suas ideias e dificuldades. De acordo com Artigue (1996), essa etapa tem como propósito fornecer informações essenciais para a elaboração da sequência didática. Durante essa fase, deve-se realizar uma revisão da literatura relevante, juntamente a uma análise abrangente dos tópicos a serem abordados, das dificuldades identificadas e dos obstáculos que se manifestam no contexto do

ensino e da aprendizagem de um determinado tema. Essa análise abrange três perspectivas essenciais: a epistemológica, a cognitiva e a didática.

Artigue (1990) acentua que o campo epistemológico se refere ao próprio conhecimento em questão e às concepções sobre os conceitos envolvidos; o cognitivo é relacionado às especificidades cognitivas e aos processos de aprendizagem do público-alvo da realização didática; e o campo didático está associado ao sistema de ensino em si e ao seu funcionamento usual no contexto do assunto em questão.

Com base na identificação dos obstáculos inerentes ao objeto matemático nas três dimensões mencionadas, inicia-se a construção da sequência didática. A etapa de concepção e análise *a priori* compreende a definição das variáveis sob controle, conforme indicado por Artigue (1996). Nessa fase, o foco principal é o comportamento do aluno e, para isso, a abordagem inclui uma parte descritiva e outra preditiva, com o objetivo de estabelecer um controle eficaz. A ideia é antecipar os possíveis comportamentos dos alunos por meio das situações didáticas, onde “as ações do aluno são vistas no funcionamento quase isolado do professor, que sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagem” (ALMOULOU; COUTINHO, 2008, p. 67).

A etapa de experimentação envolve a ação de preparar o terreno para a aplicação da sequência didática. Durante a experimentação, vários elementos são considerados, incluindo a definição clara dos objetivos e das condições da pesquisa, a identificação do público-alvo, o estabelecimento do contrato didático, a aplicação dos instrumentos de pesquisa e o registro das observações feitas durante a experimentação (ARTIGUE, 1996).

Por fim, a etapa de análise *a posteriori* e validação engloba o conjunto de informações coletadas durante a experimentação, juntamente com os conhecimentos manifestados pelos estudantes. De acordo com Artigue (1996), os dados são obtidos por meio do uso de instrumentos didáticos aplicados em diferentes momentos do processo e, em seguida, são confrontados com o que foi proposto durante a análise *a priori*. Essa fase é crucial para a validação, pois permite esclarecer os resultados obtidos e as condições em que as questões levantadas foram respondidas.

A partir das etapas descritas, Almouloud e Coutinho (2008, p. 68) destacam que o objetivo central da ED, em resumo, “é relacionar as observações com os

objetivos definidos *a priori* e estimar a reprodutibilidade e a regularidade dos fenômenos didáticos identificados”. Os autores enfatizam também que cada uma das etapas pode ser revisitada, levando em consideração as necessidades do professor/pesquisador.

Isso ocorre porque é fundamental que o docente reflita sobre sua prática em sala de aula e esteja disposto a redesenhar ou adaptar alguma etapa do processo, se necessário. Esse ajuste ao longo do caminho, após a aplicação das etapas, permite aprimorar o roteiro da proposta, sempre embasado nos conhecimentos epistemológicos e didáticos.

A aplicação da Engenharia Didática em diversas pesquisas na área de Didática da Matemática evidenciou a necessidade de abordar novas questões e áreas nas quais a metodologia original não se mostrava completamente eficaz. Diante desses desafios, a ED evoluiu, dando origem à Engenharia Didática de Formação (EDF), proposta por Perrín-Glorian (2009), concentrada principalmente no aprimoramento do processo de formação de professores.

2.2 Engenharia Didática de Formação

A Engenharia Didática serviu como base para várias pesquisas conduzidas pelos especialistas em Educação Matemática na França. No entanto, durante esse período, surgiram algumas lacunas relacionadas à atitude e à prática dos professores de Matemática (MARGOLINAS et al., 2011).

Alves e Dias (2017) destacam que, a partir dos estudos desenvolvidos na França, nota-se uma ênfase considerável no trinômio didático composto por aluno, professor e saber. Portanto, reconhece-se o professor como uma parte essencial desse processo, sendo um agente com a capacidade e a responsabilidade de colocar em prática as teorias e métodos em sala de aula, garantindo a efetivação da teoria. Em resposta a essa necessidade de aprimoramento, houve uma reformulação dos estudos conduzidos pela Engenharia Didática, resultando na formulação de uma extensão dessa abordagem, “repercutindo sob a terminologia Engenharia Didática de 2ª geração ou Engenharia Didática de Formação (EDF)” (ALVES, 2018a, p. 49).

Segundo Perrín-Glorian e Bellemain (2019), enquanto as primeiras Engenharias Didáticas (ED) se concentravam na investigação da forma como o

conhecimento era transmitido, a Engenharia Didática de Formação (EDF) passou a identificar questões cruciais que apontavam para a insuficiência das atividades educativas. Ela não se limita mais apenas a examinar a transmissão de conteúdo, mas também, a partir das dificuldades enfrentadas por alunos e professores nesse processo, busca oferecer abordagens mais eficazes para o ensino. Simultaneamente, ocorria o desenvolvimento de estudos que abordavam fenômenos didáticos de forma mais abrangente, contribuindo para enriquecer e aprofundar os referenciais teóricos apresentados. Conforme a visão das autoras:

A Engenharia Didática como produto é, portanto, tão importante quanto método. São as próprias situações que nós estudamos, de um ponto de vista adidático (mas o termo não apareceu até 1982), sem estudar o papel do professor, mesmo que seja essencial na devolução, institucionalização ou implementação da dialética ferramenta-objeto ou conjuntos de quadros: este envolve identificar as virtudes dessas situações e as ligações entre elas para produzir novos conhecimentos nos alunos e o avanço do conhecimento em uma classe. (PERRÍN-GLORIAN; BELLEMAIN, 2019, p. 67).

Diante do que foi apresentado, temos que a Engenharia Didática de Formação (EDF) parte inicialmente do estudo e da compreensão das situações adidáticas e, em seguida, se estende para a consideração essencial do papel do professor, bem como das diferenças entre os alunos. Isso representa uma evolução significativa em relação à abordagem anterior da Engenharia Didática (ED), que estava principalmente focada no aspecto adidático, sem considerar o envolvimento direto do professor, apesar de seu papel fundamental na implementação e institucionalização das situações didáticas (PERRÍN-GLORIAN, 2019). A seguir, destacamos, segundo Almouloud e Silva (2012), algumas características e diferenças entre as duas engenharias mencionadas anteriormente:

Quadro 1 - Engenharia de 1ª e 2ª geração

	Objetivo(s)	Aspectos centrais
ED 1ª geração	Elaborar e estudar propostas de transposição didática para o ensino.	Metodologia de pesquisa e produto

ED 2ª geração	Determinar os princípios que comandam a engenharia que se quer transformar em recurso para o ensino regular, e estudar as condições de sua divulgação.	Três funções não independentes: a investigação, o desenvolvimento e a formação de professores por meio da análise. Necessita de vários níveis de construção.
------------------	--	--

Fonte: Almouloud e Silva (2012, p.46)

Com base nesses elementos, é possível compreender que uma abordagem de Engenharia Didática de Segunda Geração, orientada para o aprimoramento da formação profissional, traz questões de pesquisa que emergem diretamente de desafios no processo de ensino, particularmente ligadas a um conteúdo específico, e que incorporam considerações relacionadas ao desenvolvimento profissional dos professores (PERRÍN-GLORIAN, 2011).

Em sua concepção sobre a Engenharia Didática de Formação, Pastré, Mayen e Vergnaud (2006) enfatizam a importância da identificação de necessidades atinentes ao exercício pleno da profissão como um guia fundamental para o processo de desenvolvimento de programas de formação. Segundo eles, a EDF:

É um campo de práticas que consiste em construir dispositivos de formação correspondentes às necessidades identificadas para um público dado, no quadro do seu meio de trabalho. A formação escolar possui como tendência a descontextualização das aprendizagens. A engenharia da formação deve, precisamente, insistir no contrário sobre o contexto social no qual devem ser efetuadas a aprendizagem dos adultos em formação. [...] A engenharia de formação se concretiza, principalmente, a partir de duas práticas: análise das necessidades e dos dispositivos de formação (PASTRÉ; MAYEN; VERGNAUD, 2006, p. 146-147).

No trecho mencionado, os autores ressaltam a falta percebida na formação escolar, ao distanciar a aprendizagem do contexto social e integral. No entanto, argumentam que o papel da Engenharia de Formação deve partir da vivência real para a construção de processos de aprendizagem mais eficazes. Em resumo, duas práticas se mostram fundamentais para alcançar esse objetivo: a identificação dos obstáculos reais que os aprendizes enfrentam e a criação de recursos educacionais que permitam a adaptação e a reflexão por parte dos docentes.

A EDF, conforme Perrín-Glorian (2009), tem como objetivo principal o desenvolvimento de recursos ou objetos de aprendizagem destinados ao ensino regular ou à formação de professores. Isso pode envolver vários níveis de construção, inclusive a criação de situações de sala de aula, em que o

professor/pesquisador é orientado a descrever as ações que realiza para facilitar o ensino.

As Engenharias Didáticas de 1ª e 2ª geração são, respectivamente, chamadas de Engenharia Didática de Investigação (IDR, sigla em francês) e Engenharia Didática de Desenvolvimento (IDD, sigla em francês), com base na pergunta inicial de pesquisa. No Quadro 2 apresentamos as particularidades e singularidades de ambas:

Quadro 2 - Engenharia Didática para Investigação (IDR) e Engenharia Didática de Desenvolvimento (IDD)

Engenharia Didática de 1ª e 2ª geração	
IDR	IDD
• Faz emergir fenômenos didáticos para estudá-los; • Visa um avanço no resultado de investigação, fazendo uso de experimentações montadas em função da questão de pesquisa; • Não há a preocupação imediata em divulgar as situações utilizadas.	• Produzir recurso (s) para professores ou para a formação de professores. • Liberdade de ação para o professor • A investigação continua a ser essencial, mas, as questões de investigação não são motivadas, em primeiro lugar, pela ampliação dos quadros teóricos; • Baseia-se na engenharia de 1ª geração.

Fonte: Almouloud e Silva (2012, p. 46).

Na abordagem IDR, o objetivo principal é identificar e analisar fenômenos relacionados ao ensino e à aprendizagem. Isso envolve a realização de experimentações projetadas de acordo com a questão de pesquisa, sem necessariamente priorizar a divulgação mais ampla das situações educacionais utilizadas. Em outras palavras, a IDR busca provocar a manifestação de fenômenos didáticos para posterior estudo, sem a preocupação imediata com a divulgação ampla dos resultados.

Por outro lado, na abordagem da IDD, o foco principal está na produção de recursos educacionais destinados à utilização por professores em sala de aula ou na formação docente. O objetivo é criar materiais pedagógicos práticos e eficazes que possam auxiliar os educadores no processo de ensino e aprendizagem. Vale ressaltar que para a IDD é necessária uma maior flexibilidade do que na IDR, visto que a adaptação da produção de recursos ou da formação lida com uma variedade mais ampla de possíveis contextos de aplicação.

Perrín-Glorian (2019) destaca que a EDF é caracterizada por três elementos essenciais: (i) a gênese das questões de pesquisa, a partir de problemas observados no ensino de um conteúdo matemático específico, incluindo aspectos relacionados à formação de professores; (ii) a natureza cíclica da metodologia, em que a implementação de sessões didáticas serve como base para a elaboração de novas estratégias de ensino; (iii) uma abordagem compartilhada e teorizada do trabalho, que envolve ativamente pesquisadores, professores e/ou formadores, promovendo a colaboração fundamentada na análise e melhoria das práticas educacionais.

É importante notar que, em termos de estrutura, a EDF compartilha as mesmas etapas propostas pela ED clássica. No entanto, Tempier e Chambris (2017) destacam que cada fase da EDF tem um objetivo específico, o que a distingue da abordagem da ED clássica.

Tempier e Chambris (2017) apresentam como ocorre o desenvolvimento de cada uma das fases da EDF. Nas análises preliminares faz-se a pesquisa sobre o ensino atual do tópico matemático, abordando as esferas epistemológicas, didáticas e cognitivas. Identifica-se um ponto problemático no sistema e busca-se condições para equilibrá-lo, levando em conta os obstáculos enfrentados pelos professores no ensino desse conteúdo.

As análises *a priori* são influenciadas pelas análises preliminares e se concentram nos objetivos da pesquisa, envolvendo controles matemáticos e epistemológicos, relacionando conceitos à situação de ação. Isso também requer flexibilidade e adaptações para o professor, quando necessário.

A etapa de experimentação, à semelhança da abordagem da ED clássica, corresponde ao momento de aplicar o que foi previamente analisado e construído nas fases anteriores. Neste contexto, concentra-se na aplicação do recurso didático que será apresentado e utilizado com os professores.

Na fase de análise *a posteriori* e validação, confrontam-se as hipóteses e previsões com os dados da experimentação. Na EDF, esta etapa permite compreender a relevância das situações e sua aplicabilidade no ensino regular, de forma semelhante à avaliação das escolhas feitas na construção do recurso didático.

No que diz respeito à validação da EDF, Machado (2015) a descreve como sendo de natureza externa. Isto ocorre porque os métodos empregados para legitimar os resultados da pesquisa são do tipo comparativo-estatístico entre os

grupos controle e experimentais. No entanto, é importante observar que neste estudo também foi utilizada a validação interna, uma característica da ED. Isso se deve ao fato de a pesquisa envolver um número reduzido de participantes (apenas 5 professores) e suas produções não serem comparadas com produções externas à pesquisa em questão.

Com o propósito de estabelecer uma base teórica para uma compreensão mais profunda da aprendizagem do professor em seu contexto de trabalho, nos próximos segmentos apresentam-se a Teoria das Situações Didáticas e a vertente Didática Profissional.

2.3 Teoria das Situações Didáticas

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) é uma teoria de origem francesa que se originou no contexto da Didática da Matemática. Essa teoria teve seu desenvolvimento inicial no Instituto de Investigação do Ensino de Matemática (IREM)² sob a orientação do professor e pesquisador Guy Brousseau (BROUSSEAU, 1986).

Brousseau (1986) enfatiza que a TSD tem como objetivo principal a caracterização do processo de aprendizagem. Isto é alcançado por meio de um conjunto de situações cuidadosamente planejadas, que são capazes de ser reproduzidas e têm o potencial de provocar mudanças no comportamento de um grupo específico de alunos.

Da mesma forma que muitas outras teorias desenvolvidas nesse contexto, a TSD concentra seu interesse na análise das relações entre professor, aluno e saber (ALVES, 2016b). Em resumo, a TSD se configura como um modelo teórico de ensino, baseado em uma situação didática. Essa situação de aprendizagem é planejada e estruturada pelo professor e explorada no ambiente educacional, por meio da interação entre os três elementos fundamentais do trinômio didático. Brousseau (1986) oferece uma definição fundamental para o conceito de situação didática. Para o autor:

² *Institut Universitaire de Recherche sur L'Enseignement des Mathématiques* (IREM) ou Institutos de Pesquisa sobre o Ensino de Matemática. Foram criados na França a partir dos anos 80. Esses centros universitários, espalhados por todo o país, desempenharam um papel significativo ao impulsionar a organização e colaboração entre profissionais de matizes e formações diversas. Seu foco realça a preocupação compartilhada com a melhoria contínua do sistema de ensino (ALVES, 2016b, p. 132).

Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição... o trabalho do aluno deveria, pelo menos em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos pertinentes (BROUSSEAU, 1986, p. 8).

No trecho mencionado, Brousseau enfatiza que os alunos podem adquirir conhecimento por meio das interações e experiências que ocorrem quando eles se adaptam a um ambiente (*milieu*) onde as situações são desenvolvidas. No entanto, é importante salientar que quando esse ambiente não é criado com uma intenção didática clara, torna-se inadequado para promover a aprendizagem efetiva do conhecimento matemático por parte dos alunos. Almouloud (2007, p. 35) define o *milieu* como um “sistema antagonista ao sujeito, sendo o *milieu* adidático um sistema sem intenção didática, exterior ao sujeito, que, por suas retroações às ações do sujeito, permite sua reflexão a respeito de suas ações e de sua aprendizagem”.

É relevante salientar que, no modelo de relações concebido por Brousseau, a ênfase é dada à interação entre o aluno e o *milieu*. É exatamente nesse contexto que ele apresenta o conceito de “situação a-didática”. Brousseau (1986) fornece uma definição desse conceito, destacando sua relevância como uma situação didática particular e crucial no processo de construção do conhecimento:

Quando o aluno se torna capaz de pôr em funcionamento e utilizar por si mesmo o saber que está construindo, em situação não prevista em qualquer contexto de ensino e na ausência de qualquer professor, está ocorrendo, então, o que pode ser chamado de situação a-didática (BROUSSEAU, 1986, p.68).

Como parte fundamental da situação didática, temos a situação a-didática, que também é elaborada pelo professor, sendo este o momento em que o aluno trabalha de maneira autônoma, percebendo o caminho a ser trilhado para compreender um novo saber. O professor aqui deve agir apenas como um mediador, efetuando apenas a devolução do problema.

Desse modo, o processo de ensino e aprendizagem apoia-se na noção de devolução, que segundo Almouloud (2007, p. 35) é o “ato pelo qual o professor faz o aluno aceitar a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (a-didática) ou de um problema aceitando as consequências dessa transferência”.

Nas situações a-didáticas, o professor seleciona as atividades, no intuito de que o aluno as aceite, levando-os a agir, falar e refletir sobre elas. Para Almouloud (2007), as situações a-didáticas intensificam a capacidade que os alunos têm de agir e raciocinar. Essas situações trazem traços de que “a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar a este condições favoráveis para a apropriação do novo saber que deseja ensinar” (ALMOULOU, 2007, p. 33).

A estrutura teórica das situações didáticas incorpora conceitos discutidos em pesquisas dentro da Didática da Matemática. É possível estabelecer conexões entre a dimensão da Teoria das Situações Didáticas e a compreensão de conceitos como a transposição didática, contrato didático e obstáculos epistemológicos. Nesse contexto é relevante fazer uma breve menção a alguns aspectos relacionados a esses conceitos.

Em relação à transmissão do conhecimento que é feita pelos matemáticos, Brousseau (2002) destaca que esses não realizam a transmissão tal qual os encontra, pois, esse conhecimento passa por modificações, procurando dar sentido ao que será ensinado. Desse modo, “o professor deverá recontextualizar e repersonalizar o saber científico” (ALVES, 2016, p. 60), levando ao conceito de transposição didática, nomeada por Chevallard (1991), a qual versa sobre a passagem do saber sábio para o saber ensinado. Ainda em outras palavras, a transposição didática se apresenta como:

Um conteúdo de conhecimento que foi designado como saber ensinar, sofre posteriormente um conjunto de transformações adaptativas que o tornarão adequado para ocupar um lugar entre objetos de ensino. O “trabalho” que se transforma de um objeto de saber a ensinar em um objeto de ensino é chamado de transposição didática (CHEVALLARD, 1991, p. 45).

Dessa maneira, o autor descreve o conceito como a dinâmica na qual um corpo de conhecimento, identificado como o “saber a ensinar”, passa por um processo de adaptação e transformação. Isso é feito com o propósito de converter esse conhecimento em um recurso de ensino mais adequado e de fácil compreensão para os indivíduos que estão em processo de aprendizagem. Um fato importante a se destacar sobre a transposição didática é que ela não ocorre de modo isolado, mas sim associada a outro fenômeno, sendo este nomeado de contrato didático, que é definido como:

Um relacionamento que determina - explicitamente até certo ponto, mas principalmente implicitamente - o que cada parceiro, professor e aluno, terá a responsabilidade de gerenciar e, de uma maneira ou de outra ser responsável perante o outro (BROUSSEAU, 2002, p. 31).

Diante desse compromisso bilateral feito entre professor e aluno, tanto o professor quanto o aluno conjecturam sobre as expectativas mútuas e as interpretações que cada um faz do pensamento do outro “e essa ideia cria as possibilidades de intervenção, de devolução da parte a-didática das situações e de institucionalização” (BROUSSEAU, 2008, p. 74).

Agora, discutimos sucintamente o conceito de obstáculo epistemológico, que pode ser definido como uma barreira que emerge a partir do próprio conhecimento, ou seja, não é algo que possa ser evitado. Esses obstáculos podem ser identificados ao longo da história da construção de um conceito. Assim, é importante compreender que os obstáculos epistemológicos têm origens em duas fontes distintas. De um lado, estão enraizados na história e na cultura, e por outro lado, estão ligados à dimensão social da aprendizagem (PAIS, 2002).

Retomando, portanto, as reflexões sobre as situações a-didáticas, que são o cerne do processo de aprendizagem de acordo com os princípios da Teoria das Situações Didáticas, torna-se viável a criação de uma tipologia de situações didáticas. Essa tipologia contribui significativamente para a compreensão desse processo. Brousseau (2008) detecta as particularidades de todas essas situações em suas definições e na forma como se relacionam com o saber, bem como as apresenta divididas em quatro momentos: ação, formulação e validação, que compõem a fase a-didática, e a institucionalização, explanada mais adiante. A seguir apresentamos a descrição de cada uma das dialéticas da TSD:

- a) Dialética de ação: “sucessão de interações entre o aluno e o meio” (Brousseau, 2002, p. 9). Aqui, as decisões devem ser tomadas e o educando age pontualmente a fim de resolver o problema, seja de modo racional a partir do conhecimento prévio ou intuitivo.
- b) Dialética de formulação: momento em que o educando expõe suas questões e afirmações, compartilhando-as de forma que todos possam compreendê-lo. Aqui, debate-se no intuito de encontrar um modelo para se chegar à solução do problema (BROUSSEAU, 2002). Neste momento, o aluno deve

estabelecer conjecturas e usar linguagem matemática, sem se preocupar com a formalidade das estruturas matemáticas, mas sim com a organização de suas ideias.

- c) Dialética de validação: ocorre quando o estudante defende o que ele expôs buscando validar seus pensamentos e, desse modo, constrói teorias para buscar convencer os demais sobre seu ponto de vista, ou aceitar outros argumentos que o fazem mudar de opinião. Ou seja, deve apresentar as estratégias utilizadas para resolver o problema (BROUSSEAU, 2008).

Todas essas interações, que são consideradas a-didáticas, fazem parte daquilo que o professor fornece como devolução, conforme mencionado anteriormente. De acordo com Brousseau (1986), o papel do professor se divide em duas áreas distintas: a devolução e a institucionalização. Na fase de institucionalização, o objetivo principal é destacar a natureza universal do conhecimento e as intenções pedagógicas do professor. Segundo Almouloud (2007, p. 40), neste contexto, o professor estabelece de maneira convencional e explícita a natureza cognitiva do conhecimento.

As situações expostas a partir da Teoria das Situações Didáticas colocam a tentativa e o erro como de extrema importância na construção do saber. O conhecimento já concebido baseia a construção dos novos saberes, que são formulados a partir das ações, reflexões e argumentações. Com isso, essa teoria aponta para a formação de educandos ativos e reflexivos, que buscam soluções para problemas a eles apresentados.

Brousseau (2008) salienta que uma situação pode provocar o progresso da aprendizagem dos alunos e, conseqüentemente, fazer com que a situação evolua, de modo que a gênese de um conhecimento pode ou não ser resultado de uma sucessão espontânea de perguntas e respostas novas, as quais o autor nomeou por dialéticas.

O uso de uma situação didática vem para sugerir um modelo que pode amparar o professor no processo de ensino e aprendizagem em matemática que, de acordo com Machado (1999), a sala de aula representa uma referência nesse processo, através da interação professor, aluno e conhecimento. Tais hipóteses serviram como amparo para esta pesquisa, uma vez que as situações didáticas profissionais foram aplicadas com base nas fases da Teoria das Situações Didáticas,

para que o comportamento do professor (em formação) fosse analisado no decorrer do percurso formativo.

Por fim, uma vez que a Teoria das Situações Didáticas (TSD) concentra-se no desenvolvimento intelectual e cognitivo dos alunos, é imperativo investigar o processo de aprendizagem dos professores em sua prática educacional. Assim, como um complemento à TSD, o próximo tópico aborda uma discussão sobre alguns dos princípios da vertente Didática Profissional.

2.4 Didática Profissional

A Didática Profissional (DP) surgiu na França na década de 90, apresentando como principal objetivo intensificar a aprendizagem nos adultos e desenvolver competências profissionais mediante a análise do trabalho. Ela baseia-se na análise cognitiva do trabalho no intuito de tornar a formação profissional mais eficaz, ou seja, é realizada a análise da atividade que, quando finalizada, será utilizada para fins de treinamento (PASTRÉ, 1999). Diante desse contexto, o autor propõe a hipótese de que a atividade humana se estrutura por meio de esquemas, os quais, por sua vez, são formados por conceitos pragmáticos.

É importante ressaltar que a DP, desde seu surgimento, concentra-se na formação de adultos, sendo esta uma das questões fundamentais que motivaram o desenvolvimento desse referencial teórico-prático. A análise do trabalho está intrinsecamente relacionada aos desafios de aprendizagem surgidos na prática laboral, especialmente em um contexto profissional em constante evolução, envolvendo um sujeito em desenvolvimento (PASTRÉ; MAYEN; VERGNAUD, 2006).

Nesse sentido, a DP integra em seus estudos um campo prático denominado Engenharia de Formação e demais aportes resultantes da confluência de três correntes teóricas: Psicologia Ergonômica, Psicologia do Desenvolvimento e Didática das Disciplinas. A Figura 2 detalha visualmente cada uma dessas correntes, elucidando as contribuições de autores proeminentes:

Figura 2 - Correntes que compõem a Didática Profissional



Fonte: Elaboração da autora (2022).

Da união dessas teorias, passou-se a estudar o processo de formação e obtenção de competências e habilidades no ambiente de trabalho. A seguir, fundamentamos as particularidades do campo prático e das três correntes teóricas.

2.4.1 Engenharia de Formação

A Engenharia de Formação é um campo com significativas contribuições no tocante à Formação Profissional Contínua (FPC) e sua abordagem metodológica forneceu suporte essencial à DP. Serão recapituladas de forma sucinta as ideias relacionadas à EDF, considerando sua apresentação detalhada anteriormente.

A EDF contextualiza o processo de aprendizagem porque foca no meio onde ela ocorre, promovendo a formação a partir da detecção de necessidades específicas de um ambiente de trabalho. Desse modo, Pastré, Mayen e Vergnaud (2006, p.146) a definem como:

[...] um campo de práticas que consiste na construção de dispositivos de formação correspondentes ao conjunto de necessidades identificadas para um determinado público no quadro do seu contexto de trabalho. A formação escolar possui a tendência em descontextualizar a aprendizagem. A Engenharia de Formação vai insistir no contrário, sobre o contexto social no qual irá se efetuar uma aprendizagem de adultos em formação (PASTRÉ; MAYEN; VERGNAUD, 2006, p.146).

De modo similar, Bailleul (2015, p. 137) a define como sendo “um conjunto organizado e formalizado de práticas, saberes, experiências e ferramentas de formação, orientado por valores de eficiência e progresso e colocado ao serviço dos atores no campo da educação e da formação”. Essa, por sua vez, tem sua constituição formada a partir de três fatores: as demandas dos países independentes, a entrada de engenheiros em formação no cenário profissional e a educação continuada (CIDRÃO, 2020).

Após o envolvimento com países independentes e com a criação de sistemas de formação, o treinamento passou a ser o foco dos operários no trabalho, incluindo também o setor industrial. A entrada dos engenheiros no trabalho, com incentivo ao desenvolvimento do sistema tecnológico, ocasionou o avanço do progresso da Engenharia de Formação. Assim, passou a exigir dos operários a concentração do raciocínio e da inteligência no desenvolvimento de suas tarefas, o que demandava maior preocupação acerca do aspecto cognitivo do sujeito. Por último, a educação continuada, que foi prevista como lei em 1971 na França, a partir da necessidade nas relações de trabalho.

Desse modo, Champy-Remoudssenard (2005, p. 11) destaca que “A reflexão sobre um campo de práticas de formação de adultos, ao tempo de sua institucionalização pela Lei de 1971, dedicou a faculdade humana um lugar eminentemente estratégico no processo de formação.” O autor ainda complementa que, com a vigência desta lei, o operário passa a ter de fato uma formação continuada.

Segundo Pastré, Mayen e Vergnaud (2006), é notória a contribuição desse campo de práticas para a formação de adultos, não só por analisar as necessidades no ambiente de trabalho, mas também pela criação de dispositivos de formação que possibilitam a aprendizagem e o desenvolvimento de competências para o trabalho. Nesse primeiro cenário, a DP busca compreender os objetivos, demandas, obstáculos e aspirações dos profissionais. Essa abordagem visa desenvolver ferramentas, suporte e/ou formação que estejam alinhados às necessidades reais dos indivíduos envolvidos.

Posteriormente, a noção de Engenharia de Formação evolui para a Engenharia Didática Profissional, conforme destacado por Mayen, Olry e Pastré (2017). Essa evolução implica em uma abordagem que oferece formas originais de analisar o trabalho didático, indo além da simples aplicação de conceitos para

treinamento e introduzindo métodos mais aprofundados para entender a complexidade do trabalho docente.

Semelhante à Engenharia de Formação, a Engenharia Didática Profissional busca ir além da simples acumulação de práticas sem princípios claros. Em vez disso, ela se propõe a fundamentar racionalmente as práticas utilizadas, ou seja, buscar uma base teórica que justifique e oriente as ações dos profissionais em formação.

Nesse sentido, a Engenharia Didática Profissional se apoia em referenciais teóricos que proporcionam métodos e procedimentos para efetuar a análise do trabalho (PASTRÉ; MAYEN; VERGNAUD, 2006). Essa abordagem é detalhada no próximo tópico.

2.4.2 Psicologia Ergonômica

Para tratar da análise do trabalho, a DP buscou contribuições no campo da Psicologia do Trabalho ou Psicologia Ergonômica, que é composta por um agrupamento de conhecimentos psicológicos relativos à análise e à solução de problemas ergonômicos (PASTRÉ, 2011). Esta corrente teórica trouxe diversos contributos, como os métodos de análise do trabalho, e lhe forneceu uma análise da dimensão cognitiva da atividade profissional. Alguns dos teóricos que serviram de inspiração para os estudos em DP compreendem nomes como Leplat, Ochanine, Faverge, entre outros.

Pastré, Mayen e Vergnaud (2006) consideram como uma das contribuições mais relevantes da Psicologia do Trabalho para a DP a concepção de Leplat (1997), que explora a distinção entre tarefa e atividade. Esse tema foi inicialmente abordado e desenvolvido durante a era do taylorismo, partindo da seguinte premissa: há sempre mais no trabalho real do que na tarefa prescrita. Isso, no intuito de mostrar que mesmo em atividades de execução com prescrição detalhada, existem falhas no tocante à tarefa prescrita e a tarefa que de fato é executada. Dessa forma, ainda na visão de Leplat (2004, P.102), o autor complementa que:

Como a tarefa efetiva não coincide, necessariamente, com a tarefa prescrita, as condições do trabalho tomadas em conta não coincidem, verdadeiramente, com às mesmas definidas pelos organizadores do trabalho. Em outros termos, é sempre necessário observar que uma condição observada no trabalho é, de fato, uma condição de trabalho, isto é,

que a mesma desenvolve um papel na atividade do sujeito. (LEPLAT, 2004, p. 102).

De acordo com Leplat (2004), um contributo significativo é apresentado através do conceito da *estrutura cognitiva da tarefa* (KEYSER; NYSSSEN, 1993). Este conceito expõe a ideia de que a definição da situação de trabalho vai além das prescrições formais, abrangendo as dimensões objetivas da situação que orientam a atividade. A perspectiva proposta por Leplat destaca a importância de considerar não apenas o que está explicitamente prescrito, mas também as nuances cognitivas que moldam a execução da tarefa. A análise do trabalho desenvolvida pelo mesmo, é organizada em torno do par situação-atividade, onde a situação abarca a prescrição e a estrutura cognitiva servindo de base para a análise da atividade que continua sendo o objetivo principal (PASTRÉ, 2002).

O trabalho de Faverge (1955) introduziu à DP a noção da dimensão cognitiva do trabalho como sua principal contribuição. Essencialmente, essa perspectiva destaca que em toda atividade laboral, mesmo aquelas predominantemente manuais, existe uma exigência cognitiva. Isso implica que o desenvolvimento da atividade não se limita apenas à prescrição estabelecida, mas é moldado por diversas dimensões que, quando combinadas, definem sua natureza.

Expandindo o conceito proposto por Faverge, Savoyant (1979) destaca que a ação laboral pode ser compreendida por meio de três tipos de operações: execução, controle e orientação. O autor enfatiza que, embora as duas primeiras operações sejam facilmente observáveis, é a orientação que constitui o cerne da competência ou atividade realizada pelo operador. Savoyant identifica essa orientação como a parte cognitiva da atividade profissional, pois é essa operação que capacita o operador a mapear os elementos da situação que nortearão suas ações.

Outra contribuição veio da psicologia russa proposta pelo autor Ochanine (1981), que aborda a diferença entre imagem cognitiva e imagem operativa. A primeira descreve um objeto enumerando as suas principais propriedades e a segunda descreve este mesmo objeto retirando as propriedades que lhes serão úteis para a ação que irá realizar no mesmo objeto.

Ochanine (1981) observou a atividade de médicos (experientes e iniciantes) na representação (desenho) que eles faziam a respeito de uma tireoide doente. O autor notou que os profissionais descreveram resultados diferentes, concluindo,

assim, os dois modos de representações citados anteriormente (imagem cognitiva e imagem operativa).

Essa distinção tem se alargado muito na DP com o intuito de apresentar as duas formas de conceituação, uma que revela propriedade sobre os objetos, a outra, por sua vez, escolhe certas características de um objeto para transformá-las em conceitos que guiam e estruturam a atividade. Pastré (2011) aborda, de maneira ampla, a analogia ao ambiente profissional, ao afirmar que as representações da situação desencadeiam um registro pragmático. Esse registro, sem dúvida, tem suas bases no registro epistêmico, destacando que a representação dos profissionais experientes não é menos científica do que a dos iniciantes. No entanto, ele orienta suas ações de acordo com a tarefa a ser executada.

Para que de fato sejam criadas condições para o aprendizado profissional no ambiente de trabalho, faz-se relevante destacar o papel dos conceitos pragmáticos, ferramenta que possibilita compreender e melhorar a atividade de ensino, sendo considerados como organizadores da ação, no intuito de se obter uma ação eficaz.

Os conceitos pragmáticos são específicos de uma situação profissional e estão presentes na maioria das atividades, sendo fundamental para que ocorra a organização da ação desse sujeito. Aqui se encontra o par situação-atividade, assim como analisado por Vergnaud (2007). Segundo o autor, não se pode compreender a atividade dos operadores se não há o conhecimento mínimo das características da situação operada. De mesmo modo, Pastré (2007, p. 631) pontua que:

Assim, é possível dizer que os conceitos pragmáticos estão presentes de duas maneiras: na situação, não a título de conceitos, mas de dimensões pertinentes ao real, que se revela indispensável para ter uma ação eficaz; e na representação dos atores (quando estes operam uma conceituação adequada), como princípios de organização da ação eficaz. Um conceito pragmático se torna representativo de um campo profissional, mas também de um tipo de estratégia que um ator é capaz de mobilizar (PASTRÉ, 2007, p. 631)

Logo, podemos perceber na DP dois tipos de análise do trabalho: a cognitiva e a do trabalho situado. Aqui cabe também articular a análise da tarefa prescrita e da atividade, onde conseguimos compreender o par situação-atividade. Ainda na perspectiva do autor:

Não se pode compreender a atividade dos operadores se não há conhecimento mínimo da situação e de suas características; mas os

elementos desse contexto que serão utilizados para construção dos conceitos pragmáticos só podem ser identificados pela análise da atividade, que leva, retroativamente, a distinguir os elementos da situação que fazem sentido para o sujeito. Há assim uma análise da situação antes da análise da atividade: ela consiste em evidenciar os diferentes elementos que caracterizam o cenário. Há também uma análise da situação após a análise da atividade: é somente ela que permite identificar os organizadores da ação (PASTRÉ, 2007, p. 633).

Isso nos implica delimitar que o núcleo teórico central da pesquisa é o par situação-atividade, sendo fundamental passar pelo estudo da situação para compreender a atividade. Todavia, cabe enfatizar que a análise do trabalho segundo a DP requer que sejam considerados os conceitos pragmáticos que servem como diagnóstico das ações dos trabalhadores e a organização da atividade deles. Isto ocorre segundo a corrente teórica da conceituação na ação com seus esquemas e invariantes operatórios, além da distinção da tarefa prescrita e da atividade advinda da Psicologia do Trabalho.

A profissão em destaque nessa pesquisa é a do professor de matemática. O autor Pastré (2007) nos traz reflexões sobre o trabalho docente e nos auxilia a entender a análise da atividade desse profissional. De modo primário, o autor argumenta como o arcabouço teórico da Psicologia do Trabalho em DP é utilizado para a análise do trabalho docente. No entanto, percebem-se dois problemas na adaptação desses profissionais:

1) Por um lado, a atividade de um professor não pode ser dissociada da atividade de seus alunos: há co-atividade. Mas como você analisa uma co-atividade? É necessário escolher um ponto de vista para entrar na análise: escolheremos, portanto o ponto de vista do professor, mas sem esquecer que é necessário encaminhá-lo permanentemente à atividade dos alunos; 2) por outro lado, diferentemente de outras atividades de serviço, a ação do professor se refere a um objeto a ser transformado que não é diretamente observável, uma vez que refere às representações dos alunos sobre o saber adquirido (PASTRÉ, 2007, apud FONTENELE; ALVES, 2021, p. 31).

Assim sendo, para analisar a atividade do professor, no que se refere a como ele conduz uma classe, Pastré (2007) desconsidera a dimensão da atividade específica dos alunos supracitados anteriormente e considera a classe como uma instituição que representa um sistema, com vistas à apropriação do conhecimento.

Na atividade docente, existe uma variedade de níveis conceituais na mesma classe ou em classes distintas, onde é exigido do professor a apropriação de diferentes objetos e adaptações para as distintas dificuldades. Sumariamente, ao atribuir ênfase à importância da conceituação na atividade de trabalho, foi possível

estabelecer uma ponte com a principal fonte teórica da DP, a psicologia do desenvolvimento, em específico a corrente da conceituação na ação.

2.4.3 Psicologia do Desenvolvimento (Conceituação na ação)

Para alimentar o quadro teórico e metodológico da DP, dois grandes psicólogos devem ser destacados, que são Piaget e Vygotsky, pois de seus estudos foram retiradas diversas contribuições que fortaleceram este quadro. Ambos destacam ideias de atividades e conceituação, sendo as duas essenciais para a DP.

Dos trabalhos desenvolvidos por Piaget, quase todos são guiados por uma necessidade de uma teoria da ação e do conhecimento gerado a partir dessa ação. Em seus trabalhos com bebês e crianças, observa a organização progressiva de sua atividade gestual, onde ele “mostra como os bebês ligam de maneira cada vez mais eficaz as propriedades de seus gestos com as dos objetos” (PASTRÉ; MAYEN; VERGNAUD, 2006, p.15-16). É a partir disso que o autor faz do conceito de esquemas um elemento central de sua teoria de adaptação, enfatizando que os esquemas são de fato o meio pelo qual se consegue assimilar novos objetos e acomodar as novas propriedades que eles apresentam em relação aos objetos assimilados anteriormente.

Em relação à ideia de esquemas, Piaget se inspirou em Kant ou em G. Revault d’Allonnes. No entanto, o seu conceito de esquema estava relacionado à ideia de atividade. Vygotsky, que havia lido alguns trabalhos desenvolvidos por Piaget, contudo, não considerando o trabalho citado anteriormente com (bebês e crianças), volta sua atenção à linguagem e ao caráter que ele desenvolve no processo de conceituação, acentuando também a importância da mediação pelo adulto no processo de aprendizagem, o que o difere de Piaget, pois ele acentua o papel do sujeito aprendiz em suas aprendizagens (PASTRÉ; MAYEN; VERGNAUD, 2006).

Apesar de Piaget ser o autor mais importante do construtivismo, teoria educacional predominante nos meios acadêmicos atualmente, seus estudos não analisam o aporte do professor. Nesse aspecto, as contribuições de Vygotsky se mostram mais pontuais, pelo fato de nos permitir compreender o trabalho docente. Vygotsky traz a noção de zona de desenvolvimento proximal, que analisada pela ótica da ação docente, configura-se na zona das situações e das atividades, na qual

o professor delibera o que propor ao sujeito aprendiz (PASTRÉ; MAYEN; VERGNAUD, 2006).

Pastré, Mayen e Vergnaud (2006) exploram ainda duas concepções destacadas por Vygotsky, sendo elas, a mediação de tutela e mediação simbólica. A primeira concepção está intrinsecamente ligada à ação docente, pois reconhece que o professor (tutor ou formador) possui ferramentas apropriadas para intervir de maneira necessária e no momento adequado junto ao aprendiz. A mediação simbólica, por sua vez, possui uma função desempenhada pela linguagem e por outros sistemas, como o gráfico e o algébrico.

Vergnaud, por outro lado, examina as concepções de cognição associadas ao trabalho, considerando as perspectivas dos psicólogos do desenvolvimento. Em resumo, ele propõe a ideia de conceituação-na-ação e delinea duas formas de conhecimento: a forma operatória (inativa) e a forma predicativa (discursiva). A sequência de desenvolvimento indica que a forma operatória precede a forma predicativa, fornecendo *insights* sobre a organização da ação e a construção de competências (PASTRÉ, 2002).

Vergnaud argumenta que para entender as competências, é fundamental analisar a ação eficaz. Sob essa premissa, o autor explana que a ação eficaz é estruturada. Portanto, examinar a construção das competências implica analisar como a organização da ação é desenvolvida. Isso se dá porque "a ação eficaz revela simultaneamente invariância e regularidade, ao mesmo tempo que demonstra flexibilidade e habilidade de adaptação às circunstâncias (PASTRÉ, 2002).

Além disso, no sentido de ponderar as relações estabelecidas durante as situações de trabalho, surge a proposta de um acréscimo. Esse adendo busca correlacionar, no contexto específico da DP, os domínios da Psicologia do Trabalho e da Didática das Disciplinas. Isso se justifica pela consideração, por parte desta última, de elementos como a conexão entre interações e aprendizagem, notadamente no desenvolvimento de competências.

2.4.4 Didática das Disciplinas

A Terceira corrente teórica é a Didática das Disciplinas que, segundo Pastré (2011), traz ideias advindas da Didática da Matemática, tais como a noção de situação, transposição, contrato, *milieu*, obstáculo e devolução. A Didática das

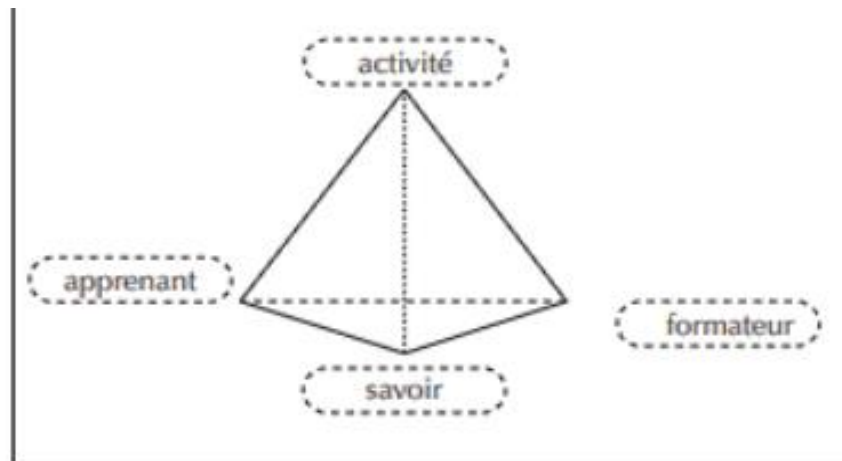
Disciplinas difere-se da Didática Profissional, uma vez que a primeira foca na transmissão e aquisição do conhecimento, enquanto a segunda tem como foco a aprendizagem da atividade (PASTRÉ; MAYEN; VERGNAUD, 2006).

Desse modo, enquanto a Didática das Disciplinas se estrutura a partir de situações didáticas, a DP centraliza nas situações profissionais. Essa diferença pode ser observada no trecho a seguir:

Os didatas da Matemática – pensamos de modo especial em Brousseau – construíram um quadro teórico extremamente sugestivo em torno do conceito de situação. Deve, no entanto, acrescentar que, no caso de situações profissionais, a relação entre situação e problema assume um viés particular. No caso da Didática das Disciplinas, pode-se dizer que existe homologia entre a situação e o problema que a mesma considera. Mas é o problema que vem primeiro e a função da situação é de exemplificar o problema colocado e lhe atribuir um significado. Por outro lado, na Didática Profissional, a situação está sempre em um percurso além do problema que ela permite abordar. Vimos que a estrutura conceitual de uma situação é uma esquematização, portanto, uma redução da situação como um todo (PASTRÉ, 1999, p. 28).

Embora Brousseau (2002, 2008) reconheça o papel do professor como mediador nas situações didáticas, sua análise não se concentra diretamente na atividade docente. Nesse sentido, Baudouin (1999) destaca a limitação do triângulo didático tradicional "professor-aluno-saber", argumentando que tal estrutura não abrange adequadamente as situações destinadas à formação de adultos. Assim, Baudouin (1999) propõe uma reconfiguração do cenário de análise e formação no trabalho, substituindo o triângulo tradicional por um tetraedro que inclui "professor-aluno-atividade-situação", conforme ilustrado na Figura 3. Essa redistribuição busca contemplar de maneira mais abrangente os elementos essenciais envolvidos no processo educativo, especialmente no contexto adulto:

Figura 3 - Tetraedro agrupando os elementos envolvidos na formação profissional



Fonte: Baudouin (1999, p. 154).

A Figura 3 traz os componentes formadores do triângulo didático (professor/formador, aluno/aprendiz, saber) incorporados à dimensão da atividade, ampliando, portanto, o campo relacionado ao saber científico (epistêmico) para um campo de características oriundas do campo profissional (pragmáticos). Para agregar uma perspectiva complementar, apresento uma breve comparação entre as teorias originadas da Didática das Disciplinas, quando aplicadas no âmbito da Didática Profissional. Este enfoque concentra-se, especialmente, no papel do professor, destacando a análise de suas atividades, com ênfase na colaboração e cooperação profissional.

O objetivo é proporcionar suporte para a compreensão e discernimento neste campo de pesquisa. Cada uma dessas concepções será discutida de maneira sucinta, delineando as nuances que permeiam a transição dessas teorias para o contexto da Didática Profissional (Quadro 3):

Quadro 3 - Teorias da Didática das Disciplinas e sua Adaptação no contexto da Didática Profissional

Conceitos	Didática das Disciplinas	Didática Profissional
Situação Didática/Situação Profissional	Conjunto de condições criadas pelo professor para apresentar novos objetos ou propriedades ao aluno (Brousseau, 2008).	Situações desafiadoras no ambiente profissional, que exigem enfrentamento, resolução ou controle por parte do professor (Mayen; Métral; Tourmen, 2010).
Milieu	Caracterizado como qualquer coisa que atua sobre o aluno e/ou sobre o que o aluno atua, o termo	Extensão do conceito para o campo profissional, caracterizado como um sistema antagônico e mediador da ação

	"milieu" refere-se a um ambiente influente no contexto educacional (Brousseau, 2008).	do trabalhador, especialmente do professor (Alves, 2018b).
Obstáculos Epistemológicos/Profissionais	Constituem desafios inerentes ao conhecimento (Brousseau, 2008).	Obstáculos profissionais surgem para evitar ou comprometer a execução de tarefas específicas, sendo inesperados e recorrentes (Alves, 2018b).
Transposição Didática/Profissional	Processo de transformação do saber sábio em saber a ensinar e, posteriormente, em saber realmente ensinado (Chevallard, 1983).	Transformação de situações de referência científica ou profissional para situações de ensino e aprendizagem. Na profissão, refere-se à transmissão de conhecimentos pragmáticos entre professores, incluindo formadores de professores (Alves, 2020).
Contrato Didático/Profissional	Expectativas recíprocas entre professor e alunos no processo de ensino e aprendizagem (Brousseau, 2008).	Conjunto de regras compartilhadas entre professores de Matemática, caracterizado por obrigações e relações observadas e engajadas pelos profissionais em suas instituições de ensino (Alves, 2018b).
Devolução/Devolução Profissional	Atitude do professor em fazer com que o aluno aceite e atue em uma situação didática, assumindo as consequências (Brousseau, 2008).	Processo de aceitação de tarefas e atividades especializadas no ambiente profissional, envolvendo um grupo de professores inseridos em um mesmo gênero de atividade profissional (Alves, 2018b).

Fonte: Elaborado pela autora com base nas obras destacadas (2023).

Pastré (2011) proporciona uma análise sobre a Didática das Disciplinas e a Didática Profissional. Enquanto a primeira concentra-se principalmente no domínio epistêmico disciplinar, a segunda está voltada para a utilização de situações de trabalho como instrumento de apoio para a aprendizagem do profissional, com enfoque particular no contexto do professor (ALVES; CATARINO, 2017).

No tópico a seguir, apresentamos como ocorre a análise do trabalho no contexto da DP.

2.5 Análise do Trabalho

De acordo com Pastré, Mayen e Vergnaud (2006), as primeiras incursões na Didática Profissional foram realizadas no setor industrial, expandindo-se posteriormente para os setores de serviços e ensino. A análise do trabalho no contexto industrial era caracterizada pela abordagem de situações-problema. É precisamente esse enfoque que suscita o interesse na Didática Profissional, uma vez que são nas situações-problema que o profissional demonstra sua competência crítica, conforme destacam os autores Pastré, Mayen e Vergnaud (2006, p. 35):

O fato de conhecer bem os procedimentos relativos a uma profissão é a expressão de suas competências. Mas a competência mais importante, aquela que faz a diferença, consiste em saber dominar as situações que saem da rotina. Para um regulador de prensas de injeção de plásticos, conforme veremos, trocar um molde faz parte de sua competência. Mas é uma tarefa procedimentalizada. Em contrapartida, corrigir defeitos nos produtos é uma tarefa que não pode se reduzir a um conjunto de procedimentos. É preciso fazer um diagnóstico de situação, sobre o funcionamento da máquina, sobre o estado da matéria. Ora, existe uma ligação muito forte entre a resolução de problemas e a aprendizagem: quando não se tem o procedimento para alcançar uma solução, é preciso construí-lo. Então, quando se está resolvendo um problema, um operador percebe que é capaz de criar para si mesmo recursos novos, por exemplo, ao reorganizar de outra maneira os recursos dos quais já dispõe. (PASTRÉ; MAYEN; VERGNAUD, 2006, p. 35).

Assim, a DP centraliza-se nas situações e nos problemas profissionais, evidenciando a utilização dos métodos de análise do trabalho, anteriormente e no decorrer da formação (GRUBER; ALLAIN; WOLLINGER, 2017). A análise do trabalho na DP fundamenta-se em três abordagens essenciais: os conceitos pragmáticos, a estrutura conceitual de uma situação e o modelo operacional. Segundo Pastré (2002), os conceitos pragmáticos emergem da análise das situações realizada pelos próprios operadores, estando sujeitos ao nível de conceituação demandado por esses profissionais.

Quanto aos conceitos pragmáticos, Pastré, Mayen e Vergnaud (2006) ressaltam características fundamentais. A origem desses conceitos é eminentemente prática, não se encontrando formalmente delineada em materiais didáticos ou teóricos. No que tange à sua função, os conceitos pragmáticos desempenham o papel de organizadores da ação do sujeito. Por fim, é crucial destacar a dimensão social associada a esses conceitos. Embora sua definição nem sempre seja explícita, os autores enfatizam que os conceitos pragmáticos estão intrinsecamente ligados à organização de uma comunidade profissional.

No contexto da DP, e levando em consideração o campo de atuação do professor, os conceitos pragmáticos referem-se a elementos práticos e operacionais essenciais para a efetiva atuação no ambiente educacional. Exemplos desses conceitos pragmáticos incluem estratégias de ensino, construção de modelos e técnicas de avaliação, adaptação do currículo de acordo com as necessidades específicas da turma, gestão de sala de aula e comunicação clara e eficaz.

A segunda dimensão na análise do trabalho em DP é a estrutura conceitual de uma situação, composta por um conjunto de conceitos pragmáticos. Pastré, Mayen e Vergnaud (2006) afirmam que, mesmo em situações aparentemente simples, é possível identificar os elementos que constituem sua estrutura conceitual.

O processo pelo qual o profissional assimila e expressa a construção de um conceito na estrutura conceitual é denominado modelo operativo. Este modelo operativo (PASTRÉ, 2012), que representa a operacionalização dos conceitos na prática profissional, é também um objeto de investigação na DP, contribuindo para a análise do trabalho do profissional.

Pastré (2012) salienta que o nível de habilidade de um profissional pode ser evidenciado através de seu modelo operacional. O autor condensa a função do modelo operacional de um sujeito em três elementos fundamentais, que estão interligados às fases essenciais da análise do trabalho:

Em resumo, o modelo operacional de um ator contém três tipos de organizadores de atividades: um se refere à situação de trabalho; outro se refere ao grupo profissional ao qual o autor pertence; e o último constitui sua assinatura e depende de sua experiência anterior (PASTRÉ, 2012, p. 90).

No excerto anterior, Pastré (2012) destaca a integração das abordagens que a DP utiliza para a análise do trabalho. A DP propõe essa análise por meio de duas etapas complementares: a primeira consiste na identificação da estrutura conceitual da situação e dos conceitos pragmáticos (que atuam como organizadores da ação), enquanto a segunda etapa se concentra na análise do modelo operacional do sujeito profissional.

A análise realizada pela DP no cenário do trabalho acontece por meio de Situações Profissionais (ALVES; CATARINO, 2019), sendo elas fundamentais para compreender as relações existentes entre trabalho, aprendizagem e treinamento. O objetivo da formação profissional é proporcionar a aprendizagem a partir destas

situações profissionais no ambiente de trabalho (PASTRÉ, 1999). Em concordância, Mayen (2012, p. 66) aponta que na DP “a formação não parte de conhecimentos científicos ou técnicos, nem de procedimentos ou métodos estabelecidos, mas de situações profissionais”.

Mayen (2012) destaca ainda que, a investigação das situações de trabalho foi centrada no campo operacional, com foco nos operários. Neste contexto, nossa intenção é alargar a perspectiva para compreender o papel do professor de matemática, analisando o aprendizado e o desenvolvimento nas ações realizadas em seu ambiente de trabalho. Levando em consideração o foco da nossa pesquisa, tais situações são referidas como Situações Didáticas Profissionais (SDP).

A SDP está relacionada à interação entre o profissional em formação (aluno), o professor formador e o conhecimento pragmático demonstrado diante destas situações. O trabalho de Alves e Catarino (2019) apresenta as definições a respeito de situação didática, situação profissional e situação didática profissional, enfatizando a noção desta última a partir da confluência das duas primeiras supracitadas. No Quadro 4 apresentamos as comparações descritas pelo autor.

Quadro 4 - Comparativo entre as situações

Situação Didática (SD)	Situação Profissional (SP)	Situação Didática Profissional (SDP)
É uma situação que descreve o ambiente didático do aluno, compreende tudo que se dedica a ensinar alguma coisa. Neste sentido, ele entende o professor se ele se manifesta durante o desenvolvimento da situação ou não.	Conjunto de situações profissionais características, fundamentais e determinantes para a aquisição de um conhecimento situado no plano de atuação institucional (escolar), diante de tarefas oficiais, exigências de documentos normativos e determinantes do seu ofício, e que deriva de um perfil de docente requerido pela sociedade.	Conjunto de situações ou situação característica, fundamental para o exercício efetivo do ofício do professor. Envolve elementos afeitos à modelização e teorização visando antever determinados obstáculos para a atividade da sala de aula, para a atividade profissional no posto de trabalho e na própria instituição.

Fonte: Alves e Catarino (2019, p. 124).

A noção de Situação Didática Profissional fundamenta a condução desta pesquisa, em que serão aplicadas SDPs aos professores em formação, objetivando uma análise das atividades desenvolvidas por eles. Destacamos, nesse ínterim, os

conceitos organizadores da ação desses profissionais, buscando verificar o desenvolvimento de competências profissionais. No próximo tópico, aprofundaremos nossa investigação sobre esse conceito.

2.5 Situação Didática Profissional

A partir das ideias propostas pela TSD para o ensino de matemática, e pela DP para a formação profissional, Alves sugere o conceito de Situação Didática Profissional (SDP), termo já definido anteriormente, que se trata de um campo de estudo voltado para a formação do professor de matemática.

Alves e Catarino (2019, p. 115) apresentam uma definição à SDP, como sendo um momento organizado com vistas a proporcionar “situações de aprendizagem para professores de Matemática em formação” (inicial ou continuada), “quer sejam no plano de sala de aula, quer seja em seu posto de trabalho e, ainda, no sistema de ensino escolar”.

No contexto da SDP, a competência do professor de matemática deve considerar três níveis que organizam como estas são analisadas, sendo eles: (i) o plano da sala de aula; (ii) o plano do posto de trabalho; (iii) o plano geral da instituição de ensino escolar, como apontado no Quadro 5:

Quadro 5 - Binômios de referência para análise da competência do professor de matemática

Plano de atuação docente	Binômio	Descrição e campo de aplicação
Plano da sala de aula	Professor-estudantes	Conjunto de situações profissionais características, fundamentais e determinantes para a aquisição de um conhecimento profissional pragmático e circunstanciado, e que proporciona, ainda, a compreensão e modelização e esquemas de ação e de antecipação do professor mobilizados em sala de aula.
Plano do posto de trabalho	Professor-professores, colegas do <i>métier</i>	Conjunto de situações profissionais, características, fundamentais e determinantes para a aquisição de um conhecimento, situado e circunstanciado no posto de trabalho, cujo núcleo estruturante envolve um conhecimento pragmático, de ordem deontológica, essencialmente compartilhado pelos seus pares, e regras (explícitas ou não explícitas) definidas pelo grupo, condicionadas por documentos físicos,

		oficiais e normativos.
Plano da instituição escolar	Professor-instituição escolar e sistema de ensino	Conjunto de situações profissionais características, fundamentais e determinantes para a aquisição de um conhecimento técnico situado no plano de atuação institucional (e escolar), diante de tarefas oficiais, exigências de documentos normativos, regras e determinantes do seu ofício e que deriva de um perfil de docente requerido pela sociedade.

Fonte: Alves e Catarino (2019, p. 118-119).

Diante da explanação apresentada pelos autores acerca dos campos de análise, conclui-se que o professor não está limitado ao espaço da sala de aula e às intervenções realizadas nela. Alves (2021) destaca que a competência profissional é influenciada por interações pragmáticas em várias dimensões: na relação com os alunos, nas interações entre colegas de trabalho e na conformidade com as normas e regras estabelecidas pelo estabelecimento docente.

Alves e Catarino (2019) propõe a “equação” a saber: $SDP = UT + DP$ para descrever a interação entre o profissional em formação, o professor formador e os conhecimentos pragmáticos demonstrados nas Situações Didáticas Profissionais. Este modelo destaca a complementaridade das esferas que influenciam a construção da formação profissional do professor. É fundamental destacar, novamente, a importância da relação com o ambiente da sala de aula, o grupo técnico profissional (métier) e a esfera institucional, mencionados anteriormente pelo autor.

A concepção de uma SDP tem relação direta com a noção/identificação de um obstáculo profissional, que é encontrado na vivência de situações profissionais. Os obstáculos profissionais são analisados por Pastré (2011), que os atribui à evolução da carreira, mais especificamente, à situação de trabalho. Pastré (2011) argumenta que:

Consideramos, agora, os problemas complexos. Entra em cena um ator, dotado de um modelo operativo bastante pertinente, se ocupa em obter uma resposta para a situação que se representa desorganizada, quando constata uma contradição entre a resposta que espera e a que observa. Tal ocorre, geralmente, quando o ator se encontra confrontado com uma nova classe de situações, por exemplo, um problema totalmente novo, para o

qual, seu modelo operativo, pertinente para as situações encontradas no passado, se mostram inadequadas para o caso presente. Tal ocasião se apresenta com muito interesse para a aprendizagem (PASTRÉ, 2011, p.90).

Nessa passagem, o autor destaca como a vivência em situações profissionais desafiadoras é fundamental para o aprendizado do profissional em fase de desenvolvimento. Quanto à origem dos obstáculos profissionais, Alves (2018b) destaca que eles são intencionados e circunstanciados pelo conhecimento pragmático profissional, sendo estes manifestados em situações profissionais, delimitados pelo sujeito (profissional) e pelo contexto (social, profissional, técnico), através de seu campo de aplicação e de tarefas.

Assim como abordamos a noção de obstáculo, é crucial também discutir o conceito de transposição, diretamente relacionado à construção da aprendizagem. Ao considerarmos a aprendizagem que surge da Situação Didática Profissional, compreender o processo de transposição profissional se torna indispensável.

Considerando a noção de transposição profissional, que se refere à transferência de conhecimentos pragmáticos entre professores experientes e novatos, Alves (2021) destaca sua influência em dois binômios fundamentais: (i) professor-professores e (ii) professor-instituição escolar. No primeiro, observamos um conjunto de transformações relacionadas a um conhecimento pragmático profissional específico, moldado por situações profissionais que envolvem a interação entre professores iniciantes e experientes na área de matemática. Já no segundo, trata-se de um conjunto de transformações vinculadas a um saber profissional pragmático específico, condicionado por situações profissionais que abrangem a relação entre os professores e a instituição de ensino.

Após a análise das ideias de obstáculo profissional e transposição profissional, é pertinente ressaltar que ambas estão intimamente ligadas ao conceito de Situação Didática Profissional (SDP). Esses elementos convergem para um objetivo compartilhado: compreender e fortalecer a construção da aprendizagem do professor de Matemática no contexto do desenvolvimento da atividade profissional, o que, por sua vez, contribui para a formação da competência profissional.

A noção do termo competência profissional está atrelada ao contexto histórico. Atualmente, a competência está vinculada a uma abordagem construtivista, não se reduzindo apenas à execução de tarefas. Assim:

Em resumo, vamos tomando forma uma evolução do conceito de competência em relação às transformações do trabalho: há menos ênfase na aplicação dos procedimentos e mais sobre a inteligência envolvida na tarefa e a resolução de problemas multidimensionais. [...] porque para melhorar o profissionalismo desses atores, é necessário que sejam capazes de analisar como sua ação está organizada, que conhecimentos, que estratégias eles mobilizam, que obstáculos eles encontram. Em suma, você deve ser capaz de fazer uma análise cognitiva de habilidades mobilizadas e seu desenvolvimento. (PASTRÉ, 2004, p. 214).

Logo, toda atividade de trabalho requer, além de uma atividade intelectual, uma dimensão cognitiva. A competência se revela em como o sujeito administra seu desenvolvimento cognitivo e evolutivo diante de sua atividade. Isso implica dizer que quando o profissional consegue analisar e organizar sua atividade, ou seja, quando ele consegue fazer uma análise cognitiva das atividades que mobiliza e de seu progresso, conseqüentemente, melhora o seu profissionalismo. Assim, entendemos que a competência está na capacidade de gerenciar o cognitivo na atividade do trabalho.

Pastré, Mayen e Vergnaud (2006) pontuam que o termo competência em seu uso corrente exerce uma ideia de valor, e até mesmo de valor comparativo entre “ser competente” e “não ser competente”. No entanto, os autores destacam que se a intenção é operacionalizar o conceito, é necessário compreender seu sentido em certas situações, pois sem isso, a ideia se tornaria vaga. Os autores apresentam quatro definições para o termo, dando ênfase, à complementaridade dos mesmos e acentuando que um dos conceitos de modo isolado não é suficiente por si só:

1. A é mais competente que B se ele souber fazer algo que B não sabe fazer. Ou ainda: A é mais competente no tempo t' do que no tempo t se ele souber fazer o que não sabia fazer;
2. A é mais competente se ele agir de uma maneira melhor: mais rápida, por exemplo, mais confiável, ou ainda mais compatível com o modo de fazer dos outros;
3. A é mais competente se dispuser de um repertório de recursos alternativos que lhe permitem adaptar sua conduta aos diferentes casos que podem se apresentar;
4. A é mais competente se for menos despreparado diante de uma nova situação, nunca encontrada antes. (PASTRÉ; MAYEN; VERGNAUD, 2006, p. 19).

Nota-se, então, que a primeira definição – a mais utilizada costumeiramente – , é a redução da competência ao desempenho, julgando o profissional apenas pelo resultado de uma tarefa exercida. Por outro lado, as demais definições implicam em considerar a atividade em si e o modo como a mesma ocorreu, e não apenas o seu resultado. Dentre estas definições, considera-se que a 3 e a 4 fundamentam esta

pesquisa, pois se relacionam diretamente com a atividade do professor, uma vez que em seu campo de trabalho surgem diversas situações inesperadas e desafiadoras.

É imprescindível revisitar o conceito de esquema, pois se compreende que é na solução de desafios e situações problemáticas que ocorre a edificação do conhecimento. Segundo Vergnaud (1996), o conceito de esquemas advindo de Piaget nos proporciona analisar a organização da atividade e o processo de desenvolvimento de competências. O autor concorda com a noção de desenvolvimento de Vygotsky e enfatiza a importância da contingência das situações, em refutação ao desenvolvimento cumulativo e linear de Piaget.

Esquema, portanto, representa a estrutura organizacional invariável da atividade em uma classe específica de situações, conforme delineado por Pastré, Mayen e Vergnaud (2006). Desse modo, Vergnaud (1996) considera que o papel da experiência no desenvolvimento cognitivo pode ser compreendido no encontro de situações inéditas e não esperadas do dia a dia do trabalhador. De acordo com isto, o autor define o conceito de esquema como “uma organização invariante da atividade para uma classe de situação dada” (1996, p. 283). Assim, para a análise do trabalho, é comum buscar identificar esses invariantes (conceitos organizadores da ação) de modo eficaz.

Vergnaud (2007) destaca que esses invariantes estão inclusos nos esquemas de assimilação do sujeito, sendo estes responsáveis por sua ação operacional. Eles se dividem em conceitos-em-ação e teoremas-em-ação, os quais para o autor apresentam uma relação de dependência:

Metaforicamente, podemos dizer que os conceitos-em-ação são os tijolos com os quais os teoremas-em-ação são feitos, e que a única razão para a existência de conceitos-em-ação é precisamente permitir a formação de teoremas-em-ação (proposições tidas como verdadeiras), a partir do qual a organização da atividade e as inferências são possíveis. (VERGNAUD, 2007, p. 8)

Deste modo, na análise do trabalho é habitual a busca pela identificação desses invariantes operatórios e/ou dos conceitos organizadores da ação. Alves e Jucá (2019), por sua vez, enfatizam que o local de trabalho onde acontece a análise da atividade não se reduz apenas ao que ocorre no interior da sala de aula, mas também na escola ou até mesmo na instituição escolar como um todo. Outro ponto

importante a ser destacado é que o fato de a análise ocorrer no posto de trabalho, não necessariamente implica dizer que o termo competência recaia sobre a atividade laboral, podendo também incidir sobre a pessoa de modo individual, ou seja, dois professores que ocupam a mesma função não necessariamente são detentores da mesma competência.

Assim, os autores ainda complementam que para que o professor possa ser considerado um possuidor de competências, ele deve realizar ações e intervenções diante de problemas não previstos. Vergnaud (2007) ressalta a verdadeira natureza da noção de competência profissional, evidenciando-a como um conceito essencialmente pragmático. Sua caracterização está intrinsecamente ligada à ideia da capacidade plástica e adaptativa do indivíduo, seja ele um trabalhador ou um professor, diante de um conjunto específico de situações profissionais. Essas situações são distintas e fundamentais para o exercício efetivo de uma determinada profissão.

Isso reforça ainda mais a ideia de que a competência profissional do professor não é algo tão simples e fácil de ser verificada, uma vez que, as situações nas quais são colocados ocorrem de modo não previsível.

Um dos objetivos da SDP é a construção de conceitos pragmáticos, ao auxiliar na compreensão dos fenômenos derivados das situações de aprendizagem profissional por parte do professor de matemática, visando à competência. Os conceitos pragmáticos são aqueles que diante de uma situação fazem referência para a ação do profissional. “Um conceito pragmático se torna representativo de um campo profissional, mas também de um tipo de estratégias que um ator é capaz de mobilizar” (PASTRÉ, 2002, p. 13) apud FONTENELE; ALVES, 2021, p. 31).

A noção de conceito pragmático é considerada central para a caracterização da SDP. Assim, pode-se afirmar que um conceito pragmático se refere a um conjunto de conhecimentos, que leva em conta de modo específico o docente e os conhecimentos que são significativos para sua atividade no trabalho. Fontenele e Alves (2021, p. 31) indicam que os conceitos pragmáticos para o ensino se configuram em uma ferramenta capaz de facilitar um “aprendizado profissional bem-sucedido”.

A manifestação de novos conceitos pragmáticos e/ou a adaptação dos conceitos já existentes são oriundos de obstáculos profissionais encontrados no ambiente de trabalho que, para que sejam superados, carecem da utilização de

conceitos organizadores da ação.

Considerando o exposto, é relevante destacar que neste estudo foram aplicadas SDPs aos professores em formação. O objetivo foi realizar uma análise das atividades por eles desenvolvidas, com foco particular nos conceitos organizadores de suas ações. Essa abordagem buscou proporcionar espaço para reflexão sobre as práticas adotadas, promovendo assim uma adaptação a uma maior variabilidade de situações em sala de aula. Dessa forma, buscou-se proporcionar ao profissional não apenas a execução de ações, mas também a compreensão e análise aprofundada de suas práticas, conferindo-lhes significado mais amplo.

No próximo tópico, nosso objetivo é apresentar pesquisas que empregaram as Situações Didáticas Profissionais na formação de professores, com o intuito de destacar tanto sua aplicação quanto as contribuições proporcionadas em cada contexto específico.

2.5.1 Utilização da Situação Didática Profissional em Pesquisas Acadêmicas: Uma Revisão

Com o propósito de identificar estudos acadêmicos correlatos, com foco na formação de professores e na aplicação da Situação Didática Profissional no contexto da formação de professores de matemática, realizou-se uma busca no repositório acadêmico do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), com ênfase em pesquisas publicadas no âmbito do Programa de Mestrado acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática, no intervalo de 2017 a 2023. Este levantamento se baseou em termos-chave específicos, a saber: "Formação de professores", "Situação Didática Profissional", "Didática da Matemática", "Didática Profissional" e "Teoria das Situações Didáticas".

Os resultados obtidos permitiram uma análise comparativa das contribuições mais relevantes de cada pesquisa identificada. Cada estudo foi avaliado quanto às descobertas e implicações para a formação de professores, especialmente no que diz respeito à aplicação prática da Situação Didática Profissional.

Assim, identificamos os trabalhos apresentados no Quadro 6:

Quadro 6 - Compilação de estudos acadêmicos associados à pesquisa

Título do trabalho	Autor (a)	Ano de publicação
---------------------------	------------------	--------------------------

Didática Profissional (DP) na formação inicial dos professores de matemática: O caso da construção dos conjuntos numéricos	CIDRÃO, G. G.	2020
Situações Didáticas Profissionais (SDP): Uma perspectiva de complementaridade entre a Teoria das Situações e a Didática Profissional no contexto das Olimpíadas de Matemática	AZEVEDO, I. F. de.	2020
Formação continuada em serviço do professor de matemática: uma análise de Situações Didáticas Profissionais direcionadas à Geometria Plana e Espacial do Ensino Médio	CAMILO, A. M. da. S.	2021
Didática Profissional (DP) e Teoria das Situações Didáticas (TSD): Um olhar sobre a formação docente e o Ensino de Álgebra no 9º Ano	MORORÓ, F. N. M.	2023

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

A pesquisa de Cidrão (2020) concentra-se na análise do campo de trabalho durante a formação inicial do professor de Matemática, sob a perspectiva da Didática Profissional. A autora justifica o desenvolvimento do seu trabalho por encontrar em diversas obras uma preocupação sobre o professor de matemática, visando os conhecimentos epistêmicos desses profissionais, que refletirá na prática em sala de aula. A autora defende que a ideia de competência profissional está relacionada a uma análise de trabalho orientada.

A investigação percorreu as quatro fases da Engenharia Didática de Formação, abrangendo a análise do trabalho relativa à construção axiomática dos números, a coleta de dados para identificar obstáculos cognitivos dos participantes.

Os procedimentos foram realizados ao longo de cinco encontros, ocorrendo no curso de Licenciatura em Matemática do IFCE, *campus* Fortaleza. Quatro alunos do oitavo semestre letivo, no período 2019.1, matriculados na disciplina optativa Fundamentos de Análise e Cálculo participaram da aplicação da pesquisa. A coleta de dados foi conduzida por meio de entrevista semiestruturada e analisada à luz dos pressupostos da Didática Profissional. Os resultados destacaram a relevância da formação inicial do professor de Matemática e da construção axiomática dos números na superação de obstáculos didáticos relacionados à aprendizagem do objeto matemático e à competência profissional.

No estudo conduzido por Azevedo (2020), uma abordagem inovadora é apresentada, focalizando a utilização de problemas relacionados a sequências

numéricas, direcionados especificamente às Olimpíadas de Matemática, com ênfase na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas (OBMEP). O escopo principal desta pesquisa reside na formação de alunos matriculados no curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), *campus* Fortaleza.

Durante a fase experimental, que corresponde à quarta etapa da EDF, foi conduzido um curso de formação em quatro encontros. Neles, os participantes enfrentaram problemas olímpicos selecionados pela pesquisadora. O objetivo era identificar o desenvolvimento profissional desses sujeitos diante de desafios e situações complexas. A resolução dos problemas contou com o suporte do *software* GeoGebra, realçando a importância de recursos tecnológicos para uma aprendizagem significativa e envolvente em sala de aula.

A conclusão da pesquisa destaca a contribuição significativa da adoção de problemas olímpicos e busca incentivar os futuros professores de Matemática a incorporarem o seu uso em sua prática docente. Isso estimula o desenvolvimento do raciocínio e a busca por novos conhecimentos diante de desafios. Além disso, a autora destaca que a investigação permitiu identificar os conhecimentos epistêmicos e pragmáticos dos participantes, promovendo a reflexão sobre sua prática docente diante de situações inovadoras e complexas em sala de aula.

O trabalho de Camilo (2021) se justifica ao proporcionar um olhar especial para o ensino de Geometria Plana/Espacial no Ensino Médio, considerando obstáculos de ordem histórica, cognitiva e didática. Teve como objetivo geral analisar as Situações Didáticas Profissionais elaboradas a partir de situações-problema. Os sujeitos envolvidos nesta pesquisa eram professores de matemática pertencentes ao quadro docente de duas escolas estaduais, localizadas na cidade de Caucaia-CE.

De início, a pesquisadora observou aulas ministradas por cada um dos professores participantes da pesquisa, no intuito de identificar obstáculos referentes à ação dos professores no ensino de Geometria. Nestas aulas foram identificados os obstáculos enfrentados por estes sujeitos. Com base nisso, a pesquisadora delineou o contexto de formação a ser oferecido aos professores.

A autora concluiu que a formação contribuiu para a formação continuada dos professores, pois trouxe uma proposta metodológica que despertou nos docentes a reflexão e o interesse no uso de situações didáticas e o uso do GeoGebra como recurso auxiliar ao ensino de Geometria. Além disso, as SDPs proporcionaram uma

reflexão a respeito das práticas adotadas e dos obstáculos enfrentados pelos professores.

Mororó (2023) buscou investigar as contribuições das Situações Didáticas Profissionais à formação do professor de matemática, no contexto do ensino da Álgebra, nos anos finais do Ensino Fundamental. Participaram da pesquisa quatro professores de matemática atuantes no 9º ano, pertencentes ao corpo docente de duas escolas municipais vinculadas à Secretaria Municipal de Educação de Pires Ferreira, no interior da zona norte do estado do Ceará.

A escolha da temática se justificou pela identificação de obstáculos no ensino de álgebra, em virtude de dados apresentados pelas avaliações externas realizadas neste nível de ensino, que mostram uma defasagem de aprendizagem sobre o tema. Foi realizada uma entrevista semiestruturada com os sujeitos, no intuito de validar os obstáculos encontrados em uma revisão sistemática de literatura desenvolvida na análise preliminar, primeira etapa da metodologia desenvolvida no trabalho.

Após a identificação dos obstáculos, foram elaboradas seis situações didáticas profissionais a serem desenvolvidas com esses professores. Diante da interação ocorrida entre os sujeitos no momento de experimentação, percebeu-se que houve uma reflexão sobre os obstáculos centrais no ensino de funções, que motivaram a construção das SDPs, bem como a identificação de conceitos organizadores da ação.

Todas as pesquisas abordam estratégias específicas para melhorar a prática docente e superar obstáculos no ensino de diferentes tópicos matemático, seja na construção axiomática dos números, no ensino de geometria plana/espacial, ou no contexto do ensino da álgebra. Essa identificação serviu como base para o desenvolvimento de estratégias de formação.

Percebe-se que as investigações abrangeram tanto professores em formação inicial (Cidrão, 2020; Azevedo, 2020) quanto aqueles em situações de formação continuada (Camilo, 2021; Mororó, 2023). Três dessas pesquisas (Azevedo, 2020; Camilo, 2021; Mororó, 2023) enfatizam o uso da tecnologia, especialmente o *software* GeoGebra, para auxiliar no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Essa ênfase sugere uma preocupação crescente com a integração de recursos tecnológicos como ferramentas complementares à prática educacional.

3 ANÁLISES PRELIMINARES

Com base no quadro teórico do capítulo 2, visamos aqui desenvolver a Engenharia Didática de Formação, nossa metodologia de pesquisa, a partir da estruturação de suas fases, sendo elas: análises preliminares, concepção e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e validação.

Conforme mencionado por Artigue (1996), as análises preliminares desempenham um papel fundamental, estabelecendo os alicerces para a fase subsequente, que é a concepção do processo. Nesse estágio inicial, é conduzida essencialmente uma análise epistemológica, enfocando as características do conhecimento envolvido. Além disso, uma análise didática é realizada, levando em consideração os aspectos específicos do funcionamento do sistema educacional. Por fim, ocorre uma análise cognitiva, focalizando as particularidades do público-alvo ao qual o ensino se destina.

Essa análise inicial constitui um componente crítico na construção de um processo de ensino eficaz. A análise epistemológica ajuda a compreender a natureza e a estrutura do conhecimento que será transmitido. A análise didática considera como o ensino se adapta ao contexto educacional, incorporando os elementos essenciais da metodologia e do currículo. A análise cognitiva garante que a abordagem seja adequada às características cognitivas dos alunos, possibilitando a criação de estratégias de ensino mais eficazes.

No âmbito da análise epistemológica, concentramo-nos nas características do conhecimento subjacente. Nesse contexto, delineamos uma visão histórico-evolutiva dos sistemas lineares e sua integração no ensino de matemática. Na análise didática, conduzimos um estudo abrangente que compreendeu a revisão de trabalhos acadêmicos relacionados, identificando semelhanças e contribuições potenciais para a nossa pesquisa. Além disso, examinamos as diretrizes curriculares oficiais e os documentos norteadores de âmbito nacional associadas ao ensino de sistemas lineares e avaliamos os livros didáticos atuais. Essa investigação nos proporcionou uma compreensão profunda da abordagem predominante presente nos materiais adotados em sala de aula.

Por fim, para investigar as particularidades e desafios específicos enfrentados pelos professores participantes da pesquisa, relacionados ao campo cognitivo,

realizamos uma pesquisa no formato de grupo focal com esses sujeitos. No próximo tópico, detalharemos o desenvolvimento desta primeira etapa do estudo.

3.1 Abordagem histórica dos Sistemas de Equações Lineares

A história dos sistemas de equações lineares se desdobra ao longo de diversas civilizações antigas e períodos históricos, refletindo o desenvolvimento contínuo da matemática e sua aplicação em diferentes contextos. Os primeiros vestígios desses sistemas remontam ao Egito e à Mesopotâmia, onde questões algébricas eram abordadas e equações lineares simultâneas eram exploradas (BOYER, 2010).

Fernandes e Miyasaki (2011) apud Poole (2004) apontam registros datados na China do século III a.C., os chineses se destacaram como pioneiros na resolução sistemática de sistemas lineares, utilizando um método que antecipava o método de adição e eliminação de Gauss, conhecido hoje. Registros datados de 250 a.C. na China, exemplificados no livro "Chiu-Chang Suan-chu", ilustravam problemas modelados por sistemas lineares, demonstrando sua aplicação prática em situações como a produção agrícola.

De acordo com Luccas (2004), Kowa (1642-1708) demonstrou em seu manuscrito "Kai Fukudai no Ho" (1683) o desenvolvimento de um novo método algébrico para resolver sistemas de equações, ao resolver um problema geométrico. A análise foi baseada no livro de Yoshio Mikami, "The Development of Mathematics in China and Japan" (1913). Por outro lado, Leibniz (1646-1716) descobriu um novo processo para eliminar as incógnitas de um sistema de equações lineares em 1693, enquanto buscava uma notação matemática adequada para facilitar o trabalho com generalizações. Ele compartilhou suas descobertas com o Marquês de L'HOSPITAL por meio de correspondências, como relatado na coletânea de artigos originais "Source Book in Mathematics", editada por David Eugene Smith (1929).

O autor destaca ainda que a análise epistemológica dos sistemas de equações revela a produção de generalizações, que por sua vez podem originar outros assuntos matemáticos. Ele menciona o caso dos matemáticos Seki Kowa e Leibniz, que, mesmo pertencendo a culturas distintas e utilizando processos cognitivos diferentes, encontraram o mesmo método para eliminar os "valores

desconhecidos" de um sistema de equações, contribuindo para a gênese do processo empregado atualmente no cálculo de determinantes.

Cerca de 60 anos após o conceito inicial do determinante, o matemático Gabriel Cramer propôs uma aplicação mais precisa e abrangente. Seu trabalho, amplamente divulgado na época, marcou um avanço significativo no estudo da álgebra linear e culminou no que conhecemos hoje como a Regra de Cramer.

No século XVIII, Gabriel Cramer publicou a Regra de Cramer em 1750, permitindo a resolução de sistemas lineares por meio de incógnitas e termos independentes. Embora erroneamente atribuída a Colin Maclaurin, a descoberta foi apresentada de forma independente por Cramer. Etienne Bézout (1730-1783) desempenhou um papel significativo ao compilar progressos matemáticos de Euler e D'Alembert, além de contribuir para regras similares às de Cramer na resolução de sistemas lineares (BOYER, 1974).

Carl F. Gauss, no século XVIII, aprimorou o método de eliminação, que posteriormente recebeu seu nome, enquanto Camille Jordan refinou o método no século XX. Esses avanços culminaram em uma evolução contínua dos sistemas de equações lineares, com o desenvolvimento de métodos e teorias matemáticas mais avançadas (SMOLE; DINIZ, 2003).

Luccas (2004) ressalta a diversidade de métodos de resolução de sistemas de equações lineares ao longo da história, desenvolvidos por diferentes povos e em diferentes épocas, como o método de tentativas, de substituição e de eliminação, entre outros. Ele enfatiza que, ao longo do tempo, a humanidade enfrentou situações que demandavam soluções práticas e eficazes, levando à criação de métodos competentes por pessoas em diferentes partes do mundo e em momentos distintos. A escolha entre esses métodos já sistematizados oferece uma vantagem aos aprendizes da Matemática, pois permite compreender como nossos antepassados lidaram com problemas semelhantes, contribuindo para um melhor entendimento da estrutura e das articulações do estudo.

Com o advento de calculadoras e *softwares* matemáticos no século XX, houve uma expansão significativa na exploração dinâmica e visual das soluções de sistemas lineares. Além disso, os sistemas lineares encontraram aplicação em uma variedade de disciplinas, desde física e engenharia até economia e ciência da computação.

Essa sequência histórica reflete não apenas a evolução dos sistemas de equações lineares, mas também o constante desenvolvimento da matemática.

3.2 Representação algébrica dos Sistemas Lineares

Antes de adentrar ao estudo dos sistemas de equações lineares, é crucial apresentar o conceito fundamental de equação linear. Conforme Dante (2010), uma equação linear é caracterizada por sua forma geral, expressa como $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$, onde os coeficientes reais $a_1, a_2, \dots, a_n$ são associados às variáveis (ou incógnitas) $x_1, x_2, \dots, x_n$, e b é o termo independente, sendo um número real.

A linearidade dessa equação destaca a relação direta entre os coeficientes e as variáveis, proporcionando uma estrutura fundamental para a compreensão das equações lineares. Vale salientar que quando o termo independente é nulo, a equação é classificada como homogênea, exemplificada por $3x + 2y = 0$. As soluções de uma equação linear são representadas por n -upla de números reais, denotadas por $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$, que satisfazem a equação, tornando-a uma identidade.

Essa definição é essencial para o entendimento subsequente dos sistemas de equações lineares, fornecendo uma base para a análise e resolução desses elementos matemáticos cruciais. Nesse contexto, Poole (2004) ressalta que um sistema de equações lineares é composto por um conjunto finito de equações lineares, todas compartilhando as mesmas variáveis. Uma solução para esse sistema é definida por um vetor que, simultaneamente, satisfaz cada uma das equações que compõem o sistema.

Dante (2010, p. 145) define um sistema linear $m \times n$ como “o conjunto S composto por m equações lineares em n incógnitas”. Esse sistema pode ser expresso na forma:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Em que a_{ij} , b_{ij} para $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, são números reais e m e n são naturais. No sistema linear S tem-se que: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ representam as incógnitas, a_{ij} são os coeficientes e b_{ij} são os termos independentes e a solução de um sistema linear $m \times n$ é toda n -upla $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ de números reais, que é solução de cada uma de suas equações. Logo, solucionar um sistema linear significa encontrar uma solução que consiga satisfazer todas as equações de forma simultânea (DANTE, 2010).

O autor ainda estabelece duas características importantes nos sistemas lineares. Primeiramente, quando o termo independente de cada equação é nulo, $b_1 = b_2 \dots = b_m = 0$, o sistema é classificado como homogêneo. Em segundo plano, a noção de sistemas equivalentes é introduzida, onde dois sistemas lineares distintos, S_1 e S_2 , são considerados equivalentes se compartilham as mesmas soluções. Essas definições ampliam nossa compreensão sobre as propriedades e relações entre diferentes tipos de sistemas lineares, proporcionando uma base conceitual sólida para análises mais avançadas.

Dado o conceito de sistema linear definido anteriormente, pode-se associar a ele a equação matricial dada por: $A_{m \times n} \cdot X_{n \times 1} = B_{m \times 1}$. Assim, a forma de representar um sistema linear como citado anteriormente de forma matricial, é dada da seguinte maneira:

$$A_{m \times n} \cdot X_{n \times 1} = B_{m \times 1} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Expressando o sistema linear de forma matricial, temos $A \cdot X = B$, em que A é a matriz dos coeficientes, X é a matriz das incógnitas e B é a matriz dos termos independentes.

Ao analisarmos o número de soluções que um sistema linear pode apresentar, observamos uma classificação abrangente de diferentes cenários. Quando o sistema possui uma solução única, denominamos isso como *possível e determinado*. Se o sistema admite infinitas soluções, categorizamos como *possível e indeterminado*. Por outro lado, quando o sistema não possui solução, é classificado

como *impossível* ou *incompatível*. Além dessas categorias, quando dois sistemas lineares compartilham soluções idênticas, referimos a eles como *sistemas equivalentes*.

Existem diversas abordagens disponíveis para resolver sistemas de equações, visando determinar o conjunto solução. Entre essas abordagens destacam-se a adição, substituição, escalonamento ou eliminação de Gauss, entre outras. Cada método oferece uma perspectiva única na resolução de sistemas lineares, permitindo a escolha da abordagem mais adequada conforme as características específicas do sistema em questão. A seguir, exploraremos o método de escalonamento, também conhecido como método de eliminação gaussiana. Esse método é frequentemente preferido para a resolução de sistemas de equações lineares devido à sua simplicidade, generalidade, capacidade de visualização geométrica e identificação eficiente de soluções.

3.2.1 Método do escalonamento

O método do escalonamento é um processo organizado no qual são realizadas operações básicas nas equações, de modo a transformar o sistema linear original em um sistema equivalente mais simplificado, conhecido como sistema linear escalonado.

De acordo com Silva (2016, p. 22), “o método do escalonamento se refere a um procedimento sistemático pelo qual são efetuadas operações elementares nas equações, de tal forma que o sistema linear original seja transformado em outro sistema linear equivalente mais simples, chamado sistema linear escalonado”. Assim, para caracterizar um sistema linear escalonado composto por m equações e n incógnitas, é necessário abordar três cenários distintos:

- Caso I: $m < n$, isto é, o número de equações é menor que o número de incógnitas.
- Caso II: $m = n$, isto é, o número de equações é igual ao número de incógnitas.
- Caso III: $m > n$, isto é, o número de equações é maior que o número de incógnitas.

No primeiro caso, temos um sistema escalonado da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{mk}x_k + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \text{onde } k \leq m < n$$

Se $a_{mk} \neq 0$ então as incógnitas $x_{k+1}, \dots, x_n$ podem ser tomadas como parâmetros e o sistema será indeterminado.

No segundo caso, um sistema escalonado é um sistema da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Se $a_{nn} \neq 0$, o sistema será possível e determinado, se $a_{nn} = 0$ e $b_n = 0$, o sistema será possível e indeterminado e se $a_{nn} = 0$ e $b_n \neq 0$, o sistema será impossível.

No terceiro caso, um sistema linear escalonado é um sistema da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{nn}x_n = b_n \\ a_{n+1,n}x_n = b_{n+1} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Se $a_{ii} \neq 0$ para $n \leq i \leq m$, o sistema será possível e determinado, se $a_{ii} = 0$ e $b_{ii} = 0$ para $n \leq i \leq m$, o sistema será possível e indeterminado e se $a_{ii} = 0$ e $b_{ii} \neq 0$ para $n \leq i \leq m$, o sistema será impossível.

Assim, quando um sistema linear é possível e indeterminado, a solução desse sistema pode ser representada por meio de um conjunto de equações paramétricas, esboçando a solução geral. Este conjunto de equações paramétricas oferece uma descrição abrangente e parametrizada das diversas soluções existentes no sistema, indicando a natureza indeterminada do conjunto solução.

3.4 Revisão de Literatura

Ao desenvolver uma pesquisa, é fundamental conduzir uma busca minuciosa, seleção e revisão de estudos prévios na área de interesse ou que compartilhem similaridades com o tema em investigação. A análise desses estudos não apenas fornece um suporte bibliográfico essencial, mas também sugere novas direções para a pesquisa, identificando obstáculos ou lacunas que os pesquisadores anteriores tenham percebido em seus estudos.

Para esta pesquisa específica, optamos por realizar uma revisão utilizando a Plataforma de Teses e Dissertações da Capes como fonte primária. Selecionamos esta plataforma devido à sua abrangência e confiabilidade. Utilizamos como descritores os termos "formação docente" e "ensino de sistemas de equações lineares". Limitamos nossa busca ao intervalo de doze anos, compreendendo estudos publicados ou realizados entre os anos de 2011 e 2022, e focamos exclusivamente em Dissertações. Além disso, delimitamos a grande área do conhecimento para o ensino de ciências e matemática.

Ao analisar os trabalhos encontrados, direcionamos nossa última filtragem para as pesquisas aplicadas que envolvem professores em formação inicial e continuada. Esta etapa de refinamento foi essencial para concentrar nossa análise em estudos que melhor se alinham com os objetivos e escopo da presente pesquisa.

Ao término do processo de seleção, foram escolhidas para a realização desta revisão um total de quatro dissertações que atendem aos critérios estabelecidos. Os títulos, ano de publicação e os autores de cada trabalho estão apresentados no Quadro 7 a seguir.

Quadro 7 - Dissertações selecionadas para revisão de literatura

Título do trabalho	Autor (a)	Ano de publicação
Projetos de modelagem matemática e sistemas lineares: contribuições para a formação de professores de matemática	RANGEL, W. S. A.	2011
Conhecimentos e compreensões revelados estudantes de licenciatura em matemática sobre sistemas de equações lineares	BERTOLAZI, K. S.	2012
Sistemas de equações lineares:	SILVA. C. F. da	2012

contribuições de uma sequência didática à luz da teoria de registros de representações semióticas		
Ensino-aprendizagem de sistemas lineares na formação do professor de matemática via exploração, resolução e proposição de problemas	MARTINS, F. da. C.	2019

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Após a seleção das dissertações, procedeu-se à leitura minuciosa, focalizando principalmente no objetivo de cada pesquisa, a metodologia empregada, o processo de análise dos dados, a discussão dos resultados e os principais obstáculos identificados pelos pesquisadores no ensino ou na aprendizagem de sistemas de equações lineares.

A pesquisa de Rangel (2011) se insere no contexto do ensino de sistemas lineares, adotando uma abordagem metodológica qualitativa. Seu objetivo principal é contribuir para a discussão sobre estratégias pedagógicas no ensino desses sistemas, propondo o uso de projetos de modelagem matemática como alternativa para professores de matemática. O autor destaca a importância de aproximar a matemática do contexto social dos alunos, visando simplificar as abstrações do conteúdo e fundamentar de forma consistente os significados associados aos conjuntos solução dos sistemas lineares. Essa pesquisa enfatiza a valorização da experimentação e da prática reflexiva do professor como forma de contribuir para sua formação docente, com potencial para estimular pesquisas a partir de aplicações matemáticas e promover um ambiente de aprendizado mais envolvente e prazeroso para os alunos.

Bertolazi (2012) investiga os processos de pensamento matemático avançado manifestados em registros escritos de estudantes de licenciatura em matemática, com uma abordagem metodológica qualitativa. O estudo tem como objetivo identificar nos registros escritos dos alunos indícios que demonstrem a presença de processos de pensamento matemático avançado, conforme teorias de Dreyfus (1991) e Resnik (1987), além de analisar atitudes dos professores à luz dos conceitos de Freire (2011). A pesquisa consiste na elaboração de uma proposta de avaliação reflexiva sobre sistemas de equações e sua aplicação em uma turma de

licenciatura em matemática. Os resultados apontam para a insegurança dos alunos diante do conteúdo de sistemas lineares, apesar de já terem tido contato com ele na educação básica. No entanto, indicam a necessidade de trabalhar o conteúdo por meio da resolução de problemas, evidenciando que a percepção da aplicabilidade do conteúdo desperta maior interesse e atenção por parte dos alunos durante as aulas e seus estudos.

A pesquisa conduzida por Martins (2019) adota uma abordagem qualitativa na modalidade de pesquisa pedagógica, buscando investigar a metodologia de ensino-aprendizagem da matemática por meio da exploração, resolução e proposição de problemas. Utilizando uma oficina com atividades planejadas à luz das teorias de Friedlander e Tabach (2001), e desenvolvidas com base na metodologia de ensino de matemática por meio da resolução de problemas de Andrade (2007), a pesquisa se propõe a interpretar os dados a partir do pressuposto das representações múltiplas de álgebra. O estudo visa compreender como essa abordagem pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem da matemática, promovendo uma maior participação dos alunos, estimulando o raciocínio lógico e tornando o aprendizado mais significativo.

O trabalho de Silva (2021) é caracterizado por uma abordagem qualitativa e tem como objetivo investigar as contribuições de uma sequência didática para o ensino e aprendizagem de sistemas lineares, utilizando a teoria de representações semióticas como base. A metodologia adotada na pesquisa inclui a resolução de problemas e a aplicação da teoria de representações semióticas, que foram fundamentais para o desenvolvimento do estudo, bem como para a coleta e análise dos dados. Além disso, destaca-se o uso do *software* GeoGebra como uma ferramenta essencial para facilitar a visualização e compreensão dos sistemas de ordem 3×3 , contribuindo para uma abordagem mais dinâmica e interativa no ensino da matemática.

No panorama dos obstáculos e/ou erros manifestados pelos sujeitos das pesquisas, é relevante destacar alguns que surgem com frequência. Entre esses obstáculos recorrentes estão:

- 1 Interpretação do problema e sua tradução para a linguagem algébrica;
- 2 Manipulação dos objetos matemáticos envolvidos nos sistemas lineares;
- 3 Resolução de sistemas, de modo específico, os sistemas indeterminados;
- 4 Transição entre diferentes representações de um mesmo sistema;

- 5 Ausência de justificativas para a escrita matemática;
- 6 Relacionamento adequado entre representações algébricas e gráficas;
- 7 Compreensão das diferenças entre retas coincidentes e concorrentes;
- 8 Apresentação de modelos matemáticos generalizados;
- 9 Visualização da posição relativa entre planos em sistemas de ordem 3×3 ;
- 10 Representação gráfica dos sistemas lineares;
- 11 Construção de gráficos 3D manualmente;
- 12 Compreensão e interpretação da linguagem natural nos problemas matemáticos propostos.

Ao conduzir a presente pesquisa, escolhemos investigar, no contexto da formação continuada de professores, as concepções em torno do conceito de sistemas de equações lineares, bem como os desafios profissionais enfrentados por estes educadores. Nosso objetivo foi compreender de que maneira a reflexão e a análise das atitudes dos professores diante de situações formativas, especialmente em Situações Didáticas Profissionais, podem contribuir para o aprimoramento da prática docente.

3.5 Orientações curriculares relacionadas ao ensino de Sistemas de Equações Lineares

Na Educação Básica brasileira, os currículos escolares são elaborados considerando diretrizes e documentos orientadores de âmbito nacional, destacando-se a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A BNCC (BRASIL, 2018) é um documento normativo que estabelece as aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo da Educação Básica. Ela delinea os conhecimentos por meio de Competências Gerais para a Educação Básica e Competências Específicas por área, cada uma acompanhada de suas respectivas habilidades. Este documento serve como guia fundamental para a construção curricular nas instituições de ensino, proporcionando uma base sólida e abrangente para a formação dos estudantes ao longo de sua trajetória educacional.

A BNCC tem como uma de suas principais atribuições a organização do ensino do componente curricular de Matemática em cinco unidades temáticas: números, álgebra, grandezas e medidas, geometria, probabilidade e estatística. Cada uma dessas unidades temáticas apresenta objetivos de ensino e

aprendizagem claramente definidos, além de um conjunto de habilidades a serem desenvolvidas ao longo de toda a Educação Básica.

No intuito de atingir a Competência Específica 3 da área de Matemática e suas Tecnologias, bem como a habilidade EM13MAT301, espera-se que o professor proponha desafios aos alunos visando incentivar a interpretação e a representação de situações por meio de sistemas lineares, estimulando a criação de modelos matemáticos. Tais modelos, ao serem resolvidos, proporcionam soluções para os problemas propostos, contribuindo para o desenvolvimento da capacidade dos alunos em resolver questões do cotidiano, seja da matemática e/ou de outras áreas do conhecimento.

Ao considerar as competências estabelecidas pela BNCC, é relevante também destacar as competências 4 e 5, pois estão diretamente alinhadas à proposta deste trabalho:

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p. 531).

Essas competências reforçam a importância da abordagem interdisciplinar e da aplicação prática da matemática em situações do cotidiano, o que está em sintonia com a proposta deste trabalho de promover uma compreensão mais profunda e contextualizada dos conceitos matemáticos em diversas áreas e contextos.

Reis (2010) pontua que, ao analisar livros de diferentes épocas, desde a Primeira República até o período contemporâneo, observa-se uma notável semelhança na linguagem algébrica utilizada. As principais diferenças encontradas dizem respeito aos recursos disponíveis, influenciados pelo desenvolvimento tecnológico ao longo do tempo.

No próximo tópico, examinamos como o tema tem sido abordado nos livros didáticos contemporâneos. Nossa análise se concentrará em comparar as diretrizes da BNCC com o que é apresentado nos materiais didáticos utilizados pelos professores. Além disso, também investigamos o papel do professor como mediador

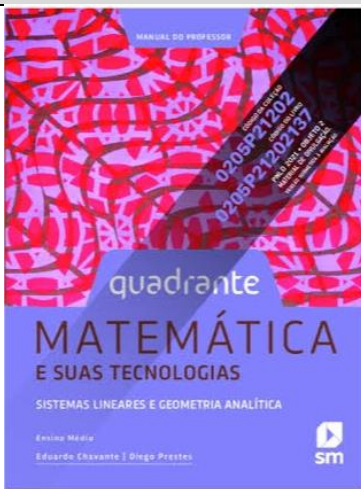
nesse processo, considerando como ele realiza a transposição didática desse objeto de estudo.

3.6 Abordagem dos sistemas nos livros didáticos

O livro didático desempenha um papel de extrema importância na prática do professor, muitas vezes tornando-se sua principal fonte de referência para o planejamento educacional. No entanto, é crucial ressaltar que, mesmo após a seleção do livro didático, é necessário realizar uma adaptação dos conteúdos para que se alinhem à realidade da escola e aos objetivos educacionais.

No Quadro 8 apresentamos os livros didáticos atualmente utilizados por professores de escolas estaduais na cidade de Juazeiro do Norte, no Ceará, local onde a formação foi realizada. Conforme Almouloud (2007, p. 172), nessa etapa da metodologia é “imprescindível fazer uma análise crítica das estratégias e escolhas feitas pelos autores dos livros didáticos”. Com base nisso, nossa análise será direcionada à abordagem metodológica e a contextualização dos conteúdos:

Quadro 8 - Livros didáticos em uso pelos professores das escolas participantes

LIVRO I	LIVRO II
	
José Roberto Bonjorno José Ruy Giovanni Jr. Paulo Roberto Câmara (2020)	Eduardo Chavante (2020)

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Utilizamos uma adaptação do roteiro de análise do livro didático feita por Camilo (2021, p. 83). O conteúdo a ser analisado será sistemas de equações lineares, nos atemos a analisar:

- 1 Maneira como os conteúdos são introduzidos e desenvolvidos;
- 2 A retomada de conhecimentos prévios (há, não há, de quais, de que forma);
- 3 Tipos de exercícios: mais elaborados? Permitem ao aluno testar diferentes estratégias? Há exercícios de repetição e memorização? Que tipo de exercícios recebe maior ênfase?
- 4 O desenvolvimento do conteúdo e/ou exercícios apresenta inconsistência?
- 5 Há indicação de emprego de outros recursos didáticos?
- 6 Há algum tipo de contextualização com práticas sociais e/ou outros campos do saber?

3.6.1 Livro Didático I

No livro escrito por José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni e Paulo Roberto Câmara (2020), a abordagem inicial do conteúdo se destaca por revisar os conhecimentos prévios dos alunos. O livro introduz o conceito de equação e o contextualiza por meio de exemplos relacionados a situações do cotidiano dos estudantes. Essa abordagem é realizada por meio da modelagem de problemas, o que está alinhado às diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que enfatiza a importância de incorporar as experiências do dia a dia dos alunos no processo de ensino.

A valorização dos conhecimentos prévios dos alunos desempenha um papel crucial em várias temáticas abordadas no trabalho, tais como o contrato didático, nas fases da TSD e na manifestação dos erros e identificação dos obstáculos. No livro I, há uma breve exploração do contexto histórico dos sistemas lineares, e a progressão do conteúdo é concisa, mas esclarecedora.

A obra valoriza a exposição histórica dos sistemas lineares e oferece uma compreensão clara do desenvolvimento desse tópico. A abordagem enxuta, mas eficaz, contribui para a assimilação do conteúdo, enquanto os exercícios demonstram um esforço em proporcionar uma compreensão holística, tanto nas representações simbólicas quanto nas interpretações geométricas. Assim, o livro segue o que preconiza a BNCC, quando destaca como uma habilidade a ser

desenvolvida “Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais” (BRASIL, 2018, p. 536).

O livro não se limita apenas a oferecer questões contextualizadas, mas também faz sugestão ao uso do *software* GeoGebra como uma ferramenta para a interpretação geométrica de sistemas lineares de dimensão 2×2 . Além disso, a obra explora exemplos práticos da aplicação desses sistemas no plano cartesiano, proporcionando uma compreensão visual do conteúdo.

O livro também traz as ampliações de sistemas, no entanto não apresenta nenhum exemplo da representação geométrica para os sistemas de equações de ordem 3×3 no plano, sendo fundamental essa abordagem pelo professor, uma vez que, o trabalho com sistemas pode conduzir facilmente a mecanização dos procedimentos, sem a compreensão do que estão a fazer, “com que objetos estão a trabalhar, que questões se colocam relativamente a esses objetos e qual o fundamento das estratégias de resolução adotadas.” (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 148). Além de não fazer menção a nenhum sistema de ordem maior, essa ruptura pode ocasionar em obstáculos prejudiciais à aprendizagem. Além disso, o livro apresenta os métodos de adição, substituição e escalonamento, destacando este último de forma especial. A explanação do livro como um todo mostrou-se compreensível, sem contradições nos métodos descritos.

No tópico seguinte analisamos o livro II.

3.6.2 Livro Didático II

O livro II, escrito por Eduardo Chavante e Diego Prestes (2020), carece de uma abordagem histórica sobre o objeto matemático, ausente de apresentação. Da mesma forma que o livro I, o livro II também apresenta o conceito de equação e o conecta a exemplos do dia a dia dos alunos. Isso é feito através da modelagem de problemas, seguindo as diretrizes estabelecidas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). O livro oferece discussões breves sobre sistemas e não faz menção ao uso *softwares*. A ênfase do livro está na exploração algébrica, privilegiando a memorização.

É importante destacar que nesse contexto o papel do professor se torna crucial. Eles têm a tarefa de orientar os alunos, de forma a capacitá-los a se movimentar com independência, além das fórmulas e algoritmos. Essa orientação pode permitir aos alunos uma compreensão mais profunda e ampla do conteúdo, além de uma capacidade maior de aplicar os conceitos aprendidos em contextos diversos.

Na abordagem dos sistemas 3×3 , é notável a ausência de detalhamento das representações geométricas, tanto no livro II quanto no livro I, que também não contempla essa abordagem. Essa lacuna pode criar obstáculos à compreensão dos tipos de solução, como destacado por Santos (2019, p. 16) que “a razão pela qual existe essa dificuldade na compreensão dos tipos de solução é justamente a ausência da interpretação geométrica na exposição e na abordagem dos conceitos, que também são algébricos”.

O livro apresenta os métodos de adição, substituição e escalonamento, semelhante ao livro I. No entanto, não oferece uma análise das vantagens e desvantagens associadas ao uso desses diferentes métodos para resolver sistemas lineares. Apesar de as atividades serem organizadas de acordo com o nível de dificuldade, a lista de exercícios é relativamente reduzida. Essa ênfase em exercícios repetitivos e de memorização pode limitar a capacidade dos alunos de desenvolver uma compreensão profunda e independente do tópico. Além disso, não é apresentada nenhuma proposta de atividade interdisciplinar com outras áreas do conhecimento.

É relevante ressaltar que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) recomenda a introdução e adoção de diversas ferramentas, como *softwares* de geometria dinâmica, planilhas, calculadoras, jogos, entre outros. Essa abordagem tem como objetivo principal fomentar o desenvolvimento do pensamento computacional e matemático dos estudantes do Ensino Médio. A utilização desses *softwares* permite que os alunos confrontem e formulem conjecturas a partir das diversas soluções apresentadas.

Na seção subsequente apresentamos o GeoGebra, uma ferramenta de geometria dinâmica de código aberto projetada para ser utilizada em sala de aula. Com ela, os alunos podem realizar construções envolvendo pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas e criar gráficos a partir de equações. Desse

modo, o *software* contribui de maneira significativa para a construção ativa do aprendizado por parte dos estudantes.

3.7 O *software* GeoGebra como aporte para o ensino de sistemas de equações lineares

A utilização de recursos tecnológicos e do uso de *softwares* é uma alternativa para diversificar as estratégias de ensino e aprendizagem, indo de encontro ao que contempla a BNCC. O *software* GeoGebra nos permite trabalhar com Geometria (Geo) e Álgebra (Gebra) e permite construções de forma dinâmica e interativa, contribuindo para implementar mudanças nas práticas pedagógicas adotadas.

O GeoGebra teve sua origem na Universidade de Salzburg em 2001 e, desde então, tem passado por evoluções contínuas, crescendo para se tornar uma plataforma online abrangente. Atualmente, oferece uma ampla gama de recursos relacionados ao ensino e a aprendizagem da matemática, abrangendo não apenas sua funcionalidade principal, mas também integrando diversas outras ferramentas e recursos complementares.

Escolhemos como aliado para nossa pesquisa, por tratar-se de um *software* livre e de fácil manipulação, que segundo Abar (2020) proporciona suporte às metodologias aplicadas pelo professor, facilitando os exercícios e problemas, tornando-os mais compreensíveis com o uso de recursos visuais e manipuláveis. Alves e Borges Neto (2012) complementam que o uso deste *software* como recurso tecnológico possibilita a visualização de situações imagináveis, que o aluno não conseguiria enxergar em um problema feito à mão, com lápis e papel.

De acordo com Silva e Abar (2016), o GeoGebra proporciona uma modernização do saber escolar ao oferecer tais recursos visuais e manipuláveis, sendo descrito como um ambiente de "Geometria Dinâmica que permite a criação, visualização e manipulação de representações de conceitos matemáticos, tratando a Geometria, a Álgebra e o Cálculo de forma conectada" (SOUSA et al., 2023, p. 209). O que consequentemente comprova a ideia de que seu uso no contexto escolar pode ser um grande aliado, tanto para atualização da prática docente como para o desenvolvimento da aprendizagem do aluno.

Com o objetivo de proporcionar aos professores uma ferramenta que viabilizasse a compreensão da visualização geométrica dos sistemas, optou-se por

apresentá-lo como recurso auxiliar à transposição didática do tema, incorporando-o como suporte para a execução de uma das SDPs implementadas na de formação.

3.8 Análise do ensino de sistemas de equações lineares conduzida junto aos professores envolvidos na pesquisa

No intuito de responder o primeiro objetivo específico da pesquisa, que se concentra na compreensão das concepções e dos obstáculos enfrentados pelos professores de matemática em seu ambiente de trabalho, conduzimos uma investigação abrangente sobre a prática profissional dos participantes do estudo. Essa investigação serviu como fundamento para a fase de planejamento (concepção e análise *a priori*), pois a identificação das concepções levantadas nesta etapa desempenhou um papel fundamental na estruturação do curso de formação, visando proporcionar uma contribuição valiosa aos professores participantes.

Inicialmente, foi apresentada a proposta da pesquisa e feito o convite para participação, seguido da aplicação do questionário (Apêndice A). O questionário 1 foi dividido em três seções, nas quais foram coletadas informações relacionadas à formação inicial e/ou continuada dos professores, bem como detalhes sobre suas atividades profissionais. Para preservar a identidade dos professores participantes da pesquisa, estes foram codificados como P1, P2, P3, P4 e P5.

A pesquisa foi conduzida com um grupo de estudantes matriculados na especialização em Ensino de Matemática com ênfase na Educação Básica, um programa de Pós-Graduação *Latu Sensu* oferecido pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, *campus* Juazeiro do Norte.

Em uma etapa subsequente, promovemos uma reunião com os professores envolvidos na pesquisa, na qual conduzimos uma entrevista coletiva no formato de Grupo Focal. O objetivo dessa entrevista foi identificar suas concepções, formas de ensino e os obstáculos profissionais enfrentados em suas práticas.

A seguir, apresentam-se os aspectos mais significativos relativos aos momentos em questão:

3.8.1 Questionário 1 (primeira seção)

No Quadro 9 trazemos dados sobre idade, sexo e tempo de experiência no ensino de cada um dos professores participantes da pesquisa:

Quadro 9 - Informações sobre a identificação dos professores participantes

PROFESSOR	SEXO	IDADE	TEMPO (EM ANOS) DE EXPERIÊNCIA DOCENTE
P1	M	53	MAIS DE 15
P2	M	30	1 A 5
P3	F	56	MAIS DE 15
P4	F	29	1 A 5
P5	M	28	1 A 5

Fonte: Elaboração da autora (2023).

Com base no Quadro 9, foi possível constatar que a média de idade dos participantes é de cerca de 39 anos, com predominância do sexo masculino. Os professores P1 e P3 destacam-se como os mais experientes, acumulando mais de 15 anos de atuação profissional, enquanto os professores P2, P4 e P5 possuem menor tempo de profissão, entre 1 e 5 anos.

3.8.2 Questionário 2 (segunda seção)

A segunda seção abordou a formação dos professores, como ilustrado no Quadro 10:

Quadro 10 - Informação sobre a formação dos professores

Professor	Formação inicial (graduação)	Formação continuada (pós-graduação)	Participou de algum processo de formação continuada no último semestre? (cursos, palestras, seminários) Quais?
P1	Licenciatura em matemática	Especialização em Ensino de Matemática (em andamento)	Sim. Formação MaisPaic -Seduc
P2	Licenciatura em matemática	Especialização em Ensino de Matemática (em andamento)	Não

P3	Licenciatura em matemática	Especialização em Ensino de Matemática (em andamento)	Sim. Matemática no Ensino Médio
P4	Licenciatura em matemática	Especialização em Ensino de Matemática (em andamento)	Curso de formação em metodologias, inovações e práticas para o ensino.
P5	Licenciatura em matemática	Especialização em Ensino de Matemática (em andamento)	Colóquio de Matemática do IFCE e Didática.

Fonte: Elaboração da autora (2023).

Com base no Quadro 10, todos os participantes possuem formação inicial em Licenciatura em Matemática e atuam em sua área de formação, e estão atualmente matriculados no referido programa de Especialização em Matemática (em andamento). No que diz respeito à formação continuada, apenas P2 relata não ter participado de nenhuma formação, palestra ou curso no último semestre.

3.8.3 Questionário 1 (terceira seção)

A terceira seção abordou o emprego de recursos tecnológicos e do *software* GeoGebra. Em um primeiro plano, os professores foram questionados sobre os tipos de recursos que já haviam utilizado em sua rotina pedagógica e, na sequência, se conheciam o *software* GeoGebra e se já o tinham utilizado como recurso para auxiliar à transposição de algum objeto matemático, em caso afirmativo. Os resultados obtidos estão sintetizados no Quadro 11:

Quadro 11 - Respostas dos professores quanto ao uso de recursos tecnológicos para o ensino

Professor	Uso de recursos tecnológicos utilizados em suas aulas	Quanto ao uso do GeoGebra como recurso auxiliar
P1	Nenhum	Nunca utilizei
P2	Vídeos educacionais, ferramentas de gráficos e planilhas, aplicativos móveis, materiais interativos e uso de softwares	Utilizei para o ensino de Geometria
P3	Nenhum	Nunca utilizei
P4	<i>GeoGebra</i> , <i>Youtube</i> e vídeos educacionais	Utilizo para aulas de Geometria
P5	Vários	sim

Fonte: Elaboração da autora (2023).

No que diz respeito à incorporação de recursos tecnológicos ao ensino, 02 dentre os participantes relatam não os utilizar em suas aulas, dependendo principalmente de aulas em formato tradicional e do uso de livros didáticos como principal apoio pedagógico. Por outro lado, 02 participantes se sobressaíram ao demonstrar uma ampla gama de recursos utilizados para fins pedagógicos. Quanto ao uso do GeoGebra, apenas 03 dentre os 05 professores (P2, P4 e P5) afirmaram conhecer e fazer uso dele, destacando o seu emprego apenas em aulas de Geometria.

A seguir, descrevem-se os resultados da pesquisa do tipo Grupo Focal realizada com os professores que participaram do estudo.

3.8.4 Pesquisa com o grupo de professores (Grupo Focal)

Conforme delineado por Morgan (1997), os grupos focais emergem como uma técnica de pesquisa qualitativa que se desenvolve a partir das entrevistas em grupo, destacando-se pela ênfase na obtenção de informações por meio da interação dinâmica entre os membros do grupo. Alinhando-se a essa perspectiva, Kitzinger (2000) explica que essa abordagem visa primariamente a coleta de informações detalhadas acerca de um tópico específico. Este pode ser proposto tanto pelo pesquisador quanto pelo moderador do grupo, beneficiando-se da contribuição colaborativa de um grupo cuidadosamente selecionado de participantes.

Essa etapa da pesquisa se configura como uma pesquisa do tipo Grupo Focal, que se destaca por sua ênfase na interação entre os participantes. Os membros do grupo foram encorajados a compartilhar suas perspectivas, experiências e os obstáculos enfrentados por estes sobre o tópico em discussão. Essa abordagem facilitou a coleta de informações detalhadas, pois no decorrer das interações entre os participantes surgiram detalhes que talvez não fossem obtidos por meio de entrevistas individuais ou outras técnicas de pesquisa.

Para iniciar esse momento, a professora pesquisadora acolheu o grupo de professores (formandos) e, em seguida apresentou a proposta do projeto e da aplicação do grupo focal, que objetivava responder o primeiro objetivo específico da pesquisa: Conhecer as concepções, as formas de ensino e os obstáculos no ensino

de sistemas de equações lineares. Nesse momento a pesquisadora reforçou a confidencialidade das informações compartilhadas, deixando claro que o objetivo era entender e compartilhar experiências.

No primeiro item, os professores foram questionados sobre os desafios no ensino de sistemas de equações lineares, **Pesquisadora**: "Vamos começar compartilhando alguns dos desafios que enfrentamos ao ensinar sistemas de equações lineares. Quem gostaria de falar sobre algum desafio que enfrentou recentemente? Por exemplo, como vocês mantêm os alunos engajados?". As respostas obtidas foram transcritas como segue:

P1: Como em todos os conteúdos de Matemática, a resolução de sistemas requer conceitos básicos matemáticos que percebemos não encontrar por partes da maioria dos alunos, daí o grande desinteresse em concentração. A falta de aplicabilidade na vida deles pode ser também considerada como um grande desafio.

P2: Encontro desafios em manter o tópico interessante e relevante para os alunos ao longo do tempo. Além disso, a adaptação a diferentes estilos de aprendizado e a identificação de lacunas no conhecimento dos alunos continuam sendo desafios. Outra coisa importante é que normalmente esses obstáculos se alargam no ensino médio, quando estamos tratando de sistemas de ordem 2×3 , 3×3 ou maiores.

P3: Um dos principais desafios que enfrento é manter os alunos engajados e interessados no tópico, pois muitas vezes eles acham sistemas de equações abstratos e difíceis de compreender. Além disso, tenho dificuldade em explicar os conceitos de forma clara e acessível, principalmente quando se trata de sistemas indeterminados. [...] também sempre tenho dificuldade com o uso de recursos, acredito que mostrando os sistemas 3×3 de maneira geométrica, poderia tornar mais fácil o entendimento deles, mas é algo que não tenho trabalhado.

P4: Os alunos podem encontrar dificuldades em identificar as variáveis e aplicar os métodos de resolução. Além disso, a falta de abordagens pedagógicas inovadoras pode ser uma barreira significativa. Muitos professores tendem a se ater aos livros didáticos, que geralmente apresentam problemas de forma puramente algébrica, tornando difícil para os alunos fazerem a conexão entre a álgebra e situações do mundo real. [...] então eu acredito que o desafio principal é encontrar maneiras criativas e inovadoras de ensinar, de modo a ajudar os alunos a superarem a ideia de que a álgebra é uma disciplina difícil. Por exemplo: os alunos podem enfrentar dificuldades em traduzir o problema em um sistema de equações, identificar as variáveis também. O professor se limita ao uso do livro didático que geralmente só tem problema de modo algébrico, consequentemente o aluno não consegue associar.

P5: Para mim o maior desafio é em como inovar nas metodologias, principalmente com conteúdo algébrico. [...] e para os alunos é de modelar os problemas transformando a linguagem escrita para a linguagem matemática.

O segundo questionamento indagou-os sobre os conceitos relacionados aos sistemas que os alunos tinham maior dificuldade em compreender, e que consequentemente atrapalhava o entendimento deste objeto matemático.

Pesquisadora: "Alguém aqui já notou que os alunos têm dificuldades em entender conceitos específicos nos sistemas de equações lineares? Podemos compartilhar algumas experiências e ver se há alguma estratégia que funcionou para superar esses desafios?" Para tal pergunta, obtivemos as seguintes respostas:

P1: Sim, alguns alunos têm dificuldade em entender a diferença entre sistemas consistentes e inconsistentes, bem como a resolução de sistemas de três ou mais equações. Também é comum a confusão entre os melhores métodos de resolução como a substituição e a eliminação.

P2: Alguns alunos ainda lutam com a compreensão da interpretação geométrica dos sistemas de equações e com a resolução de sistemas de três ou mais equações.

P3: Sim, eu considero como um conteúdo de compressão difícil para eles. Principalmente quando vem com mais de uma variável. Mas cabe ao professor buscar estratégias para driblar esses desafios, gosto de trabalhar em duplas. Nunca em um grupo grande, pois acaba dispersando mais. Quando a dupla pesquisa junto, debate, fica mais fácil compreender.

P4: Acho que o estudo de vetores não visto pelos estudantes seja uma dificuldade que faz com que ele não compreenda com exatidão o conteúdo de sistemas no ensino médio.

P5: Os alunos já trazem dificuldade desde o fundamental, quando é visto sistemas 2×2 . [...] aí, quando envolve uma quantidade maior de incógnitas, fica ainda mais complicado.

Detendo-se sobre o questionamento três, as respostas dos professores estão descritas abaixo. Nesse item, os sujeitos foram indagados sobre os recursos e as estratégias utilizadas por eles no ensino. **Pesquisadora:** "Para tornar o ensino mais eficaz, temos explorado diferentes recursos e estratégias. Alguém já experimentou algo que funcionou bem? Pode ser um recurso online ou uma abordagem de sala de aula específica." As respostas obtidas foram:

P1: Tenho procurado recursos online, como tutoriais em vídeo, para me ajudar a entender melhor o tópico e encontrar maneiras de explicá-lo de forma mais clara. Também estou aberto a receber orientações de professores mais experientes.

P2: Além de recursos tradicionais, como livros didáticos, tenho explorado tecnologias educacionais, como software de simulação e aplicativos interativos, para envolver os alunos. Eu acho que quando ficamos só no uso do livro, acabamos limitando o aluno, porque geralmente o que encontramos lá são exercícios de modo algébrico [...]. Também compartilho experiências com colegas e me mantenho atualizado com as melhores práticas na área.

P3: A Internet oferece muitos jogos, animações e quizzes. Gosto do wordwall [...], mas confesso que sobre os sistemas lineares nunca usei nenhum desses.

P4: Geralmente utilizo a aplicação de situações problemas que a aplicabilidade seja do convívio dos estudantes.

P5: Confesso que para o ensino desse tópico, sempre utilizo só a abordagem que os livros trazem, e sempre bem breve.

A quarta pergunta delimita-se especialmente sobre como era feita a abordagem dos sistemas em sala de aula. **Pesquisadora:** "Ao ensinar sistemas de equações lineares, como vocês normalmente abordam esse tópico em sala de aula? Alguém gostaria de compartilhar uma experiência recente e como apresentou os conceitos?" As respostas obtidas foram:

P1: *Costumo seguir o livro didático e apresentar os conceitos passo a passo, mas reconheço que isso pode se tornar entediante para os alunos. Geralmente apresento a definição de sistema, os métodos de resolução (adição, substituição, eliminação, cramer), sempre focando na parte algébrica. Às vezes, tento usar exemplos práticos.*

P2: *Ao longo dos anos, desenvolvi uma abordagem que combina uma explicação clara dos conceitos com exemplos práticos e problemas do mundo real. Eu acho que não devemos jogar o conceito de cara na primeira aula, primeiro devemos revisar os conceitos que antecedem e que são pré-requisitos para que o aluno entenda qualquer conteúdo. [...] revisar o que eles sabem sobre equação do primeiro grau e sua forma padrão, sistemas 2x2 e os métodos de resolução destes. Depois eu apresento algum problema que venha a ser interpretado como sistema, para que o aluno sinta a necessidade de utilizar o conceito. Só depois da organização da ideia que apresento a estrutura como sistema linear. Quanto aos métodos de resolução (sempre procuro focar no escalonamento) e concluo com a interpretação geométrica, pois ajuda os alunos a entenderem a classificação e solução dos sistemas de maneira visual.*

P3: *Antes de apresentar o assunto, costumo fazer uma revisão dos sistemas de equações do primeiro grau e seus métodos de resolução.*

P4: *Começo pela definição para explicar o objeto matemático. [...] e em seguida aplico as questões disponibilizadas pelo livro.*

P5: *Sigo a sequência do livro didático. [...] definição, classificação e os métodos de resolução, né? [...] é, geralmente o livro traz assim.*

No quinto item da pesquisa, os professores foram questionados sobre como eles definiriam o conceito de sistemas lineares, de acordo com sua compreensão, e como eles articulariam essa definição. O objetivo dessas perguntas foi entender como os participantes percebem o conceito de sistemas e como eles o descrevem em uma sessão de ensino. As respostas coletadas foram:

P1: *As variáveis são iguais, mesmo expoente, onde teremos uma igualdade.*

P2: *Sistemas de equações lineares são conjuntos de duas ou mais equações lineares que envolvem as mesmas variáveis. Nesse caso, a solução de um sistema linear é um conjunto de valores para as variáveis que satisfazem todas as equações simultaneamente, tornando-as verdadeiras ao mesmo tempo. [...], mas se eu tivesse me direcionando diretamente aos alunos eu introduziria como uma espécie de desafio, propondo que eles adivinhem 2 números cuja soma é S e diferença é D. Após alguns testes dessa forma, apresentaria um formalismo.*

P3: *Conjunto de duas ou mais equações lineares que tem que encontrar duas incógnitas ao mesmo tempo.*

P4: *Matematicamente falando eu diria que um sistema linear pode ser representado da seguinte forma: Seja um sistema de equações lineares*

com m equações e n variáveis, onde as variáveis são representadas por $x_1, x_2, \dots, x_n$, onde neste sistema, os coeficientes representam os valores das constantes nas equações, as variáveis são as incógnitas a serem resolvidas.

P5: Além das descrições feitas pelos professores, eu diria que é um conjunto de duas ou mais equações, cuja solução, quando houver, atende as equações simultaneamente.

A sexta pergunta se relacionava à aplicação prática dos sistemas lineares e a relevância do aluno ter conhecimento de como identificá-los em sua realidade.

Pesquisadora: "Às vezes, os alunos têm dificuldade em ver a aplicação prática dos sistemas lineares em suas vidas. Alguém já enfrentou essa situação? Como vocês abordaram a questão da relevância desse tópico?" As respostas obtidas foram:

P1: Sim, muitas vezes os alunos perguntam por que eles precisam aprender sistemas de equações e onde utilizar. Eu tento explicar como esses conceitos são usados em áreas como engenharia, economia, mas nem sempre sei como tornar isso mais tangível para eles.

P2: Sim, alguns alunos têm dificuldade em conectar a teoria dos sistemas de equações com situações do dia a dia. Para abordar isso, procuro exemplos do mundo real que sejam relevantes para eles e mostro como os sistemas de equações são usados em contextos reais, como economia, física e engenharia. Mas, o que pude perceber é que de modo usual, pelo menos com os professores que tive experiência de compartilhar espaço, que eles costumam se distanciar da representação de aplicabilidade desse conteúdo, o que faz com que o aluno não consiga percebê-lo em sua realidade. O abstrato geralmente cria esse espaço entre o conteúdo e a compreensão.

P3: Para apresentar algumas aplicabilidades costumo iniciar com ideias de sistemas do primeiro grau e depois quando aparecer mais que duas incógnitas.

P4: Eu mostraria exemplos práticos do uso de sistemas lineares no dia a dia. Por exemplo, poderíamos discutir como os sistemas são usados em engenharia para resolver problemas de equilíbrio de forças em estruturas, como pontes. Esses exemplos poderiam ajudar os alunos a verem a importância desses conceitos em campos que talvez não tenham considerado anteriormente.

P5: Sim, nesses casos o aluno fica com essa indagação e possivelmente vai prejudicar a sua assimilação do que foi abordado.

Na sétima pergunta indagou-se aos professores a respeito da diversidade de habilidades e sobre os níveis de conhecimento dos alunos. **Pesquisadora:** "Lidar com a diversidade de habilidades dos alunos pode ser um desafio. Alguém tem estratégias específicas para abordar isso? Talvez vocês possam compartilhar como adaptam o ensino para diferentes níveis de conhecimento." As respostas fornecidas foram:

P1: Isso é um desafio para mim, pois tenho alunos com diferentes níveis de habilidade matemática na mesma classe. Eu tento oferecer suporte

adicional aos alunos que precisam, mas não tenho muita experiência em diferenciação.

P2: Adapto minha abordagem, oferecendo suporte extra para alunos que precisam, seja por meio de aulas de reforço, tutoriais individuais ou atividades diferenciadas. Também estímulo a colaboração entre os próprios alunos para que possam aprender uns com os outros.

P3: Trabalhamos com equidade, então a sugestão é propor várias questões com níveis diferentes de aprendizagem.

P4: Primeiro eu realizo um diagnóstico inicial para avaliar o nível de conhecimento e as habilidades dos alunos. A partir disso, eu consigo identificar as dificuldades deles e adaptar conforme a necessidade deles.

P5: Infelizmente nos deparamos com diferentes níveis e nesses casos temos que estar adaptando nosso plano para que possamos alcançar todos, em alguns casos sempre temos que resgatar alguns conceitos para dar sequências nos assuntos abordados. Sempre buscando estar revendo os pré-requisitos para compressão do tópico seguinte.

Finalmente, na oitava questão, foi solicitado aos professores que compartilhassem suas opiniões sobre os recursos e materiais que eles consideravam valiosos para aprimorar o processo de ensino. **Pesquisadora:** "Para enriquecer nossas aulas, estamos sempre em busca de recursos e materiais úteis. Alguém encontrou algo particularmente valioso ao ensinar sistemas de equações lineares? Pode ser um livro, um site ou um aplicativo." As respostas obtidas foram:

P1: Ainda estou explorando recursos para melhorar minhas aulas, mas encontrei alguns exercícios práticos e problemas de aplicação em livros didáticos que ajudam os alunos a praticarem a resolução de sistemas de equações.

P2: Os softwares de simulação e aplicativos interativos. [...] eles ajudam muito, pois possibilita que os alunos consigam visualizar aquilo que até então eles não tinham noção. [...] sem contar que os softwares possibilitam os meninos a construírem passo a passo a ideia do conteúdo. [...] é bom para envolver os alunos.

P3: Hoje com a gama de informação que temos, encontramos diversas dicas, vídeos e ideias de transformar o conteúdo em algo mais simples e fácil.

P4: Nós temos uma gama de opção para trabalhar esse tópico, por exemplo; nos sistemas 2x2 podemos mostrar que cada equação representa uma reta no plano cartesiano, onde os pontos que se intersectam são as soluções do sistema, isso ajuda eles a entenderem visualmente o conjunto solução. [...] aí quando o aluno chega no ensino médio, fica bem mais fácil falar das interseções dos planos.

P5: Costumo pesquisar bastante, porém gosto muito de trabalhar com o livro do Dante. [...] é um dos poucos que conheço que traz a abordagem da parte geométrica dos sistemas 3x3.

A participação dos sujeitos ocorreu de maneira fluida e espontânea. As respostas fornecidas pelos professores apresentaram semelhanças em alguns aspectos. A maioria dos participantes demonstrou uma abordagem de ensino tradicional, com ênfase no método expositivo, em que os professores desempenham

um papel central e dominante durante toda a aula. No contexto do ensino de sistemas de equações lineares foi observada uma tendência ao uso de fórmulas prontas e uma abordagem de resolução de exercícios de maneira repetitiva e mecânica, sem explorar as diversas formas de representação de um sistema linear em suas diferentes linguagens, como a representação algébrica, geométrica e matricial. Essa abordagem é contrária às propostas apresentadas nesta pesquisa e às diretrizes da Base Nacional Comum Curricular, conforme trecho abaixo:

Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas. (BRASIL, 2018, p. 531).

Ao analisar as respostas exploradas durante a pesquisa com esse grupo, identificaram-se como principais obstáculos enfrentados por eles: (i) inabilidade no uso de recursos tecnológicos educacionais; (ii) metodologia de ensino exclusivamente tradicional (inovar em metodologias); (iii) deficiência na discussão e interpretação geométrica de sistemas 3×3 ; (iv) ausência de procedimentos de ensino que possibilitem correlacionar as diversas linguagens do conteúdo (algébrica, geométrica); (v) dificuldades em trabalhar com sistemas indeterminados.

Com o objetivo de superar os desafios identificados e contribuir para o desenvolvimento profissional dos professores, a seguir, descrevem-se as medidas implementadas no processo formativo dos professores participantes.

4 ANÁLISE A PRIORI

Conforme Almouloud e Coutinho (2008), essa etapa desempenha um papel crucial no planejamento e na execução das atividades de ensino, contribuindo para a eficácia do processo educativo. Nesse contexto, procuramos listar as Situações Didáticas Profissionais com o propósito de fomentar o aprimoramento das habilidades e competências necessárias para o ensino de sistemas de equações lineares. Além disso, fornecemos descrições detalhadas dessas situações, bem como sua resolução, fundamentada nos comportamentos esperados dos professores em formação.

É crucial destacar que as situações foram elaboradas com base no conceito de Situação Didática Profissional, considerando os desafios identificados durante a entrevista inicial com os professores. É importante ressaltar que as SDPs se desenvolveram seguindo as fases da Teoria das Situações Didáticas.

4.1 Planejamento e concepção das Situações Didáticas Profissionais

Nesta seção, nosso objetivo foi oferecer uma descrição das SDPs, especialmente focalizada na abordagem de sistemas de equações lineares. Essa abordagem visa capacitar professores em formação a desenvolver, habilidades como reflexão, ação, expressão, raciocínio e autodesenvolvimento. O intuito é que os professores em formação possam adquirir novos conhecimentos, de maneira autônoma e progressiva (ALMOULOU, 2007).

As SDPs foram norteadas pelos pressupostos da Teoria das Situações Didáticas (TSD), uma vez que buscamos analisar de acordo com a perspectiva de Brousseau. Desse modo, a previsão dos comportamentos dos sujeitos foi estruturada a partir das dialéticas de ação, formulação, validação e institucionalização.

Foram escolhidas quatro situações a serem trabalhadas. Na ocasião, o *software* GeoGebra foi utilizado em uma das SDPs, como recurso didático para a transposição didática do objeto matemático. Santos e Alves (2018) enfatizam que o GeoGebra facilita a realização de uma transposição didática, promovendo o raciocínio por meio da modelagem do problema de maneira interativa, usando os elementos matemáticos presentes em cada situação.

Com base na fase anterior, realizamos um planejamento das SDPs, com foco nos obstáculos profissionais. No Quadro 12, elencamos os obstáculos profissionais e apresentamos uma proposta de ação mediadora, do mesmo modo, o planejamento das situações:

Quadro 12 - Plano de ação

Obstáculos identificados	Ação a ser desenvolvida
Falta de familiaridade em trabalhar com o software GeoGebra para propor a discussão geométrica dos sistemas.	Apresentar os comandos fundamentais do GeoGebra e demonstrar como eles podem ser aplicados na abordagem do objeto matemático em questão.
Abordagem do conteúdo é feita de modo tradicional.	Apresentar um modelo teórico de ensino fundamentado nos princípios da Teoria das Situações Didáticas (TSD), visando oferecer aos professores uma alternativa metodológica distinta da abordagem convencional.
Instituir procedimentos de ensino que possibilitem correlacionar as diversas linguagens do conteúdo (algébrica, geométrica, matricial).	Propor uma SDP que promova a análise da relação entre as representações algébrica e geométrica de um sistema linear, bem como as particularidades essenciais para o ensino desse conteúdo.
Adotar uma abordagem de ensino que facilite a compreensão do conjunto solução de sistemas indeterminados.	Propor uma SDP que incorpore a modelagem de problemas práticos do cotidiano dos alunos, com foco na compreensão da resolução de sistemas indeterminados.
Adotar uma abordagem de ensino que beneficie a representação geométrica e a discussão das soluções dos sistemas 3x3.	Propor uma SDP que faça uso do GeoGebra, focando na análise das representações e a discussão geométrica relacionada aos sistemas 3x3.

Fonte: Elaboração da autora (2023).

A seguir, apresentam-se as Situações Didáticas Profissionais desenvolvidas durante o ciclo formativo da pesquisa. Além disso, descrevemos as expectativas em relação aos comportamentos e atitudes previstas para os professores como resultado de cada situação, conforme planejado *a priori*.

4.1.1 Situação Didática Profissional I

O problema apresentado nesta situação didática profissional foi retirado de um exame vestibular da UEPG (2012). Ele destaca a necessidade de abordar a resolução de um sistema linear de maneira mais detalhada e especializada. A

execução dessa situação ocorreu no primeiro encontro formativo, que faz parte da fase experimental deste estudo.

A SDP I, em comparação à abordagem tradicional feita aos sistemas lineares, desafia o professor a ter um profundo domínio das propriedades dos sistemas, indo além de meros procedimentos. Dado que os participantes desta pesquisa são professores atuantes, é razoável esperar que eles não encontrem dificuldades na resolução do problema em si. O objetivo dessa situação não é a construção de conhecimento epistêmico, mas sim, o desenvolvimento de conhecimentos pragmáticos e reflexões sobre o ensino do tema. Temos a SDP I no Quadro 13:

Quadro 13 - Problema utilizado na Situação Didática Profissional I (SDP I)

SDP I - Dispõe-se de x notas de 50 reais, y notas de 20 reais e z notas de 10 reais, totalizando 15 notas e a quantia de R\$ 500,00. Neste contexto resolva o problema e assinale verdadeiro ou falso nas alternativas.

- a) A resolução da equação matricial $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 15 \end{bmatrix}$ permite determinar a quantidade de cada tipo de nota.
- b) Se $x = 6$ então $y - z = 9$
- c) Há infinitas ternos de números inteiros (x, y e z) que satisfazem as condições dadas.
- d) Se $Z = 4$ então $x - y = 5$.

Fonte: UEPG (2012).

Para descrever as previsões feitas para a análise *a posteriori* do momento de desenvolvimento desta Engenharia, optou-se por estruturá-las em conformidade com as quatro etapas propostas por Brousseau para a construção do conhecimento matemático: ação, formulação, validação e institucionalização. Nos parágrafos a seguir, apresentamos as perspectivas consideradas para esta situação didática profissional.

De acordo com Almouloud (2007), a Dialética de Ação é uma etapa crucial na qual os alunos têm a oportunidade de avaliar suas escolhas e tomar decisões informadas. Nesse estágio, o pesquisador introduz o problema aos participantes da pesquisa. O objetivo é que o professor seja capaz de compreender as nuances do problema, adquirindo um entendimento completo e identificando as estratégias apropriadas para resolvê-lo.

Ainda da dialética de ação, espera-se que os professores analisem o contexto da situação e descrevam as informações do problema por meio de equações,

encontrando, assim, os valores das variáveis que tornam as igualdades verdadeiras. No entanto, é importante destacar que eles devem evitar precipitações, pois o problema envolve quantidades de notas, o que implica que as soluções devem ser inteiras e positivas, e não variáveis livres que podem assumir qualquer valor real, como pode ser erroneamente concluído caso ocorra uma análise superficial. O professor dispõe de diferentes processos, podendo este optar pelo melhor método. Para essa situação, podem ser apresentadas algumas possibilidades de resolução, como eliminação e substituição.

Após a fase de observação e seleção de estratégias, ocorre o processo dialético de formulação, em que se espera que os professores interajam entre si através do compartilhamento de conhecimento entre seus pares e/ou com o próprio enigma apresentado. Nesta etapa, ocorre uma rica troca de informações e ideias entre os professores, visando aprofundar a compreensão do problema e explorar diferentes abordagens para sua resolução. Almouloud (2007, p. 38) destaca que neste momento há “troca informações com uma ou várias pessoas, que serão emissores e receptores, trocando mensagens escritas ou orais”.

Na dialética de validação, espera-se que os professores se empenhem em demonstrar a exatidão de suas respostas por meio de procedimentos matemáticos, utilizando para isso uma linguagem formal da matemática. Almouloud (2007, p. 39) destaca que nessa fase se deve “mostrar a validade do modelo por ele criado, submetendo a mensagem Matemática (modelo da situação) ao julgamento de um interlocutor”.

Diante disso, almejamos que os sujeitos mostrem suas estratégias de resolução, excitando uma discussão com os demais colegas de profissão. Cabe destacar que nesta fase podem ocorrer debates e argumentações entre os sujeitos, assim como diferentes propostas para a resolução da situação. Ainda no momento de validação, almeja-se que os professores consigam apresentar suas conclusões e provas, em linguagem própria, como verdadeiro ou falso os itens (a, b, c e d) do problema aos seus pares, usando para isso as características do problema e a lógica que valida cada uma delas.

No estágio final, a dialética de institucionalização, a professora pesquisadora deve reassumir a responsabilidade da situação e formalizar os resultados apresentados pelos participantes, discutindo as intenções da situação didática profissional proposta. Como destacado em Almouloud (2007, p. 40), este é o

momento em que “o professor fixa, convencionalmente e explicitamente, o estatuto cognitivo do saber”. Nessa fase, a pesquisadora baseia-se nas discussões, resoluções e ideias apresentadas pelos professores para elucidar as intenções didáticas formativas subjacentes à realização da situação de ensino.

Nesse contexto específico é responsabilidade da formadora guiar a reflexão sobre os obstáculos na compreensão e resolução de sistemas indeterminados. Isso inclui a construção progressiva de ideias, quando esses sistemas são apresentados aos alunos por meio de problemas modelados, os quais exigem o desenvolvimento do pensamento crítico diante das características específicas. Além disso, espera-se que os professores reflitam sobre a habilidade de modelar problemas que possam transcender as abordagens tradicionais de ensino, demandando um domínio profundo do conceito matemático em questão.

4.1.2 Situação Didática Profissional II

A SDP II apresenta uma situação-problema formulada em linguagem natural. O objetivo da situação é estimular uma reflexão a respeito do trabalho com sistemas indeterminados, visando promover uma reflexão sobre a abordagem desse tipo de sistema e compartilhar conhecimentos pragmáticos. O desafio a ser abordado nesta situação didática profissional é proveniente da obra de Lamin (2000). A aplicação da SDP II (Quadro 14) ocorreu no segundo encontro da formação:

Quadro 14 - Problema utilizado na Situação Didática Profissional II (SDP II)

SDP II - Um negociante trabalha com as mercadorias A, B e C. se este vender cada unidade de A por R\$2,00, cada unidade de B por R\$3,00 e cada unidade de C por R\$4,00 obtém uma receita de R\$50,00. Mas, se vender cada unidade respectivamente por R\$2,00, R\$6,00 e R\$3,00 a receita será de R\$60,00

a) Calcule o número de unidades que possui cada uma das mercadorias

b) Apresente o conjunto solução desse problema.

c) Quais seriam as possíveis soluções do problema, tendo em vista que o conjunto solução é dado por números inteiros positivos.

Fonte: Adaptado de Lamin (2000).

Na dialética de ação, espera-se que os professores em formação se empenhem em traduzir o problema para uma representação algébrica, com o intuito de determinar o valor associado a cada unidade das mercadorias. Neste estágio é

esperado que ao abordar a seção (a) do problema apresentado, o professor realize a leitura do problema e se sinta motivado a resolvê-lo. Além disso, espera-se que nessa etapa os sujeitos iniciem a resolução identificando a necessidade de atribuir variáveis (x , y , z) às quantidades das mercadorias A, B e C, respectivamente, compreendendo que as informações fornecidas no problema podem ser representadas por um sistema de equações. A partir deste ponto de partida, é antecipado que o professor comece a explorar e avaliar as alternativas para encontrar o método mais eficaz de resolver o problema.

Na etapa de formulação espera-se que utilizem as informações dadas para formular as equações que representam as relações entre as quantidades de mercadorias. E, a partir disso, criem o sistema de equações $2x + 3y + 4z = 50$ e $2x + 6y + 3z = 60$. Ainda nessa etapa, perspectiva-se que os professores realizem operações algébricas para simplificar o sistema, multiplicando as equações para eliminar os termos com x . Neste momento, almeja-se que o professor identifique a necessidade de isolar as variáveis para resolver o sistema. Isola uma variável (por exemplo, x) em uma das equações para facilitar a substituição em outra equação.

Em seguida, espera-se que os professores optem por um método de resolução que julguem mais adequado para o problema (adição, substituição ou eliminação). Para isso, é necessário que eles desenvolvam estratégias aritméticas e algébricas.

Na sequência, descrevemos a resolução a partir de um dos métodos mencionados, e que os professores podem utilizar para solucionar o problema. Assim, entra a dialética de validação, onde se espera que os professores apresentem a solução do problema de forma algébrica, obedecendo as características definidas na situação. Um modelo de resolução apresenta-se como se segue:

Resolução do sistema pelo método da adição

Vamos chamar de x , y e z o número de unidades das mercadorias A, B e C, respectivamente. A partir das informações dadas no problema, podemos criar o seguinte sistema de equações:

$$2x + 3y + 4z = 50$$

$$2x + 6y + 3z = 60$$

Agora, podemos resolver esse sistema de equações para encontrar as quantidades de cada mercadoria (x , y e z).

Primeiro, vamos multiplicar a primeira equação por 3 e a segunda equação por 2 para que os coeficientes de x nas duas equações se cancelem quando somadas:

$$3(2x + 3y + 4z) = 3 * 50$$

$$2(2x + 6y + 3z) = 2 * 60$$

Isso nos dá:

$$6x + 9y + 12z = 150$$

$$4x + 12y + 6z = 120$$

Agora, subtraímos a segunda equação da primeira para eliminar x:

$$(6x + 9y + 12z) - (4x + 12y + 6z) = 150 - 120$$

Isso resulta em:

$$2x - 3y + 6z = 30$$

Agora, temos o seguinte sistema de equações simplificado:

$$2x - 3y + 6z = 30$$

$$2x + 6y + 3z = 60$$

Vamos usar o método de substituição. Primeiro, isole x na primeira equação:

$$2x = 30 + 3y - 6z$$

$$x = 15 + (3/2)y - 3z$$

Agora, substitua essa expressão para x na segunda equação:

$$2(15 + (3/2)y - 3z) + 6y + 3z = 60$$

Agora, simplifique a equação:

$$30 + 3y - 6z + 6y + 3z = 60$$

Agrupe os termos semelhantes:

$$9y - 3z = 30$$

Agora, podemos dividir toda a equação por 3 para simplificar ainda mais:

$$3y - z = 10$$

Agora, temos um sistema de duas equações com duas variáveis:

$$2x - 3y + 6z = 30$$

$$3y - z = 10$$

Vamos encontrar a solução desse sistema. Podemos começar resolvendo a segunda equação para z:

$$z = 3y - 10$$

Agora, substitua essa expressão para z na primeira equação:

$$2x - 3y + 6(3y - 10) = 30$$

Agora, simplifique a equação:

$$2x - 3y + 18y - 60 = 30$$

Agrupe os termos semelhantes:

$$2x + 15y = 30 + 60$$

$$2x + 15y = 90$$

Agora, isole x:

$$2x = 90 - 15y$$

$$x = 45 - (15/2)y$$

Agora temos as expressões para x, y e z em termos de y:

$$x = 45 - (15/2)y, \quad y = y \quad \text{e} \quad z = 3y - 10$$

Agora, podemos encontrar um conjunto solução, onde x, y e z são números inteiros positivos.

Vamos começar com y = 1 e encontrar os valores correspondentes de x e z:

$$x = 45 - (15/2)(1) = 45 - 7.5 = 37.5 \text{ (não é um número inteiro positivo)}$$

$$z = 3(1) - 10 = 3 - 10 = -7 \text{ (não é um número inteiro positivo)}$$

Agora, com y = 2:

$$x = 45 - (15/2)(2) = 45 - 15 = 30$$

$$z = 3(2) - 10 = 6 - 10 = -4 \text{ (não é um número inteiro positivo)}$$

Vamos continuar aumentando y:

Para y = 3:

$$x = 45 - (15/2)(3) = 45 - 22.5 = 22.5 \text{ (não é um número inteiro positivo)}$$

$$z = 3(3) - 10 = 9 - 10 = -1 \text{ (não é um número inteiro positivo)}$$

Para y = 4:

$$x = 45 - (15/2)(4) = 45 - 30 = 15$$

$$z = 3(4) - 10 = 12 - 10 = 2 \text{ (número inteiro positivo)}$$

Agora, encontramos uma solução onde todos os valores são inteiros positivos: x = 15, y = 4, e z = 2.

Portanto, o conjunto solução desse problema é:

$$x = 15, y = 4 \text{ e } z = 2$$

Essa é a única solução inteira positiva para o problema dado.

Ao concluir a resolução da situação e considerar as condições estabelecidas no item (c) do problema, é esperado que os envolvidos reconheçam que não basta simplesmente recorrer à teoria dos sistemas indeterminados, bem como ocorreu na questão anterior. Ao invés disso, é essencial que eles considerem o contexto da situação proposta para chegar à conclusão desejada. É fundamental que compreendam que se trata de uma quantidade discreta, e que embora o sistema possa ser categorizado como possível e indeterminado, isso não implica em uma infinidade de soluções, mas sim em apenas uma solução viável. Na etapa de validação é esperado que os professores em formação realizem a transcrição do registro algébrico da forma genérica do conjunto solução, expressando-o em função de uma das variáveis.

Na dialética de institucionalização é apropriado que o pesquisador analise e destaque os propósitos subjacentes à situação didática profissional vivenciada. Seguindo a perspectiva de Brousseau (1986), nesse contexto, os professores têm a oportunidade de conectar as produções e os comportamentos dos alunos, que emergem de maneira espontânea com o conhecimento formal e científico.

Se os professores em formação encontrarem dificuldades ao resolver o problema, cabe ao formador destacar essas dificuldades de maneira a favorecer a reflexão em direção à solução única proposta. Assim, no item (b) deve-se apresentar a solução do problema como $(\frac{90-15B}{2}, B, 3B-10)$, sendo a solução paramétrica que descreve a relação entre as variáveis A, B e C em função de um parâmetro B:

$$A > 0: \frac{90-15B}{2} > 0; \text{ logo, } B < 6 \text{ e } C > 0: 3B - 10 > 0; \text{ logo, } B > \frac{10}{3}$$

$$\text{Então } \frac{10}{3} < B < 6, \text{ ou seja, } B = 4 \text{ ou } B = 5$$

Assim, se temos $B = 4$, então temos que $C = 2$ e $A = 15$ (que é uma solução possível, pois todos são inteiros). Do mesmo modo, têm-se que, se $B = 5$, então $C = 5$ e $A = 7,5$ (que é impossível, pois A não é inteiro).

A estruturação desta situação-problema se baseou na identificação de um desafio profissional enfrentado pelos professores de matemática, que envolve a criação de uma abordagem de ensino eficaz para facilitar a compreensão da resolução de sistemas indeterminados. Em consequência disso, na etapa de institucionalização, tem-se a oportunidade de que sejam direcionados pontos de reflexão relativos às barreiras que afetam a compreensão desse conceito, no intuito de possibilitar a formulação de um conjunto de abordagens práticas para superar tais desafios.

4.1.3 Situação Didática Profissional III

Este desafio deve envolver a exploração de conhecimentos relacionados ao conceito de sistemas possíveis e determinados. O objetivo da situação é permitir que os professores apliquem conceitos de sistemas de equações em um contexto do mundo real, apresentando problemas que requerem o uso de diversas representações (linguagem natural, algébrica e geométrica). Cada uma dessas representações complementa a formação do conceito, uma vez que sua compreensão é construída por meio das relações existentes entre elas.

A elaboração do desafio presente nesta situação foi adaptada de um material didático elaborado pela Fundação CECIERJ (2016), e sua aplicação ocorreu durante o terceiro encontro formativo deste estudo (Quadro 15):

Quadro 15 - Problema utilizado na Situação Didática Profissional III (SDP III)

SDP III - Três escolas participaram de um torneio esportivo em que provas de dez modalidades foram disputadas. Aos vencedores de cada prova foram atribuídas medalhas de ouro, de prata e de bronze, respectivamente aos 1º, 2º e 3º lugares. Nesse torneio, a cada tipo de medalha foi atribuída uma quantidade de pontos e a escola vencedora seria aquela que obtivesse o maior número de pontos.

Escolas	Ouro	Prata	Bronze
A	4	2	2
B	5	3	1
C	4	3	3

- a) Considerando a pontuação final da escola A, B e C sendo 46, 57 e 53 respectivamente, descubra quantos ponto valem as medalhas de ouro, prata e bronze.
- b) Apresente o conjunto solução desse problema e explique como ele se apresentaria geometricamente.

Fonte: Adaptado de Fundação CECIERJ, fascículo 9, unidade 30 (2016).

Na dialética de ação espera-se que o professor interaja com o problema, tentando identificar uma estratégia de solução. Isso envolve a tomada de decisões e ação direta para resolver o problema, seja com base em seu conhecimento prévio ou intuitivo. Conforme Almouloud (2007), uma situação de ação apropriada deve capacitar o aluno a avaliar o resultado de suas ações e, se necessário, corrigi-las de forma independente, sem a necessidade de intervenção direta por parte do professor. Na ocasião, almeja-se que o professor em formação aborde o problema de forma ativa, tentando entender as informações fornecidas e como elas se relacionam.

Na dialética de formulação, almeja-se que o professor exponha suas ideias e conjecturas, compartilhando suas abordagens para atribuir valores às medalhas de ouro, prata e bronze e contribuindo para o debate. É esperado também que se utilize linguagem matemática para comunicar suas ideias e organizar seu raciocínio, mas não se preocupando com o rigor das estruturas matemáticas neste momento. O objetivo é encontrar um modelo que leve à solução do problema.

Para descobrir quantos pontos valem as medalhas de ouro, prata e bronze, espera-se que eles criem um sistema de equações com as informações dadas e, posteriormente, o resolvam e encontrem os valores das medalhas. Assim, eles podem hipoteticamente chamar o valor da medalha de ouro de "x", o valor da medalha de prata de "y" e o valor da medalha de bronze de "z", ou qualquer outra

letra arbitrária. As equações podem ser escritas da seguinte forma, considerando as pontuações finais das escolas A, B e C: para a escola A: $4x + 2y + 2z = 46$; para a escola B: $5x + 3y + z = 57$; e para a escola C: $4x + 3y + 3z = 53$.

Após a formulação das equações, é esperado que eles resolvam o sistema de equações para encontrar os valores de x , y e z . Nesse sentido, espera-se que escolham um dos métodos para a resolução; eliminação ou substituição. A solução dessas equações fornece o valor das medalhas de ouro, prata e bronze. Para resolução do item (b) que sugere que o professor apresente o conjunto solução, expressando sem maiores dificuldades que x , y e z são tais que $x=8$, $y=5$ e $z=2$, concluindo que este é um sistema possível e determinado e que pode ser representado geometricamente por meio de três planos que se cruzam em um único ponto.

Na dialética de validação, os professores devem discutir entre si as estratégias de resolução utilizadas, mesmo que estas não tenham sido formalmente justificadas. Espera-se que cada participante apresente suas ideias sobre como os pontos finais das escolas A, B e C podem ser alcançados por meio da distribuição das medalhas. Eles podem utilizar seu conhecimento prévio de matemática, propor fórmulas ou equações, ou simplesmente expressar suas intuições sobre como resolver o problema. O foco nesta fase é gerar uma variedade de ideias e estratégias iniciais para a sua resolução, bem como, uma troca de informações e sugestões entre os professores.

Na fase de institucionalização a pesquisadora deve concluir a questão, reforçar as soluções acordadas pelos professores, efetuar correções (caso necessário), revisar os conceitos utilizados e intermediar uma reflexão sobre os obstáculos enfrentados pelos alunos em problemas como este, bem como fomentar a troca de conceitos pragmáticos entre os profissionais.

Se os professores optarem por não abordar a resolução por meio do escalonamento, a responsabilidade recairá sobre a pesquisadora para conduzir esse processo, elucidando cada etapa e estabelecendo claramente a relação entre as novas equações geradas para o sistema e as demais equações envolvidas. Nesse contexto, é essencial direcionar a explicação para a dimensão geométrica.

Ao enfatizar a parte geométrica, a professora pesquisadora pode propor aos professores em formação uma forma de viabilizar a compreensão dos alunos sobre as transformações que ocorrem durante o escalonamento, proporcionando uma

perspectiva visual e intuitiva do processo. Além disso, ao abordar a interrelação entre as equações, a professora pode ilustrar de forma clara e coerente como a matriz escalonada reflete o mesmo conjunto de soluções do sistema original, mas de forma mais simples, ao facilitar a identificação das variáveis independentes, tornando o processo de encontrar as soluções do sistema mais eficiente.

4.1.4 Situação Didática Profissional IV

Notamos que falta uma abordagem geométrica, especificamente dos modelos de sistemas 3×3 , nos livros didáticos atuais. Além disso, em observação à prática educativa dos sujeitos envolvidos, percebemos o quanto é difícil, além de explicar a abstração existente nos sistemas, definir a classificação de cada um deles.

Dessa maneira, apresentamos esta situação no intuito de facilitar a compreensão da representação gráfica de sistemas, buscando fomentar a reflexão sobre esse aspecto em particular. O propósito central é destacar como a construção dessa compreensão pode servir de suporte ao professor em formação, possibilitando que ele se aprofunde na interpretação das posições relativas dos três planos e suas soluções.

Adotamos aqui uma ideia apresentada no livro de Dante (2013), sobre a interpretação geométrica de sistemas lineares 3×3 . Dentre os propósitos desejados para a realização da SDP IV, elencamos alguns elementos sobre os quais a reflexão pode ser focada: (i) compreensão das propriedades dos sistemas lineares e (ii) compreender a associação entre as representações de um mesmo sistema, através de linguagens algébricas e geométricas. Além disso, sugere-se que os professores reflitam sobre a incorporação de novas ações em sua prática, como a utilização de *softwares* e aplicativos como ferramenta auxiliar. É importante também que o professor saiba identificar as dificuldades de apreensão do tema por parte do aluno e os desafios que o fazem estabelecer a relação entre as diferentes linguagens utilizadas.

Almejando a exploração de um recurso digital que propicie a visualização da situação, disponibilizamos para os participantes da pesquisa um arquivo com uma construção pré-realizada³ pela professora formadora no *software* GeoGebra. A partir da manipulação dos controles deslizantes da construção e da barra de ferramentas

³ [SISTEMAS LINEARES – GeoGebra](#)

do *software*, é possível observar a formulação de diferentes sistemas, bem como suas ternas ordenadas de maneira mais didática e concreta. No Quadro 16 temos a SDP IV a ser aplicada com os sujeitos e explorada no GeoGebra:

Quadro 16 - Problema utilizado na Situação Didática Profissional IV (SDP IV)

SDP IV - Resolva os sistemas lineares;

$$1) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y + 2z = 10 \\ 3x + 2y + 2z = 13 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 8 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 5 \\ 4x + y + 3z = 7 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x + y + z = 4 \\ -2x - 2y - 2z = 9 \\ -5x + 5,5y + 0,5z = -7,5 \end{cases} \quad 5) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 7x - 5y + z = 9 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Com a ajuda dos controles deslizantes fornecidos no problema, encontre todas as possibilidades para as posições relativas dos três planos π_1 , π_2 e π_3 , justificando-as de acordo com seu entendimento responda a tabela;

Sistemas	Proporcionalidade nos coeficientes e no termo independente ou combinação linear	Posição relativa entre os planos	Solução e classificação do sistema
1			
2			
3			
4			
5			

Fonte: Adaptado de Brandl (2018)

Ao propor a situação aos sujeitos, a professora formadora também disponibilizará uma proposta construída no *software* GeoGebra, que possibilita aos professores visualizarem as representações geométricas dos planos projetadas automaticamente. Este item permite classificar os sistemas de forma intuitiva,

permitindo minimizar a abstração contida na forma algébrica, ao passo que proporciona uma visualização geométrica que dá sentido às suas estruturas algébricas.

Durante o desenvolvimento da SDP IV almeja-se que o professor perceba as diferentes estratégias que podem permitir o desenvolvimento do pensamento geométrico, partindo de situações com representações algébricas. O item possibilita a classificação dos sistemas de maneira intuitiva.

Para traçar nossas previsões em relação ao desenvolvimento desta situação, assim como nas demais, empregamos as dialéticas da TSD, abordadas mais detalhadamente nos parágrafos seguintes.

A dialética de ação é o momento de compreender o problema, sendo uma etapa essencial para que os alunos tomem decisões com base nas informações fornecidas (ALMOULOUD, 2007). Portanto, o objetivo é permitir que cada professor selecione os métodos que considera mais apropriados para resolver os sistemas apresentados no problema. Eles têm a liberdade de optar por procedimentos algébricos como substituição, eliminação, ou até mesmo uma abordagem mais intuitiva, utilizando a construção geométrica no intuito de encontrar uma solução adequada para o sistema.

Na dialética de formulação, espera-se que os professores troquem informações sobre o problema entre o grupo, de maneira escrita ou oral, com vistas a chegar à solução do problema. Nesta troca, anseia-se que com o auxílio do GeoGebra os professores percebam que as equações (1), (2) e (3) de cada sistema representam planos no espaço tridimensional. Além disso, percebam que os três planos podem ser apresentados de maneiras distintas, o que define a classificação de cada um deles.

Para determinar os pontos de intersecção nos itens, o professor dispõe da própria visualização apresentada em 3D no *software*, ou pode ativar outras ferramentas e comandos disponibilizados nele. Uma destas opções é o comando *de intersecção de duas superfícies*, disponível na barra de ferramentas. Para realizar esse procedimento, é necessário inicialmente clicar no ícone de intersecção entre duas superfícies e, em seguida, selecionar os planos dois a dois. Ao fazer isso, a reta correspondente deve ser exibida na janela de álgebra. Ao final do processo são geradas três retas, cada uma representando a intersecção entre os planos 1 e 2, 1 e 3, e 2 e 3, respectivamente.

Depois disso, o professor pode optar por ocultar as equações e manter as linhas cruzadas. Assim, para determinar o ponto de intersecção entre os planos, ele pode usar a barra de ferramentas, usando o comando *intersecção de dois objetos*. Após esta etapa, basta que o sujeito repita o processo, selecionando as retas duas a duas e examine o resultado obtido. Se as ternas ordenadas forem idênticas, o sistema é considerado possível e determinado, caso haja apenas um ponto de interseção, indica um sistema impossível ou possível e indeterminado.

Outra possibilidade para o professor é resolver o sistema através dos comandos da caixa de entrada, onde é possível digitar *Intersecção* e escolher a sintaxe cuja opção é *Intersecção (< Objeto >, < Objeto >)*. Com a combinação dessa sintaxe e a nomenclatura de cada equação feita pelo *software*, obtém-se a solução do sistema.

Para realizar a classificação apropriada do sistema, o aluno pode voltar às equações das retas geradas ao clicar na intersecção entre duas superfícies. É fundamental observar que, no caso do sistema impossível, as equações das retas são claramente diferentes. Em contrapartida, no sistema possível e indeterminado, duas das equações das retas serão idênticas.

Na dialética de validação, os professores devem apresentar as estratégias para solucionar o problema. Para Almouloud (2007, p. 40) esta etapa tem como objetivo “a validação das asserções que foram formuladas nos momentos de ação e de formulação, podendo se referir a diferentes níveis de validade: sintática, semântica ou mesmo pragmática (relativa à eficácia do texto)”. Dito isto, desejamos que façam uma demonstração explicando como chegaram à solução através do manuseio no próprio *software*. Espera-se que os professores demonstrem a parte algébrica através da construção geométrica e que validem a classificação de cada sistema, justificando as características percebidas no *software* ao analisar suas construções geométricas.

Após a exposição no GeoGebra, é apropriado que os professores introduzam a resolução algébrica para confrontá-la com a abordagem gráfica. Esse processo complementar visa reforçar a validação das afirmações feitas durante a atividade, proporcionando uma análise mais abrangente.

Na fase de institucionalização da prática pedagógica, é responsabilidade da professora pesquisadora retomar a responsabilidade da situação e formalizar o

resultado obtido pelos professores. Nesse momento, cabe à formadora destacar claramente as intenções subjacentes à situação vivenciada.

A elaboração dessa experiência educacional foi meticulosamente planejada a partir da identificação de um desafio profissional específico enfrentado pelo professor de matemática, que se manifesta na falta de abordagem da parte geométrica dos sistemas 3×3 . Durante esse momento, busca-se direcionar a atenção para a reflexão sobre esse obstáculo. Além disso, a formadora tem a oportunidade de intervir, caso os professores encontrem dificuldades em compreender todos os pormenores de cada sistema. Nesse contexto, a formadora pode recorrer à explicação dos tipos de sistemas, fundamentada no trabalho de Dante (2013), para oferecer uma compreensão mais abrangente.

5. EXPERIMENTAÇÃO

Neste capítulo abordamos o contexto de pesquisa, incluindo a localização geográfica, o período temporal em que o estudo foi conduzido e a metodologia empregada. Também descrevemos o grupo de participantes que compôs o público-alvo da pesquisa e destacamos alguns dos instrumentos utilizados para coletar os dados. Além disso, encontra-se aqui uma descrição detalhada da realização das quatro Situações Didáticas Profissionais com os participantes do estudo.

Segundo Almouloud (2007), a fase de experimentação é o momento em que todo o sistema elaborado é posto em prática e dados essenciais são coletados para análise na próxima etapa. Isso pode incluir observações realizadas durante as sessões de ensino e o trabalho dos alunos em sala de aula ou fora dela. Além disso, é possível complementar esses dados com informações obtidas por meio de métodos externos, como questionários e entrevistas.

5.1 Lócus e instrumentos de investigação

Este estudo foi desenvolvido no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), localizado na cidade de Juazeiro do Norte. O referido município se distancia cerca de quinhentos e oito quilômetros (508 km) da capital, Fortaleza.

Para realizar a investigação, inicialmente foi organizado um momento introdutório. Durante esse encontro, a proposta de pesquisa foi apresentada aos participantes. Em um segundo momento, houve a leitura e assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE).

Em uma etapa subsequente foi conduzida a coleta de informações sobre o perfil dos participantes por meio de um questionário (Apêndice A) e uma pesquisa em formato de Grupo Focal (Apêndice B). O objetivo foi explorar as concepções dos professores em relação ao conceito de sistema linear, bem como os métodos de ensino e eventuais desafios profissionais no ensino desse tópico. Durante a coleta de dados foram utilizados registros fotográficos, escritos e gravação de áudio como ferramentas para catalogar as informações obtidas.

Além disso, foram organizados quatro encontros formativos como parte da pesquisa. O objetivo desses encontros foi proporcionar uma experiência prática com

Situações Didáticas Profissionais, aplicadas sob a perspectiva da Teoria das Situações Didáticas com foco em sistemas de equações lineares enquanto tópico matemático central. O Quadro 17 apresenta o cronograma detalhado da fase de experimentação do estudo:

Quadro 17 - Descrição do cronograma de realização do projeto

ENCONTRO	DATA	DURAÇÃO
Apresentação da proposta e convite à turma para participação na pesquisa	12/05/2023	30 min
Leitura e assinatura do TCLE / Aplicação do Questionário (1) de levantamento de perfil demográfico / pesquisa de Grupo Focal para identificar as concepções, as formas de ensino e possíveis obstáculos profissionais no ensino do conteúdo	15/05/2023	180 min
Apresentação da Teoria da Situação Didática e das ferramentas do <i>software</i> GeoGebra. Aplicação da SDP I	10/06/2023 (Manhã)	240 min
Aplicação da SDP II	10/06/2023 (Tarde)	60 min
Aplicação da SDP III	17/06/2023 (Manhã)	60 min
Aplicação da SDP IV	17/06/2023 (Tarde)	60 min

Fonte: Elaboração da autora (2023)

Todos os encontros foram realizados nas instalações do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) - Campus Juazeiro do Norte. As datas dos encontros foram agendadas de acordo com a disponibilidade dos participantes da pesquisa.

5.2 Procedimentos realizados e sujeitos da aplicação

O público-alvo deste estudo foi composto por cinco professores de Matemática que atuam na rede pública de ensino na cidade de Juazeiro do Norte. É importante destacar que esses professores também são estudantes do programa de Pós-graduação *Lato Sensu* em Ensino de Matemática com ênfase na Educação Básica, oferecido pelo Instituto Federal da referida cidade. O critério para escolha desses sujeitos deu-se devido ao foco específico do programa, que tem ênfase nesta etapa escolar.

Nos encontros destinados à aplicação das Situações Didáticas Profissionais (SDPs), a pesquisadora iniciou apresentando o contrato didático. Esse contrato continha cláusulas que seriam discutidas e acordadas entre os participantes em formação e o professor formador. No Quadro 18 apresentamos as regras do contrato didático, estruturadas no intuito de que a formação consiga fluir e contribua para a atuação dos participantes e coleta de dados do professor pesquisador:

Quadro 18 - Cláusulas do contrato didático efetuado entre a pesquisadora e os professores participantes

A pesquisadora apresentará as situações problemas em formato impresso para os professores em formação. Cada participante deverá realizar a leitura individual, fazer suas anotações e buscar estratégias para a resolução do problema;
De posse de algum resultado, os professores devem comentar entre si as estratégias utilizadas para resolver a situação proposta;
A pesquisadora pode realizar indagações ou comentários durante as discussões. Os professores (formandos) devem estar atentos e responder aos questionamentos;
Ao finalizar cada situação, um dos professores deve socializar suas estratégias para resolver o problema com os demais participantes, utilizando o quadro;
Todas as anotações devem ser feitas no material impresso entregue pela pesquisadora, sendo estes recolhidos ao final de cada aplicação;
Ao final de cada proposta, a pesquisadora aplicará o questionário final. Este é um momento de reflexão onde os professores deverão expor quais as principais observações no desenvolvimento da proposta.

Fonte: Elaboração da autora (2023).

Após a leitura do contrato didático, deu-se início a primeira parte da formação, que foi a apresentação da Teoria das Situações Didáticas como teoria de ensino, a introdução às ferramentas do *software* GeoGebra como recurso auxiliar à prática e como alternativa para diversificar as estratégias de ensino. Na sequência, iniciou-se a aplicação das SDPs, descritas no tópico seguinte.

5.2.1 Experimentação da SDP I

A primeira Situação Didática Profissional (SDP I) tinha como principal objetivo o desenvolvimento de *conhecimentos pragmáticos* e reflexões sobre o ensino de sistemas de equações lineares. A intenção era contribuir para a prática profissional dos participantes, encorajando a adoção de um ensino que reconhecesse a importância de abordar a resolução de sistemas de maneira mais minuciosa e especializada. Isso permitiria aos alunos extrair mais informações relevantes do

problema em questão, enriquecendo assim sua compreensão sobre o objeto de estudo.

A SDP I aconteceu durante o primeiro encontro de formação, contando com a presença de todos os docentes (P1, P2, P3, P4 e P5). Nessa ocasião, a pesquisadora distribuiu cópias impressas do problema aos participantes, marcando o início do momento de formação. Cada um deles começou a ler o problema de forma individual, analisando os dados fornecidos e tentando elaborar estratégias para resolvê-lo.

Após a leitura do problema, na fase de ação, os professores foram incentivados pela pesquisadora e compartilharam suas ideias, expressando os conhecimentos prévios mencionados anteriormente durante a análise *a priori*. Nesse ponto, eles debateram a relevância de explorar diferentes abordagens para a resolução de sistemas, uma vez que nem todos os sistemas são quadrados. Esse momento marcou o início das etapas de formulação e validação, como evidenciado nos diálogos a seguir:

P3: É um sistema indeterminado, com várias soluções, né?

P4: Sim! Mas veja que o problema se trata de uma situação envolvendo a quantidade de notas, logo, ele só deve assumir valores inteiros e positivos.

P3: Ah! Sim, eu sei. mas não falei em valores negativos, o sistema é indeterminado, então ele pode ter várias soluções [...]

P2: É verdade! Mas você tem que levar em conta as informações que o problema traz. A primeira equação ficaria $50x + 20y + 10z = 500$ e a segunda $x + y + z = 15$, esse 15 é a quantidades de notas.

P3: Ah! Eu não tinha me ligado nisso. Então agora o sistema passa a ser determinado né?

P4: Ao atribuir um valor para uma variável, você efetivamente fixa um valor específico para essa variável, mas o sistema ainda permanecerá indeterminado, pois há mais variáveis do que equações. Isso significa que, mesmo que você atribua um valor a uma variável, ainda existirão outras variáveis que podem assumir diferentes valores, mantendo o sistema consistente.

Após o debate, percebe-se que o professor P3 apresenta algumas dúvidas em relação às características e propriedades referentes aos sistemas. Todos concluíram o problema de maneira individual. Nas Figuras 4 e 5 estão as resoluções dos sujeitos P3 e P4:

Figura 4 - Resolução de P3 da SDP I

$$\begin{cases} 5x + 2y + 3z = 50 \\ x + y + z = 15 \end{cases} \quad (:10)$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 5x + 2y + 3z = 50 \\ x + y + z = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 50 \\ x + y + z = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 50 \\ x + y + z = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 50 \\ x + y + z = 15 \end{cases}$$

$$4x + y = 35$$

$$y = 35 - 4x$$

$$x + 35 - 4x + 4x - 20 = 15$$

$$x = 15 - 35 + 20$$

$$x = 0$$

$$S = \{0, 35, -20\}$$

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Na resolução do problema, P3 adotou o método da substituição para expressar uma única incógnita em função da outra, deixando tanto Z quanto Y em função de X. No entanto, ao substituir essas expressões na segunda equação do problema, encontrou $X = 0$ como solução.

Entretanto, é crucial destacar que o professor apresentou dificuldades em compreender as características específicas do problema, negligenciando o fato de que a quantidade de notas deve ser positiva. Isso sugere uma falha na identificação das condições apresentadas pelo problema, bem como uma falta de atenção ao diálogo realizado entre os demais professores antes da resolução do problema. Portanto, embora a montagem da resolução possa ter sido feita de maneira correta, a resposta final não está correta devido à falta de consideração das restrições impostas pelo problema.

A solução representada na imagem a seguir demonstra uma resolução precisa e correta do problema.

Figura 5 - Resolução de P4 da SDP I

$$\begin{cases} x+y+z=15 \text{ (I)} \\ 50x+20y+10z=500 \div 10 \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=15 \\ 5x+2y+z=50 \end{cases} \end{cases}$$

Simplificando a 2ª Equação temos:

$$\begin{cases} x+y+z=15 \\ 5x+2y+z=50 \text{ (-I)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=15 \\ -5x-2y-z=-50 \end{cases} \quad (+)$$

Pelo método da adição obtemos:

$$-4x-y=-35$$

$$y=35-4x \text{ (II)}$$

Temos da equação (I) que:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 15 \\ x+35-4x+z &= 15 \\ 3 &= 15-35+3x \\ 3 &= -20+3x \end{aligned}$$

* Partindo da restrição problema onde as incógnitas devem serem inteiras e positivas por se tratarem de quantidades de notas, logo para que z assumam valores inteiros e positivos x tem que ser maior ou igual a 7 ($x \geq 7$). Assim Temos:

Se $x=7$

Temos

$$\begin{aligned} z &= -20+21 \\ z &= 1 \\ y &= 35-4 \cdot 7 \\ y &= 7 \end{aligned}$$

$$S = \{7, 7, 1\}$$

* Considerando que $y=35-4x$, temos que o valor de x para que y seja inteiro positivo, deve ser menor que 9.

Assim da condição inicial se x tem que ser maior ou igual a 7 e menor que 9, logo x será 7 e 8. Concluímos que:

$$S = \{8, 3, 4\} \quad \text{Para } x=8 \quad \begin{aligned} y &= 3 \\ z &= 4 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Percebe-se que P4 adota a mesma abordagem de resolução que P3, utilizando o método da substituição. No entanto, em contraste com o professor P3, P4 demonstra um cuidado maior ao justificar cada escolha por meio de uma escrita matemática clara e explícita.

Embora ambos os professores tenham seguido a mesma linha de pensamento ao utilizar o método da substituição para resolver o problema, P4 se destaca pela meticulosidade em explicar cada passo do raciocínio matemático empregado. Essa abordagem, que evidencia a justificativa por trás de cada decisão tomada durante a resolução, contribui para uma compreensão mais profunda e transparente do processo de solução.

Na sequência, os professores iniciam o diálogo que caracteriza a validação da resolução do problema.

P5: Vocês também fizeram por eliminação?

P2: Eu fiz por substituição.

P3: Deu (0, 35, -20)?

P4: Cheguei em duas possíveis soluções, $S = (7, 7, 1)$ e $S = (8, 3, 4)$.

P2: Show! Eu também. Então a partir desse resultado estão corretos os itens (a) e (d), né?

P4: Isso.

P3: Como é que vocês fizeram pra chegar nessas duas soluções?

P4: Primeiro eu coloquei y e z em função de uma única incógnita, que no caso é o x, depois eu atribuí valores pra x e determinei y e z.

P1: Quais os critérios vocês foram atribuindo para os valores pra x?

P4: Eu fui observando as informações do problema, por exemplo: vendo que o $z = -20 + 3x$, eu de cara já observo que x não pode ser zero, porque z iria assumir um valor negativo. [...] e por trata-se de quantidades de cédulas isso não seria possível [...] eu fui usando a lógica, baseada na informação que as incógnitas devem assumir valores inteiros e positivos.

Após a discussão oral entre os sujeitos, P4 explica para os demais colegas os passos que seguiu para chegar à solução do problema. Na sequência, começaram a validar como verdadeiro ou falso os itens propostos. Notou-se que P4 foi o único a justificar as respostas de cada item. A resposta do participante P4 aos itens (b, c e d) é apresentada na figura 6 abaixo:

Figura 6 - Resolução de P4 dos itens (b, c e d) SDP I

Item b De acordo com o resultado do item a tem-se que x assume os valores de 7 e 8. logo $x=6$ temos que $y-z \neq 9$

e) De acordo com o item a há apenas duas soluções que satisfazem a situação problema que são as ternas:
 $S_1 = \{7, 4, 1\}$ e $S_2 = \{8, 3, 4\}$

Item d
 Sabendo que 4 é uma solução de z e que a soma de $x+y+z=15$ tem que $x+y=11$
 * Porém de acordo com a situação problema x só pode assumir os valores de 7 e 8
 sendo $x=7$ temos: $7+y=11$
 $y=4$

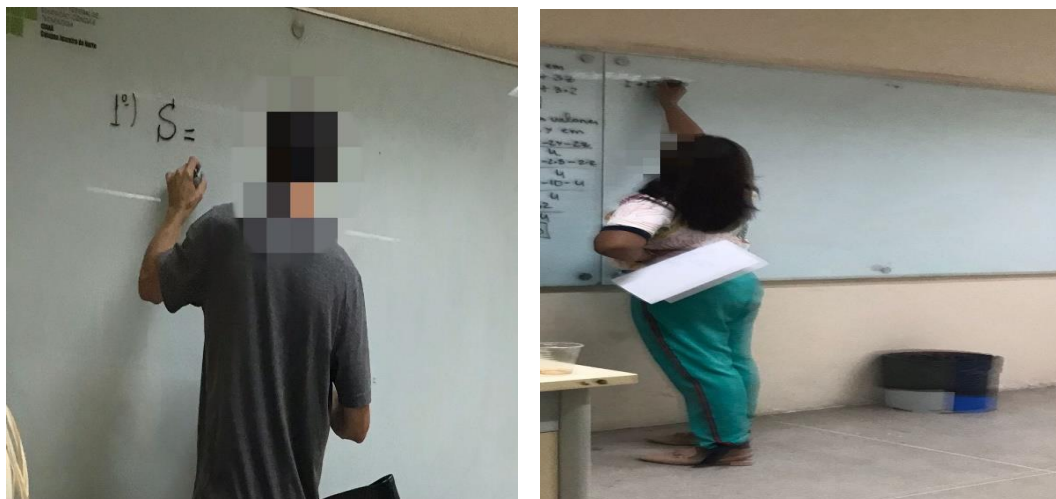
Se $x=8$ temos $8+y=11$
 $y=3$

Na afirmativa do item d que $x-y=5$ temos que x será 8 e logo a assertiva é verdadeira.

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Na sequência, os professores P1 e P3 apresentaram de maneira formal sua construção para os demais participantes (Figura 7):

Figura 7- P1 e P3 apresentando a resolução e validação da SDP I



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Durante a fase de institucionalização, a pesquisadora destacou as estratégias utilizadas e iniciou uma revisão, analisando a solução inicial do sistema e os métodos empregados pelos formandos. Em seguida, ocorreu um momento de diálogo e reflexão acerca das práticas pedagógicas relacionadas ao problema. Nesse contexto, a pesquisadora formulou algumas questões desafiadoras, estimulando os professores a ponderar suas concepções pragmáticas. Inicialmente, a pesquisadora indagou aos professores sobre quais equívocos os alunos poderiam ter cometido durante a solução desse problema:

P2: Os alunos têm dificuldade em interpretar e formular as equações nesse tipo de problema.

P1: É verdade! Eles não sabem montar as equações.

P4: É! Além da interpretação textual, o trabalho com sistemas indeterminados geralmente faz os alunos se confundirem, porque as atividades que os livros trazem favorecem a memorização e mecanização.

P5: Erros na resolução das equações também. [...] falo em erros simples de cálculo, como adições ou subtrações incorretas, multiplicação de matrizes inadequada ou esquecimento de negativos.

P3: Os alunos já trazem essas dificuldades desde o ensino fundamental, o que acaba só agravando quando chega aqui.

Diante dos relatos apresentados, a pesquisadora indagou como eles agiriam diante das dificuldades mencionadas. P2 salienta a importância de começar com ênfase na leitura cuidadosa do problema, orientando os alunos a relerem o enunciado e a identificar as informações-chave. Isso é fundamental para garantir uma compreensão profunda do contexto e dos dados fornecidos.

Por outro lado, P4 destaca sua abordagem ao modelar problemas do cotidiano dos alunos. Além disso, ele ressalta a importância de ajudar os alunos a traduzir as informações do problema em equações matemáticas precisas, incluindo o uso adequado de variáveis e uma organização clara das equações. P5 mencionou que, antes de avançar para o conteúdo principal, faz uma revisão para ter noção de quais conceitos os alunos já entendem. Isso é feito para garantir que os alunos tenham uma base sólida e as habilidades necessárias para resolver os exercícios com sucesso. P1 enfatiza que sua abordagem envolve fornecer aos alunos uma série de problemas progredindo em nível de complexidade: *“À medida que avançamos, eu forneço orientação e dicas para que eles possam aplicar os conceitos de forma eficaz”*.

Pelas observações das falas P1 e P4, nota-se que estes professores desempenham um papel central na instrução, apresentando conceitos, resolvendo exercícios e orientando os alunos a seguir um caminho pré-determinado. Isto se opõe à abordagem da Teoria das Situações Didáticas (TSD), que sugere que os alunos iniciem o processo de aprendizagem de forma mais autônoma e independente, com o professor sendo mediador inicialmente e atuando de maneira mais ativa na fase final, durante a institucionalização.

Nesse momento, a pesquisadora inicia uma nova abordagem, refletindo sobre as discussões em torno da Teoria das Situações Didáticas, enfatizando a relevância de posicionar o aluno como protagonista no processo de aprendizagem. A pesquisadora encoraja os professores a estimular os seus alunos, instigando-os a assumir um papel mais ativo em sua aprendizagem.

Nesse sentido, essa abordagem permitiu que os professores percebessem situações que podem, ocasionalmente, encontrar em suas carreiras e entendessem as perspectivas dos alunos ao enfrentar problemas. Eles também demonstraram preocupação em desenvolver estratégias que transformassem seu conhecimento em saber ensinado, representando uma transposição didática. Além disso, a reflexão sobre as dificuldades em lidar com problemas envolvendo sistemas indeterminados e as práticas pedagógicas de cada participante promoveu a troca de experiências e conceitos pragmáticos (organizadores da ação).

5.2.2 Experimentação da SDP II

O objetivo da segunda Situação Didática Profissional (SDP II) foi estimular uma análise mais aprofundada sobre a abordagem de sistemas indeterminados, visando enriquecer a prática profissional dos participantes. Isso envolveu promover uma postura de ensino que facilitasse a integração da modelagem de situações cotidianas dos alunos, com ênfase na compreensão da resolução de sistemas indeterminados. Além disso, a SDP II teve como propósito fomentar a reflexão sobre a maneira como esses sistemas são abordados, permitindo uma troca de conhecimentos pragmáticos entre os professores envolvidos.

A SDP II ocorreu no segundo encontro de formação. Durante essa sessão, a pesquisadora entregou uma versão impressa do problema aos participantes, dando início ao momento de formação.

Na fase de ação, seguindo de acordo com a TSD, os professores começaram lendo o problema individualmente e se dedicaram à resolução das partes (a, b e c) propostas. Após resolverem a parte (a) do problema, os professores começaram a interagir. Eles compartilharam e discutiram em conjunto os resultados alcançados. Esse processo caracterizou as fases de formulação e validação, como mostra a transcrição das discussões:

P3: Pronto, eu fiz por substituição e adição [...] agora só resolver os demais itens.

P2: Sim!

P3: Esse sistema é igual ao outro, tem duas soluções, né?

P4: Fiz por substituição também, mas eu concluí que só tem uma solução para esse problema.

P3: Pois a minha deu duas soluções (0, 6, 8) e (15, 4, 2).

P5: Eu consegui chegar na solução (15, 4, 2).

P2: A minha deu solução única também.

P3: São duas soluções?

P2: Uma só!

P3: Mas (0, 6 e 8) também satisfaz as duas equações.

P4: Sim! mas a pergunta do problema deixa bem claro que o conjunto solução é dado por números inteiros e positivos, e o zero não é um inteiro positivo.

P3: Ah! Entendi.

Observamos que, a partir da conclusão do item (a), os professores passaram a seguir uma sequência de etapas, incluindo análise individual dos dados do problema (etapa de ação), troca de ideias e discussões em grupo (etapa de formulação), e finalmente, a apresentação formal dos resultados de forma conjunta. Nas Figuras 8, 9, 10 e 11 a seguir temos um registro escrito da resolução da SDP II realizada por cada participante:

Figura 9 - Resolução da SDP II do sujeito P2

$$\begin{cases} 2A + 3B + 4C = 50 \\ 2A + 6B + 3C = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A + 3B + 4C = 50 \\ 3B - C = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A + 3B + 4C = 50 \\ C = 3B - 10 \\ A, B, C > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3B > 10 \Rightarrow B > \frac{10}{3} \Rightarrow B \geq 4 \quad \text{e} \quad C \geq 2$$

$$2A = 50 - 3B - 4C \Rightarrow A \geq 15$$

$$2A + 3B + 12B - 40 = 50$$

$$2A + 15B = 90$$

$$A = \frac{90 - 15B}{2}$$

O nº de unidades de cada setor é indefinido, mas deve atender $\begin{cases} C = 3B - 10 \\ A = \frac{90 - 15B}{2} \end{cases}$ com A, C sendo valores dependentes de B com $4 \leq B \leq 6$. Analisando as soluções possíveis chegamos no conj. unitário $S = \{(15, 4, 2)\}$ de item b)

$$S = \{(15, 4, 2)\}$$

a) Solução única

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Figura 10 - Resolução da SDP II do sujeito P3

$$\begin{array}{r} 2A + 3B + 4C = 50 \quad (-1) \\ 2A + 6B + 3C = 60 \\ \hline -3A - 3B - 4C = -50 \end{array}$$

$$3B - C = 10$$

$$C = 3B - 10$$

$$3B + 4 \cdot (3B - 10) = 50$$

$$3B + 12B - 40 = 50$$

$$15B = 90$$

$$B = 6$$

$$C = 18 - 10$$

$$C = 8$$

$$2A + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 = 50$$

$$2A = 50 - 50$$

$$A = 0$$

a) $A = 0$
 $B = 6$
 $C = 8$

b) $(0, 6, 8)$
 c) $(0, 6, 8)$; $(15, 4, 2)$

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Figura 11 - Resolução da SDP II do sujeito P5

$$2. a) \begin{cases} 2A + 3B + 4C = 50 & \textcircled{\text{I}} \\ 2A + 6B + 3C = 60 & \textcircled{\text{II}} \end{cases}$$

De $\textcircled{\text{I}}$, temos:

$$2A = 50 - 3B - 4C \rightarrow A = \frac{50 - 3B - 4C}{2}$$

Subst. em $\textcircled{\text{II}}$, temos

$$50 - 3B - 4C + 6B + 3C = 60 \Rightarrow C = 3B - 10$$

Como $A, B, C > 0$, temos que $B > 3$

P/B = 4 $\rightarrow C = 2$; $B = 4$

$$A = \frac{50 - 3 \cdot 4 - 4 \cdot 2}{2} = \frac{50 - 12 - 8}{2} = \frac{50 - 20}{2} = \frac{30}{2} = \textcircled{15}$$

b) solução: $A = 15$; $B = 4$; $C = 2$

ou

$A = 0$; $B = 6$; $C = 8$

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Diante dos dados descritos durante a fase de formulação e validação dos itens (a, b e c), após as resoluções no formato escrito, ficou evidente que todos os professores resolveram o problema de acordo com uma das abordagens previstas nas análises *a priori*, com alguns raciocínios diferentes. Observa-se que a maioria dos participantes da pesquisa não identificou as características apresentadas no problema. Os professores P3 e P5, ao discutirem entre si, incluíram a última solução apresentada ao problema, mas não justificaram por que essa solução também estava em conformidade com as características do problema.

Na resolução desta questão, a montagem realizada pelos participantes P1, P3 e P5 ocorreu de maneira correta, contudo, a resposta final não está adequada. O equívoco dos professores parece residir na conclusão do problema, uma vez que eles não consideraram que o conjunto solução deveria ser composto exclusivamente por números inteiros positivos.

Além disso, P1 demonstrou algumas inconsistências em relação ao resultado esperado. Abaixo, está a reprodução dos comentários feitos por P1, P2, P3 e P4 ao apresentarem suas soluções para a letra (a) do problema:

P1: Esse problema é parecido com o outro, né? minha observação se concentrou na natureza do sistema, que é indeterminado, porque fica evidente que o número de incógnitas a serem determinadas é maior do que o número de equações disponíveis no sistema, né? Como a questão quer saber a quantidades de unidades de mercadorias, então também não pode existir várias possibilidades.

P2: Primeira coisa que eu fiz foi montar o sistema, a partir das informações fornecidas pelo problema. Visto que é um sistema 3x2 requer que o professor tenha cautela para perceber as informações do problema, né? Eu fiz pelo método da eliminação, e cheguei a uma solução única $S = \{(15, 4 \text{ e } 2)\}$.

P1: Ah! Mas a variável livre não permite ter várias soluções, [...] quando depende da variável livre, né não?

P3: Eu fiz assim, montei as equações e utilizei o método da adição pra resolver. Aí eu isolei uma das incógnitas e depois descobri as outras.

P4: Meu resultado deu igual o de P2, só que eu fiz pelo método da substituição.

A partir da transcrição foi possível identificar os procedimentos e o passo a passo utilizado pelos professores para resolver o problema. Contrário ao que foi perspectivado na análise *a priori*, os professores em formação apresentaram algumas dificuldades para resolver o item.

Após a socialização dos resultados encontrados pelos professores, estes trocaram ideias e informações sobre os métodos utilizados para resolver e descrever a resolução do item em questão. Conforme antecipado, a interação entre os sujeitos foi marcante durante o desenvolvimento dos itens (a, b e c). Ao longo desse processo os participantes enfrentaram desafios para expressar de maneira formal e matemática o conjunto solução do problema proposto.

Diante das dificuldades compartilhadas pelos participantes na tentativa de formalizar suas abordagens, e considerando que dois dos formandos alcançaram o resultado desejado, os sujeitos P2 e P4 optaram por apresentar suas resoluções de maneira mais formal. As Figuras 12 e 13, que representam as soluções desses dois participantes, foram compartilhadas entre eles para enriquecer a compreensão dos demais professores envolvidos no processo:

Figura 12 - Resolução dos itens (b e c) da SDP II do sujeito P2

O nº de unidades exatos é indefinido, mas deve atender

$$\begin{cases} C = 3B - 10 \\ A = \frac{90 - 15B}{2} \end{cases}$$

com A, B sendo valores dependentes de B com $4 \leq B \leq 6$. Analisando as soluções possíveis chegamos no conj. unitário ~~$S = \{(15, 4, 2)\}$~~ de item b)

$$S = \{(15, 4, 2)\}$$

2 Soluções únicas

Fonte: Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Figura 13 - Resolução dos itens (b e c) da SDP II do sujeito P4

a) Foi obtida a seguinte solução:

$$\left(\frac{90 - 15b}{2}, b, 3b - 10 \right)$$

é a solução paramétrica que descreve a relação entre variáveis x, y e z em função de um parâmetro b .

b) $a > 0$: $\frac{90 - 15b}{2} > 0$; logo, $b < 6$.

$c > 0$: $3b - 10 > 0$; logo $b > \frac{10}{3}$

Então $\frac{10}{3} < b < 6$, ou seja, $b = 4$ ou $b = 5$

Se $b = 4$ tem-se $c = 2$ e $a = 15$ (que é possível pois todos são inteiros).

Se $b = 5$ tem-se $c = 5$ e $a = 7,5$ (que é impossível, pois a não é inteiro).

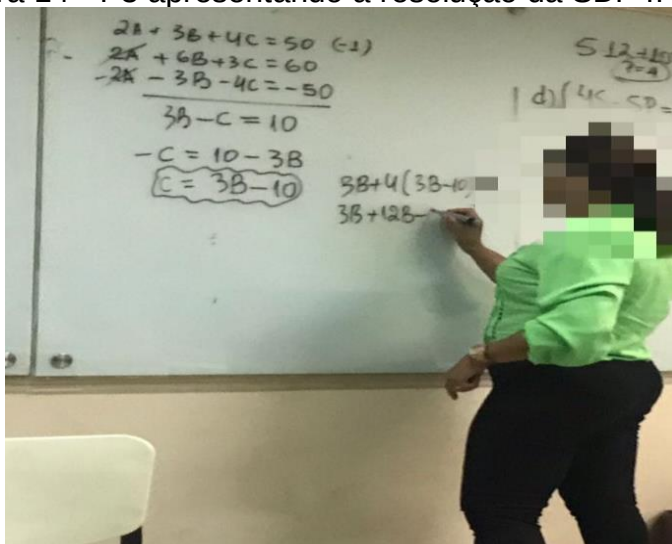
Logo, a única solução possível é 15 unidades de A, 4 unidades de B e 2 unidades de C.

Fonte: Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Na resolução do problema, tanto P2 quanto P4 buscam justificar a notação matemática utilizada. Além disso, é evidente que ambos demonstram compreensão e interpretação da linguagem natural no problema matemático propostos.

Após uma discussão verbal, iniciou-se o momento de validação, no qual os professores P3 e P5 assumiram a responsabilidade formal pela validação dos itens. Nas Figuras 14 e 15 temos registros referentes a esse importante processo, conduzido pelos mencionados sujeitos:

Figura 14 - P3 apresentando a resolução da SDP II



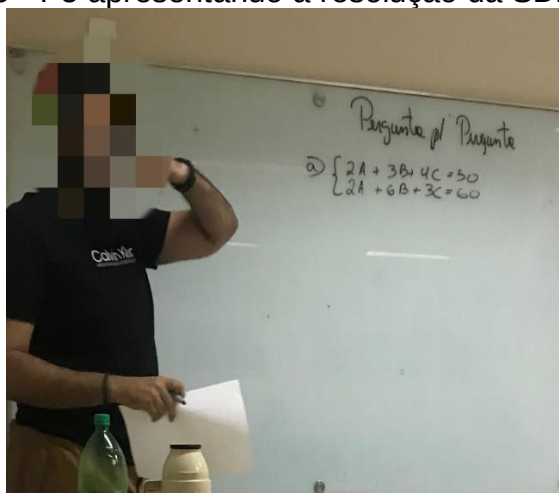
Professor P3 is standing in front of a whiteboard, writing mathematical equations. The equations on the board are:

$$\begin{aligned} 2A + 3B + 4C &= 50 \quad (1) \\ 2A + 6B + 3C &= 60 \\ -2A - 3B - 4C &= -50 \\ \hline 3B - C &= 10 \\ -C &= 10 - 3B \\ C &= 3B - 10 \end{aligned}$$

On the right side of the board, there is a small calculation: $5 \cdot 12 = 60$ and $7 \cdot 4 = 28$. Below it, it says $d) 4C - 50 =$. The professor is pointing at the board with a marker.

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Figura 15 - P5 apresentando a resolução da SDP II



Professor P5 is standing in front of a whiteboard, writing mathematical equations. The equations on the board are:

$$\begin{aligned} 2A + 3B + 4C &= 50 \\ 2A + 6B + 3C &= 60 \end{aligned}$$

At the top of the board, it says "Pergunta p/ Pergunta". The professor is pointing at the board with a marker.

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Diante das soluções algébricas apresentadas pelos participantes, a professora pesquisadora fez alguns comentários, no intuito de que percebam a

importância de parametrizar o conjunto solução de um sistema linear. Abaixo segue trecho desse momento:

Pesquisadora: Geralmente nós enquanto professores não ensinamos para os alunos a parametrizar o conjunto solução de um sistema linear. Nós reduzimos a resolução algébrica e paramos no conjunto solução sem determinar as possíveis soluções de um sistema indeterminado. Então, a partir do momento que eu mostro ao aluno o quanto essa parametrização é importante em problemas como esse, o aluno já começa a ver sentido naquilo. Percebam que essa abordagem ajuda o aluno a compreender o conjunto solução de um sistema indeterminado, quando aplicado em situações do dia a dia que requer uma interpretação textual.

Posteriormente, deu-se início a um diálogo acerca das metodologias educacionais associadas ao problema em questão. Nesse contexto, a pesquisadora apresentou uma série de questionamentos, provocando os professores a examinar suas abordagens práticas. Inicialmente, a pesquisadora buscou compreender quais equívocos poderiam surgir por parte dos alunos durante o processo de resolução do problema. P2 destaca que, assim como ocorre conosco enquanto professores, os alunos também desconsideram as restrições do problema, pois está habituado a “só pensar no resultado final”. P5 complementa que “os alunos muitas vezes ignoram a simplificação dos sistemas, o que acaba levando-os a cálculos mais complexos e desnecessários”.

O professor P4 enfatizou a relevância de priorizar o uso de problemas práticos no processo de ensino, que permitam ao aluno estabelecer conexões entre as condições que tornam um problema autêntico, como experimentado na SDP II. Nesse contexto, P3 expressou sua visão ao mencionar que a abordagem desse conteúdo ocorre de forma rápida e superficial, devido à extensa carga do currículo anual. Isso, por conseguinte, resulta na dificuldade que os alunos apresentam na assimilação plena do conteúdo.

Com base nas contribuições dos professores, a pesquisadora ressaltou os desafios tanto no processo de ensino quanto na assimilação de conteúdos algébricos. Ela enfatizou a importância crucial da compreensão de sistemas de equações para os alunos. Nesse contexto, a pesquisadora encerrou sua intervenção indagando aos participantes sobre como ocorre a abordagem adotada no ensino desse tópico.

P1: É um ensino mecânico!

P3: É verdade! Geralmente a gente se reduz a discussão algébrica.

P5: Se a gente explorasse as diferentes representações de um mesmo sistema, acredito que o aluno compreenderia melhor.

P2: A verdade é que professor se reduzem a querer ensinar para os alunos os métodos de resolução, e nós sabemos que são apenas algoritmos. Já a interpretação dos resultados obtidos exige articulação entre os diversos conceitos. Por exemplo: a solução de um sistema pode ser relacionada a pontos, retas e planos. [...] e infelizmente essa interpretação o professor tem falhado.

Destarte, a pesquisadora ressaltou a importância de que os educadores optem por desafios que incentivem os estudantes a desenvolverem seu aprendizado de maneira autônoma. Ela complementa:

Devemos fazer uma autorreflexão do nosso trabalho, tentando se colocar em sua posição. Será que eu enquanto aluno, conseguiria assimilar o problema com a ideia de um sistema? Será que o aluno irá sentir interesse em solucionar problemas abordados de maneira exclusivamente algébrica? Será que quando eu enquanto professor entrego uma lista de exercícios para o meu aluno resolver, onde a única função dele será classificar ou responder algebricamente esse sistema, ajuda na compreensão e na ligação dos conceitos relacionados ao objeto matemático?

P2 então, arrematou as concepções apresentadas, mencionando que para que os alunos aprendam gradativamente o conteúdo desde o ensino fundamental, o professor deve trabalhar os sistemas 2×2 usando a noção geométrica e a proporcionalidade entre os coeficientes. P2 também destaca a importância de revisar os itens correspondentes à temática de equações lineares, bem como a construção do conceito de maneira gradativa. Ele conclui que ao agir dessa forma, pode ajudar os alunos a compreender melhor. P5 expande a discussão afirmando que a transição entre as representações algébrica e gráfica pode ser abordada de maneira eficaz, tanto no ensino fundamental quanto no médio. Ele destaca que essa estratégia tem o potencial de beneficiar a compreensão e a interpretação dos resultados de forma significativa, bem como manter os alunos instigados a resolver os problemas, uma vez que, a abordagem com as diversas representações de um mesmo objeto matemático ajuda o aluno a ter uma melhor compressão do conceito.

A partir dos comentários de P4 e P5, nota-se uma abordagem de "devolução", em que o professor buscou desenvolver estratégias que incentivassem os alunos a aceitarem o desafio apresentado, permitindo construir passo a passo os procedimentos de resolução por conta própria. Portanto, as estratégias empregadas nas Situações Didáticas I e II possibilitaram aos professores visualizarem a abordagem de sistemas indeterminados por meio da modelagem de

problemas. Essas situações permitiram também entender os possíveis caminhos que podem ser tomados pelos alunos, além de evidenciar, por meio dos métodos e das observações dos colegas de profissão, a troca de conceitos organizadores da ação.

5.2.3 Experimentação da SDP III

A SDP III foi conduzida durante o terceiro encontro formativo, seguindo a mesma dinâmica dos encontros anteriores. A pesquisadora iniciou o momento de formação distribuindo a situação-problema em formato impresso. Em seguida, os professores deram início à leitura e ao delineamento de estratégias de resolução, marcando assim o início da fase de ação.

A situação traz a modelagem de um problema usual, escrito em linguagem natural, referente ao uso de um sistema 3×3 possível e determinado. De posse do problema, os professores iniciaram a leitura do enunciado, buscando estratégias que melhor atendessem à demanda solicitada na questão. No item (a) era necessário que os professores resolvessem o sistema para que chegassem à pontuação das escolas A, B e C. Antes da resolução dos itens, ocorreu um momento de diálogo entre os professores a respeito da melhor estratégia para resolver o problema, constituindo-se a fase de formulação:

P1: Esse problema é diferente dos outros né? aqui tem três equações.

P2: Sim! É um sistema 3X3.

P3: Da pra fazer por substituição também?

P4: Sim! Mas pelo escalonamento é bem mais rápido

P3: Eu acho complicado esse método [...] na verdade eu não lembro como resolve pelo escalonamento. Vou esperar alguém resolver por ele pra ver se eu lembro.

P4: Mas por substituição dar certo também [...] tenta.

P1: Vou fazer por Cramer, acho mais fácil.

P4. Ok!

Na sequência, os professores voltaram para mais uma leitura do problema, buscando cada um resolver da melhor maneira possível. Passado o momento de resolução ao item (a), voltaram ao diálogo:

P4: Pronto! Eu cheguei a um sistema possível e determinado, e vocês?

P5: Eu também! fiz por substituição e deu certo.

P2: Deu quanto o de vocês? (8, 5 e 2)?

P4: Foi!

P3: Não cheguei a solução, falta substituir. Alguém fez escalonando?

P2: Eu Fiz!

P4: Eu também.

A seguir, são apresentados os diversos métodos de resolução do item (a) pelos professores P1, P2, P4 e P5, evidenciando os diferentes procedimentos nas Figuras 16, 17, 18 e 19:

Figura 16 - Resolução da SDP III do sujeito P1

3)
$$\begin{cases} 4x + 2y + 2z = 46 \\ 5x + 3y + z = 57 \\ 4x + 3y + 3z = 53 \end{cases}$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (36 + 30 + 8) - (24 + 12 + 30) = 74 - 66 = 8$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 46 & 2 & 2 \\ 57 & 3 & 1 \\ 53 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (414 + 106 + 342) - (318 + 138 + 342) = 862 - 798 = 64$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 46 & 2 \\ 5 & 57 & 1 \\ 4 & 53 & 3 \end{vmatrix} = (684 + 184 + 530) - (456 + 212 + 690) = 1398 - 1358 = 40$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 46 \\ 5 & 3 & 57 \\ 4 & 3 & 53 \end{vmatrix} = (636 + 456 + 690) - (552 + 684 + 530) = 1782 - 1766 = 16$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_5} \Rightarrow x = \frac{64}{8} \Rightarrow x = 8$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta_5} \Rightarrow y = \frac{40}{8} \Rightarrow y = 5$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta_5} \Rightarrow z = \frac{16}{8} \Rightarrow z = 2$$

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Figura 17 - Resolução da SDP III do sujeito P2

o problema é modelado conforme o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 4P + 2B + 2B = 46 \\ 5P + 3P + 1B = 57 \\ 4P + 3P + 3B = 53 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 46 \\ 5 & 3 & 1 & 57 \\ 4 & 3 & 3 & 53 \end{bmatrix}$$

Gauss

$$\begin{bmatrix} 20 & 10 & 10 & 230 \\ 20 & 12 & 4 & 228 \\ 20 & 15 & 15 & 265 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 20 & 10 & 10 & 230 \\ 0 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & 5 & 5 & 35 \end{bmatrix}$$

Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 23 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Quero = 8 pts
Prato = 5 pts
Branco = 2 pts

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Figura 18 - Resolução da SDP III do sujeito P4

a)
$$\begin{cases} 4x + 2y + 2z = 46 \\ 5x + 3y + z = 57 \\ 4x + 3y + 3z = 53 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 46 \\ 5 & 3 & 1 & 57 \\ 4 & 3 & 3 & 53 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 4 \cdot L_2 - 5 \cdot L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 46 \\ 0 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad 2 \cdot L_3 - L_2$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 46 \\ 0 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 4x + 2y + 2z = 46 \text{ (I)} \\ 2y - 6z = -2 \text{ (II)} \\ 8z = 16 \text{ (III)} \end{array}$$

Dividindo (III)

$$\begin{array}{l} z = \frac{16}{8} \\ z = 2 \end{array}$$

II + III

$$\begin{array}{l} 2y - 6 \cdot 2 = -2 \\ 2y = -2 + 12 \\ y = \frac{10}{2} = 5 \\ y = 5 \end{array}$$

I + II + III

$$\begin{array}{l} 4x + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 46 \\ 4x = 46 - 10 - 4 \\ 4x = 32 \\ x = \frac{32}{4} \\ x = 8 \end{array}$$

Logo, ouro vale 8
prata vale 5
bronze vale 2

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Figura 19 - Resolução da SDP III do sujeito P5

$$\begin{cases} 4x + 2y + 2z = 46 & \text{I} \\ 5x + 3y + z = 57 & \text{II} \\ 11x + 3y + 3z = 53 & \text{III} \end{cases}$$

Isolando x em (I), temos

$$4x = 46 - 2y - 2z \rightarrow x = \frac{46 - 2y - 2z}{4}$$

Substituindo em (II), temos:

$$5 \cdot \left(\frac{46 - 2y - 2z}{4} \right) + 3y + z = 57$$

$$\frac{5 \cdot 46}{4} - \frac{10y}{4} - \frac{10z}{4} + 3y + z = 57$$

$$\frac{230}{4} - \frac{10y}{4} + \frac{12y}{4} - \frac{10z}{4} + \frac{4z}{4} = 57$$

$$\frac{230}{4} + \frac{2y}{4} - \frac{6z}{4} = 57 \rightarrow 230 + 2y - 6z = 228$$

$$2y - 6z = 228 - 230 \rightarrow 2y - 6z = -2 \quad (\div 2)$$

$$y - 3z = -1 \rightarrow y = -1 + 3z$$

Substituindo em (III), temos:

$$4 \cdot \left(\frac{46 - 2y - 2z}{4} \right) + 3 \cdot (-1 + 3z) + 3z = 53$$

$$46 - 2 \cdot (-1 + 3z) - 2z - 3 + 9z + 3z = 53$$

$$46 + 2 - 6z - 2z - 3 + 12z = 53$$

$$4z = 53 - 45 \rightarrow 4z = 8 \rightarrow \boxed{z = 2}$$

Substituindo o valor de z em $y = -1 + 3z$, temos

$$y = -1 + 3 \cdot 2 \rightarrow y = -1 + 6 \rightarrow \boxed{y = 5}$$

Substituindo os valores de z e y , na equação abaixo temos:

$$x = \frac{46 - 2y - 2z}{4} = \frac{46 - 2 \cdot 5 - 2 \cdot 2}{4} = \frac{46 - 10 - 4}{4}$$

$$x = \frac{32}{4} \rightarrow \boxed{x = 8}$$

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Para a resolução do problema, os professores utilizaram métodos distintos para encontrar o resultado. P1 optou pelo método de Cramer, que se baseia na utilização de determinantes. Este método estabelece uma relação entre a solução do sistema e os determinantes formados pelas matrizes envolvidas, permitindo encontrar as incógnitas. Por outro lado, P2 e P4 utilizaram o método do escalonamento, que consiste em aplicar operações elementares nas equações do sistema para transformá-lo em uma forma escalonada ou triangular. Essas

operações garantem que as equações do sistema permaneçam equivalentes, simplificando o sistema para determinar as soluções das incógnitas de forma mais eficiente. Por fim, P5 optou pelo método da substituição, que simplifica o sistema ao substituir uma das incógnitas por sua expressão em termos das outras, reduzindo-o a uma equação com menos incógnitas e permitindo resolver as equações restantes de forma mais direta.

Todos os sujeitos conseguiram representar o sistema algebricamente, com base nos dados da tabela e do enunciado, e chegar à solução do item, exceto P3. Maior parte deles utilizando os métodos previstos na análise *a priori*. P1, por sua vez, apresentou a solução utilizando a Regra de Cramer, seguindo por caminhos não previstos anteriormente. Após a socialização dos métodos utilizados para concluir o problema, a professora pesquisadora iniciou um diálogo de reflexão em relação às escolhas de cada um:

Pesquisadora: O que levou cada um a optar pela escolha desse método? E quais dificuldades vocês acreditam que o aluno possa enfrentar em uma situação como a descrita no problema?

P1: Eu busquei fazer do mesmo modo que um aluno meu faria, na minha opinião os meninos preferem resolver por Cramer. É bem mais fácil.

P2: Eu concordo com P1, em partes. Os alunos preferem Cramer, mas isso acaba limitando-os [...] por exemplo: ele não pode utilizar essa regra para resolver sistemas que não são quadrados, a regra é restrita.

P1: Pois eu consigo utilizar para sistema 2×2 e 3×3 , e eles entendem.

P4: Mas para o problema anterior você não conseguiria usar Cramer, porque é um sistema que não é quadrado.

P5: Eu fiz por substituição, mas eu concordo que dá uma trabalhadeira danada [...] o aluno acaba se confundindo, às vezes, com as variáveis.

P3: Verdade! Imagina aí um sistema com 4 incógnitas, além de trabalhoso é bem demorado.

P2: eu acho que o escalonamento é o melhor método, quando eu ensino meu aluno a escalonar, eu estou ensinando-o a tomar decisões das melhores soluções, já a regra de Cramer, lembra muito a equação do segundo grau, que reduz a matemática a uma receita de bolo, onde ensina o passo a passo e você não pode desviar dele.

Durante a discussão entre os participantes, a pesquisadora direcionou seus questionamentos para a Regra de Cramer, um método defendido por P1. A pesquisadora destacou que a aplicabilidade da regra de Cramer é restrita a situações específicas, exigindo que o sistema tenha o mesmo número de equações e incógnitas, além de a matriz dos coeficientes ser não singular, ou seja, seu determinante deve ser diferente de zero. A pesquisadora também ressaltou que, embora a Regra de Cramer seja mais a mais adotada pelos alunos para a resolução de sistemas com dimensões 2×2 ou 3×3 , ela se torna impraticável para sistemas

maiores. Isso se deve à complexidade computacional associada ao cálculo de determinantes em sistemas mais extensos.

Além disso, a pesquisadora destacou a importância da abordagem do aluno na resolução de problemas. Enquanto a aplicação da Regra de Cramer pode indicar se o aluno memorizou a sequência de passos, resolver por escalonamento oferece aos professores diferentes percepções sobre a sequência de pensamentos do aluno e suas decisões ao escalonar o sistema. Isso ressalta a diferença entre simples memorização e compreensão profunda do raciocínio por trás das soluções.

Dando continuidade, os participantes começaram a leitura e resolução do item (b) do problema, que solicitava a classificação do sistema e sua representação geométrica. A transcrição abaixo é um trecho da socialização entre P2, P3 e P5 sobre suas soluções:

P5: São três planos que se cruzam em um ponto. Que neste caso, é o ponto (8, 5, 2).

P2: Logicamente é um sistema possível e determinado. Previamente os valores dos pontos já eram pré-determinados e a única maneira de pontuar zero é somente se a escola não ganhar nenhuma medalha de nenhum tipo (independência linear).

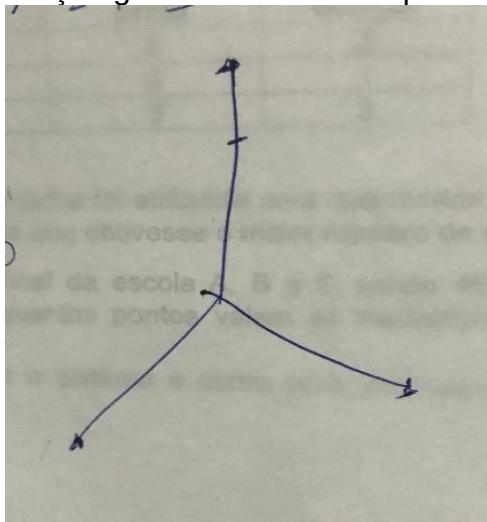
P3: Eu achei que fosse o cruzamento de três retas.

P2: Não! nos sistemas 3x3 estamos nos referindo a planos no espaço tridimensional. Cada equação linear dessa aí, determina um plano, e para que as 3 condições (digo, as condições das equações) sejam satisfeitas simultaneamente, equivale que os planos se intersectam em um único ponto.

P3: Ah entendi!

Após a discussão, P1 apresentou para os demais colegas, um esboço de como pensa ser a representação geométrica do sistema descrito:

Figura 20 - Resolução geométrica descrita por P1 para a SDP III



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Ao analisar os diálogos e a exposição dos métodos de resolução, percebemos que os professores tiveram a oportunidade de ponderar sobre a fragmentação do ensino de matemática, especialmente no que diz respeito aos sistemas lineares. Diversos autores destacam que esse ensino muitas vezes é fragmentado, separando a compreensão da parte algébrica dos sistemas lineares das demais representações. Portanto, é possível inferir que a Situação Didática Profissional III alcançou seu objetivo, uma vez que possibilitou aos sujeitos participantes a troca de experiências e saberes de sua prática profissional.

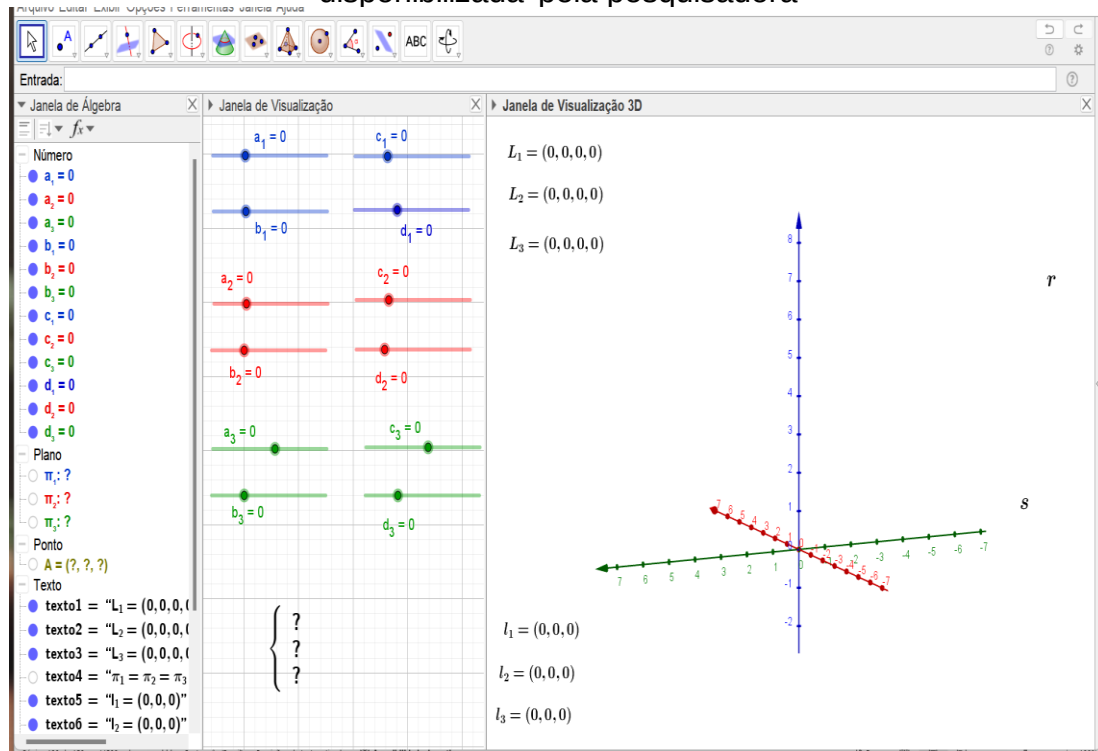
5.2.4 Experimentação da SDP IV

A SDP IV foi realizada durante o último encontro de formação. Inicialmente a professora distribuiu o problema impresso e disponibilizou a construção feita no *software* GeoGebra. O objetivo era facilitar a mobilização de estratégias de resolução dentre os participantes, bem como trabalhar a parte geométrica dos sistemas, de modo a oportunizar ao aluno a visualização do gráfico, não apenas como uma figura, mas como suporte à interpretação e classificação desses sistemas.

Uma vez que a construção já havia sido apresentada, os professores puderam focar exclusivamente na manipulação da figura, usando a ferramenta de controle deslizante. Esse enfoque permitiu que observassem as mudanças ocorridas entre os diferentes planos, adicionando dinamismo à situação. Essa abordagem contribuiu para uma interação mais eficaz entre os participantes e o problema em questão.

Durante o momento de ação, os professores manipularam a construção no GeoGebra e perceberam que ao mover o controle deslizante (Figura 23), poderiam visualizar um conjunto de planos no espaço tridimensional e a solução do sistema, fornecendo os valores das variáveis x , y e z , que são as coordenadas do ponto de intersecção comum entre os planos, verificando assim, as características das variáveis e do termo independente:

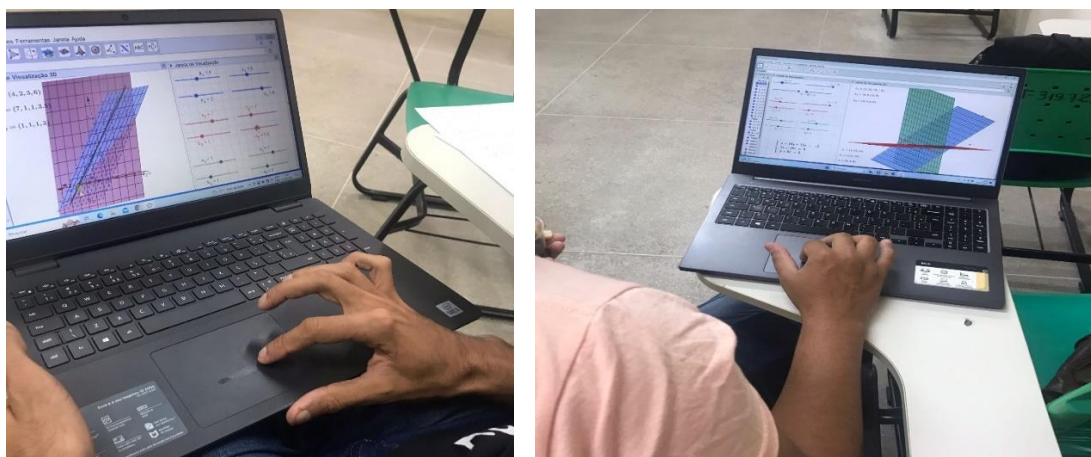
Figura 23 - Representação gráfica no GeoGebra para modelagem da SDP IV disponibilizada pela pesquisadora



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Ao observarem a elaboração no *software*, os participantes demonstraram entusiasmo em relação à funcionalidade apresentada pelo GeoGebra, como evidenciado nos comentários a seguir: *"Essa construção é realmente interessante!"* (P2), *"Será que eu consigo explorar todas as possibilidades dos sistemas 3×3 com essa construção?"* (P5), *"Não me recordo se essa parte foi abordada durante minha graduação, mas eu achei bem bacana"* (P3). A ilustração subsequente captura o momento em que os professores P2 e P5 iniciam a manipulação no *software*:

Figura 24 - Ação de modelização da SDP IV no GeoGebra realizada pelos professores P2 e P5



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Inicialmente, os professores optaram por resolver a questão de maneira individual, destacando-se como o momento de ação. Nesse contexto, os professores P1, P3 e P4 escolheram resolver os sistemas de forma algébrica, deixando de lado a utilização da construção como suporte para a resolução e o desenvolvimento de estratégias. Essa abordagem foi contrária ao que havia sido inicialmente previsto na análise *a priori*.

Após a fase inicial, a pesquisadora passou a estimular a interação entre os integrantes, fomentando a realização de diálogos colaborativos. Concomitantemente, eles começaram a formalizar suas respostas, conduzindo assim as etapas de formulação e validação do problema. Essas interações são descritas nos diálogos a seguir:

Pesquisadora: Como professor, ao lidar com sistemas lineares 3x3, como vocês abordam a questão da proporcionalidade em comparação com sistemas 2x2?

P1: Percebo que a presença de uma terceira letra aí complica a situação. Nos sistemas 2x2, costumo dizer que a falta de proporcionalidade leva a uma solução única, tornando o sistema possível e determinado, já no caso de sistemas 3x3, ainda estou me familiarizando com a análise mais detalhada.

P5: Ao lidar com sistemas lineares 3x3 em comparação com sistemas 2x2, eu destaco a complexidade adicional que surge com a presença de uma terceira variável. No contexto dos sistemas 2x2, a ausência de proporcionalidade costuma indicar uma solução única, o que torna o sistema possível e determinado. No entanto, nos sistemas 3x3, a abordagem se torna mais refinada. Não apenas avaliamos a proporcionalidade nos coeficientes das incógnitas, mas também nos termos independentes.

P2: Já pegando o gancho da fala de P5, é importante também deixar claro para os alunos que a falta de proporcionalidade pode não ser uma indicação direta de um sistema impossível. Em vez disso, pode sugerir a presença de combinações lineares específicas nos coeficientes das incógnitas e nos termos independentes.

Pesquisadora: Considerando a possibilidade de combinações lineares nos coeficientes das incógnitas e nos termos independentes, como você diferencia sistemas possíveis e determinados, possíveis e indeterminados, e impossíveis?

P5: Em sistemas possíveis e determinados, todas as equações são linearmente independentes, o que implica em três retas diferentes na representação gráfica. Já nos sistemas possíveis e indeterminados, observo duas equações idênticas, resultando em duas retas coincidentes e uma terceira independente. No caso dos sistemas impossíveis, procuro identificar situações em que as equações são linearmente dependentes, gerando retas coincidentes ou colineares. Isso sugere a falta de solução única.

P4: Essa abordagem aí combinada com a análise gráfica e algébrica ajuda a fornecer uma melhor compreensão dos diferentes tipos de sistemas 3x3.

Continuando o momento de formação, nota-se que apesar do estímulo fornecido pela pesquisadora, os professores persistiram na elaboração de suas estratégias de resolução de forma individual. Esta abordagem individual foi mantida pelos participantes 1, 3 e 4. Os sujeitos P2 e P5, por sua vez, iniciam um diálogo, como evidenciado a seguir:

P2: Esse primeiro sistema é possível e determinado, logo a posição relativa entre os planos é tangente, né?

P5: Concorrentes. Quando a gente dá uma olhada no software, é possível notar que a representação é tipo um ponto ali, sabe, que fica onde os três planos se encontram. E aí, pra chegar nesse ponto, a gente usa umas retas que se cruzam, passando pelos pontos onde cada par de planos se encontra. Qual solução tu chegou aí?

P2: O meu deu (1, 2 e 3), eu fiz assim, eu utilizei combinação linear, primeiro subtraí a 3ª equação da 2ª e obtive uma quarta equação $x + y = 3$. Depois subtraí a 2ª da 1ª e formei a quinta equação $z + x = 4$. Ai partindo da 1ª equação, veja aí que a soma das incógnitas é igual a 6 logo z só pode ser 3. Depois eu substituí e encontrei que x é 1 e y é igual a 2.

P5: Show de bola! Esse segundo sistema está na cara que é impossível, porque a 1ª equação é igual a última com valor diferente no termo independente.

P2: São paralelos os planos, né?

P5: Sim!

Dando continuidade ao momento, percebeu-se que os professores P1 e P3 não concluíram todos os itens, deixando algumas partes do problema em branco. Além disso, eles apresentam resistência ao uso do *software* GeoGebra. P3 mencionou desafios durante o processo de resolução para encontrar e concluir a existência de um ponto de interseção entre os planos, destacando a limitada familiaridade com o *software* e, por conseguinte, a falta de habilidade ao manipular o objeto e resolver o problema proposto.

O professor P1 expressou sua frustração dizendo: "*Coça a mão para fazer as contas aqui e ter uma resposta*". Esse diálogo evidencia que estão inclinados a buscar uma abordagem alternativa quando percebem que a solução está difícil de ser encontrada no registro matemático atual.

O professor P4 também deixa a construção de lado, dedicando-se à resolução dos sistemas de forma algébrica. Tal fato, acaba por mostrar uma maior atenção dada pelo professor em resolver o sistema de forma por métodos tradicionais, sem demonstrar tanta preocupação com a explicação da abordagem geométrica. Isso evidenciou um possível obstáculo na prática docente, considerando a crescente importância da incorporação de ferramentas tecnológicas no ensino e aprendizagem da matemática.

A Figura 25 e 26 apresenta a resolução realizada por P4 para os três primeiros sistemas do problema:

Figura 25 - Resolução de P4 aos três primeiros itens do problema

System 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -y = -2 \\ -z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ z = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

System 2:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 & \text{I} \\ 2x + 2y + 2z = 8 & \text{II} \\ x + y + z = 2 & \text{III} \end{cases}$$

$$\text{III} - \text{I} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - y - z = 2 \end{cases} \Rightarrow 0 = 2 \Rightarrow \text{SISTEMA IMPOSSIVEL}$$

System 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 2L_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 & \text{I} \\ 3y + z = 3 & \text{II} \\ 2z = 2 & \text{III} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Figura 26 - Resolução de P4 aos três primeiros itens do problema

Sistemas	Proporcionalidade nos coeficientes e no termo independente ou combinação linear	Posição relativa entre os planos	Solução e classificação do sistema
1	NÃO	PLANOS TANGENTES	S.P.D
2	Proporcionalidade nos coeficientes	PLANOS PARALELOS	S.I
3	combinação linear	PLANOS CONCORRENTES	S.P.I

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

O participante P4 demonstrou certa hesitação ao compartilhar as razões que o levaram a escolher um método específico de resolução, assim como suas

conjecturas para chegar ao resultado. Limitando-se a apresentar apenas uma resposta com representação algébrica.

Para a resolução do primeiro sistema, P2 e P5 exploraram eficazmente as capacidades do *software*, aproveitando a funcionalidade de zoom para identificar com precisão o ponto de intersecção. Na resolução do segundo sistema, os professores P2 e P5 revelaram a presença de três planos distintos e paralelos. P2 afirma: “*a interseção entre eles é vazia, o sistema é impossível*”.

Após a conclusão do problema por todos os professores, deu-se início à fase de validação. Observou-se que, embora alguns participantes tenham utilizado construções no *software* durante as etapas de ação e formulação, nenhum deles aplicou essa abordagem na fase de validação. Em vez disso, optaram por recorrer às informações expressas de maneira algébrica no papel.

Este padrão de comportamento levanta considerações sobre a transição entre as diferentes fases do processo. Enquanto a utilização de construções no *software* pode ter sido eficiente para a visualização e exploração de propriedades durante as fases iniciais, a ausência dessa abordagem na validação pode indicar a necessidade de explorar estratégias mais integradas ao longo de todo o processo de resolução.

Iniciando a fase de institucionalização, a pesquisadora enfatizou as estratégias identificadas e empregou a construção do problema no GeoGebra, no intuito de confrontar o modelo computacional (parte geométrica) com as formulações algébricas apresentadas na questão. Além disso, ela ressaltou a relevância de abordar os sistemas em diversas representações e a importância do uso do *software* como uma ferramenta didática, tanto para estabelecer quanto para validar as propriedades formais do conteúdo.

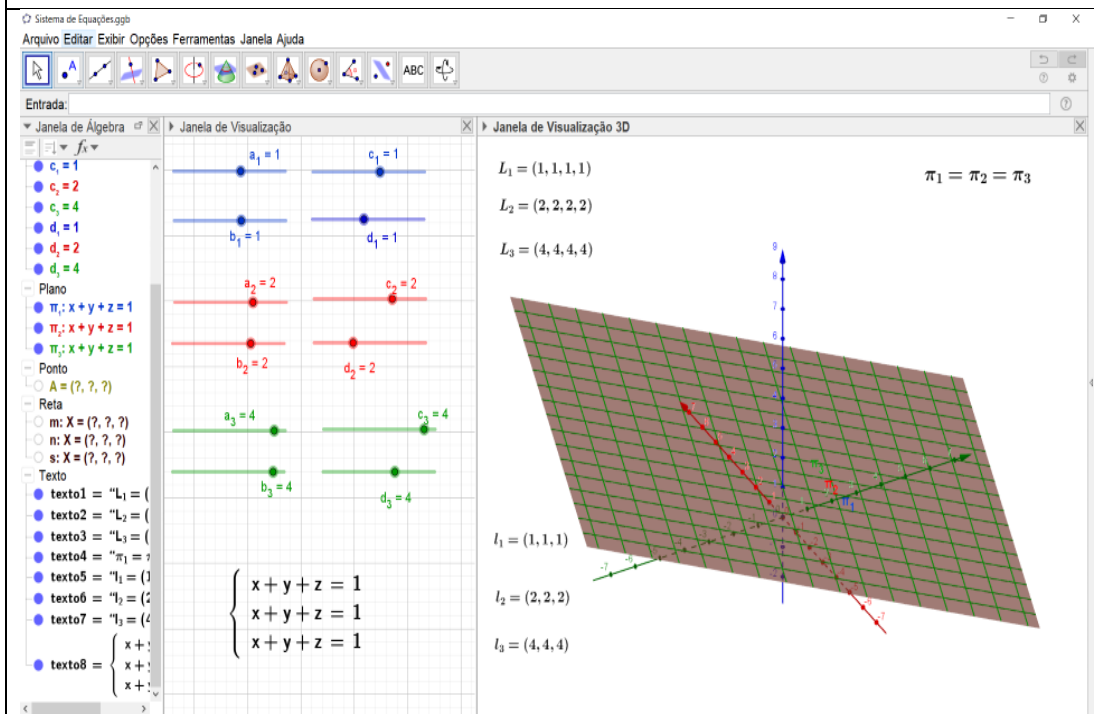
A pesquisadora destacou ainda que a proposta de incorporar o GeoGebra visava explorar a dimensão geométrica dos sistemas, frequentemente negligenciada por professores. A intenção era facilitar a visualização de um conteúdo considerado abstrato pelos alunos, proporcionando uma abordagem mais tangível e prática.

Em seguida, a pesquisadora destacou algumas ferramentas que os professores poderiam ter utilizado no *software* para chegar à solução de cada sistema, como destacado na análise *a priori*. Na sequência apresentou a construção no *software* para discutir a parte geométrica dos sistemas abordados no problema e proposto no livro de Dante (2013), sobre a interpretação geométrica de sistemas

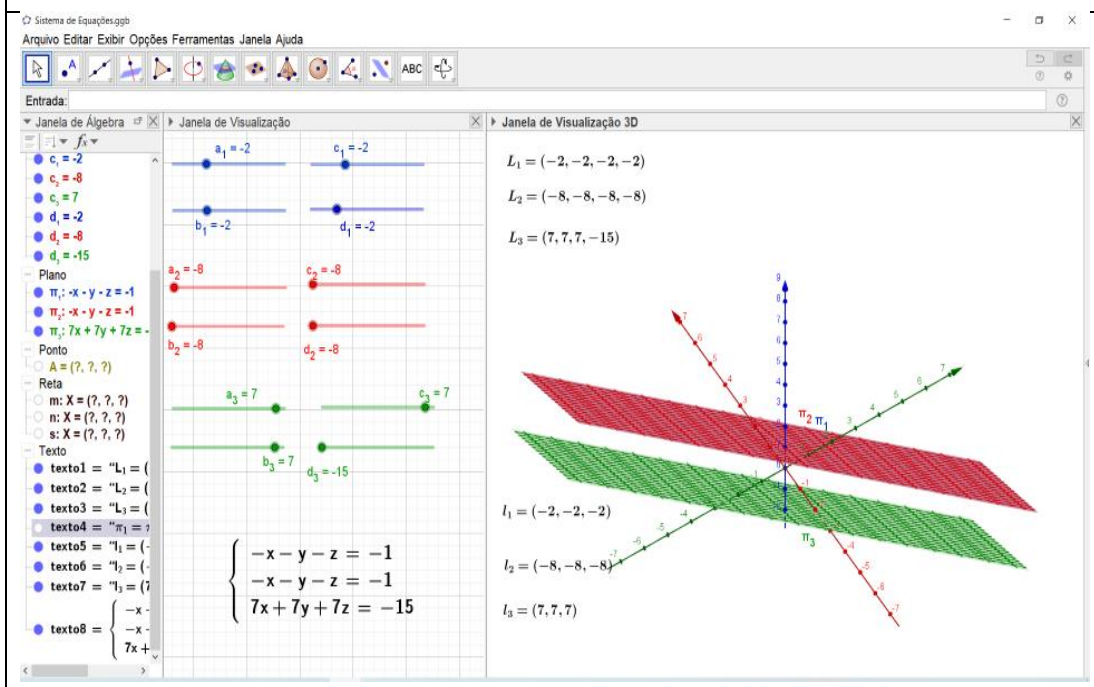
lineares 3×3 . Nas representações da Figura 27 apresentamos a representação das construções utilizadas pela formadora nesse momento de reflexão:

Figura 27 - Utilização do GeoGebra na fase de institucionalização

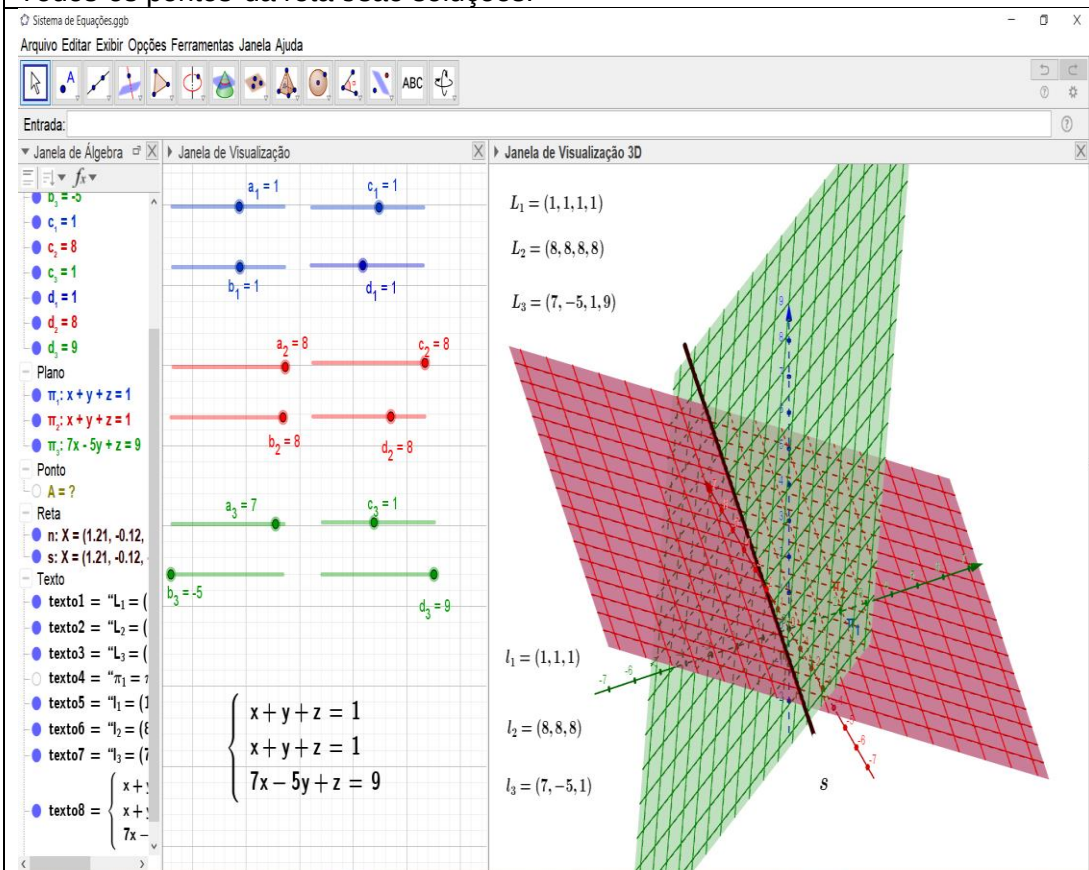
1. Os três planos coincidem L_1, L_2 e L_3 são múltiplos. O sistema é possível e indeterminado.



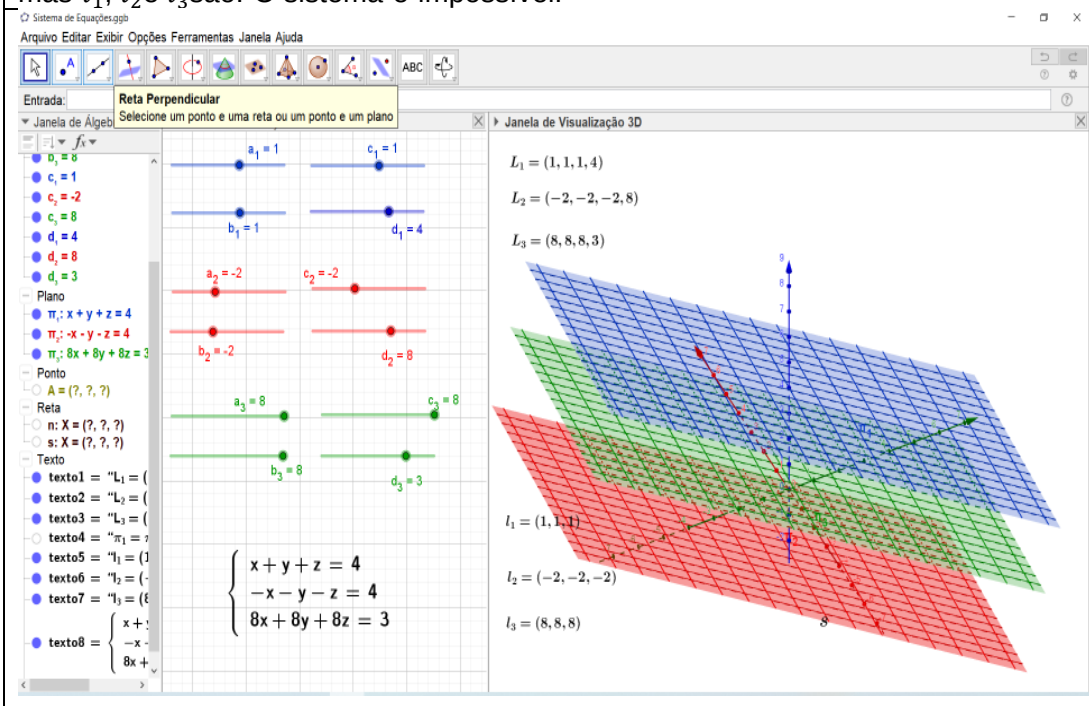
2. Dois planos coincidem e o terceiro é paralelo a eles: $L_2 = kL_1$, então $l_2 = kl_1$, $l_3 = ml_1$. Mas L_3 não é múltiplo de L_1 . O sistema é impossível.



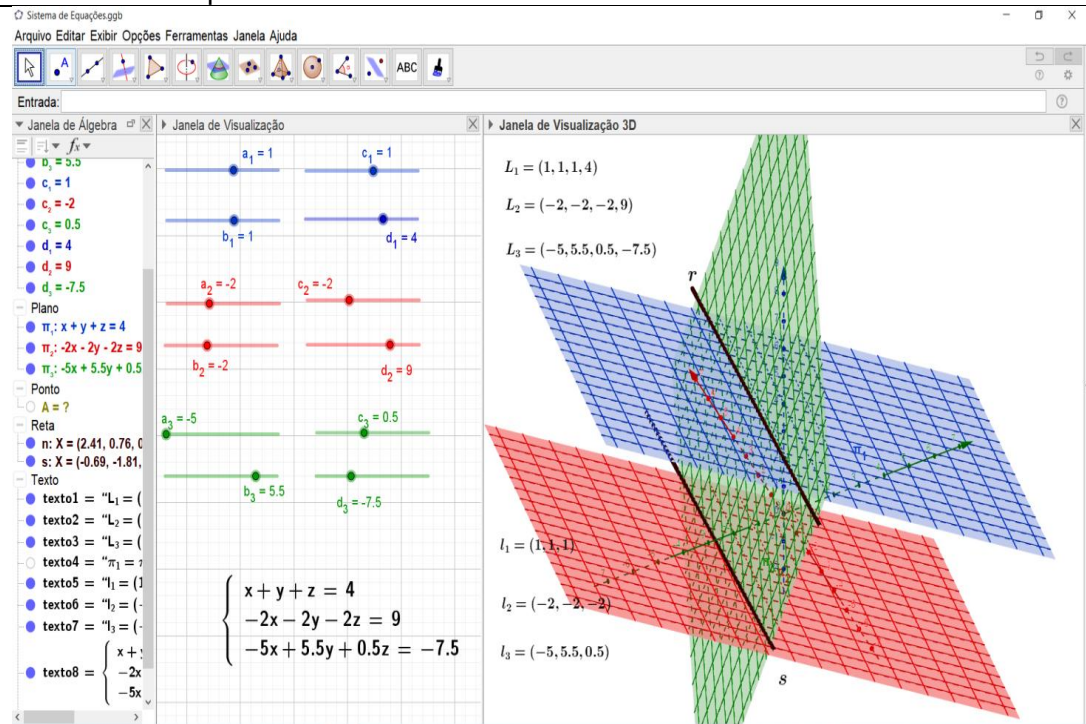
3. Dois planos coincidem e o terceiro os corta em linha reta: $L_2 = kL_1$, então $l_2 = kl_1$, $l_3 = ml_1$. Mas l_3 não é múltiplo de l_1 . O sistema é possível e indeterminado. Todos os pontos da reta são soluções.



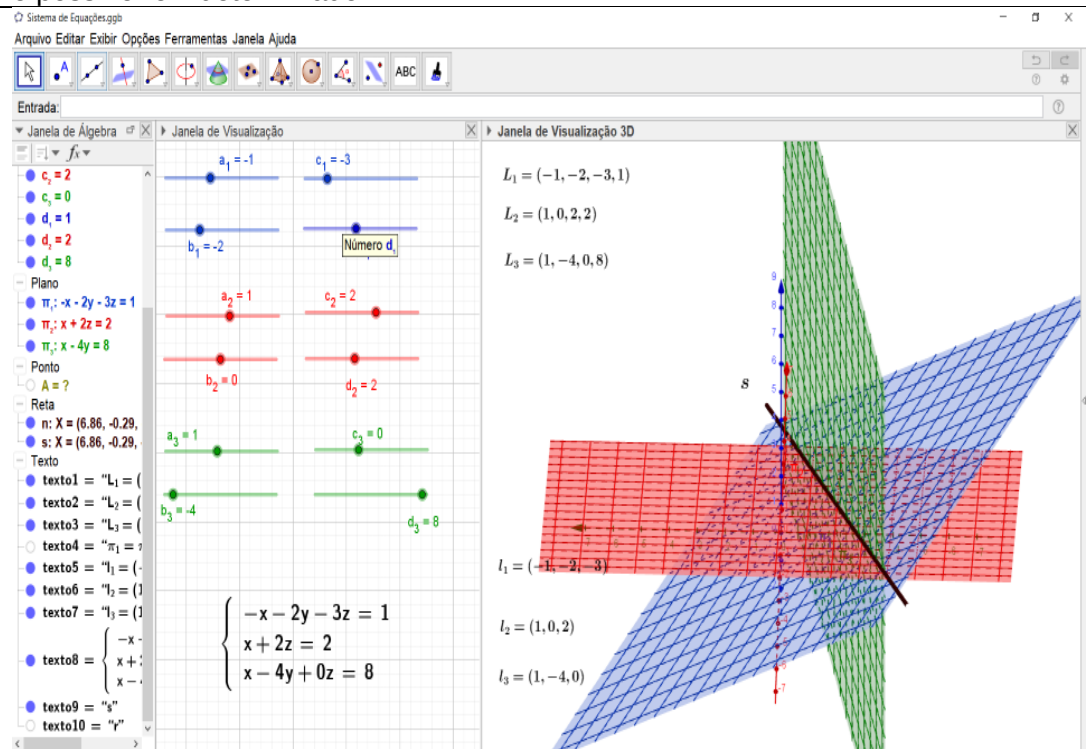
4. Os planos são paralelos dois a dois: L_1, L_2 e L_3 não são múltiplos de dois a dois, mas l_1, l_2 e l_3 são. O sistema é impossível.



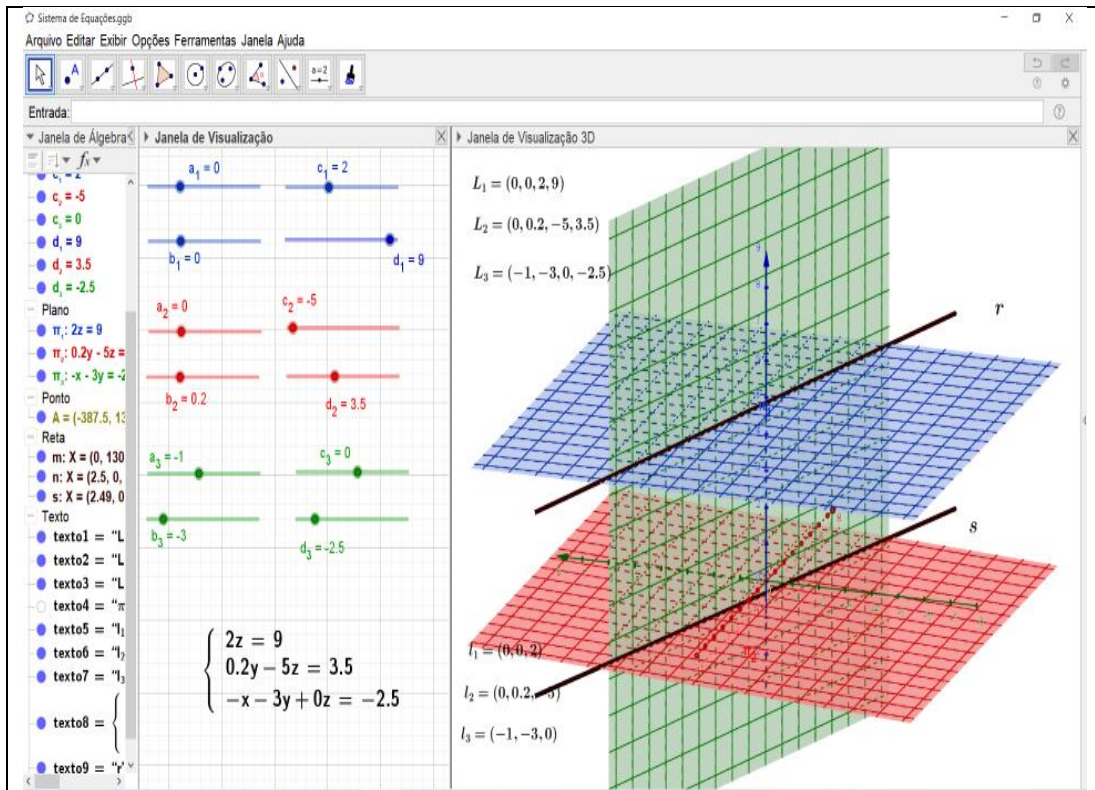
5. Dois planos são paralelos e o terceiro os intercepta a partir das linhas paralelas r e s : $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ como são paralelos $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$. $l_2 = k l_1$, L_2 não é múltiplo de L_1 , porque $\pi_1 \nparallel \pi_2$. Além disso, l_3 não é múltiplo de l_1 , porque $\pi_3 \nparallel \pi_1$. O sistema é impossível.



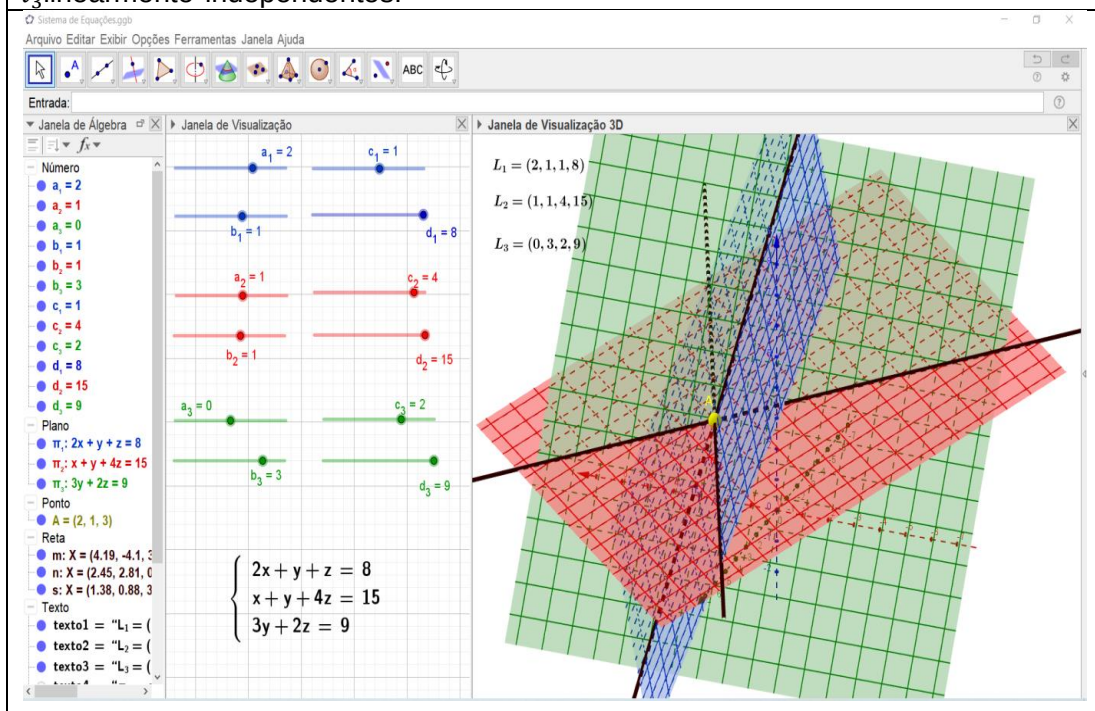
6. Os três planos são distintos e têm uma reta s em comum: l_1 , l_2 e l_3 não são múltiplos. L_3 é uma combinação linear de L_1 e L_2 . Assim, $L_3 = kL_1 + mL_2$. O sistema é possível e indeterminado.



7. Os três planos se cruzam, dois a dois, ao longo das linhas paralelas, r e s : os vetores l_1 , l_2 e l_3 não são múltiplos. Uma combinação linear é possível $l_3 = k l_1 + m l_2$. Além disso $L_3 \neq k L_1 + m L_2$. O sistema é impossível.



8. Os três planos possuem apenas um ponto em comum: vetores l_1 e l_2 são l_3 linearmente independentes.



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Diante disso, iniciou-se um momento de reflexão a respeito das diversas representações de sistemas com mesma classificação e com características

distintas. A pesquisadora fez alguns questionamentos no intuito de refletir sobre esse aspecto:

Pesquisadora: Considerando a classificação de um sistema 3×3 como possível e indeterminado, vocês poderiam discutir e exemplificar algumas das diversas formas pelas quais essa indeterminação pode se manifestar nos coeficientes das incógnitas e nos termos independentes?

P5: A indeterminação pode ocorrer quando as equações apresentam combinações lineares específicas nos coeficientes das incógnitas. Por exemplo, se as equações são proporcionais de uma maneira particular, isso pode levar a uma infinidade de soluções.

P2: Isso! No exemplo que tu (pesquisadora) mostrou aí, por exemplo; nos sistemas 3×3 com planos paralelos, a gente pode destacar como visualmente os planos não têm nenhum ponto de interseção. Isso pode ser comparado a ter três retas paralelas no espaço tridimensional, indicando a falta de solução. Já nesse outro caso dos dois planos paralelos e um que os intersecta, eu mostro como a interseção com o terceiro plano não resulta em uma solução única. Esse software aí é bacana, porque a gente pode ilustrar isso geometricamente representando um sistema onde dois planos são paralelos e o terceiro corta esses planos sem criar um ponto de interseção comum.

Pesquisadora: Como essa variedade de situações influencia sua abordagem ao ensinar esse conceito aos alunos?

P4: Encorajo os alunos a realizarem uma análise algébrica detalhada dos sistemas 3×3 , incentivando a identificação de combinações lineares nos coeficientes e termos independentes. Isso promove uma compreensão mais sólida das diferentes formas de indeterminação.

P2: Eu destaco a importância de explorar visualmente esses conceitos. Utilizo representações gráficas para mostrar aos alunos como diferentes combinações lineares nos coeficientes e termos independentes se traduzem em sobreposições ou interseções específicas no espaço tridimensional.

P3: É importante também deixar claro para o aluno que a indeterminação não significa a falta de solução, mas sim uma infinidade de soluções. Eu destaco como diferentes configurações nos coeficientes e termos independentes podem levar a uma diversidade de respostas.

À medida que ocorria a reflexão, observou-se uma troca rica de saberes epistêmicos e pragmáticos, caracterizando uma transposição profissional entre os professores experientes e os novatos. Além disso, foi possível identificar suas concepções pragmáticas em relação ao problema aplicado, permitindo sugestões pedagógicas para aprimorar o ensino desse conteúdo matemático.

5.2.5 Questionário Final

A realização do questionário final ocorreu durante o último momento de formação. Composto por cinco perguntas subjetivas, o objetivo principal era investigar as percepções dos professores em relação à abordagem adotada na formação, especificamente no que diz respeito aos métodos utilizados para o ensino

de sistemas de equações lineares, a utilização do *software* GeoGebra como ferramenta didática para explorar a representação geométrica dos sistemas e a aplicação da TSD. Dessa forma, foi possível avaliar as eventuais transformações e novas perspectivas adquiridas pelos participantes ao longo do processo de formação.

A primeira indagação abordou a modelagem de problemas por meio de exemplos práticos, questionando se a abordagem contextualizada do conteúdo pode facilitar o aprendizado dos alunos no ensino de sistemas. A seguir, estão apresentadas as respostas dos professores participantes:

- P1: Acredito que sim, pois viabiliza a construção do conceito através de situações-problemas considerando os conhecimentos prévios dos aprendizes, sem necessariamente se apegar a cálculos e a memorização.*
P2: Pode, pois contextualiza e aborda outras perspectivas deste conteúdo.
P3: Sim, pois ajuda a entender o problema e não decorar fórmulas.
P4: Sim, pois fornece ao aluno identificação com o tema.
P5: Sim, por meio de um exemplo prático o aluno percebe que o conteúdo estudado pode ser usado no cotidiano.

As respostas dos participantes compartilham uma perspectiva comum em relação à eficácia da abordagem contextualizada no ensino de sistemas de equações lineares. Algumas semelhanças notáveis incluem: construção do conceito, consideração dos conhecimentos prévios, identificação do tema e aplicação prática do conteúdo.

A segunda pergunta foi voltada para a aplicação da Teoria das Situações Didáticas (TSD) como uma proposta de ensino e possibilidade de modelização de cenários de sala de aula, buscando verificar se esta teoria pode auxiliar os alunos na construção bem-sucedida e uma maior apreensão do conhecimento matemático. Seguem as respostas dos professores ao item:

- P1: Sim, pois possibilita que o educando acesse por uma tipologia de fases ou etapas onde ele consolida o saber através dos conhecimentos prévios, através de uma situação a-didática imposta pela ação docente.*
P2: Sim, pois a TSD auxilia na formulação da aprendizagem através das etapas de ação, formulação...
P3: Sim, o aluno usando tentativa, fixa o conteúdo
P4: Sim, pois permite ao professor realizar uma sequência pré-definida que analisa as possíveis dificuldades dos alunos e como tais dificuldades podem ser superadas.
P5: Sim, os alunos aprendem de forma sequencial e gradual, percebendo como um sujeito de sua própria aprendizagem. Essa teoria possibilita ao professor entender como ocorre cada etapa da aprendizagem do aluno.

Em resumo, há uma unanimidade ao concordar que a TSD é uma teoria que fornece benefícios como a sequencialidade, a retomada de conhecimentos prévios, a aprendizagem ativa e a análise de dificuldades. As diferenças residem em nuances sobre a abordagem docente e no enfoque na aprendizagem sequencial e gradual. Essas diferenças podem refletir diferentes interpretações ou ênfases dadas pelos participantes ao descreverem a TSD.

A terceira pergunta traz um questionamento a respeito do uso de recursos tecnológicos e se estes são capazes de auxiliar no processo de aprendizagem e na construção de significados relativos à abstração de sistemas de equações lineares:

P1: Sim, é preciso ser explorado, só que a realidade da sala de aula não dispõe.

P2: Sim, fornece uma visão geométrica do conteúdo e contempla de certa forma, um ente que está presente no contexto do aluno, focando não apenas no cálculo em si, mas na visualização das figuras referente as soluções dos sistemas.

P3: Sim, é uma pena que nem todas as escolas tenha esses recursos tecnológicos e não prepara os professores para essa realidade.

P4: Sim, exatamente quando falamos das noções geométricas de termos que normalmente são trabalhados apenas de forma algébrica.

P5: Sim, inclusive sempre que possível faço uso nas minhas aulas do GeoGebra, que pode auxiliar o professor principalmente na visão geométrica.

Todos os participantes reconhecem a importância do GeoGebra como uma ferramenta que fornece uma visão geométrica do objeto de estudo. Há um consenso entre eles sobre os benefícios de se utilizar a ferramenta para a visualização das soluções dos sistemas, indo além do cálculo e enfatizando a compreensão geométrica. Enquanto alguns participantes expressam a necessidade de explorar o GeoGebra, outros indicam que nem todas as escolas têm acesso a esses recursos tecnológicos. Isso sugere uma divergência nas experiências práticas dos participantes. Outro ponto que merece destaque são as falas de P3 e P5. Enquanto P3 destaca a falta de preparo dos professores para lidar com a tecnologia, o participante P5 menciona que sempre que possível faz uso do GeoGebra em suas aulas. Isso indica diferentes níveis de familiaridade e preparo entre os professores.

A quarta questão referiu-se aos diversos tipos de representação de um mesmo objeto matemático. As situações vivenciadas buscaram trazer uma abordagem em linguagem natural, algébrica, geométrica e tabular. Eles foram

questionados sobre se essas diferentes abordagens auxiliam o aluno na aprendizagem e fixação do estudo em um determinado tópico:

P1: Sim, considero como um fazer pensar para o aluno.

P2: Sim, quando o aluno aprofunda em um conteúdo através de diferentes perspectivas, há mais chances de haver uma aprendizagem significativa.

P3: Acredito e percebo muitas maneiras de chegar a resolução de um sistema, e cada aluno tem sua particularidade, então cabe ao professor explorar todas as possibilidades.

P4: Formas distintas de um mesmo conteúdo permite que o aluno tenha um maior espaço de estruturação no pensamento e aqueles que ainda não compreendem podem entender.

P5: Quando o aluno se aprofunda em um conteúdo através de diferentes abordagens, há mais chances de se ter uma aprendizagem completa.

Todos os participantes concordam que a abordagem diversificada, que permite ao aluno explorar um conteúdo por diferentes perspectivas, é benéfica. É notório que os participantes P2 e P5 expressam ideias semelhantes sobre a relação entre aprofundar-se em um conteúdo por diferentes abordagens e a aprendizagem significativa. A repetição de ideias pode indicar uma convergência forte nesse ponto específico.

Finalmente, a última questão abordou as concepções dos professores em relação à formação recebida e se esta contribuiu de alguma maneira para o exercício de sua profissão. Abaixo estão as reproduções das respostas dos participantes:

P1: Sim, traz o esclarecimento e desperta novos conhecimentos. Essas formações convergem para o ensino que favorece para construção do conhecimento do aluno de forma que contribui com a minha prática. Acredito que a TSD foi uma grande descoberta para mim enquanto professor, não tinha conhecimento sobre ela.

P2: Sim, serviu como um aprofundamento e como uma inspiração para futuras aulas deste conteúdo. Gostei das abordagens feitas com os sistemas indeterminados, geralmente a gente negligencia as características desse tipo de sistemas, ocasionando talvez em um obstáculo para o aluno nos próximos tópicos.

P3: Muito, pois a troca de ideias e de conhecimentos foi maravilhosa.

P4: Sim, as conversas entre os colegas, as formulações e validações trouxeram novas ideias do tema abordado.

P5: Sim, me forneceu uma visão mais ampla sobre sistemas lineares, sobre os obstáculos que muitas vezes enfrentamos. Essa troca é muito importante na nossa profissão, pois os professores mais experientes passam muita informação necessária para nossa prática.

Todos os participantes concordaram que a formação contribuiu para esclarecimento de alguns tópicos e despertou novos conhecimentos. P3 e P4

ressaltam a importância da troca de ideias e conhecimentos durante a formação, indicando que essa interação foi valiosa para enriquecer suas perspectivas profissionais. Tanto P1 quanto P2 mencionaram que a formação serviu como aprofundamento e inspiração para futuras aulas, evidenciando a influência positiva na prática docente.

A análise das respostas dos professores evidencia a importância atribuída à formação em sua prática profissional. Os educadores destacaram a relevância desse processo, não apenas pela introdução de novas metodologias para serem replicadas em sala de aula, mas também pela incorporação de recursos tecnológicos como ferramentas de ensino.

É notável a ênfase dada à troca de saberes, tanto epistêmicos quanto pragmáticos, entre os participantes. Essa interação enriquecedora entre os professores resultou na aquisição de habilidades fundamentais para aprimorar suas ações pedagógicas. A formação não apenas forneceu a troca de conhecimentos teóricos, mas também, possibilitou a partilha de experiências práticas, contribuindo para o desenvolvimento de uma abordagem mais abrangente e eficaz no ambiente educacional.

6 ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO INTERNA

Neste capítulo abordamos a quarta e última etapa da metodologia de pesquisa adotada neste estudo. De acordo com Almouloud e Coutinho (2008), ao realizar uma análise *a posteriori* de uma Engenharia Didática (ED), o pesquisador apresenta, de forma organizada, os resultados obtidos a partir dos dados coletados durante a fase experimental. O objetivo é aprimorar os conhecimentos didáticos, o processo de ensino e as condições de transmissão de um determinado conhecimento.

Conforme Almouloud (2007), a análise *a posteriori* visa relacionar as observações aos objetivos predefinidos e avaliar a reprodutibilidade, bem como a regularidade dos fenômenos didáticos identificados. Nesse contexto, realiza-se a análise dos dados coletados durante a fase experimental, confrontando-os com a análise *a priori*. Isso permite validar os objetivos propostos por meio da aplicação das Situações Didáticas Profissionais.

Ao longo desta seção, discutimos o progresso do experimento e realizamos uma análise das sessões de ensino, embasadas na Teoria das Situações Didáticas (TSD) e na Didática Profissional (DP), no intuito de compreender os aspectos relacionados à prática profissional do professor em formação. O foco está na validação interna das situações-problema, resultantes da interação entre o professor em formação e os conhecimentos provenientes de suas experiências práticas e das atividades didáticas.

Com base nas previsões realizadas nas análises *a priori* das quatro SDPs planejadas, observou-se que as dinâmicas de ação, formulação e validação propostas pela TSD poderiam ocorrer de maneira interligada ao longo do desenvolvimento da situação. Apesar de algumas interrupções ou desvios em relação ao contrato inicialmente estabelecido, esta projeção se concretizou durante a implementação das situações.

6.1 Análise *a posteriori* e validação da SDP I

A execução da SDP I, visava abordar o conteúdo de sistemas de equações lineares de maneira mais abrangente, proporcionando ao professor a oportunidade de compartilhar seus conhecimentos matemáticos e pragmáticos. Nesse contexto, o

item proposto consistia em uma descrição em linguagem natural dividida em quatro partes (a, b, c e d), com a exigência de os professores determinarem se cada afirmação era verdadeira ou falsa.

Em consonância às expectativas delineadas na análise prévia, os participantes empregaram diversas abordagens para resolver o item. No entanto, alguns docentes manifestaram dúvidas ao lidar com o problema, revelando dificuldades em identificar as características do item para a sua devida parametrização, o que contrariou a ideia prevista na análise *a priori*, de que os professores provavelmente não apresentariam dificuldades na resolução. Na resolução e validação dos itens (a, b, c e d), apenas um professor chegou a justificar a resposta dada a cada um dos itens, explicando de maneira lógica e matemática sua ideia.

Com relação à fase de institucionalização, o andamento ocorreu conforme esperado. A pesquisadora promoveu uma análise sobre as distintas abordagens adotadas pelos participantes e os desafios que estes enfrentaram ao resolver o problema. Ao examinar as reflexões expressas por eles no questionário final, sobre as considerações decorrentes da SDP I, observamos cada um dos comentários dos sujeitos. De acordo com P2, a experiência *"serviu como um aprofundamento e inspiração para futuras aulas desse conteúdo"*, acrescentando que *"geralmente a gente negligencia as características desse tipo de sistema"*. Por outro lado, P4 destaca que *"as formulações e validações trouxeram novas ideias sobre o tema abordado"*.

A partir das transcrições fornecidas pelos sujeitos, percebe-se que a situação alcançou seu propósito, uma vez que os professores reconhecem a importância desse tipo de abordagem, bem como percebemos a troca de conhecimentos epistêmicos e pragmáticos entre os participantes.

6.2 Análise *a posteriori* e validação da SDP II

A condução da SDP II objetivava uma análise mais aprofundada na abordagem de sistemas indeterminados, buscando enriquecer a prática profissional dos participantes. Diante do previsto na análise *a priori*, na etapa de ação, não era esperado que os professores participantes apresentassem dificuldades ao resolver os itens do problema. Contrariando esta previsão, P1, P3 e P5 encontraram algumas

dificuldades em relação ao resultado esperado. Além disso, era esperado que os professores conseguissem montar algebricamente as equações com base no enunciado, optando entre um dos métodos (eliminação ou substituição), ratificando o ocorrido na etapa de experimentação.

Conforme previsto nas etapas de formulação e validação, os professores discutiram intensamente, compartilhando resultados, métodos e refletindo sobre suas abordagens práticas. Também mencionaram os desafios mais recorrentemente enfrentados pelos alunos, incluindo desconsiderar as restrições do problema, bem como a necessidade de uma abordagem mais abrangente. Os professores destacaram também, a necessidade da utilização de problemas práticos, de conectar diferentes representações e da transição entre as abordagens algébrica e gráfica. Ainda conforme esperado, na etapa de validação dos itens (b) e (c) almejava-se que os sujeitos conseguissem chegar ao modelo matemático. No entanto, apenas os sujeitos P2 e P4 conseguiram justificar matematicamente a solução para o item, explicando a resolução para os demais colegas, o que se configurou em uma transposição profissional, de acordo com o apontado em Alves (2021b).

Na etapa de institucionalização, a pesquisadora estimulou considerações sobre as práticas pedagógicas dos participantes, levando-os a refletir sobre como abordam o ensino de sistemas indeterminados. Essa análise coletiva sugere uma troca de conhecimentos epistêmicos, isto é, uma discussão sobre a natureza do conhecimento matemático e como ele é construído e aplicado no contexto do ensino.

Os participantes não apenas compartilharam suas experiências práticas, mas também propuseram estratégias para melhorar a abordagem do ensino de sistemas indeterminados. Isso incluiu sugestões de como explorar diferentes representações e facilitar a transição entre abordagens algébricas e gráficas. Essas propostas representam uma troca de conhecimentos pragmáticos relacionados a métodos e estratégias de ensino.

Com base nos elementos apresentados, é razoável concluir que a SDP II facilitou a troca de conhecimentos tanto epistêmicos quanto pragmáticos entre os participantes. A interação ativa, a discussão de estratégias práticas e a reflexão sobre abordagens pedagógicas contribuíram para uma dinâmica de compartilhamento de conhecimentos.

6.3 Análise *a posteriori* e validação da SDP III

A implementação da SDP III teve como objetivo a aplicação prática de conceitos de sistemas de equações em situações do mundo real. Além disso, buscou abordar os sistemas a partir de problemas que demandavam o uso de diferentes representações, como linguagem natural, expressões algébricas e representações geométricas.

Na situação de ação era previsto que os professores em formação interagissem com o problema, tomassem decisões e agissem para encontrar as soluções, avaliando independentemente os resultados. Os professores, por sua vez, começaram a leitura do problema e delinearam estratégias de resolução, marcando assim o início desta etapa, conforme o previsto.

Na fase de formulação, os professores em formação discutiram estratégias como substituição, escalonamento e Regra de Cramer para resolver o sistema de equações. A previsão sobre a exposição de ideias e o uso da linguagem matemática foi confirmada. Na etapa de validação era esperado que os professores em formação mostrassem suas ideias e usassem linguagem matemática para comunicar seus raciocínios, tentando encontrar um modelo que levasse à solução do problema.

Para a situação de validação foi previsto que os professores em formação discutiriam entre si as estratégias de resolução utilizadas, compartilhariam ideias e apresentariam suas soluções, o que ocorreu conforme a previsão inicial.

Na etapa de institucionalização, a pesquisadora tencionava concluir a questão, reforçar as soluções acordadas, revisar conceitos não mencionados e não considerados pelos professores e proporcionar uma reflexão sobre os obstáculos enfrentados pelos alunos.

Após a conclusão da resolução do problema, a pesquisadora promoveu um diálogo reflexivo sobre a escolha dos métodos utilizados, identificando e elucidando as vantagens e desvantagens de cada abordagem adotada. Adicionalmente, dedicou uma reflexão à representação geométrica de um sistema escalonado, sublinhando a importância fundamental dessa abordagem no desenvolvimento e compreensão do aluno. Vale notar que esta consideração não foi totalmente contemplada durante a fase experimental.

Através desse diálogo, a pesquisadora proporcionou a oportunidade para os participantes analisarem criticamente os métodos empregados, contribuindo para uma compreensão mais ampla das escolhas feitas durante a resolução do problema. A reflexão sobre a representação geométrica do sistema escalonado enfatiza a relevância de se incorporar aspectos visuais no ensino, promovendo um amadurecimento conceitual que, por vezes, é negligenciado em detrimento de uma abordagem puramente algébrica.

Na experimentação houve ênfase à diversidade de métodos de resolução, indo além do que foi previsto na análise *a priori*. Os professores utilizaram métodos como substituição, escalonamento e a Regra de Cramer, mostrando flexibilidade e variedade de abordagens. A pesquisadora, durante a discussão sobre a Regra de Cramer, destacou a importância da compreensão profunda do raciocínio por trás das soluções, para além da memorização trivial.

Durante a interação, os professores em formação demonstraram uma troca significativa de ideias. Nesse diálogo, compartilharam suas estratégias para resolver o problema, discutindo o uso de métodos como substituição e escalonamento. Essa troca não só evidenciou a dimensão epistêmica, mas também permitiu que discutissem e compartilhassem conhecimentos de forma prática.

Em relação as discussões sobre os métodos de ensino, P1 destaca: *"Eu busquei fazer do mesmo modo que um aluno meu faria, na minha opinião os meninos preferem resolver por Cramer. É bem mais fácil."* P2, por sua vez complementa: *"Eu concordo com P1, em partes. Os alunos preferem Cramer, mas isso acaba limitando-os [...] por exemplo: ele não pode utilizar essa regra para resolver sistemas que não são quadrados, a regra é restrita".*

Percebe-se que há uma discussão sobre as abordagens pedagógicas, onde os professores compartilham suas perspectivas sobre a escolha de métodos específicos e as limitações associadas a essas escolhas. Isso demonstra a manifestação de conceitos pragmáticos a partir da troca de experiência de ensino, relacionados à aplicabilidade e às práticas educacionais.

Esses diálogos evidenciam a interação entre os participantes, não apenas na resolução matemática do problema, mas também na reflexão sobre métodos, estratégias e interpretações, o que contribui para um compartilhamento significativo. As respostas dos professores P2, P3, P4 e P5 ao questionário final evidenciam uma perspectiva unificada sobre a importância de abordagens diversas no ensino de

matemática, especificamente em relação aos sistemas lineares. Ao enfatizar a necessidade de os alunos aprofundarem-se em um conteúdo por meio de diferentes perspectivas (P2 e P5), os professores reconhecem que a aprendizagem significativa é mais provável quando há uma abordagem abrangente.

A percepção de que existem várias maneiras de chegar à resolução de um sistema, levando em consideração as particularidades individuais dos alunos (P3), ressalta a flexibilidade necessária ao processo de ensino. Ao explorar todas as possibilidades, os professores demonstram um compromisso em atender às diversas necessidades de aprendizado.

A ideia de que formas distintas de ensino de um mesmo conteúdo permitem uma maior estruturação do pensamento, bem como facilitam a compreensão para aqueles que ainda não dominam totalmente o conceito (P4), ressalta os benefícios de uma abordagem diversificada para os alunos em diferentes estágios de aprendizado.

Assim, conclui-se que a proposta de formação contribuiu significativamente para a reflexão dos professores sobre a fragmentação do ensino de matemática, especialmente em relação aos sistemas lineares. A ênfase na importância de abordagens diversas sugere uma evolução nos procedimentos didático-pedagógicos, visando oferecer uma formação mais completa e eficaz aos sujeitos envolvidos.

6.4 Análise *a posteriori* e validação da SDP IV

A SDP IV teve como intuito facilitar a compreensão da representação gráfica de sistemas, buscando fomentar a reflexão sobre esse aspecto específico. Na etapa de ação, esperava-se que os professores, após a apresentação da construção no GeoGebra, utilizassem ativamente a ferramenta para explorar os sistemas 3×3 , focando na manipulação da figura e adicionando dinamismo à situação. No entanto, alguns professores optaram por resolver individualmente os sistemas de forma algébrica, destacando-se como um momento de ação inicial. Contrário também ao que havia sido perspectivado, percebemos que houve resistência ao uso exclusivo do GeoGebra como suporte.

No que tange à situação de formulação, era almejado que a pesquisadora estimulasse a interação entre os professores, fomentando diálogos colaborativos, ao

passo que eles conduziram as fases de formulação e validação do problema de modo autônomo. A intervenção da pesquisadora estimulou a interação e diálogos colaborativos, levando os professores a formalizarem suas respostas e avançar na etapa de formulação. Os professores apresentaram diferentes estratégias para a resolução dos sistemas, combinando abordagens algébricas e geométricas. Essa diversidade enriqueceu a compreensão do tópico.

A pesquisadora esperava que os professores, após a intervenção inicial, utilizassem a construção no GeoGebra na fase de validação, consolidando a aprendizagem e reconhecendo a utilidade prática da ferramenta. Contudo, nenhum dos professores usou a construção no GeoGebra durante a fase de validação, indicando uma desconexão entre a ênfase dada à ferramenta na institucionalização e sua aplicação prática.

Por fim, na situação de institucionalização, perspectivou-se que os professores reconhecessem a relevância do GeoGebra, sendo motivados a incorporá-lo efetivamente em sua prática de ensino ao validar as propriedades formais do conteúdo. Houve uma ênfase na relevância do GeoGebra na fase de institucionalização, destacando a importância de abordar os sistemas em diversas representações. No entanto, a aplicação prática durante a validação foi limitada.

Essa análise destaca a complexidade da implementação de estratégias inovadoras durante a formação de professores, mostrando como as expectativas iniciais podem não ser plenamente satisfeitas devido a fatores individuais e resistência ao novo.

A pesquisadora enfatizou a relevância do GeoGebra como uma ferramenta para explorar a dimensão geométrica dos sistemas lineares, geralmente não apresentada pelos professores ou contemplada nos livros-texto. Essa orientação pode auxiliar os professores a reconhecer que o GeoGebra não se limita apenas a ser uma ferramenta de exploração, mas também um recurso para validar as conclusões obtidas por meio de abordagens mais tradicionais, como a resolução algébrica.

Também houve um momento de análise sobre as múltiplas representações de sistemas com a mesma classificação, mas com características distintas. Isso levou os professores a considerar abordagens e representações diversas dos conceitos matemáticos, promovendo uma compreensão mais aprofundada das possibilidades em relação aos sistemas lineares 3×3 . Além disso, a formadora incentivou a

discussão sobre as várias maneiras pelas quais a indeterminação pode ocorrer nos coeficientes das incógnitas e nos termos independentes.

Isso teve o intuito de capacitar os professores a apresentar a complexidade dos sistemas 3×3 de maneira mais abrangente, destacando diferentes situações que levam à indeterminação e enriquecendo sua capacidade de explicar esses conceitos aos alunos.

Durante os diálogos colaborativos, os professores compartilharam suas concepções epistêmicas sobre a análise de sistemas lineares 3×3 . As trocas incluíram discussões sobre a complexidade adicional introduzida pela terceira variável e estratégias para abordar a proporcionalidade entre os coeficientes e termos independentes. Isso evidenciou uma troca de conceitos epistêmicos relacionados a uma compreensão mais profunda dos sistemas lineares.

A pesquisadora instigou uma reflexão sobre as diversas formas de indeterminação nos sistemas 3×3 , incluindo combinações lineares específicas entre os coeficientes. Os professores participaram dessa discussão, compartilhando suas visões sobre como a indeterminação pode ocorrer e destacando a importância de mostrar visualmente esses conceitos. Isso representou uma troca de conceitos epistêmicos sobre a natureza dos sistemas lineares e as nuances da indeterminação.

Diante disso, buscando refletir sobre as falas dos professores mencionadas no questionário final, percebemos a afirmativa de que o uso desses recursos precisa ser explorado. Embora a realidade da sala de aula nem sempre o permita (P1), eles reconhecem a necessidade de integração de tecnologias, ao mesmo tempo em que apontam para desafios práticos enfrentados pelos professores. As falas de P2 e P4 sublinham a importância dos recursos tecnológicos ao proporcionar uma visão geométrica do conteúdo, destacando como essa abordagem vai além do cálculo, enfocando a visualização das soluções dos sistemas.

Assim, a análise conjunta das respostas sugere que a proposta de incorporar recursos tecnológicos contribuiu positivamente para a formação dos sujeitos, mesmo considerando desafios práticos e limitações presentes na realidade das escolas.

6.6 Conceitos pragmáticos manifestados pelos professores (organizadores da ação)

Um dos objetivos da pesquisa envolvia a identificação de conceitos pragmáticos, que funcionam como organizadores da ação, durante o desenvolvimento do processo formativo junto aos professores. Pastré, Mayen e Vergnaud (2006) explicam que a atividade humana é estruturada por esquemas, com conceitos pragmáticos como elementos-chave. Esses esquemas representam categorias de situações com função adaptativa, pois a organização da atividade profissional, embora constante, é flexível.

Ao longo da observação realizada com o grupo focal e durante a vivência nas quatro Situações Didáticas Profissionais com os professores, foram notados esquemas de ação e comentários que proporcionaram a identificação e caracterização de conceitos fundamentais para a organização da prática profissional.

Através da estruturação desses esquemas, identificamos três conceitos organizadores da ação, que elucidamos por meio de momentos vivenciados no grupo focal e na experimentação. Esses conceitos foram nomeados como: (i) Adaptação Pedagógica; (ii) Abordagem Prática; (iii) Flexibilidade Pedagógica.

O primeiro conceito pragmático identificado chamamos de *Adaptação Pedagógica*, que se refere à habilidade do professor ajustar sua abordagem para tornar o conteúdo mais acessível e compreensível para os alunos. Isso pode ser exemplificado quando um professor, ao perceber dificuldades de compreensão em um conceito específico, modifica sua estratégia de ensino, recorrendo a métodos alternativos, exemplos práticos e recursos visuais.

No grupo focal, as falas dos participantes evidenciaram os seus desafios enfrentados. P1 destacou a falta de conceitos básicos matemáticos como um obstáculo e afirmou que buscava tornar o conteúdo mais tangível ao adaptar a abordagem para superar esse desafio. P2 ressaltou a necessidade de manter o tópico interessante e adequar-se a diferentes estilos de aprendizado, apontando para a importância da adaptação pedagógica. P3 mencionou a dificuldade em explicar conceitos de forma clara, indicando a necessidade de ajustes na exposição do tema. P4 destacou a carência de estratégias inovadoras, enfatizando a importância da criatividade no ensino e P5 ressaltou o desafio de inovar em metodologias, especialmente em conteúdos algébricos.

As Situações Didáticas Profissionais I, III e IV ampliaram essa discussão ao revelar desafios específicos na interpretação e formulação de equações, limitações

da Regra de Cramer e métodos de substituição, bem como a importância de explorar visualmente conceitos usando o *software* GeoGebra. Essas situações realçam a importância contínua da Adaptação Pedagógica, indicando que os professores reconhecem a necessidade de ajustar suas estratégias de ensino para enfrentar desafios específicos.

O segundo conceito pragmático identificado denominamos de *Abordagem Prática*. Esse conceito na prática docente destaca a capacidade do professor reconhecer a necessidade de demonstrar a aplicabilidade dos sistemas na vida cotidiana dos alunos. Essa competência envolve conectar o conteúdo a situações reais e outras áreas do conhecimento. Prioriza-se, assim, a aplicação e a vivência prática dos conceitos aprendidos em sala de aula, em contraposição à mera concentração na teoria e na memorização de informações. Essa abordagem enfatiza a realização de atividades, experimentos, projetos e situações do mundo real para tornar o aprendizado mais significativo e relevante para os alunos.

com base na entrevista de Grupo Focal, P1, P2, P4 e P5 destacaram que os alunos têm a dificuldade de perceber a aplicação prática dos sistemas lineares em suas vidas cotidianas. P1 e P2 reconheceram a importância de explicar como esses conceitos são usados em áreas como engenharia, economia, física, entre outras, enquanto P4 propôs mostrar exemplos práticos do uso de sistemas lineares em engenharia, como em problemas de equilíbrio de forças em pontes. A relevância prática foi apontada como um ponto crítico para superar a falta de aplicabilidade percebida pelos alunos.

Nas Situações Didáticas Profissionais I, III e IV, os professores reforçaram a importância de demonstrar a relevância prática dos conceitos. P4 mencionou a confusão dos alunos ao trabalhar com sistemas indeterminados e destacou a necessidade de demonstrar a aplicabilidade prática dos conceitos. A pesquisadora destacou na Situação Didática Profissional III a importância de explicar a relevância da parametrização do conjunto solução, buscando conectar os conceitos matemáticos às situações do dia a dia. Na Situação Didática Profissional IV, P2 e P5 discutem como a visualização geométrica pode ilustrar situações específicas, realçando uma abordagem prática de incorporar diferentes representações para facilitar a compreensão de conceitos abstratos.

Ao integrar as falas do Grupo Focal às práticas nas Situações Didáticas Profissionais, observou-se uma consistência na ênfase dada à abordagem prática.

Os professores não apenas reconheceram a importância de contextualizar os sistemas lineares em situações do cotidiano e em diversas disciplinas, mas também afirmaram buscar ativamente estratégias para demonstrar essa relevância prática.

Por fim, o último conceito organizador da ação identificado, denominamos de *Flexibilidade Pedagógica*, emerge como uma competência crucial para o professor, refletindo a habilidade de se adaptar aos diferentes estilos de pensamento dos alunos e ajustar a abordagem de ensino a estes, conforme necessário. Essa prática é ilustrada quando, durante uma discussão em sala de aula, o professor percebe a diversidade de preferências de aprendizado entre os alunos, adaptando sua metodologia e incorporando diferentes métodos de ensino para atender às necessidades e estilos variados.

Na entrevista de Grupo Focal, P2, P3 e P4 destacaram diversas práticas que evidenciam essa flexibilidade pedagógica. P3 mencionou o trabalho em duplas como uma estratégia para melhorar a compreensão, indicando flexibilidade na organização da sala de aula. P2 destaca a adaptação da abordagem e o estímulo à colaboração entre os alunos, sugerindo flexibilidade nos formatos de viabilização da aprendizagem. P4 ressalta a importância de realizar um diagnóstico inicial para avaliar o conhecimento dos alunos, indicando a flexibilidade na abordagem de acordo com as necessidades individuais.

Nas Situações Didáticas Profissionais I, II, III e IV, os professores apresentam uma variedade de métodos para lidar com as dificuldades dos alunos, como revisão prévia, modelagem de problemas do cotidiano, transição entre representações e utilização do GeoGebra. Essa diversidade de abordagens sugere uma flexibilidade pedagógica, indicando a disposição dos professores para se ajustar às necessidades e estilos de aprendizagem dos alunos.

Ao relacionar os apontamentos do Grupo Focal e as práticas durante as Situações Didáticas Profissionais, observa-se uma consistência na valorização da flexibilidade pedagógica. Os professores demonstram não apenas reconhecimento das preferências e necessidades individuais dos alunos, mas também uma disposição para o ajuste de suas estratégias de ensino, buscando abordagens alternativas para promover uma aprendizagem mais eficaz e inclusiva. Portanto, a flexibilidade pedagógica não é apenas uma habilidade, mas uma atitude essencial para garantir a eficácia do processo educacional.

Neste contexto, os conceitos pragmáticos, ou "conceitos organizadores da ação", conforme definido, emergiram como esquemas de diagnóstico das situações de ensino, nos quais os professores fundamentaram a organização de suas ações pedagógicas.

Os conceitos pragmáticos, ao servir como guia para a ação, forneceram aos professores ferramentas conceituais e estratégias para enfrentar variados desafios no ensino. Nesse sentido, a competência do professor, conforme discutido, está intrinsecamente vinculada à capacidade não apenas de obter resultados eficazes, mas também de agir de maneira eficiente, adaptativa e preparada diante dos desafios e imprevistos que surgem no contexto educacional.

Considerando os conceitos pragmáticos identificados na ação dos professores durante a formação, concluímos que houve, de fato, o desenvolvimento e troca entre os professores. As competências aqui referem-se não apenas ao conhecimento teórico, mas também à capacidade prática e adaptativa dos professores no contexto do ensino de sistemas lineares.

Este grupo de professores em formação demonstrou habilidades práticas, adaptativas e contextualizadas, essenciais para uma prática docente eficaz no ensino de matemática. O uso e entendimento dos conceitos pragmáticos indicam não apenas a aquisição de conhecimento, mas também a aplicação efetiva desse conhecimento em situações reais de ensino, caracterizando um desenvolvimento e uma troca significativa de competências inerentes a sua prática.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo se concentra na investigação do papel do professor de matemática. O interesse central da pesquisa é oferecer aos professores uma formação específica, utilizando Situações Didáticas Profissionais, para examinar as possíveis dificuldades e obstáculos que esses profissionais enfrentam no ensino de sistemas de equações lineares.

Nesse sentido, empreendemos uma análise que sustenta a relevância da escolha deste objeto matemático para o desenvolvimento desta pesquisa: O ensino de sistemas de equações lineares desempenha um papel fundamental no desenvolvimento abrangente das competências matemáticas dos alunos; transcende a esfera da Educação Básica e assume importância em cenários educacionais mais avançados, apresentando-se como um desafio significativo para os professores do Ensino Médio, em particular.

Assim, ao considerarmos o professor como elemento essencial nesse processo, justificamos a necessidade de proporcionar uma atenção dedicada à formação continuada dos professores de matemática em serviço. No intuito de traçar estratégias para contribuir na formação dos professores ao ensinar este tópico, apoiamo-nos na Teoria das Situações Didáticas e na Didática Profissional como referenciais teóricos, e na Engenharia Didática de Formação, enquanto metodologia de pesquisa.

Desenvolvida por Alves (2018; 2019; 2020), a proposta teórica da Situação Didática Profissional fundamentou-se nos conceitos advindos tanto da Didática Profissional quanto da Teoria das Situações Didáticas. Essa abordagem foi essencial para priorizar a formação e o aprimoramento da competência profissional do professor de matemática.

Inicialmente, definimos como objetivo deste trabalho avaliar o papel das Situações Didáticas Profissionais na formação do professor de matemática, especificamente no contexto do ensino de sistemas de equações lineares, analisando seu impacto e contribuição para o processo formativo. Nessa perspectiva, delineamos quatro objetivos específicos que nos guiaram para atingir o objetivo geral desta pesquisa, sendo estes: (i) Explorar as concepções dos professores, suas abordagens de ensino e os obstáculos enfrentados no ensino de sistemas de equações lineares; (ii) Desenvolver um conjunto de estratégias para o

ensino de sistemas lineares durante a formação com os professores, por meio da criação de Situações Didáticas Profissionais, no intuito de promover uma reflexão sobre os desafios envolvidos; (iii) Identificar os conceitos pragmáticos manifestados pelos professores ao longo do processo formativo; (iv) Investigar o processo de construção ou adaptação dos conceitos organizadores da ação eficaz, denominados conceitos pragmáticos, por meio da reflexão sobre o trabalho docente durante a participação em Situações Didáticas Profissionais (SDPs).

Para atender ao primeiro objetivo específico da pesquisa, foram analisados os dados coletados na análise preliminar. Isso incluiu a revisão de trabalhos correlatos à pesquisa, a análise dos livros didáticos utilizados pelos participantes e as diretrizes curriculares para o ensino do tópico em destaque. Além disso, conduzimos uma pesquisa com os professores no formato de Grupo Focal, buscando identificar suas concepções, métodos de ensino e obstáculos enfrentados no ensino de sistemas de equações lineares.

Ao integrar os dados coletados na análise didática com a análise cognitiva proveniente das entrevistas com os professores, constatamos que certas dificuldades e particularidades associadas ao ensino de sistemas de equações, presentes no contexto da prática profissional, também foram ressaltadas pelos professores nas pesquisas revisadas durante a análise preliminar. Essa correlação enfatiza a necessidade de investigar de maneira integrada os desafios enfrentados pelos professores e as características do ambiente de ensino.

Dentre as dificuldades destacam-se: inabilidade no uso de recursos tecnológicos educacionais; metodologias de ensino exclusivamente tradicionais (inovar em metodologias); lacunas na discussão e interpretação geométrica de sistemas 3×3 ; ausência de procedimentos de ensino que possibilitem correlacionar as diversas linguagens do conteúdo (algébrica e geométrica); e dificuldades em trabalhar com sistemas indeterminados.

Ao confrontar essas observações, não apenas atingimos o primeiro objetivo específico delineado para esta pesquisa, mas também reafirmamos a relevância da formação com Situações Didáticas Profissionais, pois estas surgem da identificação de obstáculos no contexto de atuação.

No intuito de cumprir o segundo objetivo específico, desenvolvemos antecipadamente um plano de ação baseado na criação de Situações Didáticas Profissionais. Este plano visou a estruturação de atividades a serem executadas

durante o momento da formação. Adicionalmente, oferecemos aos professores uma breve fundamentação na Teoria das Situações Didáticas, delineando detalhadamente o desenvolvimento de cada uma de suas etapas. Essa abordagem buscou fornecer aos professores uma proposta metodológica de ensino aplicável em sala de aula, diferenciando-se das estratégias convencionais até então utilizadas. Além disso, introduzimos uma apresentação básica dos comandos do *software* GeoGebra como proposta para o ensino de sistemas de equações lineares e como auxílio no ensino dinâmico de objetos matemáticos.

Para a realização da experimentação, optou-se por um grupo de professores integrantes do corpo discente da Especialização em Matemática com Ênfase na Educação Básica e sua escolha foi motivada dada a natureza específica do programa e de seu público-alvo. Inicialmente, aplicou-se um questionário (Apêndice A) com o objetivo de conhecer o perfil dos professores participantes. Além disso, conduziu-se uma entrevista com os sujeitos por meio de um grupo focal. Na fase experimental foram realizados quatro encontros formativos, nos quais foram elaboradas e implementadas quatro Situações Didáticas Profissionais. O desfecho desta etapa envolveu a aplicação de um questionário final, como parte do encerramento do processo.

Para a implementação das situações, foram empregadas as dialéticas da TSD nas suas fases de ação, formulação, validação e institucionalização. No entanto, é relevante destacar que, ao contrário do que ocorre quando a pesquisa tem como foco o aluno e visa o desenvolvimento de um determinado conhecimento matemático, no contexto do professor, a ênfase foi direcionada para as reflexões sobre o ensino e os desafios enfrentados por eles. Isso visou promover uma análise crítica da prática docente.

A validação da pesquisa foi realizada mediante a comparação entre as expectativas estabelecidas na análise *a priori* e o que efetivamente aconteceu durante o momento de formação (experimentação). Durante a validação interna das quatro SDPs, observou-se que alguns aspectos corroboram com as perspectivas previamente desenvolvidas na análise *a priori*. Contudo, diversas situações inesperadas ocorreram ao longo da implementação.

Ao entender que a implementação de uma SDP se baseia na identificação de obstáculos no ensino de conteúdos matemáticos específicos, possibilitando a construção ou reorganização de conceitos orientadores da ação, percebe-se que

esse processo pode contribuir de forma significativa para potenciais mudanças nas atitudes do professor em sua prática profissional.

Nesse sentido, a implementação prática das SDPs não apenas alcançou os objetivos propostos, mas também proporcionou uma abordagem eficaz ao estimular reflexões durante os momentos de institucionalização. Durante esses momentos, os professores puderam analisar os principais obstáculos no ensino do tópico em questão, favorecendo assim o desenvolvimento de competências do professor de matemática em serviço. Essa abordagem possibilitou uma análise detalhada dos desafios enfrentados no processo de ensino e aprendizagem, emergindo como uma ferramenta valiosa para impulsionar mudanças significativas nas estratégias pedagógicas e, por consequência, nas práticas profissionais dos docentes.

A partir das conclusões derivadas da análise das atitudes e reflexões dos professores durante a vivência das Situações Didáticas Profissionais, foi possível inferir a existência de conceitos organizadores da ação. Esses conceitos foram identificados e exemplificados por meio de comentários e procedimentos observados nos participantes ao longo desta pesquisa, destacando-se a Adaptação Pedagógica, a Abordagem Prática e a Flexibilidade Pedagógica.

Diante do exposto, torna-se evidente que os objetivos específicos traçados foram alcançados, reafirmando o propósito central desta pesquisa, que consistia em avaliar o papel das Situações Didáticas Profissionais na formação do professor de matemática, especialmente no contexto do ensino de sistemas de equações lineares, analisando sua influência e contribuição para o processo formativo.

Nesse sentido, ao explorar a questão central sobre como uma abordagem com Situações Didáticas Profissionais pode promover o desenvolvimento de competências pedagógicas e melhorar o processo de formação, evidencia-se que a aplicação dessas situações na formação de professores de matemática, através da identificação de obstáculos no ensino de um conteúdo matemático específico, possibilita a construção ou reorganização de conceitos orientadores da ação. Assim, isso pode conduzir a potenciais mudanças nas atitudes profissionais dos professores.

Para além dos resultados centrais, é relevante destacar que ao conduzir esta pesquisa nos deparamos com alguns desafios. Embora a perspectiva de incorporar ferramentas tecnológicas nas formações seja promissora e praticamente inevitável, desafios significativos foram observados e ressaltados pelos participantes durante o

processo. Nessa perspectiva, destaca-se que, em muitos casos, professores com uma extensa trajetória profissional expressam insegurança em relação ao uso dessas tecnologias, preferindo adotar abordagens mais tradicionais. Essa resistência por parte dos professores em incorporar métodos com aporte tecnológico representa um dos desafios enfrentados durante a condução da pesquisa.

Como direcionamento para investigações futuras tem-se a aspiração de aprofundar a análise acerca de como os professores efetivamente implementariam em suas práticas diárias de ensino o conhecimento adquirido durante a formação. Além disso, propõe-se uma comparação direta com outras abordagens de formação ou estratégias pedagógicas, visando proporcionar perspectivas adicionais sobre a eficácia relativa das estratégias propostas.

Finalmente, considera-se que a aplicação de Situações Didáticas Profissionais trouxe contribuições significativas para a formação destes professores de Matemática. Essa combinação teórico-prática demonstra a capacidade de estimular reflexões diante dos desafios profissionais no ensino, bem como de promover mudanças no comportamento e na prática docente.

REFERÊNCIAS

- ABAR, C. A. A. A Transposição Didática na criação de estratégias para a utilização do GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra** de São Paulo, v. 9, n. 1, p. 59-75, 2020.
- ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Paraná: Editora UFPR, 2007.
- ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 3, n. 1, p. 62-77, 2008.
- ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. Engenharia Didática: Evolução e Diversidade. **REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, p. 22-52, 2012. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p22>
- ALVES, F. R. V. Engenharia Didática para a generalização da sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura. **Revista Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 18, n. 1, p. 61-93, 2016(a).
- ALVES, F. R. V. Didática da Matemática: Seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. **Interfaces da Educação**, v. 7, n. 21, p. 131-150, 2016(b).
- ALVES, F. R. V. Engenharia Didática de Formação (EDF): sobre o ensino dos Números (Generalizados) de Catalan (NGC). **Educ. Matem. Pesq.**, v. 20, n. 2, p. 47-83, 2018(a).
- ALVES, F. R. V. Didactique Professionnelle (DP) et la Théorie des Situations Didactiques (TSD): les cas de la notion d'obstacle et l'activité de professeur. **EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 9, n. 2, p. 1-25, 2018(b).
- ALVES, F. R. V. A vertente francesa de estudos da Didática Profissional: Implicações para a atividade do professor de Matemática. **Vydia**, v. 39, n. 1, p. 255-275, 2019.
- ALVES, F. R. V. Didática Profissional (DP) e a Didática das Ciências e Matemática (DCeM): Uma perspectiva de complementaridade e implicações para o trabalho do professor. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 25, n. 3, p. 397-432, 2020.
- ALVES, F. R. V. Transposição Didática (TD) e Transposição Profissional (TP): uma discussão sobre a noção de competência profissional do professor de matemática. **Revista Diálogo Educacional**, v. 21, n. 69, p. 901-921, 2021. <https://doi.org/10.7213/1981-416x.21.069.ao05>
- ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Engenharia Didática de Formação (EDF): Repercussões para a formação do professor de matemática no Brasil. **Educação Matemática em Revista**, v. 2, n. 18, 2017.

ALVES, F. R. V.; DIAS, M. A. Formação de professores de matemática: um contributo da engenharia didática (ED). **REVEMAT**, v. 12, n. 2, p. 192-209, 2017. <http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2017v12n2p192>

ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. Situação Didática Profissional: um exemplo de aplicação da Didática Profissional para a pesquisa objetivando a atividade do professor de Matemática no Brasil. **Indagatio Didactica**, v. 11, n. 1, p. 103-129, 2019.

ALVES, F. R. V.; JUCÁ, S. C. S. Trabalho e competência do professor de Matemática: um ponto de vista a partir da Didática Profissional. **Revista Multidisciplinar em Educação**, v. 6, n. 14, p. 103-123, 2019.

ALVES, F. R. V.; BORGES NETO, H. Engenharia Didática para a exploração didática da tecnologia no ensino no caso da Regra de L'Hôpital. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 14, n. 2, p. 337-367, 2012.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 9, n. 3, p. 281-307. **La Pensée Sauvage**, 1990.

ARTIGUE, M. Ingeniería didáctica. In: ARTIGUE, M.; DOUADY, R.; MORENO, L.; GÓMES, P. **Ingeniería didáctica en educación matemática**. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.

ARTIGUE, M. Engenharia Didáctica. In: BRUN, J. (Org.). **Didáctica das Matemáticas**. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. (p. 193-217).

ARTIGUE, M. Perspectives on design research: the case of didactical engineering. **Approaches to qualitative research in mathematics education**, p. 467-496, 2014.

AZEVEDO, I. F. **Situações Didáticas Profissionais (SDP): Uma perspectiva de complementaridade entre a Teoria das Situações e a Didática Profissional no contexto das olimpíadas de Matemática**. 2020. 155f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2020.

BAILLEUL, M. Engenharia de Formação: o exemplo do treinamento de estudantes de treinamento em formação de professores. **Educação, Matemática e Pesquisa de São Paulo**, v. 17, n. 01, p. 137-161, 2015.

BAUDOUIN, J. M. La compétence et le thème de l'activité: vers une nouvelle conceptualization didactique de la formation. **Raison éducative**, v. 2, n. 2, p. 149-168, 1999.

BATTAGLIOLI, C. S. M. **Sistemas Lineares na segunda série do ensino médio: um olhar sobre os livros didáticos**. 2008. 116f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), São Paulo, 2008.

BERTOLAZI, K. S. **Conhecimentos e Compreensões revelados por estudantes de licenciatura em matemática sobre sistemas de equações lineares**. 227f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática), Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

BITTAR, M. Contribuições da Teoria das Situações Didáticas e da Engenharia Didática para discutir o ensino de matemática. In: TELES, R. A. M.; SOUZA, R. E.; BORBA, R.; MONTEIRO, C. E. F. **Investigações em Didática da Matemática**. Recife: Ed. UFPE, 2017.

BONJORNO, J. R.; JÚNIOR, J. R. G.; SOUSA, P. R. C. **Prisma Matemática: Sistemas, Matemática financeira e grandezas: Ensino Médio**. São Paulo: Editora FTD, 2020.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Elza Gomide – São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1974.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 3ª ed. São Paulo: Blücher, 2010.

BRANDL, E. **Desenvolvendo sistemas lineares para o ensino médio, com base nos registros de representação semiótica de Duval**. Produto Educacional (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 2018.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino médio**. Brasília: Ministério da Educação, 2018. [BNCC_20dez_site.pdf \(mec.gov.br\)](https://www.mec.gov.br/bncf/20dez_site.pdf).

BROUSSEAU, G. **Les Mathématiques du Cours Préparatoire**. Fascicule 1. Paris: Dunod, 1965. Disponível em: <https://guy-brousseau.com/3144/les-mathematiques-du-cours-preparatoire-1965/>. Acesso em: 11 jan. 2022

BROUSSEAU, G. Le contrat didactique: le milieu. **Recherches em Didactiques des Mathématiques**, v. 9, n. 3, p. 309-336, 1988.

BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, v. 7, n. 2, p. 33-116, 1986.

BROUSSEAU, G. **Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des Mathématiques**, 1970-1990. Edição e Tradução de N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland e V. Warfield. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2002.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo da Teoria das Situações Didáticas: Conteúdos e métodos de ensino**. São Paulo: Editora Ática, 2008.

BROUSSEAU, G. **La Théorie des Situations Didactiques em Mathématiques**. Éducation et didactique [En ligne], 5-1 | 2011.

CAMILO, A. M. da. S. **Formação continuada em serviço do professor de matemática: uma análise de situações didáticas profissionais direcionadas à geometria plana e espacial do ensino médio**. 2021. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2021.

CIDRÃO, G. G. **Didática Profissional (DP) na formação inicial dos professores de Matemática: na construção dos conjuntos numéricos**. 2020. 158f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2020.

COIMBRA, J. L. **Alguns aspectos problemáticos relacionados ao ensino-aprendizagem da álgebra linear**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Pará, Pará, 2008.

CHAMPY-REMOUSSENARD, P. Les théories de l'activité entre travail et formation, 9 – 50. In: Harmattan, L. Analyse de l'activité et formation. **Revue Savoirs**, 2005. Acesso em: 14 de fev, 2022. Disponível em: <[Teorias da actividade entre o trabalho e a formação| Cairn.info](#)>.

CHAVANTE, E.; PRESTES, D. **Quadrante matemática e suas tecnologias: sistemas lineares e geometria analítica**. São Paulo: Edições SM, 2020.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique**. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1983

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado**. Traduzido por Claudia Gilman. Buenos Aires: Editora Aique, 1991.

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e aplicações - Volume 1**. São Paulo: Editora Ática, 2010.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações – Volume 2**. 2ª ed. São Paulo: Editora Ática, 2013

FAVARGE, J-M. **L'analyse du travail**. Paris: PUF, 1955.

FONTENELE, F. F. C.; ALVES, F. R. V. (2021). A Pesquisa em Didática Profissional no Brasil e o Cenário Atual da Análise do Trabalho do Professor de Matemática. **Paradigma**, v. 42, n. 1. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p27-42.id940>

FLÓRIDE, M. A.; STEINLE, M. C. B. **Formação continuada em serviço: uma ação necessária ao professor contemporâneo**. Portal Educacional do Paraná. Curitiba: Secretaria do Estado de Educação do Paraná, 2008.

FREITAS, I. M. **Resolução de Sistemas Lineares Parametrizados e seu Significado para o Aluno**. Dissertação de Mestrado. PUC-SP: 1999.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 2011.

FUNDAÇÃO CECIERJ. **Matemática e suas tecnologias**. Fascículo 9, Unidade 30. Sistemas Lineares. Rio de Janeiro: CEJA – CECIERJ, 2016. Disponível em: https://cejarj.cecierj.edu.br/ava_arquivos/material_impresso/matematica/ceja_matematica_unidade_30.pdf. Acesso em: 12 jul., 2023.

GIARETA, M. K.; ORO, N. T.; RICO, R. M. T. Formação de Professores de Matemática: um relato de experiência. **Anais... XVII Encontro Nacional de Prática de Ensino – ENDIPE**, EdUECE- Livro 2, 2014.

GRUBER, C.; ALLAIN, O.; WOLLINGER, P. R. Contribuição da Didática Profissional Francesa para a Educação Profissional. **Anais... V Seminário Nacional de Educação Profissional e Tecnológica**, Belo Horizonte: SENEPT, 2017.

HARGREAVES, A. **Teaching in the Knowledge Society: Education in the Age of Insecurity**. Teachers College Press, 2003.

JORDÃO, A. L. I. **Um estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de sistemas lineares 3x3 no 2º do Ensino Médio**. 2011. 192f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

LABORDE, C. Affronter la complexité des situations didactiques d'apprentissage des mathématiques en classe: défis et tentatives. **Didaskalia**, v. 10, n. 1, p. 97-112, 1997. <https://doi.org/10.4267/2042/23800>

LAMIN, M. R. N. Resolução de problemas modelados com sistemas de equações lineares. 2000.

LEPLAT, J. **Regards sur l'activité en situation de travail. Contribution à la psychologie ergonomique**. Paris: Presses Universitaires de France, 1997.

LEPLAT, J. Aspectos da complexidade em ergonomia. In: DANIELLOU, F. (COORD.). **A ergonomia em busca de seus princípios: debates epistemológicos**. São Paulo: Edgard Blücher, 2004. (p. 57-78).

LÓPEZ, C. S. **Conocimiento del contenido y de estudiantes que posee el profesor de bachillerato en el contexto del concepto solución de sistemas de ecuaciones lineales**. Tesis de maestria - Centro de investigación y de estudios avanzados del instituto politécnico nacional, México, 2012.

LUCCAS, S. Abordagem histórico-filosófica no ensino e na aprendizagem dos sistemas de equações lineares e determinantes. In: **VII Econtro Nacional de educação Matemática**, Pernambuco, 2004.

KITZINGER, J. Focus groups with users and providers of health care. In: POPE, C.; MAYS, N. (Org.). **Qualitative research in health care**. 2ª ed. London: BMJ Books, 2000.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: MACHADO, S. D. A., et al. (Orgs.). **Educação matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999.

MACHADO, S. D. Educação matemática no ensino superior. **Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**, 34-46, 2004.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação matemática: uma (nova) introdução**. São Paulo: EDUC, 2015.

MARGOLINAS, C.; DRIJVERS, P. Didactical Engineering in France; an insider and an outsider's view on its foundations, its practice and its impact. **ZDM - The International Journal of Mathematics Education**, v. 47, n. 6, p. 893-903, 2015. <https://doi.org/DOI 10.1007/s11858-015- 0698-z>

MARGOLINAS, C.; ABBOUD-BLANCHARD, M.; BUENO-RAVEL, L.; DOUEK, N.; FLUCKIGER, A.; GIBEL, P. et al. (Eds.). **En amont et en aval des Ingénieries Didactiques**. Grenoble: La pensée sauvage. 2011.

MARTINS, F. da. C. **Ensino-aprendizagem de sistemas lineares na formação do professor de matemática via exploração, resolução e proposição de problemas**. Dissertação (mestrado acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2019.

MAYEN, P. Les situations professionnelles: un point de vue de didactique professionnelle. **Phronesis**, v. 1, n. 1, p. 59–67, 2012. <https://doi.org/10.7202/1006484ar>

MAYEN, P.; MÉTRAL, J-F.; TOURMEN, C. Les situations de travail: références pour les référentiels, **Recherche et formation – INRP**, Paris: ENS Édition, 2010, (p. 31–46).

MAYEN, P.; OLRÉ, P.; PASTRÉ, P. L'Ingénierie Didactique Professionnelle. In: CARRÉ, P.; GASPARD, P. (Orgs.). **Traité des sciences et des techniques de la Formation**. 4^{ème} édition, 2017. (p. 467 – 482). Tradução de Francisco Régis Vieira Alves. Pesquisa e Ensino, Barreiras (BA), Brasil, 2020.

MORGAN, D. L. **Focus group as qualitative research**. London: Sage, 1997.

MORORÓ, F. N. M. **Didática Profissional (DP) e Teoria Das Situações Didáticas (TSD): Um olhar sobre a formação docente e o ensino de álgebra no 9º Ano**. 2023. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2023.

OCHANINE, D. **L'image opérative**. Paris: recueil de textes, doc ronéo, Laboratoire de Psychologie du Travail, 1981.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PAÍN, S. Conversa com Dra. Sara Pain sobre “Conhecimento, arte, história e política”. In: **ANAIS do II Colóquio sobre a Teoria dos Campos Conceituais**, 2017. Recuperado em 25 de março de 2022: [Anais do Colóquio Internacional sobre a Teoria dos Campos Conceituais – GEEMPA](#).

PASTRÉ, P. **La conceptualisation dans l'action**: bilan et nouvelles perspectives. Éducation permanente, Arcueil: Éducation permanente, Apprendre des situations, p. 13-35, 1999.

PASTRÉ, P. L'analyse du travail en didactique professionnelle. **Revue française de pédagogie**, v. 138, p. 9-17, 2002. <https://doi.org/10.3406/rfp.2002.2859>

PASTRÉ, P. Les compétences professionnelles et leur développement. **La Revue de la CFTD**, França, p. 3-10, 2004.

PASTRÉ, P. Quelques réflexions sur l'organisation de l'activité enseignante. **Recherche et Formation**, v. 56, p. 81-93, 2007. <https://doi.org/10.4000/rechercheformation.907>

PASTRÉ, P. La didactique professionnelle: Um point de vue sur la formation et la professionnalisation. **Education Sciences & Society**, v. 2, n. 1, p. 83-95, 2011. <https://doi.org/10.3917/puf.faber.2011.01>.

PASTRÉ, P. La didactique professionnelle: um point de vue sur la formation et la professionnalisation. **Education sciences & society: competenza e professionalità**, p. 83-95, 2012.

PASTRÉ, P.; MAYEN, P.; VERGNAUD, G. La didactique professionnelle. **Revue française de pédagogie**, v. 154, p. 145-196, 2006.

PERRIN-GLORIAN, M. J. L'ingénierie didactique a l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement des ressources et formação des enseignants. in Margolinas et al.(org.): En amont et en aval des ingénieries didactiques, XV^a École d'Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (PUY-de-Dôme). **Recherches em Didactique des Mathématiques**, v. 1, p. 57-78, 2009.

PERRIN-GLORIAN, M. J. L'ingenierie didactique a l'interface de la recherche avec l'enseignement. Developpement de ressources et formation des enseignants. In: MARGOLINAS C. et al. (eds.) **En amont et en aval des ingénieries didactiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage, p. 57-78, 2011.

PERRIN-GLORIAN, M. J. A l'interface entre recherche et enseignement, les ingénieries didactiques. **Actes du congrès: La TACD en questions, questions à la didactique**, Rennes, 2019.

PERRIN-GLORIAN, M. J.; BELLEMAIN, P. M. B. L'ingenierie didactique entre recherche et ressource pour l'enseignement et la formation des maitres. **Caminhos da Educação Matemática em Revista/Online**, v. 9, n. 1, 2019.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no Ensino Básico**. Lisboa: Ministério da Educação, 2009.

POOLE, D. **Álgebra Linear**. São Paulo – SP: Pioneira Thomsom Learning, 2004.

RANGEL, W. S. A. Projetos de Modelagem Matemática e Sistemas Lineares: Contribuições para a formação de professores de matemática. 139f. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Ouro Preto, 2011.

REIS, E. S. **O estudo de sistemas de equações do primeiro grau em livros didáticos utilizados em escolas brasileiras**. 2010. 135f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2010.

SALLES, F. C. A formação continuada em serviço. **Revista Iberoamericana de Educación**. v. 33, p. 1-8, 2004. <https://doi.org/10.35362/rie3422995>

SANTOS, A. P. R. A.; ALVES, F. R. V. A Engenharia Didática para o ensino de Olimpíadas de Matemática: Situações olímpicas com o amparo do software GeoGebra. **Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias**, v. 13, n. 1, p.141-154, 2018.

SANTOS, G. Á. Dos. **Sistemas lineares e sua representação geométrica: uma abordagem instrumental das soluções algébricas com o uso do GeoGebra**. Monografia/ Guttierry Álex dos Santos. - 2019.

SAVOYANT, A. Eléments d'un cadre d'analyse de l'activité: quelques conceptions essentielles de la psychologie soviétique. **Cahiers de Psychologie**, n. 22, p. 29-42, 1979.

SILVA, H. N.; ABAR, C. A. A. P. A utilização do GeoGebra na reconstrução de atividades do Imagiciel. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2016. **Anais...** São Paulo, 2016.

SILVA, T. M. S da. **Sistemas lineares: uma proposta apoiada na exploração de registros semióticos e na utilização de um recurso computacional**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera, São Paulo, 2016.

SILVA, C. F. da. **Sistemas de Equações Lineares: contribuições de uma sequência didática à luz da teoria de registros de representações semióticas**. 105f. Dissertação (Mestre em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Franciscana, Santa Maria, 2021.

SOUSA, R.; ALVES, F.; AIRES, A.; CATARINO, P. O ensino da cônica parábola: uma abordagem via Categorias Intuitivas e Teoria das Situações Didáticas.

Indagatio Didactica, v. 15, n. 3, p. 207-234, 2023.
<https://doi.org/10.34624/id.v15i3.31456>

SMOLLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática: Ensino Médio, volume 2**. São Paulo: Saraiva, 2003.

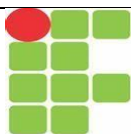
TEMPIER, F.; CHAMBRIS, C. Concevoir une ressource pour l'enseignement de la numération décimale de position. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 37, n. 2-3, p. 289-332, 2017.

TEIXEIRA, P. J. M.; PASSOS, C. C. M. Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau. **Zetetiké**, v. 21, n. 39, p. 155-168, 2013.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, J. **Didáctica das matemáticas**. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, p. 155-191, 1996.

VERGNAUD, G. Représentation et activité: deux concepts étroitement associés. **Recherches en Éducation**, v. 4, p. 9–22, 2007.

APÊNDICE A – Questionário para levantamento de perfil demográfico dos sujeitos da pesquisa



**INSTITUTO FEDERAL
CEARÁ
Campus Fortaleza**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA (PPGECM)
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: ENSINO DE
MATEMÁTICA**

QUESTIONÁRIO

Nesse questionário consta-se um total de seis perguntas, onde pretende-se conhecer alguns aspectos de sua formação acadêmica e de sua trajetória profissional.

Parte I – Identificação do sujeito (o entrevistado)

Nome: _____ **Idade:** _____

Tempo de exercício docente:

- () 1 a 5 anos
() 6 a 10 anos
() 11 a 15 anos
() mais de 15 anos.

Formação do entrevistado:

1. Formação inicial (graduação): () Licenciatura em Matemática () Outra

2. Formação continuada (Pós-graduação):

() Especialização () Mestrado () Doutorado () Não tenho

3. você participou de algum processo de formação continuada nos últimos quatro meses? (cursos, palestras, seminários etc.):

() Sim () Não

Se sim, qual (is)?

5. Você utiliza recursos tecnológicos em suas aulas? Se sim, qual(is)?

Você conhece o software GeoGebra; () Sim () Não

Você costuma utilizar o software GeoGebra em suas aulas: _____

APÊNDICE B – Entrevista Grupo Focal

INSTITUTO FEDERAL
CEARÁ
Campus Fortaleza

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE
CIÊNCIAS EMATEMÁTICA**

**ENTREVISTA GRUPO
FOCAL**

01: Quem aqui gostaria de compartilhar recentemente algum desafio enfrentado ao ensinar sistemas de equações lineares?

02: Você já percebeu alguma dificuldade por parte dos alunos em compreender conceitos específicos nos sistemas de equações lineares? Se sim, poderíamos compartilhar experiências e explorar estratégias que foram eficazes para superá-las?

03: Para tornar o ensino mais eficaz, temos explorado diferentes recursos e estratégias. Alguém já experimentou algo que funcionou bem? Pode ser um recurso online ou uma abordagem de sala de aula específica.

04: Ao ensinar sistemas de equações lineares, como vocês normalmente abordam esse tópico em sala de aula? Alguém gostaria de compartilhar uma experiência recente e como apresentou os conceitos?

05: Como você definiria o conceito de sistemas lineares, conforme sua compreensão, e como eles articulariam essa definição durante uma sessão de ensino?

06: Às vezes, os alunos têm dificuldade em ver a aplicação prática dos sistemas lineares em suas vidas. Alguém já enfrentou essa situação? Como vocês abordaram a questão da relevância desse tópico?

07: Lidar com a diversidade de habilidades dos alunos pode ser um desafio. Alguém tem estratégias específicas para abordar isso? Talvez vocês possam compartilhar como adaptam o ensino para diferentes níveis de conhecimento.

08: Para enriquecer nossas aulas, estamos sempre em busca de recursos e materiais úteis. Alguém encontrou algo particularmente valioso ao ensinar sistemas de equações lineares? Pode ser um livro, um site ou um aplicativo.

APÊNDICE C – Situações Didáticas Profissionais aplicadas com os professores



INSTITUTO FEDERAL
CEARÁ
Campus Fortaleza

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

NOME: _____

SITUAÇÃO DIDÁTICA PROFISSIONAL I, II, III E IV

SDP I - Dispõe-se de x notas de 50 reais, y notas de 20 reais e z notas de 10 reais, totalizando 15 notas e a quantia de R\$ 500,00. Neste contexto resolva o problema e assinale verdadeiro ou falso nas alternativas.

- a) A resolução da equação matricial $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 15 \end{bmatrix}$ permite determinar a quantidade de cada tipo de nota.
- b) Se $x = 6$ então $y - z = 9$
- c) Há infinitas ternos de números inteiros (x, y e z) que satisfazem as condições dadas.
- d) Se $Z = 4$ então $x - y = 5$.

SDP II - Um negociante trabalha com as mercadorias A, B e C. se este vender cada unidade de A por R\$2,00, cada unidade de B por R\$3,00 e cada unidade de C por R\$4,00 obtém uma receita de R\$50,00. Mas, se vender cada unidade respectivamente por R\$2,00, R\$6,00 e R\$3,00 a receita será de R\$60,00

- a) Calcule o número de unidades que possui cada uma das mercadorias
- b) Apresente o conjunto solução desse problema.
- c) Quais seriam as possíveis soluções do problema, tendo em vista que o conjunto solução é dado por números inteiros positivos.

SDP III - Três escolas participaram de um torneio esportivo em que provas de dez modalidades foram disputadas. Aos vencedores de cada prova foram atribuídas medalhas de ouro, de prata e de bronze, respectivamente aos 1º, 2º e 3º lugares. Nesse torneio, a cada tipo de medalha foi atribuída uma quantidade de pontos e a escola vencedora seria aquela que obtivesse o maior número de pontos.

Escolas	Ouro	Prata	Bronze
A	4	2	2

B	5	3	1
C	4	3	3

a) Considerando a pontuação final da escola A, B e C sendo 46, 57 e 53 respectivamente, descubra quantos pontos valem as medalhas de ouro, prata e bronze.

b) Apresente o conjunto solução desse problema e explique como ele se apresentaria geometricamente.

SDP IV - Resolva os sistemas lineares.

$$1) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y + 2z = 10 \\ 3x + 2y + 2z = 13 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 8 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 5 \\ 4x + y + 3z = 7 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x + y + z = 4 \\ -2x - 2y - 2z = 9 \\ -5x + 5,5y + 0,5z = -7,5 \end{cases} \quad 5) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 7x - 5y + z = 9 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Com a ajuda dos controles deslizantes fornecidos no problema, encontre todas as possibilidades para as posições relativas dos três planos π_1 , π_2 e π_3 , justificando-as de acordo com seu entendimento responda a tabela;

Sistemas	Proporcionalidade nos coeficientes e no termo independente ou combinação linear	Posição relativa entre os planos	Solução e classificação do sistema
1			
2			
3			
4			
5			

APÊNDICE D – Questionário Final

INSTITUTO FEDERAL
CEARÁ
Campus Fortaleza

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA**

NOME: _____

QUESTIONÁRIO FINAL

- 1 A modelagem de problemas com exemplos práticos, ou a abordagem do conteúdo de maneira contextualizada pode facilitar o aprendizado do aluno no ensino de sistemas lineares? Justifique.
- 2 Você acredita que o uso da Teoria das Situações Didáticas como proposta metodológica e como a modelagem de problemas, pode ajudar o aluno na construção do conhecimento com êxito? Justifique seu pensamento.
- 3 Essa formação contribuiu de alguma maneira com a sua profissão docente? Se sim, como?
- 4 O uso de recursos tecnológicos é capaz de auxiliar no processo de aprendizagem e de auxiliar no processo de construção de significados para a abstração de sistemas lineares?
- 5 Nas Situações didáticas trabalhadas você pode perceber que buscamos associar os diversos tipos de conversões do sistema linear. As questões buscam trazer abordagem em linguagem (natural, algébrica, geométrica). Você enquanto professor acredita que essas diferentes abordagens auxilie o aluno na aprendizagem e fixação do estudo em um determinado tópico? Justifique.

Anexo A – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido - TCLE**TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO**

Título da pesquisa: Situações Didáticas Profissionais na formação continuada do professor de matemática: Uma análise sobre o ensino de Sistemas De Equações Lineares

Pesquisadora: Maria Graciene Moreira dos Santos
Orientador: Dr. Francisco Régis Vieira Alves
Coorientador: Dr. Francisco José de Lima

Você está sendo convidado a participar como voluntário de uma pesquisa. Este documento, chamado Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, visa assegurar seus direitos como participante e é elaborado em duas vias, uma que deverá ficar com você e outra com o pesquisador.

Por favor, leia com atenção e calma, aproveitando para esclarecer suas dúvidas. Se houver perguntas antes ou mesmo depois de assiná-lo, você poderá esclarecê-las com o pesquisador. Se preferir, pode levar este Termo para casa e consultar seus familiares ou outras pessoas antes de decidir participar. Não haverá nenhum tipo de penalização ou prejuízo se você não aceitar participar ou retirar sua autorização em qualquer momento.

Justificativa e objetivos:

Desejamos investigar via Engenharia Didática, Teoria das situações Didáticas e Didática Profissional, o pragmatismo de professores atuantes que compõem o quadro de alunos da especialização em Ensino de Matemática com Ênfase na Formação de Professores da Educação Básica do Instituto Federal da cidade de Juazeiro do Norte/ CE acerca do ensino sistemas de equações lineares, durante os encontros de formação.

Como justificativa para o desenvolvimento dessa pesquisa destaca-se a necessidade de garantir suporte a formação continuada de professor de matemática para o exercício de sua função, de modo que venha a minimizar ou até sanar suas fragilidades e os obstáculos enfrentados.

As situações didáticas profissionais estruturadas têm como objeto matemático sistemas de equações lineares, assunto este presente no currículo da Educação Básica e do Ensino Superior, e se configura como uma oportunidade para o avanço do tema.

Como questionamento norteador dessa pesquisa temos: De que forma uma abordagem com Situações Didáticas Profissionais pode contribuir para o desenvolvimento de competências pedagógicas e aprimoramento do processo formativo?

Temos como objetivo Geral: avaliar o papel das Situações Didáticas

Profissionais na formação do professor de matemática, especificamente no contexto do ensino de sistemas de equações lineares, analisando seu impacto e contribuição para o processo formativo. E como objetivos específicos:

1. Explorar as concepções dos professores, suas abordagens de ensino e os obstáculos enfrentados no ensino de sistemas de equações lineares;
2. Desenvolver um conjunto de estratégias para o ensino de sistemas lineares durante a formação com os professores, por meio da criação de Situações Didáticas Profissionais, no intuito de promover uma reflexão sobre os desafios envolvidos;
3. Identificar os conceitos pragmáticos manifestados pelos professores ao longo do processo formativo;
4. Investigar o processo de construção ou adaptação dos conceitos organizadores da ação eficaz, denominados conceitos pragmáticos, por meio da reflexão sobre o trabalho docente durante a participação em Situações Didáticas Profissionais (SDPs).

Procedimentos:

Participando do estudo você está sendo convidado assistir e participar ativamente das formações de forma presencial, sendo convidado a fazer o preenchimento dos questionários propostos, participar de gravação áudio dos encontros, e responder as situações didáticas propostas.

Desconfortos e riscos:

Você **não** deve participar deste estudo se sentir algum incômodo ou constrangimento com registros de fotos, áudios, vídeos e transcrição de material escrito que forem coletados no decorrer da aplicação da pesquisa. Você também poderá optar por não participar, se considerar que o envolvimento com o curso e com os professores (pesquisadores), além do ato de responder os questionários e as situações didáticas possam gerar cansaço, estresse, aborrecimento e ansiedade.

Dessa forma, de modo a evitar possíveis aborrecimentos, o participante terá a liberdade de sair desse estudo sem nenhum prejuízo, a qualquer momento, durante a coleta de dados da pesquisa caso ocorra algumas situações em que se sinta desconfortável. No entanto, caso o participante opte pela participação na pesquisa e tenha algum desses episódios, fica a cargo dos pesquisadores responsáveis o encaminhamento para o acompanhamento médico e/ou psicológico necessário.

Todavia, cabe destacar que, ao escolher participar e cooperar com o progresso dessa pesquisa, você poderá estar exposto aos riscos mínimos de natureza; **emocional e/ou psicológica**. Esses riscos são representados por sentimentos de estresse, cansaço, ansiedade, desconforto, possibilidade de constrangimento ao responder os questionários propostos, quebra de sigilo e de anonimato.

No entanto, no intuito de minimizar os possíveis riscos que possam se manifestar no decorrer desta pesquisa, será garantido aos participantes total sigilo em relação a sua identidade e das respostas obtidas nas situações a serem trabalhadas, evidenciando que os dados colhidos serão utilizados apenas para fins científicos e que estarão de posse unicamente dos pesquisadores à frente desse trabalho.

Além disso, também será utilizada uma abordagem mais humanizada, baseada na escuta e no acolhimento, prezando pela liberdade do participante, com intuito de se criar um ambiente seguro e acolhedor, com a intenção de evitar qualquer episódio de ansiedade, cansaço, constrangimento, estresse ou desconforto.

Benefícios:

Ao participar desta pesquisa os professores terão a oportunidade de compartilhar seu pragmatismo diante das situações didáticas profissionais propostas, e com isso, fazer uma reflexão das ações e estratégias utilizadas em sua prática, possibilitando a partir dessa vivência uma visão mais consolidada acerca do objeto matemático em questão.

A pesquisa trata-se de uma ação formativa que visa contribuir com a formação continuada desses professores, uma vez que ao identificar os obstáculos profissionais vivenciados na ação deles, será proposto diferentes possibilidades e métodos de aplicação do objeto matemático, visando superar os obstáculos encontrados nos conceitos organizadores da ação desses sujeitos, e aperfeiçoar a sua prática em sala de aula.

Acompanhamento e assistência:

Caso o participante necessite de algum acompanhamento pedagógico/didático durante a realização da pesquisa poderá solicitar o auxílio a qualquer momento aos pesquisadores responsáveis pela pesquisa. Caso o participante sinta algum desconforto físico ou psicológico decorrente da realização da pesquisa, os pesquisadores se responsabilizarão em encaminhar para o atendimento médico ou psicológico necessário ao participante.

Se assim o desejar, o participante poderá solicitar a interrupção da participação na pesquisa, caso esteja lhe causando algum desconforto, não existindo, portanto, nenhum tipo de punição. Além disto, reforçamos que a realização dessa pesquisa não possui a intenção de causar episódios de ansiedade e tensão, porém, caso ocorra, é recomendado o total desligamento do participante com a pesquisa e em seguida os pesquisadores deverão encaminhar para o atendimento psicológico necessário ao participante.

Desse modo, será buscada maneiras de minorar desconfortos e angústias, sendo assegurado aos participantes liberdade nas suas escolhas e um ambiente seguro. Ademais, é assegurado, por parte dos pesquisadores envolvidos, a confidencialidade, o sigilo das informações obtidas e o anonimato.

Ademais, ao final da investigação, a pesquisa será encaminhada para os participantes, a fim de que todos verifiquem seus direitos assegurados.

Sigilo e privacidade:

Você tem a garantia de que sua identidade será mantida em sigilo e nenhuma informação será dada a outras pessoas que não façam parte da equipe de pesquisadores. Na divulgação dos resultados desse estudo, seu nome não será citado.

Ressarcimento e indenização:

Você terá direito ao ressarcimento das despesas diretamente decorrentes de sua participação na pesquisa e à indenização pelos danos resultantes desta, nos termos da Lei.

Contato:

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, você poderá entrar em contato com os pesquisadores Maria Graciene Moreira dos Santos ou Francisco Régis Vieira Alves, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Avenida Treze de Maio, n. 2081, 60040-215, Fortaleza, Ceará, Brasil. E-mail para correspondência: maria.graciene.moreira.06@aluno.ifce.edu.br , Gracienemoreira546@gmail.com ou fregis@ifce.edu.br. Telefone para contato: (88) 9 99425541 (Pesquisadora Graciene) ou (85) 3307 4020 (coordenação) Em caso de denúncias ou reclamações sobre sua participação e sobre questões éticas do estudo, você poderá entrar em contato com a secretaria do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) do IFCE das 08:00hs às 12:00hs e das 13:00hs as 17:00hs no IFCE Reitoria - R. Jorge Dumar, 1703 - Jardim América, Fortaleza - CE, 60410-426; fone (85) 34012332 e-mail: cep@ifce.edu.br.

Consentimento livre e esclarecido:

Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais riscos e o incômodo que esta possa acarretar, aceito participar e declaro estar recebendo uma via original deste documento assinada pelo pesquisador e por mim, tendo todas as folhas por nós rubricadas:

Nome do(a) participante:

Contato telefônico (opcional):

e-mail (opcional):

(Assinatura do participante ou nome e assinatura do seu RESPONSÁVEL LEGAL)

Data: ____/____/____

Responsabilidade do Pesquisador:

Asseguro ter cumprido as exigências da resolução 510/2016 CNS/MS e complementares na elaboração do protocolo e na obtenção deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Asseguro, também, ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Informo que o estudo foi aprovado pelo CEP perante o qual o projeto foi apresentado. Comprometo-me a utilizar o material e os dados obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

Nome do(a) pesquisador(a):

[Assinatura do(a) pesquisador(a)]

Data: ____/____/____