

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ.

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO.

PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE TELECOMUNICAÇÕES.

ROTTERDAN FERNANDES ABREU

**ESTUDO DAS PROPRIEDADES DIELETRICAS DA MATRIZ $\text{SrBi}_2\text{Nb}_2\text{O}_9$ (SBN)
COM ADIÇÃO La_2O_3 PARA APLICAÇÕES EM MICROONDAS**

FORTALEZA

2017

ROTHERDAN FERNANDES ABREU

**ESTUDO DAS PROPRIEDADES DIELETRICAS DA MATRIZ $\text{SrBi}_2\text{Nb}_2\text{O}_9$ (SBN)
COM ADIÇÃO La_2O_3 PARA APLICAÇÕES EM MICROONDAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Telecomunicações do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará como requisito parcial necessário para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Telecomunicações.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Xavier Gouveia

Co-Orientador: Prof. Dr. Antonio Sérgio B. Sombra.

FORTALEZA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Instituto Federal do Ceará - IFCE

Sistema de Bibliotecas - SIBI

Ficha catalográfica elaborada pelo SIBI/IFCE, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A162e Abreu, Roterdan Fernandes.

ESTUDO DAS PROPRIEDADES DIELÉTRICAS DA MATRIZ $\text{SrBi}_2\text{Nb}_2\text{O}_9$ (SBN) COM ADIÇÃO La_2O_3 PARA APLICAÇÕES EM MICROONDAS / Roterdan Fernandes Abreu. - 2017.

193 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado) - Instituto Federal do Ceará, Mestrado em Engenharia de Telecomunicações, Campus Fortaleza, 2017.

Orientação: Prof. Dr. Daniel Xavier Gouveia.

Coorientação: Prof. Dr. Antônio Sérgio B. Sombra.

1. Eletromagnetismo. 2. Óptica integrada. I. Título.

CDD 621.382



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE
TELECOMUNICAÇÕES

Roterdan Fernandes Abreu

Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia de Telecomunicações, sendo aprovada pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Telecomunicações do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará e pela banca examinadora:

Orientador: Prof. Dr. Daniel Xavier Gouveia

Universidade Federal do Ceará – UFC

Co-orientador: Prof. Dr. Antonio Sergio Bezerra Sombra

Instituto Federal do Ceará – IFCE

Prof. Dr. Raimundo Nogueira Costa Filho

Universidade Federal do Ceará – UFC

Prof. Dr. Artur da Silva Gouveia Neto

Universidade Federal de Alagoas – UFAL

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus amados pais, Laura e Francisco de Assis e em especial à minha noiva Jardeline Santos, e sem dúvidas, aos queridos professores que tanto contribuíram com esta caminhada.

AGRADECIMENTOS

Na caminhada da vida, a cada conquista trazemos conosco importantes aprendizados e pessoas queridas que contribuíram direta e indiretamente para nossas vitórias. Assim, neste momento deixo aqui os meus agradecimentos:

À minha mãe Laura e meu pai Francisco, por todo afeto e apoio dado em minha caminhada acadêmica.

À minha noiva Jardeline Santos, por ter sonhado e acreditado junto comigo, pelos incentivos, por compreender os momentos de ausência e por todo amor incondicional nessa vida.

Aos meus orientadores, Prof. Dr. Daniel Xavier Gouveia e Profº Antonio Sérgio Bezerra Sombra, pela confiança, dedicação, consideração e acima de tudo estímulo certo na hora certa, atributos imprescindíveis para que este trabalho fosse realizado.

Aos professores do PPGET, pela efetiva contribuição para a vida, com ensinamentos tão dedicados, os quais constituíram para a base da motivação para este trabalho. Em especial ao professor Ewerton Wagner Santos Caetano que tanto me orientou e ensinou.

Aos meus grandes amigos da escola E.E.M.T.I José de Borba Vasconcelos, que tanto me apoiaram e confiaram em meu empenho. Em especial aos amigos Márcio Roque Cordeiro, Maria Áurea de Sousa Santana, Eduardo Viana Freires, Evangelina Andrade de Sousa, Francisco Alisson Oliveira da Silva, Francisco Luciano Félix, Marcondes Silva The Júnior.

Aos amigos do LOCEM e PPGET, pelo companheirismo e solidariedade, atributos formadores da grande amizade construída durante o mestrado.

Em especial ao querido amigo Laudenor Amorim que tanto me ajudou nessa caminhada.

Ao Instituto Federal de Educação Tecnológica do Ceará - IFCE pela oportunidade oferecida através do mestrado.

Aos demais funcionários do PPGET.

A todos que, de uma forma ou de outra, contribuíram para o êxito deste trabalho.

“Os que se encantam com a prática sem a ciência são como os timoneiros que entram no navio sem timão nem bússola, nunca tendo certeza do seu destino”.

(Leonardo da Vinci)

RESUMO

Neste trabalho foi estudada a influência da adição do óxido de lantânio (La_2O_3) sobre a matriz cerâmica de bismuto ($\text{SrBi}_2\text{Nb}_2\text{O}_9$) para aplicação em radiofrequências (RF) e microondas (MW). O bismuto (SBN) faz parte do grupo de materiais de estruturas perovskita que pertencem à família Aurivillius e possuem a fórmula geral $(\text{Bi}_2\text{O}_2)_2+(\text{An}-1\text{BnO}_3\text{n}+1)_2$. É possível destacar que os cátions com elevada valência estão localizados em sítios B, enquanto os sítios A são ocupados por cátions maiores e n é o número de camadas octaédricas entre as camadas de bismuto $(\text{Bi}_2\text{O}_2)_2$. A partir do estudo empregado nesta dissertação foi possível observar que na faixa de microondas as frequências ressonantes das amostras variaram de 1.840 a 3.221 GHz. Além disso, suas tangentes de perdas dielétricas diminuíram ao longo do processo, ou seja, a medida que aumentamos a concentração de La_2O_3 sobre a matriz cerâmica $\text{SrBi}_2\text{Nb}_2\text{O}_9$ o valor da perda diminui em relação a amostra pura (sem adição de lantânio), os valores obtidos para esta grandeza são da ordem de 10^{-2} . Por fim, foi utilizada a simulação no programa HFSS com intuito de corroborar os dados obtidos experimentalmente e analisar a aplicação do material estudado como uma antena ressoadora dielétrica. Foi possível observar que em todas as amostras a perda de retorno está abaixo de -10 dB, este fator é imprescindível para a utilização do material como DRA.

PALAVRAS-CHAVE: Bismuto; lantânio; microondas; radiofrequência.

ABSTRACT

In this work the influence of the addition of lanthanum oxide (La_2O_3) on the bismuth ceramic matrix ($\text{SrBi}_2\text{Nb}_2\text{O}_9$) for radiofrequency (RF) and microwave (MW) applications was studied. Bismuth (SBN) is part of the group of materials of perovskite structures belonging to the family Aurivillius, and have the general formula $(\text{Bi}_2\text{O}_2)^{2+} (\text{An}-1\text{BnO}_{3n+1})^{2-}$. It is possible to emphasize that the high valence cations are located in B sites whereas the A sites are occupied by larger cations and n is the number of octahedral layers between the bismuth $(\text{Bi}_2\text{O}_2)^{2+}$ layers. From the study used in this dissertation it was possible to observe that in the microwave range the resonant frequencies of the samples ranged from 1,840 to 3,221 GHz. Moreover, their tangents of dielectric losses decreased during the process, that is, as we increased the concentration of La_2O_3 on the $\text{SrBi}_2\text{Nb}_2\text{O}_9$ ceramic matrix the value of the loss decreases relative to the pure sample (without addition of lanthanum), the values obtained for this magnitude are of the order of 10^{-2} . Finally, it was used the simulation in the HFSS program in order to corroborate the data obtained experimentally and to analyze the application of the studied material as a dielectric resonance antenna. It was possible to observe that in all samples the return loss is below -10 dB, this factor is essential for the use of the material as DRA.

Keywords: Bismuth; lanthanum; microwave; radio frequency.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Superfície gaussiana com centro em uma carga pontual q .	17
Figura 2: Esquema de linhas de campo magnético atuando em um ímã.	21
Figura 3: Trajetória curva sem forma específica envolvendo um fio condutor.	25
Figura 4: Modo ampliado da Figura 3.	26
Figura 5: Circuito com diferentes superfícies envolvendo o capacitor.	29
Figura 6: Campo elétrico em um meio dielétrico.	33
Figura 7: Circuito de corrente alternada puramente resistivo.	50
Figura 8: Representação da tensão alternada na forma fasorial.	51
Figura 9: Corrente e fem no diagrama fasorial.	52
Figura 10: Circuito de corrente alternada puramente capacitivo.	52
Figura 11: Representação de corrente capacitiva e tensão no diagrama fasorial.	54
Figura 12: circuito de corrente alternada puramente indutivo.	54
Figura 13: representação do circuito de corrente alternada RLC.	56
Figura 14: Antena como dispositivo de transição.	60
Figura 15: Geometria cilíndrica da DRA.	78
Figura 16: Esquema simplificado do tubo de raios catódicos.	87
Figura 17: Lei de Bragg.	90
Figura 18: Sistema de medição de propriedades utilizando o método de Hakki-Coleman.	96
Figura 19: Ressonador coaxial de meia onda.	97
Figura 20: Sistema de medição do τf com o forno acoplado.	101
Figura 21: Acoplamento da sonda ao modo $HE_{11\delta}$ do DRA cilíndrico.	103
Figura 22: medida de monopolo e gaps de ar entre sonda e DRA, plano terra e DRA.	104
Figura 23: $\tan\delta$ em função da concentração de La_2O_3 amostras.	107
Figura 24: ϵ_r em função da concentração de La_2O_3 amostras SBN0La, SBN3La, SBN5La, SBN10La, SBN15La.	108

Figura 25: τf das amostras SBN0La, SBN3La, SBN5La, SBN10La, SBN15La sinterizadas em 1000°C/2h.	109
Figura 26: τf da amostra SBN0La sinterizada em 1000°C/2h.	110
Figura 27: Diagrama (Coeficiente de reflexão x Frequência). Análise da amostra SBN0La sinterizada em 1000°C/2h com variação de temperatura.	111
Figura 28: τf da amostra SBN3La sinterizada em 1000°C/2h.	112
Figura 29: τf da amostra SBN5La sinterizada em 1000°C/2h.	112
Figura 30: τf da amostra SBN5La sinterizada em 1000°C/2h.	113
Figura 31: τf da amostra SBN15La sinterizada em 1000°C/2h.	113
Figura 32: Diagrama (Coeficiente de reflexão x Frequência). Análise da amostra SBN3La sinterizada em 1000°C/2h com variação de temperatura.	114
Figura 33: Diagrama (Coeficiente de reflexão x Frequência). Análise da amostra SBN5La sinterizada em 1000°C/2h com variação de temperatura.	114
Figura 34: Diagrama (Coeficiente de reflexão x Frequência). Análise da amostra SBN10La sinterizada em 1000°C/2h com variação de temperatura. 115	115
Figura 35: Diagrama (Coeficiente de reflexão x Frequência). Análise da amostra SBN15La sinterizada em 1000°C/2h com variação de temperatura.	115
Figura 36: Perda de retorno experimental e simulada pelo HFSS, para a amostra de SBN0La.	119
Figura 37: Perda de retorno experimental e simulada pelo HFSS, para a amostra de SBN3La.	119
Figura 38: Perda de retorno experimental e simulada pelo HFSS, para a amostra de SBN5La.	120
Figura 39: Perda de retorno experimental e simulada pelo HFSS, para a amostra de SBN10La.	120
Figura 40: Perda de retorno experimental e simulada pelo HFSS, para a amostra de SBN15La.	121

Figura 41: Parcela real das impedâncias experimental e simulada no HFSS para amostra pura.	123
Figura 42: Parcela real das impedâncias experimental e simulada no HFSS para amostra SBN3La.	123
Figura 43: Parcela real das impedâncias experimental e simulada no HFSS para amostra SBN5La.	124
Figura 44: Parcela real das impedâncias experimental e simulada no HFSS para amostra SBN10La.	124
Figura 45: Parcela real das impedâncias experimental e simulada no HFSS para amostra SBN5La.	125
Figura 46: Componente imaginária das impedâncias experimental e simulada no HFSS para amostra pura.	127
Figura 47: Componente imaginária das impedâncias experimental e simulada no HFSS para amostra SBN3La.	128
Figura 48: Componente imaginária das impedâncias experimental e simulada no HFSS para amostra SBN5La.	128
Figura 49: Componente imaginária das impedâncias experimental e simulada no HFSS para amostra SBN10La.	129
Figura 50: Componente imaginária das impedâncias experimental e simulada no HFSS para amostra SBN15La.	129
Figura 51: Carta de Smith experimental e simulada no HFSS para amostra pura.	130
Figura 52: Carta de Smith experimental e simulada no HFSS para amostra SBN3La.	131
Figura 53: Carta de Smith experimental e simulada no HFSS para amostra SBN5La.	131
Figura 54: Carta de Smith experimental e simulada no HFSS para amostra SBN10La.	132
Figura 55: Carta de Smith experimental e simulada no HFSS para amostra SBN15La.	133
Figura 56: Diagrama de radiação obtida através da simulação numérica (HFSS) para a amostra pura.	134
Figura 57: Diagrama de radiação obtida através da simulação numérica (HFSS) para a amostra SBN3La.	134
Figura 58: Diagrama de radiação obtida através da simulação numérica (HFSS) para a amostra SBN5La.	135
Figura 59: Diagrama de radiação obtida através da simulação numérica (HFSS) para a amostra SBN10La.	135

Figura 60: Diagrama de radiação obtida através da simulação numérica (HFSS) para a amostra SBN15La.	136
Figura 61: Diagrama de radiação em (3-D) obtida através da simulação numérica (HFSS) para a amostra pura.	136
Figura 62: Diagrama de radiação em (3-D) obtida através da simulação numérica (HFSS) para SBN3La.	137
Figura 63: Diagrama de radiação em (3-D) obtida através da simulação numérica (HFSS) para SBN5La.	137
Figura 64: Diagrama de radiação em (3-D) obtida através da simulação numérica (HFSS) para SBN10La.	138
Figura 65: Diagrama de radiação em (3-D) obtida através da simulação numérica (HFSS) para SBN15La.	138

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Materiais utilizados na preparação das amostras cerâmicas ferroelétricas.	84
Tabela 2 – Propriedades dielétricas na faixa de microondas das amostras*	105
Tabela 3 – Frequências de ressonância para as temperaturas inicial e final das amostras.	114
Tabela 4 – Coeficiente de reflexão para as temperaturas inicial e final das amostras.	115
Tabela 5: Dados fornecidos ao HFSS.	116
Tabela 6: Perda de Retorno em (dB). Dados experimentais e simulados.	116
Tabela 7– Frequência de ressonância (f), Largura de Banda (BW) em -10 dB com valores experimentais (Exp.) e simulados (Sim.) das amostras.	120
Tabela 8 – Resistências e reatâncias, comparação com valores experimentais (Exp.) e simulados (Sim.) no HFSS.	124
Tabela 9 – Componente imaginária da impedância complexa, comparação com valores experimentais (Exp.) e simulados (Sim.) no HFSS.	125
Tabela 10 – Diretividade; Ganho; potência de entrada (P_{in}); potência de radiação (P_{rad}); Eficiência de condução e dielétrica (ϵ); determinada pela simulação no HFSS.	137

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

SBN	$\text{SrBi}_2\text{Nb}_2\text{O}_9$.
ICSD	<i>Inorganic Crystal Structure Database.</i>
JCPDS	<i>Joint Committe of Powders Diffraction Studies.</i>
FWHM	<i>Full Width at the Half Maximum</i> - Largura total à meia altura.
R_{wp}	Erro residual ponderado.
R_{exp}	Valor esperado para R_{wp} .
S	Qualidade do refinamento.
d_{WD}	Estatística de <i>Durbin-Watson</i> .
V	Volume da célula.
MEV	Microscopia Eletrônica de Varredura.
C	Capacitância.
E_a	Energia de ativação.
TCC	Coeficiente de variação da Capacitância com a Temperatura.
P_s	Polarização de saturação.
P_r	Polarização remanescente.
E_c	Campo coercitivo.
ϵ'_r	Permissividade dielétrica.

ϵ_0	Permissividade livre no vácuo.
$\tan \delta_E$	Tangente de perda dielétrica.
Q	Fator de qualidade.
τ_f	Coeficiente da frequência ressonante.
ω	Frequência angular.
σ_{ac}	Condutividade dielétrica AC.
M	Módulo dielétrico.
k	Constante de <i>Boltzmann</i> .
σ_0	Fator pré-exponencial ou fator de frequência.
T	Temperatura.
T_c	Temperatura de <i>Curie</i> .
Z	Impedância.
D	Diâmetro.
h	Altura.
f_r	Frequências de ressonância.
PVA	Álcool Polivinílico.
RF	Radio Frequência.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	13
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	15
2.1 Introdução à teoria do eletromagnetismo	15
2.2 Lei de Gauss	16
2.3 Primeira lei de Maxwell para a magnetostática	20
2.4 Lei de Faraday	22
2.5 Lei de Ampère-Maxwell	24
2.6 Dielétricos	32
2.7 Propriedades magnéticas da matéria	39
2.8 Capacitores	46
2.9 Antenas	59
2.9.1 Parâmetros fundamentais de antenas	60
2.9.1.1 Diagrama de radiação	60
2.9.1.2 Densidade de potência radiada	61
2.9.1.3 Intensidade de radiação	64
2.9.1.4 Diretividade	65
2.9.1.5 Ganho	66
2.9.1.6 Eficiência de antenas	66
2.10 Antenas ressoadoras dielétricas	67
2.10.1 Permissividade (ϵ_r)	70
2.10.2 Tangente de perdas	71
2.10.3 Fator de qualidade Q	75
2.10.4 Análise da DRA cilíndrica	75
3 ESTUDO DOS MÉTODOS DE CARACTERIZAÇÃO FÍSICA DO MATERIAL	83
3.1 Preparação das amostras cerâmicas	84
3.2 Caracterização da estrutura cristalina através de difração de raios x (DRX)	85
3.2.1 Difração de raios x e a lei de bragg	89
3.2 Método de refinamento Rietveld	91
3.2.1 Descrição do método	92
3.3 Microscopia eletrônica de varredura (MEV)	93
4 MÉTODOS E MATERIAIS	95
4.1 Método de Haaki-Coleman	95
4.2 Medidas de monoplo	102
4.3 Simulação numérica em HFSS	104
5 RESULTADOS E DISCUSSÕES	106
5.1 Análise dielétrica na faixa de microondas	106
5.2 Coeficiente de temperatura da frequência de ressonância (τf)	108
5.3 Estudo da matriz SRBI2NB2O9 com adições de LA2O3 para aplicação como DRA	116

6 CONCLUSÕES	140
7 PERSPECTIVAS	142
8 APÊNDICES	143
A.I - Solução da equação de Laplace em coordenadas cilíndricas	143
A.II - Solução da equação de onda em coordenadas cilíndricas	158
APÊNDICE B	164
B.I Expansão da função exponencial em série de Taylor	164
B.II Expansão da função logarítmica em série de Taylor	165
B.III Expansão da função binomial em série de Taylor	166
APÊNDICE C	168
C.I	168
C.II	170
C.III	172
APÊNDICE D	175
9 REFERÊNCIAS	184

INTRODUÇÃO

Com o advento da internet e a ascensão das telecomunicações o mundo moderno passou a ficar cada vez mais conectado e o anseio dos consumidores por novas tecnologias fez com que houvesse uma crescente e rápida busca por sistemas de preço acessível e com melhor desempenho. Como exemplo desse fenômeno podemos citar a tecnologia móvel de celulares, que nas últimas duas décadas tem sofrido grande expansão no mundo inteiro, ocasionada pelo avanço tecnológico aliado a redução de custos na fabricação.

No Brasil, por exemplo, a última pesquisa de amostra de domicílios (Pnad), feita pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) em 2011, mostra que 115,4 milhões de brasileiros com 10 anos ou mais de idade – número que corresponde a 69,1% da população consultada pelos pesquisadores do Instituto – possuem pelo menos um telefone celular móvel de uso pessoal.

Porém, vale destacar que o celular não continuou com sua mera função inicial, ligações e envio de mensagens de texto, pois os anseios por tecnologia da sociedade aumentaram e com isso as funções dos celulares. A necessidade de conexão e da realização de multitarefas em qualquer lugar, como acesso ao e-mail, redes sociais, agenda de compromissos e aplicativos inteligentes são algumas das motivações as quais fizeram com que os aparelhos passassem a ser desenvolvidos de forma a proporcionar mais eficiência e menor volume, no que tange ao seu tamanho e forma.

A partir dessas exigências, se faz necessária a busca constante por novos materiais que proporcionem o aprimoramento dessas e de outras tecnologias, com estudos aprofundados na área de microondas. Nesse contexto, podemos citar a cerâmica de óxido dielétrico que trouxe uma enorme inovação para a indústria de comunicação sem fio de microondas, reduzindo tanto o tamanho como o custo de componentes eletrônicos como filtros, osciladores e antenas. Vale destacar que, estes possuem inúmeras aplicações que vão desde a telefonia celular até sistemas de posicionamento global (GPS) (SEBASTIAN, 2008).

Consequentemente, essa necessidade de miniaturização e inovação tecnológica trouxeram como resultado uma maior demanda por ressoadores dielétricos (DRs) – componentes integrantes de circuitos eletrônicos que possuem baixa perda – compostos por cerâmicas dielétricas, que tem como objetivo diminuir os tamanhos das antenas e aumentar a frequência de operação. Assim, é possível destacar que os materiais dielétricos operando nas faixas de radiofrequência (RF) e microondas (MW) desempenham um papel fundamental para os sistemas de comunicações globais (SEBASTIAN, 2008).

Neste trabalho foi estudada a matriz cerâmica de bismuto ($\text{SrBi}_2\text{Nb}_2\text{O}_9$) e a influência da adição do óxido de lantânio (La_2O_3) sobre este composto como intuito de gerar aplicações em radiofrequências (RF) e microondas (MW). Vale ressaltar que, o bismuto (SBN) faz parte do grupo de materiais de estruturas perovskita que pertencem a família Aurivillius e possuem a fórmula geral $(\text{Bi}_2\text{O}_2)_2^{2+}(\text{An}-1\text{BnO}_3\text{n}+1)^{2-}$. Recentemente foram estudadas adições de lantânio para aplicações diversas.

Na preparação deste material foi utilizado o método de reação do estado sólido. Este método foi empregado por Sancho (2013), em sua tese de doutorado. No entanto, não são conhecidos estudos para essa matriz na frequência de microondas. Desta forma, torna-se importante o prolongamento do estudo deste material visto que o mesmo possui pouca referência bibliográfica e literatura científica, então podemos dizer que, o estudo da matriz SBN com adições de óxido de lantânio em radiofrequência e microondas se justifica.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Introdução à teoria do eletromagnetismo

Em nosso estudo produzimos amostras de uma matriz $\text{SrBi}_2\text{Nb}_2\text{O}_9$ (SBN) com adições de 3, 5, 10 e 15% em massa, La_2O_3 (Óxido de Lantânio), com o intuito de estudar o efeito destas adições sobre a matriz. Porém, antes de estudarmos estes efeitos se faz necessário analisar preliminarmente os fundamentos da teoria eletromagnética.

James Clerk Maxwell (1831-1879) foi um físico escocês que se formou com notoriedade na Universidade de Cambridge. Após estudar o trabalho de Michael Faraday (1791-1867), *Experimental Researchs in Electricity* (em português, Pesquisas Experimentais em Eletricidade), concentrou seus esforços em elaborar equações que expressassem matematicamente as leis de Faraday. As equações de Maxwell são consideradas os pilares da Teoria Eletromagnética, sendo consagrado como o fundador do eletromagnetismo em seu presente formato (NUSSENZVEIG, 2001).

Esse conjunto de quatro equações diferenciais parciais, lineares quando agregadas às leis constitutivas descrevem a relação entre os campos elétricos e magnéticos. Todavia, essas equações representam expressões matemáticas de certos resultados experimentais e em vista disso não podem ser provadas (REITZ, MILFORD, CHRISTY, 1982).

Por esse motivo, as equações de Maxwell foram um trabalho revolucionário, porém, não foi totalmente aceito pelos cientistas da época. Somente após a exposição dos resultados experimentais de Heinrich Rudolf Hertz (1857- 1894), as equações de Maxwell passam a ser amplamente acolhidas no meio acadêmico geral (SADIKU, 2004).

O trabalho de James Clerk Maxwell foi pioneiro e extremamente importante, levando à descoberta das ondas eletromagnéticas e ainda possibilitou a unificação entre duas grandes áreas da física, eletromagnetismo e óptica (BRENNAN, 1998). Vale ressaltar que com o resultado de tal trabalho foi possível demonstrar que a luz é uma onda eletromagnética.

A importância do estudo do eletromagnetismo pode ser justificada através de suas diversas aplicações desde o desenvolvimento de novas tecnologias estações de rádio e de TV, o sistema de telecomunicações à base de micro-ondas e até mesmo na medicina, raios-x, ressonância magnética.

Isto posto, as equações de Maxwell na forma diferencial, do ponto de vista microscópico, são dadas por:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.4)$$

Essas equações são respectivamente Lei de Gauss para a eletrostática, e magnetismo, Lei da indução de Faraday, Lei de Ampère-Maxwell. Agora vamos tecer um breve comentário sobre cada uma delas. Tais leis serão apresentadas a seguir sem manter sua ordem cronológica.

2.2 Lei de Gauss

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), nasceu em Brunswick, na Alemanha, é considerado um dos maiores matemáticos do século XIX, tendo desenvolvido diversos trabalhos em matemática e física (EVES,2004; BERLINGHOFF & GOUVÊA, 2004).

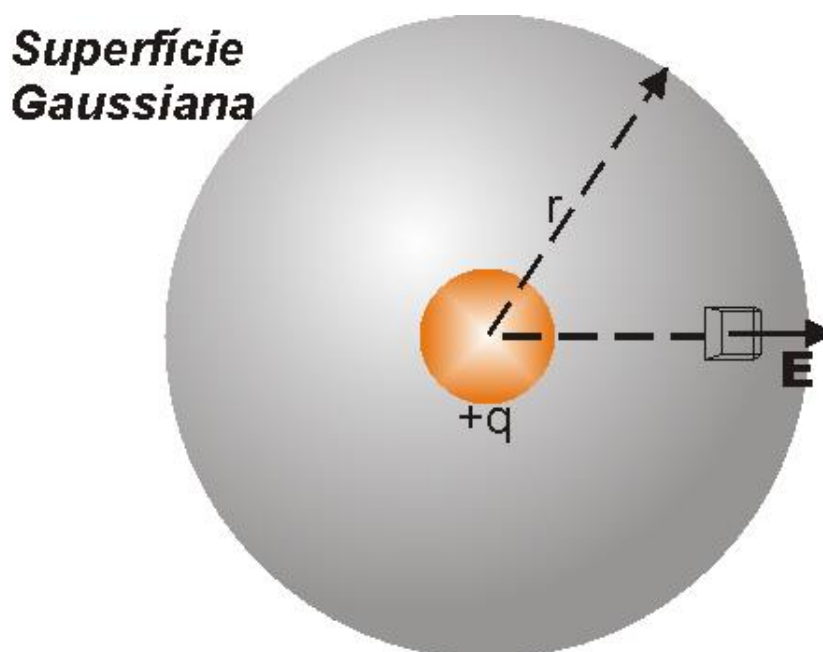
Dentre algumas de suas contribuições podemos citar: as demonstrações para o Teorema Fundamental da Álgebra, a primeira demonstração foi apresentada em sua tese de doutorado em 1799; em 1801 publicou o trabalho, *Disquisitiones Arithmeticae* (Investigações Aritméticas), que posteriormente seria considerado como marco inicial da teoria dos números; em 1808 através do *método de Gauss* desenvolveu um procedimento matemático capaz de prever a órbita do planetóide Ceres, que havia sido descoberto em 1801 pelo astrônomo italiano Giuseppe Piazzi, tal feito o levaria a ocupar a posição de diretor do

observatório de Gottigen em 1807 (EVES,2004; BERLINGHOFF & GOUVÊA, 2004; MOL, 2013).

Já em 1827, em sua obra *Disquisitiones circa superficies curvas* (Investigações sobre superfícies curvas) produziu outra grande descoberta ao utilizar métodos analíticos no estudo da geometria de superfícies. Este trabalho foi de fundamental importância no desenvolvimento da geometria diferencial. E ainda, podemos citar alguns de seus feitos na física, quando passou a realizar trabalhos experimentais em eletricidade e magnetismo, dando início a teoria do potencial através de suas contribuições na teoria das forças inversamente proporcionais ao quadrado da distância (MOL, 2013).

Sendo assim, daremos continuidade a apresentação e estudo da equação (2.1) que é a (Lei de Gauss), também conhecida como Lei de Maxwell para a eletrostática. Então, supondo que uma carga pontual, carregada com carga Q , é envolvida por uma superfície esférica a qual chamaremos de S (superfície gaussianaⁱ). Observe Figura 1.

Figura 1: Superfície gaussiana com centro em uma carga pontual q .



Fonte: Próprio autor.

ⁱ Geralmente em problemas de eletromagnetismo, são usadas algumas superfícies específicas, e essas superfícies que têm por finalidade facilitar o cálculo do fluxo elétrico, através da simetria da distribuição de cargas são chamadas de *superfícies gaussianas* (MACHADO, 2004).

Assim, podemos dizer que um fluxo Φ de um campo vetorial qualquer, que flui através de uma superfície S fechada e que envolve um determinado volume é escrito como:

$$\phi = \oint_S \vec{V} \cdot \hat{n} dA$$

Neste caso, pode-se substituir o vetor genérico $\vec{V}$ pelo vetor $\vec{E}$ que é o campo elétrico responsável pelo fluxo elétrico. Assim, o fluxo do campo elétrico sobre a superfície S é dado por

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA$$

Mas, vale enfatizar que o campo elétrico gerado por uma carga puntiforme de carga Q possui uma simetria esférica e radial, e outro fato importante é que o campo elétrico tem um módulo constante sobre cada ponto da superfície gaussiana (MACHADO, 2004). Assim, observamos que o campo está na mesma direção do vetor normal a superfície. Logo,

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \oint_S E \hat{n} \cdot \hat{n} dA = E \oint_S dA \Rightarrow$$

e logo,

$$\phi = E \oint_S dA \quad (2.5)$$

Donde, a integral do lado direito da expressão equivale a área superfície de uma esfera, ou seja, $\oint_S dA = 4\pi r^2$. Então,

$$\phi = E 4\pi r^2$$

Porém, o campo elétrico gerado por uma carga pontual é dado por

$$E = \frac{Q}{4\varepsilon_0 \pi r^2}$$

Substituindo na expressão (2.5) teremos

$$\phi = \frac{Q}{4\varepsilon_0 \pi r^2} 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

Assim,

$$\phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (2.6)$$

Ou seja, a partir da expressão (2.6) e da figura 1 é possível perceber que o fluxo elétrico depende apenas da carga envolta pela superfície, independe do raio da superfície.

A intensidade do campo elétrico é designada pela densidade das linhas de campo, sendo mais intenso próximo ao centro onde as linhas são geradas e menos intenso a medida em que nos afastamos da fonte geradora do campo (GRIFFITHS, 2011).

Notamos ainda que a intensidade do fluxo está ligada ao número de linhas de campo que atravessam a superfície S. Assim, o fluxo elétrico não depende da geometria da superfície escolhida (MACHADO, 2004).

Agora, vamos reescrever a equação do fluxo elétrico

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

e desta forma,

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (2.7)$$

E esta é lei de Gauss, também conhecida como primeira lei de Maxwell na forma integral, que é válida para meios sem dielétricos.

Suponha agora que, a superfície gaussiana envolve uma distribuição de cargas elétricas com densidade de carga igual a então, a lei de Gauss fica

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV \quad (2.8)$$

Mas, usando o teorema do divergente

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \int_V \nabla \cdot \vec{E} dV \quad (2.9)$$

Substituindo na lei de Gauss

$$\begin{aligned}
 \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA &= \int_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV \Rightarrow \\
 \int_V \nabla \cdot \vec{E} dV - \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV &= 0 \Rightarrow \\
 \left(\nabla \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) &= 0 \Rightarrow \\
 \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

E esta última expressão é a lei de Gauss na forma diferencial válida para o espaço livre. A partir desta lei podemos inferir que o campo elétrico só pode ser gerado por cargas elétricas, ou seja, todas as cargas são geradoras de campos elétricos. Tal conclusão continua válida para campos elétricos dependentes do tempo, para quaisquer meios e ainda é independente da velocidade das cargas elétricas (MACHADO, 2004).

2.3 Primeira lei de Maxwell para a magnetostática

Para campos magnéticos $\vec{B}$, decorre do fato de que nunca foram observadas cargas magnéticas, ou seja, na natureza só se pode encontrar dipolos magnéticos (MACHADO, 2013). Fazendo uma analogia com a lei de Gauss para eletrostática podemos escrever

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \mu_0 Q_m$$

Onde que Q_m deve ser a carga magnética, mas como já anunciamos anteriormente nunca foi encontrada tal carga, logo,

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = 0 \quad (2.11)$$

Usando o teorema do divergente podemos levar a expressão da forma integral para a forma diferencial,

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int_V \nabla \cdot \vec{B} dV = 0 \Rightarrow$$

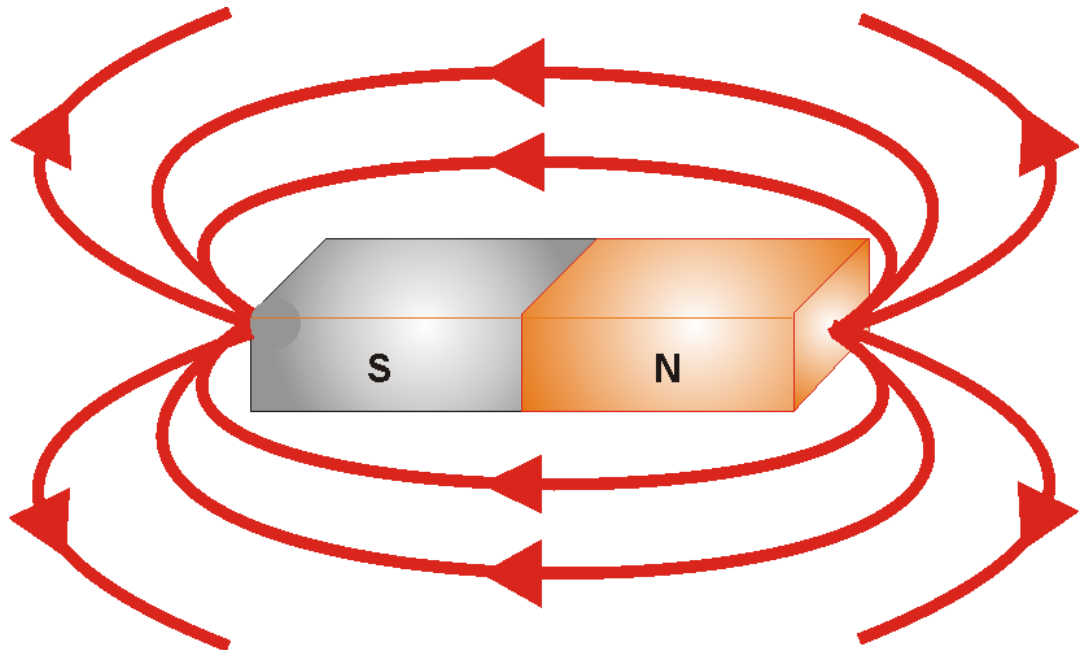
$$\int_V \nabla \cdot \vec{B} dV = 0 \Rightarrow$$

Logo,

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.12)$$

Podemos também, fazer a seguinte análise. Considere um ímã em formato de barra, conforme Figura 2.

Figura 2: Esquema de linhas de campo magnético atuando em um ímã.



Fonte: Próprio autor.

Se traçarmos uma superfície gaussiana S fechada em torno de qualquer um dos polos, será possível observar que o número de linhas de campo magnético que entram ao longo de S será igual ao número de linhas de campo que saem, ou seja, o fluxo magnético que atravessa a superfície S é nulo.

Então, vale salientar que independente do formato do ímã ou da forma da superfície gaussiana o fluxo magnético é sempre nulo, pois as linhas de campo magnéticas - diferentemente das linhas de campo elétrico que iniciam na carga

positiva e cessam na negativa - são sempre fechadas sem início ou fim (MACHADO, 2013).

2.4 Lei de Faraday

Em 1820 a eletricidade e o magnetismo sofreriam uma revolução. Nesse ano, o físico dinamarquês Hans Christian Oersted (1777-1851) demonstrou experimentalmente que a agulha magnética de uma bússola sofria uma deflexão quando está próxima a um fio atravessado por uma corrente elétrica. Isto é, a corrente elétrica era capaz de produzir um campo magnético (HALLIDAY, RESNICK, WALKER, 2003).

Dessa forma, os pesquisadores da época começaram a se perguntar se seria possível demonstrar o inverso, ou seja, se um campo magnético poderia produzir corrente elétrica. Tal hipótese seria confirmada em 1831, pelo físico inglês Michael Faraday (1791-1867), que em seus experimentos observou que a corrente elétrica era induzida através da variação do campo magnético. Em vista disso, Faraday constatou que um campo magnético estático não produz corrente alguma, somente um campo magnético variável no tempo é capaz de induzir tensão elétrica que é chamada de força eletromotriz (fem) e esta é a responsável por produzir um fluxo de corrente elétrica num circuito fechado (SADIKU, 2004).

Assim, é possível enunciar a lei da indução de Faraday da seguinte forma: a intensidade da força eletromotriz induzida (fem) $\mathcal{E}$ numa espira condutora é igual a taxa de variação do fluxo magnético variante no tempo (HALLIDAY, RESNICK, WALKER, 2003; SADIKU, 2004).

Matematicamente, podemos expressar a lei da indução de Faraday como:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (2.13)$$

Ora, mas por definição a força eletromotriz é dada segundo a equação abaixo:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (2.14)$$

Substituindo a equação 2.14 em 2.13 temos

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (2.15)$$

Vale enfatizar que, para este caso o vetor $\vec{A}$ é o próprio campo elétrico $\vec{E}$ induzido, e Φ é o fluxo magnético dado pela expressão 2.3.4

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

Assim, substituindo na expressão 2.15

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA \Rightarrow$$

ou seja,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA \quad (2.16)$$

E esta é a Lei de Faraday na forma integral. Porém, é possível ainda obter a forma diferencial desta equação através do uso do Teorema de Stokes:

$$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{V}) \cdot \hat{n} dA$$

Usando o Teorema de Stokes na expressão 2.16, esta expressão assume a seguinte forma:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{n} dA = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA \Rightarrow$$

E assim,

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.17)$$

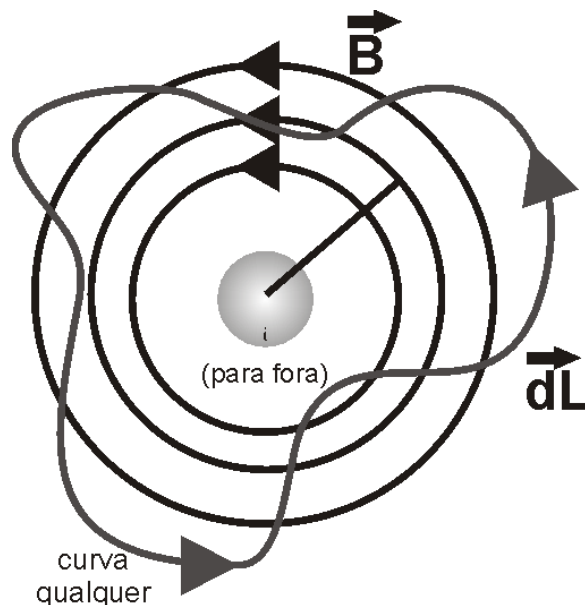
2.5 Lei de Ampère-Maxwell

André-Marie Ampère (1775 – 1836) foi um notável físico e matemático de sua época. Nascido na França, na cidade de Lyon em 20 de janeiro de 1775, desde cedo Ampère demonstrou talento nato para as ciências naturais. Dedicou-se a química, matemática e física (MOL, 2013).

Seu trabalho pode ser dividido em basicamente três períodos. Até 1808 sua área de atuação era matemática, após esse período se concentraria em química até 1820. E por fim seu foco seria a física (EVES, 2004).

Sua curiosidade sobre a física se deu após tomar conhecimento dos resultados do trabalho do físico dinamarquês Hans Christian Oersted. Nesse estudo, Oersted mostrara que uma agulha magnética sofre uma deflexão quando está próxima a um fio atravessado por uma corrente elétrica. E a partir desse momento, Ampère decide dedicar-se ao estudo do eletromagnetismo (EVES, 2004; BERLINGHOFF & GOUVÊA, 2004).

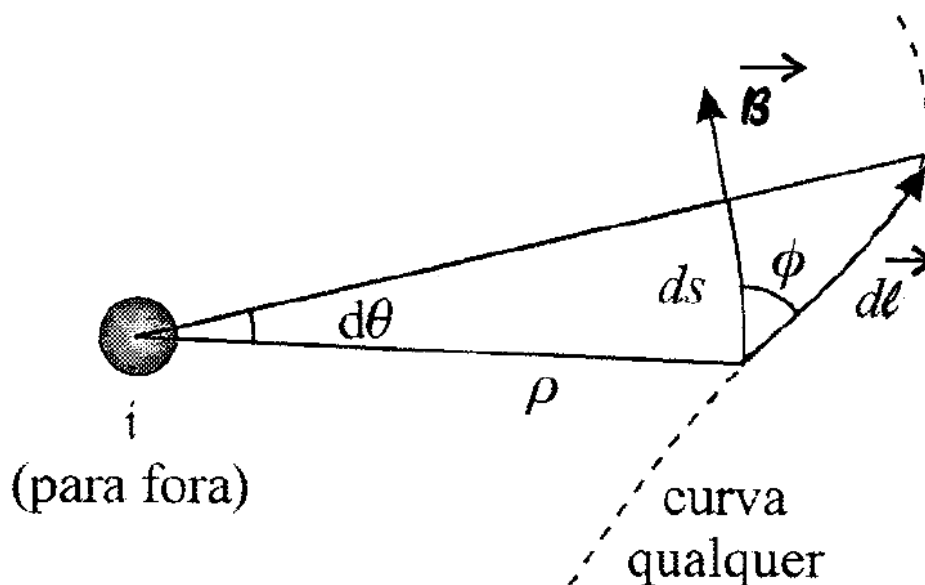
Figura 3: Trajetória curva sem forma específica envolvendo um fio condutor.



Fonte: Próprio autor, adaptado de MACHADO, 2013.

Desta forma, daremos continuidade ao estudo e apresentação da lei circuital de Ampère. Suponha uma curva fechada qualquer envolvendo um fio condutor o qual é atravessado por corrente elétrica (i), a Figura 3 ilustra a situação descrita. Observe ainda que o campo magnético $\vec{B}$ é um campo circular em torno do fio e a partir da figura também é possível perceber que o elemento de comprimento $d\vec{l}$ não é paralelo ao campo magnético (MACHADO, 2013). Ampliando a Figura 3 com intuito de melhorar a visualização das grandezas relevantes nesse problema temos a Figura 4.

Figura 4: Modo ampliado da Figura 3.



Fonte: MACHADO, 2013.

Da análise desta pode-se inferir que,

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot dl \cdot \cos \varphi$$

mas, o comprimento do arco ds é dado por,

$$ds = dl \cdot \cos \varphi = \rho \cdot d\theta$$

então,

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = B\rho d\theta$$

Integrando sobre a superfície fechada C temos que,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B\rho d\theta = B\rho \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi B\rho$$

Além disso, a intensidade de um campo magnético circular em torno de um fio é:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} &= 2\pi B\rho = 2\pi\rho \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} = \mu_0 i \Rightarrow \\ \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 i \end{aligned} \quad (2.18)$$

E esta é Lei circuital de Ampère, ou Lei de Ampère na forma integral. Também é a segunda Lei de Maxwell para a Magnetostática. Observe que a equação (2.18) é válida para qualquer curva C que envolva o fio.

Para escrever a lei de Ampère na forma diferencial vamos expressar a corrente elétrica em termos de densidade de corrente. Assim,

$$i = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA \quad (2.19)$$

Substituindo na equação 2.18, temos

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA \quad (2.20)$$

Aplicando o Teorema de Stokes na equação 2.20:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dA$$

Assim, temos

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (2.21)$$

E esta é a forma diferencial da Lei de Ampère. Porém, essa não é forma final para lei de Ampère-Maxwell, tal equação deve ser corrigida pois, não leva em conta a existência de campo elétrico variável no tempo (MACHADO, 2013).

Assim, matematicamente é possível fazer a seguinte análise tomando o divergente na lei de Ampère. Então, pode-se escrever

$$\nabla(\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \nabla \vec{J} \quad (2.22)$$

mas,

$$\nabla(\nabla \times \vec{A}) = 0$$

Logo,

$$\nabla(\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \nabla \vec{J} = 0 \Rightarrow$$

$$\nabla \vec{J} = 0$$

Porém, utilizando a equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \vec{J} = 0$$

Ora, mas se

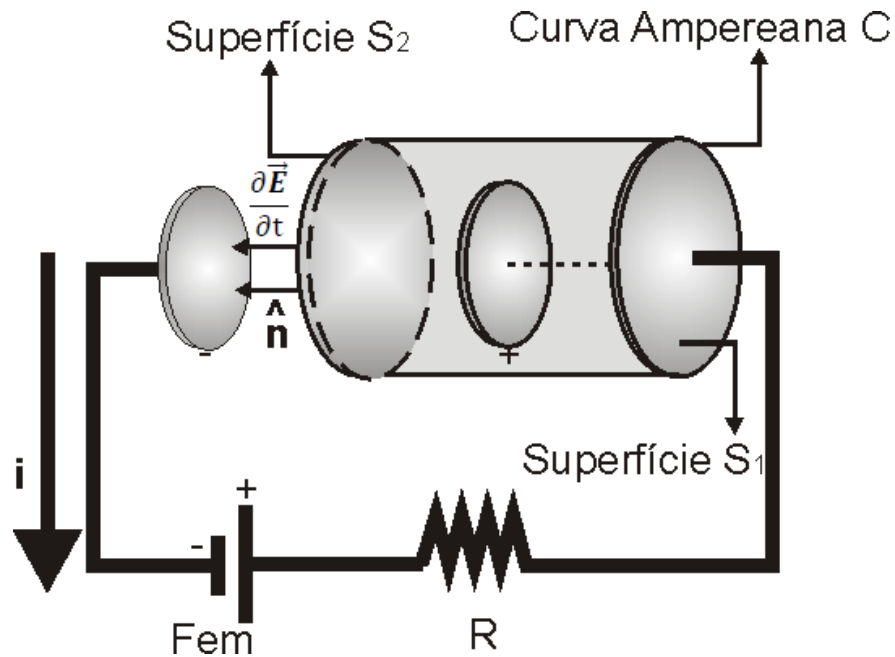
$$\nabla \vec{J} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Agora se torna perceptível a incompatibilidade da lei de Ampère pois, a equação da continuidade é independente das equações de Maxwell. A equação da continuidade significa a conservação da carga elétrica e como mostrou-se acima a densidade carga não varia com tempo (MACHADO, 2013).

Logo, a lei de Ampère deve ser corrigida e para isso suponha a seguinte situação, imagine um capacitor de placas paralelas conforme a Figura 5 abaixo.

Figura 5: Circuito com diferentes superfícies envolvendo o capacitor.



Fonte: Próprio autor, adaptado de MACHADO, 2013.

$\mathcal{E}$: força eletromotriz

$\vec{E}$: campo elétrico

$\hat{n}$: vetor normal a superfície

i : corrente elétrica que atravessa o circuito

R : resistência elétrica

O campo elétrico no capacitor tem a mesma intensidade do campo elétrico produzido por uma placa infinita de densidade superficial σ . Assim,

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} \Rightarrow \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} \right) \Rightarrow \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \left(\frac{\hat{n}}{\epsilon_0} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial t}\end{aligned}\tag{2.23}$$

Vale ressaltar que a densidade carga é dada por

$$\sigma = \frac{Q}{A}\tag{2.24}$$

Donde (Q) é a carga no capacitor e (A) é a área na placa do capacitor, observe ainda que esta área é fixa, uma vez que o capacitor é rígido e não muda de forma e nem de tamanho. Logo, substituindo 2.24 em 2.23,

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \left(\frac{\hat{n}}{\varepsilon_0 A} \right) \frac{\partial Q}{\partial t}$$

sabendo que

$$i = \frac{dQ}{dt} \quad (2.25)$$

podemos escrever,

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \left(\frac{i}{\varepsilon_0 A} \right) \hat{n} \quad (2.26)$$

Essa equação nos mostra que existe um campo elétrico variável no tempo associada a uma corrente elétrica para o circuito apresentado. Integrando em ambos os lados da equação 2.26 sobre toda a superfície S_2 temos,

$$\begin{aligned} \int_{S_2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA &= \int_{S_2} \left(\frac{i}{\varepsilon_0 A} \right) \hat{n} \cdot \hat{n} dA = \int_{S_2} \left(\frac{i}{\varepsilon_0 A} \right) \cdot dA = \frac{i}{\varepsilon_0 A} \int_{S_2} dA \Rightarrow \\ \int_{S_2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA &= \frac{i}{\varepsilon_0 A} \int_{S_2} dA \end{aligned}$$

Agora lembre que A (área) é fixa e independe do elemento de área (dA), eis o motivo de sair da integral. Analisando a superfície S_2 , nota-se que o único local que existe campo elétrico é dentro do capacitor assim,

$$\begin{aligned} \int_{S_2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA &= \frac{i}{\varepsilon_0 A} \int_{\text{círculo}} dA = \frac{i}{\varepsilon_0 A} \cdot A = \frac{i}{\varepsilon_0} \Rightarrow \\ i &= \varepsilon_0 \int_{S_2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA \end{aligned}$$

Substituindo na lei de Ampère 2.21,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i = \mu_0 \varepsilon_0 \int_{S_2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA \Rightarrow$$

teremos que,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \int_{S_2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA \quad (2.27)$$

Ora, mas a corrente elétrica também pode ser reescrita em termo de densidade de corrente, segundo a equação 2.20. Dessa forma,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA$$

Por fim, combinamos as duas equações que fazem relação as correntes elétricas geradas por portadores de carga e por um campo elétrico variante no tempo temos o seguinte resultado,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA \quad (2.28)$$

E esta é a lei de Ampère-Maxwell na forma integral do ponto de vista microscópico e sem dielétricos. E usando novamente o teorema de Stokes:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dA = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA \Rightarrow \\ (\nabla \times \vec{B}) &= \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.29)$$

E esta é forma diferencial para a lei de Ampère-Maxwell (MACHADO, 2013). Porém, esta forma das quatro equações de Maxwell discutidas ao longo desses tópicos, não abrangem a presença de matéria, desta forma, devemos usar as leis constitutivas que serão expostas de forma sucinta nas próximas seções.

2.6 Dielétricos

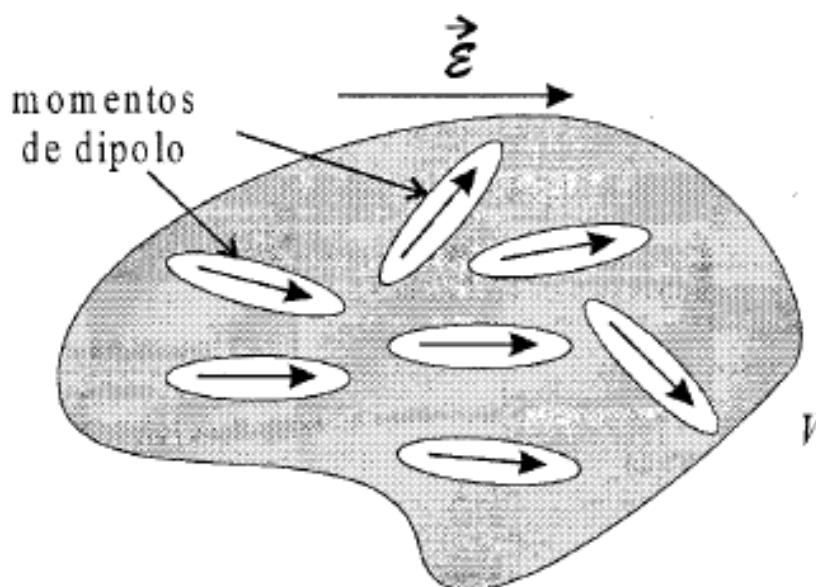
Nesta seção será feita uma análise breve e sucinta sobre as propriedades elétricas dos materiais. Para este caso específico será discutido nesse tópico o comportamento de um campo e potencial elétrico em um meio dielétrico. E ainda, serão relacionadas as grandezas campo elétrico $\vec{E}$ e o deslocamento elétrico $\vec{D}$, e esta última será definida posteriormente.

Dessa forma, podemos dizer que materiais dielétricos são isolantes elétricos, ou seja, são materiais que possuem poucos elétrons livres para a condução de corrente elétrica. Enquanto a polaridade as moléculas podem ser caracterizadas como polares e apolares, sendo chamadas de polares as moléculas que possuem um momento de dipolo intrínseco. Por outro lado, as moléculas que não possuem um momento de dipolo interno permanente são chamadas de apolares (REITZ ,1982; GRIFFITHS, 2011).

Vale ressaltar que tais materiais ao serem submetidos a um campo elétrico adquirem um momento de dipolo. E esse campo elétrico é responsável pelo alinhamento dos dipolos elétricos no material. E ao fenômeno - alinhamento dos dipolos elétricos com um campo elétrico - chamamos de polarização de um dielétrico. E devido a essa propriedade os dielétricos conseguem aumentar sua capacidade de armazenamento de cargas elétricas dentro de um capacitor (CALLISTER, 2002; MOULSON, HERBERT, 2003; SADIKU,2004).

Agora vamos analisar a seguinte situação, um material dielétrico formado por dipolos intrínsecos $\vec{p}_i$ e de volume V está sob ação de um campo elétrico externo Figura 6. Porém, sabemos que o campo elétrico provocará um alinhamento nos momentos de dipolo elétrico constituinte deste material.

Figura 6: Campo elétrico em um meio dielétrico.



Fonte: MACHADO, 2004

Dessa forma, o dipolo resultante será dado pela soma de todos os momentos de dipolos individuais que constituem o material. Logo,

$$\Delta \vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$$

Além disso, se dividirmos esta expressão pelo volume V teremos,

$$\vec{P} = \frac{\Delta \vec{p}}{V} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{p}_i$$

E esta grandeza é conhecida como polarização elétrica. Podemos ressaltar ainda que sua unidade de medida é C/m^2 (coulombs por metro quadrado) (MACHADO, 2000).

Isto posto, partiremos para o cálculo do potencial elétrico gerado num material dielétrico. Sendo assim, considere um material dielétrico que preenche todo o espaço. Se dividirmos esse volume em parcelas infinitesimais dV o potencial elétrico será composto, em cada uma dessas parcelas, por uma densidade de volumétrica de cargas reais ρ , e uma polarização elétrica $\vec{P}$ (MACHADO, 2004).

O potencial elétrico será dado por

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV + \int_V \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \right\} \quad (2.30)$$

No segundo membro do lado direito da equação 2.30 faremos a seguinte alteração,

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \text{ii}$$

Porém, o divergente está atuando apenas nas coordenadas $\vec{r}$. Se fizermos a seguinte substituição $\nabla = -\nabla'$ passaremos a atuar nas coordenadas $\vec{r}'$, que é o desejado. Dessa forma,

ⁱⁱ Ver apêndice C

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = - \left[-\nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] = \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

Substituindo na equação 2.30 teremos

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV + \int_V \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV \right\} \quad (2.31)$$

É possível fazer outra substituição no segundo termo do lado direito da integral. Observe que,

$$\nabla' \left\{ \vec{P}(\vec{r}') \cdot \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right\} = \nabla' \vec{P}(\vec{r}') \cdot \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) + \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \Rightarrow$$

$$\vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \nabla' \left[\vec{P}(\vec{r}') \cdot \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] - \nabla' \vec{P}(\vec{r}') \cdot \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

Assim, substituindo esta expressão acima na equação 2.31 teremos,

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV + \int_V \nabla' \left[\vec{P}(\vec{r}') \cdot \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] - \nabla' \vec{P}(\vec{r}') \cdot \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV \right\} \Rightarrow$$

Logo,

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV + \int_V \nabla' \left[\left(\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] dV - \int_V \nabla' \vec{P}(\vec{r}') \cdot \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV \right\} \quad (2.32)$$

O segundo termo do lado direito pode ser expresso em função de uma integral de superfície. Aplicando o teorema do divergente,

$$\int_V \nabla \cdot \vec{B} dV = \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

$$\int_V \nabla' \cdot \left[\left(\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] dV = \oint_S \left(\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \hat{n} dA$$

Substituindo na equação 2.32,

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV + \oint_S \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dA - \int_V \nabla' \vec{P}(\vec{r}') \cdot \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV \right\} \quad (2.33)$$

Vale ressaltar que as quantidades $[\vec{P} \cdot \hat{n}]$ e $[-\nabla \vec{P}]$ são definidas como densidade superficial de carga de polarização $\sigma_p \equiv [\vec{P} \cdot \hat{n}]$, e densidade volumétrica de carga de polarização, $\gamma_p \equiv [-\nabla \vec{P}]$. Ou seja, quando acontece a polarização num meio material, forma-se uma densidade volumétrica de cargas de polarização no interior do dielétrico, e na superfície se forma uma densidade superficial de cargas de polarização. Então, é possível afirmar que o potencial elétrico em um meio dielétrico não é função somente da densidade carga líquida do dielétrico (REITZ, 1982; SADIKU, 2004; MACHADO, 2004).

Então, voltando ao caso de nosso estudo, utilizamos o fato de que o dielétrico preenche todo o espaço, ou seja, a superfície inexiste nesse problema, desta forma, a integral de superfície da equação 2.33 se anula.

Reescrevendo a equação 2.33,

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV - \int_V \nabla' \vec{P}(\vec{r}') \cdot \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV \right\} \quad (2.34a)$$

ou ainda,

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left[\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \left(\frac{\gamma_p(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] dV \quad (2.34b)$$

E este é potencial elétrico gerado em um meio dielétrico. Por fim, vamos determinar o campo elétrico num meio dielétrico que preenche todo espaço e depois aplicar tal equação na lei primeira lei de Maxwell com intuito de obter uma equação válida em quaisquer meios. Sabemos que o campo elétrico é dado como,

$$\vec{E} = -\nabla V(\vec{r}) \Rightarrow$$

$$\vec{E} = -\nabla \left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left[\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \nabla' \vec{P}(\vec{r}') \cdot \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] dV \right\} \Rightarrow$$

Todavia, o operador divergente só está atuando nas coordenadas $\vec{r}$. Assim, o campo elétrico fica

$$\vec{E} = - \left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \left[\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] + \gamma_p(\vec{r}') \left[\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] dV \right\} \Rightarrow$$

Mas,

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

Logo,

$$\vec{E} = - \left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V - \left[\rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \gamma_p(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] dV \right\} \Rightarrow$$

$$\vec{E} = \left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \gamma_p(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \right\} \quad (2.35)$$

A equação 2.35 é válida em qualquer meio dielétrico cujo o volume preenche todo o espaço.

Por fim, vamos analisar a lei de Gauss, mas devemos incluir em nossos cálculos a densidade volumétrica de carga de polarização. Pois, vale lembrar que estamos analisando a situação para um meio material com dielétrico. Desta forma lei de Gauss na forma integral que é dada por,

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

Nesse caso, acrescentando a densidade volumétrica de carga de polarização,

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \int_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V [\rho(\vec{r}') + \gamma_p(\vec{r}')] dV \Rightarrow$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} dV - \frac{1}{\epsilon_0} \int_V [\rho(\vec{r}') + \gamma_p(\vec{r}')] dV = 0 \Rightarrow$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} - \frac{\rho(\vec{r}') + \gamma_p(\vec{r}')}{\epsilon_0} dV = 0 \Rightarrow$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r}') + \gamma_p(\vec{r}')}{\epsilon_0}$$

De uma forma mais geral,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho + \gamma_p}{\epsilon_0}$$

Mas, lembre-se que $\gamma_p = -\nabla \cdot \vec{P}$. Então,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho - \nabla \cdot \vec{P}}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$(\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P}) = \rho \Rightarrow$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho$$

E por fim,

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (2.36)$$

E esta nova grandeza vetorial $\vec{D}$ é definida como deslocamento elétrico. A unidade de medida dessa nova grandeza é também C/m². E dessa forma, é possível escrever a lei de Maxwell válida para qualquer meio, que será dada por,

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.37)$$

Observe ainda que, para o espaço livre $\vec{P} = 0$, ou seja, voltamos ao caso microscópico.

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) = \rho \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Ao analisarmos um meio diferente do espaço livre (vácuo) é possível observar que, a relação entre o deslocamento dielétrico e o campo elétrico pode ser reescrita como

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (2.38)$$

Onde ε é a permissividade elétrica do meio material em questão. Outro fato importante é a relação entre a polarização elétrica $\vec{P}$ e vetor campo elétrico $\vec{E}$, em um meio linear estas duas grandezas vetoriais estão relacionadas da seguinte forma

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \quad (2.39)$$

E essa relação é válida para diversos materiais dielétricos. Onde, χ é chamado de susceptibilidade elétrica. Desta maneira, podemos dizer que um dielétrico é linear e isotrópico quando este obedece, as equações (2.37) e (2.38) (BALANIS,1999; MACHADO, 2004; POZAR, 2005).

A importância desta grandeza se dá ao fato de expressar a forma com que os materiais dielétricos são suscetíveis aos campos elétricos aplicados sobre tais materiais (SADIKU, 2004). Assim, podemos escrever essa quantidade em função da permissividade, ou seja,

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

mas,

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

então,

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi \vec{E} \Rightarrow \\ \vec{D} &= \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \varepsilon \vec{E} \end{aligned} \quad (2.40)$$

e ainda,

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi) \quad (2.41)$$

Por fim, uma grandeza que deve ser destacada é a constante dielétrica que definida na seguinte forma,

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \quad (2.42)$$

E esta tem importância fundamental na construção de capacitores e também, como veremos nesse trabalho é uma grandeza fundamental em

projetos e construção de dispositivos em RF e microondas (BALANIS,1999; MOULSON, HEBERT,2003; SADIKU, 2004; POZAR, 2012).

2.7 Propriedades magnéticas da matéria

O intuito desta seção é relacionar o campo magnético B e o campo auxiliar H , e por fim enunciar as equações de Maxwell em sua forma final, válidas em quaisquer meios. Nesta seção será feita uma análise breve sobre as propriedades magnéticas dos materiais.

Toda matéria existente é composta de átomos e estes são constituídos de elétrons em movimento, prótons e nêutrons esses dois últimos fixos no núcleo atômico. O movimento eletrônico gera correntes elétricas atômicas. Tais correntes são chamadas de correntes de Ampère e estas são responsáveis pela magnetização em meios materiais (REITZ,1982; NUSSENZVEIG, 1997).

Cada corrente ampereana se comporta da mesma forma que um circuito fechado de dimensões muito pequenas, ou seja, de escala atômica, portanto a este circuito podemos associar um dipolo magnético (REITZ,1982). Desta forma, vamos definir a grandeza vetorial magnetização $\vec{M}$, como o somatório de todos os momentos magnéticos de um dipolo num volume V e dividida por esse volume,

$$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{m}_i \quad (2.43)$$

Onde, m_i o i -ésimo momento de dipolo magnético atômico. Note que a unidade de grandeza do vetor de magnetização é ampère por metro (A/m) e esta grandeza desempenha a mesma função que a polarização para o caso eletrostático (MACHADO, 2013).

Assim, vamos proceder de forma análoga ao caso eletrostático da seção 2.6, ou seja, vamos determinar o potencial vetor magnético para depois obter o campo magnético. Isto posto, considere um meio magnético o qual possui uma densidade $\vec{J}(\vec{r}')$, uma magnetização $\vec{M}(\vec{r}')$, e preenche todo o espaço de nossa análise. Sendo assim, um elemento de volume ΔV gera um potencial vetorial que é composto de duas componentes uma relacionada com a densidade de corrente

$\vec{J}$ e a outra tem relação com momento de dipolo magnético $\vec{m} = \vec{M} \cdot \Delta V$ (MACHADO, 2013).

Portanto, o potencial vetorial magnético é escrito como,

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{\vec{J}(\vec{r}') \cdot \Delta V}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\vec{M} \cdot \Delta V \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right\} \Rightarrow$$

logo,

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\vec{M} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right\} \Delta V$$

Porém, para determinar o vetor magnético total devemos somar todas as contribuições por meio da seguinte integração,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left\{ \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\vec{M} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right\} dv \quad (2.44)$$

Mas, podemos fazer a seguinte substituição em (2.44),

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \text{iii}$$

logo,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left\{ \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{M} \times \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right\} dv \quad (2.45)$$

e usando a identidade I do apêndice C.1,

$$\nabla \times (\psi \vec{V}) = \nabla \psi \times \vec{V} + \psi (\nabla \times \vec{V})$$

temos,

$$\nabla' \times \left(\frac{\vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \vec{M} + \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) (\nabla' \times \vec{M})$$

ⁱⁱⁱ Ver apêndice C-3

mas, $(\vec{A} \times \vec{B}) = -(\vec{B} \times \vec{A})$, então,

$$\nabla' \times \left(\frac{\vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -\vec{M} \times \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) + \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) (\nabla' \times \vec{M})$$

logo, organizando esta expressão,

$$\vec{M} \times \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) (\nabla' \times \vec{M}) - \nabla' \times \left(\frac{\vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

e substituindo a expressão acima na equação (2.45),

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left\{ \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) (\nabla' \times \vec{M}) - \nabla' \times \left(\frac{\vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right\} dv$$

ou ainda,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left\{ \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \left(\frac{(\nabla' \times \vec{M})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \nabla' \times \left(\frac{\vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right\} dv \quad (2.46)$$

Porém, aplicando a identidade III do apêndice C.1, no último termo da integral do lado esquerdo,

$$\int_V (\nabla \times \vec{V}) dV = \oint_S \hat{n} \times \vec{V} dA$$

implica que,

$$\int_V \nabla' \times \left(\frac{\vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dv = \oint_S \hat{n} \times \left(\frac{\vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dA = - \oint_S \left(\frac{\vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \hat{n} dA$$

Substituindo em 2.46 teremos,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left\{ \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \left(\frac{(\nabla' \times \vec{M})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right\} dv + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \left(\frac{\vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \hat{n} dA$$

Assim, separando os termos entre chaves em duas integrais é possível observar que o termo que contém $\nabla' \times \vec{M}$ possui a mesma dimensão que a densidade de corrente $\vec{J}$.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left(\frac{(\nabla' \times \vec{M})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dv + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \left(\frac{\vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \hat{n} dA \quad (2.47)$$

Desta maneira, podemos enunciar mais duas grandezas vetoriais, a primeira é chamada de densidade de corrente de magnetização volumétrica e é definida por,

$$\vec{J}_M \equiv \nabla \times \vec{M} \quad (2.48)$$

Já a segunda é intitulada como densidade de corrente superficial de magnetização e dada por,

$$\vec{J}_S \equiv \vec{M} \times \hat{n} \quad (2.49)$$

E por fim, substituindo essas duas últimas definições na equação (2.47) podemos escrever,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left(\frac{\vec{J}_M(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dv + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \left(\frac{\vec{J}_S(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dA \quad (2.50)$$

A partir desta expressão é possível inferir que o potencial vetorial magnético é composto por três partes, com cada uma delas contendo um significado físico diferente. Assim, a primeira parcela, ou primeira integral representa a densidade de corrente real, a segunda corresponde a uma magnetização volumétrica e a terceira e última aponta para uma densidade de corrente na superfície do material. Porém, devemos ressaltar que em nossa análise utilizamos o fato de que o meio magnético preenche todo o espaço, ou seja, nosso material magnético pode ser considerado como infinito e desta forma a superfície inexistente para tal caso logo, a terceira integral da equação (2.50) deve ser nula (MACHADO, 2013).

Assim, é possível escrever que,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \left(\frac{\vec{J}_M(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] dv \quad (2.51)$$

Ora, mas agora podemos escrever o campo magnético para esta situação pois, da segunda lei de Maxwell temos,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

mas, como temos duas parcelas de densidade de corrente,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_M) = \mu_0 (\vec{J} + \nabla \times \vec{M}) \Rightarrow$$

e ainda,

$$\nabla \times \left[\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right] = \vec{J}$$

E por fim, definimos a grandeza vetorial $\vec{H}$ que é o campo auxiliar, dado por,

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (2.52)$$

Porém, devemos destacar a relação entre a magnetização $\vec{M}$, e o campo auxiliar $\vec{H}$. Ou seja, ao se aplicar um campo magnético em um determinado meio material magnético a ação deste campo, é observada através do alinhamento dos dipolos magnéticos e também pela manifestação da magnetização ou (polarização magnética). Logo, para um meio magnético linear podemos escrever,

$$\vec{M} = \chi_M \vec{H} \quad (2.53)$$

Onde, χ_M é chamada de susceptibilidade magnética. Ora, da equação 2.50 temos que,

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (\vec{H} + \chi_M \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi_M) \vec{H}$$

ou seja,

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_M) \vec{H} \quad (2.54)$$

Assim, para um meio onde a permeabilidade magnética é μ , o campo magnético pode ser reescrito como,

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.55)$$

E definimos ainda a permeabilidade magnética do meio como,

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_M) \quad (2.56)$$

Definidas as relações constitutivas entre o deslocamento elétrico, equação (2.36), o campo elétrico; e o campo auxiliar e o campo magnético, equação (2.51), podemos reformular as leis de Maxwell acrescentando estas informações e ressaltando que estas leis que serão anunciadas agora serão válidas em quaisquer meios. Assim, reunindo as equações (2.10), (2.12), (2.17) e (2.29),

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Agora podemos substituir a equação 2.50 na equação 2.10 e desta maneira temos,

$$\vec{D} = \epsilon_0(1 + \chi)\vec{E} = \epsilon\vec{E} \Rightarrow$$

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E}$$

mas,

$$\epsilon \nabla \cdot \vec{E} = \rho \Rightarrow$$

logo,

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.57)$$

E esta é a forma final da primeira lei de Maxwell que agora é válida para meios macroscópicos e com dielétricos. Já para a segunda lei de Maxwell usamos a equação 2.55 assim,

$$\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot \mu \vec{H} = 0$$

Logo,

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (2.58)$$

E esta é forma final para a lei de Gauss magnética. Porém, na terceira temos,

$$\nabla \times \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow$$

assim,

$$\nabla \times \vec{D} = -\mu\varepsilon \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2.59)$$

E por último a quarta equação, fazendo as devidas substituições,

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.60)$$

E desta maneira foram obtidas as quatro equações de Maxwell válidas em quaisquer meios macroscópicos.

2.8 Capacitores

Um capacitor é um dispositivo capaz de armazenar energia potencial elétrica, em outras palavras é um acumulador de cargas elétricas. Num circuito elétrico estes dispositivos podem assumir diversas funções além do armazenamento de cargas, dentre tais funções vale destacar, o acoplamento, desacoplamento e filtragem. Também são muito úteis quando se deseja bloquear as correntes diretas e transmitir as correntes alternadas, e desta forma fazer o casamento de correntes de uma parte a outro do circuito (MOULSON, HEBERT, 2003).

A capacitância (C) dentro de um capacitor é definida como a razão entre a carga (q) entre as placas do capacitor e a diferença de potencial (V) entres estas. Vale ressaltar que, quando um capacitor está completamente carregado, suas placas^{iv} possuem cargas elétricas iguais e de sinais contrários, ou seja, ao nos referir a um capacitor de carga (q) estamos fazendo menção ao valor

^{iv} Chamamos de placas quaisquer condutores isolados que independente de sua geometria compõe a estrutura física de um capacitor (HALLIDAY, RESNICK, WALKER, 2003).

absoluto destas cargas sobre as placas do capacitor (HALLIDAY, RESNICK, WALKER, 2003).

Desta forma,

$$C = \frac{q}{V} \quad (2.61)$$

Assim, a capacitância é medida em Coulomb por Volt (C/V) ou em Farads (F). Devemos observar que a capacitância de um capacitor é função exclusiva da geometria de suas placas, ou seja, independe tanto da carga elétrica entre as placas quanto da diferença de potencial e para confirmar tal afirmação vamos analisar inicialmente o caso do capacitor plano de placas paralelas (HALLIDAY, RESNICK, WALKER, 2003).

Podemos redefinir a equação (2.61) lembrando da Lei de Gauss e da relação entre campo elétrico e potencial elétrico.

$$q = \varepsilon_0 \int \vec{E} \cdot \vec{dA} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA \quad (2.62)$$

e também,

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (2.63)$$

Sejam, $\vec{E}$ e $\vec{dA}$ paralelos, ou seja, $\vec{E} = E\hat{k}$ e o vetor normal $\hat{n} = \hat{k}$. Então,

$$q = \varepsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \varepsilon_0 \oint_S E\hat{k} \cdot \hat{k} dA = \varepsilon_0 E \oint_S dA = \varepsilon_0 EA \Rightarrow$$

$$q = \varepsilon_0 EA \quad (2.64)$$

Deste modo, temos uma carga elétrica (q) em função de um campo elétrico (E) uniforme entre as placas do capacitor, da permissividade elétrica no vácuo (ε_0) e da área (A) entre as placas.

Para a equação (2.63) façamos,

$$\vec{E} \cdot \vec{dS} = -\nabla V \cdot \vec{dS} \Rightarrow$$

$$\nabla V \cdot d\vec{S} = \left(\hat{i} \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial V}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial V}{\partial z} \right) \cdot (\hat{i} dx + \hat{j} dy + \hat{k} dz) = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \Rightarrow$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = -\vec{E} \cdot d\vec{S} \Rightarrow$$

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{S} \Rightarrow$$

logo,

$$V - V_0 = - \int \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (2.65)$$

Porém, utilizando apenas o valor absoluto do potencial elétrico e considerando $V_0 = 0$, a equação (2.65) ficará,

$$V = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \int dS = ES \Rightarrow$$

então,

$$V = ES \quad (2.66)$$

Substituindo as equações (2.64) e (2.66) na equação (2.61) podemos escrever,

$$C = \frac{\epsilon_0 EA}{ES} \Rightarrow$$

Por fim,

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{S} \quad (2.67)$$

Ou seja, a capacitância de um capacitor só depende de sua geometria, onde (A) é área e (S) é a distância de separação entre as placas do capacitor. A equação (2.47) é válida para meios sem dielétricos. Se tivermos um material dielétrico preenchendo todo o espaço entre as placas do capacitor a equação (2.47) ficará,

$$C = \frac{\epsilon A}{S} \quad (2.68)$$

Substituindo a equação (2.40) na equação (2.48), ficaremos com,

$$C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{S} \quad (2.69)$$

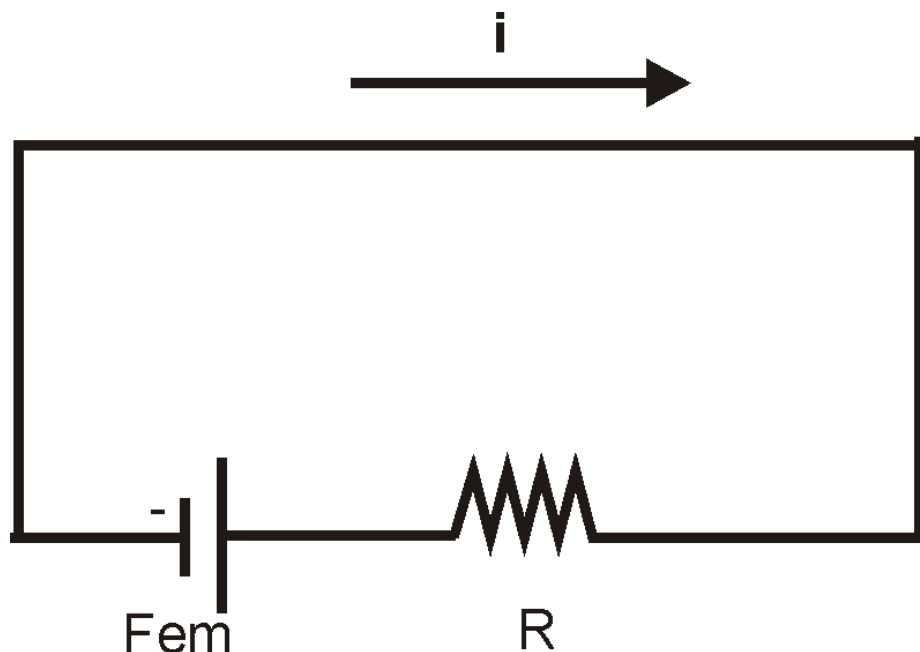
Vale lembrar que ε_r é a permissividade relativa ou constante dielétrica. Observe que é possível obter um valor para a permissividade relativa a partir de C e C_0 se dividirmos a equação (2.69) pela (2.67).

Logo,

$$\varepsilon_r = \frac{C}{C_0} \quad (2.70)$$

Além disso, existem outras grandezas que dependem da capacitância do capacitor e antes de expressar tais grandezas é conveniente analisar alguns circuitos simples. Essa análise será iniciada com um circuito puramente resistivo ver Figura 7.

Figura 7: Circuito de corrente alternada puramente resistivo.



Fonte: Próprio autor.

Devemos ressaltar que os circuitos analisados são percorridos por uma corrente alternada, ou seja, tanto a tensão $\mathcal{E} = \mathcal{E}(t)$, quanto a corrente elétrica $I = I(t)$ são funções do tempo. Em nosso estudo, estamos interessados em obter

valores periódicos e com dependência temporal para $I(t)$ (NUSSENZVEIG, 1997; MACHADO, 2013). Logo,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \quad (2.71)$$

Onde, ω é a frequência angular de oscilação e $\mathcal{E}_0$ é a amplitude da tensão. Assim, usando a primeira lei de Kirchhoff ou lei das malhas^v podemos escrever que,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} - R \cdot I_R &= 0 \Rightarrow \\ I_R &= \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}_0 \cos \omega t}{R} \Rightarrow \end{aligned}$$

então,

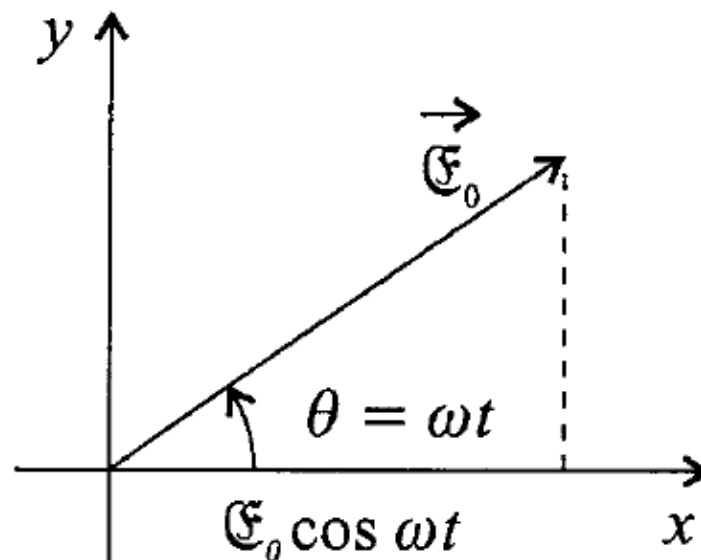
$$I_R = \frac{\mathcal{E}_0 \cos \omega t}{R} \quad (2.72)$$

A equação (2.72) é importante pois, nos informa que tanto a tensão quanto a corrente elétrica no resistor estão em fase, isso quer dizer que, os valores de máximos, mínimos e nulos culminam ao mesmo tempo (MACHADO, 2013). Essa situação pode ser representada graficamente utilizando os fasores^{vi} ver Figura 8

^v Lei das Malhas: o somatório de todas as quedas de tensão por toda a extensão da malha de um circuito é nula (NUSSENZVEIG, 1997).

^{vi} A uma grandeza escalar que varia periodicamente de forma senoidal ou cossenoidal chamamos de fasor (MACHADO, 2013).

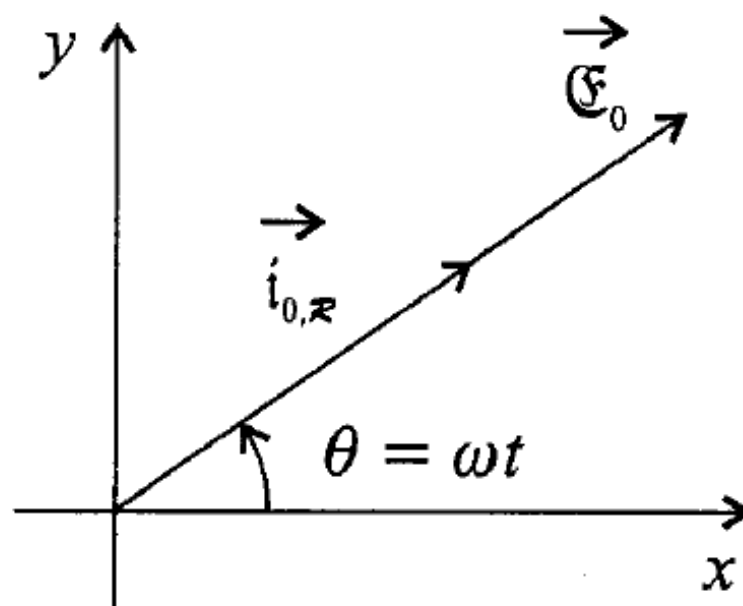
Figura 8: Representação da tensão alternada na forma fasorial.



Fonte: MACHADO, 2013.

Portanto, é possível observar que, com o passar do tempo o fasor se descola circularmente no plano xy . Ou seja, o fasor nada mais é que um vetor que possui uma fase variante no tempo. Para um circuito puramente resistivo o gráfico incluindo corrente e tensão é dado pela Figura 9.

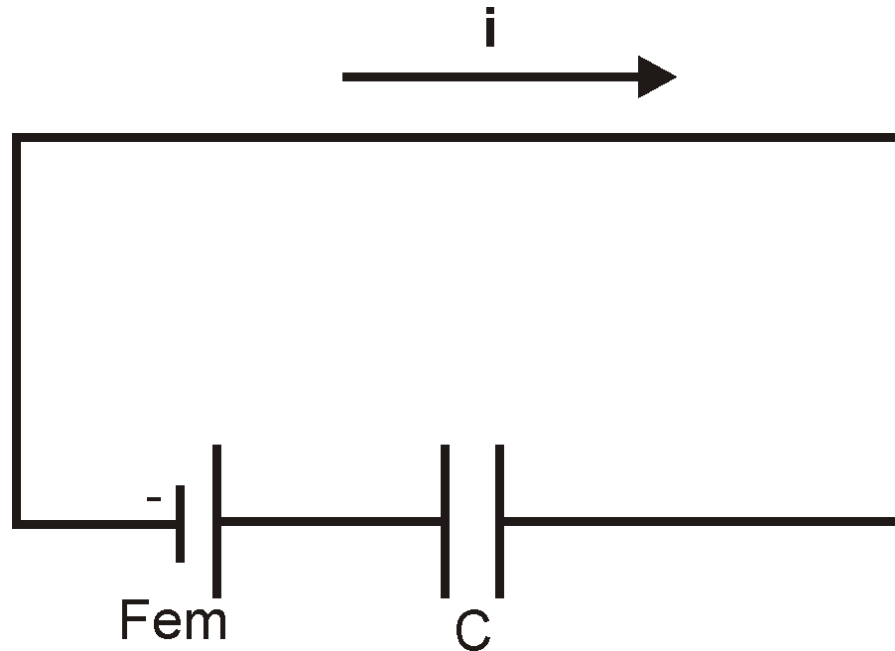
Figura 9: Corrente e fem no diagrama fasorial.



Fonte: MACHADO, 2013.

Como os fasores estão em fase, estes giram ao mesmo tempo ao longo do eixo xy (MACHADO, 2013). O próximo circuito analisado é o puramente capacitivo que está representado na Figura 10.

Figura 10: circuito de corrente alternada puramente capacitivo.



Fonte: Próprio autor.

Utilizando novamente a lei das malhas,

$$\mathcal{E} - \frac{Q}{C} = 0 \Rightarrow$$

$$Q = C \cdot \mathcal{E}_0 \cos \omega t \Rightarrow$$

$$I_C = \frac{dQ}{dt} = -\omega C \mathcal{E}_0 \sin \omega t$$

Isto posto, a corrente num circuito puramente capacitivo é dada por,

$$I_C = -\omega C \mathcal{E}_0 \sin \omega t$$

Ou ainda,

$$I_C = \omega C \mathcal{E}_0 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (2.73)$$

Em vista disso, podemos definir uma grandeza de grande importância, que é denominada de reatância capacitiva, e esta é medida em Ohms,

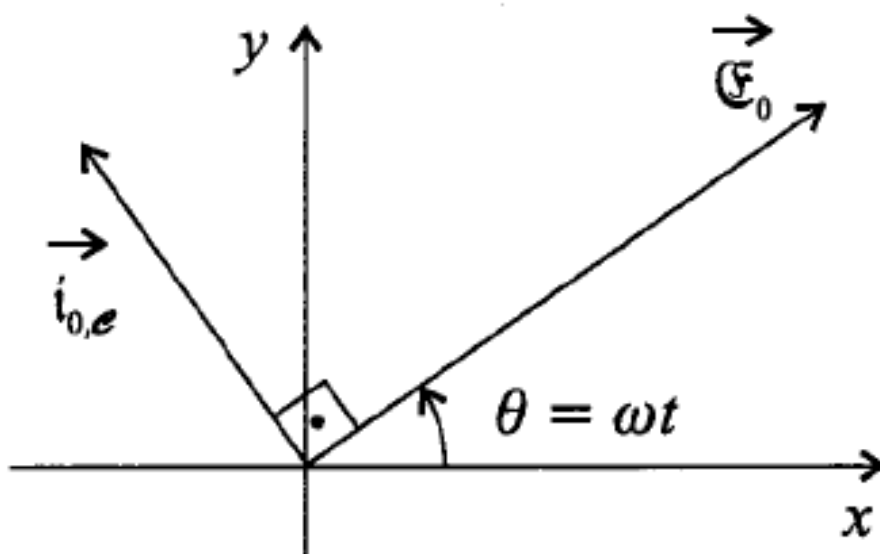
$$X_C \equiv \frac{1}{\omega C} \quad (2.74)$$

Desta equação, vale destacar que, quando $\omega \rightarrow 0$; $X_C \rightarrow \infty$, ou seja, o circuito está aberto. E quando $\omega \rightarrow \infty$; $X_C \rightarrow 0$ ocorrem variações extremamente rápidas no circuito (NUSSENZVEIG, 1997). E desta maneira, a equação (2.73) pode ser reescrita como,

$$I_C = \frac{\mathcal{E}_0}{X_C} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.75)$$

No diagrama fasorial a tensão e corrente são dadas segundo a Figura 11 abaixo.

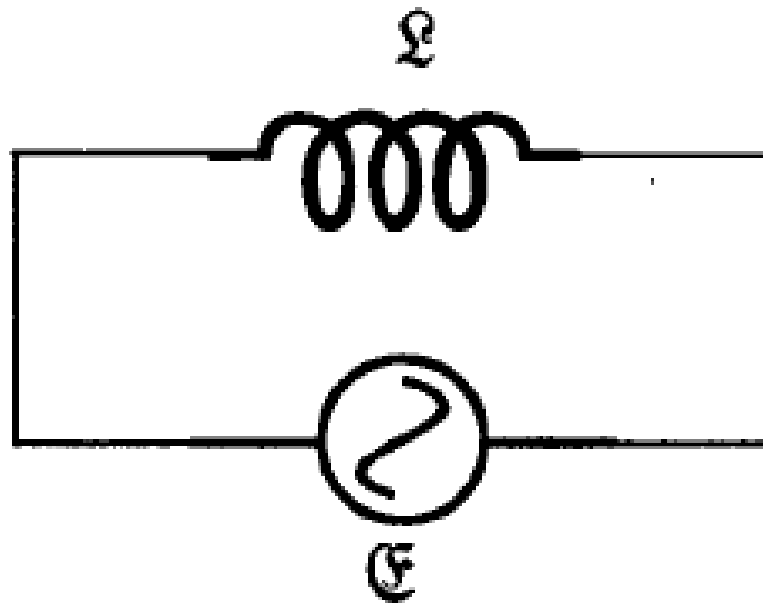
Figura 11: Representação de corrente capacitiva e tensão no diagrama fasorial.



Fonte: MACHADO, 2013.

O último circuito simples e não menos importante a ser analisado é o circuito puramente indutivo, ou seja, é formado apenas pela tensão e um indutor de acordo com a Figura 12.

Figura 12: circuito de corrente alternada puramente indutivo.



Fonte: MACHADO, 2013.

Para tal situação a lei das malhas nos permite escrever,

$$\mathcal{E} - L \frac{dI_L}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dI_L}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \cos \omega t \Rightarrow$$

$$I_L = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \int \cos \omega t \, dt = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} \cdot \text{sen } \omega t = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} \cdot \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow$$

Assim,

$$I_L = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} \cdot \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (2.76)$$

Portanto, uma nova grandeza é definida como reatância indutiva, a medida de tal grandeza é expressa em Ohms.

$$X_L \equiv \omega L \quad (2.77)$$

Porém, a reatância indutiva não pode ser considerada como uma resistência real pois, esta não dissipa energia pelo através do efeito Joule.

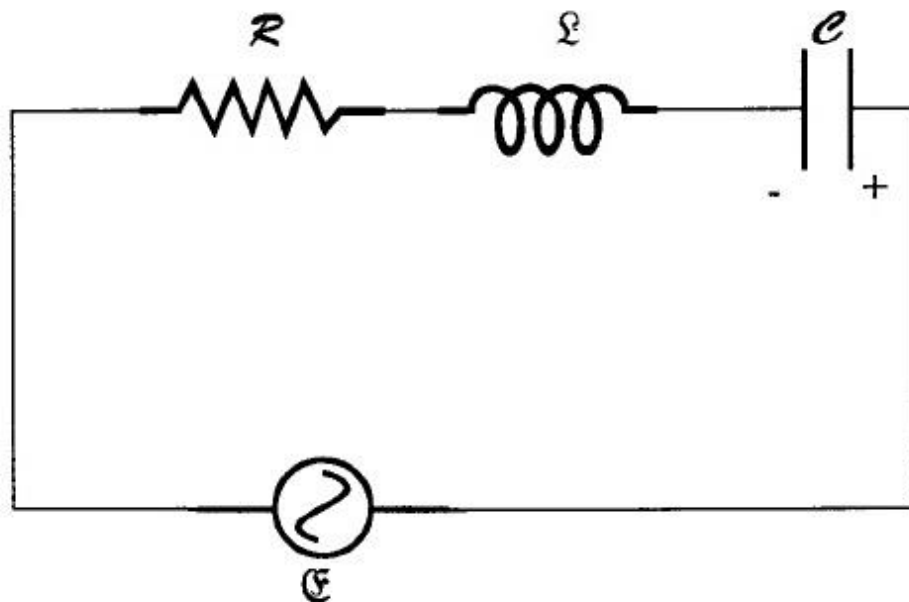
E substituindo a equação (2.77) em (2.76),

$$I_L = \frac{\mathcal{E}_0}{X_L} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.78)$$

Tomando por base as equações (2.72) e (2.75) é fácil notar que a corrente no indutor está atrasada em relação a tensão (MACHADO,2013). Após a análise destes circuitos estamos aptos para estudar um circuito RLC com fonte de tensão e corrente elétrica dependente do tempo. Assim, aplicando a primeira lei de Kirchhoff no circuito RLC representado na Figura 13 temos,

$$\mathcal{E} - Ri - L \frac{di}{dt} - \frac{Q}{C} = 0$$

Figura 13: Representação do circuito de corrente alternada RLC.



Fonte: MACHADO, 2013.

Organizando a equação acima e derivando em função do tempo,

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \frac{dQ}{dt} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} \quad (2.79)$$

Ora, mas $i = dQ/dt$ e de (2.71),

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$$

Consequentemente,

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i = -\omega \mathfrak{E}_0 \sin \omega t \quad (2.80)$$

A solução geral para esse tipo de equação é dada pela solução da equação homogênea correspondente (ver apêndice D) adicionada da solução particular. Nesse tipo de E.D.O é possível adotar soluções particulares das seguintes formas,

$$i_p = i_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (2.80a)$$

ou ainda,

$$i_p = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (2.80b)$$

Usando a solução (2.80a) a equação (2.80) fica,

$$-\omega^2 L i_0 \cdot \cos(\omega t + \phi) - \omega R i_0 \cdot \sin(\omega t + \phi) + \frac{1}{C} \cdot i_0 \cos(\omega t + \phi) = -\omega \mathfrak{E}_0 \sin \omega t \Rightarrow$$

dividindo tudo por ω , e por i_0 ,

$$-\omega L \cos(\omega t + \phi) - R \sin(\omega t + \phi) + \frac{1}{\omega C} \cos(\omega t + \phi) = \frac{-\mathfrak{E}_0}{i_0} \sin \omega t$$

Substituindo (2.74) e (2.77) na expressão acima,

$$-X_L \cos(\omega t + \phi) - R \sin(\omega t + \phi) + X_C \cos(\omega t + \phi) = \frac{-\mathfrak{E}_0}{i_0} \sin \omega t$$

e definindo a grandeza impedância como,

$$Z = \frac{\mathfrak{E}_0}{i_0}$$

a expressão ficará,

$$(X_C - X_L) \cos(\omega t + \phi) - R \sin(\omega t + \phi) = -Z \sin \omega t$$

logo,

$$(X_L - X_C) \cos(\omega t + \phi) + R \sin(\omega t + \phi) = Z \sin \omega t \quad (2.81)$$

Definiremos uma nova grandeza chama reatância dada por,

$$X = (X_L - X_C) \quad (2.82)$$

e aplicando na equação (2.81),

$$X \cos(\omega t + \phi) + R \sin(\omega t + \phi) = Z \sin \omega t \Rightarrow$$

$$X \cos \omega t \cdot \cos \phi - X \sin \omega t \cdot \sin \phi + R \sin \omega t \cdot \cos \phi + R \sin \phi \cdot \cos \omega t = Z \sin \omega t$$

e desta expressão podemos inferir que,

$$\begin{cases} \cos \omega t \cdot (R \sin \phi + X \cos \phi) = 0 \\ \sin \omega t \cdot (R \cos \phi - X \sin \phi) = Z \sin \omega t \end{cases}$$

Então,

$$Z = (R \cos \phi - X \sin \phi) \quad (2.83)$$

Deste modo, a solução particular para a equação diferencial (2.80) será dada por,

$$i_P = \frac{\mathcal{E}_0}{Z} \cos(\omega t + \phi)$$

donde,

$$i_P = \frac{\mathcal{E}_0}{(R \cos \phi - X \sin \phi)} \cos(\omega t + \phi)$$

mas,

$$\begin{cases} \cos \phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}} \\ \sin \phi = -\frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}} \end{cases}$$

então,

$$i_P = \frac{\mathcal{E}_0}{\left\{ R \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}} - X \left(-\frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}} \right) \right\}} \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow$$

Isto posto, podemos escrever que

$$i_P = \frac{\mathcal{E}_0 \sqrt{R^2 + X^2}}{R^2 + X^2} \cos(\omega t + \phi)$$

E por fim,

$$i_P = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \cos(\omega t + \phi) \quad (2.84)$$

A partir desse estudo podemos extrair um resultado extremamente importante que é o caso da ausência de indutância, ou seja, $L = 0$. É fácil observar que para tal situação voltaremos a um circuito RC. Mas, para essa circunstância note o que acontece com a impedância Z ,

$$Z = \left(\frac{R^2}{\sqrt{R^2 + X^2}} + \frac{X^2}{\sqrt{R^2 + X^2}} \right) = \left(\frac{R^2 + X^2}{\sqrt{R^2 + X^2}} \right) = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \Rightarrow$$

Mas, se $L = 0 \rightarrow X_L = 0$, logo,

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

Então, se tomarmos a tangente do ângulo Φ ,

$$\tan \phi = \frac{\frac{X_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}}{\frac{R}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}} = \frac{X_C}{R} = \frac{1}{\omega RC}$$

Ora, mas para um circuito puramente capacitivo não deveria haver resistência elétrica, porém este é o caso ideal, para um capacitor real haverá uma resistência elétrica designada R_L . Desta maneira, lembrando que a resistência elétrica é dada por,

$$R_L = \rho \frac{S}{A}$$

E que a capacitância é dada pela equação (2.49),

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{S}$$

onde, S é distância de separação entre as placas do capacitor, a expressão para a tangente fica,

$$\tan \phi = \frac{1}{\omega RC} = \frac{1}{\omega \rho \epsilon_r \epsilon_0} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_r \epsilon_0}$$

Escrevendo em função da permissividade do material,

$$\tan \phi = \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \quad (2.85)$$

e esta é a tangente de perdas dielétricas que tem grande importância no estudo e desenvolvimento de projetos de antenas ressoadoras dielétricas. Tais conceitos serão discutidos com maior ênfase na seção 2.9.

2.9 Antenas

Segundo a Agência Nacional de Telecomunicações (ANATEL) uma antena é definida como mecanismo capaz de captar ou emitir ondas eletromagnéticas no espaço. Vale salientar que, de acordo com a norma Padrão IEEE para Definições de Termos para Antenas (*IEEE Standard for Definitions of Terms for Antennas*) antena é um instrumento apropriado para emitir ou receber radiação de ondas eletromagnéticas. Em outras palavras, é possível definir antena como um dispositivo recíproco, que independente de sua forma, tem como função a transmissão ou recepção de ondas eletromagnéticas (STUTZMAN, THIELE, 1998).

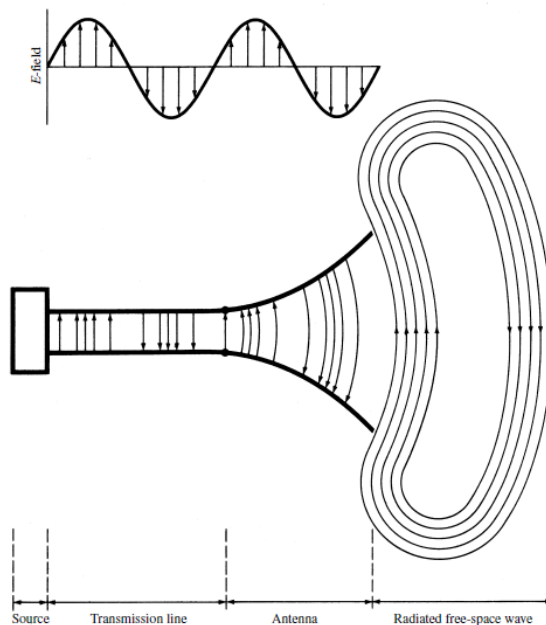
Assim, podemos destacar como características fundamentais das antenas a capacidade de melhorar a eficiência de radiação, e o casamento de impedâncias^{vii}. Desta forma, é possível conceber uma antena como um mecanismo de transição entre o guia de onda^{viii} e o espaço livre, ver Figura 14 (SADUKU, 2004; BALLANIS, 2005). Vale salientar alguns dos tipos de antenas mais utilizadas em telecomunicações: antenas-lente, antenas abertura, filamentos, refletoras e ressoadoras dielétricas etc. Isto posto, a próxima seção

^{vii} Ao processo de aproximação entre os valores das impedâncias que se interligam em dois circuitos, com o objetivo de minimizar as perdas por reflexões, denominamos casamento de impedâncias (ANATEL, 1983).

^{viii} Estruturas que tem a finalidade de guiar ondas eletromagnéticas (ANATEL, 1983).

tem como objetivo caracterizar uma antena através de seus parâmetros principais.

Figura 14: Antena como dispositivo de transição



Fonte: BALLANIS, 2009.

2.9.1 Parâmetros fundamentais de antenas

Esta seção tem como objetivo estudar alguns parâmetros de antenas essenciais para a continuidade deste trabalho. Desta forma, podemos destacar alguns desses parâmetros: diagrama de radiação, densidade de potência radiada, intensidade de radiação, diretividade, ganho, eficiência de radiação de antenas.

2.9.1.1 Diagrama de radiação

Para uma antena o diagrama de radiação pode ser definido através de um gráfico em três dimensões que representa a irradiação dessa antena em uma zona distante (SADIKU, 2004). Em outras palavras, o diagrama da antena é uma forma de representar graficamente – em função de coordenadas tridimensionais – suas propriedades de radiação. Tais diagramas são definidos geralmente para regiões de campo distante (BALLANIS, 2005).

Por fim, segundo a ANATEL o diagrama de radiação de uma antena é definido como, uma descrição gráfica das características de radiação da antena em função de um sistema de coordenadas espaciais. É comum que esses diagramas sejam determinados em regiões distantes da antena.

2.9.1.2 Densidade de potência radiada

Em nosso estudo usaremos o vetor de Poynting instantâneo para descrever a intensidade de potência associada aos campos elétricos e magnéticos que compõe a onda eletromagnética, ressaltamos que sua unidade de medida é Watt por metro quadrado (W/m^2) (BALLANIS, 2005). Desta forma, a definição do vetor de Poynting instantâneo é dada por

$$\mathcal{W} = \mathbb{E} \times \mathbb{H} \quad (2.86)$$

$\mathcal{W}$ = vetor de Poynting instantâneo (W/m^2)

$\mathbb{E}$ = intensidade de campo elétrico instantâneo (V/m)

$\mathbb{H}$ = intensidade de campo magnético instantâneo (A/m)

Devemos observar que o vetor de Poynting expressa a densidade de potência. Porém, para obter a potência total que transpassa uma superfície fechada deve ser feita a seguinte integração,

$$\wp = \oint_S \mathcal{W} \cdot d\mathbf{s} = \oint_S \mathcal{W} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \quad (2.87)$$

$\wp$ = potência total instantânea (W)

$\hat{\mathbf{n}}$ = vetor unitário normal a superfície

dA = elemento de área da superfície fechada (m^2)

Em seguida, serão definidos os campos complexos $\vec{\mathbf{E}}$ e $\vec{\mathbf{H}}$, para variações harmônicas do tipo $e^{j\omega t}$ (BALLANIS, 2005). Esses campos complexos se relacionam com seus respectivos campos instantâneos da seguinte forma,

$$\mathbb{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}; t) = \text{Re}(\vec{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \cdot e^{j\omega t})$$

$$\mathbb{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}; t) = \text{Re}(\vec{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \cdot e^{j\omega t})$$

O vetor de Poynting fica,

$$\mathcal{W} = \mathbf{Re}(\vec{\mathbf{E}}(x, y, z) \cdot e^{j\omega t}) \times \mathbf{Re}(\vec{\mathbf{H}}(x, y, z) \cdot e^{j\omega t}) \quad (2.88)$$

mas, a partes reais dos campos complexos podem ser escritas como,

$$\mathbf{Re}(\vec{\mathbf{E}}(x, y, z) \cdot e^{j\omega t}) = \frac{1}{2} \{ \vec{\mathbf{E}} e^{j\omega t} + \bar{\vec{\mathbf{E}}} e^{-j\omega t} \}$$

$$\mathbf{Re}(\vec{\mathbf{H}}(x, y, z) \cdot e^{j\omega t}) = \frac{1}{2} \{ \vec{\mathbf{H}} e^{j\omega t} + \bar{\vec{\mathbf{H}}} e^{-j\omega t} \}$$

Assim, substituindo na equação (2.9.3) teremos,

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \{ \vec{\mathbf{E}} e^{j\omega t} + \bar{\vec{\mathbf{E}}} e^{-j\omega t} \} \times \frac{1}{2} \{ \vec{\mathbf{H}} e^{j\omega t} + \bar{\vec{\mathbf{H}}} e^{-j\omega t} \} \Rightarrow$$

$$\mathcal{W} = \frac{1}{4} \{ (\vec{\mathbf{E}} e^{j\omega t} \times \bar{\vec{\mathbf{H}}} e^{j\omega t}) + (\vec{\mathbf{E}} e^{j\omega t} \times \bar{\vec{\mathbf{H}}} e^{-j\omega t}) + (\bar{\vec{\mathbf{E}}} e^{-j\omega t} \times \vec{\mathbf{H}} e^{j\omega t}) + (\bar{\vec{\mathbf{E}}} e^{-j\omega t} \times \vec{\mathbf{H}} e^{-j\omega t}) \}$$

Reescrevendo a equação acima teremos,

$$\mathcal{W} = \frac{1}{4} \{ (\vec{\mathbf{E}} \times \bar{\vec{\mathbf{H}}} e^{2j\omega t}) + (\vec{\mathbf{E}} \times \bar{\vec{\mathbf{H}}}) + (\bar{\vec{\mathbf{E}}} \times \vec{\mathbf{H}}) + (\bar{\vec{\mathbf{E}}} \times \vec{\mathbf{H}} e^{-2j\omega t}) \} \quad (2.89)$$

Porém, vale notar que

$$(\bar{\vec{\mathbf{E}}} \times \vec{\mathbf{H}}) = \overline{(\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}})}$$

Logo,

$$\mathbf{Re}(\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}) = \frac{1}{2} \{ (\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}) + \overline{(\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}})} \}$$

$$\mathbf{Re}[(\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}) e^{2j\omega t}] = \frac{1}{2} \{ (\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}) e^{2j\omega t} + (\bar{\vec{\mathbf{E}}} \times \bar{\vec{\mathbf{H}}} e^{-2j\omega t}) \}$$

Então, reescrevendo a equação (2.9.4)

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (\vec{\mathbf{E}} \times \bar{\vec{\mathbf{H}}} e^{2j\omega t}) + \frac{1}{2} (\bar{\vec{\mathbf{E}}} \times \vec{\mathbf{H}} e^{-2j\omega t}) + \frac{1}{2} (\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}) + \frac{1}{2} \overline{(\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}})} \right\} \Rightarrow$$

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \{ \mathbf{Re}[(\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}) e^{2j\omega t}] + \mathbf{Re}(\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}) \} \Rightarrow$$

desse modo,

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \mathbf{Re}(\vec{E} \times \vec{H}) + \frac{1}{2} \mathbf{Re}[(\vec{E} \times \vec{H})e^{2j\omega t}] \quad (2.90)$$

Agora é possível calcular a média temporal do vetor de Poynting, logo a equação (2.90) fica

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{med} &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{1}{2} (\mathbf{Re}(\vec{E} \times \vec{H}) + \mathbf{Re}[(\vec{E} \times \vec{H})e^{2j\omega t}]) dt \Rightarrow \\ \mathcal{W}_{med} &= \frac{1}{2T} \cdot \int_0^T \mathbf{Re}(\vec{E} \times \vec{H}) dt + \frac{1}{2T} \cdot \int_0^T \mathbf{Re}[(\vec{E} \times \vec{H})e^{2j\omega t}] dt \Rightarrow \\ \mathcal{W}_{med} &= \frac{1}{2T} \cdot \mathbf{Re}(\vec{E} \times \vec{H}) \int_0^T dt + \frac{1}{2T} \cdot \mathbf{Re}(\vec{E} \times \vec{H}) \int_0^T \mathbf{Re}[e^{2j\omega t}] dt \Rightarrow \\ \mathcal{W}_{med} &= \frac{1}{2T} \cdot \mathbf{Re}(\vec{E} \times \vec{H}) T + \frac{1}{2T} \cdot \mathbf{Re}(\vec{E} \times \vec{H}) \int_0^T \mathbf{Re}[e^{2j\omega t}] dt \Rightarrow \\ \mathcal{W}_{med} &= \frac{1}{2} \cdot \mathbf{Re}(\vec{E} \times \vec{H}) + \frac{1}{2T} \cdot \mathbf{Re}(\vec{E} \times \vec{H}) \int_0^T \cos(2\omega t) dt \Rightarrow \\ \mathcal{W}_{med} &= \frac{1}{2} \cdot \mathbf{Re}(\vec{E} \times \vec{H}) + \frac{1}{2T} \cdot \frac{\mathbf{Re}(\vec{E} \times \vec{H}) \sin(2\omega T)}{2\omega} \Rightarrow \end{aligned}$$

Mas, vale lembrar que $\omega = \frac{2\pi}{T}$, assim o termo do lado direito se anula restando apenas,

$$\mathcal{W}_{med} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{Re}(\vec{E} \times \vec{H}) \quad (2.91)$$

E esta é média temporal do vetor de Poynting. Ou seja, podemos escrever a potencia média radiada por uma antena, ou potência radiada, substituindo a equação (2.91) em (2.87), e assim,

$$\wp = \oint_S \mathcal{W} \cdot d\mathbf{s} = \oint_S \mathcal{W} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \oint_S \frac{1}{2} \cdot \mathbf{Re}(\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \Rightarrow$$

ou seja,

$$\wp_{rad} = \frac{1}{2} \oint_S \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \hat{n} dA \quad (2.92)$$

Uma aplicação importante é o cálculo da potência radiada para um radiador isotrópico^{ix}. Embora, tal mecanismo não exista, este tem grande utilidade como um referencial isotrópico em relação as antenas reais (BALLANIS, 2005).

$$\wp_{rad} = \oint_S \mathcal{W} \cdot \hat{n} dA$$

Mas, vale lembrar que neste caso que o vetor de Poynting associado ao radiador isotrópico não é função das coordenadas θ , Φ dada a simetria de radiação (BALLANIS, 2005). Ou seja,

$$\wp_{rad} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\mathcal{W}_0 \cdot \hat{r})(\hat{r} \cdot r^2 \sin \theta) d\theta d\varphi \Rightarrow$$

$$\wp_{rad} = 2\pi r^2 \mathcal{W}_0 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \Rightarrow$$

$$\wp_{rad} = 2\pi r^2 \mathcal{W}_0 2 \Rightarrow$$

e assim,

$$\wp_{rad} = 4\pi r^2 \mathcal{W}_0 \quad (2.93)$$

E esta é a potência radiada por um radiador isotrópico.

2.9.1.3 Intensidade de radiação

Para uma determinada direção é possível dizer que a intensidade de radiação é definida formalmente como a potência radiada pela a antena por unidade de ângulo sólido. Vale salientar que a intensidade de radiação é um parâmetro de campo distante, ou seja, matematicamente pode ser expressada

^{ix} “Radiador isotrópico é uma fonte ideal que radia em todas as direções” (BALLANIS, 2005, p.24)

como o produto entre a densidade de radiação e o quadrado da distância. Destaca-se que a unidade de medida da intensidade de radiação é Watt por ângulo sólido (W/por ângulo sólido) enquanto, a densidade de radiação é medida em Watt por metro quadrado (W/m²) (BALLANIS, 2005).

$$U \equiv r^2 \cdot \mathcal{W}_{rad} \quad (2.94)$$

Portanto, a potência total fica,

$$\begin{aligned} \wp_{rad} &= \oint_S \mathcal{W} \cdot d\mathbf{s} = \oint_S \mathcal{W}_{rad} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \oint_S \frac{U}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \Rightarrow \\ \wp_{rad} &= \oint_S U d\Omega \end{aligned}$$

mas, $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$, assim substituindo na equação acima,

$$\wp_{rad} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi U \sin \theta d\theta d\phi \quad (2.95)$$

Deste modo, calcularemos a potência total radiada em função da intensidade de radiação para uma fonte isotrópica. Porém, observe que para tal caso, a intensidade de radiação independe dos ângulos θ e Φ . Assim,

$$\wp_{rad} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi U_0 \sin \theta d\theta d\phi = U_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi U_0 \Rightarrow$$

logo,

$$\wp_{rad} = 4\pi U_0$$

ou ainda,

$$U_0 = \frac{\wp_{rad}}{4\pi} \quad (2.96)$$

2.9.1.4 Diretividade

Definimos diretividade de uma antena como sendo o quociente entre a intensidade de radiação (em uma direção qualquer) e a intensidade de radiação de uma fonte isotrópica (BALLANIS, 2005).

Ou seja,

$$D = \frac{U}{U_0} \quad (2.97)$$

Mas, lembrando que para uma fonte isotrópica temos que U_0 é dada pela equação (2.95), substituindo na equação (2.96) teremos,

$$D = \frac{4\pi U}{\wp_{rad}} \quad (2.98)$$

Vale ressaltar que a diretividade de uma antena é adimensional.

2.9.1.5 Ganho

Definimos ganho de uma antena como o quociente entre a intensidade de radiação – em uma direção qualquer – e a potência total de entrada. Em outras palavras, o ganho é dado pela razão entre a intensidade de radiação de antena e a potência total que está relacionada com a intensidade de radiação obtida através de uma fonte isotrópica (SADIKU, 2004; BALLANIS, 2005).

Em resumo,

$$G = \frac{4\pi U(\theta, \phi)}{\wp_{entrada}} \quad (2.99)$$

2.9.1.6 Eficiência de antenas

A eficiência total de uma antena está relacionada com as perdas na estrutura dessa antena, ou seja, toma-se como referência as perdas na entrada e no interior da antena. Tais perdas ocorrem pois, nem toda a potência de entrada na antena é transformada em potência de radiação, ou seja, a antena não consegue radiar toda a potência que lhe é entregue. Essas perdas de radiação podem ocorrer dentro dos condutores-dielétricos ou por reflexões ocasionadas pelo descasamento de impedâncias entre antena e a linha de transmissão (BALLANIS, 2005).

Matematicamente podemos escrever a eficiência total como

$$e_0 = e_r e_c e_d \quad (2.100)$$

donde,

e_0 = eficiência total (adimensional)

e_r = eficiência de reflexão (descasamento de impedâncias) também adimensional

e_c = eficiência condutiva (adimensional)

e_d = eficiência dielétrica (adimensional)

A eficiência condutiva e a dielétrica geralmente são designadas experimentalmente pois, são extremamente difíceis de se calcular (BALLANIS,2005). Desta forma, a equação pode ser reescrita como,

$$e_0 = e_r e_{cd} \quad (2.101)$$

Onde o novo termo que aparece no lado direito do segundo membro da equação significa a eficiência condutiva-dielétrica da antena (e_{cd}). A eficiência condutiva-dielétrica é definida por,

$$e_{cd} = \frac{R_L}{R_L + R_r} \quad (2.102)$$

R_r = resistência de radiação

R_L = resistência de perdas por condução/dielétrica

Desta forma, a equação 2.9.15 pode ser reescrita da seguinte forma,

$$e_0 = e_r \left(\frac{R_L}{R_L + R_r} \right) \quad (2.103)$$

2.10 Antenas ressoadoras dielétricas

O estudo de ressoadores dielétricos (RDs) foi realizado inicialmente em 1939, na Stanford University, por Robert Davis Richtmyer^x. Porém, passaram

^x R. D. Richtmyer. Dielectric resonators. J. Appl. Phys. 15 (1939)391–398.

mais de vinte anos até que a comunidade científica passasse a demonstrar interesse por essa linha de pesquisa teórica, ressurgindo o interesse na década de 60 através das pesquisas desenvolvidas por Okaya & Barash (1962)^{xi}(PETOSA, 2007).

Por muito tempo a função dos RDs ficou restrita a armazenar energia pois, na época, este era empregado como amplificadores, sintonizadores e como osciladores em circuitos de microondas (LUK, LEUNG, 2003). Podemos destacar também, os filtros que são usados nas comunicações de microondas, e sua função basicamente é separar ou mesmo filtrar o sinal das frequências desejadas e indesejadas de forma que a frequência almejada é detectada e retirada para que se possa manter uma relação forte sinal-ruído (SEBASTIAN, 2008).

Nessas aplicações os RDs devem ser formados por materiais com alto fator de qualidade entre 50 e 500. Porém, dependendo da aplicação pode chegar até 10.000 e outro aspecto relevante é a alta permissividade dielétrica que deve ser maior que vinte ($\epsilon_r > 20$) (KAJFEZ, 1998; LUK, LEUNG, 2003).

A ideia de usar um ressonador dielétrico como antena só passou a ser aceita após a publicação do artigo *The resonant cylindrical dielectric cavity antenna* (em português Antena ressonante dielétrica de cavidade cilíndrica) publicado por Stuart A. Long, Mark W. McAllister e Liang C. Shen em 1983 (LUK, LEUNG, 2003). Nesse período, a faixa de frequência avançou rapidamente para casa milimétrica, ou seja, o alcance da frequência ficou entre cem e trezentos giga-hertz e nessa banda as antenas metálicas tinham um decréscimo muito grande na sua eficiência devido as perdas por condução. Contudo, o uso de antenas ressoadoras dielétricas (DRAs) se mostraram promissoras pois, a única perda nesses tipos de antenas era devida a imperfeição do material dielétrico. Além das DRAs cilíndricas, outras formas foram estudadas ao longo dos anos,

^{xi} A. Okaya and L. F. Barash. The dielectric microwave resonator. Proc. IRE 50 (1962) 2081–2092.

das quais podemos elencar as retangulares^{xii}, hemisféricas^{xiii}, tampa esférica^{xiv}, anel cilíndrico^{xv}, e triangular^{xvi} (LUK, LEUNG, 2003).

Desta forma, ao se estudar os ressoadores dielétricos é preciso levar em consideração algumas propriedades, como por exemplo, fator de qualidade (Q) elevado, coeficiente de temperatura (τ_f) perto de zero e ainda uma permissividade relativa (ϵ_r) alta (SEBASTIAN, 2008). Existe ainda um outro fator que deve ser levado em consideração é a alta densidade relativa pois, a porosidade presente nesses materiais pode distorcer os parâmetros dielétricos de interesse em microondas.

Assim, é possível dizer que o uso de ressoadores dielétricos, aplicados na tecnologia tem diversas vantagens, como sua compactação em relação aos guias de onda de cavidades metálicas, e ainda evita as perdas por irradiação e preservar um fator de qualidade alto. Além disso, podem ser integrados de forma fácil em circuitos elétricos pois têm uma frequência térmica estável quando se usa um comprimento na escala de milímetros (PETOSA, 2004; SEBASTIAN, 2008).

Os estudos e experimentações propostas a partir dos ressoadores dielétricos se justificam em um contexto onde as exigências por melhorias tecnológicas norteiam a produção de produtos, como por exemplo, os celulares. Então, se faz necessária a busca constante por novos materiais que proporcionem o aprimoramento dessas tecnologias, como os estudos

^{xii} M. W. McAllister, S. A. Long and G. L. Conway, "Rectangular dielectric resonator antenna", Electron. Lett. vol. 19, p. 218-219, Mar. 1983.

^{xiii} M. W. McAllister and S. A. Long, "Resonant hemispherical dielectric antenna", Electron. Lett., vol. 20, pp. 657-659, Aug. 1984.

^{xiv} K. W. Leung, K. M. Luk and E. K. N Yung, "Spherical cap dielectric resonator antenna using aperture coupling," Electron. Lett., vol. 30, No.17, pp. 1366-1367, Aug. 1994.

^{xv} R. K. Mongia, A. Ittipiboon, P. Bhartia and M. Cuhaci, "Electricmonopole antenna using a dielectric ring resonator," Electron. Lett., vol. 29, pp. 1530-1531, Aug. 1993.

^{xvi} A. Ittipiboon, R. K. Mongia, Y. M. M. Antar, P. Bhartia and M. Cuhaci, "Aperture-fed rectangular and triangular dielectric resonators for use as magnetic dipole antennas," Electron. Lett., vol. 29, pp. 2001-2002, Nov.1993.

aprofundados na área de microondas, a partir de materiais de cerâmicas dielétricas e antenas dielétricas, com o objetivo de diminuir os tamanhos das antenas e aumentar a frequência de captação. Na próxima seção será discutido um pouco mais sobre as propriedades inerentes de um ressonador dielétrico.

2.10.1 Permissividade (ϵ_r)

A permissividade relativa de um material (ϵ_r) é responsável pela velocidade relativa em que um sinal pode se propagar dentro deste. Desta forma, quanto menor o valor da permissividade maior será a velocidade de propagação do sinal dentro do material. É possível dizer também, que a permissividade relativa pode expressar a capacidade de armazenar energia quanto um potencial elétrico é aplicado sobre o material. Vale ressaltar que esta grandeza é associada a propriedades macroscópicas do meio como capacitância e polarização (SEBASTIAN, 2008).

Em geral, no processo de miniaturização de circuitos, usa-se um material de alta permissividade, pois facilita o procedimento uma vez que, dentro de um ressonador dielétrico o comprimento de onda é dado por,

$$\lambda_d = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (2.104)$$

Onde λ_d é o comprimento de onda do dielétrico e λ_0 é o comprimento de onda no vácuo (PETOSA, 2007; SEBASTIAN, 2008).

Vale ressaltar que nos circuitos reais os dielétricos não são perfeitos e geralmente nesses casos se faz necessário o uso de grandezas complexas para descrever os elementos que compõe estes circuitos.

Para exemplificar é possível fazer uma análise de um capacitor totalmente preenchido por um material dielétrico com perdas, neste caso temos que considerar as perdas no meio dielétrico que compõe o capacitor e para isso define-se a permissividade relativa complexa,

$$\epsilon_r^* = \epsilon_r' - j\epsilon_r'' \quad (2.105)$$

onde, ϵ_r' e ϵ_r'' são as permissividades real e imaginária respectivamente. É importante enfatizar que a parte real da equação 2.105, ϵ_r' , indica o quanto de energia de um campo elétrico externo armazenou, já a parte imaginária da permissividade, ϵ_r'' , exprime as perdas ou poder dissipação do material e é conhecido como fator de perdas, ou seja, este fator inclui o efeito de perdas dielétrica e por condutividade σ . (MOULSON, HEBERT, 2003; POOLE, DARWAZEH, 2015).

2.10.2 Tangente de perdas

Antes de definirmos a tangente de perdas é importante lembrar dos conceitos de densidade de corrente de condução e deslocamento. Assim, podemos dizer que a densidade de corrente de condução que transpõe um determinado condutor é a porção de corrente elétrica que o atravessa uma seção transversal de área A e dividida por esta mesma (SADIKU, 2004). Ou seja,

$$J = \frac{i}{A} = \frac{di}{dA} \Rightarrow$$

ou ainda,

$$i = \oint_A \vec{J} \cdot \hat{n} dA \quad (2.106)$$

Fazendo uso da lei de Ohm podemos escrever,

$$U = i \cdot R \quad (2.107)$$

Vale ressaltar que a resistência elétrica é dada por,

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

Onde (A) é área de seção atravessada pela corrente elétrica, (L) é o comprimento do condutor, e (ρ) é resistividade do material, sendo que esta é o inverso da condutividade (σ) do material.

Assim,

$$R = \frac{L}{\sigma A} \quad (2.108)$$

Substituindo na equação (2.10.3) temos,

$$U = i \cdot \frac{L}{\sigma A} \Rightarrow i = \sigma A \cdot \frac{U}{L} \Rightarrow \frac{i}{A} = \sigma \frac{U}{L} = \sigma E \Rightarrow$$

$$J = \sigma E$$

Vetorialmente podemos expressar a densidade de corrente elétrica de condução como,

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (2.109)$$

Esta relação é chamada de equação constitutiva pois, depende da natureza do material (MACHADO, 2013). Já a densidade de corrente de deslocamento é definida como,

$$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.110)$$

Ressalta-se que $\vec{D}$ é o deslocamento elétrico definido pela equação (2.36). Assim, a equação (2.110) fica,

$$\vec{J}_d = \frac{\partial (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}{\partial t} \quad (2.111)$$

O vetor $\vec{P}$ é polarização elétrica definido na equação (2.38). Porém, se $\vec{P} = 0$. Teremos que,

$$\vec{J}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.112)$$

Por fim, definimos a tangente de perdas como a razão entre o módulo da densidade de corrente de condução pela densidade de corrente de deslocamento. Porém, se ao invés campos eletrostáticos tivermos campos elétricos variantes no tempo, escritos da seguinte forma

$$\vec{E} = E_0 e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)} \quad (2.113)$$

A tangente de perdas é dada por,

$$\tan \delta = \frac{|\vec{J}|}{|\vec{J}_d|} = \frac{|\sigma \vec{E}|}{\left| \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right|} = \frac{\sigma |\vec{E}|}{\varepsilon_0 \left| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right|} = \frac{\sigma |\vec{E}|}{\varepsilon_0 |j\omega E_0 e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)}|} = \frac{\sigma |\vec{E}|}{\varepsilon_0 |j\omega \vec{E}|} = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}$$

então,

$$\tan \delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \quad (2.114)$$

mas, se tivermos um dielétrico ao invés do vácuo a tangente de perdas poderá ser reescrita como,

$$\tan \delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \quad (2.115)$$

Note também que esta equação está de acordo com a dedução da tangente de perdas da equação (2.65). Contudo, se observarmos o caso descrito na subseção (2.10.1), ou seja, o caso em que o circuito é percorrido por uma corrente alternada e submetido a dielétrico real devemos fazer algumas considerações para calcular a tangente de perdas.

Como o circuito é percorrido por uma corrente alternada podemos escrever a voltagem no circuito como,

$$V = V_0 e^{j\omega t} \quad (2.116)$$

Ou seja, é um circuito harmônico. Assim, podemos calcular a corrente total desse circuito lembrando das equações (2.42) e (2.61), respectivamente

$$\varepsilon_r = \frac{C}{C_0}; \quad C = \frac{Q}{V}$$

então,

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(CV) = \frac{d}{dt}(\varepsilon_r C_0 V_0 e^{j\omega t})$$

logo,

$$I = j\omega\varepsilon_r C_0 V \quad (2.117)$$

entretanto, da equação (2.105) temos,

$$I = j\omega\varepsilon_r^* C_0 V$$

ou seja,

$$I = j\omega(\varepsilon_r' - j\varepsilon_r'') C_0 V = \varepsilon_r'' \omega C_0 V + j\omega\varepsilon_r' C_0 V = I_R + jI_C \quad (2.118)$$

Onde I_R e I_C são as componentes real e complexa respectivamente. E assim, calculamos a tangente de perdas através da seguinte razão,

$$\tan \delta = \frac{|I_R|}{|I_C|} = \frac{\varepsilon_r'' \omega C_0 V}{\omega \varepsilon_r' C_0 V}$$

Por fim,

$$\tan \delta = \frac{\varepsilon_r''}{\varepsilon_r'} \quad (2.119)$$

E este é o valor da tangente de perdas definida em função das permissividades relativas real e complexa. Este valor tem extrema importância na caracterização de microondas no material, visto que, este é o responsável por expressar as perdas dielétricas que ocorrem em um material (MOULSON, HEBERT, 2003; POOLE, DARWAZEH, 2015).

2.10.3 Fator de qualidade Q

O fator de qualidade Q tem como finalidade mensurar a quantidade de energia perdida. E essa grandeza é definida como a razão entre a energia máxima armazenada no ciclo pela energia média dissipada no ciclo (KAJFEZ, 1998; SEBASTIAN, 2008)

Assim,

$$Q = 2\pi \frac{\text{energia máxima armazenada no ciclo}}{\text{energia média dissipada no ciclo}}$$

O uso do termo fator de qualidade Q , geralmente está relacionado com ressoadores de microondas. Esta grandeza pode ser descrita ainda como, o inverso recíproco da tangente de perdas,

$$Q = \frac{1}{\tan \delta} \quad (2.120)$$

Desta forma, podemos dizer que um fator de qualidade Q alto significa que o material possui uma taxa de perda de energia menor (POOLE, DARWAZEH, 2015).

2.10.4 Análise da DRA cilíndrica

Após fazer um breve estudo dos parâmetros fundamentais de antenas, se faz necessário, para uma melhor compreensão deste trabalho analisar a DRA cilíndrica. Para tal, é importante representar o ressoador dielétrico por uma cavidade cilíndrica com seu volume completamente preenchido por um material dielétrico.

Este método se mostra muito útil uma vez que as soluções para as equações de Maxwell se tornam mais simples dadas as condições de contorno para os modos de propagação de ondas eletromagnéticas em um guia de onda circular (LUK, LEUNG 2003).

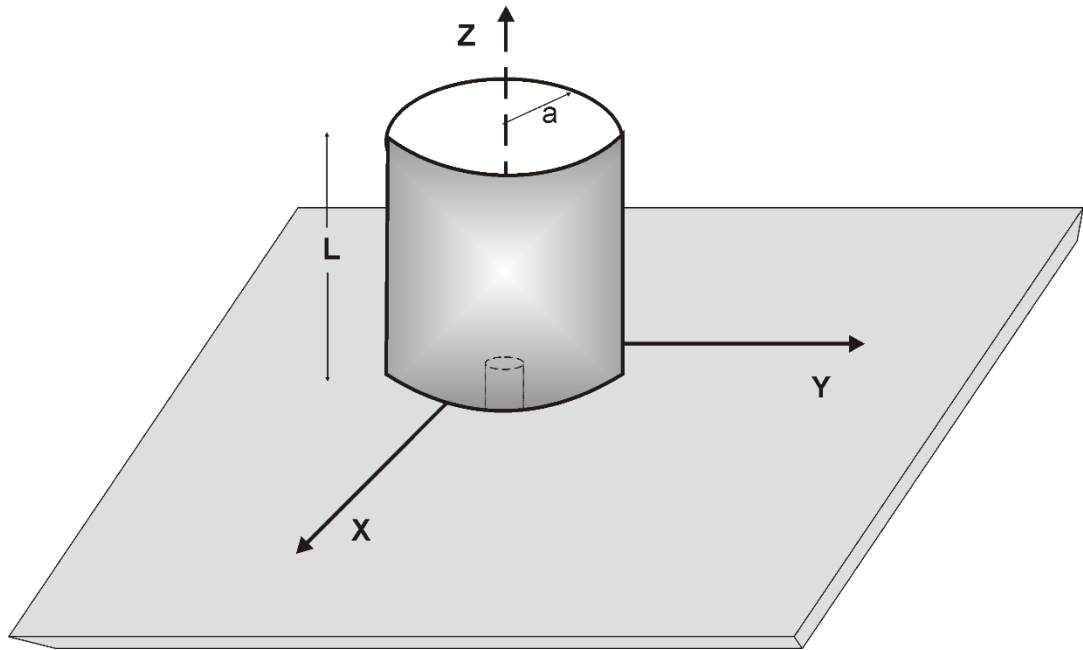
Vale ressaltar que, para um ressoador dielétrico cilíndrico existem três modos de vibração, que são divididos da seguinte forma: modos transversais elétricos (TE), transversais magnéticos (TM) e modos híbridos (este é chamado de EH se a componente do campo magnético H_z é dominante, ou de HE se a componente do campo elétrico E_z é modo dominante). Podemos destacar que, os modos TE e TM diferem dos modos híbridos por possuírem dependência azimutal e os modos mais utilizados em aplicações de radiação são os modos TM_{01δ}, TE_{01δ} e HE_{1δ} (PETOSA, 2007).

Porém, salientamos que, assim como uma linha de transmissão, o objetivo de um guia de onda é transmitir energia de ponto (gerador) para outro (carga). Entretanto, em uma linha de transmissão é possível a existência de dois ou mais condutores que suportam ondas transversais eletromagnéticas (TEM) enquanto, o guia de onda geralmente é formado por um único condutor que pode suportar tanto ondas transversais elétricas (TE) como transversais magnéticas (TM). Além disso, em frequências de microondas os guias de ondas são mais eficientes, pois nesta faixa de frequência obtém uma maior largura de banda e uma menor atenuação já, as linhas de transmissão são ineficazes devido as perdas nos dielétricos (SADIKU, 2004; POZAR, 2012).

O modo transversal eletromagnético (TEM) pode ser diferenciado dos modos transversais elétricos e magnéticos, (TE) e (TM) respectivamente, através de uma característica extremamente peculiar que é a ausência de componentes de campo longitudinais. E assim, os modos TM e TE podem ser caracterizados também, pela presença de componentes longitudinais de campo elétrico ou magnético (POZAR, 2012).

Assim, ao se trabalhar com o modelo de cavidade ressonante usaremos coordenadas cilíndricas dada a geometria do problema como mostra a Figura 15. Vamos considerar que nas superfícies da DRA, ou seja, as paredes do cilindro se comportam como condutores magnéticos perfeitos, e a sonda de alimentação não têm influência no problema. Com estas aproximações é possível obter soluções aproximadas para as equações de Maxwell dentro do ressonador (LUK, LEUNG, 2003).

Figura 15: Geometria cilíndrica da DRA.



Fonte: Próprio autor, adaptado LUK, LEUNG, 2003.

Desta forma, as equações de Maxwell são satisfeitas dentro da cavidade. E para campos harmônicos podemos escrever,

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.121)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (2.122)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad (2.123)$$

$$\nabla \times \vec{H} = (\sigma + j\omega\epsilon)\vec{E} \quad (2.124)$$

Porém, vale ressaltar que cada campo elétrico e magnético possui três componentes cada, ou seja, três campos transversos. De forma que se desejarmos obter a solução geral para o campo elétrico ou magnético devemos resolver seis vezes a equação de Helmholtz. Ou seja,

$$\vec{E}_t = (E_{xt}, E_{yt}, E_{zt})$$

e ainda,

$$\vec{H}_t = (H_{xt}, H_{yt}, H_{zt})$$

Assim, aplicando o rotacional na equação 2.123 temos,

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu \nabla \times \vec{H}$$

Mas, usando da relação c) do apêndice C.I,

$$\nabla \cdot (\nabla \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -j\omega\mu \nabla \times \vec{H}$$

e substituindo as equações (2.121) e (2.124) na expressão acima,

$$\nabla^2 \vec{E} = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)\vec{E}$$

logo,

$$\nabla^2 \vec{E} = j\omega\mu\sigma\vec{E} - \omega^2\mu\varepsilon\vec{E}$$

ou ainda,

$$\nabla^2 \vec{E} + (\omega^2\mu\varepsilon - j\omega\mu\sigma)\vec{E} = 0 \quad (2.125)$$

Seja, $k^2 = \omega^2\mu\varepsilon - j\omega\mu\sigma$, então a equação (2.125) ficará

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad (2.126)$$

Mas, cada componente de campo radial e azimutal pode ser escrita em termos de E_{zt} , H_{zt} . Adiante será omitido o índice t para as componentes. Geralmente, se divide as soluções em modo transverso magnético TM, onde $H_z = 0$, e modo transverso elétrico TE onde $E_z = 0$ (KAJFEZ, GUILLON, 1998).

Inicialmente, vamos analisar o caso em que $H_z = 0$, ou seja, o modo é TM. Para a resolver equação de onda (2.126) podemos usar a separação de variáveis, lembrando que estamos considerando campos harmônicos.

Seja,

$$E_z(\rho, \phi, z) = Y(\rho, \theta) \cdot Z(z) \quad (2.127)$$

Para este modo teremos as seguintes condições de contorno,

$$E_{z(\rho=a)} = E_{\phi(\rho=a)} = 0 \quad (2.128.a)$$

e ainda,

$$E_{\rho(z=0)} = E_{\rho(z=L)} = E_{\phi(z=0)} = E_{\phi(z=L)} = 0 \quad (2.128.b)$$

Logo, a equação (2.126) pode ser reescrita como,

$$\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0 \quad (2.129)$$

Vale ressaltar que, foram resolvidas no apêndice (A), equação de Laplace e a equação de onda, o intuito desta ação é propiciar ao leitor uma revisão teórica sobre assunto que será extremamente útil para na solução da equação (2.129). Assim, tomando por base o resultado da equação A.18 e as condições de contorno elencadas acima podemos escrever,

$$\begin{aligned} \psi_{TM(m,n,p)} = \{ [E_v J_v(k_\rho \rho) + F_v J_{-v}(k_\rho \rho)] \\ \cdot (c_m \cos m\theta + d_m \sin m\theta) \cdot (A_\beta \cos \beta z) \} \end{aligned} \quad (2.130)$$

Onde, A_β , C_m , D_m , E_v , F_v , são constantes a serem determinadas. Mas, podemos mudar os índices fazendo a seguinte substituição ($v = m$), e sabendo que $E_z = \psi_{TM(m,n,p)}$. Podemos escrever então,

$$\begin{aligned} E_z = \{ [E_m J_m(k_\rho \rho) + F_m J_{-m}(k_\rho \rho)] \cdot (c_m \cos m\theta + d_m \sin m\theta) \\ \cdot (A_\beta \cos \beta z) \} \end{aligned} \quad (2.131)$$

Contudo, essa equação ainda pode ser escrita de forma mais simples considerando as condições de contorno do problema. É possível observar que a segunda solução da equação de Bessel é singular na origem e esta faz parte do problema estudado (cavidade ressonante) assim, F_m é nulo.

Logo,

$$E_z = \{ E_m J_m(k_\rho \rho) (c_m \cos m\theta + d_m \sin m\theta) (A_\beta \cos \beta z) \} \quad (2.132)$$

Além disso, quando $E_{z(\rho=a)} = 0$, k_ρ deve ser escolhido de tal forma que,

$$J_m(k_\rho \rho) = 0$$

e chamando os zeros da m-ésima ordem da função de Bessel de X_{mn} . Teremos que,

$$k_\rho \rho = X_{mn} \Rightarrow k_\rho = \frac{X_{mn}}{\rho}$$

mas, ($\rho = a$) então,

$$k_\rho = \frac{X_{mn}}{a} \quad (2.133)$$

Substituindo na equação (2.132),

$$E_z = \{E_m J_m \left(\frac{X_{mn}}{a} \rho \right) (c_m \cos m\theta + d_m \sin m\theta) \cdot (A_\beta \cos \beta z)\} \quad (2.134)$$

Além disso, tomando a derivada da equação (2.134) em função de z , e usando a condição de contorno $z = L$ temos,

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \{E_m J_m \left(\frac{X_{mn}}{a} \rho \right) (c_m \cos m\theta + d_m \sin m\theta) (A_\beta \cos \beta z)\} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (A_\beta \sin \beta z) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -\beta (A_\beta \sin \beta z)$$

Lembrando que, em $z = L$, a expressão acima fica,

$$0 = -\beta (A_\beta \sin \beta z) \Rightarrow$$

$$\sin \beta L = 0$$

assim, para que esta condição seja verdade,

$$\beta = \frac{p\pi}{L} \quad (2.135)$$

Logo, podemos reescrever a equação (2.134) como,

$$E_z = \{E_m J_m \left(\frac{X_{mn}}{a} \rho \right) (c_m \cos m\theta + d_m \sin m\theta) \left(A_\beta \cos \frac{p\pi}{L} z \right)\} \quad (2.136)$$

E ainda, podemos incorporar as constantes E_m e A_β nas constantes centrais desta expressão ficando com,

$$E_z = \left\{ J_m \left(\frac{X_{mn}}{a} \rho \right) (C \cos m\theta + D \sin m\theta) \cos \frac{p\pi}{L} z \right\} \quad (2.137)$$

Por fim, podemos escrever a solução geral desta para o modo TM como,

$$\psi_{TM(m,n,p)} = \left\{ J_m \left(\frac{X_{mn}}{a} \rho \right) (C \cos m\theta + D \sin m\theta) \cos \frac{p\pi}{L} z \right\}$$

Ou ainda, de forma mais compacta,

$$\psi_{TM(m,n,p)} = \left\{ J_m \left(\frac{X_{mn}}{a} \rho \right) \begin{pmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{pmatrix} \cos \frac{p\pi}{L} z \right\} \quad (2.138)$$

E por fim, é possível calcular a frequência de ressonância

$$k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - j\omega \mu \sigma$$

Se $\sigma = 0$,

$$k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon \Rightarrow \omega^2 = \frac{k^2}{\mu \varepsilon}$$

Mas, usando o a apêndice A.II, $k_\rho^2 = (k^2 - \beta^2)$, substituindo na expressão acima,

$$\omega^2 = \frac{1}{\mu \varepsilon} \cdot (k_\rho^2 + \beta^2) \Rightarrow$$

$$4\pi^2 f^2 = \frac{1}{\mu \varepsilon} \cdot (k_\rho^2 + \beta^2) \Rightarrow$$

$$f^2 = \frac{1}{4\pi^2 \mu \varepsilon} \cdot (k_\rho^2 + \beta^2) \Rightarrow$$

Mas, substituindo as equações (2.133) e (2.135) na expressão acima,

$$f_r(TM_{mnp}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \cdot \left(\left(\frac{X_{mn}}{a} \right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (2.139)$$

E de forma análoga é possível obter a solução da equação de onda para o modo TE, lembrando que para este modo $E_z = 0$. Assim,

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \quad (2.140)$$

Aplicando as condições de contorno ao modo TE temos,

$$H_z = \{ E_m J_m(k_\rho \rho) (c_m \cos m\theta + d_m \sin m\theta) (A_\beta \sin \beta z) \} \quad (2.141)$$

E desta forma, usando argumentos semelhantes é possível mostrar que,

$$\psi_{TE(m,n,p)} = \left\{ J_m \left(\frac{X'_{mn}}{a} \rho \right) \begin{pmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{pmatrix} \sin \frac{p\pi}{L} z \right\} \quad (2.142)$$

E a frequência ressonante é dada por,

$$f_r(TE_{mnp}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \cdot \left(\left(\frac{X'_{mn}}{a} \right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (2.143)$$

3 ESTUDO DOS MÉTODOS DE CARACTERIZAÇÃO FÍSICA DO MATERIAL

Este capítulo se propõe fazer uma revisão bibliográfica dos métodos de caracterização da estrutural que foram empregados na fabricação das amostras de bismuto dopadas com lantânio ($\text{SrBi}_2\text{Nb}_2\text{O}_9$). Desta forma, abordará desde a preparação das amostras cerâmicas – tal tópico toma por referência bibliográfica os resultados cedidos de SANCHO (2013) – até os métodos de caracterização física do material. Vale ressaltar que o estudo de caracterização em radiofrequência e microondas desta matriz (SBN), assim como, suas amostras dopadas com 3, 5, 10 e 15% de Lantânio são objetos de nossa pesquisa e os resultados deste trabalho serão apresentados posteriormente.

Nas seções seguintes faremos uma breve revisão dos seguintes temas: Difração de Raios X; Refinamento Rietveld; Microscopia Eletrônica de Varredura (MEV); Caracterização Dielétrica e como estas técnicas foram abordadas no trabalho de SANCHO (2013) na composição da matriz de SBN estudada.

Além disso, os temas expostos têm como referências EISBERG (1992); PADILHA (1997); NEWELL (2000); PAIVA-SANTOS (2001); CALLISTER (2002); SKOOG, HOLLER, NIEMAN, (2002); CULLITY (2004) e SANCHO (2013).

Porém, antes da discussão propriamente dita se faz necessário o conhecimento alguns tópicos relevantes que serão descritos sucintamente nas seções abaixo. As cerâmicas^{xvii} dielétricas possuem diversas aplicações tecnológicas e a partir do surgimento da radiodifusão e das tecnologias de radar houve um aumento significativo na busca por cerâmicas que operassem em uma larga faixa de frequência. Porém, são as tecnologias que envolvem a computação e as telecomunicações que obtiveram maiores avanços com o desenvolvimento de materiais cerâmicos dielétricos. Vale ressaltar que a necessidade de miniaturização foi um enorme fomentador desses avanços tecnológicos, tendo sido responsável pelo aumento na capacidade de

^{xvii} Aos compostos formados por elementos intermediários entre os metais e não-metais, inorgânicos e que apresentam ligações interatômicas integralmente iônicas ou até inteiramente covalente chamamos de materiais cerâmicos. Estes materiais podem ser classificados como cerâmicas tradicionais os quais tem como matéria-prima a argila, minerais, areia; e cerâmicas avançadas que são constituídas basicamente por nitretos, óxidos e boretos com alto grau de pureza (PADILHA 1997; CALLISTER, 2002).

processamento dos micropossedadores e nas comunicações via satélite e móvel (MOULSON, HEBERT, 2003).

3.1 Preparação das amostras cerâmicas

As amostras de SBNLa, carbonato de estrôncio (Aldrich), óxido de bismuto (Aldrich), óxido de nióbio (Aldrich), óxido de Lantânio (Vetec) foram preparadas segundo o método cerâmico convencional.

Os materiais precursores utilizados na síntese das amostras cerâmicas estão expostos na tabela 1. Foram utilizados reagentes com alto grau de pureza e a partir destes, as amostras foram preparadas nas proporções estequiométricas de cada composição.

Assim, utilizando-se desse método submeteu-se o óxido de nióbio a um pré-tratamento térmico sob a temperatura de 300°C por um período de três horas. Os reagentes (carbonato de estrôncio, e, os óxidos de bismuto e nióbio) empregados na síntese foram pesados em balança analítica estequiometricamente e depois foram homogeneizados em almofariz.

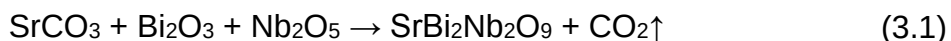
Tabela 1: Materiais utilizados na preparação das amostras cerâmicas ferroelétricas

Nome	Fórmula química	Pureza (%)	Fabricante
Carbonato de estrôncio	SrCO_3	99,9	Aldrich
Óxido de bismuto	Bi_2O_3	99,9	Aldrich
Óxido de nióbio	Nb_2O_5	99,9	Aldrich
Óxido de lantânio	La_2O_3	99,9	Vetec
Álcool polivinílico	$(\text{C}_2\text{H}_4\text{O})_n$	-	Dinâmica
Glicerina	$\text{C}_3\text{H}_8\text{O}_3$	-	-

Fonte: adaptada de Sancho, (2013).

Após esse processo, foi utilizado o moinho *Fritsch Pulverisette 5* para executar a moagem das amostras. Estas ficaram sujeitas aos reatores poliméricos com esfera de zircônia, durante oito horas sob uma velocidade de 360rpm. Vale ressaltar que este tipo de moinho faz parte da categoria de moinho planetário de alta energia.

Esse material foi submetido a um tratamento térmico por um tempo de duas horas. Nesse tratamento foram utilizadas três temperaturas distintas 800^o, 850^o e 900^o C. Tal método foi aplicado com o intuito de se obter a melhor temperatura para a calcinação do material. A equação química para o desenvolvimento da matriz SBN está descrita abaixo (Equação 3.1):



Assim, foi possível observar que o melhor resultado para a temperatura de calcinação foi em 900^oC e por este motivo foi realizada a adição dos dopantes a matriz SBN calcinada nessa temperatura. Assim, acrescentou-se ao SBN 3, 5, 10 e 15% em massa de dopantes (La₂O₃) com o intuito de estudar o efeito destes materiais sobre a matriz SBN.

Por fim, utilizando-se do processo de compactação do pó via pressão uniaxial a 294 Mpa preparamos as amostras puras e adicionadas de 3, 5, 10 e 15% La₂O₃ em formato de bulk com 5% de glicerina como ligante, facilitando a conformação da peça, em seguida foram sinterizados a 1000^oC/2h, respectivamente, e, resfriados a temperatura ambiente.

3.2 Caracterização da estrutura cristalina através de difração de raios x (DRX)

Em 1985 foram detectados pela primeira os raios x, tal descoberta foi constatada pelo o físico alemão Wilhelm Conrad Röntgen (1845-1923). Vale ressaltar que o nome atribuído a esse tipo de radiação, raios x, se deve ao desconhecimento que a comunidade científica tinha sobre o tema (CULLITY, 2014).

Da mesma forma que a luz os raios x também são uma forma de radiação eletromagnética, porém estes possuem comprimentos de onda muito pequenos, bem menores que a luz visível, de tal forma que a unidade de medida para região de raios x é o Ângstrom. Outra diferença notável e característica dos raios x é o poder de penetração em materiais opacos (CULLITY, 2014).

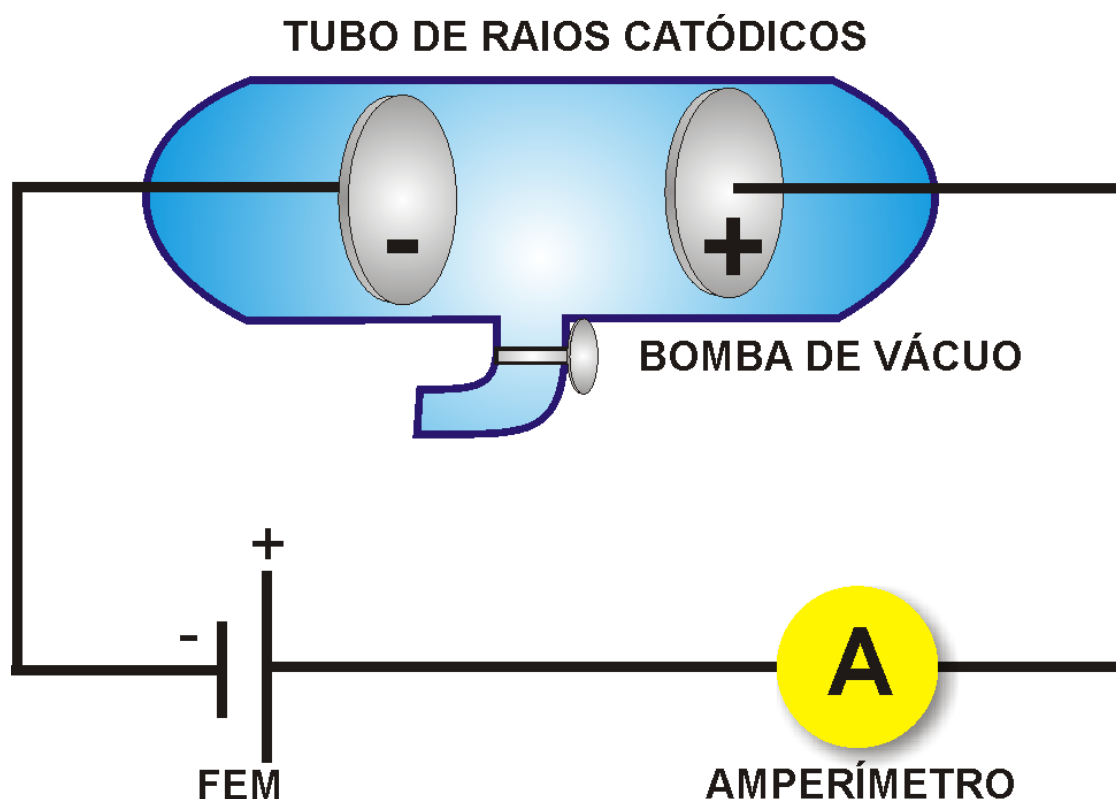
Essa descoberta se tornou possível através de um estudo de descarga elétrica em gases no qual Röntgen estava empenhado. Na segunda metade do

século XIX, o estudo de condução elétrica através gases era um assunto apreciado pelos os cientistas (EISBERG,1992). Tais tubos são montados basicamente, segundo o arranjo experimental mostrado na Figura (16).

De acordo com o arranjo simples é possível observar que a figura é composta de um eletrodo negativo (catodo), e um eletrodo positivo (ânodo), uma bomba de vácuo, e um tubo vidro repleto de algum gás. Ao aplicar uma tensão entre o catodo e ânodo é possível observar o surgimento do fluxo de corrente, e este passa a agir sobre gás contido dentro do tubo, e dessa forma, os elétrons que compõe o gás confinado no interior do tubo passam a emitir luz. Tal fenômeno é chamado de fluorescência, ou seja, a medida que a energia era fornecida dentro do tudo de raios catódicos, os elétrons que ali estavam passavam emitir radiação (EISBERG,1992).

Vale ressaltar que o modelo de Röntgen era composto ainda por anteparo que estava coberto com platino-cianeto de bário e foi nesse anteparo que ficava registrada a radiação emitida pelo tubo de raios catódicos.

Figura 16: Esquema simplificado do tubo de raios catódicos.



Fonte: Próprio autor.

Após esta constatação Röntgen resolveu testar diversos materiais diferentes, posicionando-os entre o tubo raios catódicos e o anteparo coberto com platino-cianeto de bário e observou ainda que, mesmo para materiais opacos a emissão de radiação diminuía, mas, não cessava o que indicava que esta radiação, anômala até aquele momento, tinha um alto poder de penetração.

Porém, foi somente em 8 de novembro de 1895 que Röntgen conseguiu criar a primeira radiografia, nome dado pelo físico a sua descoberta. Mas, a natureza dos raios x ainda continuava desconhecida. Então, utilizando um sistema de fendas Röntgen conseguiu demonstrar que os raios x não são portadores de carga, não se propagam em linha reta e não eram afetados por campos elétricos e nem magnéticos (EISBERG,1992).

Além disso, no ano de 1899 os físicos holandeses Herman Haga (1852-1936) e Cornelis Harm Wind (1867-1911) demonstraram através de um procedimento experimental com difração com raios x, que estes são de natureza ondulatória e ainda obtiveram uma primeira estimativa para seu comprimento de onda da ordem de $\lambda \sim 10^{-8}$ cm (EISBERG,1992).

Já em 1906 o físico britânico Charles Glover Barkla (1877-1944) fez sua contribuição para elucidar a natureza dos raios x. Demonstrou que as ondas que formavam os raios x eram ondas transversais, ou seja, poderiam ser polarizadas (EISBERG,1992).

Apesar de tais descobertas e contribuições, o problema de medir com precisão o comprimento de onda dos raios x era extremamente árduo. Somente em 1912, o físico alemão Max Von Laue (1879-1960) propôs a possibilidade de usar um cristal como uma rede de difração para os raios x pois, a ordem de grandeza do comprimento de onda dos raios x era a mesma ordem de grandeza do espaçamento entre os planos da rede cristalina, ou seja, sob determinadas condições deveria ser observado uma interferência construtiva (difração). Tal fato só seria possível porque a estrutura do cristal seria regular, ou seja, os átomos dentro do cristal se agrupam na forma de arranjo regular e periódico (EISBERG,1992; PADILHA,1997; CALLISTER, 2002).

3.2.1 Difração de raios x e a lei de bragg

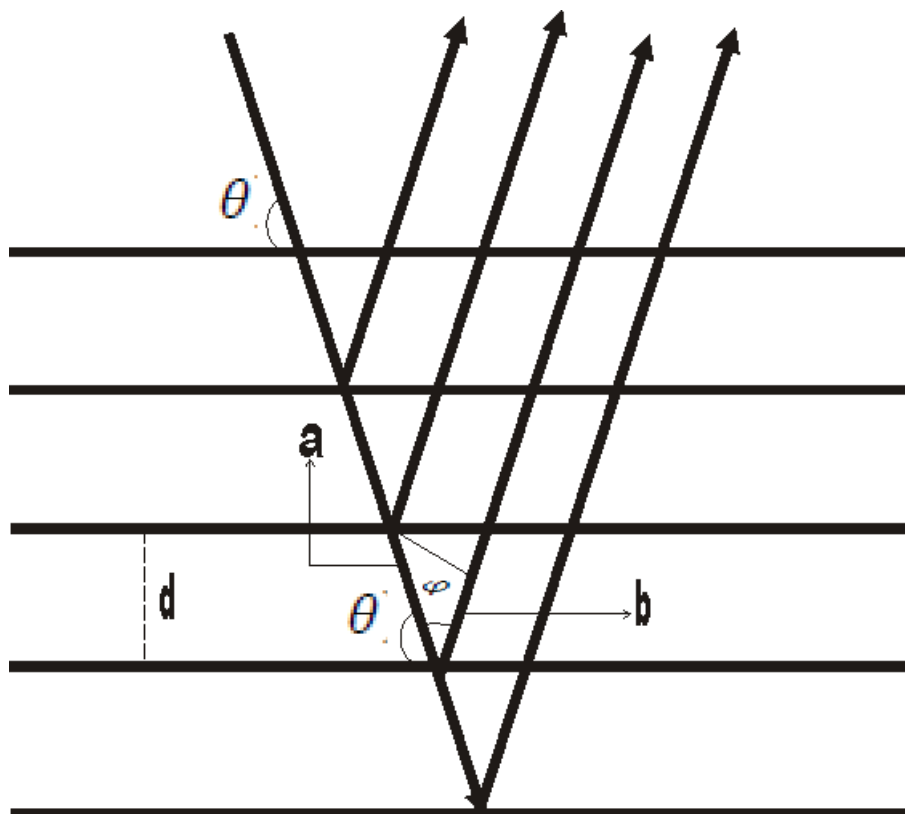
Neste momento, é proposto a análise das condições em que podem ocorrer a difração de raios x sobre uma rede cristalina^{xviii}. Sabemos que, os elétrons que constituem um átomo isolado, ao serem atingidos por um feixe de raios x com frequência bem determinada ficam excitados e passam a vibrar na mesma frequência do feixe incidente. Ou seja, podemos dizer que o átomo produz espalhamento do feixe de raios x sobre todas as direções (PADILHA,1997).

Mas, se ao invés de fazer incidir um feixe de raios x sobre um único átomo, este feixe for direcionado a uma rede cristalina constituída de átomos espaçados de forma regular – sendo que o dado feixe incidente tenha o mesmo comprimento de onda do espaçamento entre os átomos da rede – então, o que deverá ser observado é uma interferência construtiva para certos ângulos e destrutiva para os demais (PADILHA,1997).

É possível observar esse fenômeno na figura 3.2, que mostra um conjunto de planos cristalinos paralelos atingidos por um feixe de raios x, com ângulo de incidência igual a θ . Vale ressaltar que o feixe de raios x é monocromático, coerente e seu comprimento de onda é λ .

^{xviii} **Rede cristalina:** uma matriz tridimensional formada por pontos coincidentes com as posições atômicas, esta definição é válida quando o termo ser refere ao contexto de estrutura cristalina (CALLISTER, 2002).

Figura 17: Lei de Braag.



Fonte: Próprio autor, adaptado de EISBERG, 1992.

Na figura 3.2 temos que (d) é a distância entre os planos de átomos, (λ) é o comprimento de onda que incide sobre o cristal em um ângulo (θ), já (θ) é o ângulo formado pelos raios incididos e difratados, também é conhecido como ângulo de Bragg.

A partir da figura 3.2 é possível observar que

$$\sin \theta = \frac{d}{a}$$

$$\cos \varphi = \frac{b}{a}$$

Ainda é possível ver que $\varphi + 2\theta = 180^\circ$. Porém, existe uma condição primordial para que possa haver reflexão, esta condição é que a distância percorrida por cada feixe seja um múltiplo inteiro de λ .

Desta forma podemos escrever que,

$$a + b = n\lambda$$

onde $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

Substituindo a, b na equação de condição para reflexão teremos

$$\frac{d}{\sin \theta} + a \cos \varphi = n\lambda \Rightarrow$$

$$2d \sin \theta = n\lambda$$

E esta equação é a chamada Lei de Bragg, se tal lei não for satisfeita então, não haverá difração (EISBERG, 1992).

Vale enfatizar que a técnica de difração de raios X (DRX) é extremamente importante no estudo e na determinação da estrutura cristalina dos materiais. Além disso, fornece um método imprescindível para a identificação qualitativa e quantitativa de compostos cristalinos (PADILHA, 1997).

Essa técnica propõe a utilização de radiação (raios X) em uma amostra com o intuito de identificar as fases atuantes nos materiais, ou seja, determinar a taxa de cristalinidade destes. Além disso, é possível destacar que através das posições angulares dos picos de difração podem ser obtidos tamanho e a geometria da célula unitária^{xix} do material. Vale enfatizar que, os materiais cristalinos produzem picos de difração bem definidos e a largura desses picos está intimamente associada a características intrínsecas do cristal. Tal método fornece importantes informações não somente para a ciência, mas também, para a indústria (NEWELL, 2000; CALLISTER, 2002; SKOOG, HOLLER, NIEMAN, 2002).

Em seu trabalho, Sancho (2013) utilizou, com o intuito de identificar os padrões de difrações de Raios X, o difratômetro modelo XPert Pro MPD da *Panalytical*, utilizando uma fonte de radiação $K\alpha$ do elemento Co (40 kV e 30 mA, $\lambda = 1,788965$ nm). O intervalo angular em (2θ) foi de $10^0 - 70^0$ com velocidade de $\frac{1}{2}$ grau por minuto.

^{xix} **Célula unitária:** “consiste na unidade estrutural básica ou bloco de construção básico da estrutura cristalina e define a estrutura cristalina em virtude da sua geometria e das posições dos átomos em seu interior”. (CALLISTER, 2002, p.21)

3.3 Método de refinamento Rietveld

No ano de 1966, em Moscou, o físico holandês Hugo M. Rietveld^{xx}, apresentou no 7º Congresso da União Internacional de Cristalografia os princípios do método que hoje leva seu nome. Porém, naquela época, seu trabalho teve pouca repercussão. Somente após a exposição de seu trabalho seminal^{xxi} que seu método começou a ganhar crédito entre os pesquisadores, (PAIVA-SANTOS, 2001).

Vale ressaltar que as estruturas eram refinadas por meio de difração de nêutrons até o ano de 1977, e nesse período foram refinadas 172 estruturas. Todavia, no mesmo ano Young et al^{xxii}, Khattak & Cox^{xxiii}, Malmros & Thomas^{xxiv}, publicaram seus estudos utilizando os elementos da difração de raios x. Então, através destes trabalhos o método passou a ganhar crédito entre os pesquisadores e após a descoberta dos supercondutores cerâmicos em 1988 o método de Rietveld atingiu seu apogeu. Atualmente, o método de refinamento Rietveld é extremamente difundido e utilizado em todo o mundo para caracterizar materiais cristalinos em pó (PAIVA-SANTOS, 2001).

3.3.1 Descrição do método

O modelo proposto por Rietveld consiste em um método de caracterização e refinamento de estruturas cristalinas na forma de pó através uso de dados de difração de raios X ou nêutrons. Em outras palavras se pode dizer que o difratograma calculado dessa estrutura cristalina é ajustado ou

^{xx} RIETVELD, H. M. A method for including line profiles of neutron powder diffraction peaks in determination of crystal structures. In: **Acta Crystallographica**. 35 NORRE SOGADE, PO BOX 2148, DK-1016 COPENHAGEN, DENMARK: MUNKSGAARD INT PUBL LTD, 1966. p. A228-&.

^{xxi} RIETVELD, H. M. Line profiles of neutron powder-diffraction peaks for structure refinement. **Acta Crystallographica**, v. 22, n. 1, p. 151-152, 1967.

^{xxii} YOUNG, R. A.; MACKIE, P. E.; VON DREELE, R. B. Application of the pattern-fitting structure-refinement method of X-ray powder diffractometer patterns. **Journal of Applied Crystallography**, v. 10, n. 4, p. 262-269, 1977.

^{xxiii} KHATTAK, C. P.; COX, D. E. Profile analysis of X-ray powder diffractometer data: structural refinement of LaO_{0.75}SrO_{0.25}CrO₃. **Journal of Applied Crystallography**, v. 10, n. 5, p. 405-411, 1977.

^{xxiv} MALMROS, GUNNAR; THOMAS, J. O. Least-squares structure refinement based on profile analysis of powder film intensity data measured on an automatic microdensitometer. **Journal of Applied Crystallography**, v. 10, n. 1, p. 7-11, 1977.

refinado de tal forma que se aproxime o mais próximo possível do padrão difratométrico observado.

Por padrão difratométrico de uma estrutura cristalina entende-se como um conjunto de características intrínsecas do gráfico da amostra, como por exemplo: altura, largura, forma e posição etc.

Para o refinamento dos difratogramas utilizamos a seguinte sequência, inicialmente refinamos o parâmetro instrumental W da largura total do pico a meia altura (LTMA), os parâmetros estruturais: posições atômicas, parâmetros de rede, parâmetros térmicos (primeiramente os parâmetros térmicos isotrópicos e, em seguida, os parâmetros térmicos anisotrópicos), e, concluindo com os parâmetros V e U da FWHM.

Por fim, calculamos o tamanho do cristalito através do uso da equação de Scherrer (número da equação), esta equação faz a relação entre a espessura dos cristais da amostra com a dilatação dos picos obtidos no difratograma de raios X.

$$D = \frac{k\lambda}{\beta \cos \theta}$$

Onde D representa a espessura do cristal, k é uma constante que depende da forma das partículas, em nosso caso escolhemos $k = 1$, λ é o comprimento de onda da fonte de raios X, β é a largura total à meia altura (LTMA) e por fim, θ que é o ângulo de Braag (NEWELL, 2000).

3.4 Microscopia eletrônica de varredura (MEV)

A microscopia eletrônica de varredura ou MEV é uma técnica extremamente importante para a obtenção de informações detalhadas sobre as superfícies dos materiais. A importância dessa técnica está em seu alto grau de detalhamento. Sendo assim, o MEV é ideal para análise de rugosidade da amostra pois, as características superficiais se mostram extremamente visíveis nesse tipo de microscopia (NEWELL, 2000; SKOOG, HOLLER, NIEMAN, 2002).

A obtenção de imagens pelo procedimento de microscopia de varredura (em instrumentos analógicos) é similar ao usado num tubo de raios catódicos de

uma televisão. Ou seja, um feixe de elétrons atinge uma amostra sólida, e esse feixe percorre toda a amostra na direção horizontal, após essa varredura inicial é deslocado para baixo e começa o processo novamente até exaurir toda a área da amostra. Em sistemas mais avançados, a varredura do material acontece através de montagem automatizada do feixe elétrons sobre o mesmo (SKOOG, HOLLER, NIEMAN, 2002).

Vale salientar que nesse processo de microscopia são produzidos diversos sinais. Dentre esses, podemos destacar fótons fluorescentes de raios X, elétrons retroespalhados e secundários, e esses dois últimos são utilizados para construir as imagens das superfícies das amostras (SKOOG, HOLLER, NIEMAN, 2002).

Assim, podemos ressaltar que em seu trabalho, Sancho (2013) utilizou a microscopia da matriz de SBN pura e com dopantes de 3, 5, 10 e 15% que foram obtidas a partir do microscópio eletrônico de varredura modelo *Vega XMU/Tescan, Bruker*, com energia de 30 kV.

4 MÉTODOS E MATERIAIS

4.1 Método de Haaki-Coleman

Existem diversos métodos para aferir as propriedades dielétricas do material, tais recursos são de extrema importância na caracterização deste. Dentre eles podemos destacar a medida de alta frequência que pode ser obtida usando um fator de qualidade Q alto e o método da cavidade ressonante. Porém, esta técnica possui uma desvantagem pois, para uma faixa de frequência muito extensa este procedimento perde precisão. Desta forma é possível dizer que o problema não é medir os fatores de qualidade dos dielétricos de baixa perda, mas fazer tais medidas preservando a precisão (SEBASTIAN, 2008).

Vala ressaltar que alguns desses métodos não levam em conta os efeitos práticos embutidos num sistema de medição real, como exemplos desses efeitos podemos citar, os ruídos, interferências, perdas de acoplamento, atraso da linha de transmissão e desajuste de impedância. As medidas imprecisas desses elementos podem nos trazer prejuízos na medida do fator de qualidade Q (SEBASTIAN, 2008).

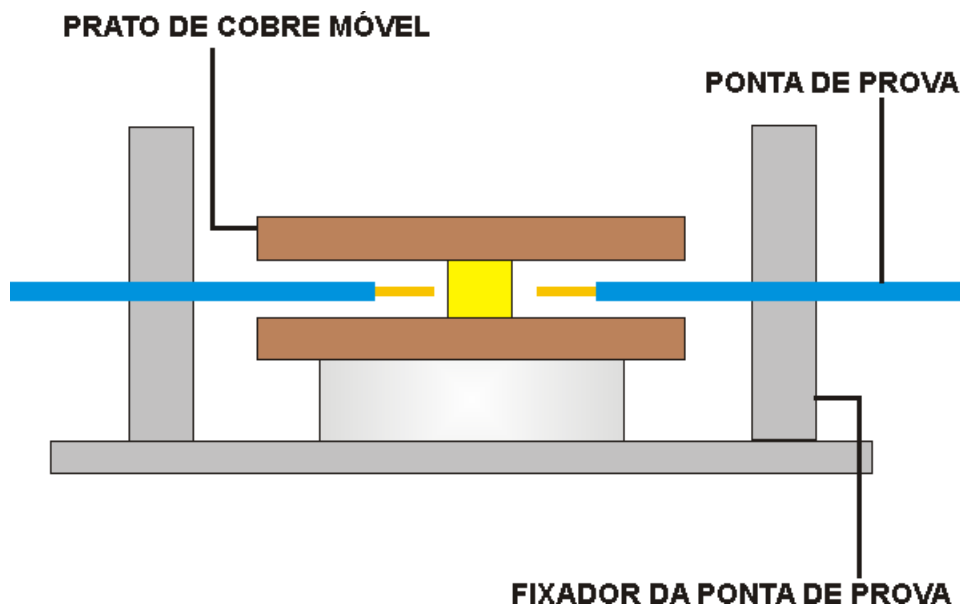
Deste modo com o intuito de manter a maior precisão possível, se utiliza para estudar a região de microondas a técnica desenvolvida por Hakki e Coleman (HAKKI and COLEMAN, 1960). Este método usa uma amostra em formato cilíndrico posicionado entre duas placas de cobre (Figura 3), com intuito de calcular a permissividade complexa dos ressoadores dielétricos (RDs). Assim, o que se observa é que o sinal de microondas é transmitido quando as frequências produzidas pelo analisador coincidem com as frequências de ressonância naturais da amostra, daí se deve o nome ressoador dielétrico (RD) (SEBASTIAN, 2008).

Neste trabalho, foi empregado um analisador de rede, o HP8716ET da *Hewlett-Packard (HP)*, munido de dois cabos coaxiais conectados aos respectivos “*probes*” de transmissão e recepção, juntamente um sistema Hakki-Coleman, modelo “300C Courtney Ressonator” da Damaskos, Inc., este tem a função de captar os sinais que são detectados pela antena receptora e com auxílio do *Software Courtney* da Damaskos Inc. Desta forma, o programa

analisa o espectro característico da amostra para determinar os modos de ressonância do ressoador, a permissividade dielétrica (ϵ'_r), a tangente de perda dielétrica ($\tan\delta$) e o fator de qualidade do material ($Q = 1/\tan\delta$).

Vale ressaltar que o modo utilizado foi o TE_{011} pois, segundo a literatura (KAJFEZ, GUILLON, 1998) este tem maior facilidade de ser identificado porque suas propriedades ressonantes permanecem sem alterações mesmo que existam espaços de ar (*air gap*) entre o dielétrico e as placas condutoras (SEBASTIAN, 2008). Convém lembrar ainda que, a faixa de frequência na qual se deu essa análise foi de 50 MHz a 13,5 GHz.

Figura 18: Sistema de medição de propriedades utilizando o método de Hakki – Coleman.



Fonte: Próprio autor, adaptado SEBASTIAN, 2008.

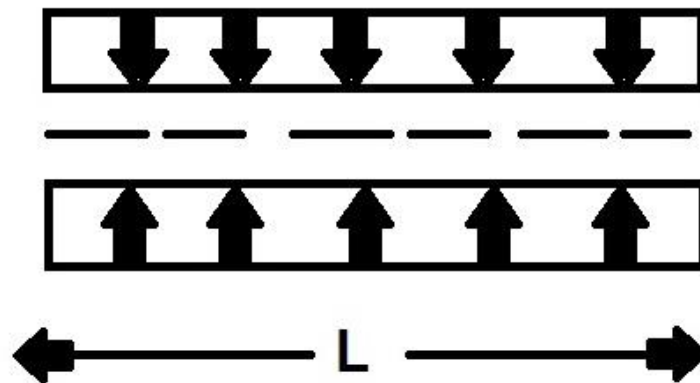
4.2 Medida do coeficiente de temperatura de frequência ressonante (τ_f)

Em um dispositivo elétrico que opera como um ressoador de microondas é necessário que os valores do coeficiente de temperatura de frequência de ressonância τ_f seja muito próximo de zero. O τ_f é o fator que responsável por designar a estabilidade térmica do ressoador. Este estabelece o quanto a frequência irá fluir dada uma determinada mudança de temperatura

(SEBASTIAN, 2008). Desta forma, para uma aplicação em circuitos de microondas os valores de τ_f devem ser baixos, geralmente não nulos, mas com valor muito pequeno. Assim, podemos destacar que a temperatura influencia de duas formas a frequência de ressonância nos ressoadores de microondas a primeira é na expansão das dimensões do material e a segunda é diretamente na permissividade elétrica relativa deste material (KAJFEZ, GUILLON, 1998).

Para exemplificar tal fato podemos supor um ressoador coaxial de microondas de meia onda inicialmente preenchido com ar. Ver Figura 18.

Figura 19: Ressorador coaxial de meia onda.



Fonte: Adaptado de KAJFEZ, GUILLON, 1998.

Assim, o fenômeno de ressonância ocorre quando o comprimento L é metade do comprimento de onda λ , no modo TEM. E desta forma,

$$L = \frac{\lambda}{2} \quad (4.1)$$

mas, para um meio preenchido com vácuo ou ar,

$$\lambda = \lambda_0 = \frac{c}{f} \quad (4.2)$$

e a frequência pode ser reescrita como,

$$f = \frac{c}{2L} \quad (4.3)$$

considerando que $c = 3 \cdot 10^8$ m/s. Porém, se tivermos um incremento ΔT na temperatura, a frequência muda. Assim, derivando a equação 4.3 em função do comprimento L ,

$$\frac{df}{dL} = \frac{d}{dL} \left(\frac{c}{2L} \right) = \frac{c}{2} \cdot \left(\frac{-1}{L^2} \right) = \frac{c}{2L} \cdot \left(\frac{-1}{L} \right) = f \cdot \left(\frac{-1}{L} \right) \Rightarrow$$

logo,

$$\frac{df}{dL} = f \cdot \left(\frac{-1}{L} \right) \Rightarrow$$

Então,

$$\frac{df_L}{f_L} = \frac{-dL}{L} \quad (4.4)$$

E desta forma, podemos escrever que,

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{df_L}{f_L} \cdot \frac{\Delta L}{dL} = \frac{-dL}{L} \cdot \frac{\Delta L}{dL} = -\frac{\Delta L}{L}$$

E assim,

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{\Delta L}{L} \quad (4.5)$$

Mas, lembrando que a variação da dilatação linear num sólido é dada por,

$$\frac{\Delta L}{L} = \alpha_L \cdot \Delta T \quad (4.6)$$

E substituindo a equação 4.6 em 4.5 teremos,

$$\frac{\Delta f}{f} = -\alpha_L \cdot \Delta T \quad (4.7)$$

Porém, se ao invés de ar na figura xxx, tivermos um material dielétrico de permissividade elétrica igual a ϵ_r que preenche todo o espaço entre as placas do ressonador, o comprimento de onda será dado por,

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (4.8)$$

E a frequência do ressonador de meio comprimento de onda será dado por,

$$f = \frac{c}{2L\sqrt{\epsilon_r}} \quad (4.9)$$

Vale destacar que a temperatura também atua diretamente na permissividade do material,

$$\frac{\Delta \epsilon_r}{\epsilon_r} = \tau_E \cdot \Delta T \quad (4.10)$$

Onde τ_E é o coeficiente de temperatura da constante dielétrica, que indica a constante de proporcionalidade dessa equação. Se tomarmos a derivada da equação 4.9 em relação a ϵ_r poderemos escrever que,

$$\frac{df_{\epsilon_r}}{d\epsilon_r} = \frac{d}{d\epsilon_r} \left(\frac{c}{2L\sqrt{\epsilon_r}} \right) = \frac{c}{2L} \cdot \frac{d}{d\epsilon_r} \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \right) = \frac{c}{2L} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \right) \left(-\frac{1}{2\epsilon_r} \right) = f_{\epsilon_r} \cdot \left(-\frac{1}{2\epsilon_r} \right) \Rightarrow$$

Logo,

$$\frac{df_{\epsilon_r}}{f_{\epsilon_r}} = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d\epsilon_r}{\epsilon_r} \right) \quad (4.11)$$

E assim, a frequência de ressonância passa a ter dois fatores que a constitui um está relacionado com a dilatação do material e outro com a permissividade deste material e desta forma é possível escrever que,

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{df_L}{f_L} \cdot \frac{\Delta L}{dL} + \frac{df_{\epsilon_r}}{f_{\epsilon_r}} \cdot \frac{\Delta \epsilon_r}{d\epsilon_r} \quad (4.12)$$

Mas, substituindo as equações 4.4 e 4.11 na equação 4.12 teremos,

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{-dL}{L} \cdot \frac{\Delta L}{dL} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d\epsilon_r}{\epsilon_r} \right) \cdot \frac{\Delta \epsilon_r}{d\epsilon_r} \Rightarrow$$

logo,

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{\Delta L}{L} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta \epsilon_r}{\epsilon_r}$$

E substituindo as equações 4.6 e 4.10 na expressão acima,

$$\frac{\Delta f}{f} = -\alpha_L \cdot \Delta T - \frac{1}{2} \cdot \tau_E \cdot \Delta T$$

E assim, definimos matematicamente o coeficiente de temperatura da frequência de ressonância τ_f como,

$$\tau_f \cdot \Delta T = \frac{\Delta f}{f} = -\alpha_L \cdot \Delta T - \frac{1}{2} \cdot \tau_E \cdot \Delta T$$

Ou seja,

$$\tau_f = -\alpha_L - \frac{1}{2} \cdot \tau_E \quad (4.13)$$

É preciso destacar que esta equação não é válida somente para ressoadores que operam no modo TEM, mas também, para quaisquer ressoadores que estejam preenchidos com material dielétrico de permissividade constante ϵ_r , outro fato importante é que a unidade de medida para o τ_f que é expresso como partes por milhão por grau Celsius (ppm/°C). Podemos observar que para um ressoador ideal, o coeficiente de temperatura da frequência de ressonância τ_f deve estar próximo de zero. Ou seja, isso implica dizer que, o τ_E

deve ter o dobro do valor de α_L e deve ser negativo (KAJFEZ, GUILLON, 1998; SEBASTIAN, 2008).

Experimentalmente para se medir o valor do τ_f em cerâmicas dielétricas geralmente, usa-se o método de Courtney. Neste método o ressonador dielétrico é mantido em curto circuito entre duas placas de metálicas de alta condutividade e submetido a um forno numa temperatura controlada. Este sistema é excitado por duas sondas coaxiais ligadas a um analisador de rede e deve aumentar de forma gradual a uma taxa de ($\sim 1^\circ\text{C}/\text{min}$) na faixa de 25°C - 80°C (SEBASTIAN, 2008).

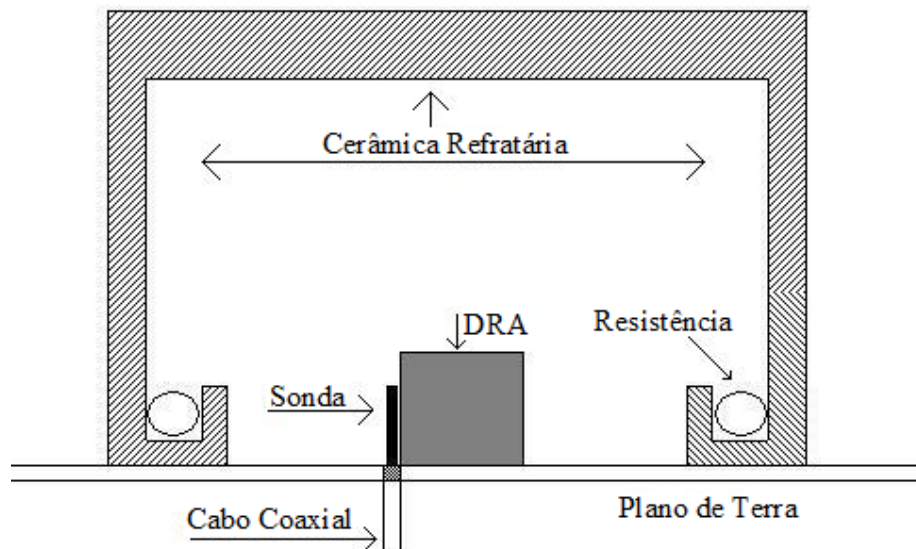
Porém, neste trabalho o método empregado para estudar a estabilidade térmica do material foi o método de Silva, Fernandes e Sombra (SFS)^{xxv} [66], [67], [68]. Nesta técnica o modo analisado é o dominante, diferentemente do método de Courtney que procura o segundo modo ressonante que pode ser inibido pois, a perda dielétrica pode causar o alargamento do modo. Portanto, pela praticidade, e eficiência do método SFS seu uso é justificado. A Figura 18 retrata o sistema descrito.

^{xxv} 66. A.F.L. ALMEIDA, R. R. S. H. H. B. R. P. B. A. F. F. S. A. C. M. A. V. F. N. A. F. R. S. T. M. S. A. S. B. S. Experimental and numerical investigation of a ceramic dielectric resonator (DRA): $\text{CaCu}_3\text{Ti}_4\text{O}_{12}$ (CCTO). *Physica B: Condensed Matter*, v. 403, n. 4, p. 586–594, 2008.

67. F. M. M. PEREIRA, R. S. T. M. S. H. O. R. G. F. M. P. J. K. R. B. T. M. J. S. R. M. A. S. S. A. S. B. S. Experimental and numerical investigation of a magnetic resonator antenna based on the M-type hexaferrite ($\text{Ba}_{1-x}\text{Sr}_x\text{Fe}_{12}\text{O}_{19}$). *Microwave and Optical Technology Letters*, v. 52, p. 452–458, 2010.

68. P. B. A. FECHINE, H. H. B. R. R. S. T. M. J. C. D. R. L. A. S. B. S. Study of a microwave ferrite resonator antenna, based on a ferrimagnetic composite ($\text{Gd}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$)/ $\text{GdI}(\text{Gd}-\text{Y}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12})\text{YIG1-X}$. *IET Microwaves, Antennas & Propagation*, v. 3, n. 8, p. 1191, 2009.

Figura 20: Sistema de medição do τ_f com o forno acoplado.



Fonte: (FERNANDES, 2012)

4.3 Medidas de monopolo

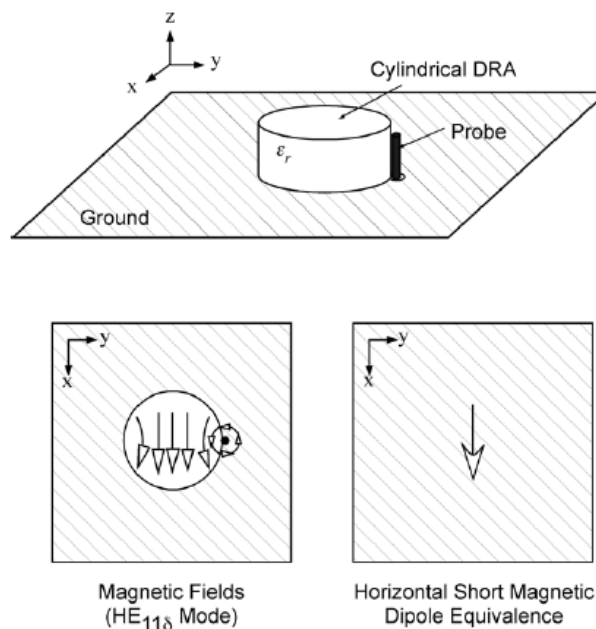
A análise das medidas de monopolo foram realizadas a partir da técnica desenvolvida por (LONG, MCALLISTER, SHEN, 1983), com o auxílio de um analisador de rede (Agilent N5230A). Esta técnica consiste em excitar as amostras sob a configuração de DR, ou seja, uma sonda coaxial/alimentação é inserida por baixo do plano terra e a peça que se deseja analisar deve ser posicionada junto a sonda (PETOSA, 2007).

O plano terra é feito de cobre e possui as dimensões iguais a 35,5 cm x 30 cm x 2,14 mm. Já a sonda é ligada ao plano de terra através de um conector SMA e possui um comprimento de 9mm. Assim, a antena ressoadora submetida a este processo irá atuar no modo HE₁₁₀, e sua frequência de ressonância será aquela em que a perda de retorno é mínima (PETOSA, 2007).

Geralmente, não é uma tarefa de fácil execução visto que a peça analisada é posta manualmente em diversas posições distintas com o intuito de encontrar uma posição que aponte para a menor perda de retorno e melhor casamento de impedância. Vale ressaltar que para uma DRA cilíndrica é mais

adequado o posicionamento da sonda de forma adjacente a DRA como mostrado na Figura 20 (PETOSA, 2007).

Figura 21: Acoplamento da sonda ao modo $HE_{11\delta}$ do DRA cilíndrico.



Fonte: adaptado PETOSA, 2007.

Porém, um fator de relevância que não pode deixar de ser mencionado nessa análise são os *gaps*^{xxvi} de ar. Estes *gaps* ou espaços de ar podem mudar

^{xxvi} Junker, G.P., et al., "Effect of an Air Gap on a Cylindrical Dielectric Resonator Antenna Operating in the TM_{11} Mode," IEEE Electronics Letters, Vol. 30, No. 2, Jan. 1994, pp. 97-98.

Junker, G.P., et al., "Effects of Fabrication Imperfections for Ground-Plane-Backed Dielectric Resonator Antennas with Coaxial Excitation," IEEE Antennas & Propagation, Vol. 37, No. 1, Feb. 1995, pp. 40-47.

Drossos, O. Z. Wu, nmJ L.E. Davis, "The Air Gap Effect on a Microstrip-Coupled Cylindrical Dielectric Resonator Antenna," Microwave and Optical Technology Letters, Vol. 20, No. 1, Jan. 1999, pp. 36-40.

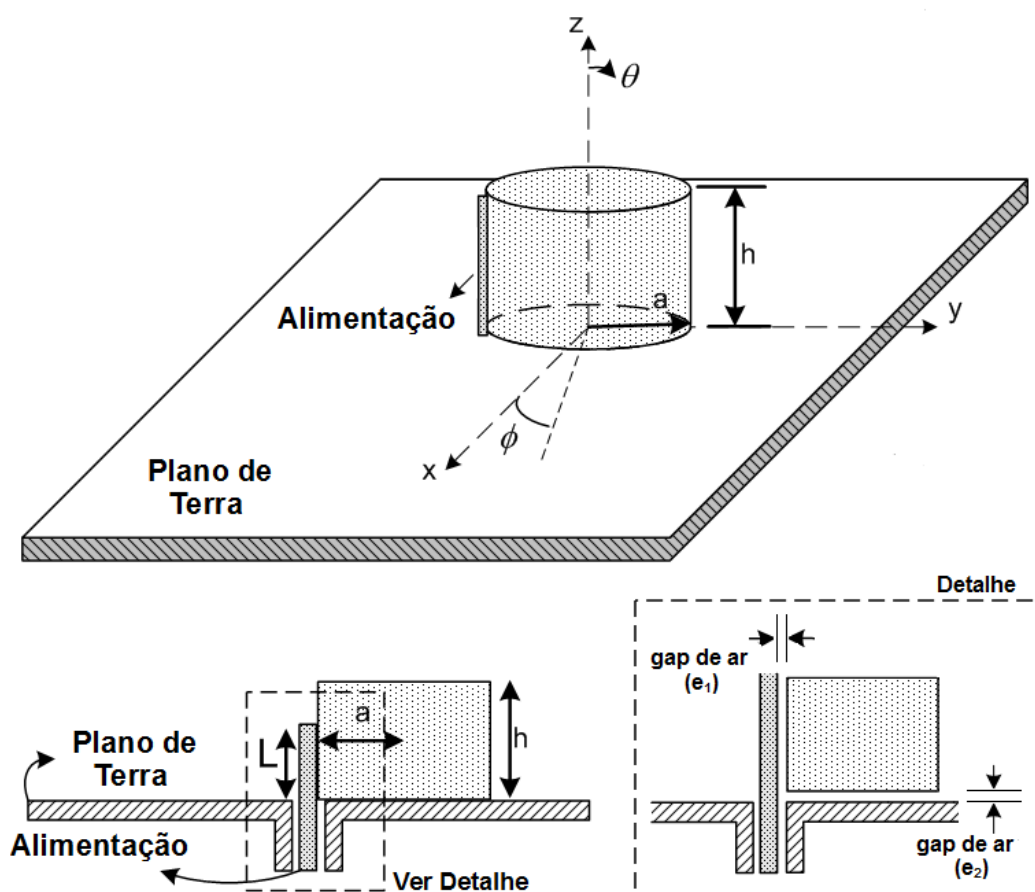
Deng, S.M., et al. "A CPW-Fed Suspended, Low Profile Rectangular Dielectric Resonator Antenna for Wideband Operation," IEEE Antennas & Propagation Symposium Digest AP-S 2005, Washington, D.C., Vol. 4b, pp. 242-245.

Cooper, M., et al., "Investigation of Dielectric Resonator Antennas for L-Band Communications," Symposium on Antenna Technology and Applied Electromagnetics ANTEM 96, Montreal, Canada, Aug. 1 1996, pp. 167-170.

Cooper, M., "Investigation of Current and Novel Rectangular Dielectric Resonator Antennas for Broadband Applications at L-Band Frequencies," M.Sc. Thesis, Carleton University, 1997.

de forma significativa os valores da frequência de ressonância e do fator de qualidade Q , e essas mudanças podem ocorrer de forma mais acentuada se o material estudado possuir uma constante dielétrica alta. De forma geral, é possível dizer que os gaps produzem um aumento na frequência de ressonância e uma diminuição do fator de qualidade Q , e produz também uma alteração na impedância de entrada (PETOSA, 2007). A Figura 21 mostra os gaps de ar entre a sonda e a DRA, e entre a DRA e o plano terra.

Figura 22: Medida de monopolo e gaps de ar entre sonda e DRA, plano terra e DRA.



Fonte: (FERNANDES, 2012)

4.4 Simulação numérica em HFSS

Na fase de simulação utilizamos o software ANSYS HFSS (*High Frequency Structure Simulator*), este programa é um simulador numérico que utiliza o método de elementos finitos para simular campo eletromagnéticos e

para projetar componentes de alta frequência dentre os quais elencamos os dispositivos de RF, microondas, antenas e etc.

Em nosso estudo a simulação foi utilizada com o objetivo de validar os resultados experimentais, e ainda, designar parâmetros imprescindíveis para a análise e legitimação das amostras cerâmicas como uma DRA. Desta forma, a partir da simulação foi possível obter parâmetros de campos distantes como diretividade, ganho, eficiência da antena e diagrama de radiação e etc.

Contudo, antes de iniciar a simulação no HFSS devem ser inseridos os dados dos parâmetros dielétricos, permissividade relativa (ϵ_r) e tangente de perdas do material ($\tan\delta$), e os valores geométricos da amostra, da altura (h) e raio (r). Após este passo, o programa deve ser iniciado, ao fim da primeira iteração geralmente, observa-se uma discrepância entre os gráficos experimentais e simulados. Então, se faz necessário um ajuste nos gaps de ar – gap vertical (e_1), e gap horizontal (e_2) – com o intuito de encontrar valores para o par de gaps que seja o mais próximo do real. E desta maneira, o modelo numérico é validado através das medidas da perda de retorno e impedâncias de entrada da DRA.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

5.1 Análise dielétrica na faixa de microondas

Como já foi mencionado no capítulo 4 desta dissertação, o método utilizado para analisar as propriedades dielétricas foi o método Hakki and Coleman (1960). Vale ressaltar que para a medição do coeficiente de frequência de ressonância (τ_f) utilizamos o método SFS que utiliza o modo dominante no aparato para antena DRA com variação de temperatura.

Na Tabela 2 são apresentados os valores obtidos na faixa de frequência de microondas para todas as amostras. Vale ressaltar que estes valores foram alcançados considerando a permissividade magnética ($\mu_r = 1$), e esta aproximação se faz necessária uma vez que no método Hakki – Coleman geralmente, é utilizado para amostras com características genuinamente dielétricas.

Tabela 2 – Propriedades dielétricas na faixa de microondas das amostras*.

Amostras	ϵ_r	D	H	$\tan \delta$	f_r	Q_D	$ppm/^{\circ}C$
		(mm)	(mm)	(10^{-2})	(GHz)	(GHz)	
SBN0La	41.570	17.112	9.245	5.000	2.569	72.792	-489.700
SBN3La	137.996	14.590	8.049	3.663	1.878	63.148	-460
SBN5La	152.077	14.542	8.034	4.954	1.840	44.587	-675.346
SBN10La	34.363	16.811	8.320	2.894	2.764	147.958	-79.85
SBN15La	23.540	16.940	8.408	1.877	3.221	273.427	-116.510

Fonte: Próprio autor.

* ϵ_r (permissividade dielétrica), D (diâmetro), H (altura), $\tan \delta$ (tangente de perdas), f_r (frequência de ressonância), Q_D (fator de qualidade) e τ_f (Coeficiente de temperatura da frequência de ressonância) para todas as amostras.

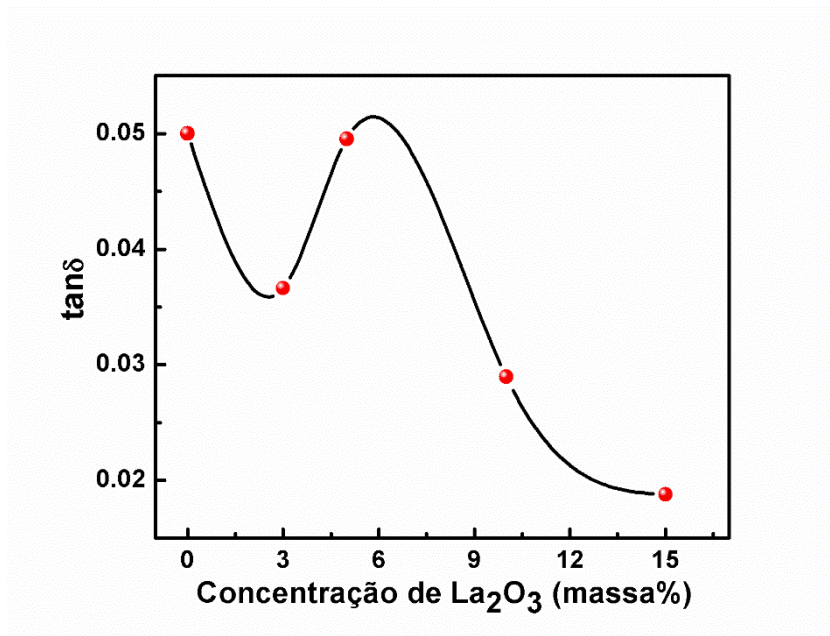
A partir da análise dos dados da Tabela 2 é possível observar que, a frequência de ressonância varia aproximadamente de 1.84 a 3.22 GHz, enquanto os valores para as tangentes de perdas dielétricas mostraram um

decréscimo quando comparados a amostra pura, e desta forma, constatamos que com a adição La_2O_3 a tangente de perdas diminui e o menor valor encontrado para esta grandeza é de aproximadamente $1.87 \cdot 10^{-2}$. Este fato pode ser observado na Figura 23.

Como já foi visto na seção 2.9.3, o fator de qualidade Q é inversamente proporcional a tangente de perdas e desta maneira, observamos que o maior valor para Q_D é de aproximadamente 273.427 encontrado para a dopagem de 15% de La_2O_3 .

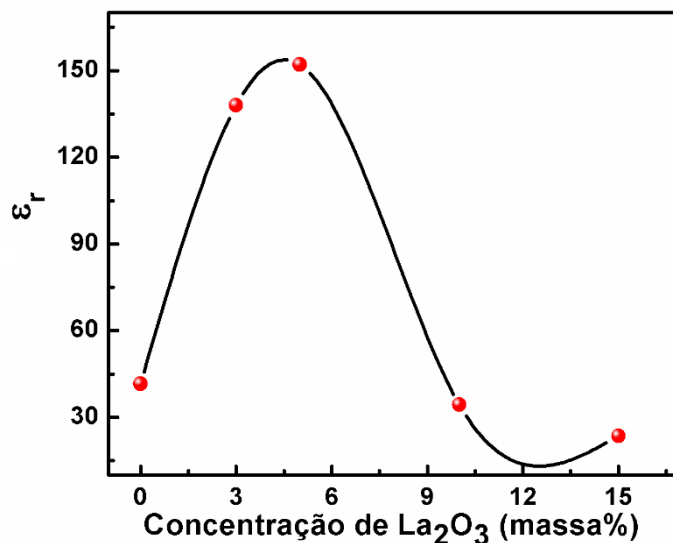
Já na Figura 24 é mostrado a variação da permissividade elétrica em função da concentração de lantânio nas amostras estudadas. Podemos observar que o valor mais alto encontrado para a permissividade elétrica está na amostra de SBN5La, $\epsilon_r = 152.0766$ e mais baixo foi observado para a amostra SBN15La, $\epsilon_r = 23.540$. Outro fato importante é que a permissividade se aproxima de zero para uma possível dopagem de 12 %, ou seja, nesse ponto o material poderia ser usado como um isolador.

Figura 23: $\tan\delta$ em função da concentração de La_2O_3 amostras.



Fonte: Próprio autor.

Figura 24: ϵ_r em função da concentração de La_2O_3 amostras SBN0LA, SBN3LA, SBN5LA, SBN10LA, SBN15LA.



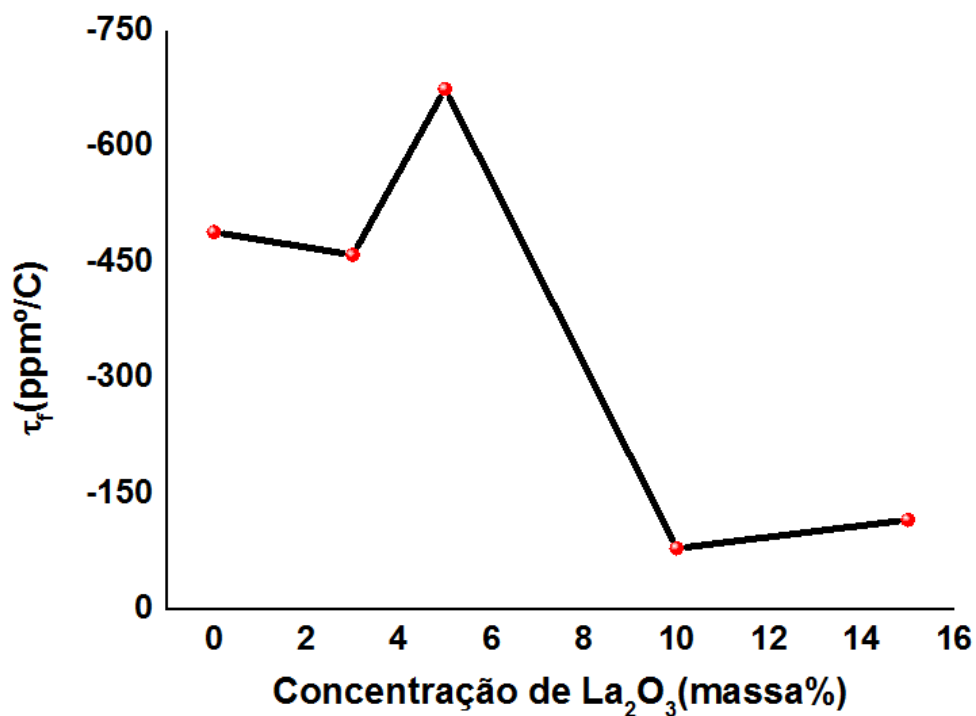
Fonte: Próprio autor.

5.2 Coeficiente de temperatura da frequência de ressonância (τ_f)

Na Figura 25 é mostrada a dependência entre o coeficiente de temperatura τ_f e a concentração de massa de lantânio na amostra. Nesta, é possível observar que o menor valor encontrado para o $\tau_f = -675.34679$ ppm/°C foi o da amostra SBN5La, enquanto o valor que mais se aproximou de zero pode ser observado na amostra de SBN10LA que é $\tau_f = -79.85$ ppm/°C. Esse resultado é importante pois, um dos fatores necessários para que este material opere como um ressonador de microondas é que a temperatura de frequência de ressonância seja o mais próximo de zero possível, assim, esse resultado o torna um bom candidato para aplicação nas indústrias de telecomunicações sem fio. (CHEN *et al.*, 2009; CHEN, 2010).

Vale destacar que, de acordo com o gráfico, uma possível dopagem com 12% de massa sobre a matriz poderia oferecer um resultado ainda mais próximo de zero, o que é seriamente desejável para aplicação em microondas deste produto.

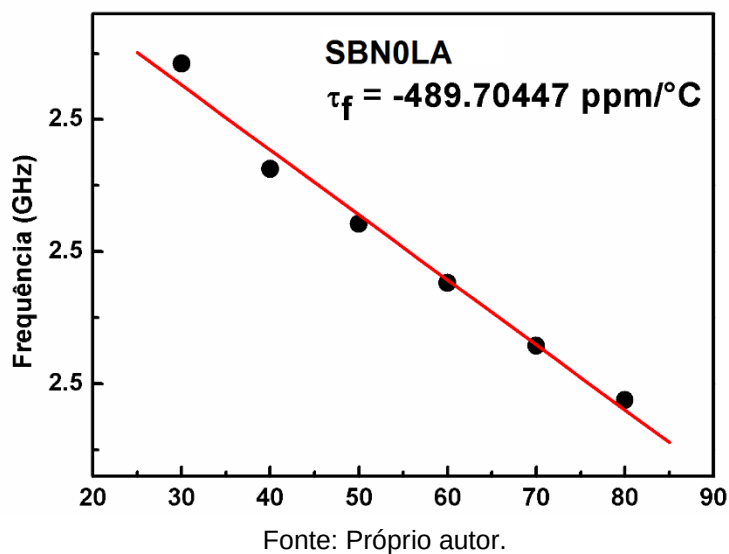
Figura 25: τ_f das amostras SBN0LA, SBN3LA, SBN5LA, SBN10LA, SBN15LA sinterizadas em 1000°C/2h.



Fonte: Próprio autor.

Na Figura 26 estão representados graficamente, o coeficiente de temperatura em frequência de ressonante em função da variação de temperatura para a amostra pura. E é possível notar que tendência do gráfico é decrescente e com poucas dispersões nas temperaturas estudadas.

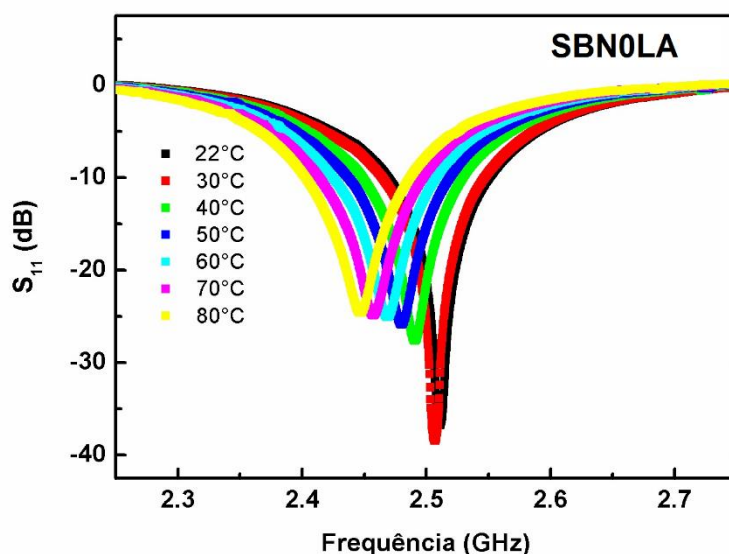
Figura 26: τ_f da amostra SBN0LA sinterizada em 1000°C/2h.



Já na Figura 27 temos o gráfico do coeficiente de reflexão ($\Gamma = S_{11}$) por frequência, e com variação de temperatura, e a partir da análise deste podemos perceber que a medida em que a temperatura varia de 22° - 80°C, ocorre um aumento do fato S_{11} de -36.7343 até -24.6321dB.

Quando a temperatura é de 22°C, temos que $S_{11} = -36.7343$ e sua frequência de ressonância $f_r = 2.5109372$ (GHz). Porém, quando a temperatura atinge o valor de 30°C observamos uma queda no valor de $S_{11} = -38.4319137$ e de sua frequência de ressonância $f_r = 2.50687552$ (GHz). Para as demais temperaturas o que se observa são aumentos gradativos em S_{11} e uma queda sucinta nos valores da frequência, de tal forma que, para a temperatura de 80°C o valor de $f_r = 2.44687896$ (GHz), ou seja, ao longo da faixa de temperatura estudada tivemos um decréscimo de frequência em cerca de 2.55%.

Figura 27: Diagrama (Coeficiente de reflexão x Frequência). Análise da amostra SBN0LA sinterizada em 1000°C/2h com variação de temperatura.

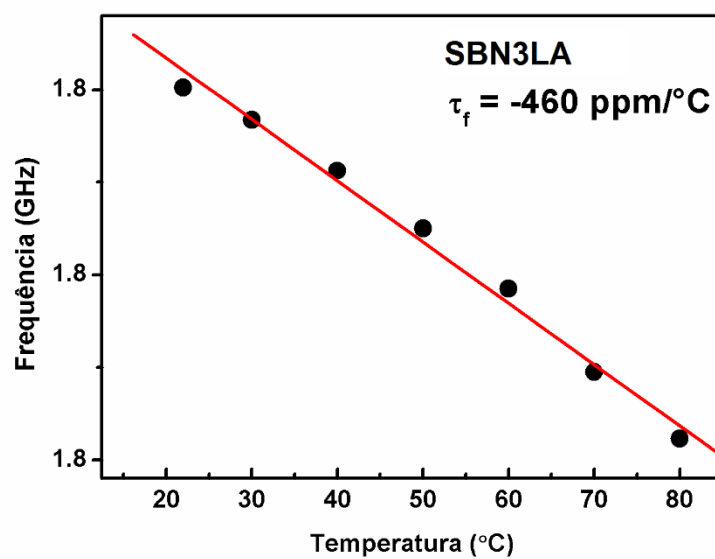


Fonte: Próprio autor.

As Figuras 28 – 31 mostram o coeficiente de temperatura em frequência de ressonância em função da variação de temperatura para as amostras dopadas com 3, 5, 10, 15% de massa de La_2O_3 respectivamente. Em todos os gráficos é possível perceber uma tendência decrescente nos gráficos. Porém, na amostra dopada com 10% de lantânio observamos uma certa dispersão, o que indica uma possível instabilidade térmica, já na amostra de 5% temos a menor dispersão entre todos as amostras.

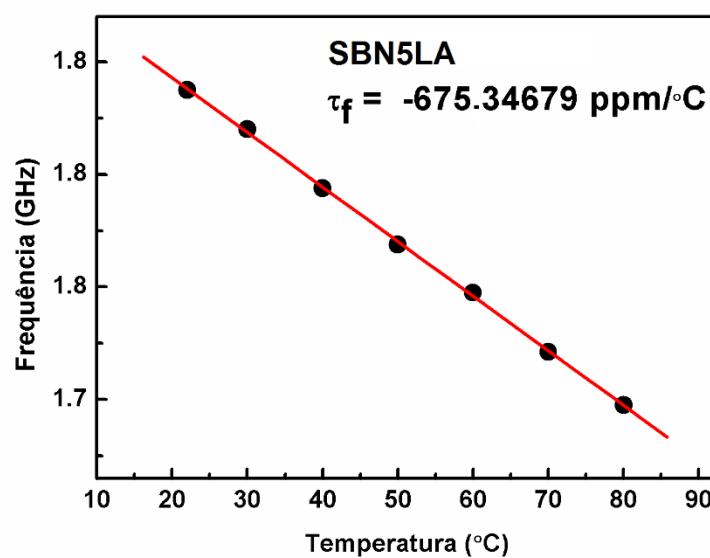
Já nas Figura 32 – 35 temos os gráficos dos coeficientes de reflexão ($\Gamma = S_{11}$) por frequência, e com variação de temperatura, para as amostras dopadas com 3, 5, 10, 15% de massa de La_2O_3 respectivamente. A partir da análise destas figuras observamos que a medida em que a temperatura varia de 22° - 80°C, ocorre um aumento no coeficiente de reflexão, e um decréscimo na frequência de ressonância.

Figura 28: τ_f da amostra SBN3LA sinterizada em 1000°C/2h.



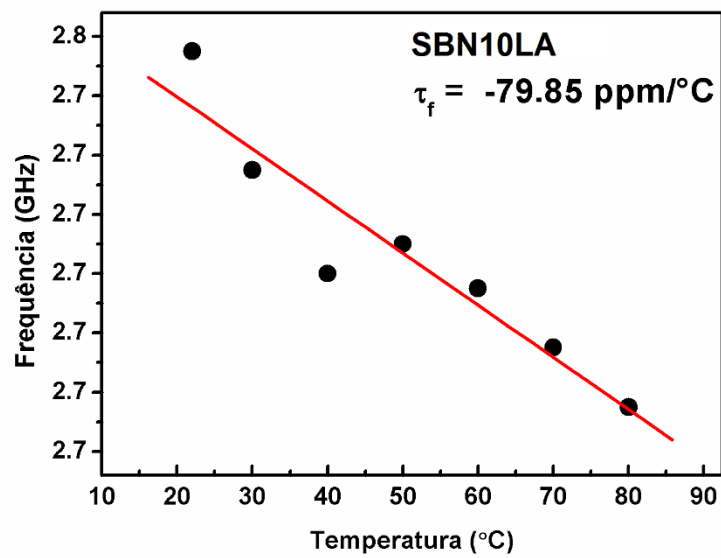
Fonte: Próprio autor.

Figura 29: τ_f da amostra SBN5LA sinterizada em 1000°C/2h.



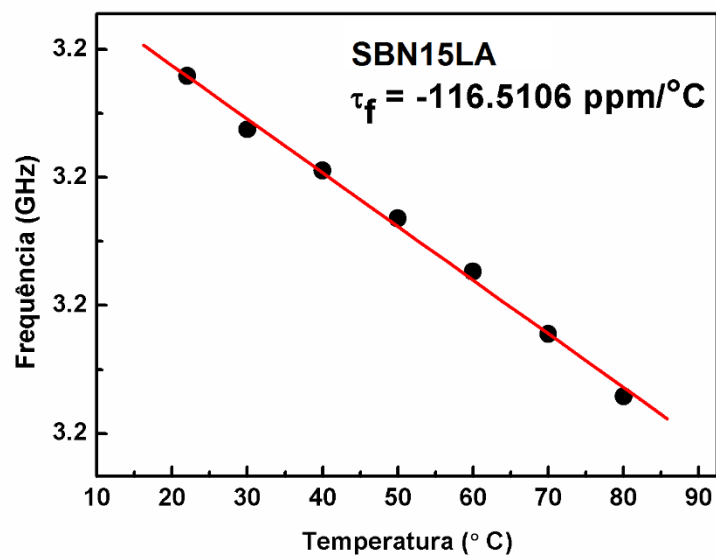
Fonte: Próprio autor.

Figura 30: τ_f da amostra SBN10LA sinterizada em 1000°C/2h.



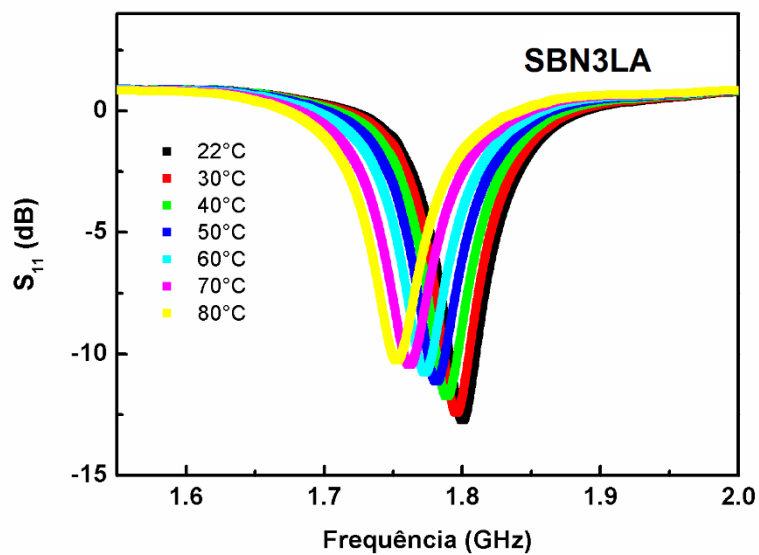
Fonte: Próprio autor.

Figura 31: τ_f da amostra SBN15LA sinterizada em 1000°C/2h.



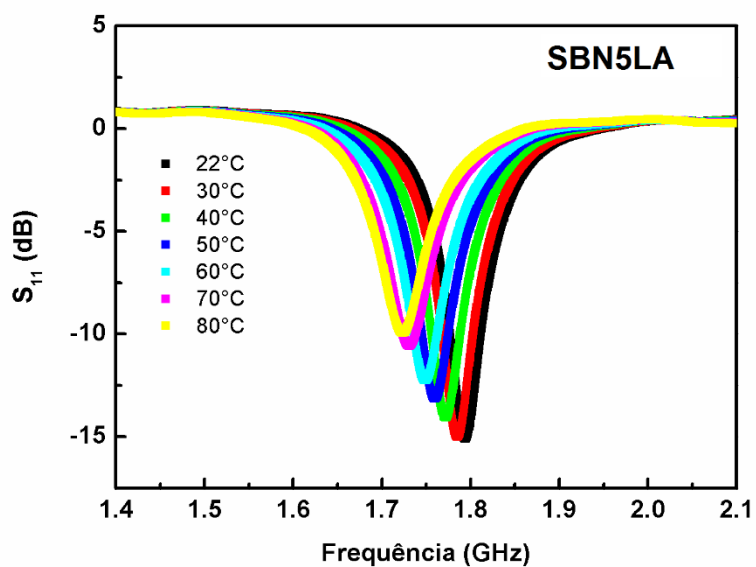
Fonte: Próprio autor.

Figura 32: Diagrama (Coeficiente de reflexão x Frequência). Análise da amostra SBN3LA sinterizada em 1000°C/2h com variação de temperatura.



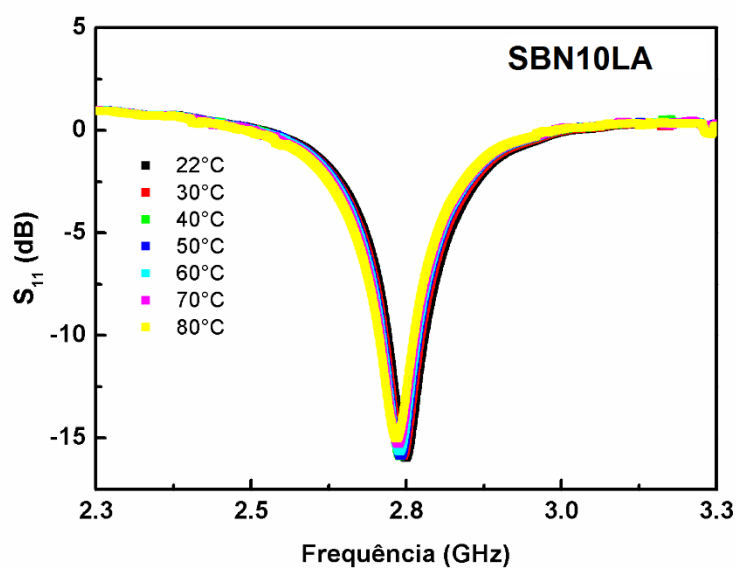
Fonte: Próprio autor.

Figura 33: Diagrama (Coeficiente de reflexão x Frequência). Análise da amostra SBN5LA sinterizada em 1000°C/2h com variação de temperatura.



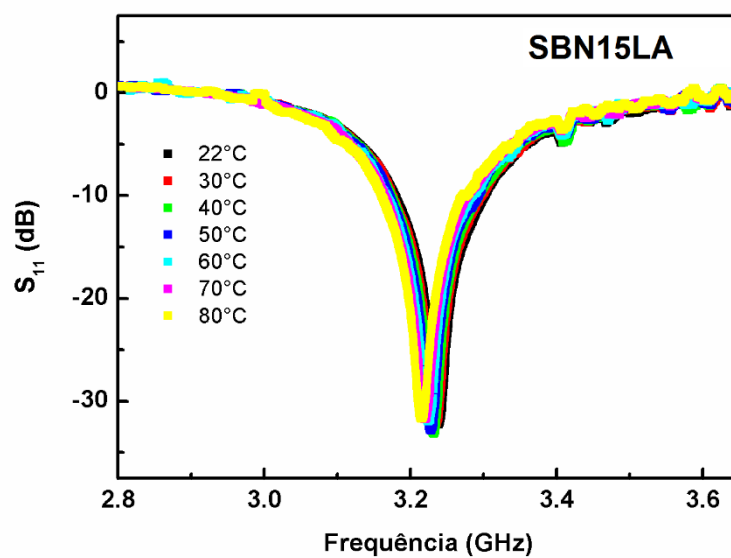
Fonte: Próprio autor.

Figura 34: Diagrama (Coeficiente de reflexão x Frequência). Análise da amostra SBN10LA sinterizada em 1000°C/2h com variação de temperatura.



Fonte: Próprio autor.

Figura 35: Diagrama (Coeficiente de reflexão x Frequência). Análise da amostra SBN15LA sinterizada em 1000°C/2h com variação de temperatura.



Fonte: Próprio autor.

Na Tabela 3 estão listados os valores das frequências para as temperaturas iniciais e finais de cada amostra.

Tabela 3 – Frequências de ressonância para as temperaturas inicial e final das amostras.

Temperatura	SBN0LA	SBN3LA	SBN5LA	SBN10LA	SBN15LA
	$f_r(\text{GHz})$	$f_r(\text{GHz})$	$f_r(\text{GHz})$	$f_r(\text{GHz})$	$f_r(\text{GHz})$
22°C	2.5109	1.8003	1.7937	2.7493	3.2381
80°C	2.4468	1.7528	1.7231	2.7343	3.2150

Fonte: Próprio autor.

Na Tabela 4 estão listados os valores dos coeficientes de reflexão as temperaturas iniciais e finais de cada amostra.

Tabela 4 – Coeficiente de reflexão para as temperaturas inicial e final das amostras.

Temperatura	SBN0LA	SBN3LA	SBN5LA	SBN10LA	SBN15LA
	$S_{11}(\text{dB})$	$S_{11}(\text{dB})$	$S_{11}(\text{dB})$	$S_{11}(\text{dB})$	$S_{11}(\text{dB})$
22°C	-36.7343	-12.7333	-15.1090	-15.9503	-32.2520
80°C	-24.6321	-10.2700	-9.9365	-15.0195	-31.7207

Fonte: Próprio autor.

5.3 Estudo da matriz $\text{SrBi}_2\text{Nb}_2\text{O}_9$ com adições de La_2O_3 para aplicação como DRA

O intuito deste tópico é analisar as propriedades do material $\text{SrBi}_2\text{Nb}_2\text{O}_9$ com as dopagens de 3, 5, 10, e 15 % de La_2O_3 para a sua aplicação como uma antena ressoadora dielétrica na faixa de microondas. Como já mencionado anteriormente, foram feitos ensaios em monopolo das amostras com a finalidade de caracterizar estes materiais como antenas ressoadoras dielétricas cilíndricas.

Tal é estudo se faz necessário pois, através dos resultados adquiridos no ensaio de monopolo são obtidos os valores experimentais para as impedâncias – que possuem a função de avaliar o acoplamento da linha de transmissão – e desta forma, ajustar estes resultados com a simulação e então, legitimar os parâmetros através do programa HFSS.

Porém, o acoplamento mencionado acima é influenciado pelos espaços de ar (gaps) que ficam entre o plano terra e as DRAs, e entre as DRAs e a sonda. E desta forma, para que a simulação possa ser o mais próximo do real possível devemos alimentar o modelo do HFSS com os valores iniciais dos gaps, vertical (e1) e horizontal (e2), vale destacar ainda que, neste molde de simulação, foram inseridos os valores das propriedades dielétricas obtidos pelo método Hakki – Coleman e com as características geométricas das amostras. A Tabela 5 sintetiza as informações inseridas na simulação.

Tabela 5: Dados fornecidos ao HFSS.

Amostras	ϵ_r	r (mm)	H (mm)	$\tan \delta$ (10^{-2})	f_r (GHz)
SBN0La	41.570	8.556	9.245	5.000	2.569
SBN3La	137.996	7.295	8.049	3.663	1.878
SBN5La	152.077	7.271	8.034	4.954	1.840
SBN10La	34.363	8.405	8.320	2.894	2.764
SBN15La	23.540	8.470	8.408	1.877	3.221

Fonte: próprio autor.

A partir da Tabela 5 é possível inferir que a medida que aumentamos a porção da dopagem de lantânio a tangente de perdas dielétricas diminui, porém devemos ressaltar que na amostra com 5% de La_2O_3 temos um aumento do valor da tangente de perdas em relação a amostra anterior de 3%. Além disso, devemos salientar que este comportamento é extremamente importante para uma possível aplicação da peça como DRA, uma vez que tal retração da tangente implica num aumento no fator de qualidade Q.

Através das simulações foram colhidos os resultados para a perda de retorno em função da frequência para cada amostra estudada. Tais resultados são mostrados na Tabela 6 apresentada abaixo.

Tabela 6: Perda de Retorno em (dB). Dados experimentais e simulados.

Perda de retorno (dB)			
Amostras	Experimental	Simulado	Erro (%)
SBN0La	-50.191	-50.87	1.33
SBN3La	-40.431	-40.728	0.72
SBN5La	-47.636	-47.172	0.97
SBN10La	-49.565	-49.069	1.00
SBN15La	-48.387	-48.497	0.22

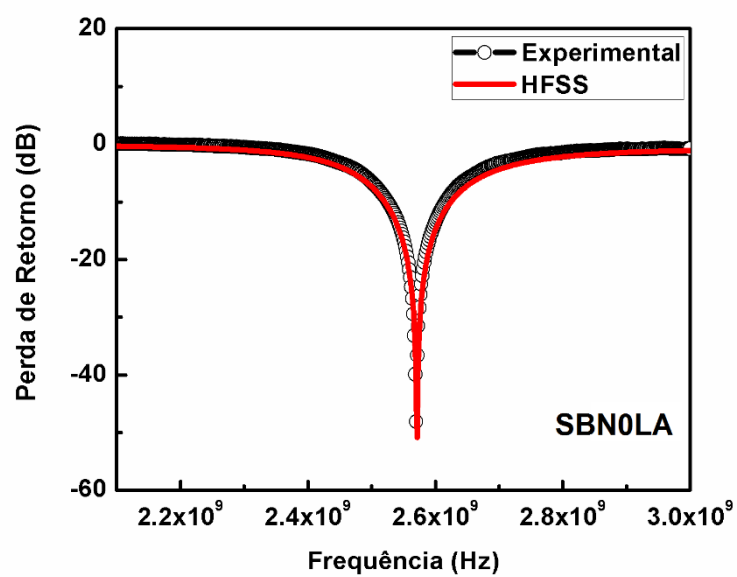
Fonte: próprio autor.

A partir da análise dos dados da Tabela 6 é possível observar que todas as amostras irradiam com o valor abaixo de -10 dB para o coeficiente de reflexão. Vale notar que este resultado é importante, pois uma das condições essenciais para que estes materiais possam ser usados para fins tecnológicos e comerciais é que o valor para perda de retorno seja abaixo de -10dB (PETOSA, 2007).

Outro fato importante é que, os valores simulados e experimentais para o coeficiente de reflexão (S_{11}) estão em uma excelente concordância uma vez que o maior erro encontrado foi o da amostra pura (Erro = 1.33%). E é possível ver também que, o menor erro percentual (Erro = 0.22%) foi o da amostra com 15% de La_2O_3 , este fato indica que com o aumento da dopagem de lantânio provocou uma diminuição nos valores do coeficiente de reflexão (S_{11}).

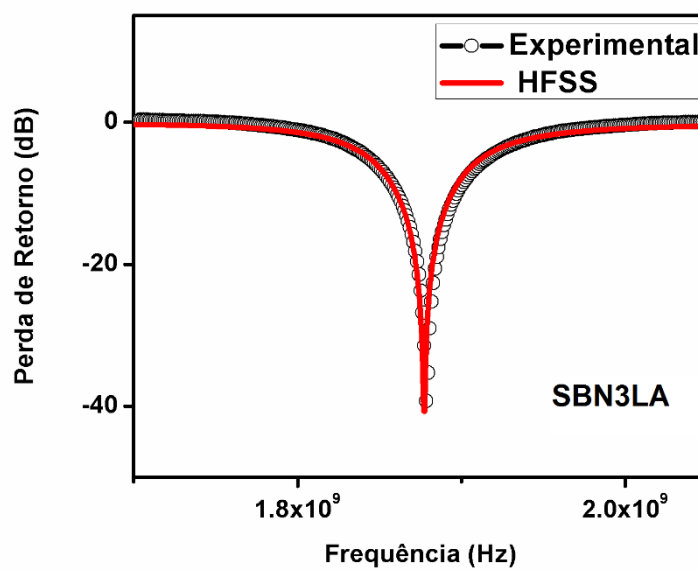
Nas próximas Figuras, 36 – 40, serão analisados os parâmetros de antena na região de campo próximo reativo e para isto será feito o confronto entre os gráficos experimental e simulado para a perda de retorno de cada amostra.

Figura 36: Perda de retorno experimental e simulada pelo HFSS, para a amostra de SBN0LA.



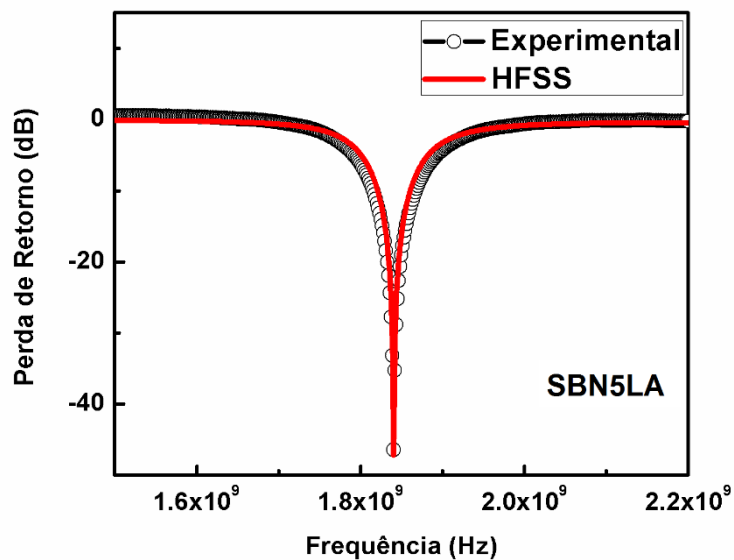
Fonte: Próprio autor.

Figura 37: Perda de retorno experimental e simulada pelo HFSS, para a amostra de SBN3LA.



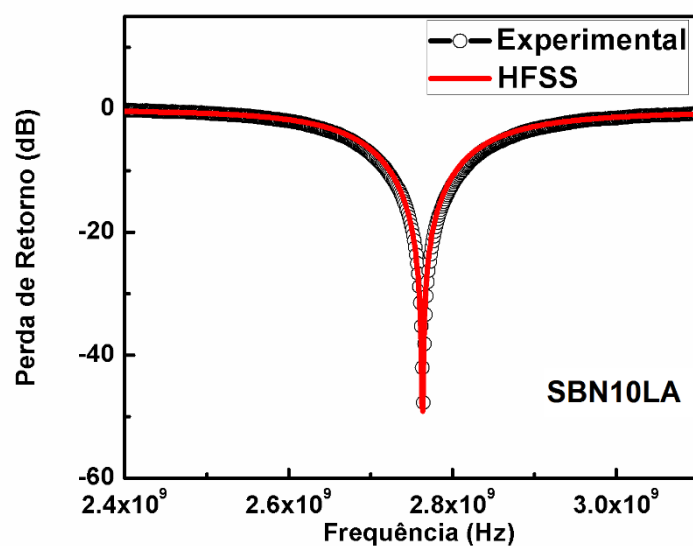
Fonte: Próprio autor.

Figura 38: Perda de retorno experimental e simulada pelo HFSS, para a amostra de SBN5LA.



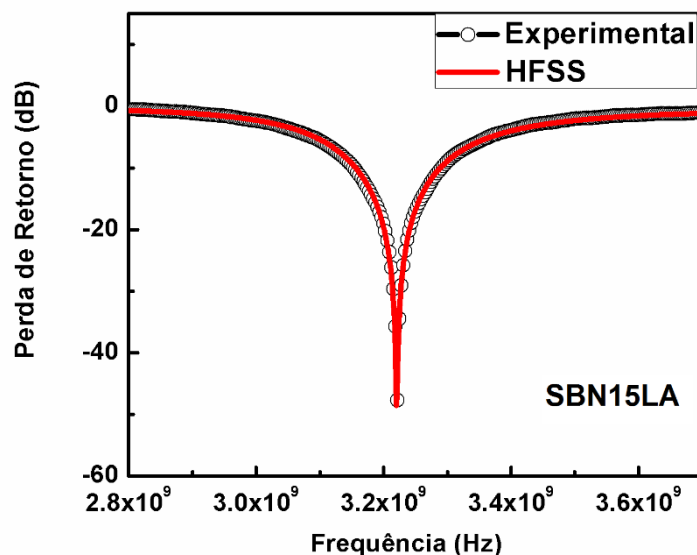
Fonte: Próprio autor.

Figura 39: Perda de retorno experimental e simulada pelo HFSS, para a amostra de SBN10LA.



Fonte: Próprio autor.

Figura 40: Perda de retorno experimental e simulada pelo HFSS, para a amostra de SBN15LA.



Fonte: Próprio autor.

Desta forma, constata-se que os valores simulados e experimentais estão bem refinados tanto na frequência de ressonância como também na intensidade dB da perda de retorno, ou seja, estes gráficos sugerem que as amostras estudadas operando como antena ressoadora dielétrica cilíndrica emitem mais a onda eletromagnética do que refletem de volta a potência para a linha de transmissão. Na Tabela 7 são apresentados os valores para a frequência de ressonância, largura de banda e permissividade elétrica de cada amostra.

A partir da Tabela 7 podemos inferir que a quantidade de informação que as amostras transmitem operando como DRA sofre uma queda e logo depois é seguida por um aumento, ou seja, de uma forma geral a medida que a permissividade cresceu a largura de banda diminuiu o que concorda com Petosa, 2007.

Porém, há um comportamento anômalo quando a amostra é dopada com 5% de lantânio pois, nesta crescem tanto a largura de banda como a permissividade em relação a amostra anterior de 3%. Por fim, a amostra de 15% obteve um aumento expressivo em relação a amostra pura, cerca de 17%.

Além disso, foi observado através das peculiaridades das amostras, que a frequência de ressonância da amostra SBNLa está entre 2 – 4 (GHz), segundo a classificação dada pelo IEEE – Institute of Electrical and Electronic Engineers, essa configuração indica que o material faz parte da banda S, enquanto as amostras SBN3La e SBN5La tem suas frequências de ressonância entre 1 – 2 (GHz), ou seja, fazem parte da banda L enquanto, as amostras pura, 10 e 15% operam na banda S pois, suas faixas de frequência, assim como a amostra pura, está entre 2 – 4 (GHz).

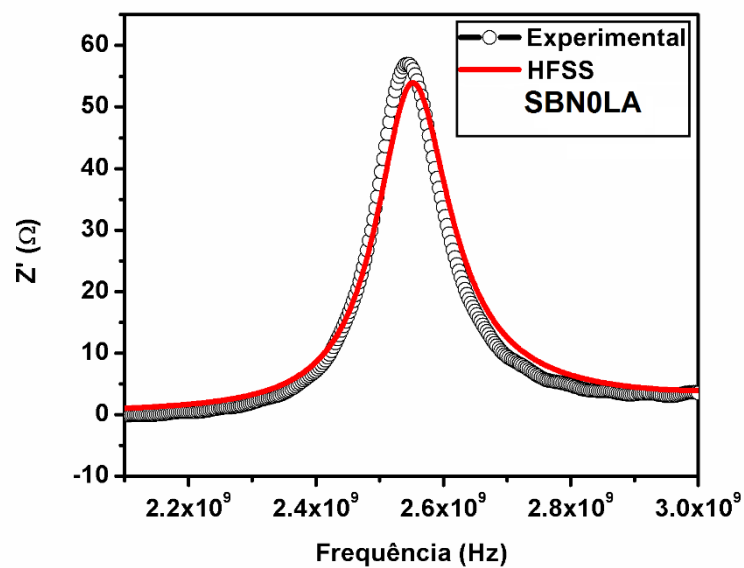
Tabela 7– Frequência de ressonância (f), Largura de Banda (BW) em -10 dB com valores experimentais (Exp.) e simulados (Sim.) das amostras.

Amostras	Frequência ressonante (GHz)			BW (MHz)			ϵ_r
	Exp.	Simu.	Erro(%)	Exp.	Simu.	Erro(%)	
SBN0La	2.571	2.569	0.07	35.422	40.451	12.43	41.57
SBN3La	1.878	1.876	0.01	19.701	18.123	8.00	137.99
SBN5La	1.840	1.840	0.00	28.260	21.739	23.07	152.07
SBN10La	2.764	2.763	0.03	33.285	29.315	11.92	34.36
SBN15La	3.221	3.219	0.06	42.736	41.203	3.58	23.54

Fonte: próprio autor.

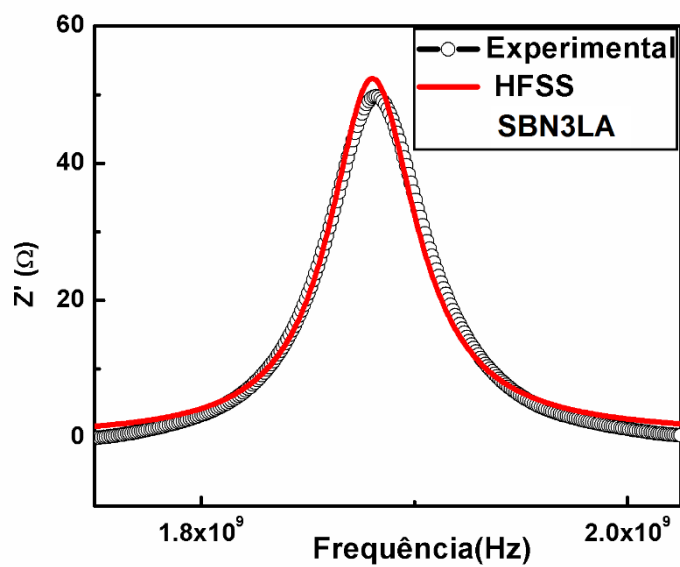
Contudo, o ajuste da simulação numérica também pode ser feito através averiguação dos gráficos de impedância complexa e analisando as curvas das parcelas imaginária e real. Esta análise se dará inicialmente em torno dos diagramas experimental e simulado da parte real da impedância e estes são mostrados na Figura 41 – 45.

Figura 41: Parcela real das impedâncias experimental e simulada no HFSS para amostra SBN0LA.



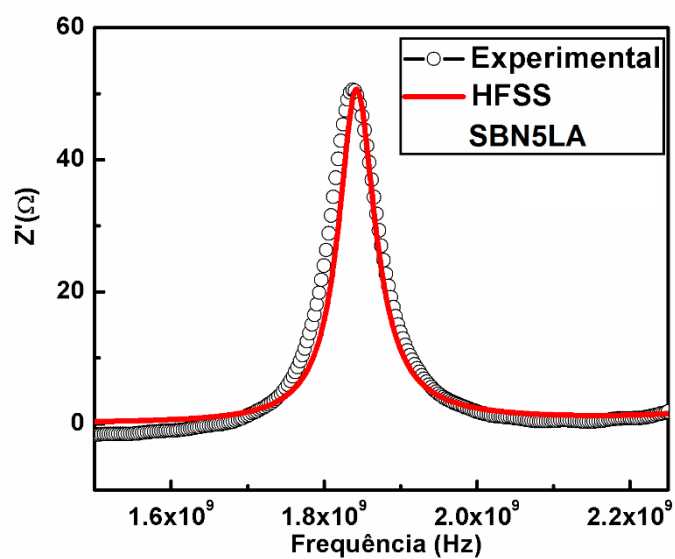
Fonte: Próprio autor.

Figura 42: Parcela real das impedâncias experimental e simulada no HFSS para amostra SBN3LA.



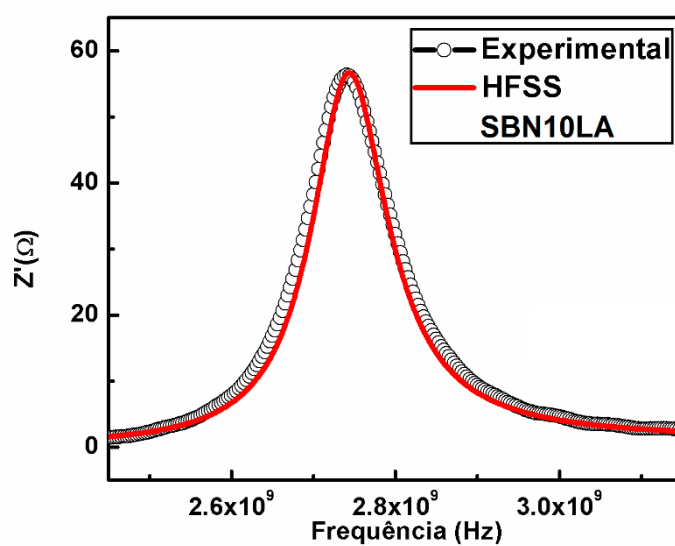
Fonte: Próprio autor.

Figura 43: Parcela real das impedâncias experimental e simulada no HFSS para amostra SBN5LA.



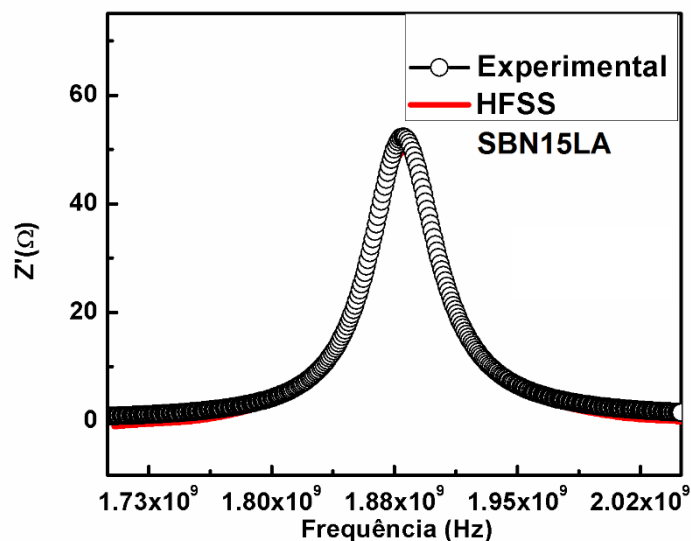
Fonte: Próprio autor.

Figura 44: Parcela real das impedâncias experimental e simulada no HFSS para amostra SBN10LA.



Fonte: Próprio autor.

Figura 45: Parcela real das impedâncias experimental e simulada no HFSS para amostra SBN15LA.



Fonte: Próprio autor.

Vale lembrar que a caracterização de monopolo foi feita utilizando as amostras sob a configuração de DRA, ou seja, as peças repousam sobre um plano terra e ficam acopladas de forma adjacente com a sonda de alimentação, e a impedância característica de entrada tem o valor de 50 Ω . Assim é possível dizer que, o acoplamento depende do casamento de impedâncias entre a linha de transmissão e a antena em estudo. E desta forma, se faz necessário a avaliação do acoplamento entre a linha de transmissão e a antena através da comparação entre as impedâncias simuladas e experimentais.

E assim, a partir das Figuras 41 – 45, é possível destacar que os valores dos picos da impedância real tanto para o gráfico experimental quanto para o simulado estão todos bem próximos de 50 Ω . Estas figuras mostram um bom ajuste para as amostras em estudo pois, os gráficos apresentam uma boa concordância para as curvas experimentais e simuladas. Já na Tabela 8, são mostrados os valores da componente real e frequência de ressonância para as amostras experimentais e simuladas.

Tabela 8 – Componente real da impedância complexa, comparação com valores experimentais (Exp.) e simulados (Sim.) no HFSS.

$Z (\Omega)$				<i>Frequência Ressonante (GHz)</i>		
Amostras	Exp.	Sim.	Erro (%)	Exp.	Sim.	Erro (%)
SBN0La	57.003	53.943	5.36	2.544	2.552	0.31
SBN3La	49.708	52.338	5.02	1.881	1.880	0.05
SBN5La	50.603	50.725	0.24	1.837	1.842	0.27
SBN10La	56.346	56.671	0.57	2.741	2.744	0.10
SBN15La	52.337	49.708	5.02	1.880	1.881	0.05

Fonte: Próprio autor.

Novamente notamos que os valores para impedância real estão bem próximos de 50Ω , sendo que a amostra mais próxima desse valor é que possui a dopagem de 5% de lantânio. Vale ressaltar também que nesta, tanto a parte real da impedância quanto a frequência de ressonância estão bem próximas com erros muito pequenos abaixo de 0.3%.

Agora serão analisadas as componentes imaginárias da impedância complexa, através das Figuras 46 – 50 e da Tabela 9.

Tabela 9 – Componente imaginária da impedância complexa, comparação com valores experimentais (Exp.) e simulados (Sim.) no HFSS.

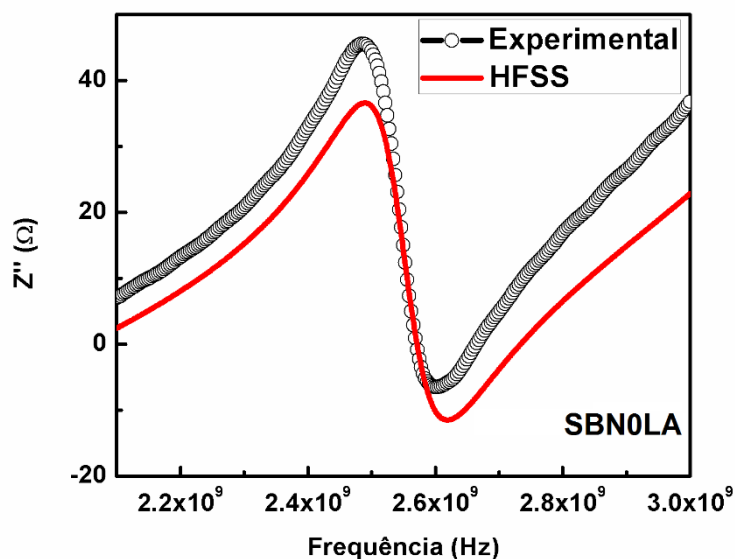
$Z''(\Omega)$				<i>Frequência Ressonante (GHz)</i>		
Amostras	Exp.	Sim.	Erro (%)	Exp.	Sim.	Erro (%)
SBN0La	45.571	36.628	19.62	2.486	2.489	0.12
SBN3La	19.132	19.040	0.48	1.854	1.857	0.16
SBN5La	28.747	20.792	27.67	1.802	1.815	0.71
SBN10La	49.492	42.686	13.75	2.678	2.692	0.52
SBN15La	59.353	56.793	4.31	3.077	3.093	0.51

Fonte: Próprio autor.

A partir dos dados da Tabela 9, notamos que para as amostras de 3 e 5% de massa de lantânio há uma queda no valor do pico máximo da componente imaginária da impedância complexa. Porém, com o aumento da dopagem – 10 e 15% de massa de lantânio – os valores crescem acima da amostra pura.

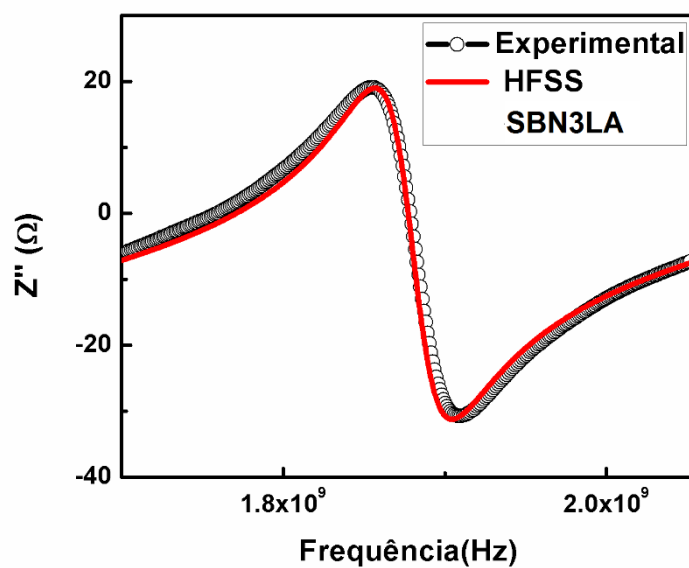
Um resultado que merece destaque é o de 3% onde os gráficos se sobrepõem de tal forma que o erro para a componente imaginária é de 0.48, enquanto o erro para a frequência de ressonância é 0.16. A componente que apresenta um maior erro é a de 5% (Erro = 27.67%) tal resultado era esperado visto a distância vertical entre as curvas. Outro fato de interesse é que todas as frequências ressonantes possuem erros mínimos, abaixo de 1%.

Figura 46: Componente imaginária das impedâncias experimental e simulada no HFSS para amostra SBN0LA.



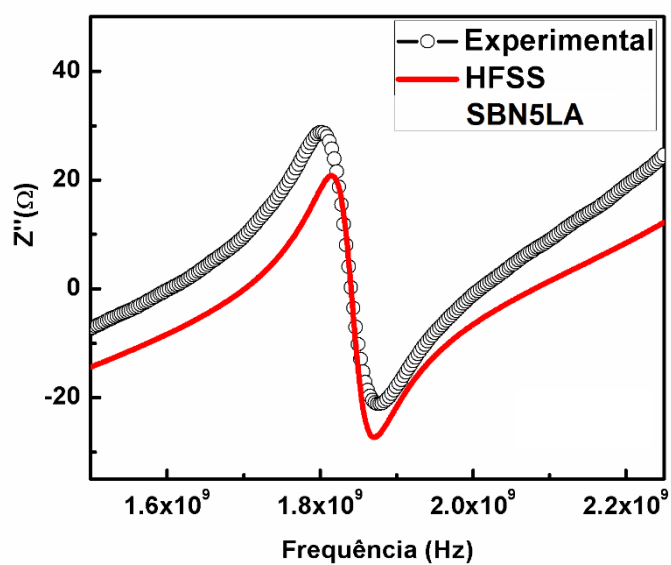
Fonte: Próprio autor.

Figura 47: Componente imaginária das impedâncias experimental e simulada no HFSS para amostra SBN3LA.



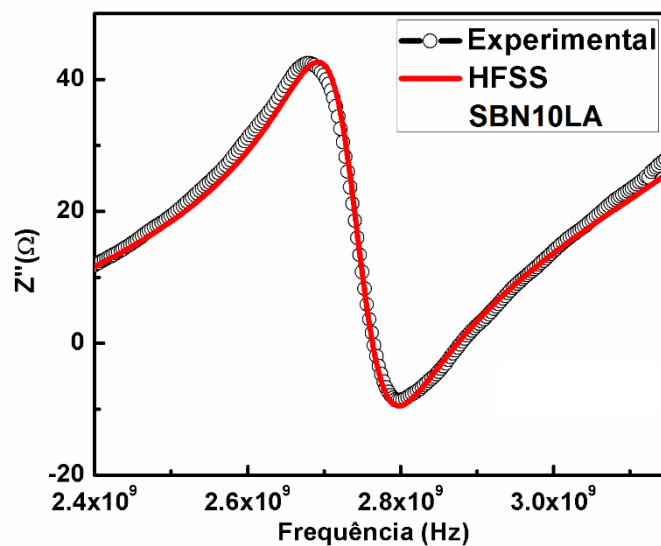
Fonte: Próprio autor.

Figura 48: Componente imaginária das impedâncias experimental e simulada no HFSS para amostra SBN5LA.



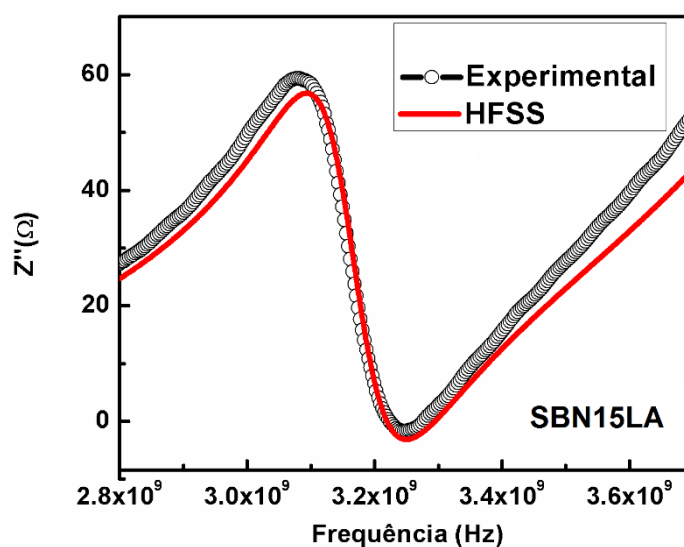
Fonte: Próprio autor.

Figura 49: Componente imaginária das impedâncias experimental e simulada no HFSS para amostra SBN10LA.



Fonte: Próprio autor.

Figura 50: Componente imaginária das impedâncias experimental e simulada no HFSS para amostra SBN15LA.



Fonte: Próprio autor.

Através da análise das figuras acima observamos uma boa concordância entre as curvas experimental e simulada das cinco amostras estudadas. Os

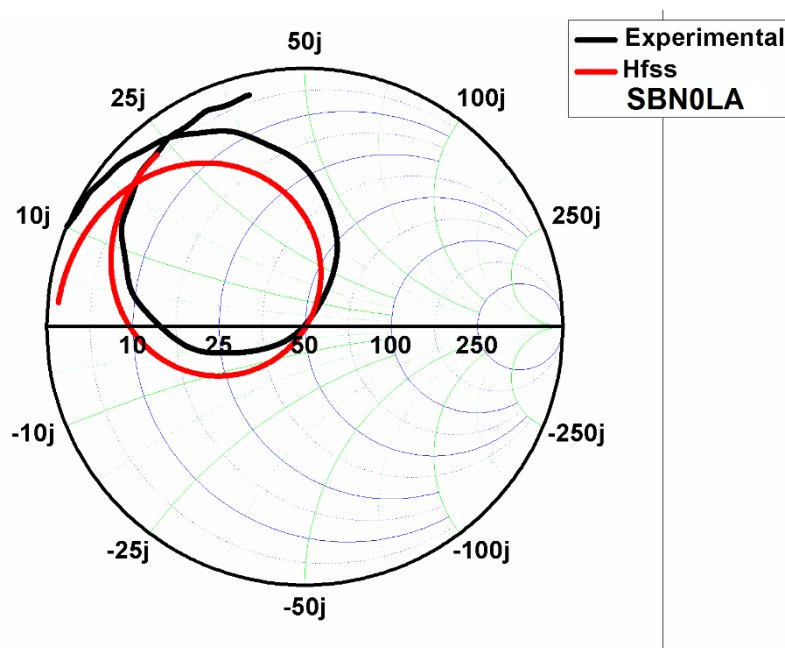
únicos gráficos que se afastam são os das amostras pura e 5% de La_2O_3 como já fora mostrado pela Tabela 9.

Nesse momento serão analisadas as cartas de Smith para as cinco amostras estudadas. Tal estudo se faz útil quando se deseja expressar o caráter da amostra como resistiva, capacitiva ou indutiva. Desta forma, são apresentados os gráficos das cartas de Smith na Figura 51 – 55.

Verificando a Figura 51 é possível observar que esta, apresenta o laço dos valores experimentais e simulados deslocados para reatâncias positivas, ou seja, este fato indica que na ressonância a amostra sem dopagem tem um comportamento indutivo.

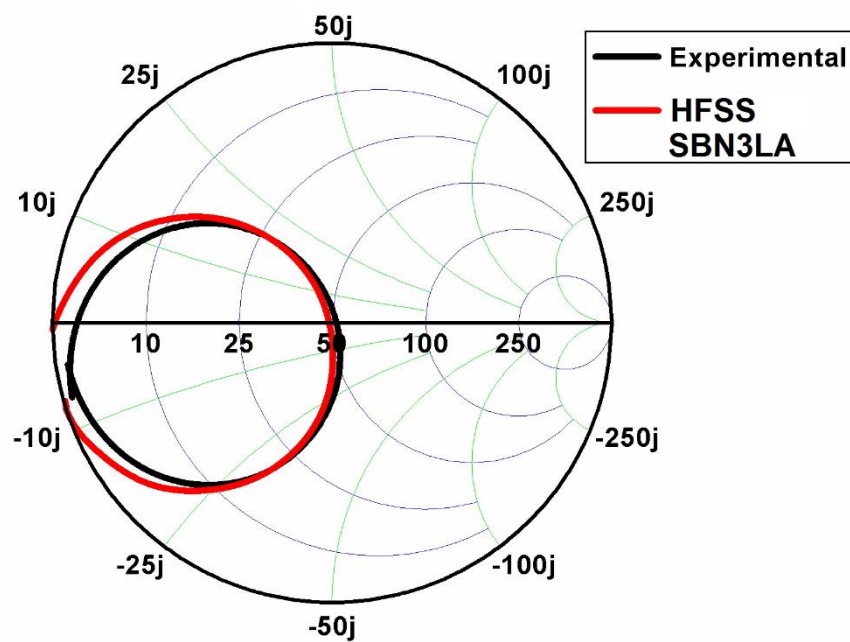
Já na Figura 52 observamos que o laço dos valores experimentais e simulados descem e ficam abaixo do eixo horizontal, ou seja, estão deslocadas para reatâncias negativas, este fato indica um comportamento capacitivo para a amostra de 3% de massa de lantânio. Além disso, vale observar que as curvas experimental e simulada tomam formas mais circulares, e este fato pode ser considerado como um dos efeitos do aumento da permissividade em relação a amostra pura.

Figura 51: Carta de Smith experimental e simulada no HFSS para amostra SBN0LA.



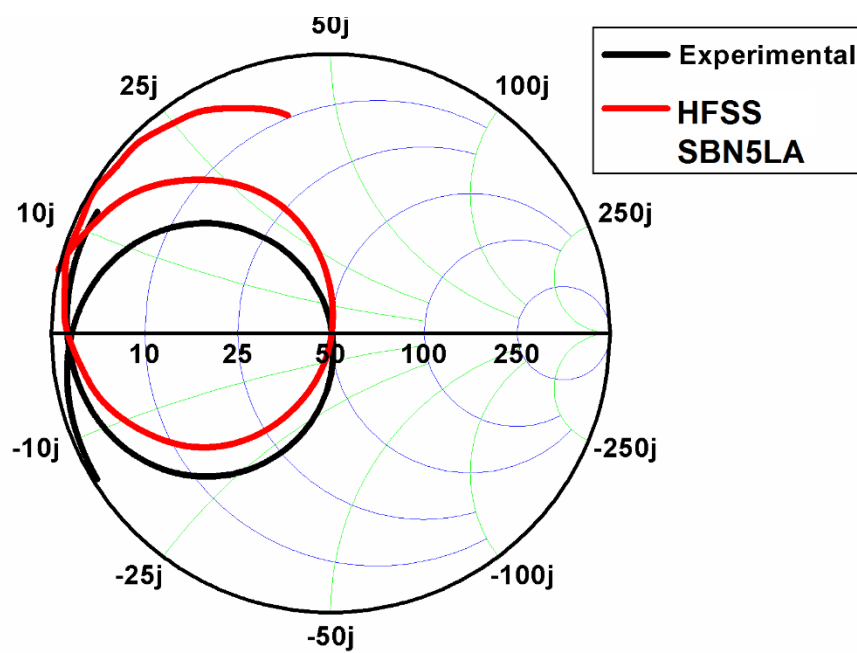
Fonte: Próprio autor.

Figura 52: Carta de Smith experimental e simulada no HFSS para amostra SBN3LA.



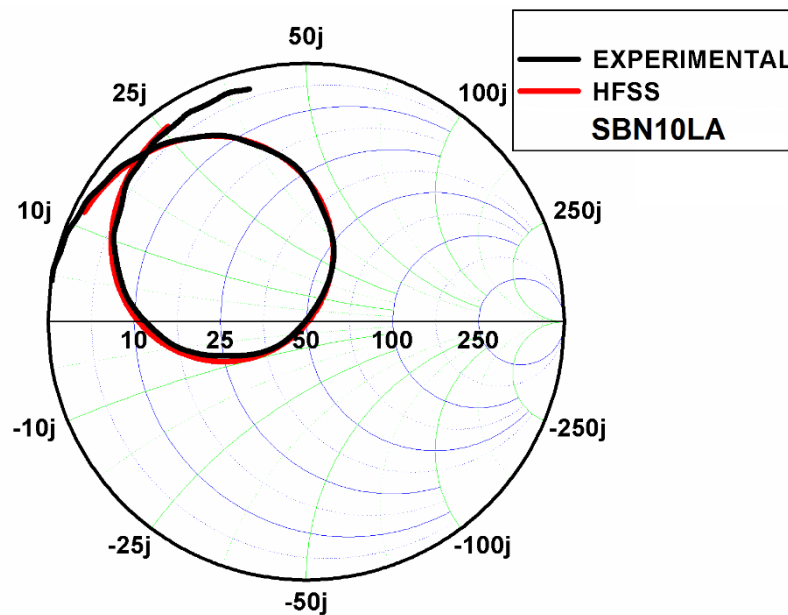
Fonte: Próprio autor.

Figura 53: Carta de Smith experimental e simulada no HFSS para amostra SBN5LA.



Fonte: Próprio autor.

Figura 54: Carta de Smith experimental e simulada no HFSS para amostra SBN10LA.

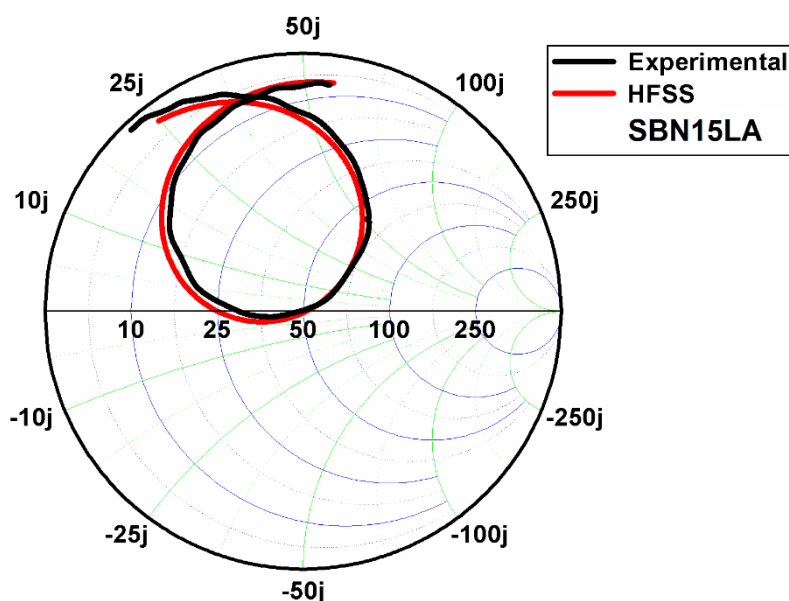


Fonte: Próprio autor.

Na Figura 53 observamos que os laços dos gráficos experimental e simulado não estão sob o mesmo eixo como o ocorrido nas duas primeiras amostras. O gráfico experimental está deslocado para reatâncias negativas enquanto o simulado para reatâncias positivas o que implica que o primeiro tem característica capacitiva e o segundo indutiva. Na Figura 54 os gráficos experimental e simulado voltam ambos para cima do eixo horizontal, o que indica um comportamento indutivo da amostra de 10%, e vale destacar a sobreposição dos gráficos, o que implica numa excelente concordância entre os resultados experimentais e simulados.

Por fim, temos a Figura 55, que continua tendendo para valores de reatâncias positivas, ou seja, na ressonância esta amostra possui um comportamento indutivo.

Figura 55: Carta de Smith experimental e simulada no HFSS para amostra SBN15LA.

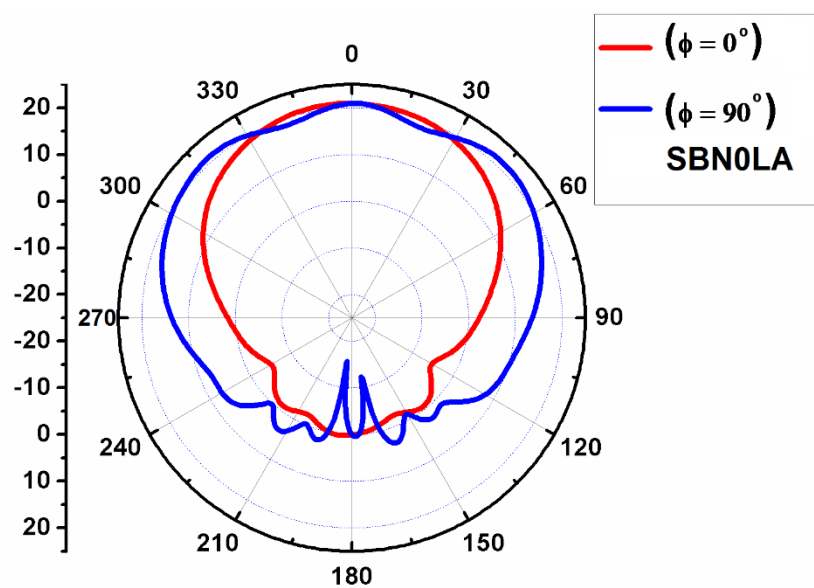


Fonte: Próprio autor.

Após a análise das curvas experimentais e simuladas é possível concluir que estas possuem um bom ajuste, dados coletados nos gráficos e tabelas informados acima. Contudo neste momento, se faz necessário o estudo das propriedades das antenas para regiões de campo distante, ou seja, região de Fraunhofer. Vale ressaltar que nesta região, a distribuição angular e a distância radial – a qual foram realizadas as medições – são independentes e que as componentes do campo são formadas basicamente por parcelas transversais (BALLANIS, 2005).

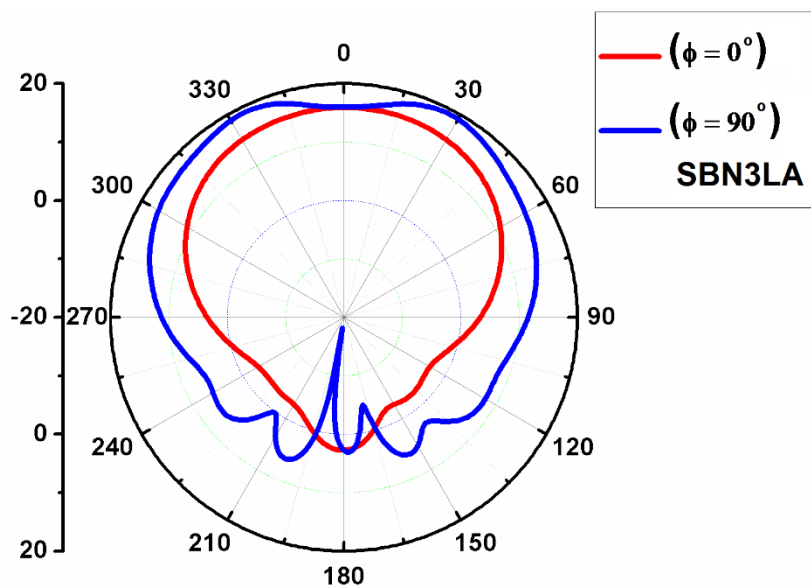
Assim, quando as amostras estudadas operam como antenas o fator a ser analisado – na região de Fraunhofer – são os padrões de campo distante. Além disso, serão analisados os resultados de diretividade, ganho, diagrama de radiação e eficiência da antena, estes parâmetros de antenas são gerados a partir da simulação no HFSS, e serão mostrados em forma de tabela. As figuras 56 – 60 representam os diagramas de radiação para as cinco amostras estudadas. Enquanto as figuras 61 – 65 mostram os diagramas de radiação das cinco amostras em uma visão tridimensional.

Figura 56: Diagrama de radiação obtida através da simulação numérica (HFSS) para a amostra SBN0LA.



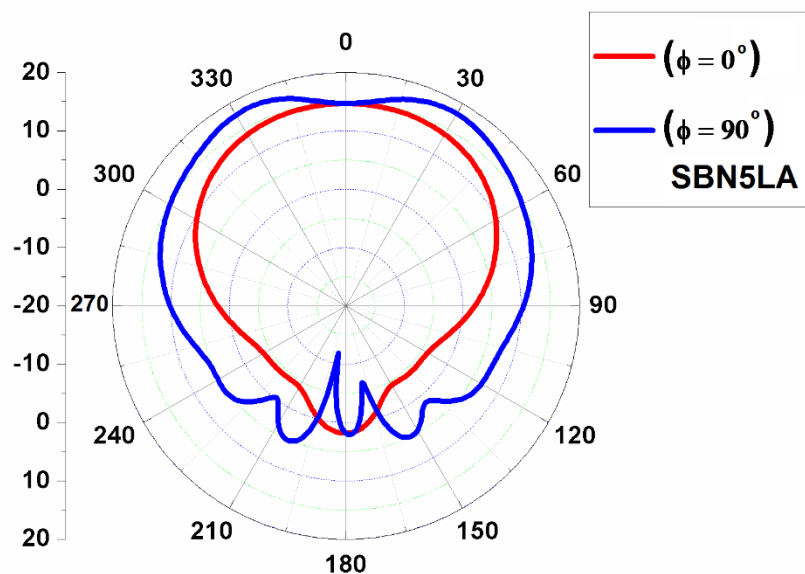
Fonte: Próprio autor.

Figura 57: Diagrama de radiação obtida através da simulação numérica (HFSS) para a amostra SBN3LA.



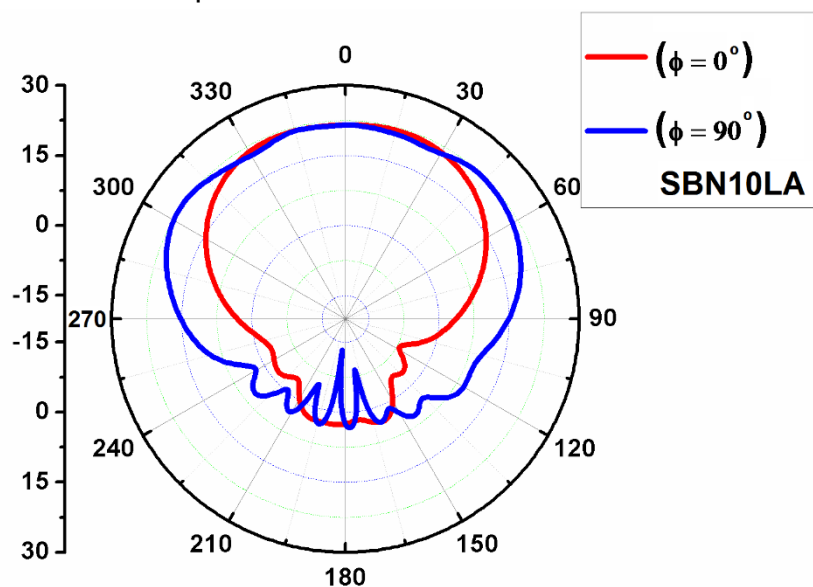
Fonte: Próprio autor.

Figura 58: Diagrama de radiação obtida através da simulação numérica (HFSS) para a amostra SBN5LA.



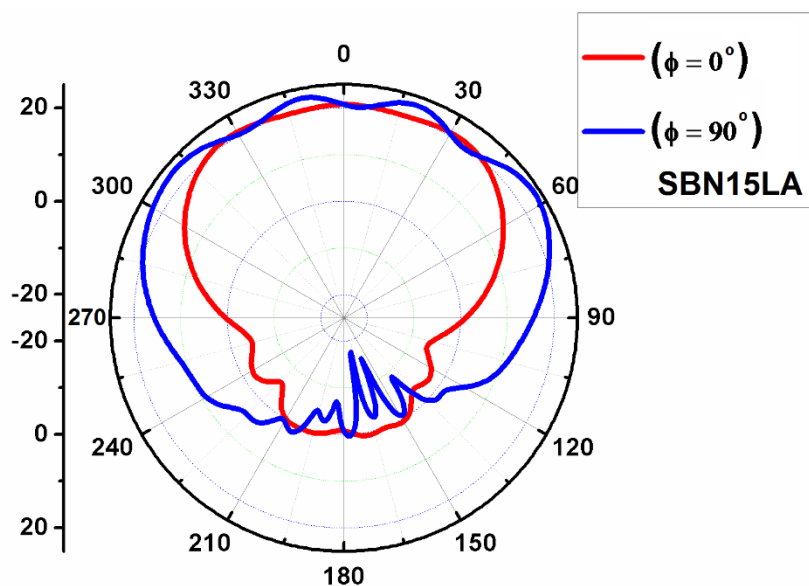
Fonte: Próprio autor.

Figura 59: Diagrama de radiação obtida através da simulação numérica (HFSS) para a amostra SBN10LA.



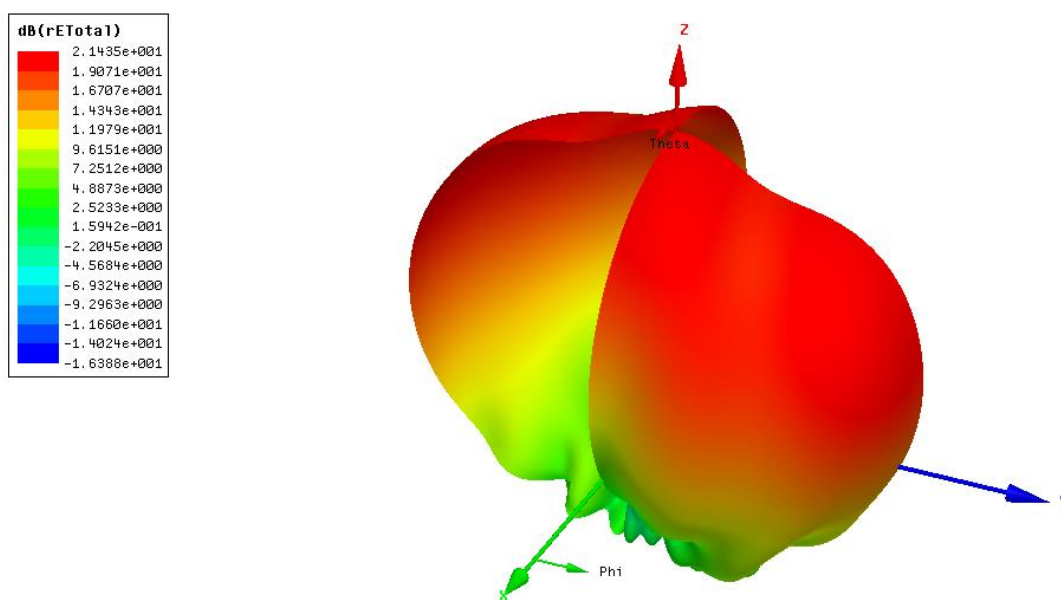
Fonte: Próprio autor.

Figura 60: Diagrama de radiação obtida através da simulação numérica (HFSS) para a amostra SBN15LA.



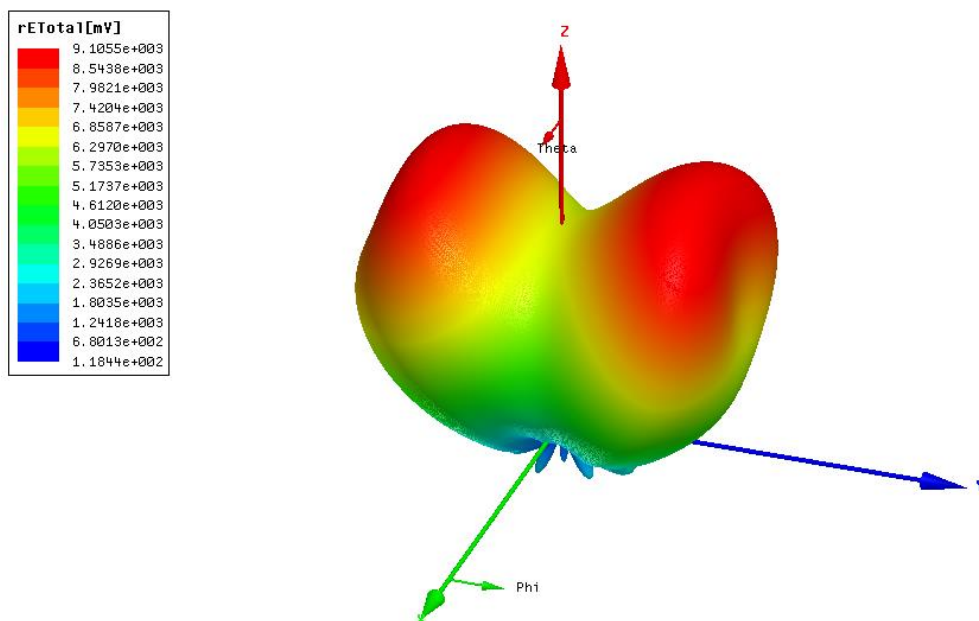
Fonte: Próprio autor.

Figura 61: Diagrama de radiação em (3-D) obtida através da simulação numérica (HFSS) para a amostra SBN0LA.



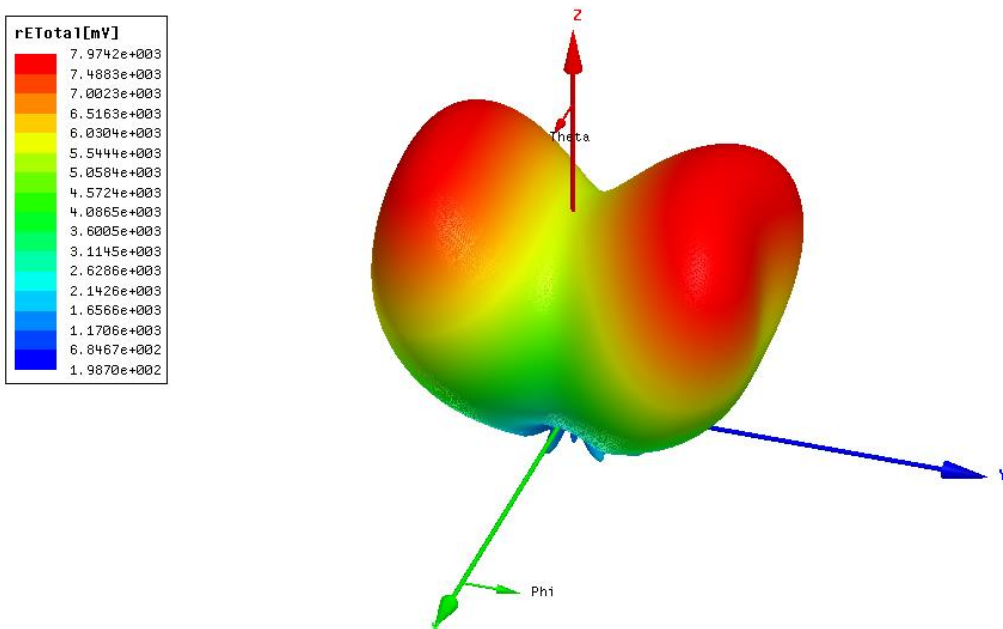
Fonte: Próprio autor.

Figura 62: Diagrama de radiação em (3-D) obtida através da simulação numérica (HFSS) para SBN3LA.



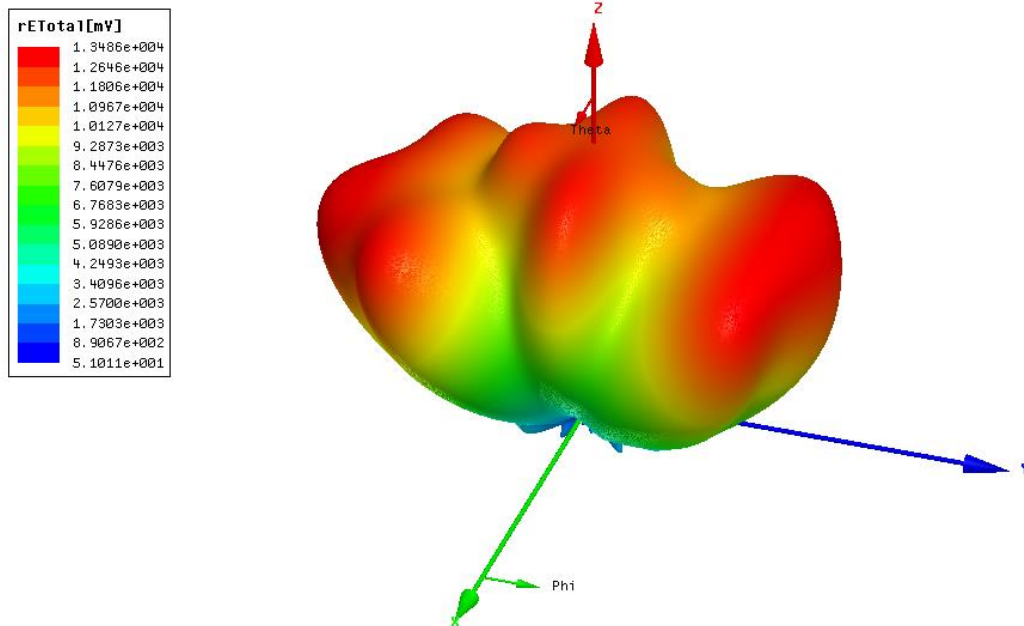
Fonte: Próprio autor.

Figura 63: Diagrama de radiação em (3-D) obtida através da simulação numérica (HFSS) para SBN5LA.



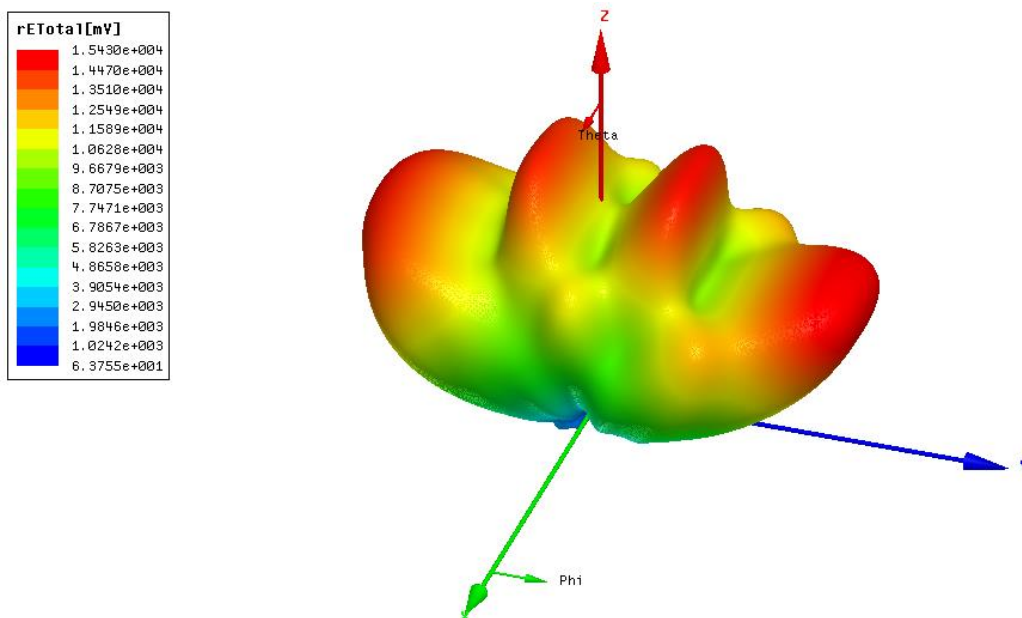
Fonte: Próprio autor.

Figura 64: Diagrama de radiação em (3-D) obtida através da simulação numérica (HFSS) para SBN10LA.



Fonte: Próprio autor.

Figura 65: Diagrama de radiação em (3-D) obtida através da simulação numérica (HFSS) para SBN15LA.



Fonte: Próprio autor.

Tabela 10 – Diretividade; Ganho; potência de entrada (P_{in}); potência de radiação (P_{rad}); Eficiência de condução e dielétrica (ϵ); determinada pela simulação no HFSS.

Amostras	Diretividade	Ganho	P_{in}	P_{rad}	ϵ
	(dB)	(dB)	(W)	(W)	(%)
SBN0La	4.540	2.319	0.999	0.510	51.085
SBN3La	4.664	1.383	0.999	0.296	29.654
SBN5La	4.595	1.059	0.999	0.230	23.061
SBN10La	4.207	3.031	0.999	0.720	72.04
SBN15La	4.921	3.968	0.999	0.806	80.636

Fonte: Próprio autor.

Através da análise dos gráficos e da Tabela 10 é possível destacar que as amostras – operando como DRAs cilíndricas – possuem um caráter direcional pois, suas diretividades são todas maiores que 2 dB, ou seja, maiores que a de um dipolo de meia onda. Pode ser observado ainda que, as amostras com maiores permissividades, ou seja, SBN3La e SBN5La apresentam uma queda em sua eficiência condução dielétrica. Além disso, estas as amostras apresentam também, uma queda em seu ganho, diretividade, largura de banda BW, frequência de ressonância e fator de qualidade. Contudo, as amostras com menores valores de permissividade dielétrica SBN10La e SBN15La, se mostram promissoras, pois à medida que sua permissividade diminui os valores para eficiência condução dielétrica, ganho, diretividade, largura de banda BW, frequência de ressonância e fator de qualidade aumentam. Destaca-se a amostra SBN15La onde todos os fatores citados acima aumentam com queda da permissividade dielétrica.

Então, é possível dizer que os materiais SBN0La, SBN10La e SBN15La se enquadram na banda S, ou seja, tem características que os tornam materiais com potencial para a utilização em satélites de comunicação e radares meteorológicos. Enquanto, as amostras dopadas SBN3La e SBN5LA, fazem parte da banda L e podem operar como sistemas de radar, e sistemas de microondas.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho investigamos a influência da adição do óxido de lantânio (La_2O_3) sobre a matriz cerâmica de bismuto ($\text{SrBi}_2\text{Nb}_2\text{O}_9$) para aplicação em microondas. A partir do estudo empregado nesta dissertação foi possível observar que na faixa de microondas as frequências ressonantes das amostras variaram de 1.840 a 3.221 GHz. Além disso, suas tangentes de perdas dielétricas diminuíram ao longo do processo, ou seja, a medida que aumentamos a concentração de La_2O_3 sobre a matriz cerâmica $\text{SrBi}_2\text{Nb}_2\text{O}_9$ o valor da tangente diminui em relação a amostra pura (sem adição de lantânio), os valores obtidos para esta grandeza são da ordem de 10^{-2} .

Outro fato interessante pode ser notado nas amostras SBN3La, SBN5La as quais tiveram os valores de suas permissividades e tangente de perdas aumentadas com a adição de massa de lantânio. Porém, nas amostras de SBN10La e SBN15La observa-se o contrário, com o aumento da dopagem diminuem tanto permissividade dielétrica quanto tangente de perdas nas duas amostras. Vale ressaltar que quanto menor a tangente de perdas maior será o fator de qualidade Q, e assim podemos dizer que estas duas últimas amostras possuem características notáveis para sua aplicação em microondas e miniaturização.

Com relação ao coeficiente de temperatura da frequência de ressonância o menor valor encontrado para o foi o da amostra de SBN5LA ($\tau_f = -675.346$ ppm/°C), enquanto o valor que mais se aproximou de zero pode ser observado na amostra de SBN10LA que é $\tau_f = -79.85$ ppm/°C. Deve ser destacado ainda que, observando a Tabela 2 foi possível notar que o valor do τ_f sofre um aumento abrupto entre estas duas amostras e a Figura 24 indica que podem haver valores mais próximos de zero para uma dopagem acima de 10 e abaixo de 15%.

Por fim, utilizamos a simulação no programa HFSS com intuito de corroborar os dados obtidos experimentalmente e analisar a aplicação do material estudado como uma antena ressoadora dielétrica. Foi possível observar que e todas as amostras a perda de retorno está abaixo de -10 dB, este fator é imprescindível para a utilização do material como DRA. Vale destacar que o ganho e a eficiência das amostras aumentaram em relação a amostra pura com

a adição de óxido de lantânio pois, através do exposto na Tabela 10 vemos que as amostras de SBN0LA, SBN3LA e SBN5LA possuem um baixo ganho e que novamente a amostra dopada com 5 % de lantânio mostra um comportamento diferente das demais pois, tanto seu ganho como a sua eficiência de radiação diminuem em relação a amostra anterior. Já as amostras dopadas com 10 e 15% de massa de óxido de lantânio mostraram aumento tanto no ganho como na eficiência de radiação, sendo que a última apresentou os maiores valores para as referidas grandezas mencionadas acima, e o ganho desta amostra passou de 80%.

Desta forma, é possível dizer que os materiais estudados têm potencial para aplicações em RF e microondas, dados os valores de suas permissividades, tangentes de perdas, e potencial para miniaturização. Onde os materiais SBN0LA, SBN10LA e SBN15LA operam na banda S, e vale lembrar que nesta faixa de frequência operam, telefonia celular, GPS e TV digital por meio dos satélites de comunicação. Enquanto, as amostras dopadas SBN3LA e SBN5LA, fazem parte da banda L e podem operar como dispositivos de antenas omnidirecionais de baixo ganho, e pode ser aplicado em sistemas de comunicações via satélite, radar e microondas.

7 PERSPECTIVAS

Com o intuito de aperfeiçoar e ampliar o estudo da matriz SBN e suas adições apresentadas nesta dissertação, pretendemos dar continuidade a esta pesquisa. Desta forma, pretendemos desenvolver um novo estudo baseado nos seguintes tópicos:

- Cálculo *ab initio* da matriz SBN pura e com as adições de 3, 5, 10 e 15 %. E neste processo pretendemos caracterizar estes materiais através de suas propriedades estruturais:
 - otimização da geometria;
 - cálculo da estrutura de bandas;
 - cálculo da densidade de estados e propriedades ópticas.
- Analisar as características de radiação das amostras;
- Utilizar outras geometrias de DRA;
- Diminuir a porosidade do material;

8 APÊNDICES

A.I - Solução da equação de Laplace em coordenadas cilíndricas

A equação de Laplace em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) é dada por

$$\nabla^2 \mathbb{V}(\rho, \theta, z) = 0$$

e o operador Laplaciano nesse sistema de coordenadas é escrito

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

A equação pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \mathbb{V}(\rho, \theta, z)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \mathbb{V}(\rho, \theta, z)}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \mathbb{V}(\rho, \theta, z)}{\partial z^2} = 0$$

Esta é uma equação diferencial parcial de segunda ordem linear e homogênea (EDP) nas variáveis independentes ρ, θ e φ onde $\mathbb{V}(\rho, \theta$ e $z)$ é a função potencial elétrico a ser encontrada. De uma forma mais simples, omitindo as três variáveis independentes podemos adotar a notação:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \mathbb{V}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \mathbb{V}}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A.1})$$

Este problema em eletromagnetismo clássico corresponde a encontrar o potencial elétrico gerado por uma distribuição arbitrária de cargas elétricas. Para encontrar uma solução geral da equação (1) pode-se usar o método de separação de variáveis o qual é usual para resoluções desse tipo de problema.

O método consiste em buscar uma função solução que seja um produto de funções, cada uma delas com apenas uma variável independente. Como se

verá este método tem como objetivo intermediário transformar a equação parcial com três variáveis em três equações a uma variável independente. Desta forma,

$$\mathbb{V}(\rho, \theta, z) = R(\rho)\Theta(\theta)Z(z) \quad (\text{A.2})$$

Assim, ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial [R(\rho)\Theta(\theta)Z(z)]}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 [R(\rho)\Theta(\theta)Z(z)]}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 [R(\rho)\Theta(\theta)Z(z)]}{\partial z^2} &= 0 \\ \Rightarrow \\ \frac{\Theta(\theta)Z(z)}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{R(\rho)Z(z)}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} + R(\rho)\Theta(\theta) \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} &= 0 \\ \Rightarrow \end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados por $[R(\rho)\Theta(\theta)Z(z)]$, ficamos com

$$\frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = 0$$

E ainda,

$$\frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} = - \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} \quad (\text{A.3})$$

Observe que agora temos do lado esquerdo uma dependência em ρ e θ , enquanto do lado direito temos uma dependência única em z . Ora, suponha que tenhamos três funções independentes

$$f(x) + g(y) + h(z) = 0 \quad (\text{A.4})$$

Ou seja,

$$f(x) + g(y) = -h(z)$$

Se derivarmos em relação a x , y e z teremos respectivamente

$$f'(x) = 0$$

$$g'(y) = 0$$

$$h'(z) = 0$$

Para que igualdade (4) seja verdadeira essas funções devem ser constantes. Assim,

$$f(x) + g(y) = c$$

$$h(z) = -c$$

para atender a equação (4).

Usando um raciocínio análogo a equação (3) fica

$$\frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} = \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = -k^2$$

Agora ficamos com duas equações

$$\frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} = -k^2 \quad (\text{A.5})$$

E ainda,

$$-\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = -k^2 \quad (\text{A.6})$$

Vamos inicialmente resolver a (A.6) que pode ser reescrita como

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} - k^2 Z(z) = 0 \quad (\text{A.7})$$

Que é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem linear, homogênea^{xxvii} que pode ser resolvida da seguinte forma. Suponhamos que a função abaixo

^{xxvii} Para toda equação diferencial de n-ésima ordem da forma

$$Z(z) = e^{mz}$$

seja uma solução para (7). Derivando a mesma duas vezes:

$$\frac{dZ(z)}{dz} = me^{mz}$$

$$\frac{d^2Z(z)}{dz^2} = m^2e^{mz}$$

e substituindo em (7),

$$\frac{d^2Z(z)}{dz^2} - k^2Z(z) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$m^2e^{mz} - k^2e^{mz} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$m^2 - k^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$m^2 = k^2 \quad \Rightarrow$$

$$m = \pm k$$

Assim, a solução geral para essa EDO é dada pelo princípio superposição^{xxviii} e fica

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

é definida como equação homogênea (ZILL, CULLEN, 2001; ARFKEN, WEBER, 2007).

^{xxviii} O princípio da superposição ou da soma nos diz que se cada dessas funções - $y_1, y_2, y_3, \dots, y_k$ - são soluções separadamente para a equação diferencial ordinária linear de n-ésima ordem e homogênea da forma,

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

num intervalo I. Então, podemos dizer que a combinação linear destas soluções

$$y = ay_1 + a_2y_2 + a_3y_3 + \dots + a_ny_n,$$

também será um conjunto solução para a EDO. Vale ressaltar que onde os índices a_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$, são constantes arbitrárias (ZILL, CULLEN, 2001).

$$Z(z) = ae^{kz} + be^{-kz}$$

então,

$$Z_k(z) = a_k e^{kz} + b_k e^{-kz} \quad (\text{A.8})$$

Desta forma, obtivemos a solução para a coordenada em z . Todavia, ainda faltam duas coordenadas ρ, θ . Voltando para a equação (5) temos que,

$$\frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} = -k^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) = -k^2 - \frac{1}{\rho^2 \Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} \Rightarrow$$

se multiplicarmos ambos os membros da equação por ρ^2

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) = -k^2 \rho^2 - \frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + k^2 \rho^2 = -\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2}$$

Novamente, observe que cada equação depende apenas uma variável: do lado esquerdo a dependência é somente em ρ , do lado direito a dependência é só em θ . Logo, estas equações podem ser separadas por uma constante.

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + k^2 \rho^2 = -\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} = v^2 \quad (\text{A.9})$$

Resolvendo em θ ,

$$-\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} = v^2 \Rightarrow$$

e assim,

$$\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2} + v^2\Theta(\theta) = 0 \quad (\text{A.10})$$

Observe que esta equação é da mesma forma de (6) e consequentemente tem a mesma estratégia de solução. Então, da mesma forma que procedemos para $Z(z)$ faremos para $\Theta(\theta)$.

Logo,

$$\Theta(\theta) = Ce^{iv\theta} + De^{-iv\theta} \quad (\text{A.11})$$

Esta solução ainda pode ser reescrita usando a relação de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

ou seja,

$$\Theta(\theta) = C(\cos v\theta + i \sin v\theta) + D(\cos v\theta - i \sin v\theta) \Rightarrow$$

$$\Theta(\theta) = (C + D) \cos v\theta + i(C - D) \sin v\theta \Rightarrow$$

Onde C e D são constantes arbitrárias, e $i = \sqrt{-1}$

$$\Theta_v(\theta) = c_v \cos v\theta + d_v \sin v\theta \quad (\text{A.12})$$

para $v = 0$, a equação (A.9) resulta em:

$$\Theta_0(\theta) = c_0 \quad (\text{A.13})$$

Por fim, vamos resolver em ρ , da equação (A.9) podemos ver que,

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + k^2 \rho^2 = v^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + k^2 \rho^2 - v^2 = 0 \Rightarrow$$

Organizando,

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \left(k^2 \rho - \frac{v^2}{\rho} \right) R(\rho) = 0 \Rightarrow$$

donde,

$$\frac{d\rho}{d\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \rho \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \left(k^2 \rho - \frac{v^2}{\rho} \right) R(\rho) = 0 \Rightarrow$$

$$\rho \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \left(k^2 \rho - \frac{v^2}{\rho} \right) R(\rho) = 0 \Rightarrow$$

multiplicando ambos os membros por ρ ,

$$\rho^2 \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} + (k^2 \rho^2 - v^2) R(\rho) = 0 \quad (\text{A.14})$$

Note que esta equação diferencial não é tão simples de resolver como as anteriores. Então, façamos uma mudança de variável para começar sua resolução. Assim, seja $\xi = k\rho$. Agora, devemos achar as derivadas da equação (14) em função de ξ .

$$\frac{d}{d\rho} = \frac{d\xi}{d\rho} \frac{d}{d\xi} = \frac{d(k\rho)}{d\rho} \frac{d}{d\xi} = k \frac{d\rho}{d\rho} \frac{d}{d\xi} = k \frac{d}{d\xi} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\rho} = k \frac{d}{d\xi} \quad (\text{A.15.a})$$

e ainda,

$$\frac{d^2}{d\rho^2} = \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d}{d\rho} \right) = \left(k \frac{d}{d\xi} \right) \left(k \frac{d}{d\xi} \right) = k^2 \frac{d^2}{d\xi^2} \quad \Rightarrow \quad (\text{A.15.b})$$

$$\frac{d^2}{d\rho^2} = k^2 \frac{d^2}{d\xi^2}$$

Substituindo as expressões (A.15.a) e (A.15.b) na equação (A.14) ficaremos com

$$\rho^2 k^2 \frac{d^2 R(\rho)}{d\xi^2} + \rho k \frac{dR(\rho)}{d\xi} + (k^2 \rho^2 - v^2) R(\rho) = 0 \quad \Rightarrow$$

Lembre-se que $\xi = k\rho$, ou seja,

$$\xi^2 \frac{d^2 R}{d\xi^2} + \xi \frac{dR}{d\xi} + (\xi^2 - v^2) R = 0 \quad (\text{A.16})$$

Agora, podemos ver que esta equação possui a forma de uma Equação Diferencial de Bessel, e mostraremos a seguir que suas soluções são as funções de Bessel. Veja que a equação (16) está na mesma forma da equação (17) mostrada abaixo.

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - v^2) y = 0 \quad (\text{A.17})$$

Na resolução de (17) vamos adotar o caso onde $v \geq 0$. Para esse tipo de equação devemos procurar soluções me forma de séries de potências (série infinita) da equação em torno de $x = 0$, porém este é um ponto singular regular^{xxix}. E para resolver esse tipo de equação usamos o método de Frobenius^{xxx}.

^{xxix} A equação (17) pode ser reescrita como $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, onde $P(x) = \frac{1}{x}$ e $Q(x) = \left(1 - \frac{v^2}{x^2}\right)$. Assim, segundo (ARFKEN, 2007, p. 425) se as funções $P(x)$ e $Q(x)$ permanecerem finitas quando $x = 0$, este ponto é chamado de ordinário. Porém, se $P(x)$ ou $Q(x)$ (ou ambos) divergem a medida que $x \rightarrow 0$, o ponto é chamado de singular. E ainda, se $P(x)$ ou $Q(x)$ divergir ao passo que $x \rightarrow 0$, mas $xP(x)$ e $x^2Q(x)$ permanecem finitas, à medida que $x \rightarrow 0$, então $x = 0$ é chamado de ponto singular regular.

^{xxx} De acordo com (ZILL, CULLEN, 2001, p.310), enunciamos o teorema de Frobenius: “Se $x = x_0$ for um ponto singular da equação (13), então existe pelo menos uma solução na forma

$$y = (x - x_0)^p \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+p}$$

Então, para resolver (14), com $x_0 = 0$ supomos uma solução na forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+p} \Rightarrow$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+p) x^{n+p-1} \Rightarrow$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+p)(n+p-1) x^{n+p-2}$$

substituindo em (17) teremos

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+p)(n+p-1) x^{n+p-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+p) x^{n+p-1} + (x^2 - v^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+p} = 0$$

incorporando x^2 e x em seus respectivos somatórios,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+p)(n+p-1) x^{n+p} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+p) x^{n+p} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+p+2} - v^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+p} = 0$$

$$\Rightarrow$$

então,

$$x^p \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+p)(n+p-1) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+p) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} - v^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right\} = 0 \quad (\text{A.18})$$

em que o número p é uma constante a ser determinada. A série convergirá pelo menos em algum intervalo $0 < x - x_0 < R$."

Ora, a terceira soma é única que não está com o mesmo expoente das demais. Logo, façamos a seguinte mudança de variável nos índices, lembre-se que estes são mudos, seja $k = n + 2$, ou seja, $n = k - 2$. Então,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^k$$

Mas, como mencionamos acima os índices são mudos, podemos voltar para o índice n . Logo,

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^k = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

Substituindo esta expressão na equação (17) temos que

$$x^p \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+p)(n+p-1) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+p) x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n - v^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right\} = 0$$

Agrupando as somas que começam em $n = 0$,

$$x^p \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n [(n+p)(n+p-1) + (n+p) - v^2] x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \right\} = 0 \Rightarrow$$

$$x^p \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n [(n+p)(n+p-1+1) - v^2] x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \right\} = 0 \Rightarrow$$

Logo,

$$x^p \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n [(n+p)^2 - v^2] x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \right\} = 0 \quad (\text{A.19})$$

Observe que, a segunda soma começa em $n = 2$, então, devemos expandir dois termos para que as somas comecem sob o mesmo índice. Assim,

$$\begin{aligned}
& x^p \left\{ a_0[(p)^2 - v^2]x^0 + a_1[(1+p)^2 - v^2]x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n[(n+p)^2 - v^2]x^n \right. \\
& \quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n \right\} = 0 \Rightarrow \\
& x^p \left\{ a_0[p^2 - v^2] + a_1[(1+p)^2 - v^2]x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n[(n+p)^2 - v^2]x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n \right\} \\
& = 0
\end{aligned}$$

Então, podemos concluir que

$$a_0[(p)^2 - v^2] = 0$$

Mas, se $a_0 \neq 0 \Rightarrow p^2 - v^2 = 0 \Rightarrow p^2 = v^2 \Rightarrow p = \pm v$. Inicialmente vamos solucionar a equação de Bessel para o caso adotaremos $p = +v$. Analisando a equação que contém o termo a_1 podemos dizer que,

$$a_1[(1+p)^2 - v^2]x = 0 \Rightarrow$$

$$a_1[p^2 + 2p + 1 - v^2]x = 0 \Rightarrow$$

$$a_1[v^2 + 2v + 1 - v^2] = 0 \Rightarrow$$

$$a_1[2v + 1] = 0$$

Desta última expressão podemos concluir que como $v \geq 0$ a única forma desta ser verdadeira é que $a_1 = 0$ e observe ainda que se esta condição é satisfeita todos os demais termos que depende de a_1 também serão iguais a zero. Assim,

$$a_{2n+1} \dots = a_5 = a_3 = a_1 = 0$$

Por fim a equação (18) pode ser escrita como

$$x^v \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} x^n (a_n [(n+v)^2 - v^2] + a_{n-2}) \right\} = 0 \Rightarrow$$

$$x^v \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} x^n (a_n [n^2 + 2nv + v^2 - v^2] + a_{n-2}) \right\} = 0 \Rightarrow$$

Então,

$$x^v \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} x^n (a_n [n^2 + 2nv] + a_{n-2}) \right\} = 0 \quad (\text{A.20})$$

Logo, a partir dessa expressão podemos achar a relação de recorrência geral.

$$(a_n [n^2 + 2nv] + a_{n-2}) = 0 \Rightarrow$$

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{n^2 + 2nv} \Rightarrow$$

ou seja,

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{n(n+2v)} \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, 4 \dots \quad (\text{A.21})$$

Mas, recorde que os termos ímpares são todos nulos. Assim, equação (20) acima se torna,

$$a_{2n} = \frac{-a_{2n-2}}{2n(2n+2v)} \Rightarrow$$

assim,

$$a_{2n} = \frac{-a_{2n-2}}{2^2 n(n+v)} \text{ para } n = 1, 2, 3 \dots \quad (\text{A.22})$$

Esta é a equação de recorrência geral que nos permite descobrir os índices a_{2n} e construir a solução geral para (16). Calculando alguns termos,

$$a_2 = \frac{-a_0}{2^2 1! (1+v)}$$

$$a_4 = \frac{-a_2}{2^2 2! (2+v)} = \frac{1}{2^2 2! (2+v)} \frac{-(-a_0)}{2^2 1! (1+v)} = \frac{a_0}{2^4 2! (1+v)(2+v)}$$

$$a_6 = \frac{-a_0}{2^6 3! (1+v)(2+v)(3+v)}$$

$$a_8 = \frac{a_0}{2^8 4! (1+v)(2+v)(3+v)(4+v)}$$

$$a_{10} = \frac{-a_0}{2^{10} 5! (1+v)(2+v)(3+v)(4+v)(5+v)}$$

Se continuarmos esse processo chegaremos em

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n! [(1+v)(2+v) \dots (n+v)]} \quad (\text{A.23})$$

Para tal equação é comum a seguinte substituição

$$a_0 = \frac{1}{2^v \Gamma(1+v)}$$

Substituindo em (23) ficamos com

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! [(1+v)(2+v) \dots (n+v)]} \frac{1}{2^v \Gamma(1+v)} \\ &= \frac{(-1)^n}{2^{2n+v} n! [\Gamma(1+v)(1+v)(2+v) \dots (n+v)]} \end{aligned}$$

logo,

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+v} n! [\Gamma(1+v)(1+v)(2+v) \dots (n+v)]} \quad (\text{A.24})$$

Por outro lado, lembrando que, a função gama possui a seguinte propriedade

$$\Gamma(1 + x) = x\Gamma(x)$$

e assim,

$$\Gamma(1 + (1 + v)) = \Gamma(2 + v) = (1 + v)\Gamma(1 + v)$$

$$\Gamma(3 + v) = (2 + v)\Gamma(2 + v)$$

$$\Gamma(4 + v) = (3 + v)\Gamma(3 + v)$$

$$\Gamma(5 + v) = (4 + v)\Gamma(4 + v)$$

Fazendo esse processo n vezes

$$\Gamma(1 + (n + v)) = (n + v)\Gamma(n + v) \quad (\text{A.25})$$

Substituindo a expressão (24) na equação (23) ficamos com

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+v} n! [\Gamma(1 + n + v)]} \quad (\text{A.26})$$

E então,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+p} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n+v} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+v} n! [\Gamma(1 + n + v)]} x^{2n+v} \Rightarrow$$

Por fim,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! [\Gamma(1 + n + v)]} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v} \quad (\text{A.27})$$

E esta é a função de Bessel de primeira espécie, e tal solução pode ser reescrita da forma como se segue abaixo:

$$J_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! [\Gamma(1+n+v)]} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v} \quad (\text{A.28})$$

Observe que, se $p = -v$ obtemos uma segunda solução a partir de 28 da seguinte forma

$$J_{-v}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! [\Gamma(1+n-v)]} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-v} \quad (\text{A.29})$$

Para nosso caso específico, desejamos achar a solução para o potencial elétrico em coordenadas cilíndricas, assim lembrando de (16),

$$\xi^2 \frac{d^2 R}{d\xi^2} + \xi \frac{dR}{d\xi} + (\xi^2 - v^2)R = 0$$

Logo, a solução para $R(\rho)$ é dada por:

$$R(\rho) = E_v J_v(k\rho) + F_v J_{-v}(k\rho) \quad (\text{A.30})$$

Donde $J_v(k\rho)$ e $J_{-v}(k\rho)$ são funções de Bessel de primeira espécie, com v não inteiro, e de ordem v e $-v$. E desta forma, a solução geral para o potencial elétrico é dada por,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\rho, \theta, z) = & \sum_{v=0}^n \sum_{k \neq 0}^n \{ (E_v J_v(k\rho) + F_v J_{-v}(k\rho)) \\ & \cdot (c_v \cos v\theta + d_v \sin v\theta) \cdot (a_k e^{kz} + b_k e^{-kz}) \} \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

E esta é a solução geral da equação de Laplace, considerando um ν não inteiro. Porém, se ν for inteiro a solução geral ficará,

$$\mathbb{V}(\rho, \theta, z) = \sum_{\nu=0}^n \sum_{k \neq 0}^n \{ (E_{\nu} J_{\nu}(k\rho) + F_{\nu} N_{\nu}(k\rho)) \cdot (c_{\nu} \cos \nu\theta + d_{\nu} \sin \nu\theta) \cdot (a_k e^{kz} + b_k e^{-kz}) \} \quad (\text{A.32})$$

Onde $N_{\nu}(k\rho)$ é chamada de função de Neumann e é definida como,

$$N_{\nu}(k\rho) = \frac{\cos \nu\pi \cdot J_{\nu}(k\rho) - J_{-\nu}(k\rho)}{\sin \nu\pi} \quad (\text{A.33})$$

A.II - Solução da equação de onda em coordenadas cilíndricas

Para resolver a equação de onda abaixo, tomaremos por base o procedimento adotado para solucionar a Laplace.

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$$

Desta forma, operador Laplaciano nesse sistema de coordenadas é escrito

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

A equação pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi(\rho, \theta, z)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi(\rho, \theta, z)}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi(\rho, \theta, z)}{\partial z^2} + k^2 \psi(\rho, \theta, z) = 0$$

Esta é uma equação diferencial parcial de segunda ordem, linear e homogênea (EDP) nas variáveis independentes ρ, θ e z onde $\psi(\rho, \theta, z)$ é a função potencial elétrico a ser encontrada.

De uma forma mais simples, omitindo as três variáveis independentes podemos adotar a notação:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0 \quad (\text{A.34})$$

Para encontrar uma solução geral da equação (1) pode-se usar o método de separação de variáveis o qual é usual para resoluções desse tipo de problema. O método consiste em buscar uma função solução que seja um produto de funções, cada uma delas com apenas uma variável independente. Como se verá este método tem como objetivo intermediário transformar a equação parcial com três variáveis em três equações a uma variável independente:

$$\psi(\rho, \theta, z) = R(\rho)\Theta(\theta)Z(z) \quad (\text{A.35})$$

Assim, ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial [R(\rho)\Theta(\theta)Z(z)]}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 [R(\rho)\Theta(\theta)Z(z)]}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 [R(\rho)\Theta(\theta)Z(z)]}{\partial z^2} \\ + kR(\rho)\Theta(\theta)Z(z) = 0 \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados por $[R(\rho)\Theta(\theta)Z(z)]$, ficamos com

$$\frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + k^2 = 0 \quad (\text{A.36})$$

E ainda,

$$\frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} + k^2 = - \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2}$$

Observe que agora temos do lado esquerdo uma dependência em ρ e θ , enquanto do lado direito temos uma dependência única em z .

Fazendo a separação de variáveis temos,

$$\frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} + k^2 = -\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = \beta^2 \quad (\text{A.37})$$

Agora ficamos com duas equações

$$\frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} = (\beta^2 - k^2) \quad (\text{A.38})$$

e ainda,

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = \beta^2 \quad (\text{A.39})$$

Porém, a equação (11) já foi resolvida no apêndice A-I, usando o resultado obtido na seção anterior inferir que

$$Z(z) = ae^{-j\beta z} + be^{j\beta z} \quad (\text{A.40})$$

e desta forma,

$$Z_\beta(z) = A_\beta \sin \beta z + B_\beta \cos \beta z \quad (\text{A.41})$$

Assim, obtivemos a solução para a coordenada em z. Novamente, devemos encontrar as soluções para as coordenadas ρ, θ . Voltando para a equação (5) temos que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} &= (\beta^2 - k^2) \Rightarrow \\ \frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) &= (\beta^2 - k^2) - \frac{1}{\rho^2 \Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} \Rightarrow \end{aligned}$$

se multiplicarmos ambos os membros da equação por ρ^2

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) = (\beta^2 - k^2) \rho^2 - \frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) - (\beta^2 - k^2) \rho^2 = - \frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2}$$

Observe que cada equação depende apenas uma variável: do lado esquerdo a dependência é somente em ρ , do lado direito a dependência é só em θ . Logo, estas equações podem ser separadas por uma constante.

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + (k^2 - \beta^2) \rho^2 = - \frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} = m^2 \quad (\text{A.42})$$

Resolvendo em θ ,

$$- \frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} = m^2 \Rightarrow$$

e assim,

$$\frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} + m^2 \Theta(\theta) = 0 \quad (\text{A.43})$$

Porém, esta equação também foi resolvida em A-I. Logo,

$$\Theta(\theta) = C e^{im\theta} + D e^{-im\theta} \quad (\text{A.44})$$

e ainda,

$$\Theta_m(\theta) = c_m \cos m\theta + d_m \sin m\theta \quad (\text{A.45})$$

Por fim, vamos resolver em ρ , da equação (A.9) podemos ver que,

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + (k^2 - \beta^2) \rho^2 = m^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + (k^2 - \beta^2) \rho^2 - m^2 = 0 \Rightarrow$$

Seja, $k_\rho^2 = (k^2 - \beta^2)$,

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \left(k_\rho^2 \rho - \frac{m^2}{\rho} \right) R(\rho) = 0 \Rightarrow$$

donde,

$$\frac{d\rho}{d\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \rho \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \left(k_\rho^2 \rho - \frac{m^2}{\rho} \right) R(\rho) = 0 \Rightarrow$$

$$\rho \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \left(k_\rho^2 \rho - \frac{m^2}{\rho} \right) R(\rho) = 0 \Rightarrow$$

multiplicando ambos os membros por ρ ,

$$\rho^2 \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} + (k_\rho^2 \rho^2 - m^2) R(\rho) = 0 \quad (\text{A.46})$$

Então, façamos uma mudança de variável para começar sua resolução. Assim, seja $\xi = k_\rho \cdot \rho$. Agora, devemos achar as derivadas da equação (A.13) em função de ξ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} &= \frac{d\xi}{d\rho} \frac{d}{d\xi} = \frac{d(k_\rho \rho)}{d\rho} \frac{d}{d\xi} = k_\rho \frac{d\rho}{d\rho} \frac{d}{d\xi} = k_\rho \frac{d}{d\xi} \Rightarrow \\ \frac{d}{d\rho} &= k_\rho \frac{d}{d\xi} \end{aligned} \quad (\text{A.47.a})$$

e ainda,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\rho^2} &= \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d}{d\rho} \right) = \left(k_\rho \frac{d}{d\xi} \right) \left(k_\rho \frac{d}{d\xi} \right) = k_\rho^2 \frac{d^2}{d\xi^2} \Rightarrow \\ \frac{d^2}{d\rho^2} &= k_\rho^2 \frac{d^2}{d\xi^2} \end{aligned} \quad (\text{A.47.b})$$

Substituindo as expressões (A.47.a) e (A.47.b) na equação (A.13) ficaremos com

$$k_\rho^2 \rho^2 \frac{d^2 R(\rho)}{d\xi^2} + k_\rho \rho \frac{dR(\rho)}{d\xi} + (k_\rho^2 \rho^2 - m^2) R(\rho) = 0 \quad \Rightarrow$$

Lembre-se que $\xi = k_\rho \cdot \rho$, ou seja,

$$\xi^2 \frac{d^2 R}{d\xi^2} + \xi \frac{dR}{d\xi} + (\xi^2 - v^2) R = 0 \quad (\text{A.48})$$

Agora, podemos ver que esta equação possui a forma de uma Equação Diferencial de Bessel, e mostraremos a seguir que suas soluções são as funções de Bessel. Porém, o procedimento para resolução de 16 é análogo o feito em A-1 desta forma podemos dizer que a solução para $R(\rho)$ é dada por:

$$R(\rho) = E_v J_v(k_\rho \rho) + F_v J_{-v}(k_\rho \rho) \quad (\text{A.49})$$

Donde $J_v(k_\rho \rho)$ e $J_{-v}(k_\rho \rho)$ são funções de Bessel de primeira espécie, com v não inteiro, e de ordem v e $-v$. E desta forma, a solução geral para o potencial elétrico é dada por,

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \theta, z) = \sum_{v=0}^n \sum_{k \neq 0}^n \{ [E_v J_v(k_\rho \rho) + F_v J_{-v}(k_\rho \rho)] \\ \cdot (c_m \cos m\theta + d_m \sin m\theta) \cdot (A_\beta \sin \beta z + B_\beta \cos \beta z) \} \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

E esta é a solução geral da equação de onda, considerando um v não inteiro. Porém, se v for inteiro a solução geral ficará,

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \theta, z) = \sum_{v=0}^n \sum_{k \neq 0}^n \{ [E_v J_v(k_\rho \rho) + F_v N(k_\rho \rho)] \\ \cdot (c_m \cos m\theta + d_m \sin m\theta) \cdot (A_\beta \sin \beta z + B_\beta \cos \beta z) \} \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

APÊNDICE B

A série de Taylor é uma importante ferramenta matemática e de grande utilidade nos problemas físicos. Em muitas vezes se faz necessário tomar o conhecimento de como algumas funções se comportam em determinado ponto.

Assim, seja $f(x)$ uma função de uma única variável, a série de Taylor em torno do ponto x_0 desta função pode ser escrita como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n(x_0) \cdot (x - x_0)^n$$

Ou ainda,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f(x_0)}{dx^n} \cdot (x - x_0)^n$$

A seguir vamos explicitar algumas séries pertinentes no escopo deste trabalho.

B.I Expansão da função exponencial em série de Taylor

Seja $f(x) = e^x$, e seja ainda $x_0 = 0$. Então, a expansão dessa função em série de Taylor é dada por,

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^n}{n!} \frac{d^n f(e^{x_0})}{dx^n}$$

Calculando alguns termos,

$$\text{quando, } n = 0 \rightarrow a_0 = \frac{(x)^0}{0!} \cdot e^0 = 1 \Rightarrow a_0 = 1$$

$$\text{quando, } n = 1 \rightarrow a_1 = \frac{(x)^1}{1!} \cdot e^0 = x \Rightarrow a_1 = x$$

$$\text{quando, } n = 2 \rightarrow a_2 = \frac{(x)^2}{2!} \cdot e^0 = \frac{x^2}{2!} \Rightarrow a_2 = \frac{x^2}{2!}$$

$$\text{quando, } n = 3 \rightarrow a_3 = \frac{(x)^3}{3!} \cdot e^0 = \frac{x^3}{3!} \Rightarrow a_3 = \frac{x^3}{3!}$$

Se continuarmos esse processo indefinidamente iremos chegar em

$$a_n = \frac{(x)^n}{n!} \cdot e^0 = \frac{x^n}{n!} \Rightarrow a_n = \frac{x^n}{n!}$$

Logo,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

E sinteticamente podemos escrever na notação de somatório,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^n}{n!}$$

B.II Expansão da função logarítmica em série de Taylor

Seja $f(x) = \ln(x)$, e seja ainda $x_0 = 0$. Então, a expansão dessa função em série de Taylor é dada por,

$$f(x) = \ln(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^n}{n!} \frac{d^n f(\ln(x))}{dx^n}$$

Observe que se usarmos a função logarítmica na forma $\ln x$ em torno do ponto $x_0 = 0$, teremos uma divergência na série pois, $\ln 0 \rightarrow -\infty$. Por esse motivo devemos fazer a seguinte modificação $f(x) = \ln(1+x)$.

Calculando alguns termos,

$$\text{quando, } n = 0 \rightarrow a_0 = \frac{(x)^0}{0!} \cdot \ln(1+0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

$$\text{quando, } n = 1 \rightarrow a_1 = \frac{(x)^1}{1!} \cdot \frac{1}{(1+x_0)} = x \Rightarrow a_1 = x$$

$$\text{quando, } n = 2 \rightarrow a_2 = \frac{(x)^2}{2!} \cdot \frac{-1}{(1+x_0)^2} = -\frac{x^2}{2!} \Rightarrow a_2 = -\frac{x^2}{2}$$

$$\text{quando, } n = 3 \rightarrow a_3 = \frac{(x)^3}{3!} \cdot \frac{+2}{(1+x_0)^3} = \frac{2x^3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \Rightarrow a_3 = \frac{x^3}{3}$$

$$\text{quando, } n = 4 \rightarrow a_4 = \frac{(x)^4}{4!} \cdot \frac{-6}{(1+x_0)^4} = \frac{-6x^4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \Rightarrow a_4 = -\frac{x^4}{4}$$

$$\text{quando, } n = 5 \rightarrow a_5 = \frac{(x)^5}{5!} \cdot \frac{24}{(1+x_0)^5} = \frac{24x^4}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \Rightarrow a_5 = \frac{x^5}{5}$$

Então, é possível observar que

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

Ou seja,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots + \{(-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}\} + \dots$$

Por fim, a série pode ser escrita da forma que se segue abaixo,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

B.III Expansão da função binomial em série de Taylor

Seja $f(x) = (1+x)^k$, e seja ainda $x_0 = 0$. Então, a expansão dessa função em série de Taylor é dada por,

$$f(x) = (1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^n}{n!} \frac{d^n f((1+x_0)^k)}{dx^n}$$

Calculando alguns termos dessa expansão,

$$\text{quando, } n = 0 \rightarrow a_0 = \frac{(x)^0}{0!} \cdot (1+x_0)^k = 1 \Rightarrow a_0 = 1$$

$$\text{quando, } n = 1 \rightarrow a_1 = \frac{(x)^1}{1!} \cdot k(1+x_0)^{k-1} = kx \Rightarrow a_1 = kx$$

$$\text{quando, } n = 2 \rightarrow a_2 = \frac{(x)^2}{2!} \cdot k \cdot (k-1)(1+x_0)^{k-2} = \frac{x}{2!} k \cdot (k-1)^2 \Rightarrow$$

$$a_2 = k \cdot (k-1) \frac{x^2}{2!}$$

$$\text{quando, } n = 3 \rightarrow a_3 = \frac{(x)^3}{3!} \cdot k \cdot (k-1) \cdot (k-2)(1+x_0)^{k-2} \Rightarrow$$

$$a_3 = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \frac{(x)^3}{3!}$$

Logo,

$$\text{quando, } n = 4 \rightarrow a_4 = k \cdot (k - 1) \cdot (k - 2) \cdot (k - 3) \frac{x^4}{4}$$

Por fim, o termo geral é dado por

$$a_n = \frac{k!}{(k - n)!} \frac{x^n}{n!}$$

Ou seja,

$$(1 + x)^k = 1 + kx + k \cdot (k - 1) \frac{x^2}{2!} + k \cdot (k - 1) \cdot (k - 2) \frac{(x)^3}{3!} + \dots + \frac{k!}{(k - n)!} \frac{x^n}{n!} + \dots$$

E por fim,

$$(1 + x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k!}{(k - n)!} \frac{x^n}{n!}$$

APÊNDICE C

C.I

Antes de iniciar as demonstrações das identidades devemos fazer algumas considerações iniciais. Dentre elas, vale ressaltar o símbolo de Levi-Civita que é definido da seguinte forma:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} \varepsilon_{123} = \varepsilon_{312} = \varepsilon_{231} = 1 \\ \varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1 \end{cases}$$

ou ainda,

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{jki} = 1 \\ \varepsilon_{ikj} = \varepsilon_{jik} = \varepsilon_{kji} = -1 \end{cases}$$

Dessa forma, devemos ainda lembrar que o símbolo de Levi-Civita é antissimétrico em relação a todos os seus pares de índices (ARFKEN & WEBER, 2007).

Vamos adotar a seguinte notação:

$$\nabla \times = \varepsilon_{ijk} \partial_j$$

$$\nabla = \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Isto posto, considere ψ uma função escalar qualquer e seja ainda, $\vec{V}$ uma função vetorial qualquer.

$$\mathbf{a) \nabla \times (\psi \vec{V}) = \nabla \psi \times \vec{V} + \psi (\nabla \times \vec{V})}$$

Vamos adotar a seguinte notação:

$$\nabla \times = \varepsilon_{ijk} \partial_j$$

$$\nabla = \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Demonstração:

$$\nabla \times (\psi \vec{V}) = \varepsilon_{ijk} \partial_j (\psi \vec{V})_k = \varepsilon_{ijk} \psi (\partial_j \vec{V}_k) + \varepsilon_{kij} \vec{V}_k (\partial_j \psi) \Rightarrow$$

$$\nabla \times (\psi \vec{V}) = \varepsilon_{ijk} (\partial_j \vec{V}_k) \psi + \varepsilon_{kij} \vec{V}_k (\partial_j \psi) \vec{V}_k = (\nabla \times \vec{V}) \psi + \nabla \psi \times \vec{V} \Rightarrow$$

$$\nabla \times (\psi \vec{V}) = \nabla \psi \times \vec{V} + \psi (\nabla \times \vec{V}) \quad \blacksquare$$

$$\mathbf{b) \nabla \cdot (\nabla \times \vec{V}) = 0}$$

Demonstração:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{V}) = \partial_i \varepsilon_{ijk} \partial_j (\vec{V})_k = \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j (\vec{V})_k = \varepsilon_{kij} (\vec{V})_k \partial_i \partial_j - \varepsilon_{kji} (\vec{V})_k \partial_j \partial_i \Rightarrow$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{V}) = \varepsilon_{kij} \partial_i \partial_j (\vec{V})_k - \varepsilon_{kji} \partial_j \partial_i (\vec{V})_k = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{V}) = 0 \quad \blacksquare$$

$$\mathbf{c) \nabla \times (\nabla \times \vec{V}) = \nabla \cdot (\nabla \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V}}$$

Demonstração:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{V}) = \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \partial_l (\vec{V})_m = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \partial_j \partial_l (\vec{V})_m \Rightarrow$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{V}) = \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \partial_j \partial_l V_m = \delta_{il} \delta_{jm} \partial_j \partial_l V_m - \delta_{im} \delta_{jl} \partial_j \partial_l V_m \Rightarrow$$

mas,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j; \\ 1, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Logo,

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{V}) = \partial_i \partial_j V_m - \partial_l \partial_l V_m \Rightarrow$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{V}) = \partial_i \partial_j V_m - \partial_l^2 V_m \Rightarrow$$

Assim,

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{V}) = \nabla \cdot (\nabla \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V} \quad \blacksquare$$

$$\mathbf{d) \int_V (\nabla \times \vec{V}) dV = \oint_S \hat{n} \times \vec{V} dA}$$

Demonstração:

Seja, $\vec{V} = (\vec{A} \times \vec{B})$. Então, usando o teorema do divergente:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{V} dV = \oint_S \vec{V} \cdot \hat{n} dA$$

Mas, $\vec{V} = (\vec{A} \times \vec{B})$, substituindo na equação acima,

$$\int_V \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) dV = \oint_S (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dA$$

Porém, da regra cíclica temos,

$$\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$$

Assim,

$$\int_V \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) dV = \oint_S \hat{n} (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot dA \Rightarrow$$

$$\int_V \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) dV = \oint_S \vec{B} (\hat{n} \times \vec{A}) \cdot dA \Rightarrow$$

$$\int_V (\nabla \times \vec{A}) \cdot dV = \oint_S (\hat{n} \times \vec{A}) \cdot dA \quad \blacksquare$$

C.II

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

Com o intuito de simplificar a expressão faremos a seguinte mudança de variável,

$$(\vec{r} - \vec{r}') = \hat{i}(x - x') + \hat{j}(y - y') + \hat{k}(z - z')$$

$$\langle X, Y, Z \rangle = \langle (x - x'), (y - y'), (z - z') \rangle = \hat{i}(x - x') + \hat{j}(y - y') + \hat{k}(z - z')$$

Assim,

$$\frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial Z} = \frac{\partial}{\partial z}$$

Logo,

$$\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \Rightarrow$$

$$\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) = \left\langle \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y}, \frac{\partial}{\partial Z} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{(X)^2 + (Y)^2 + (Z)^2}}$$

Calculando as derivadas parciais separadamente temos que,

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{1}{\sqrt{(X)^2 + (Y)^2 + (Z)^2}} \right] = \frac{-\frac{2X}{2}}{\left(\sqrt{(X)^2 + (Y)^2 + (Z)^2}\right)^3} = \frac{-X}{\left(\sqrt{(X)^2 + (Y)^2 + (Z)^2}\right)^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left[\frac{1}{\sqrt{(X)^2 + (Y)^2 + (Z)^2}} \right] = \frac{-\frac{2Y}{2}}{\left(\sqrt{(X)^2 + (Y)^2 + (Z)^2}\right)^3} = \frac{-Y}{\left(\sqrt{(X)^2 + (Y)^2 + (Z)^2}\right)^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial Z} \left[\frac{1}{\sqrt{(X)^2 + (Y)^2 + (Z)^2}} \right] = \frac{-\frac{2Z}{2}}{\left(\sqrt{(X)^2 + (Y)^2 + (Z)^2}\right)^3} = \frac{-Z}{\left(\sqrt{(X)^2 + (Y)^2 + (Z)^2}\right)^3}$$

Desta forma o divergente fica

$$\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) = \left\langle \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y}, \frac{\partial}{\partial Z} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{(X)^2 + (Y)^2 + (Z)^2}} =$$

$$= \left\langle \frac{-X}{\left(\sqrt{(X)^2 + (Y)^2 + (Z)^2}\right)^3}, \frac{-Y}{\left(\sqrt{(X)^2 + (Y)^2 + (Z)^2}\right)^3}, \frac{-Z}{\left(\sqrt{(X)^2 + (Y)^2 + (Z)^2}\right)^3} \right\rangle \Rightarrow$$

$$= \left\langle \frac{-X}{\left(\sqrt{(X)^2 + (Y)^2 + (Z)^2}\right)^3}, \frac{-Y}{\left(\sqrt{(X)^2 + (Y)^2 + (Z)^2}\right)^3}, \frac{-Z}{\left(\sqrt{(X)^2 + (Y)^2 + (Z)^2}\right)^3} \right\rangle \Rightarrow$$

$$\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) = -\frac{\langle X, Y, Z \rangle}{[(X)^2 + (Y)^2 + (Z)^2]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\langle (x-x'), (y-y'), (z-z') \rangle}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Mas,

$$\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \frac{\langle (x-x'), (y-y'), (z-z') \rangle}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Logo,

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\langle (x - x'), (y - y'), (z - z') \rangle}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}} = -\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

Por fim,

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \quad \blacksquare$$

C.III

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

Assim, sabendo que,

$$(\vec{r} - \vec{r}') = \hat{i}(x - x') + \hat{j}(y - y') + \hat{k}(z - z') = \langle (x - x'), (y - y'), (z - z') \rangle$$

Logo,

$$\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}$$

Calculando as derivadas parciais separadamente temos que,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x'} \left[\frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \right] = \\ & -\frac{1}{2} \frac{2(x - x') \cdot (-1)}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(x - x')}{\{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\}^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y'} \left[\frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \right] = \\ & -\frac{1}{2} \frac{2(y - y') \cdot (-1)}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(y - y')}{\{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\}^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial z'} \left[\frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \right] =$$

$$-\frac{1}{2} \frac{2(z-z') \cdot (-1)}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(z-z')}{\{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

Desta forma o divergente fica

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} = \\ &= \hat{i} \cdot \left(\frac{(x-x')}{\{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\}^{\frac{3}{2}}} \right) + \\ &\quad \hat{j} \cdot \left(\frac{(y-y')}{\{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\}^{\frac{3}{2}}} \right) + \\ &\quad \hat{k} \cdot \left(\frac{(z-z')}{\{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\}^{\frac{3}{2}}} \right) = \\ &= \frac{\langle (x-x'), (y-y'), (z-z') \rangle}{\{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\}^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = + \frac{\langle (x-x'), (y-y'), (z-z') \rangle}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Mas,

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\langle (x-x'), (y-y'), (z-z') \rangle}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Logo,

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\langle (x-x'), (y-y'), (z-z') \rangle}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{3}{2}}} = \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

Por fim,

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \quad \blacksquare$$

Ou ainda,

$$\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -\nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \quad \blacksquare$$

APÊNDICE D

Circuito RLC operando com corrente alternada.

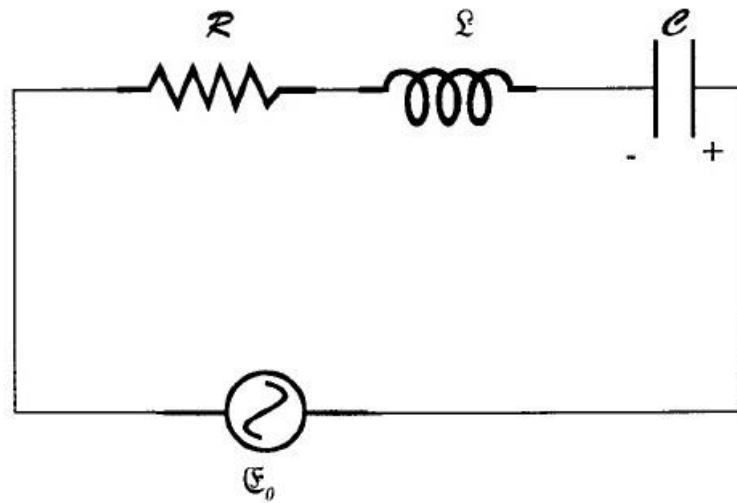


Figura 1: circuito RLC

Usando a lei das malhas para o circuito apresentado na figura 1, teremos

$$\mathcal{E} - Ri - L \frac{di}{dt} - \frac{Q}{C} = 0 \Rightarrow$$

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}_0 \Rightarrow$$

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}_0 \Rightarrow$$

Logo,

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{LC} = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \quad (\text{D.1})$$

A equação (D.1) pode ser reescrita se considerarmos as definições abaixo:

$$\frac{R}{L} = 2\beta \quad (\text{D.2})$$

com,

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2 \quad (\text{D.3})$$

e ainda,

$$\frac{\mathfrak{E}_0}{L} = e_0 \quad (\text{D.4})$$

Onde 2β é o termo de amortecimento, ω_0^2 é a frequência natural de oscilação do sistema. Substituindo (D.2), (D.3), (D.4) em (D.1) obtemos a equação (D.5),

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + 2\beta \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = e_0 \quad (\text{D.5})$$

Note que esta equação é diferencial ordinária de segunda ordem é não-homogênea. Então, pode ser resolvida da seguinte forma, primeiramente acharemos a solução complementar, através da resolução da equação homogênea associada e depois iremos procurar uma solução particular, uma vez que a solução geral é a soma da solução complementar com a solução particular.

$$Q(t) = e^{pt}$$

Derivando duas vezes teremos,

$$\frac{dQ}{dt} = pe^{pt}$$

E ainda,

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} = p^2 e^{pt}$$

Substituindo estas expressões em (D.5),

$$p^2 e^{pt} + 2\beta p e^{pt} + \omega_0^2 e^{pt} = 0 \Rightarrow$$

$$p^2 + 2\beta + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow$$

Desta forma, obtemos duas raízes para a equação auxiliar,

$$p_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

$$p_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Assim, a solução geral para essa EDO é dada pelo princípio superposição. Ou seja,

$$Q(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t}$$

Porém, antes devemos analisar separadamente três casos possíveis quando

$$\beta^2 - \omega_0^2 < 0$$

$$\beta^2 - \omega_0^2 > 0$$

$$\beta^2 - \omega_0^2 = 0$$

Vamos analisar inicialmente o primeiro caso, ou seja, quando $\beta^2 - \omega_0^2 < 0$. Para esta situação o coeficiente de amortecimento é menor que a frequência natural de oscilação, e desta forma chamamos este sistema de subamortecido ou subcrítico (ZILL; CULLEN, 2001). E nesse caso teremos que as raízes serão complexas conjugadas. Nessa circunstância é conveniente definir,

$$\beta^2 - \omega_0^2 = -\omega^2$$

Logo,

$$p_1 = -\beta + \sqrt{-\omega^2} = -\beta + \sqrt{i^2 \omega^2} = -\beta + i\omega \Rightarrow$$

$$p_1 = -\beta + i\omega$$

e a segunda raiz fica,

$$p_2 = -\beta - i\omega$$

Portanto,

$$Q(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} \Rightarrow$$

$$Q(t) = c_1 e^{[-\beta + i\omega]t} + c_2 e^{[-\beta - i\omega]t} \Rightarrow$$

Logo,

$$Q(t) = e^{-\beta t} \{c_1 e^{+i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}\} \quad (D.6)$$

Usando as relações de Euler,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

ficamos com,

$$Q(t) = e^{-\beta t} \{c_1(\cos \omega t + i \sin \omega t) + c_2(\cos \omega t - i \sin \omega t)\} \Rightarrow$$

$$Q(t) = e^{-\beta t} \{(c_1 + c_2)(\cos \omega t) + i(c_1 - c_2)(\sin \omega t)\} \Rightarrow$$

Como c_1, c_2 são constantes arbitrárias a equação acima pode ficar mais simples,

$$Q(t) = e^{-\beta t} \{C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t\} \quad (D.7)$$

E esta é solução geral para a EDO homogênea associada do circuito RLC, quando temos um sistema subcrítico. Porém, é possível encontrar uma expressão mais compacta se fizermos a seguinte substituição em (D.6),

$$c_1 = \frac{A}{2} \cdot e^{i\delta}$$

$$c_2 = \frac{A}{2} \cdot e^{-i\delta}$$

E desta forma,

$$Q(t) = e^{-\beta t} \{c_1 e^{+i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}\} \Rightarrow$$

$$Q(t) = e^{-\beta t} \left\{ \frac{A}{2} \cdot e^{i\delta} e^{+i\omega t} + \frac{A}{2} \cdot e^{-i\delta} e^{-i\omega t} \right\} \Rightarrow$$

$$Q(t) = \frac{Ae^{-\beta t} \{e^{i(\omega t + \delta)} + e^{-i(\omega t + \delta)}\}}{2} \Rightarrow$$

Por fim,

$$Q(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \delta) \quad (D.8)$$

E a corrente elétrica para esta situação é dada por,

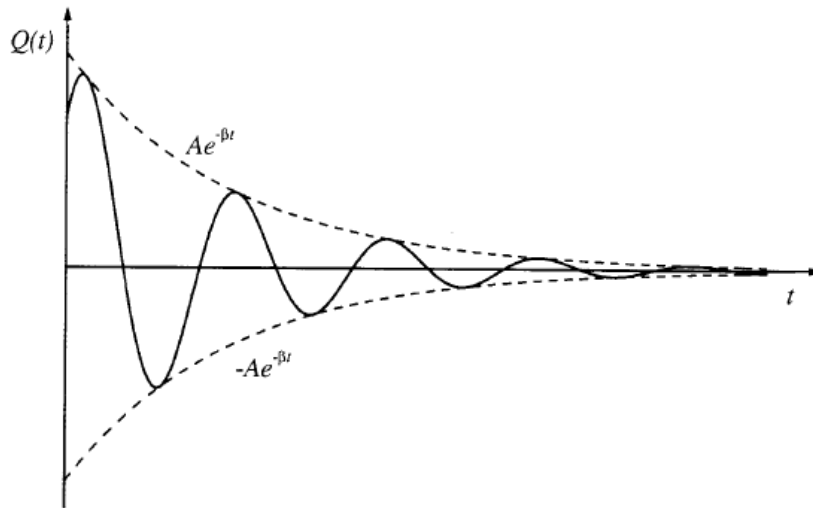
$$i(t) = -\beta Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \delta) - \omega Ae^{-\beta t} \sin(\omega t + \delta)$$

Ou seja,

$$i(t) = -Ae^{-\beta t} \{ \beta Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \delta) + \omega Ae^{-\beta t} \sin(\omega t + \delta) \} \quad (D.9)$$

Então, nota-se que a oscilação decresce exponencialmente com o tempo e que a carga no capacitor oscila com uma frequência angular diferente da frequência natural de oscilação. E podemos ver que de acordo com a figura (2) o movimento é oscilatório devido ao fator $Ae^{-\beta t}$, pois, quando $t \rightarrow \infty$ a amplitude de vibração (β) $\rightarrow 0$ (NUSSENZVEIG, 1997; MACHADO, 2013).

Figura 2: Gráfico $Q(t)$ x t para circuito RLC subamortecido



Fonte: MACHADO, 2013

Agora vamos analisar o caso para o qual as raízes são reais distintas e positivas, ou seja, $\beta^2 - \omega_0^2 > 0$. Isso significa dizer que o coeficiente de amortecimento é maior que frequência natural de oscilação. Este é o caso no qual o sistema é chamado de superamortecido ou supercrítico e para este caso teremos movimentos suaves sem oscilações (ZILL; CULLEN, 2001). Assim, a solução geral é dada por,

$$Q(t) = c_1 e^{[-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}]t} + c_2 e^{[-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}]t} \Rightarrow$$

onde,

$$\beta^2 - \omega_0^2 = \omega^2$$

Logo,

$$Q(t) = e^{-\beta t} (c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}) \quad (D.10)$$

Fazendo novamente a substituição nas constantes c_1 e c_2 ,

$$c_1 = \frac{A}{2} \cdot e^{\delta}$$

$$c_2 = \frac{A}{2} \cdot e^{-\delta}$$

e aplicando na equação (D.9) ficamos com,

$$Q(t) = e^{-\beta t} \left(\frac{A}{2} \cdot e^{\delta} \cdot e^{\omega t} + \frac{A}{2} \cdot e^{-\delta} \cdot e^{-\omega t} \right) \Rightarrow$$

$$Q(t) = \frac{Ae^{-\beta t} (e^{\omega t + \delta} + e^{-(\omega t + \delta)})}{2} \Rightarrow$$

e assim,

$$Q(t) = Ae^{-\beta t} \cosh(\omega t + \delta) \quad (\text{D.11})$$

E a corrente elétrica para esta situação é dada por,

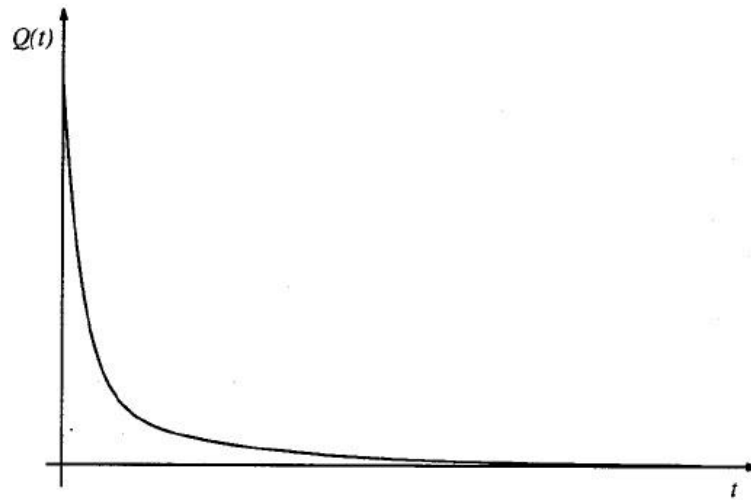
$$i(t) = -\beta Ae^{-\beta t} \cosh(\omega t + \delta) + \omega Ae^{-\beta t} \sinh(\omega t + \delta) \Rightarrow$$

Logo,

$$i(t) = Ae^{-\beta t} \{ \omega \sinh(\omega t + \delta) - \beta \cosh(\omega t + \delta) \} \quad (\text{D.12})$$

E esta é solução geral para a EDO homogênea associada do circuito RLC, quando temos um sistema supercrítico, e para tal situação o sistema não oscila, pois, a carga no capacitor decresce muito rápido (MACHADO, 2013). Tal fenômeno é mostrado na figura (3).

Figura 3: Gráfico $Q(t)$ x t para circuito RLC superamortecido ou supercrítico



Fonte: MACHADO, 2013

Para o último caso teremos $\beta^2 - \omega_0^2 = 0$, ou seja, $\beta = \omega_0$. Este sistema é bastante sensível de forma que qualquer decréscimo na força provoca um movimento oscilatório e por esse motivo é chamado de criticamente amortecido (ZILL; CULLEN, 2001).

$$Q(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 t e^{p_2 t}$$

$$Q(t) = c_1 e^{[-\omega_0]t} + c_2 t e^{[-\omega_0]t} \Rightarrow$$

$$Q(t) = e^{-\omega_0 t} \{c_1 + t c_2\} \quad (D.13)$$

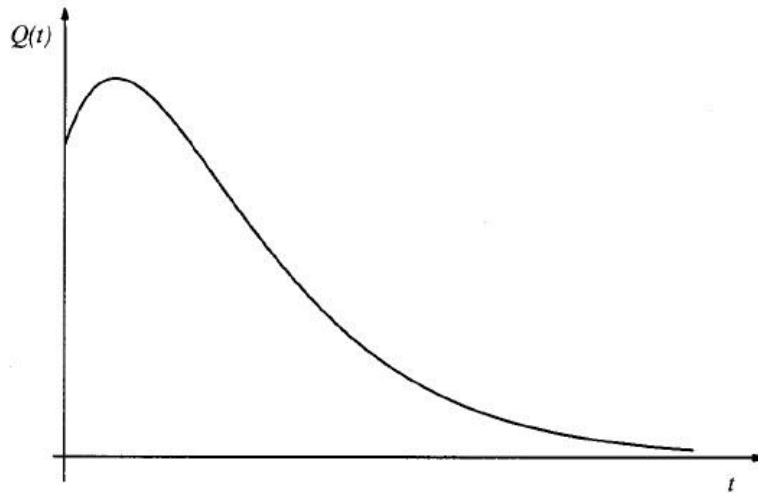
Para este último caso a corrente elétrica será dada por,

$$i(t) = -\omega_0 e^{-\omega_0 t} \{c_1 + t c_2\} + c_2 e^{-\omega_0 t}$$

Ou seja,

$$i(t) = e^{-\omega_0 t} \{c_2 - \omega_0 (c_1 + t c_2)\} \quad (D.14)$$

Figura 4: Gráfico $Q(t) \times t$ para circuito RLC criticamente amortecido.



Fonte: MACHADO, 2013

Do gráfico podemos perceber que carga Q só passa uma vez pelo ponto de equilíbrio. Vale ressaltar ainda sua semelhança com o sistema superamortecido. Portanto, podemos dizer que a solução geral da E.D.O homogênea é dada por um dos três casos explicitados acima e mais uma solução particular para a equação (D.5). Assim, para calcular a solução homogênea desta equação supomos,

$$Q_p = \phi; \quad (D.15)$$

onde ϕ é uma constante qualquer;

Desse modo, a equação (D.5) é reescrita como,

$$\frac{dQ^2}{dt^2} + 2\beta \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = e_0 \Rightarrow$$

$$\omega_0^2 \phi = e_0$$

mas, de (D.4)

$$\frac{\mathcal{E}_0}{L} = e_0$$

logo,

$$\phi = \frac{\mathfrak{E}_0}{L\omega_0^2} \quad (\text{D.16})$$

Então, a solução particular fica,

$$Q_p = \frac{\mathfrak{E}_0}{L\omega_0^2}$$

lembre de (D.2) que,

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2 \Rightarrow \frac{1}{\omega_0^2} = LC$$

Por fim, a forma final da solução particular é dada por,

$$Q_p = \mathfrak{E}_0 \cdot C \quad (\text{D.17})$$

9 REFERÊNCIAS

- A. Okaya and L. F. Barash. The dielectric microwave resonator. Proc. IRE 50 (1962) 2081–2092.
- ARFKEN, George; WEBER, Hans Hermann. **Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física**. Elsevier, 2007.
- AURIVELLIUS, B. X-ray investigations on BiNbO₄, BiTaO₄ and BiSbO₄, **Ark. Kemi**, v. 3, p. 153, 1951.
- BALANIS, C. A. **Advanced Engineering Electromagnetics**. New Jersey: Wiley, segunda edição, 2012.
- BALANIS, C. A. **Antenna Theory: Analysis and Design**. New Jersey: Wiley, terceira edição, 2005.
- BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. **Matemática através dos tempos: Uma história suave para os professores e outros**. MAA, 2004.
- BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Guanabara Dois, 1985.
- BRENNAN, R. P. et al. Gigantes da física. **Ed Revista Rio de Janeiro: J. Zahar**, 1998.
- CALLISTER, W.D. **Ciência e Engenharia de Materiais: Uma Introdução**, 5ªed. LTC Editora, 2002.
- CHEN, Y.-C. et al. **Microwave dielectric properties of 0.95mg₁ti₃o₃-0.05catio₃ for application in dielectric resonator antenna**. Journal of Alloys and Compounds, v. 471, p. 347_351, 2009.
- CHEN, Y.-B. **New dielectric material system of χ la(mg_{1/2}ti_{1/2})o₃-(1- χ)sr₂ti₂o₇ in the microwave frequency range**. Journal of Alloys and Compounds, v. 491, p. 330_334, 2010.
- CULLITY, B. D; WEYMOUTH, John W. **Elementos de difração de raios-X**. 3ª ed. 2014.

EINSTEIN, A.; INFELD, L. A Evolução da Física; tradução. **Giasone Rebuá**, 2008.

EISBERG, R. M. **Fundamentos de física moderna**. 1992.

EVES, Howard Whitley. **Introdução à história da matemática**. Unicamp, 2004.

FARADAY, M. **Phil. Trans.** 128, 1, 79, 265, 1838.

FERNANDES, Tatiana Sainara Maia. **Estudo da estabilidade térmica da liga Ca (Nb_{1/2}Bi_{1/2}) xTi_{1-x}O₃:(B₂O₃) para uso em antena ressoadora dielétrica (DRA)**. 2012. Tese de Doutorado.

GRIFFITHS, David J. **Eletrodinâmica**; 3ª Edição. 2011.

HAKKI, B. W., COLEMAN, P. D. **IRE Transactions on Microwave Theory and Techniques**, MTT-8, p. 402, 1960.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física III**. 5ed., Livros Técnicos e Científicos, Brasil, 2003.

Hayt Jr, W. H., & Buck, J. A. (2013). **Eletromagnetismo**. Bookman Editora.

KAO, KC. **Dielectric Phenomena in Solids**, Elsevier Academic Press, 2004.

KAJFEZ, D.; GUILLON, P. **Dielectric Resonator Antenna**, Ed. The Artech House Microwave Library, 1986.

KHATTAK, C. P.; COX, D. E. Profile analysis of X-ray powder diffractometer data: structural refinement of La_{0.75}Sr_{0.25}CrO₃. **Journal of Applied Crystallography**, v. 10, n. 5, p. 405-411, 1977.

KINGERY, W. D., BOWEN, H. K., UHLMANN, D. R, **Introduction to Ceramics**, 2a Ed, Wiley, New York, 1976.

KOBAYASHI, Y. e TANAKA, S., Resonant modes of a dielectric rod resonator short-circuited at both ends by parallel conducting plates. **Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions On**, v.28, n.10, p.1077-1085. 1980.

KOBAYASHI, Y.; KATOH, M. Microwave measurement of dielectric properties of low-loss materials by the dielectric rod resonator method. **Microwave theory and techniques, IEEE Transactions On**, v.33, n.7, p.586-592. 1985.

LEUNG, K. W.; CHOW, K. Y.; LUK, K. M.; YUNG, E. K. N. Excitation of dielectric resonator antenna using a soldered-through probe, **Electron.Lett.**, vol. 33, pp. 349 - 350, 1997.

LEUNG, K. W.; LUK, K. M.; YUNG, E. K. N. Spherical cap dielectric resonator antenna using aperture coupling, **Electron. Lett.**, vol. 30, No.17, pp. 1366-1367, 1994.

L. F. Chen, C. K. Ong, C. P. Neo, V. V. Varadan, and V. K. Varadan. Microwave Electronics. Measurement and Materials Characterization. Wiley, Chichester, England (2004).

LUCK, K. M.; LEUNG, K. W. **Dielectric Resonator Antennas**, Research Studies Press LTD, England, 2003.

MALMROS, GUNNAR; THOMAS, J. O. Least-squares structure refinement based on profile analysis of powder film intensity data measured on an automatic microdensitometer. **Journal of Applied Crystallography**, v. 10, n. 1, p. 7-11, 1977.

MACHADO, Kleber Daum. **Eletromagnetismo 2**. Ponta Grossa: Todapalavra, 2013.

MACHADO, Kleber Daum. **Teoria do eletromagnetismo 1**. Ponta Grossa: UEPG, 2000.

MACHADO, Kleber Daum. **Teoria do eletromagnetismo 2**. Ponta Grossa: UEPG, 2002.

MACHADO, Kleber Daum. **Teoria do eletromagnetismo 3**. Ponta Grossa: UEPG, 2006.

MCALLISTER, M. W.; LONG, S. A.; CONWAY, G. L. Rectangular dielectric resonator antenna, **Electron. Lett.**, vol. 19, pp. 218-219, 1983.

MCALLISTER, M. W.; LONG, S. A. Resonant hemispherical dielectric antenna, **Electron. Lett.**, vol. 20, pp. 657-659, 1984.

MOL, Rogério Santos. Introdução à história da matemática. **Belo Horizonte: CAED-UFMG**, 2013.

MORAES, Andreia Guerra; REIS, José Claudio; BRAGA, Marco Antonio Barbosa. Uma abordagem histórico-filosófica para o eletromagnetismo no ensino médio. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 21, n. 2, p. 224-248, 2004.

MOULSON, A. J; HERBERT, J. M. **Electroceramics, Materials, Properties, Applications**, 2nd Edition, Wiley, 2003.

NEWELL, J. **Fundamentos da moderna engenharia e ciência dos materiais**. Grupo Gen-LTC, 2000.

NUSSENZVEIG, H. Moysés. **Curso de Física Básica 3-Eletromagnetismo**. Editora Edgard Blucher LTDA, 1997.

OERSTED, H. C. (1820) Experiências sobre o efeito do conflito elétrico sobre a agulha magnética. **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, v. 10, p. 115-122, 1986. Tradução: Roberto de Andrade Martins.

PADILHA, A.F. **Materiais de engenharia**. Hemus, 1997.

PAIVA-SANTOS, C. O. Aplicações do método de Rietveld. **Instituto de Química da UNESP**, 2001.

PETOSA, A. **Dielectric Resonator Antenna Handbook**. Norwood: Artech House, 2007.

POZAR, David M. Microwave Engineering 3e. **Transmission Lines and Waveguides**, p. 143-149, 2005.

POZAR, David M. **Microwave Engineering**. 4th. 2012.

R. D. Richtmeyer. Dielectric resonators. **J. Appl. Phys.** 15 (1939)391–398.

REITZ, J. R.; MILFORD, F. J.; CHRISTY, R. W. **Fundamentos da Teoria Eletromagnética**, 1982.

RIETVELD, H. M. A method for including line profiles of neutron powder diffraction peaks in determination of crystal structures. In: **Acta Crystallographica**. 35 NORRE SOGADE, PO BOX 2148, DK-1016 COPENHAGEN, DENMARK: MUNKSGAARD INT PUBL LTD, 1966. p. A228-&.

RIETVELD, H. M. A profile refinement method for nuclear and magnetic structures. **Journal of applied Crystallography**, v. 2, n. 2, p. 65-71, 1969.

RIETVELD, H. M. Line profiles of neutron powder-diffraction peaks for structure refinement. **Acta Crystallographica**, v. 22, n. 1, p. 151-152, 1967.

OLIVEIRA, Ronaldo Glauber Maia de. **Estudo das propriedades dielétricas e estruturais das matrizes cerâmicas $\text{Na}_2\text{Nb}_4\text{O}_{11}$ (NN) com aditivo de Bi_2O_3 para aplicações em componentes de rádio frequência e microondas**. 2012. Tese de Doutorado.

SADIKU, M. N. O. **Elementos de Eletromagnetismo**, traduzido por Liane Ludwing e Jorge Amoretti Lisboa. 2004.

SALES, Antônio Jefferson Manguiera. **Estudo de antenas dielétricas baseadas na matriz do compósito $(\text{BiNbO}_4)_x(\text{CaTiO}_3)_{1-x}$ para aplicações em comunicações**. 2016. Tese de Doutorado.

SANCHO, Emmanuelle de Oliveira. **Estudo das propriedades Dielétricas da matriz cerâmica $\text{SrBi}_2\text{Nb}_2\text{O}_9$ (SBN) para uso em dispositivos de RF e microondas**. 2013. Tese de Doutorado.

S. A. Long, M. W. McAllister and L. C. Shen, "The resonant cylindrical dielectric cavity antenna", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 31, pp.406-412, May 1983.

SEBASTIAN, M. T., **Dielectric Materials for Wireless Communication**, San Diego – USA, Elsevier, 2008.

SEBASTIAN, M. T.; JANTUNEN, H. Low loss dielectric materials for LTCC applications: a review, **Int. Mater. Rev.**, v. 53, p. 57-90, 2008.

SKOOG, Douglas A.; HOLLER, F. James; NIEMAN, Timothy A. **Princípios de análise instrumental**. Porto Alegre, Brazil:: Bookman, 2002.

SOUSA, Djalma Gomes de. **Síntese e caracterização das matrizes cerâmicas TiFeNbO_6 com adição de Bi_2O_3 e análise de aplicações em microondas e radiofrequência**. 2014. Tese de Doutorado.

TENT, Margaret BW. **O príncipe da matemática** . AK Peter Press, Ltd, 2006.

W. E. Courtney. Analysis and evaluation of a method of measuring complex permittivity and permeability of microwave materials. **IEEE Trans. Microw. Theory Tech.** MTT-18(1970) 476–485.

YOUNG, R. A.; MACKIE, P. E. t; VON DREELE, R. B. Application of the pattern-fitting structure-refinement method of X-ray powder diffractometer patterns. **Journal of Applied Crystallography**, v. 10, n. 4, p. 262-269, 1977.

YOUNG, R. A. et al. DBWS-9411—an upgrade of the DBWS*. programs for Rietveld refinement with PC and mainframe computers. **Journal of Applied Crystallography**, v. 28, n. 3, p. 366-367, 1995.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. Equações Diferenciais, vol. 1. **São Paulo, Makron**, 2001.