



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ**  
**IFCE *CAMPUS* FORTALEZA**  
**MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**

**DIANARA FIGUEIRÊDO FREIRE**

**O ESTUDO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NA FORMAÇÃO INICIAL DE  
PROFESSORES DE MATEMÁTICA A PARTIR DO TRATADO *LILAVATI*, DE  
1150, ELABORADO POR BHASKARACARYA**

**FORTALEZA**

**2023**

DIANARA FIGUEIRÊDO FREIRE

O ESTUDO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NA FORMAÇÃO INICIAL DE  
PROFESSORES DE MATEMÁTICA A PARTIR DO TRATADO *LILAVATI*, DE  
1150, ELABORADO POR BHASKARACARYA

Dissertação apresentada ao curso de  
Mestrado Acadêmico em Ensino de  
Ciências e Matemática do Programa de  
Pós-Graduação em Ensino de Ciências e  
Matemática do Instituto Federal de  
Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará  
(IFCE) - Campus Fortaleza, como requisito  
parcial para obtenção do Título de Mestre  
em Ensino de Ciências e Matemática. Área  
de concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Ana Carolina  
Costa Pereira.

FORTALEZA-CE

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Instituto Federal do Ceará - IFCE

Sistema de Bibliotecas - SIBI

Ficha catalográfica elaborada pelo SIBI/IFCE, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

F866e Freire, Dianara Figueirêdo.

O ESTUDO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NA FORMAÇÃO INICIAL DE  
PROFESSORES DE MATEMÁTICA A PARTIR DO TRATADO LILAVATI, DE 1150,  
ELABORADO POR BHASKARACARYA / Dianara Figueirêdo Freire. - 2023.

174 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado) - Instituto Federal do Ceará, Mestrado em Ensino de Ciências e  
Matemática, Campus Fortaleza, 2023.

Orientação: Prof. Dr. Ana Carolina Costa Pereira .

1. Pensamento Algébrico. . 2. Formação de Licenciandos em Matemática. 3. Lilavati. 4.  
Matemática indiana. I. Título.

CDD 510.07

---



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ  
Av. 13 de maio, 2081 , - Bairro Benfica - CEP 60040-531 - Fortaleza - CE - [www.ifce.edu.br](http://www.ifce.edu.br)

## **AVALIAÇÃO**

Processo: 23256.000535/2023-89

Interessado: Dianara Figueirêdo Freire

### **DIANARA FIGUEIRÊDO FREIRE**

**"O ESTUDO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE  
MATEMÁTICA A PARTIR DO TRATADO LĪLĀVATĪ DE 1150, ELABORADO POR  
BHĀSKARĀCĀRYA"**

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-graduação em Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciência e Matemática (PGECEM) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em ensino de ciência e matemática, área de concentração em ensino de Química.

Aprovada em **24/02/2023**.

**BANCA EXAMINADORA**

**Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira (Orientadora)**  
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

**Prof. Dr. Miguel Chaquiam**  
Universidade do Estado do Pará (UEPA)

**Profa. Dra. Joelma Nogueira dos Santos**  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

**Prof. Dr. Jeová Pereira Martins**  
Secretaria de Educação do Pará (SEDUC-PA)



Documento assinado eletronicamente por **MIGUEL CHAQUIAM, Usuário Externo**, em 27/02/2023, às 15:12, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Jeová Pereira Martins, Usuário Externo**, em 28/02/2023, às 09:23, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Joelma Nogueira dos Santos, Professora do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico**, em 28/02/2023, às 15:50, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ana Carolina Costa Pereira, Usuário Externo**, em 28/02/2023, às 19:22, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade do documento pode ser conferida no site [https://sei.ifce.edu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ifce.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0) informando o código verificador **4557843** e o código CRC **09E776EF**.

Às pessoas mais importantes da minha vida: Mário e Marivone (meus pais), aos meus irmãos: Mikely, Misael, Natanael e Daniel e aos meus sobrinhos: Daniel Júnior, Yhasmim, Laura, Ana e João.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, por me conceder forças para chegar ao final desta pesquisa.

Aos meus pais, irmãos e sobrinhos, que são minha base familiar.

À minha orientadora, Professora Dra. Ana Carolina Costa Pereira, que foi uma pessoa fundamental nesta pesquisa, obrigada pela paciência e por ser um exemplo na minha formação.

Aos Professores: Dra. Joelma Nogueira, Dr. Miguel Chaquiam e Dr. Jeová Martins, por terem aceitado participar da minha banca e por fornecerem críticas construtivas, que engrandeceram esta investigação.

Aos demais professores, que me ensinaram no decorrer do mestrado.

Às amigas Rebeca Oliveira e Thalya Masseno, que formaram um trio comigo, perpassando por todos os desafios e todas as alegrias que a pós-graduação nos proporcionou.

Ao Nathanael Souza, pela parceria e pela escuta ativa durante este percurso acadêmico.

Ao Grupo de Educação e História da Matemática (GPEHM), pelos ensinamentos e pela convivência com pessoas que foram primordiais para a construção deste estudo.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), por ser minha instituição formadora.

## RESUMO

Observando o ensino de Matemática, notamos que os alunos têm aversão à álgebra pelo seu caráter abstrato e pelo seu simbolismo. Assim, o principal agente para mudar essa realidade escolar é o docente, que pode utilizar subsídios metodológicos que promovam reflexões sobre conceitos matemáticos. Com isso, um dos recursos provindos da História da Matemática, que pode desencadear a discussão do pensamento algébrico, é o tratado *Līlāvātī*, escrito no século XII, por Bhāskarācārya. Desse modo, esta pesquisa tem como objetivo depreender as características do pensamento algébrico dos licenciandos em Matemática da FECLESC, que emergiram a partir do tratado *Līlāvātī* (1150), elaborado por Bhaskara II. Logo, esta pesquisa é de caráter qualitativo, bibliográfico e documental, ancorada pelas fases da Engenharia Didática, sendo que, na construção das atividades, utilizamos como fundamento as Unidades Básicas de Problemática (UBP) e, na análise e na compreensão dos dados, usamos, como suporte, a análise de conteúdo de Bardin (2016). Este trabalho foi desenvolvido com base na tradução de: *Lilawati: or a treatise on Arithmetic and Geometry*, edição de 1816, produzida por John Taylor, em que se constataram trechos que foram vinculados às Unidades Básicas de Problemática (UBP), visando explorar características do pensamento algébrico na formação inicial de professores. Diante disso, aplicamos essas UBP com licenciandos da Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central (FECLESC), Campus da Universidade Estadual do Ceará (UECE), em uma disciplina de História da Matemática, na qual observou-se que os estudantes mobilizaram características do pensamento algébrico, tais como: generalização, modelação, construção de significado, estabelecimento de relações e lidaram com o desconhecido. Ademais, através dessa ação, percebemos que os licenciandos tinham algumas dificuldades, que mereciam ser discutidas. Portanto, neste percurso acadêmico, foram notados, no tratado *Lilavati*, diversos temas que podem ser explorados na formação de professores; neste estudo, averiguamos que, por meio de um trecho, foram geradas discussões de um tema abrangente na Educação Básica, o pensamento algébrico, contribuindo para a formação de graduandos em Matemática, os quais tiveram a oportunidade de vivenciar atividades investigativas, que podem ser inseridas na sua futura prática docente.

**Palavras-chave:** Pensamento Algébrico. Formação de Licenciandos em Matemática. *Lilavati*. Matemática indiana.

## ABSTRACT

Observing the teaching of mathematics we note that students have algebra aversion for their abstract character and their symbolism. Thus, the main agent to change this school reality is the teacher, who can use methodological subsidies that promote reflections on mathematical concepts. Thus, one of the resources provided in the history of mathematics that can trigger the discourse of algebraic thinking is the Treaty *Līlāvātī*, written in the twelfth century, by Bhāskarācārya. Thus, this research aims to understand the characteristics of the algebraic thinking of math in FECLESC that emerged from the Treaty *Līlāvātī* (1150), elaborated by Bhaskara II. Thus, this research is qualitative, bibliographic and documentary, anchored by the phases of didactic engineering, and in the construction of activities we use the basic units of problematizations (UBP) and for the analysis and understanding of the data we use, as support, Bardin's content analysis (2016). This work is being developed based on the translation: *Lilawati: or Treatise on Arithmetic and Geometry*, 1816 edition, produced by John Taylor, where excerpts were noted that were linked to Basic Problem Units (UBP) to explore characteristics of algebraic thinking (UBP) in the initial training of teachers. Given this, we apply these UBP with graduates from the Faculty of Education, Sciences and Letters of the Central Sertão (FECLESC), Campus of the State University of Ceará (UECE), in a discipline of History of Mathematics, in which it was noted that students mobilized characteristics of algebraic thinking such as: generalization, modeling, meaning construction, establishment of relationships and dealt with the unknown. Moreover, through this action, we realize that undergraduates have some difficulties that deserve to be discussed. Therefore, in this academic path, it was noticed in the Treaty *Lilavati* several topics that can be explored in teacher education, in this study we found that through a stretch, discussions of a comprehensive theme in basic education were generated, algebraic thinking, contributing to the Training of undergraduates in mathematics, who had the opportunity to experience investigative activities that can be inserted in their future teaching practice.

**Keywords:** Algebraic thinking. Mathematics undergraduate formation. *Līlāvātī*. Indian mathematics.

## SUMÁRIO

|       |                                                                              |    |
|-------|------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1     | INTRODUÇÃO .....                                                             | 13 |
| 2     | CONHECENDO O TRATADO LILAVATI DE BHĀSKARĀCĀRYA .....                         | 21 |
| 2.1   | Bhāskarācārya e o Siddhāntaśiromani .....                                    | 21 |
| 2.2   | Līlāvātī e suas traduções .....                                              | 27 |
| 2.3   | A tradução de Līlāvātī por Taylor (1816) .....                               | 32 |
| 2.3.1 | <i>Parte I: Aritmética</i> .....                                             | 35 |
| 2.3.2 | <i>Parte II: Estudos Geométricos</i> .....                                   | 38 |
| 2.3.3 | <i>Parte III: Estudo da Kutaka</i> .....                                     | 40 |
| 2.3.4 | <i>Parte IV: Transposições de Figuras</i> .....                              | 40 |
| 3     | LĪLAVĀTĪ E O PENSAMENTO ALGÉBRICO .....                                      | 41 |
| 3.1   | Aspectos iniciais do pensamento algébrico .....                              | 41 |
| 3.2   | Estudo matemático da parte “um número presumido” de Lilavati .....           | 45 |
| 3.2.1 | <i>Número presumido</i> .....                                                | 46 |
| 3.2.2 | <i>Onde uma certa quantidade é conhecida</i> .....                           | 50 |
| 3.2.3 | <i>Onde há restos</i> .....                                                  | 52 |
| 3.2.4 | <i>Onde há a diferença</i> .....                                             | 57 |
| 3.2.5 | <i>Quando há a soma e a diferença</i> .....                                  | 58 |
| 3.2.6 | <i>Quando há a diferença dos quadrados</i> .....                             | 60 |
| 3.2.7 | <i>Sobre os quadrados</i> .....                                              | 62 |
| 3.3   | Possibilidades didáticas envolvendo Lilavati e o Pensamento Algébrico .....  | 67 |
| 4     | UNIDADES BÁSICAS DE PROBLEMATIZAÇÃO ALIADAS AO LILAVATI .....                | 70 |
| 4.1   | Aspectos iniciais das Unidades Básicas de Problematização .....              | 71 |
| 4.2   | UBP aliadas ao pensamento algébrico na obra Lilavati, de Bhāskarācārya ..... | 74 |
| 4.2.1 | <i>UBP 1 – Aspectos contextuais da cultura matemática indiana</i> .....      | 76 |
| 4.2.2 | <i>UBP 2: Bhāskarācārya: vida e obra</i> .....                               | 77 |
| 4.2.3 | <i>UBP 3: Lilavati e a tradução de Taylor (1816)</i> .....                   | 80 |
| 4.2.4 | <i>UBP 4: Līlāvātī e o número presumido</i> .....                            | 82 |
| 4.2.5 | <i>UBP 5: Os problemas referentes à primeira regra</i> .....                 | 83 |
| 4.2.6 | <i>UBP 6: Problemas de Lilavati na Matemática atual</i> .....                | 85 |

|         |                                                                                                      |     |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5       | PERCURSO METODOLÓGICO.....                                                                           | 87  |
| 5.1     | Preceitos da Engenharia Didática .....                                                               | 87  |
| 5.2     | Sobre o lócus da pesquisa .....                                                                      | 91  |
| 5.3     | Sobre os sujeitos da pesquisa .....                                                                  | 93  |
| 5.4     | Estrutura da aplicação da formação .....                                                             | 94  |
| 5.4.1   | <i>1º dia (02/06/2022): Introdução à formação</i> .....                                              | 96  |
| 5.4.2   | <i>2º dia (09/06/2022): Aspectos introdutórios da cultura matemática indiana do século XII</i> ..... | 98  |
| 5.4.3   | <i>3º dia (23/06/2022): A primeira regra e os problemas 1, 2 e 4</i> .....                           | 99  |
| 5.4.4   | <i>4º dia (30/06/2022): Comparando o método atual com a regra do número presumido</i> .....          | 100 |
| 5.4.5   | <i>5º dia (07/07/2022): Encerramento</i> .....                                                       | 101 |
| 5.5     | Sobre a coleta de dados.....                                                                         | 102 |
| 6       | ANÁLISE DO PENSAMENTO ALGÉBRICO A PARTIR DAS CONCEPÇÕES DOS LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA DA UECE ..    | 104 |
| 6.1     | Suporte Metodológico da Análise de Conteúdo.....                                                     | 104 |
| 6.2     | Analisando os resultados mediante as categorias .....                                                | 106 |
| 6.2.1   | <b>C1: Generalizar e modelar</b> .....                                                               | 110 |
| 6.2.1.1 | <i>Matematização da regra</i> .....                                                                  | 111 |
| 6.2.1.2 | <i>Considerações sobre a primeira categoria</i> .....                                                | 116 |
| 6.2.2   | <b>C2: Estabelecer relações e operar com o desconhecido</b> .....                                    | 117 |
| 6.2.2.1 | <i>Problema 1</i> .....                                                                              | 117 |
| 6.2.2.2 | <i>Problema 2</i> .....                                                                              | 121 |
| 6.2.2.3 | <i>Problema 4</i> .....                                                                              | 124 |
| 6.2.2.4 | <i>Considerações sobre a segunda categoria</i> .....                                                 | 127 |
| 6.2.3   | <b>C3: Construir significado</b> .....                                                               | 128 |
| 6.2.3.1 | <i>Considerações sobre a terceira categoria</i> .....                                                | 130 |
| 7       | CONSIDERAÇÕES FINAIS.....                                                                            | 131 |
|         | REFERÊNCIAS.....                                                                                     | 136 |
|         | APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO FORMATIVO .....                                                            | 141 |
|         | APÊNDICE B – SONDAGEM DIAGNÓSTICA .....                                                              | 143 |
|         | APÊNDICE C – CARTÃO DE RECURSO 1 .....                                                               | 144 |
|         | APÊNDICE D – CARTÃO DE ATIVIDADE 1.....                                                              | 145 |
|         | APÊNDICE E – CARTÃO DE RECURSO 2 .....                                                               | 146 |

|                                                            |            |
|------------------------------------------------------------|------------|
| <b>APÊNDICE F – CARTÃO DE ATIVIDADE 2 .....</b>            | <b>149</b> |
| <b>APÊNDICE G – CARTÃO DE RECURSO 3 .....</b>              | <b>150</b> |
| <b>APÊNDICE H – CARTÃO DE ATIVIDADE 3 .....</b>            | <b>152</b> |
| <b>APÊNDICE I – CARTÃO DE RECURSO 4.....</b>               | <b>153</b> |
| <b>APÊNDICE J – CARTÃO DE ATIVIDADE 4 .....</b>            | <b>156</b> |
| <b>APÊNDICE K – CARTÃO DE ATIVIDADE 5.....</b>             | <b>158</b> |
| <b>APÊNDICE L – CARTÃO DE ATIVIDADE 5.1 .....</b>          | <b>159</b> |
| <b>APÊNDICE M – QUESTIONÁRIO AVALIATIVO DO CURSO .....</b> | <b>160</b> |
| <b>ANEXO 1 – TEXTO REFERENTE À UBP 1 .....</b>             | <b>163</b> |
| <b>ANEXO 2 – PARECER DO CEP DO IFCE .....</b>              | <b>169</b> |
| <b>ANEXO 3 – PARECER DO CEP DA UECE .....</b>              | <b>172</b> |

## 1 INTRODUÇÃO

No início do século XXI, o ensino de Matemática do Ensino Fundamental é regido pelas unidades temáticas presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em que temos: Números; Grandezas e medidas; Probabilidade e estatística; Geometria e Álgebra. Esta última, a Álgebra, é contemplada no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), aparecendo na concepção 2 (empregar algoritmos, fórmulas e procedimentos básicos para a resolução de problemas envolvendo números inteiros) e na concepção 4 (formulação de hipóteses e da representação simbólica). Em relação a essas concepções, 18,2% dos estudantes brasileiros atingem a 2 e apenas 3,4% dos alunos chegam à 4 (KUHN; LIMA, 2021), o que se torna preocupante para o ensino de Matemática.

Essa realidade pode estar atrelada à ideia de como a Álgebra é ensinada na Educação Básica, voltada, majoritariamente, para seu caráter metódico, no qual os alunos apenas manipulam letras e números, através de regras apresentadas pelos professores, o que causa aversão nos estudantes ao se depararem com os conceitos algébricos (DALTO; BURIASCO, 2009). Nesse sentido, é necessário que o aluno desperte interesse por esses conteúdos, pois eles estão condicionados ao pensamento humano, que ajuda a resolver questões do cotidiano.

Dessa forma, a BNCC (BRASIL, 2018) aponta modos de ensinar a Álgebra, que devem ser buscados pelos professores na sala de aula. Sendo que o pensamento algébrico, neste documento, é tratado como finalidade da Álgebra, que acrescenta a importância de construí-lo durante a vida acadêmica, alegando que

A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos (BRASIL, 2018, p. 270).

Desse modo, quando abordamos o pensamento algébrico, classificamo-lo “como uma forma de estruturação do pensamento – passível de ser desenvolvida desde a Educação Infantil, percorrendo toda a escolaridade – que pressupõe a generalização, transpondo situações particulares a ideias gerais” (FERREIRA, 2017, p. 20-21).

Nessa direção de reflexão, há a necessidade de discutir, na formação de professores de Matemática, como ocorre a construção desse pensamento algébrico, já que o contato com ele permite ampliar e entender esse conjunto de saberes que constitui a Álgebra. Assim, é primordial que os alunos entendam não só como se realizam os cálculos, mas que concebam o porquê de isso acontecer e ainda interpretem a relação existente entre os símbolos (LINS; GIMENEZ, 1997).

Portanto, um dos principais agentes para dar significado à Álgebra e levar atividades que tenham o intuito de construção do pensamento algébrico é o professor de Matemática. Com vista a isso, é conveniente investir na formação de licenciandos, mostrando aos graduandos a compreensão de que “a Álgebra não se reduz a um instrumento técnico-formal que facilita a resolução de certos problemas. Ela é, também, uma forma específica de pensamento e de leitura do mundo” (FIORENTINI; FERNANDES; CRISTÓVÃO, 2005, p. 04).

Logo, a assimilação da importância da construção do pensamento algébrico pode ser estabelecida em vivências na formação de licenciandos em Matemática, promovendo momentos de reflexão, percebendo que “aprender Álgebra implica ser capaz de pensar algebricamente numa diversidade de situações, envolvendo relações, regularidades, variação e modelação” (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 10).

No que se refere à formação de futuros professores de Matemática, um campo provedor de recursos, que podem ser potencialmente didáticos para o estudo do pensamento algébrico, é a História da Matemática. Esta faz com que o professor discuta e repense as diversas faces da Álgebra em seu percurso histórico, entendendo a elaboração desses conceitos algébricos que hoje são apresentados nas graduações e na escola de Educação Básica.

Pensando em possibilidades para a sala de aula, procura-se, a partir de um documento histórico original<sup>1</sup>, traçar uma interface entre a história e o ensino de Matemática, desenvolvendo ações e produções que busquem contribuir com discussões na formação de professores, com o propósito de entender a construção do conhecimento matemático, através, inicialmente, de um diálogo entre historiadores e educadores matemáticos (SAITO, 2013).

---

<sup>1</sup> Podem ser cartas, tratados, monumentos, que tragam conhecimentos que possam ser investigados didaticamente (SAITO, 2014).

Por meio da problemática apresentada e da experiência como licenciada e docente da Educação Básica, em que percebemos as dificuldades dos alunos em pensar algebricamente, buscamos aprofundar as nossas discussões acadêmicas. Conhecemos, então, o Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM), no qual se discutem pesquisas<sup>2</sup> a partir de tratados históricos, produzindo recursos didáticos, promovendo uma interface entre história e ensino de Matemática. Dessa maneira, adentramos nele com o intuito de ver esse cenário frente ao pensamento algébrico.

Posteriormente, através desse espaço de diálogo e com base na experiência realizada em duas disciplinas: História da Matemática e Formação de Professores I e II, na Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual do Ceará (UECE) como aluna especial, foi possível conhecer alguns tratados históricos de origem hindu, que versam sobre conteúdos algébricos.

Isso porque, quando analisamos a história, constatamos que os hindus eram povos instalados na Índia e “foram hábeis aritméticos e deram contribuições significativas à álgebra” (EVES, 2011, p. 255). Entretanto, estudos das matemáticas, nessa região, ainda são poucos na academia, um dos motivos é a dificuldade de leitura na língua materna indiana e as traduções desses tratados são poucas no universo acadêmico (PLOFKER, 2008).

Dentre o material histórico analisado, encontramos o tratado *Līlāvātī*, de Bhāskarācārya, uma parte da obra *Siddhāntaśiromani*, escrita em 1150, na Índia, por Bhāskarācārya ou Bhaskara II <sup>3</sup>(1114-1185). Suas traduções são conservadas até os dias atuais, sendo *Līlāvātī* muito citado em livros clássicos de História da Matemática<sup>4</sup>, trazendo, em seu interior, problemas, em que pode ser explorado o pensamento algébrico, contribuindo para a construção de recursos didáticos.

Posto isso, os sete critérios elencados por Silva e Pereira (2021) nos ajudaram a verificar aspectos iniciais do *Līlāvātī*, a saber: qual material utilizar; qual a forma de utilizar o material; qual o objetivo da implementação na sala de aula; em que séries ou nível escolar pode-se aplicar; precisa-se fazer um tratamento didático<sup>5</sup>; quando

---

<sup>2</sup> Alves e Pereira (2020), Santos e Pereira (2020), Oliveira e Pereira (2020), Cesana e Saito (2020).

<sup>3</sup> Existiu outro Bhaskara, que viveu no século VII, sobre o qual será dado mais ênfase na seção posterior.

<sup>4</sup> Eves (2011), Boyer (2018).

<sup>5</sup> O tratamento didático se refere ao momento em que fazemos alterações no texto histórico, de modo que esse fique compreensível para o leitor, sempre tomando cuidado para não tirar o sentido do texto.

utilizar o texto original; qual a perspectiva historiográfica escolhida. Isso nos mostrou que podemos elencar elementos potencialmente didáticos para discutir o pensamento algébrico dos estudantes da Licenciatura em Matemática, buscando, assim, propor uma interface entre história e ensino de Matemática, evidenciada por Saito e Dias (2013).

Com a hipótese de ausência de pesquisas brasileiras abordando a tradução de *Līlāvātī*, utilizando-o como recurso didático para o ensino do pensamento algébrico na Licenciatura em Matemática, realizamos uma busca na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD)<sup>6</sup>, usando como descritor a palavra: *Lilavati*, resultando em apenas três trabalhos encontrados, mas estes não se relacionavam com a finalidade da pesquisa, visto que se tratava de temáticas relacionadas à Física, Medicina, entre outras. Contudo, ao digitar o nome do seu autor, ou seja, Bhaskara, encontramos 45 trabalhos, dos quais filtramos, pela leitura do título, do resumo e das palavras-chave, quatro estudos, que têm relação direta com o objeto de pesquisa aqui exposto, são eles: Castelo (2013), Costa (2016), Silva (2017) e Guedes (2019).

A pesquisa de Costa (2016) tem por intuito apresentar o desenvolvimento de alguns métodos clássicos de resolução das equações Lineares, Quadráticas, Cúbicas e Quárticas. Ao longo do seu texto, ele faz uma abordagem se referindo à *Līlāvātī* apenas citando-a como uma das obras mais conhecidas de Bhāskarācārya.

O estudo de Silva (2017) consiste na utilização da História da Equação do Segundo Grau através da História em Quadrinhos como material instrucional no ensino de Matemática, ela traz a lenda que é exposta na maioria dos livros de História da Matemática, que aponta para a motivação do nome e da escrita do tratado, sendo ele desenvolvido para a consolação da filha de Bhāskarācārya, *Līlāvātī*, que não conseguiu se casar por algumas fatalidades. A autora ainda constrói uma História em Quadrinhos (HQ) sobre a história da equação do 2º grau, mostrando os alunos viajando no tempo, aparecendo no casamento de *Līlāvātī* e descobrindo que o estudioso de Matemática resolvia essas expressões matemáticas por meio de versos. Destarte, ela conclui que as HQ são facilitadoras da aprendizagem.

Já Castelo (2013) aborda a equação do 2º grau em um contexto histórico, evidenciando métodos árabes, egípcios, mesopotâmios (babilônios), gregos, hindus, chineses e europeus. Quando se remete aos hindus, ele menciona *Lilavati*, em uma

---

<sup>6</sup> A pesquisa na BDTD aconteceu de 01 a 15 de agosto de 2021.

parte da pesquisa dedicada a Bhāskarācārya, na qual expõe alguns dos seus conteúdos em uma visão presentista<sup>7</sup>, trazendo a lenda que envolve a escolha do nome do tratado.

Por fim, Guedes (2019) investiga as contribuições de Bhāskarācārya no tocante à resolução da equação quadrática, mostrando métodos de várias civilizações, aparecendo a hindu, em que ele apresenta Līlāvatī sucintamente, focando em quatro de seus versos: 64, 65, 67, 68, que se referem à temática discutida pelo autor.

Nesse contexto, ao observarmos as produções acadêmicas supracitadas, notamos escritas concisas, sem um estudo que vincule Lilavati a uma proposta didática para a formação do professor de Matemática, fazendo uma relação com a construção do pensamento algébrico. Além disso, percebemos que as pesquisas não abordam uma investigação detalhada de aspectos contextuais, historiográficos e epistemológicos envolvendo os versos/problemas encontrados no tratado.

Como forma de uma coleta de estudos mais abrangente, realizamos uma busca no Portal de Periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), também conhecido como Comunidade Acadêmica Federada (CAFe), colocando as palavras-chave: Lilavati e Bhaskara. No que concerne à palavra-chave Lilavati, encontramos 416 artigos no período de 2000 a 2021. Desses, apenas 6 estavam interligados com a nossa pesquisa, sendo que três são artigos nacionais e três artigos internacionais, a saber: Raina (2001); Wellesley e Peters (2008); Ramaswamy e Godbole (2009); Gonzélen-Tejero, Parra e Padilla (2011); Silva, Silva e Pereira (2018); Silva (2017).

Depois de uma leitura dessas investigações, notamos que Silva (2017), Gonzélen-Tejero, Parra e Padilla (2011) são sucintos ao abordarem Lilavati, sempre discorrendo sobre a obra atrelada ao seu autor, Bhāskarācārya, citando alguns problemas que estão nesse tratado, mas não explorando a construção do conhecimento daquela época.

O estudo de Silva, Silva e Pereira (2018) propõe uma atividade para licenciandos em Matemática, investigando somente um verso de Līlāvatī, sugerindo que os alunos reflitam sobre uma regra e um problema expostos por Bhaskara II, concluindo que a maior parte dos discentes gostaram da utilização da fonte escolhida

---

<sup>7</sup> Olhar para a Matemática do passado com a intenção de encontrar a Matemática difundida atualmente.

em sala de aula.

Em um curto artigo de revista, Ramaswamy e Godbole (2009) abordam o tratado e as teorias que envolvem seu nome, trazendo possíveis ideias de por que “Līlāvātī”. Assim, exprimem a ideia de que poderia ser o nome de sua filha ou mesmo de sua esposa, de sua aluna ou simplesmente ter sido uma vontade de Bhaskara II dedicar seus problemas matemáticos para uma mulher.

A pesquisa de Raina (2001) traz um breve comentário sobre Līlāvātī, filha de Bhaskara II, falando de sua importância na Índia como estudiosa de Matemática, citando o tratado ao qual o seu nome foi atribuído. Posteriormente, ela afirma que existe uma comunidade de mulheres: Luzes das Filhas de Lilavati, que buscam difundir nomes de indianas que se destacaram nas ciências, engenharias e Matemática.

Nessa conjuntura, ao analisarmos esses trabalhos, notamos que eles mostram novamente a ausência da associação do tratado Lilavati com a discussão do pensamento algébrico. Sendo que alguns deles têm o caráter histórico, revelando curiosidades sobre Lilavati, que não foram interligadas a recursos didáticos. Entretanto, ressaltamos que Silva, Silva e Pereira (2018) exploraram uma atividade com os licenciandos, porém não exploraram a parte contextual e historiográfica envolvida nesse tratado.

Realizando a busca pela nossa segunda palavra-chave Bhaskara, foi preciso conectá-la à primeira adicionando o conectivo AND e a palavra matemática, visto que, ao colocarmos somente a primeira, no CAFe, apareceram 6107 trabalhos, dos quais muitos se referiam ao autor Bhaskar, que tem trabalhos sobre Medicina. Dessa maneira, restaram 102 trabalhos, sendo 30 nacionais e 72 internacionais. Nesse cenário, apenas um citava Lilavati e se relacionava com a nossa pesquisa, todavia, já foi apresentado acima, sendo o artigo de Silva (2017).

Portanto, é perceptível que os trabalhos descritos anteriormente possuem características distintas, que, em sua maioria, não utilizam a fonte original do tratado Lilavati em seus estudos. Também são pouco explorados aspectos contextuais, historiográficos e epistemológicos da época e do tratado de Bhāskarācārya, enfocando apenas a biografia do autor e a lenda que envolve sua obra. Isso se reflete nas propostas de atividades que visam reproduzir os métodos e os conceitos expostos por Bhāskarācārya, não promovendo uma reflexão de como esses foram constituídos.

Outro ponto é a investigação reduzida dessa obra, com vista a explorar o

pensamento algébrico presente nas soluções e nos problemas com licenciandos de Matemática. Dessa forma, percebemos que ainda é necessário um estudo que explane o tratado *Līlāvātī* como uma fonte histórica na interface entre história e ensino de Matemática, promovendo um diálogo sobre o pensamento algébrico na formação de futuros professores de Matemática.

Diante desse contexto, esse relatório dissertativo tenciona responder à seguinte pergunta diretriz: Que características do pensamento algébrico podem emergir do tratado *Lilavati* (1150), elaborado por Bhāskarācārya, na formação de licenciandos em Matemática da FECLESC-UECE?

Para responder a essa indagação, foi elaborado o objetivo geral, que consiste em: compreender as características do pensamento algébrico dos licenciandos em Matemática da FECLESC, que emergiram a partir do tratado *Līlāvātī* (1150), elaborado por Bhaskara II.

Logo, temos como objetivos específicos: conhecer o tratado *Lilavati*, com base em suas traduções, evidenciando aspectos contextuais do século XII; expressar a relação dos conceitos matemáticos presentes na parte do número presumido de *Lilavati*, com o desenvolvimento do pensamento algébrico; propor atividades investigativas com base nas Unidades Básicas de Problematização (UBP) para a promoção de uma reflexão sobre as características do pensamento algébrico, tendo como suporte o *Lilavati*; discutir as características do pensamento algébrico oriundas da experiência com os licenciandos da FECLESC-UECE sobre o *Lilavati*.

Para a concretização desses objetivos, a pesquisa segue os preceitos de uma pesquisa qualitativa, com caráter descritivo, guiada pelas fases da Engenharia Didática, que são: as análises prévias ou preliminares, a análise *a priori*, a experimentação, a análise *a posteriori* e a validação.

Nas análises prévias ou preliminares, utilizamos como base uma pesquisa bibliográfica e documental. Na análise *a priori*, foram delineadas atividades investigativas com apoio nos dados colhidos na etapa anterior, fundamentadas nas Unidades Básicas de Problematização (UBP), propostas por Miguel e Mendes (2021). Posteriormente, na experimentação, foi arquitetado um curso de formação para licenciandos em Matemática. Na análise *a posteriori* e na validação, investigamos os dados coletados, utilizando as categorias elaboradas com base na análise de conteúdo, proposta por Bardin (2016).

Posto isso, esta pesquisa foi dividida em sete seções. Na primeira,

apresentamos aspectos iniciais da nossa pesquisa, expondo a problemática, a justificativa, a pergunta diretriz, os objetivos. Na segunda, foram expostos aspectos contextuais e historiográficos do tratado *Līlāvātī*, com o intuito de mostrar um possível contexto no qual esse documento estava inserido, que emergiram da leitura dessa obra e, principalmente, dos seus problemas. Por fim, fizemos a comparação das versões encontradas, com uma descrição da tradução que foi utilizada nesse capítulo.

Na terceira, discutimos, a princípio, conceitos iniciais sobre o pensamento algébrico. Em seguida, exploramos e detalhamos o tópico “um número presumido”, da parte 1 de *Lilavati*, apresentando conceitos matemáticos presentes nessa parte e situações que podem desencadear características do pensamento algébrico.

Na quarta, primeiramente, fizemos uma breve discussão das Unidades Básicas de Problematização (UBP). Depois, mostramos seis UBP, que foram desenvolvidas com base no trecho dedicado ao número presumido em *Lilavati*, visando à exploração do pensamento algébrico dos licenciandos.

Na quinta seção, apresentamos os aspectos metodológicos. Com isso, fizemos uma breve explanação da Engenharia Didática e do que foi desenvolvido em cada uma de suas fases. Em seguida, dissertamos sobre o lócus, os sujeitos, a formação dos licenciandos e a coleta de dados, que foram subsídios para a realização desta investigação.

Na sexta seção, expomos a análise de conteúdo de Bardin (2016), apontando as categorias que foram criadas para a discussão dos dados colhidos. Adiante, dedica-se à exposição das atividades que foram escolhidas para análise e finaliza-se com o debate das ações e dos escritos das equipes.

Por fim, a sétima seção traz as nossas conclusões sobre este trabalho, que permeou dois anos de jornada acadêmica, refletindo sobre esse período e trazendo a importância deste estudo na formação dos graduandos em Matemática, bem como as dificuldades perpassadas.

## 2 CONHECENDO O TRATADO LILAVATI DE BHĀSKARĀCĀRYA

A Índia do século XII foi marcada pela agricultura, pelas manufaturas e pelo comércio. Nesse contexto, a Matemática da época é composta por problemas práticos, que envolvem a venda de ouro, o cultivo de grãos, a criação de animais (PLOFKER, 2008). Fazendo parte dos estudiosos e dos escritores dessa época, temos Bhaskara II ou Bhāskarācārya, que foi astrônomo e astrólogo e viveu na Índia entre os anos de 1114 e 1185. Este deixou escritos que circulam no mundo acadêmico, os quais abordam diferentes temas da Matemática, que, atualmente, encaixam-se na Aritmética, na Álgebra e na Geometria, servindo de base para o entendimento de conceitos que circulavam na Índia do século XII.

Então, neste capítulo, vamos percorrer, primeiramente, sobre Bhāskarācārya e sua obra Siddhāntaśiromani, um compilado de obras, em que o tratado Lilavati está contido. Em seguida, detalhamos as três traduções encontradas na versão inglesa, mostrando seus aspectos introdutórios e ainda seus conteúdos, a fim de percebermos semelhanças e divergências desses textos. Por último, apresentamos a tradução que será utilizada nesta investigação, fazendo uma descrição das suas partes, para que o leitor compreenda quais conceitos matemáticos o tratado Lilavati possui.

### 2.1 Bhāskarācārya e o Siddhāntaśiromani

Bhāskarācārya, também conhecido como Bhaskara II, foi um estudioso da Matemática hindu, que viveu no século XII. Seus trabalhos são confundidos com os feitos deixados por Bhaskara I<sup>8</sup>, que, de acordo com Datta (1930), viveu no século VI, sendo mencionado como adepto de Aryabhata<sup>9</sup>, pois fez valiosos comentários sobre o tratado Aryabhatiya, que foi elaborado por Aryabhata.

Bhāskarācārya ou Bhaskara II foi um astrônomo e astrólogo hindu, seu nascimento data do ano de 1114. O local em que ele residiu ainda é analisado por pesquisadores. No que se refere a essa temática, Patwardhan, Naimpally e Singh (2006) citam que ele, provavelmente, viveu em Vijjalavida, porém não encontraram sua localização exata na Índia, assim, os investigadores discutem algumas cidades,

---

<sup>8</sup> “Esse personagem é completamente desconhecido e chamado, frequentemente de Bhaskara I, para distingui-lo do outro Bhaskara, mais famoso, que viveu no século XII” (ROQUE, 2012, p. 238).

<sup>9</sup> Foi também um astrônomo que viveu no século V e nasceu próximo “da atual Patna, junto ao Ganges. Escreveu um livro de astronomia intitulado Āryabhatiya cujo terceiro capítulo se dedica à matemática” (EVES, 2011, p. 250-251).

que são possíveis, elas têm em comum se situarem ao norte da Índia. Eves (2011), por sua vez, alega que Bhāskarācārya morava em Ujjain (Figura 1), cidade situada nessa mesma região.

**Figura 1- Mapa antigo da Índia (500-1150)**



Fonte: Eves (2011, p. 252).

Nessa conjuntura, sobre a região norte da Índia, Plofker (2008, p. 6, tradução nossa) afirma que, “[...] no norte do Sul da Ásia, [...] há um longo histórico de comunidades assentadas com animais domesticados e grãos da agricultura”. E ainda acrescenta que as culturas passadas, nessa região, apresentavam “agricultura, arquitetura, manufatura e comércio amplamente desenvolvidos” (PLOFKER, 2008, p. 7, tradução nossa). Todavia, ressaltamos que sobre Ujjain, Plofker (2008) pondera que

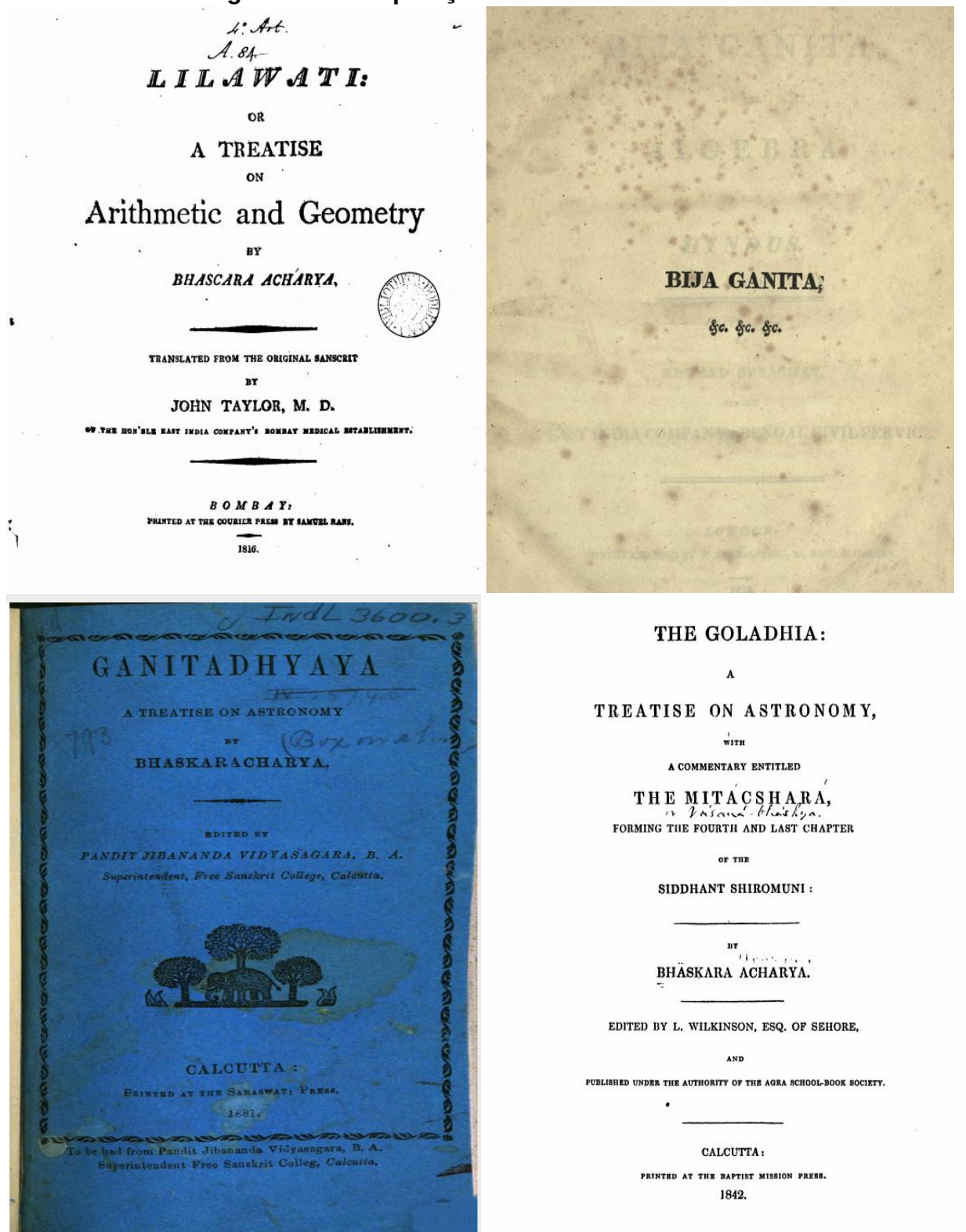
Da mesma forma, a cidade de Ujjain em Madhya Pradesh, que em textos astronômicos é tipicamente dito estar na linha de longitude zero ou meridiano principal, às vezes é acusada de ter um antigo observatório. Mas não temos nenhum registro ou descrição detalhada de tal instituição e nenhuma evidência confiável que apoie as lendas modernas de que um ou outro matemático medieval famoso foi o astrônomo chefe lá (PLOFKER, 2008, p.182, tradução nossa).

Com isso, não podemos afirmar, com exatidão, onde o estudioso nasceu, mas tudo indica que foi na região norte da Índia. Sobre a linhagem familiar de Bhāskarācārya, Patwardhan, Nainpally e Singh (2006, p. xvi) pontuam que ele pertencia à linhagem Sandylia e que nove de suas gerações são encontradas registradas em uma rocha, a saber: Trivikrama, Bhaskarabhatta, Govinda, Prabhakara, Monoratha, Mahesvara, Bhaskara, Laksmidhara, Cangadeva. Informamos, ademais, que, conforme esses autores, Mahesvara foi um astrólogo e pai de Bhaskara, sendo responsável pela educação do filho.

Sobre os textos de Bhāskarācārya, Roque (2012, p. 239) salienta que ele foi “autor dos livros mais populares de aritmética e álgebra no século XII, que, presume-se, foram livros-texto voltados para o ensino. As evidências abundantes sobre os trabalhos desse astrônomo, que nasceu em 1114, indicam que eram bastante influentes na época”.

Uma das obras, que se conservou ao longo dos séculos e é atribuída a Bhāskarācārya, é o Siddhāntaśiromani, que foi dividido em quatro partes, sendo elas: Līlavātī, Bījaganita, Golādhyāya e Gaṇitādhyāya. Josefñ (2016) frisa que Bhāskarācārya ficou muito conhecido por causa desse compilado de obras, que foi escrito em 1150, quando ele tinha 36 anos. A seguir, visualiza-se, na Figura 2, o frontispício da tradução dos quatros tratados mencionados neste parágrafo:

Figura 2 – Composição do Siddhāntaśiromani



Fonte: Adaptado pela autora (2022).

Siddhāntaśiromani, segundo alguns autores<sup>10</sup>, é organizado começando por Līlāvātī, seguido do Bījaganita e do Gaṇitādhyāya e finalizado pelo Golādhya. Esse compilado de obras foi estudado por matemáticos indianos, tendo Lilavati mais traduções, registrando uso, no século XX, em escolas da Índia (PATWARDHAN; NAIMPALLY; SINGH, 2006).

Līlāvātī é colocado como uma introdução aos assuntos da Astronomia, pois, como pode ser observado na Figura 2, os dois últimos livros versam sobre essa área do conhecimento. Textos tradicionais, como os de Boyer (2011) e de Josefh (2016), trazem uma história sobre o porquê de Bhāskarācārya dar o título “Līlāvātī” a esse tratado, dizendo o seguinte:

O nome do título é o da filha de Bhaskara que, segundo a lenda, perdeu a oportunidade de se casar por causa da confiança de seu pai em suas previsões astrológicas. Bhaskara tinha calculado que sua filha só poderia se casar de modo propício em uma hora determinada de um dia dado. No dia que deveria ser o de seu casamento, a jovem ansiosa estava debruçada sobre o relógio de água quando se aproximava a hora do casamento, quando uma pérola em seu cabelo caiu, sem ser observada, e deteve o fluxo de água. Antes que o acidente fosse notado, a hora propícia passara. Para consolar a infeliz moça, o pai deu seu nome ao livro que estamos descrevendo (BOYER, 2011, p. 161).

Para mais, nota-se que Līlāvātī foi usado por muitos anos em escolas da Índia, o que nos faz refletir sobre o seu valor para registrar o conhecimento e repassar o aprendizado daquela época. Patwardhan, Naimpally e Singh (2006) alegam que:

O Līlavātī é um livro de Aritmética escrito no século XII. Foi usado na Índia como livro didático por muitos séculos. Mesmo agora, ele está sendo usado em escolas de sânscrito em alguns estados. As técnicas para a solução de problemas são simples e fáceis de usar e, além disso, há muitas informações interessantes sobre os problemas aqui apresentados (PATWARDHAN, NAIMPALLY E SINGH, 2006, p. xv-xvi, tradução nossa).

Nessa perspectiva, percebe-se que o conteúdo de Līlavātī ainda é aplicado, no século XXI, na Índia, o que nos revela a significância desse documento escrito no século XII. Līlāvātī expõe diversos assuntos relativos à Matemática, conta com definições, métodos para usar em resoluções e 119 problemas para o leitor aplicar o que aprendeu. O livro não traz demonstrações, contendo apenas uma Matemática que ensina como fazer, dando a ideia de que Bhaskara II estava empenhado, com esse tratado, em facilitar a vida do seu público-alvo.

---

<sup>10</sup> Patwardhan, Naimpally e Singh (2006); Josefh (2016).

Bījaganita é dedicado à Álgebra, mais notoriamente, dedicado ao estudo das equações. Sobre sua importância, Patwardhan, Naimpally e Singh (2006, p. xx) afirmam que a “Álgebra de Bhaskaracarya também é um excelente livro sobre o qual vários comentários foram escritos em várias línguas”. Podemos perceber o conteúdo desse livro em Roque (2012), ao dizer que

No Bija Ganita, que quer dizer “semente do cálculo”, tais regras são sucedidas por algoritmos para resolver problemas envolvendo quantidades desconhecidas. As regras são expressas em versos, mas são ilustradas por exemplos e contêm um comentário do próprio autor, visando explicá-las. Tais comentários fornecem enunciados numéricos e métodos retóricos de solução de modo padronizado para os problemas dados nos exemplos (ROQUE, 2012, p. 239).

Gaṇitādhyāya trata de cálculos e de algoritmos em Astronomia e possui partes que apresentam a média de longitudes, a direção, o local, os horários, os movimentos planetários etc. (RAMASUBRAMANIAN *et al.*, 2019). Dessa maneira, Josefh (2016, p. 291, tradução nossa) acrescenta que o texto “contém uma discussão de métodos computacionais para calcular medidas padrão, como movimentos médios, movimentos verdadeiros, eclipses solares e lunares que formaram o modelo padrão de trabalho astronômico daquele período”.

O Golādhyāya aborda definições e questões que envolvem a natureza da terra, a colocação das estrelas e dos planetas ao seu redor, contemplando os princípios e os detalhes teóricos desses cálculos (RAMASUBRAMANIAN *et al.*, 2019). Com isso, o tratado relata assuntos astronômicos, visto que “Goladhyaya contém assuntos relacionados à gola (ou à esfera), incluindo a forma da esfera e sua relevância para a terra esférica. Esta discussão é interposta com uma representação poética da majestade das estações [...]” (JOSEFH, 2016, p. 291, tradução nossa).

Nesse sentido, nota-se a Astronomia matemática presente nesse período, ela era crescente na tradição indiana, fazendo parte dos textos, contribuindo para o avanço significativo da escrita de tratados contendo matemáticas. Nesse contexto, indo ao encontro da ideia de Josefh (2016), enfatiza-se que os tratados antigos indianos foram sendo reorganizados, a fim de uma “estrutura mais uniforme para organizar o conhecimento matemático” (PLOFKER, 2008, p. 173).

Como Līlāvātī é o documento base para a realização desta pesquisa, foi feito, na seção posterior, um estudo sobre as traduções, na versão inglesa, de Līlāvātī,

trazendo suas características em relação à sua composição, para que entedamos como foram organizadas.

## 2.2 Līlāvatī e suas traduções

No decorrer desta pesquisa, não encontramos o tratado Līlāvatī original. Desse modo, decidimos estudar as traduções dessa obra. Assim, ressaltamos que como se tratam de traduções do hindu para o inglês, a fidelidade linguística também deve ser ponderada. Segundo Eco (2007):

O conceito de fidelidade tem a ver com a persuasão de que a tradução é uma das formas da interpretação e que deve sempre visar, embora partindo da sensibilidade e da cultura do leitor, reencontrar não digo a intenção do autor, mas a intenção do texto, aquilo que o texto diz ou sugere em relação à língua em que é expresso e ao contexto cultural em que nasceu (ECO, 2007, p. 17).

Dessa maneira, ao investigar esses textos, devemos observar as singularidades de cada tradução. Por isso, optamos por buscar traduções para a língua inglesa<sup>11</sup>, encontrando três traduções, em que as informações referentes a elas podem ser visualizadas a seguir:

- Lilawati: or a treatise on Arithmetic and Geometry, traduzida por John Taylor, em 1816.
- Lilavati, traduzida por Henri Thomas Colebrooke, com notas de Haran Chandra Banerji, em 1967.
- Līlāvatī of Bhāskarācārya: A Treatise of Mathematics of Vedic Tradition, traduzida por Krishnaji Shankara Patwardhan, Somashekhara Amrita Naimpally e Shyam Lal Singh, em 2001.

Destarte, Taylor (1816) apresenta uma breve introdução sobre Bhāskarācārya, relacionando-o com a escrita de seus tratados, alegando que “ele escreveu vários trabalhos astronômicos e matemáticos, os mais célebres são Lilawati, BijaGannita e Siromani” (TAYLOR, 1816, p. 1).

Sobre a versão de Taylor (1816), ele afirma que modificou a tradução para uma melhor compreensão dos leitores, esse fato é perceptível quando Taylor (1816, p. 5)

---

<sup>11</sup> Outras traduções em outras línguas foram encontradas, mas as deixaremos para estudos futuros.

argumenta que “as regras em Lilawati<sup>12</sup> são apresentadas em um estilo tão elíptico e obscuro, que muitas vezes seriam ininteligíveis se o significado não tivesse sido expandido na tradução”. Diante disso, o tradutor expõe a diversidade de conteúdos presentes em Līlāvātī, que podem ser visualizados no Quadro 1, a seguir:

**Quadro 1 – Divisão do Līlāvātī por Taylor (1816)**

| PARTE | CONTEÚDO                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| I     | (1) Tabelas de dinheiro, pesos, etc.; (2) Adição e Subtração; (3) Multiplicação; (4) Divisão; (5) O quadrado; (6) Raiz quadrada; (7) Cubo; (8) Raiz cúbica; (9) Frações; (10) O Efeito da Cifra; (11) Inversão; (12) Um número presumido; (13) Multiplicador da Raiz; (14) Regra das três quantidades; (15) Regras de Cinco, etc. quantidades; (16) Regra de trocas; (17) Quantidades mistas; (18) Comprando e vendendo; (19) Computando ouro; (20) Permutação; (21) Progressão. |
| II    | <b>CAPÍTULO I:</b> Operações Geométricas.<br><b>CAPÍTULO II:</b> <b>Seção I</b> – Dos círculos; <b>Seção II</b> – De libras; <b>Seção III</b> – Dos tijolos ou pedras em parede; <b>Seção IV</b> – Do Corte de madeiras, etc.; <b>Seção V</b> – De montes; <b>Seção VI</b> – Das sombras.                                                                                                                                                                                        |
| III   | <b>Seção I</b> – Do <i>Kutaka</i> ; <b>Seção II</b> - Do <i>Sthira</i> ou <i>Kutaka</i> Fixo; <b>Seção III</b> – Do <i>Sanslista Kutaka</i> .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| IV    | Das transposições; Apêndice.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |

Fonte: Taylor (1816, s.p).

No Quadro 1, percebemos que Taylor (1816) faz uma divisão por áreas da Matemática, as quais envolvem Aritmética, Geometria e Álgebra. No entanto, é possível notar que os próprios títulos dessas partes estão atrelados a aspectos do contexto indiano, como, por exemplo, na parte I, temos: “comprando e vendendo”, “computando ouro” e, na parte II, aparecem as sombras, lagoas.

<sup>12</sup> Taylor (1816) utiliza a nomenclatura Lilawati, mas nós utilizaremos Lilavati, exceto em casos de citações do autor.

Ao longo da tradução, Taylor (1816) vai apresentando comentários sobre os registros de Bhāskarācārya, explicando algumas coisas mais profundamente pela Matemática atual e esclarecendo alguns termos de origem indiana utilizados pelo autor, como é o caso da Kutaka, que aparece no sumário, na parte III, que, conforme o tradutor, refere-se a termos desconhecidos em problemas presentes no tratado. Por fim, Taylor (1816) traz um anexo com figuras presentes em Līlāvātī, que ajudam a entender os problemas concernentes à Geometria.

A tradução de Colebrooke (1967) tem uma introdução sucinta, que foi escrita por Haran Chandra Banerji, retratando, brevemente, o autor e algumas de suas obras, alegando que esse texto “é uma edição da tradução de Colebrooke do Līlāvātī, uma obra-prima da matemática hindu, escrita por Bhāskarācārya, um célebre matemático e astrônomo que viveu no século XII da era cristã. A obra constitui a primeira parte de uma obra maior do autor chamada Sidhanta-siromani” (BANERJI *Apud* COLEBROOKE, 1967, p. 05).

Sobre a sua tradução, o autor deixa claro que a divisão que ele apresenta não é aquela trazida por Bhāskarācārya. Isso pode ser constatado quando Colebrooke (1967, p. vi) afirma que, “por conveniência de reforço, o Lilāvati em sânscrito é impresso no final, com divisões em capítulos e seções correspondentes àquelas feitas na tradução. Nenhuma dessas divisões foi feita por Bhaskara”.

Na primeira parte dessa versão, o autor mostra um Līlāvātī comentado, não só por ele, mas também por outros estudiosos que ele julga como os melhores que já haviam investigado essa obra. Em seguida, expõe uma separação em treze capítulos, que pode ser visualizada no Quadro 2, a seguir:

**Quadro 2 – Divisão do Līlāvātī por Colebrooke (1967)**

| Capítulo | Conteúdo                                                                                                                                                                                         |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| I        | Introdução.                                                                                                                                                                                      |
| II       | Seção I – Invocação; Seção II – Oito operações da Aritmética; Seção III – Frações; Seção IV – Cifra.                                                                                             |
| III      | Regras Diversas: Seção I – Inversão; Seção II – Suposição; Seção III – Regra de concordância; Seção IV – Problema dos quadrados; Seção V – Regras de assimilação; Seção VI – Regra de Proporção. |

|      |                                                                                                                                                                                        |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| IV   | Investigação de Mistura: Seção I – Interesse; Seção II – Regra – meia estrofe; Seção III – Compra e Venda; Seção IV – Regra; Seção V – Alegação; Seção VI – Permutações e Combinações. |
| V    | Progressões: Seção I – Progressão Aritmética; Seção II – Progressão Geométrica.                                                                                                        |
| VI   | Figuras planas.                                                                                                                                                                        |
| VII  | Escavações e Conteúdos de Sólidos.                                                                                                                                                     |
| VIII | Pilhas.                                                                                                                                                                                |
| IX   | Montanhas.                                                                                                                                                                             |
| X    | Monte de grãos.                                                                                                                                                                        |
| XI   | Sombra de um Gnômon.                                                                                                                                                                   |
| XII  | Pulverizador.                                                                                                                                                                          |
| XIII | Combinações de dígitos.                                                                                                                                                                |

Fonte: Colebrooke (1967, s.p).

Ao longo dos capítulos, Colebrooke (1967) vai tecendo comentários, que se encontram nas notas de rodapé, explicando alguns métodos expostos por Bhāskarācārya, de modo a torná-los mais compreensíveis, exibindo também provas de regras propostas no tratado. Dessa maneira, o tradutor não apresenta nenhum anexo na tradução, apenas traz em seu interior algumas figuras.

Por fim, Patwardhan, Naimpally e Singh (2006) é uma tradução da obra comentada: *Līlāvātī Punardarśana* de Narayana H. Phadke, de 1971, que era escrita em Marhātī<sup>13</sup>. Os autores, no começo do livro, trazem várias seções, as seções introdutórias, nas quais mostram os prefácios dos tradutores, a vida de Bhaskaracarya, com informações sobre a sua localização, a sua linhagem familiar, a sua educação e os seus trabalhos.

Posteriormente, eles abordam conteúdos do *Līlāvātī* em 34 capítulos, a saber: (1) Definições e Tabelas; (2) Valores posicionais de dígitos; (3) Adição e Subtração; (4) Métodos de multiplicação; (5) Divisão; (6) Métodos de Encontrar Quadrados; (7) Raiz quadrada; (8) Método para Encontrar o Cubo; (9) Raízes cúbicas; (10) Oito Operações sobre Frações; (11) Adição e Subtração de Frações; (12) Multiplicação de Frações; (13) Divisão de Frações; (14) Quadrados, Cubos, Raízes Quadradas e

<sup>13</sup> Língua falada predominantemente em Maharashtra, estado situado na Índia

Cubas de Frações; (15) Oito Regras Relativas ao Zero; (16) Processo Reverso; (17) Para encontrar uma quantidade desconhecida; (18) Método de Transição; (19) Transição Quadrada; (20) Equação quadrática; (21) A Regra de Três; (22) Proporção Inversa; (23) A Regra dos Cinco; (24) Regras para Permuta; (25) Juros Simples; (26) Combinações; (27) Progressões (Séries); (28) Mensuração; (29) Volume; (30) Corte de Madeira; (31) Volume de uma pilha de grãos; (32) Sombras; (33) Pulverização; (34) Concatenação (Permutações, Partições etc.).

Sobre a organização do *Līlāvātī*, evidenciada por Patwardhan, Naimpally e Singh (2006), percebe-se que os autores tiveram a liberdade de modificá-la quando acharam necessário, pois Naimpally afirma: “analisei sua versão, comparei com a original e fiz muitas alterações. Tomei a liberdade de encurtar ou simplificar algumas derivações/provas e omitir aquelas que são encontradas nos livros didáticos atuais” (NAIMPALLY . \_\_\_\_ . Prefácio. *In*: PATWARDHAN, NAIMPALLY SINGH, 2006, p. xiv).

Logo, observa-se uma organização por áreas de conhecimentos, que possuímos atualmente, começando com os conceitos aritméticos, em seguida, algébricos e, por fim, geométricos. Encerrando a tradução, os autores não apresentam um anexo, eles expõem dois índices, um dos versos e outro de assuntos, deixando as figuras ao longo do texto.

Dessa forma, as três traduções direcionam para interpretações diferentes de cada tradutor, assim, são perceptíveis mudanças de divisões de acordo com o avançar dos anos de cada tradução. Como a de 2006 é mais atual, nota-se uma semelhança com as divisões dos livros didáticos que temos no século XXI. Constatamos isso na linguagem abordada nos tratados, no Quadro 3, apontamos o mesmo problema de *Lilavati* nas três traduções citadas:

**Quadro 3 – Evolução dos problemas de *Līlāvātī***

| Versão de 1816                                                                                                        | Versão de 1967                                                                                                                                                     | Versão de 2001                                                                                                                                                            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Um terço de uma coleção de belos nenúfares é oferecido a Mahadev, um quinto a Huri, um sexto ao Sol, um quarto a Devi | De um monte de puras flores de lótus, uma terceira parte, uma quinta e uma sexta foram oferecidas respectivamente aos deuses Siva, Vishnu e o Sol; e um quarto foi | De um monte de lótus, $\frac{1}{3}$ rd são oferecidos a Lord Śiva, $\frac{1}{5}$ para Lorde Visnu, $\frac{1}{6}$ até o Sol, $\frac{1}{4}$ th para a deusa. Os 6 restantes |

|                                                                                                |                                                                                                                                |                                                                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| e seis que sobram são apresentados ao mestre espiritual. Requer o número inteiro de nenúfares. | apresentado a Bhavani. Os seis lótus restantes foram dados ao venerável preceptor. Diga rapidamente o número inteiro de lótus. | foram oferecidos ao guru. Encontre rapidamente o número de lótus no grupo. |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Verifica-se que o mesmo problema, na versão de cada uma das traduções, vem escrito diferente e a primeira versão conserva os nomes dos deuses antigos, enquanto as últimas já os transformam em nomes utilizados na Índia atualmente. Também, na versão de 2001, vê-se uma linguagem matemática simbólica nas frações, enquanto nas outras é apresentada uma linguagem retórica.

À vista disso, para a pesquisa desenvolvida, escolhemos a versão de Taylor (1816), pois consideramos que, por ser mais antiga, conservou mais aspectos contextuais de origem indiana e ainda sustentou características próprias do século, que é o caso da linguagem, possibilitando uma maior reflexão dos conceitos que serão explorados nesta investigação, por isso, ela vai ser detalhada na seção seguinte.

### 2.3 A tradução de *Līlāvātī* por Taylor (1816)

A tradução *Lilawati: or a treatise on Arithmetic and Geometry* foi escrita por John Taylor<sup>14</sup> e foi publicada em Bombay<sup>15</sup>, cidade da Índia, em 1816. A edição que está sendo utilizada, neste texto dissertativo, encontra-se no acervo da coleção da biblioteca de Cambridge, que foi feita a partir de um trabalho colaborativo com *Royal Asiatic Society da Grain Britain e Irlanda*, isso é perceptível no trecho a seguir:

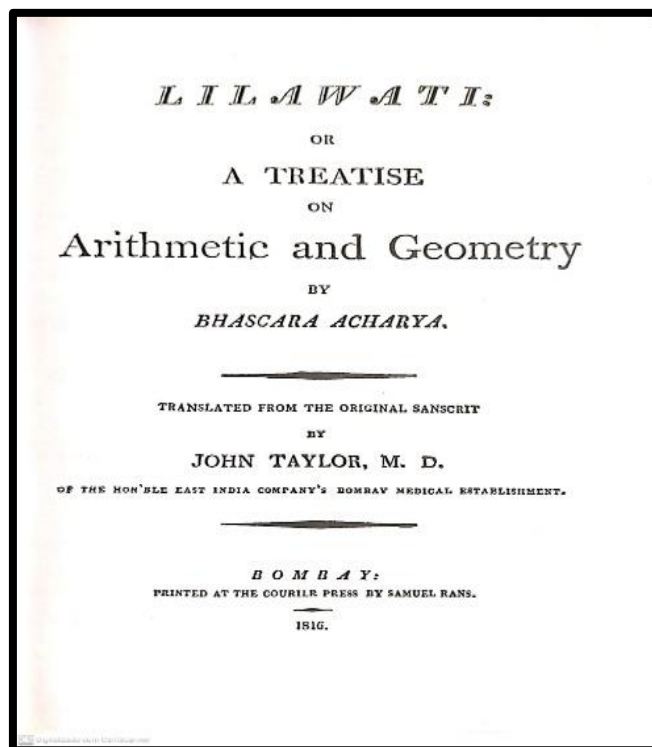
Esta série é um empreendimento colaborativo entre a Coleção da Biblioteca Cambrigde e a Royal Asiatic Society of Grain Britain e Irlanda, fundada em 1823. A série reedita trabalhos da extensa biblioteca de livros raros e publicações patrocinadas da Royal Asiatic Society que lançam luz sobre o século XVIII e XIX – respostas europeias do século às culturas do Oriente Médio e da Ásia. A seleção abrange línguas asiáticas, literatura, religiões, filosofia, historiografia, direito, matemática e ciências, conforme estudadas e traduzidas por europeus e apresentadas para leitores ocidentais (TAYLOR, 1816, s.p, tradução nossa).

<sup>14</sup> Taylor foi doutor em Medicina e membro do estabelecimento médico de Bombay, que era uma empresa do leste da Índia.

<sup>15</sup> Atualmente, aparece no mapa como Mumbai, capital de Mahashara.

No frontispício (Figura 3) da tradução, averigua-se que ela foi feita à base de uma tradução do sânscrito original. Outro ponto importante a ser destacado, na figura, é o nome Bhascara<sup>16</sup> Acharya, em que o termo “Acharya” aparece como um sobrenome, mas Taylor (1816) comenta que essa palavra designava o professor naquela época na Índia. Com isso, podemos perceber que Bhāskarācārya, para Taylor, era um professor, contudo, até o momento, não temos evidências se esse fato é verídico.

**Figura 3 – Frontispício de Taylor (1816)**



Fonte: Taylor (1816).

Posteriormente, Taylor (1816) apresenta sua dedicatória, dizendo: “ao honrado FRANCIS, conde de Moira, Barão Rawdon na Irlanda, Governador Geral da Índia, O trabalho a seguir, ilustrativo da Ciência Matemática dos Hindus, é respeitosamente dedicado por seu obediente e humilde servo, John Taylor” (TAYLOR, 1816, s.p, tradução nossa).

A tradução também mostra um trecho de uma ata da Sociedade Literária de Bombay, do dia 27 de junho de 1815, dia em que a tradução de Taylor foi lida para a

<sup>16</sup> O tradutor utiliza Bhascara, mas nós adotamos a nomenclatura Bhāskarācārya ao longo desta investigação.

sociedade e obteve sucesso, recebendo a autorização para ser publicada sob o seu patrocínio. O trecho, a seguir, pode ser encontrado na tradução:

O Sr. Erskine leu para a Sociedade uma Tradução do Dr. Taylor do Sânscrito Original, de Lilawati, um tratado sobre Aritmética e Geometria Hindu. Sendo o trabalho acima um trabalho que tem sido freqüentemente solicitado por uma questão de precisão, que deve ser impresso sob o olhar do tradutor, é decidido que a impressão do trabalho será imediatamente realizada às custas da Sociedade sob o comando do Dr. Superintendência de Taylor; e que seus agradecimentos sejam retribuídos a ele por seu valioso trabalho (TAYLOR, 1816, s.p, tradução nossa).

Nessa perspectiva, notamos a procura por esse tratado, mostrando sua relevância na divulgação da Matemática indiana do século XII com o passar dos anos. Após a ata, o tradutor traz a errata, o sumário de como *Līlāvātī* foi exposta por ele e inicia a introdução, em que alega que, antes de elaborar sua tradução, observou outras duas traduções, mas nenhuma trazia um texto completo, sempre omitia-se detalhes, em razão disso, menciona seu objetivo ao escrever *Līlāvātī*, dizendo que:

Meu objetivo na tradução a seguir é fornecer um documento autêntico, que, exibindo não apenas o grau real de conhecimento matemático possuído pelos hindus no século XII, mas também mostrando seus modos e princípios de operação, podendo levar a uma conclusão justa sobre suas pretensões de originalidade neste departamento da ciência (TAYLOR, 1816, p. 3, tradução nossa).

Nesse sentido, ele ressalta: “embora eu tenha pretendido tornar esta versão o mais literal possível, ela ainda é consideravelmente mais difusa do que o texto original. A brevidade compacta do sânscrito talvez seja incompatível com o idioma inglês” (TAYLOR, 1816, p. 5, tradução nossa). Mediante o exposto, inferimos que Taylor (1816) procurou deixar as características do original, porém devemos ponderar detalhes, pois como já foi ressaltado, o nosso original se trata de uma tradução, que sofreu modificações.

Adiante, na mesma introdução, o autor começa a discutir alguns dos métodos matemáticos propostos por Bhaskara, que se referem à adição, subtração, multiplicação e divisão, uma vez que ele fala: “como essas operações não são encontradas em livros e só podem ser aprendidas vendo os processos executados, mais algumas ilustrações neste lugar podem não ser consideradas supérfluas” (TAYLOR, 1816, p. 5, tradução nossa).

Por fim, começa *Līlavātī*, que é dividida em quatro seções (Quadro 1) com conteúdos matemáticos, assim, fizemos subtópicos com todas as partes e seções de *Līlavātī*, com o intuito de visualizarmos como está estruturado esse texto em relação à Matemática. Em face disso, ressaltamos que essa não foi a ordem que apareceu no tratado original, escrito por Bhāskarācārya, em 1150.

### 2.3.1 Parte I: Aritmética

Nessa parte, aparecem os seguintes tópicos: (1) Tabelas de dinheiro, pesos, etc.; (2) Adição e Subtração; (3) Multiplicação; (4) Divisão; (5) O quadrado; (6) Raiz quadrada; (7) Cubo; (8) Raiz cúbica; (9) Frações; (10) O Efeito da Cifra; (11) Inversão; (12) Um número presumido; (13) Multiplicador da Raiz; (14) Regra das três quantidades; (15) Regras de Cinco, etc. quantidades; (16) Regra de trocas; (17) Quantidades mistas; (18) Comprando e vendendo; (19) Computando ouro; (20) Permutação; (21) Progressão.

Em (1), ele vai trazer tabelas, começando com as medidas de dinheiro, que são: 20 kavadis = 1 kākini; 4 kākini = 1 pana; 16 panas = 1 dramma; 16 drammas = 1 niska. Em seguida, apresenta três tópicos que tratam das tabelas, dedicados às medidas para pesos, como o ouro, que, em sua escrita, Bhaskara se refere como Kharsha (TAYLOR, 1816), depois, vêm as partes dedicadas às medidas de terras, de grãos, de tempo e das divisões do zodíaco.

Posteriormente, Bhāskarācārya utiliza essas diversas medidas nas questões dos próximos capítulos. Na parte “computando ouro”, da parte I, aparecem algumas, uma delas diz o seguinte: “Três mashas<sup>17</sup> de ouro de dez cores e uma masha de quatorze cores e uma certa quantidade de dezesseis cores, quando misturadas, produzem ouro de doze cores. Qual o número de mashas de ouro de dezesseis cores?” (BHĀSKARĀCĀRYA, 1816, p. 56, tradução nossa). Portanto, podemos evidenciar que o leitor precisará dessas tabelas para poder responder aos problemas propostos nesse tratado.

Antes de iniciar a adição e a subtração, Bhāskarācārya (1816) vai dizer como se organizavam os algarismos nos números, ajudando a entender as operações que virão nas próximas partes. Concernente à adição e à subtração, Bhāskarācārya (1816)

---

<sup>17</sup> De acordo com Bhaskara, 16 Marshas = 1 Karsha (TAYLOR, 1816, p. 2).

é sucinto, trazendo uma regra e um exemplo, resumindo em um verso essas operações, afirmando que: “as figuras são adicionadas da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita; e também são subtraídos da direita para a esquerda, ou da esquerda para a direita, de acordo com suas posições (BHĀSKARĀCĀRYA, 2006, p. 11, tradução nossa). Assim, ele sucede nas seções (3) e (4), abordando as regras e mostrando exemplos relacionados à multiplicação e à divisão, sendo que, na multiplicação, Bhāskarācārya (1816) fornece cinco métodos distintos de multiplicação<sup>18</sup> e um de divisão e, para a verificação da sua regra, deixa um exemplo em cada seção.

Já as partes (5), (6), (7), (8) e (13) referem-se às operações com potências, ensinando o passo a passo de como resolver um problema, dessa maneira, Bhāskarācārya (1816) deixa registrado mais de uma forma de fazer o processo, dando a oportunidade para o leitor escolher o que melhor se adequa ao problema. Ao todo, tem-se dez regras e dez problemas nessas seções.

A parte (9) é dedicada ao estudo das frações, sendo dividida em subtemas, os quais apresentam oito regras e oito problemas com conteúdos como: redução de frações a um denominador comum, frações compostas, frações positivas e negativas e adição, subtração, multiplicação, divisão e raízes das frações. Um exemplo de indagação é: “qual é a soma de um quinto, um quarto, um terço, um meio e um sexto somados? E sua soma sendo subtraída de três, qual é o resto?” (BHĀSKARĀCĀRYA, 1816, p. 27, tradução nossa).

O fragmento (10), com uma regra e dois problemas, aborda o que acontece quando se soma, ou subtrai, ou multiplica, ou divide, ou extrai raiz com o zero. A seção (11) traz uma regra e um problema para obter o inverso de operações, Bhāskarācārya (1816, p. 31, tradução nossa) afirma, em um trecho, que “qualquer quantidade sendo conhecida, a fim de encontrar a quantidade desconhecida, faça do divisor o multiplicador e do multiplicador, o divisor; do quadrado, a raiz quadrada e da raiz quadrada, o quadrado”. Para terminar, o autor propõe uma questão.

A parte (12) vem abordando o método que dado um problema com um número desconhecido, resolva-o utilizando um número qualquer presumido. Logo, ao fazer essa escolha, o autor deixa os passos a serem seguidos para encontrar o número que

---

<sup>18</sup> Mais informações sobre esses métodos podem ser averiguadas em Freire e Pereira (2021).

verdadeiramente está sendo procurado, ao todo Bhāskarācārya (1816) deixa sete regras e sete problemas.

A seção (14), com duas regras e sete problemas, expõe regras para se resolver um problema, em que dispomos de três quantidades conhecidas e uma desconhecida, além disso, o autor explana a regra de três inversa. No que tange à parte (15), a regra diz o seguinte:

“Quando são cinco, sete, nove. etc. quantidades, sejam os produtos e denominadores de um lado transportados mutuamente para o outro e depositados; a seguir, divida o produto da multiplicação do lado maior pelo menor; o quociente é o produto” (BHĀSKARĀCĀRYA, 1816, p. 43, tradução nossa).

Percebemos, então, que essa seção é uma generalização da anterior, em que o autor apresenta um exemplo de problemas para cada caso que trata de cinco, sete, nove e onze quantidades. Já a parte (16), com uma regra e um problema, dedica-se ao estudo das trocas de produtos, a indagação remete à ação que acontece no comércio, mencionando que: “Trezentas mangas são compradas por um dramma e trinta romãs por um pana: Quantas romãs serão adquiridas em troca de dez mangas?” (BHĀSKARĀCĀRYA, 1816, p. 46, tradução nossa). Na parte (17), aparecem regras envolvendo o cálculo de juros em problemas, para resolver os tais, Bhāskarācārya (1816) afirma que:

Multiplique pelo tempo determinado a quantidade cujo produto é dado e multiplique os juros pelo tempo misto: Em seguida, multiplique pela quantidade misturada cada um dos produtos colocados separadamente e divida o resultado pela sua soma: Os quocientes são o principal e os juros, ou encontre o principal pela regra de um número presumido e subtraia-o da soma mista; o restante é o interesse (BHĀSKARĀCĀRYA, 1816, p. 47, tradução nossa).

A seção apresenta cinco regras e quatro questões envolvendo mais casos que podem acontecer, trazendo a maneira de resolvê-los. A parte (18) vem com duas regras e três problemas e tem um nome bem sugestivo “comprando e vendendo”, de fato, ao observarmos a regra contida nesse problema, depreendemos como lidar com um possível problema de mercado da época, Bhāskarācārya (1816) alega que:

Multiplique o preço de cada coisa pela sua proporção e divida os produtos respectivamente pela quantidade dada de cada coisa: em seguida, multiplique os quocientes obtidos e também as proporções pela soma mista e divida os produtos pela soma dos quocientes: Os resultados será o custo e

a quantidade exigidos da coisa (BHĀSKARĀCĀRYA, 1816, p. 51, tradução nossa).

A seção (19), vem expondo quatro regras e seis problemas para se descobrir a cor do ouro e ainda uma regra para encontrar cores desconhecidas. As últimas, (20) e (21), trazem regras e problemas referentes às permutações e às progressões, em que a primeira traz uma regra e dois problemas e a última é a sessão mais extensa da parte I, contendo nove regras e doze problemas.

### 2.3.2 Parte II: Estudos Geométricos

A parte II é composta por dois capítulos, em que o primeiro diz respeito às operações geométricas e o segundo é composto pelas seções: De círculos; De Lagoas; Dos tijolos ou pedras em uma parede; De Corte de Madeiras; De montes; Das sombras.

O primeiro capítulo é composto por vinte regras e dezoito problemas, sendo dedicado, previamente, a regras e definições que se relacionam aos triângulos e quadriláteros (Quadro 4), bem como se refere à forma de figuras, abordando a sua área e, por fim, traz conteúdos relativos à diagonal e à perpendicular. Também é o capítulo que faz referências às figuras que estão no anexo.

**Quadro 4 – Algumas regras e definições sobre quadriláteros e triângulos**

| Original                                                                                                                             | Tradução                                                                                                                            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Any line being supposed the base, the other line which is perpendicular to it is called the side in a triangle or quadrangle.</b> | Qualquer linha sendo considerada a base, a outra linha que é perpendicular a ela é chamada de lado em um triângulo ou quadrilátero. |
| <b>The root of the sum of the squares of the base and side is equal to the hypotenuse.</b>                                           | A raiz da soma dos quadrados da base e do lado é igual à hipotenusa.                                                                |
| <b>The root of the difference of the squares of the base and hypotenuse is equal to the side.</b>                                    | A raiz da diferença dos quadrados da base e da hipotenusa é igual ao lado.                                                          |

Fonte: Bhāskarācārya (1816, p. 67).

No segundo capítulo, a primeira seção, por meio de sete regras e seis problemas, dedica-se ao estudo de círculos, circunferências e esferas, tal como de sua área, seu volume, sendo que o mesmo evidencia em um de seus trechos que: “O quarto do diâmetro multiplicado pela circunferência dá a área do círculo; [...] a área superficial multiplicada pelo diâmetro, e o produto dividido por 6, dá o conteúdo cúbico da esfera” (BHĀSKARĀCĀRYA, 1816, p. 94).

A seção 2 aborda o estudo das lagoas em duas regras e três problemas, mais precisamente, do volume delas, Bhāskarācārya declara que:

Depois de medir a largura em vários lugares, some as diferentes larguras e divida por um número igual ao número de lugares medidos; execute a mesma operação em relação ao comprimento e profundidade. Em seguida, multiplique a área do lago pela profundidade; o produto é o conteúdo cúbico da lagoa (BHĀSKARĀCĀRYA, 1816, p. 99).

A seção 3 é bastante sucinta, tem apenas uma regra ensinando como calcular a quantidade de tijolos que vai precisar em uma determinada parede, além disso, o autor coloca um exercício para o leitor praticar sua regra. A seção 4 se baseia em duas regras e dois problemas, os quais versam sobre o modo de calcular o comprimento de uma madeira, usando o seu corte. A seção 5, com duas regras e dois problemas, vem explicando como calcular o volume de uma pilha de grãos.

Por fim, a seção 6 faz o estudo de regras concernentes às sombras. Nessa parte, aparecem cinco regras e quatro problemas, que mencionam o uso de um instrumento chamando gnomôn, podendo ser identificado no trecho a seguir: “Multiplique o gnômon pelo espaço entre a base da lâmpada e a base do gnômon e divida o produto pela altura da lâmpada menos a altura do gnômon; o quociente é a sombra” (BHĀSKARĀCĀRYA, 1816, p. 56, tradução nossa). Esse instrumento aparece também em tratados chineses.

### **2.3.3 Parte III: Estudo da Kutaka**

A parte III é dedicada, exclusivamente, ao estudo da Kutaka, sendo dividida em sete regras e oito problemas, os quais aparecem nas seguintes seções: Do Kutaka; Da Sthira ou Kutaka Fixo; Do Santista Kutaka. Ao longo dos comentários, o tradutor Taylor (1816) apresenta ao que Bhāskarācārya aludia ao utilizar esse termo, mencionando que:

Uma quantidade conhecida sendo multiplicada por um multiplicador desconhecido e um determinado aumento adicionado ao produto, ou subtraído dele, e o resultado dividido por um determinado divisor, se não sobrar nenhum resto, o multiplicador neste caso foi nomeado pelos autores anteriores kutaka. Kutaka, portanto, significa o multiplicador particular ou individual (TAYLOR, 1816, p. 112, tradução nossa).

À vista disso, vê-se que o Kutaka é um termo desconhecido em um determinado problema. Para encerrar essa parte, o autor traz o estudo com exemplos do Kutaka fixo e ainda do Sanlista Kutaka, este último ele define como sendo: “Se houver um divisor e vários multiplicandos, chame a soma dos multiplicandos de dividendo; e chame a soma dos restos de aumento negativo. Essa maneira de realizar o kutaka é chamada de sanslista kutaka” (BHĀSKARĀCĀRYA, 1816, p. 129). Destacamos que, posteriormente, essa parte será melhor detalhada, pois será o objeto de estudo desta pesquisa.

#### **2.3.4 Parte IV: Transposições de Figuras**

A parte IV é bastante sucinta, contendo três regras e três problemas abordando as transposições de figuras. Taylor (1816) afirma, em seus comentários, que: “este método de encontrar a soma dos números estabelecidos de acordo com o número de transposições, não parece estar contido em nenhum de nossos livros de aritmética”. Então, percebemos que essa parte é uma das singularidades apresentadas por Bhāskarācārya.

### 3 LĪLAVĀTĪ E O PENSAMENTO ALGÉBRICO

Ao descrever Līlavātī, verificamos a vasta quantidade de conteúdos presentes nesse texto, perpassando pela Aritmética, Geometria e Álgebra. Bhāskarācārya tem a singularidade de sempre apresentar os métodos, que são nomeados como regras, para a solução de problemas, ensinando o como fazer. Assim, ao final de cada técnica, constam problemas para que o leitor possa comprovar que elas funcionam, aparecendo somente declarações com as respostas finais, sem a presença do processo percorrido para chegar à conclusão.

Como Lilavati possui quatro partes, conforme foram descritas na seção anterior, nesta parte do texto dissertativo, daremos atenção ao décimo segundo tópico apresentado na parte I, sendo nomeado como: “um número presumido”, que se encontra dividido em 7 subtópicos, intitulados: número presumido; onde uma certa quantidade é conhecida; onde estão os restos; onde existe uma diferença; quando existe soma e a diferença; quando existe a diferença de quadrados; a respeito de quadrados.

Dessa forma, nesta seção, mostramos, primeiramente, aspectos iniciais do pensamento algébrico, contextualizando algumas das diversas definições existentes, dialogando, ademais, sobre sua importância na formação de futuros professores de Matemática, já que está no principal documento que rege a Educação Básica, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Em seguida, descrevemos cada subtópico da décima segunda parte de Lilavati: um número presumido; descrevendo cada regra matematicamente; fazendo um modelo para a solução das indagações; expondo, em quadros, sintetizações do passo a passo de cada técnica identificada no texto de Bhāskarācārya. Destarte, detalhamos as soluções dos problemas propostos pelo autor, fazendo-os consoante a regra, mostrando o percurso transcorrido. Nesse contexto, no final da sessão, fizemos uma relação do conteúdo apresentado no Lilavati com as características do pensamento algébrico pontuadas por Almeida e Santos (2017).

#### 3.1 Aspectos iniciais do pensamento algébrico

Uma definição única de pensamento algébrico é difícil de ser encontrada, conforme afirmam Almeida e Santos (2017), muitos discutem sobre como desenvolver

o pensar algebricamente, porém, não chegam a um consenso do que seria esse modo de pensamento. Portanto, comentaremos, aqui, alguns pontos de vista de autores que falam sobre a temática, tais como Kaput (2008, 1999); Lins e Gimenez (1997); Almeida e Santos (2017).

Blanton e Kaput (2005) definem o pensamento algébrico como o

[...] processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto particular de exemplos, estabelecem essas generalizações por meio de discurso argumentativo, e as expressam de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade (BLANTON; KAPUT, 2005, p. 413, tradução nossa).

Por isso, Kaput (2008) assevera que, quando o aluno resolve uma equação, não significa que ele está pensando algebricamente, pois pode estar apenas seguindo passos ensinados pelo professor. Para ter esse tipo de raciocínio, o estudante necessita atribuir significado aos termos com os quais está lidando, compreendendo, por exemplo, que o sinal de igual representa uma equivalência de ambos os lados. Diante disso, Blanton e Kaput (2005) apresentam as formas que o pensamento algébrico pode tomar, afirmando que

O raciocínio algébrico pode tomar várias formas, incluindo o uso de aritmética como um domínio para expressar e formalizar generalizações (aritmética generalizada); (b) generalizar padrões numéricos para descrever relações funcionais (pensamento funcional); (c) modelagem como um domínio para expressar e formalizar generalizações; e (d) generalização sobre sistemas matemáticos abstraídos de computações e relações (BLANTON; KAPUT, 2005, p. 413, tradução nossa).

Quanto a Lins e Gimenez (1997, p.151), estes afirmam que pensar algebricamente é “produzir significado para as situações em termos de números e operações aritméticas (e igualdade ou desigualdades), e com base nisso transformar as expressões obtidas operando sempre de acordo com (o aritmetismo, o internalismo e a analiticidade)”.

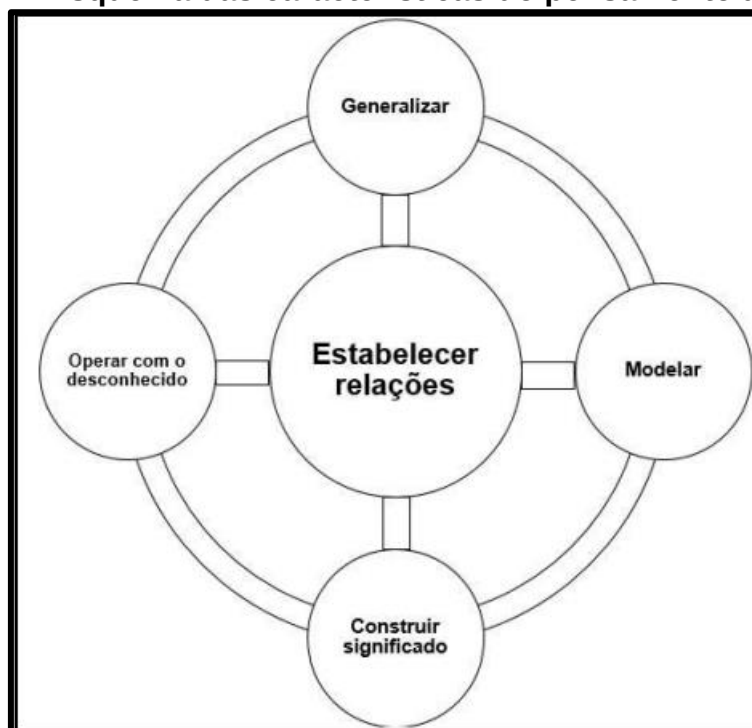
Na visão de Lins (1992, p.12), o “aritmetismo significa precisamente ‘modelar em números’, o que naturalmente implica a utilização das operações aritméticas a fim de produzir as relações que constituem o modelo”. Frente a isso, observamos que, nessa fase, o aluno ainda não manipula uma linguagem algébrica, ele usa a Aritmética para modelar determinadas situações (ALMEIDA; SANTOS, 2017).

No internalismo, “as operações aritméticas se tornam objetos, ao mesmo tempo que são usadas como ferramentas e esta é apenas uma consequência do conjunto de requisitos do aritmetismo e do internalismo do pensamento algébrico” (LINS, 1992, p.14-15). Assim, os números passam a ter mais importância nessa fase, deixando de ser um subsídio na modelação de problemas.

Por fim, na analiticidade, “os elementos “desconhecidos” devem ser manipulados com base em propriedades gerais para a classe de objetos a que pertencem, e não como uma manipulação real de um determinado, específico, objeto” (LINS, 1992, p.15). Com isso, nessas três formas de pensar algebricamente, os alunos precisam desenvolver todas as perspectivas juntas.

Já para Almeida e Santos (2017), esse pensamento, no ser humano, é evidenciado por meio de cinco características, a saber: estabelecer relações; generalizar; modelar; operar com o desconhecido e construir significado. E, segundo os autores, no centro, como o mais importante, está o estabelecimento de relações, como mostrado na figura a seguir:

**Figura 4 – Esquema das características do pensamento algébrico**



Fonte: Almeida e Santos (2017, p. 54).

O estabelecimento de relações é a capacidade de o aluno interpretar o problema, fazendo relação das partes com o todo envolvido na situação a ser

compreendida (ALMEIDA; SANTOS, 2017). Nessa fase, o discente busca sintetizar o cenário posto no texto matemático.

Por essa razão, na parte de modelar, o aluno “começa a construir um modelo matemático para representar o problema apresentado em linguagem natural” (ALMEIDA; SANTOS, 2017, p. 55-56). Os autores asseveram que esse modo resolutivo terá uma forma algébrica mais ou menos formal, dependendo do nível em que o aluno esteja.

Consequentemente, ao estar produzindo o modelo, o aluno está concomitantemente mobilizando a terceira característica do pensamento algébrico: a capacidade de generalizar, na qual o aluno tem de perceber e sistematizar o que está dito na situação que foi posta e escrever isso matematicamente (ALMEIDA; SANTOS, 2017).

Depois de organizar a solução, o discente vai efetuar direcionamentos para operar com o desconhecido. Almeida e Santos (2017) expõem um exemplo de como essa característica pode ser notada, afirmando que

Essa característica do pensamento algébrico é revelada no exemplo [...], em que o aluno manipula o desconhecido, o “X” no caso, segundo as leis da aritmética em relação à igualdade, em que são realizadas operações na equação inicial com o objetivo de gerar equações equivalentes, até se chegar no valor de “X”, no desconhecido (ALMEIDA E SANTOS, 2017, p. 56).

Diante do exposto, percebemos que os alunos, além de seguirem um passo a passo, devem ter consciência do que estão fazendo, interpretando a questão, de modo a sair da mecanicidade.

Perpassando por todas as características supracitadas, é imprescindível que o aluno, ao longo do percurso, construa significado para a linguagem algébrica e os objetos algébricos (ALMEIDA; SANTOS, 2017). Desse modo, o professor deve observar se o aluno compreendeu o que a situação e/ou problema explorava, mediante a apresentação dos resultados do estudante, averiguando se o seu caminhar percorreu o que foi solicitado e se isso aparece na sua escrita e/ou ações. Portanto, no que tange à ordem que essas características podem ser desenvolvidas, Almeida e Santos (2017) mencionam:

Ressaltamos, também que apesar de apresentar uma ordem as quatro características subjacentes a central, isso não significa que elas sejam reveladas pelo sujeito nessa ordem, muito pelo contrário, acreditamos que

elas sejam reveladas pelo sujeito concomitante, e que o desenvolvimento de uma dessas características leva, conseqüentemente, ao desenvolvimento das outras (ALMEIDA E SANTOS, 2017, p. 58).

Logo, é primordial constatar a relevância do pensamento algébrico na vida estudantil dos alunos da Educação Básica, sendo necessário dotar os professores de aparatos que possibilitem a discussão do pensamento algébrico nas Licenciaturas em Matemática. Já que esse tipo de raciocínio é contemplado na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), sendo apresentado como finalidade para a aprendizagem da Álgebra, como é citado na introdução.

A seguir, descrevemos a parte do número presumido de Lilavati, pretendendo que o leitor assimile a temática do trecho de Lilavati. Posteriormente, relacionaremos os conceitos matemáticos estabelecidos com as características apontadas por Almeida e Santos (2017), que podem ser exploradas na formação de professores de Matemática.

### 3.2 Estudo da parte “um número presumido” de Lilavati

Na seção “um número presumido”, quanto às regras, o autor é prático, não as demonstrando, deixando ao final um problema para que elas sejam aplicadas. Sua objetividade deve-se à escrita de Lilavati em versos. Segundo Plofker (2008), era uma das singularidades do povo indiano, pois era fácil decorar para as cerimônias religiosas e acessível a ser repassado na forma oral, o autor alega que muitos textos se perderam, porque esse saber era transmitido, na maioria das vezes, de forma verbal (escrita). Bhāskarācārya deixa, nessa parte, seis regras e sete problemas, a divisão destes, nos tópicos, pode ser vislumbrada no quadro a seguir:

**Quadro 5 – Divisão das regras e dos problemas por tópicos**

| <b>Tópicos</b>                         | <b>Divisão</b>       |
|----------------------------------------|----------------------|
| Número presumido                       | Regra 1 e Problema 1 |
| Onde uma certa quantidade é conhecida  | Problema 2           |
| Onde estão os restos                   | Regra 2 e Problema 3 |
| Onde existe uma diferença              | Problema 4           |
| Quando existe soma e a diferença       | Regra 3 e Problema 5 |
| Quando existe a diferença de quadrados | Regra 4 e Problema 6 |

|                         |                               |
|-------------------------|-------------------------------|
| A respeito de quadrados | Regra 5, Regra 6 e Problema 7 |
|-------------------------|-------------------------------|

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Dessa maneira, ao descrevermos os tópicos a seguir, explicitamos, sempre que houver necessidade, aspectos contextuais, seguidamente, apresentamos a regra conforme exposta por Bhāskarācārya na forma retórica, ou seja, sem o uso da simbologia matemática. Assim, posteriormente, usamos uma linguagem algébrica para a matematização da regra e mostramos a solução dos problemas propostos pelas técnicas do autor. Com isso, optamos por uma notação atual na explicação matemática para melhorar o entendimento da regra.

Ressaltamos que, ao longo do texto, utilizaremos Taylor (1816) para indicar trechos escritos pelo tradutor de Lilavati, John Taylor e Bhāskarācārya (1816) para indicar as partes mencionadas pelo autor de Lilavati. Além disso, criamos quadros de sintetização da regra, em relação aos seus passos, matematização e conteúdos matemáticos envolvidos, que podem ser vistos na seção a seguir.

### 3.2.1 Número presumido

A seção “um número presumido” inicia apresentando a primeira regra, e um problema. A regra menciona o seguinte: “Multiplique, divida, subtraia ou some um número presumido às frações, de acordo com as condições da questão. Pelo resultado divida o produto do número conhecido pelo presumido. O quociente será o número necessário” (TAYLOR, 1816, p. 32). Destarte, salientamos que, quando o autor cita esse número presumido, ele não o define, porém, pelo contexto, é um número que supomos no início da solução do problema para encontrar o resultado correto.

Perceba que a regra não apresenta elementos contextuais, no entanto, associando a aspectos matemáticos, de início, notamos a relação entre dois valores na primeira parte que afirma: “Multiplique, divida, subtraia ou some um número presumido às frações, de acordo com as condições da questão” (TAYLOR, 1816, p. 32), sendo esses o número presumido, que denotaremos por (p) e as frações, por (f).

No meio da regra, ou seja: “Pelo resultado divida o produto do número conhecido pelo presumido” (TAYLOR, 1816, p. 32), averiguamos mais dois valores, que são o resultado da parte anterior, indicado por (r) e o número conhecido,

assinalado por (c). Por fim, na última parte: “O quociente será o número necessário”, constatamos outro valor envolvido, o número necessário, especificado por (n).

Diante disso, primeiramente, será feita a multiplicação, divisão, subtração ou soma de p por f, sendo que a operação será dada na questão e esse cálculo dará um resultado (r), isto é,

$$p \times f = r, \text{ ou } p \div f = r, \text{ ou } p - f = r, \text{ ou } p + f = r$$

Depois, Bhāskarācārya aponta que “Pelo resultado divida o produto do número conhecido pelo presumido” (TAYLOR, 1816, p. 32). Por essa razão, teremos a multiplicação: do número presumido (p) pelo conhecido (c) e, logo após, dividiremos a resposta desse cálculo pelo resultado do primeiro cálculo (r), obtendo então:  $\frac{p \times c}{r}$ .

O resultado desse cálculo será o número necessário/procurado (n) no problema, ou seja:  $n = \frac{p \times c}{r}$ . Com isso, para responder a um problema desse tipo, pode ser estabelecido, conforme a regra de Bhāskarācārya, o passo a passo posto no Quadro 6, a seguir:

**Quadro 6 – Passo a passo da regra 1 de Bhāskarācārya**

| Passos |                                                                                                                 | Matematização                                                                                        | Conteúdo matemático                                                                                                        |
|--------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1      | Presumir um número qualquer.                                                                                    | P                                                                                                    | <ul style="list-style-type: none"> <li>Noção de variável e incógnita.</li> <li>Operações com números racionais.</li> </ul> |
| 2      | Somar, subtrair, multiplicar ou dividir as frações dadas nos problemas dele, de acordo com o pedido da questão. | $p \times f = r,$<br>$\text{ou } p \div f = r,$<br>$\text{ou } p - f = r,$<br>$\text{ou } p + f = r$ |                                                                                                                            |
| 3      | Multiplicar o número presumido no passo 1 pelo número conhecido dado no problema.                               | $p \times c$                                                                                         |                                                                                                                            |
| 4      | Dividir o resultado encontrado no passo 3 pelo resultado encontrado no passo 2.                                 | $\frac{p \times c}{r}$                                                                               |                                                                                                                            |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Ressaltamos que o número presumido vai ser escolhido por quem vai resolver o problema, podendo ser qualquer um. Entretanto, um dos aspectos a ser observado é a escolha de um número que facilite os cálculos solicitados no problema. Essa parte

nos leva a uma ideia de variável, podendo ser aliada também à ideia de incógnita presente no valor desconhecido, esse entendimento da diferença do número presumido (variável) e do número desconhecido (incógnita) é fundamental para a aplicação da regra.

Posteriormente, Bhāskarācārya (1816, p. 32) apresenta um problema nesse tópico, mas não traz a descrição da solução, deixando a cargo do leitor: “Um número é multiplicado por 5; do produto é subtraído um terço de si mesmo e o restante é dividido por 10; ao quociente é adicionado  $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$  do número presumido, e o resultado é 68. Qual é o número?” (BHASKARACARYA, 1816, p. 32, tradução nossa). Observemos que, nesse problema, pode ser aplicada a primeira regra, visto que requer um número presumido, solicitando uma série de operações, que devem ser feitas de acordo com a questão, envolvendo frações, mostrando um número conhecido, o 68.

Com o intuito de auxiliar na compreensão do leitor, iremos expor a solução do problema com base na primeira regra de Bhāskarācārya, sintetizada no Quadro 1. Nessa direção, veja, a seguir, o Quadro 7, com a sequência de passos para a solução dessa indagação:

**Quadro 7 – Solução do problema 1**

| <b>Passos</b> | <b>Regra</b>                                                                                                    | <b>Solução</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|---------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>1</b>      | Presumir um número qualquer.                                                                                    | Presumimos: 24.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <b>2</b>      | Somar, subtrair, multiplicar ou dividir as frações dadas nos problemas dele, de acordo com o pedido da questão. | <p>Multiplicamos por 5: <math>24 \times 5 = 120</math>.</p> <p>Subtraímos um terço dele mesmo: <math>120 - 40 = 80</math>.</p> <p>Dividimos o valor obtido anteriormente por 10: <math>80 \div 10 = 8</math>.</p> <p>Adicionamos ao resultado anterior <math>\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}</math> do número presumido: <math>8 + 8 + 12 + 6 = 34</math>.</p> |

|          |                                                                                   |                         |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| <b>3</b> | Multiplicar o número presumido no passo 1 pelo número conhecido dado no problema. | $24 \times 68 = 1\,632$ |
| <b>4</b> | Dividir o resultado encontrado no passo 3 pelo resultado encontrado no passo 2.   | $\frac{1632}{34} = 48$  |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Dessa maneira, para responder, supomos o número 24, pois ele é divisível por todos os denominadores das frações (3, 2, 4), apresentados no problema. Em sequência, o problema fornece uma série de operações, que devem ser realizadas com esse número presumido, isto é, “Um número é multiplicado por 5; do produto é subtraído um terço de si mesmo e o restante é dividido por 10; ao quociente é adicionado  $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$  do número assumido”. Com isso, multiplicamos o presumido por 5 ( $24 \times 5 = 120$ ). Desse produto, subtraímos um terço ( $\frac{1}{3}$ ) dele mesmo, ou seja,  $\frac{1}{3}$  de  $120 = 40$ , ficando  $120 - 40 = 80$ . Em seguida, dividimos o valor anterior por 10, restando  $80 \div 10 = 8$ . Por fim, adicionamos  $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$  ao último resultado do número presumido, isto é,  $8 + \frac{1}{3}$  de  $24 = 8 + \frac{1}{2}$  de  $24 = 12 + \frac{1}{4}$  de  $24 = 6 = 8 + 8 + 12 + 6 = 34$ .

Nesse sentido, observamos que o número 68 é o resultado conhecido. Desse modo, fizemos o passo 3 de Bhāskarācārya, melhor dizendo, multiplicamos o número presumido pelo conhecido:  $24 \times 68 = 1\,632$ . Posto isso, finalizamos o problema dividindo esse resultado por 34, que foi encontrado no primeiro passo da questão, então, o resultado final é dado por:  $\frac{1632}{34} = 48$ .

Podemos verificar isso colocando o resultado de volta no problema,  $48 \times 5 = 240$ , tirando  $\frac{1}{3}$  de 240, obteremos 80, subtraindo esse de 240, teremos 160, dividindo esse último por 10, chegaremos a 16, somando a esse  $\frac{1}{3}$  de  $48 = 16, \frac{1}{2}$  de  $48 = 24$  e  $\frac{1}{4}$  de  $48 = 12$ , ou seja,  $16+16+24+12=68$ . Assim, encontramos o número conhecido da questão, provando a aplicação da regra de Bhāskarācārya.

Nessa primeira regra de Bhāskarācārya (1816), notamos que, ao matematizá-la e aplicá-la no problema proposto, podemos elencar noções matemáticas, que podem vir a ser discutidas na formação de professores, tais como: generalizações; estabelecimento de relações entre o número conhecido (incógnita) e o presumido (variável); construção de significado na aplicação da regra no problema e operações básicas com números racionais.

### 3.2.2 Onde uma certa quantidade é conhecida

Neste tópico, Bhāskarācārya expõe uma situação-problema, indagando: “um terço de uma coleção de belos nenúfares é oferecido a *Mahadev*, um quinto a *Huri*, um sexto ao Sol, um quarto a *Devi*, e seis restantes são apresentados ao professor espiritual. Qual o número inteiro de nenúfares?” (BHĀSKARĀCĀRYA, 1816, p. 33).

Nessa questão, diferentemente da primeira, aparecem aspectos culturais indianos, trazendo a figura do professor espiritual, também chamado de Guru, pessoa responsável por educar e repassar saberes aos indianos e, “segundo os textos sagrados indianos, a autoridade do mestre espiritual é absoluta e inquestionável, pois ele é considerado uma incorporação do conhecimento que transmite” (MARSON; IVO, 2012, p. 130).

Nesse contexto, Bhāskarācārya (1816) ainda menciona deuses, como Mahadev, Huri, Sol e Devi. A respeito desses, o primeiro e o segundo são hoje conhecidos como Shiva e Vishnu, fazendo parte da composição do hinduísmo. Dessa forma, Lima et al. (2016, p. 13) reverberam que “Os três são tradicionalmente agrupados, pois cada um seria responsável por um aspecto da existência do mundo: criação, manutenção e destruição”.

Já o Sol é denominado também por Surya, sendo uma das principais divindades solares entre os deuses hindus, no texto indiano subalsutra RigVeda, aparecem adorações e elogios a ele. Devi, por sua vez, refere-se à forma feminina de Mahadev, sendo a nomenclatura atribuída a uma Deusa mulher.

Na situação-problema supracitada, é possível aplicar a primeira regra, verificamos as operações com frações, a presença implícita de um número presumido para operar com essas frações e o resultado conhecido de nenúfares, sendo os seis que restaram. Analisemos a sintetização dessa aplicação, exposta no Quadro 8, a seguir:

**Quadro 8 – Solução do problema 2**

| <b>Passos</b> | <b>Regra 1</b>                                                                                                  | <b>Solução</b>                                                                                                                                                                       |
|---------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>1</b>      | Presumir um número qualquer.                                                                                    | Presumimos: 60.                                                                                                                                                                      |
| <b>2</b>      | Somar, subtrair, multiplicar ou dividir as frações dadas nos problemas dele, de acordo com o pedido da questão. | $60 - \left( \frac{1}{3} \text{ de } 60 + \frac{1}{5} \text{ de } 60 + \frac{1}{6} \text{ de } 60 + \frac{1}{4} \text{ de } 60 \right) =$ $= 60 - (20 + 12 + 10 + 15) = 60 - 57 = 3$ |
| <b>3</b>      | Multiplicar o número presumido no passo 1 pelo número conhecido dado no problema.                               | $60 \times 6$                                                                                                                                                                        |
| <b>4</b>      | Dividir o resultado encontrado no passo 3 pelo resultado encontrado no passo 2.                                 | $\frac{360}{3} = 120$                                                                                                                                                                |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

À vista disso, conforme observado no Quadro 8, consideramos como número presumido (p) o número 60, já que ele é divisível por todos os denominadores das frações. Salientamos que, ao examinar o problema, podemos deduzir que  $p=60$  significa que supomos o número inteiro de nenúfares qualquer para testar na situação, percebendo que parte desse todo vai sendo distribuído aos deuses e ao professor espiritual, isto é, partes desse todo vão sendo subtraídas do total.

Portanto, as frações  $f = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}$  são removidas do número presumido  $p=60$ , ou seja: um terço ( $\frac{1}{3}$ ) de 60; um quinto ( $\frac{1}{5}$ ) de 60; um sexto ( $\frac{1}{6}$ ) de 60 e um quarto ( $\frac{1}{4}$ ) de 60. Logo, teremos:  $r = 60 - \left( \frac{1}{3} \text{ de } 60 + \frac{1}{5} \text{ de } 60 + \frac{1}{6} \text{ de } 60 + \frac{1}{4} \text{ de } 60 \right) = 60 - (20 + 12 + 10 + 15) = 60 - 57 = 3$ .

Pelo número conhecido de nenúfares ( $c = 6$ ), multiplicamos pelo número presumido  $p=60$ , ou seja,  $p \times c = 60 \times 6 = 360$ , depois, dividimos esse resultado (360) por  $r = 3$ . Sendo assim, temos que o número necessário/procurado  $n = \frac{p \times c}{r} = \frac{360}{3} = 120$ . Em suma, chegamos à conclusão de que o verdadeiro número inteiro de nenúfares é 120.

Para confirmar a resposta final, aplicamos o número inteiro de nenúfares, 120, de volta no problema. Com isso, devemos subtrair de 120 os números correspondentes às frações  $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}$  dele mesmo, isto é,  $120 - \left( \frac{1}{3} \text{ de } 120 + \frac{1}{5} \text{ de } 120 + \frac{1}{6} \text{ de } 120 + \frac{1}{4} \text{ de } 120 \right) = 120 - (40 + 24 + 20 + 30) = 120 - 114 = 6$ . O resultado 6 vai ao encontro do que restou para o professor espiritual, provando, então, que a solução encontrada está correta.

### 3.2.3 Onde há restos

No terceiro tópico, Bhāskarācārya apresenta um problema envolvendo ainda o número presumido, porém traz outra regra em uma declaração após a indagação. Embora ele traga, inicialmente, a questão, vamos discutir, primeiramente, essa segunda regra, que pode ser vislumbrada a seguir:

Declaração:  $\frac{1}{2} \frac{2}{9} \frac{1}{4} \frac{6}{10}$ . Aqui a regra é dividir o produto dos denominadores menos seus numeradores pelo produto dos denominadores. E por esse quociente obtido, divida o produto da quantidade conhecida multiplicado pelo número presumido.

A princípio, supomos as frações:  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ . Em seguida, Bhāskarācārya (1816) afirma que “a regra é dividir o produto dos denominadores menos seus numeradores pelo produto dos denominadores”. Ao observamos esse trecho, percebemos dois produtos, que devem ser divididos, o primeiro é o “produto dos denominadores menos seus numeradores”, para ele, faz-se a subtração do denominador pelo numerador de cada fração e, posteriormente, multiplica-se esses resultados, que denotaremos por  $r$  e  $s$ , obtendo um resultado  $t$ , ou seja:  $(b - a) = r ; (d - c) = s$ , então, multiplicamos esses resultados:  $r \times s = t$ . A segunda multiplicação é dos denominadores, em que indicamos o resultado por  $w$ , restando:  $b \times d = w$ . Por fim, dividimos os resultados dos produtos, obtendo um número  $z$ , que será utilizado no próximo passo, temos:  $\frac{t}{w} = z$ .

Desse modo, após esses cálculos, Bhāskarācārya, para finalizar a regra, afirma que: “por esse quociente obtido, divida o produto da quantidade conhecida multiplicado pelo número presumido”. Sendo o número presumido indicado por  $p$ , o número conhecido denotado por  $c$  e o quociente, anteriormente, chamado de  $z$ .

Para a divisão, precisamos do resultado da multiplicação do  $c$  pelo  $p$ , que representamos por  $f$ , ou seja:  $c \times p = f$ . Portanto, dividimos  $f$  por  $z$ , restando:  $n = \frac{f}{z}$ , sendo  $n$  o o número desconhecido procurado no problema. Dessa forma, a seguir, expomos o Quadro 9, em que consta uma sintetização do passo a passo, que pode ser seguido para a aplicação dessa regra.

**Quadro 9 – Sintetização da regra 2**

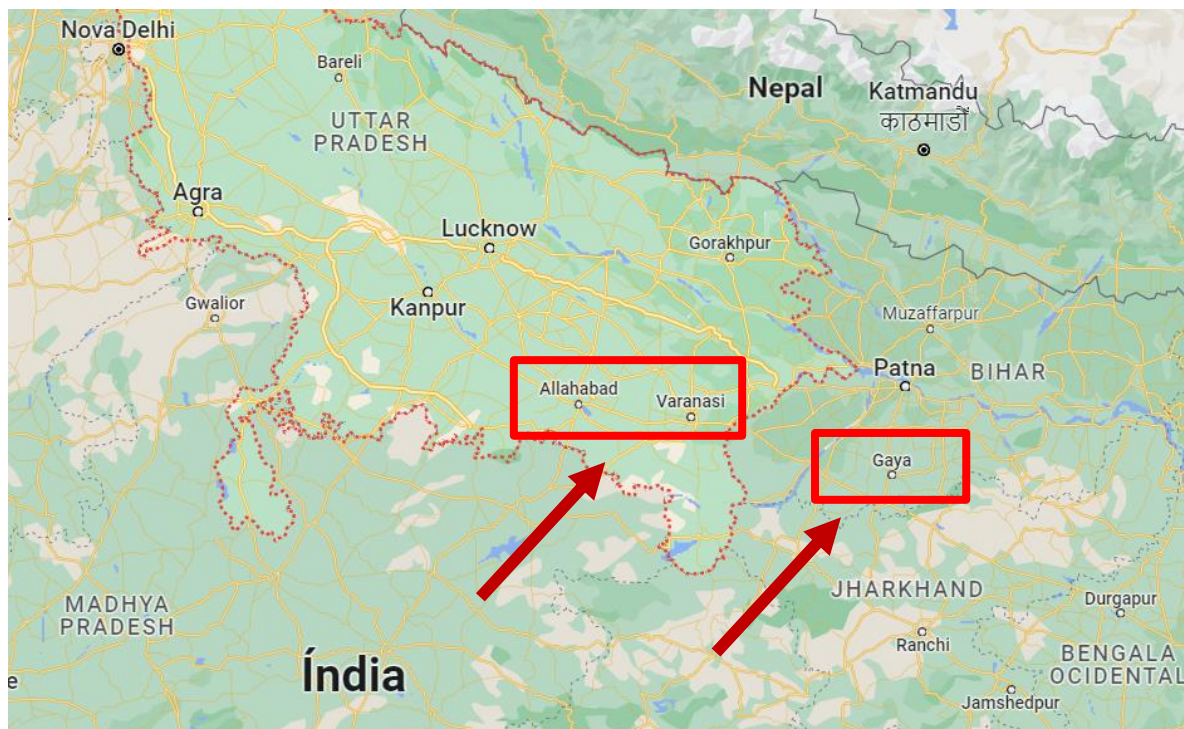
| Passos   |                                                                                                                    | Matematização                                                                  | Parte Matemática                                                                                                                                                                            |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>1</b> | Encontrar as frações presentes no problema.                                                                        | Supomos as frações: $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ .                               | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Noção de variável e incógnita.</li> <li>• Elementos de uma fração (denominador e numerador).</li> <li>• Operações com números naturais.</li> </ul> |
| <b>2</b> | Fazer a subtração do denominador pelo numerador de cada fração, e multiplicar os restos obtidos dessas subtrações. | Seja: $(b - a) = r$ ; $(d - c) = s$ , assim: $r \times s = t$ , $t$ o produto. |                                                                                                                                                                                             |
| <b>3</b> | Fazer o produto dos denominadores de cada fração encontrada no passo 1.                                            | Seja: $b \times d = w$                                                         |                                                                                                                                                                                             |
| <b>4</b> | Dividir o resultado do passo 2 pelo resultado do passo 3.                                                          | Seja: $\frac{t}{w} = z$                                                        |                                                                                                                                                                                             |
| <b>5</b> | Presumir um número.                                                                                                | Presumimos: $p$                                                                |                                                                                                                                                                                             |
| <b>6</b> | Multiplicar a quantidade conhecida pelo número presumido.                                                          | Seja $c$ a quantidade conhecida. Assim seja: $c \times p = f$                  |                                                                                                                                                                                             |
| <b>7</b> | Dividir o produto do passo 6 pelo quociente do passo 4.                                                            | $n = \frac{f}{z}$ , $n$ o número necessário.                                   |                                                                                                                                                                                             |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

A posteriori, Bhāskarācārya apresenta o seguinte problema: “Um viajante paga metade em Prayag, do restante ele paga dois nonos em Benares, do restante ele paga um quarto para a alfândega, etc. do restante seis décimos são pagos em Gaya e restam 63 que ele traz para casa. Qual era a soma original?” (BHASKARACARYA, 1816, p. 34).

Nessa situação, depreendemos o contexto de um peregrino, que percorre três cidades indianas, a saber: Benares, Gaya e Prayag. Duas dessas cidades ficam no estado de Uttar Pradesh: Benares e Prayag, sendo que Benares é, atualmente, denominada de Varanasi e Prayag, de Allahabad. Gaya se situa no estado de Biddur. A localização dessas cidades, na Índia, pode ser vista na Figura 4:

**Figura 4- Localização das cidades Benares, Prayag e Biddur**



Fonte: Google Maps (2022).

Em relação à cidade histórica de Varanasi (também chamada de Benares, Banares ou Kashi), situada no sudeste do estado de Uttar Pradesh, norte da Índia, ela fica na margem esquerda do rio Ganges (Ganga), sendo uma das sete cidades sagradas dos hindus (PLETCHER, 2010).

Já a cidade Gaya é localizada no estado central de Bihar, nordeste da Índia. Segundo Pletcher (2010, p. 169), ela “está situada a oeste do rio Phalgu, um afluente do rio Ganges (Ganga). Um dos locais budistas mais sagrados, foi lá, sob a pipal sagrada, ou árvore Bo, que Gautama Buda (Príncipe Sidarta) atingiu a iluminação e se tornou o Buda”.

Quanto à cidade Prayag, acerca de sua instalação e importância na Índia, Pletcher (2010) afirma que

A cidade de Allahabad está situada na confluência dos rios Ganges (Ganga) e Yamuna (Jumna) no sul do estado de Uttar Pradesh, norte da Índia. Fica no local da antiga Prayag, uma cidade sagrada que era comparável em fama a Varanasi (Benares) e Haridwar. A importância de Prayag no antigo período budista da história indiana é atestada pelas inscrições no Pilar de Ashoka. O pilar ainda está dentro da porta de entrada para o antigo forte de Allahabad, que está estrategicamente situado na confluência dos dois rios. A importância religiosa do local persiste; a cada ano um festival acontece na confluência dos rios, e a cada 12 anos um festival muito maior, Kumbh Mela, é frequentado por milhões de hindus (PLETCHER, 2010, p. 215-216).

Assim, notamos a relevância desse contexto, que pode ser explorado em atividades investigativas. Com isso, percebemos que podemos aplicar a segunda regra, explicitada acima, já que o problema apresenta as frações:  $\frac{1}{2}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}$  e  $\frac{6}{10}$ , com um resto 63, que é tomado como o número conhecido. Logo, observemos a solução do questionamento no Quadro 10, seguindo os passos:

**Quadro 10 – Solução do problema 3**

| <b>Passos</b> | <b>Regra 2</b>                                                                                                     | <b>Solução</b>                                                                                                           |
|---------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>1</b>      | Encontrar as frações presentes no problema.                                                                        | $\frac{1}{2}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}$ e $\frac{6}{10}$                                                                 |
| <b>2</b>      | Fazer a subtração do denominador pelo numerador de cada fração, e multiplicar os restos obtidos dessas subtrações. | $(2 - 1) = 1; (9 - 2) = 7; (4 - 1) = 3; (10 - 6) = 4$ .<br>Multiplicação dos restos: $1 \times 7 \times 3 \times 4 = 84$ |
| <b>3</b>      | Fazer o produto dos denominadores de cada fração encontrada no passo 1.                                            | $2 \times 9 \times 4 \times 10 = 720$                                                                                    |
| <b>4</b>      | Dividir o resultado do passo 2 pelo resultado do passo 3.                                                          | $\frac{84}{720}$                                                                                                         |

|   |                                                           |                                                                                 |
|---|-----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| 5 | Presumir um número.                                       | Presumimos: 1                                                                   |
| 6 | Multiplicar a quantidade conhecida pelo número presumido. | $63 \times 1 = 63$                                                              |
| 7 | Dividir o produto do passo 6 pelo quociente do passo 4.   | $\frac{63}{\frac{84}{720}} = 63 \times \frac{720}{84} = \frac{45360}{84} = 540$ |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Conforme mostrado no quadro, as frações envolvidas são:  $\frac{1}{2}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}$  e  $\frac{6}{10}$ . Em face disso, faz-se a subtração do denominador pelo numerador de cada uma dessas frações, isto é:  $2 - 1 = 1, 9 - 2 = 7, 4 - 1 = 3, 10 - 6 = 4$ . Então, esses restos devem ser multiplicados:  $1 \times 7 \times 3 \times 4 = 84$ . Sendo esse resultado (84) dividido pelo produto dos denominadores:  $2 \times 9 \times 4 \times 10 = 720$ . Ficando a divisão final:  $\frac{84}{720}$ .

Adiante, tem-se que dividir o produto (da quantidade conhecida pelo número presumido) pelo resultado final do parágrafo anterior  $\left(\frac{84}{720}\right)$ . Isso posto, seja 1 o número presumido; pela questão, percebemos que sobraram 63, sendo esse o número conhecido da quantidade que se tinha. Efetuamos a multiplicação:  $63 \times 1 = 63$ , conseqüentemente, podemos fazer a divisão:  $\frac{63}{\frac{84}{720}} = 63 \times \frac{720}{84} = \frac{45360}{84} = 540$ . Portanto, o número procurado é encontrado: 540.

Ao aplicarmos o 540 no problema como sendo o todo, notamos que devemos subtrair dele: a metade que foi paga em Prayag  $\left(\frac{1}{2} \text{ de } 540 = 270\right)$ ; dois nonos do restante em Benares  $\left(\frac{2}{9} \text{ de } 270 = 60\right)$ ; um quarto do restante para a alfândega  $(= \frac{1}{4} \text{ de } 210 = 52,5)$ ; seis décimos do restante em Gaya  $\left(\frac{6}{10} \text{ de } 157,5 = 94,5\right)$ . Diante disso, restam  $540 - (270 + 60 + 52,5 + 94,5) = 540 - 477 = 63$ , o resultado vai ao encontro do total que sobrou para o viajante no problema, evidenciando a assertividade da resposta.

### 3.2.4 Onde há a diferença

Na quarta parte, identificamos que ele não expõe regras, destacando apenas uma situação-problema, na qual explora aspectos contextuais indianos, que podem ser notados no trecho de Bhāskarācārya (1816), a seguir:

Um quinto de uma colmeia de abelhas voou para a flor Kadamba, um terço voou para o Silandhara, três vezes a diferença desses dois números voou para um caramanchão, e uma abelha continuou voando, atraída de cada lado pelos perfumados Ketaki e Malati. Qual foi o número de abelhas? (BHASKARACARYA, 1816, p. 34, tradução nossa).

Na situação-problema, é perceptível o interesse por questões da botânica, sendo relacionadas também às cerimônias religiosas, pois diversas flores eram oferecidas a deuses como forma de agradecimento desde o período védico (1750-500 a. C). Os estudiosos daquela época tinham um profundo conhecimento das plantas e dos usos das suas diferentes partes, usando-as para orações, rituais, comidas e cerimônias.

Nesse contexto, essa parte de *Līlavātī* aborda, com frequência, vários tipos de flores, entre elas, aparecem a Kadamba, Silandhara, Ketaki, Malati, Nenúfares. Pouco se encontra sobre essas espécies, porém há vestígios de que Kadamba é nativa do sul da Ásia, sendo utilizada em rituais religiosos. Ketaki é atribuída à flor jasmim, muito comum naquele país e as Nenúfares são flores bastante odoríferas, esta espécie possui numerosas pétalas e estames, sendo regulares, isto é, com simetria actinomorfa (LUCENA, MEDEIROS, MENDES, 2015).

Por essa razão, podemos aplicar a primeira regra nesse problema, já que ele mostra as frações  $f = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}$ <sup>19</sup>, que devem ser subtraídas de um número, o qual, implicitamente, é o número presumido  $p$ . Em seguida, ele afirma que somente uma dessas abelhas voou pelos perfumados Ketaki e Malati, sendo essa a única quantidade conhecida de abelhas, então  $c = 1$ . Dessa forma, podemos os ver passos para encontrar o resultado desconhecido. Observe-se o Quadro 11, que resume a solução dessa indagação.

**Quadro 11 – Solução do problema 4**

| Passos | Regra 1                                                                                                         | Solução                                                                                                                                              |
|--------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1      | Presumir um número qualquer.                                                                                    | $p = 60$                                                                                                                                             |
| 2      | Somar, subtrair, multiplicar ou dividir as frações dadas nos problemas dele, de acordo com o pedido da questão. | $60 - \left( \frac{1}{3} \text{ de } 60 + \frac{1}{5} \text{ de } 60 + \frac{2}{5} \text{ de } 60 \right) =$ $= 60 - (20 + 12 + 24)$ $= 60 - 56 = 4$ |

<sup>19</sup>  $\frac{2}{5}$  é colocada na indagação como a diferença das duas primeiras.

|          |                                                                                   |                     |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| <b>3</b> | Multiplicar o número presumido no passo 1 pelo número conhecido dado no problema. | $60 \times 1 = 60$  |
| <b>4</b> | Dividir o resultado encontrado no passo 3 pelo resultado encontrado no passo 2.   | $\frac{60}{4} = 15$ |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Como pode ser contemplado no Quadro 11, primeiramente, definimos 60 como o número presumido, visto que ele facilita os cálculos por ser divisível por todos os denominadores das frações envolvidas no problema. Destarte, percebemos que há três frações envolvidas  $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}$ , sendo que a terceira exposta no problema é colocada como: três vezes a diferença desses dois números, sendo esses as duas frações anteriores  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{5})$ , ou seja:  $3 \times (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) = 3 \times (\frac{5-3}{15}) = 3 \times (\frac{2}{15}) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ .

Portanto, as frações envolvidas no problema são  $f = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$  e  $\frac{2}{5}$ . Dessa maneira, fizemos a subtração dessas do  $p=60$ , obtendo:  $r = 60 - (\frac{1}{3} \text{ de } 60 + \frac{1}{5} \text{ de } 60 + \frac{2}{5} \text{ de } 60) = 60 - (20 + 12 + 24) = 60 - 56 = 4$ . Ao observarmos o problema, verificamos também que a quantidade de abelhas conhecidas é um, sendo  $c = 1$ . Multiplicando  $c = 1$  por  $p = 60$ , temos  $60 \times 1 = 60$ . Para finalizar, dividimos o resultado do produto anterior 60 pelo  $r = 4$ , isto é,  $n = \frac{60}{4} = 15$ . Sendo  $n$  o número de abelhas procurado no problema.

Como prova, basta aplicar 15 ao problema, desse modo, subtraímos de 15 os resultado de:  $\frac{1}{3} \text{ de } 15 = 5$ ;  $\frac{1}{5} \text{ de } 15 = 3$  e  $\frac{2}{5} \text{ de } 15 = 6$ , ou seja,  $15 - (5 + 3 + 6) = 15 - 14 = 1$ . Restando apenas a abelha que voou pelos perfumados Ketaki e Malati, o que reflete no acerto do problema.

### 3.2.5 Quando há a soma e a diferença

No tópico cinco, Bhāskarācārya (1816) apresenta uma terceira regra e um problema, para descobrir dois números desconhecidos, sendo que são dados, na questão, o resultado da diferença e a soma desses dois números. No que se refere à

regra, tem-se: “adicione a diferença à soma e, também a subtraia da soma. Então os resultados reduzidos pela metade serão as quantidades” (BHASKARACARYA, 1816, p. 34).

À vista disso, denotamos por  $a$  e  $b$  os números procurados no problema e sejam  $S$  a soma e  $D$  a diferença desses dois números. Logo, no segundo passo, devemos adicionar  $D$  a  $S$ , com isso, seja  $D + S = E$ . Adiante, no terceiro passo, subtraímos  $D$  de  $S$ , obtendo  $S - D = F$ . No último e quarto passo, para encontrar os números procurados, basta dividir ambos os resultados da soma e da subtração por 2, ou seja,  $a = \frac{E}{2}$  e  $b = \frac{F}{2}$  serão os números desconhecidos. Por isso, fizemos uma sintetização dessa regra no Quadro 12:

**Quadro 12 – Sintetização da regra 3**

| Passos   |                                                                                     | Matematização                 | Conteúdos Matemáticos                                                                                                                                     |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>1</b> | Identificar no problema a soma e a diferença dos números desconhecidos envolvidos.  | $S$ e $D$                     | <ul style="list-style-type: none"> <li>Noção de variável e incógnitas.</li> <li>Escrita fracionária.</li> <li>Operações com números racionais.</li> </ul> |
| <b>2</b> | Adicionar a diferença à soma.                                                       | $D + S = E$                   |                                                                                                                                                           |
| <b>3</b> | Subtrair a diferença da soma.                                                       | $S - D = F$                   |                                                                                                                                                           |
| <b>4</b> | Reduzir os resultados do passo 2 e do passo 3 na metade, ou seja, dividir por dois. | $\frac{E}{2}$ e $\frac{F}{2}$ |                                                                                                                                                           |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Bhāskarācārya (1816, p. 35) expõe o problema sem recorrer a aspectos contextuais: “a soma é 101, e a diferença é 25. Quais são as duas quantidades?”. Seguindo as orientações da terceira regra, podemos chegar aos números procurados, examinemos o Quadro 13 com a solução:

**Quadro 13 – Solução do problema 5**

| Passos   | Regra 3                                                                            | Solução              |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| <b>1</b> | Identificar no problema a soma e a diferença dos números desconhecidos envolvidos. | $S = 101$ e $D = 25$ |
| <b>2</b> | Adicionar a diferença à soma.                                                      | $E = 101 + 25 = 126$ |

|          |                                                                                     |                                                    |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| <b>3</b> | Subtrair a soma da diferença.                                                       | $F = 101 - 25 = 76$                                |
| <b>4</b> | Reduzir os resultados do passo 2 e do passo 3 na metade, ou seja, dividir por dois. | $a = \frac{126}{2} = 63$ e $b = \frac{76}{2} = 38$ |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Mediante isso, percebemos que as duas quantidades são:  $a = 63$  e  $b = 38$ , resultado coincidente com o exposto na declaração proposta por Bhāskarācārya, que menciona: “As duas quantidades são 63, 38” (BHĀSKARĀCĀRYA, 1816, p. 35). E ao olharmos o contexto da questão, constatamos que  $63 + 38 = 101$  e  $63 - 38 = 25$ , convergindo para a soma e a diferença apresentada no problema. Mostrando, assim, a singularidade das suas regras, que condizem com a veracidade para as questões colocadas.

### 3.2.6 Quando há a diferença dos quadrados

Esta parte é similar à anterior, trazendo somente uma quarta regra e um problema para exercitá-la. Todavia, identificamos que a regra apenas acrescenta um novo passo ao algoritmo visto no tópico anterior, dizendo que: “divida a diferença dos quadrados pela diferença das quantidades. O quociente será sua soma. As próprias quantidades são então encontradas pela última regra” (BHĀSKARĀCĀRYA, 1816, p. 36). O Quadro 14 sintetiza a quarta regra:

**Quadro 14 – Passo a passo da extensão da regra 4**

| Passos   |                                                                                                                                        | Matematização     | Conteúdos matemáticos                                                                                                                                                 |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>1</b> | Dividir a diferença dos quadrados (Q) pela diferença das quantidades (D), sendo que esse quociente será a soma (S) dessas quantidades. | $\frac{Q}{D} = S$ | <ul style="list-style-type: none"> <li>Noção de variável e incógnita.</li> <li>Operações (adição, subtração, divisão e potenciação) com números racionais.</li> </ul> |
| <b>2</b> | Identificar no problema a soma e a diferença dos números desconhecidos envolvidos.                                                     | S e D             |                                                                                                                                                                       |
| <b>3</b> | Adicionar a diferença à soma.                                                                                                          | $D + S = E$       |                                                                                                                                                                       |

|          |                                                                                                                                   |                                       |  |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|--|
| <b>4</b> | Subtrair a diferença da soma.                                                                                                     | $S - D = F$                           |  |
| <b>5</b> | Reduzir os resultados do passo 2 e do passo 3 na metade, ou seja, dividir por dois para encontrar as duas quantidades $a$ e $b$ . | $a = \frac{E}{2}$ e $b = \frac{F}{2}$ |  |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Com isso, averiguamos que ele adiciona somente um passo inicial a essa regra, em que aparece um novo conceito, o quadrado, dando-nos a ideia de potenciação ou área de uma figura/espço. Posteriormente à regra, Bhāskarācārya (1816, p. 36) expõe o problema, indagando o seguinte: “Quais são essas duas quantidades cuja diferença é 8 e a diferença de seus quadrados é 400?”. No Quadro 15, a seguir, tem-se a solução desse problema.

**Quadro 15 – Solução do problema 6**

| <b>Passos</b> | <b>Regra 4</b>                                                                                                                         | <b>Solução</b>                                                                |
|---------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| <b>1</b>      | Dividir a diferença dos quadrados (Q) pela diferença das quantidades (D), sendo que esse quociente será a soma (S) dessas quantidades. | $S = \frac{Q}{D} = \frac{400}{8} = 50$                                        |
| <b>2</b>      | Identificar no problema a soma e a diferença dos números desconhecidos envolvidos.                                                     | $S = 50$ e $D = 8$                                                            |
| <b>3</b>      | Adicionar a diferença à soma.                                                                                                          | $8 + 50 = 58 = E$                                                             |
| <b>4</b>      | Subtrair a soma da diferença.                                                                                                          | $50 - 8 = 42 = F$                                                             |
| <b>5</b>      | Reduzir os resultados do passo 2 e do passo 3 na metade, ou seja, dividir por dois.                                                    | $a = \frac{E}{2} = \frac{58}{2} = 29$ e $b = \frac{F}{2} = \frac{42}{2} = 21$ |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Como observamos no quadro, a diferença dos quadrados na questão é 400, ou seja,  $Q = 400$  e a diferença das quantidades é 8, isto é,  $D = 8$ . Logo, pelo passo um, obtemos:  $S = \frac{400}{8} = 50$ . Assim, podemos concluir que a diferença das quantidades é 8

( $D = 8$ ) e a soma 50 ( $S = 50$ ). Na sequência, no passo dois, devemos adicionar a diferença à soma para obter  $E$ :  $E = 50 + 8 = 58$  e, no passo três, necessitamos subtrair da soma a diferença para encontrar  $F$ :  $F = 50 - 8 = 42$ .

Portanto, precisamos reduzir  $E$  e  $F$  na metade para encontrar as partes  $a$  e  $b$ , melhor dizendo:  $a = \frac{E}{2} = \frac{58}{2} = 29$  e  $b = \frac{F}{2} = \frac{42}{2} = 21$ , chegando-se nas duas quantidades procuradas, as quais concordam com a declaração exposta em Lilavati: “as duas quantidades são 21, 29” (BHĀSKARĀCĀRYA, 1816, p. 36). De fato, são elas, pois  $29 - 21 = 8$  e  $29^2 - 21^2 = 841 - 441 = 400$ , mostrando o que Bhāskarācārya revela sobre esses números no problema 6.

### 3.2.7 Sobre os quadrados

No tópico 7, Bhāskarācārya (1816) explana duas regras e um problema. Na quinta regra, mostra dois algoritmos, aparecendo, novamente, nessa parte, os números elevados ao quadrado. Analisemos o que é mencionado por Bhāskarācārya a seguir:

Multiplique o quadrado de um número atribuído por oito e subtraia uma unidade do produto, divida metade do resto pelo número presumido, e o quociente será uma das quantidades. Adicione uma unidade à metade do quadrado dessa quantidade e o resultado será a outra quantidade, ou divida uma unidade pelo dobro de um número presumido e adicione o número presumido ao quociente. O resultado é a primeira quantidade: a segunda quantidade é uma unidade (BHASKARACARYA, 1816, p. 37).

Pela citação supracitada, inferimos que existem dois modos de encontrar duas quantidades desconhecidas, segundo Bhāskarācārya (1816, p. 37): “Os quadrados das duas quantidades sendo somados, ou subtraídos um do outro, e uma unidade subtraída do resultado, restará um quadrado”, sendo essa a singularidade delas.

No primeiro modo, inicialmente, a regra menciona: “Multiplique o quadrado de um número presumido por oito e subtraia uma unidade do produto (BHASKARACARYA, 1816, p. 37). Desse modo, seja  $p$  o número presumido, elevamos este ao quadrado, ou seja:  $p^2$ , o resultado anterior multiplicamos por 8 e subtraímos uma unidade, obtendo o resto ( $b$ ):  $p^2 \times 8 - 1 = b$ .

Subsequentemente, Bhāskarācārya (1816, p. 37) ordena: “Divida metade do resto pelo número presumido, e o quociente será uma das quantidades”. Como o resto

é  $b$ , dividamos este por 2 para obter a metade e, em seguida, pelo número presumido  $p$ , obtendo o quociente ( $Q_1$ ), que será a primeira quantidade, então,  $Q_1 = \frac{\left(\frac{b}{2}\right)}{p}$ .

Sendo assim, para encontrar a segunda parte, o autor de Lilavati assevera: “Adicione uma unidade à metade do quadrado da primeira quantidade, o resultado será a outra quantidade” (BHASKARACARYA, 1816, p. 37). Frente a isso, identificando a segunda quantidade por ( $Q_2$ ), teremos que  $Q_2 = \frac{(Q_1)^2}{2} + 1$ . Uma sintetização desse primeiro modo é apresentada no Quadro 16.

**Quadro 16 – Primeiro modo da regra 5**

| Passos   |                                                                                                                                        | Matematização               | Conteúdos Matemáticos                                                                                                                                                                |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>1</b> | Escolher um número presumido/atribuído.                                                                                                | $p$                         | <ul style="list-style-type: none"> <li>Noção de variável e incógnita.</li> <li>Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais.</li> </ul> |
| <b>2</b> | Multiplicar o quadrado do número presumido por 8 e subtrair uma unidade do produto.                                                    | $(p^2 \times 8) - 1 = b$    |                                                                                                                                                                                      |
| <b>3</b> | Dividir a metade do resto pelo número presumido, esse quociente será a primeira quantidade ( $Q_1$ ).                                  | $\frac{b}{2} = Q_1$         |                                                                                                                                                                                      |
| <b>4</b> | Adicionar uma unidade à metade do quadrado da quantidade obtida no passo 3 ( $Q_1$ ). O resultado será a segunda quantidade ( $Q_2$ ). | $\frac{Q_1^2}{2} + 1 = Q_2$ |                                                                                                                                                                                      |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Já no segundo modo da regra, Bhāskarācārya (1816, p. 37) destaca: “divida uma unidade pelo dobro de um número presumido e adicione o número presumido ao quociente. O resultado é a primeira quantidade: a segunda quantidade é uma unidade”. Dessa maneira, sendo  $p$  o número presumido, devemos dividir uma unidade (1) pelo dobro de  $p$  ( $2p$ ), ou seja:  $\frac{1}{2p}$ . A este quociente devemos adicionar  $p$ ,

encontrando a primeira quantidade:  $Q_1 = \frac{1}{2p} + p$ . A segunda quantidade é a própria unidade, sendo  $Q_2 = 1$ . Realizamos a sua sintetização no Quadro 17:

**Quadro 17 – Segundo modo da regra 5**

| Passos |                                                                                                      | Matematização            | Conteúdos Matemáticos                                                                                                                        |
|--------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1      | Escolher um número presumido.                                                                        | $p$                      | <ul style="list-style-type: none"> <li>Noção de variável e incógnita.</li> <li>Operações (adição, divisão) com números racionais.</li> </ul> |
| 2      | Dividir uma unidade pelo dobro do número presumido.                                                  | $\frac{1}{2p}$           |                                                                                                                                              |
| 3      | Adicionar o número presumido ao quociente (d) do passo 2, esse resultado será a primeira quantidade. | $Q_1 = \frac{1}{2p} + p$ |                                                                                                                                              |
| 4      | Observar que a segunda quantidade é uma unidade.                                                     | $Q_2 = 1$                |                                                                                                                                              |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Depois da quinta regra, o autor apresenta o problema: “Quais são as duas quantidades cujos quadrados sendo subtraídos um do outro, ou somados, e uma unidade subtraída do resultado, restará uma raiz? Diga-me isso se você é capaz de realizar uma operação que é difícil até mesmo para o Algebrista” (BHĀSKARĀCĀRYA, 1816, p. 37). No Quadro 18, condensamos a solução dessa indagação pelo primeiro modo.

**Quadro 18 – Solução do problema 7 pelo 1º modo da regra 5**

| Passos | Regra 5 (1º modo)                                                                   | Matematização                                                                                                  |
|--------|-------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1      | Escolher um número presumido.                                                       | $\frac{1}{2}$                                                                                                  |
| 2      | Multiplicar o quadrado do número presumido por 8 e subtrair uma unidade do produto. | $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 8\right] - 1 = \left[\frac{1}{4} \times 8\right] - 1 =$ $= 2 - 1 = 1$ |
| 3      | Dividir a metade do resto pelo número presumido, esse                               | $Q_1 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$                                                                    |

|          |                                                                                                                                        |                                                                                   |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
|          | quociente será a primeira quantidade ( $Q_1$ ).                                                                                        |                                                                                   |
| <b>4</b> | Adicionar uma unidade à metade do quadrado da quantidade obtida no passo 3 ( $Q_1$ ). O resultado será a segunda quantidade ( $Q_2$ ). | $Q_2 = \frac{(Q_1)^2}{2} + 1 = \frac{1^2}{2} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Diante do exposto acima, escolhemos a fração  $\frac{1}{2}$  para ser o número presumido, já que este facilita nossos cálculos. Então, elevamos esse número ao quadrado, multiplicamos por oito e subtraímos uma unidade:  $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 8\right] - 1 = \left[\frac{1}{4} \times 8\right] - 1 = 2 - 1 = 1$ . Com isso, escrevemos a metade desse resto, ou seja:  $\frac{1}{2}$  e dividimos por  $p = \frac{1}{2}$ , assim, teremos:  $Q_1 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$ . E como Bhāskarācārya comenta, a outra quantidade é a soma de  $\frac{(Q_1)^2}{2} + 1 = \frac{1^2}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ .

No segundo modo, escolhemos também  $p = \frac{1}{2}$ . Em seguida, dividimos a unidade pelo dobro de  $p$ , isto é:  $\frac{1}{2 \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{1} = 1$  e adicionamos a esse quociente o número presumido para encontrar a primeira quantidade, ficando  $Q_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ . A segunda quantidade já é dada na regra como  $Q_2 = 1$ . Organizamos, no Quadro 19, os passos seguidos para a solução da indagação pelo segundo modo.

**Quadro 19 – Solução do problema 7 pelo 2º modo da regra 5**

| <b>Passos</b> | <b>Regra 5 (2º modo)</b>                                                                                  | <b>Matematização</b>                               |
|---------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| <b>1</b>      | Escolher um número presumido.                                                                             | $\frac{1}{2}$                                      |
| <b>2</b>      | Dividir uma unidade pelo dobro do número presumido.                                                       | $\frac{1}{2 \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{1} = 1$ |
| <b>3</b>      | Adicionar o número presumido ao quociente anterior do passo 2, esse resultado será a primeira quantidade. | $Q_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$              |
| <b>4</b>      | Observar que a segunda quantidade é uma unidade.                                                          | $Q_2 = 1$                                          |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Após o problema Bhāskarācārya (1816, p. 35) apresenta sua última regra sobre o número presumido, mencionando: “Multiplique por oito o biquadrado e também o cubo de um número presumido, e adicione uma unidade ao primeiro produto. Os resultados serão as duas quantidades”.

Sendo  $p$  o número presumido, devemos executar seu biquadrado e seu cubo, em seguida, tem-se que multiplicar ambos os resultados por oito, ou seja:  $p^4 \times 8$  e  $p^3 \times 8$ , por fim, adicionamos 1 ao primeiro produto, obtendo a primeira quantidade  $Q_1 = p^4 \times 8 + 1$  e a multiplicação que restou é a outra quantidade  $Q_2 = p^3 \times 8$ . Um passo a passo para essa regra pode ser averiguado no Quadro 20.

**Quadro 20 – Passo a passo da regra 6**

| Passos |                                                                                    | Matematização              | Conteúdos matemáticos                                                                                                                                            |
|--------|------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1      | Escolher o número presumido.                                                       | $P$                        | <ul style="list-style-type: none"> <li>Noção de variável e incógnita,</li> <li>Operações (adição, multiplicação e potenciação) com números racionais.</li> </ul> |
| 2      | Multiplicar por oito o biquadrado do número presumido.                             | $p^4 \times 8$             |                                                                                                                                                                  |
| 3      | Para encontrar a primeira quantidade, adicionamos 1 ao primeiro produto (passo 1). | $Q_1 = (p^4 \times 8) + 1$ |                                                                                                                                                                  |
| 4      | Multiplicar por oito o cubo do número presumido que será a segunda quantidade.     | $Q_2 = p^3 \times 8$       |                                                                                                                                                                  |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Ao investigar a regra, notamos que ela também é aplicável ao problema 7, pois o mesmo busca duas quantidades. Podemos verificar a sintetização da solução desse problema no Quadro 21.

**Quadro 21 – Sintetização da solução do problema 7 pela regra 6**

| Passos | Regra 6                      | Matematização |
|--------|------------------------------|---------------|
| 1      | Escolher o número presumido. | $\frac{1}{2}$ |

|          |                                                                                   |                                                                                              |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>2</b> | Multiplicar por oito o biquadrado do número presumido.                            | $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 8 = \frac{1}{16} \times 8 = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$   |
| <b>3</b> | Multiplicar por oito o cubo do número presumido, que será a primeira quantidade.  | $Q_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 8 = \frac{1}{8} \times 8 = 1$                       |
| <b>4</b> | Para encontrar a segunda quantidade, adicionamos 1 ao primeiro produto (passo 1). | $Q_2 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 8\right] + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Atribuímos ao número presumido:  $p = \frac{1}{2}$ , desse modo, fizemos seu biquadrado, multiplicamos por oito e adicionamos um para encontrar a primeira quantidade:  $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \times 8 = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} = Q_1$ . Para a segunda, elevamos  $p$  ao cubo e multiplicamos por 8, o produto será a quantidade:  $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 8 = \frac{1}{8} \times 8 = \frac{8}{8} = 1$ .

### 3.3 Possibilidades didáticas envolvendo Lilavati e o Pensamento Algébrico

Como foi observado anteriormente, conforme Almeida e Santos (2017), o pensamento algébrico, no ser humano, é evidenciado por meio de cinco características, a saber: estabelecer relações; generalizar; modelar; operar com o desconhecido e construir significado.

Quando associamos essas características às regras do livro de Bhāskarācārya, podemos perceber que, quando o discente escolhe o número presumido, ele está passando pela característica central do pensamento algébrico: estabelecer relações. Uma vez que, ao defini-lo, o estudante tem que observar o restante do problema, porque, por ser uma variável, ele pode ser qualquer um, porém uma escolha errada pode influenciar uma possível dificuldade para a solução do problema.

Quando frisamos a matematização nos quadros do passo a passo de cada regra, relacionamos às características: generalizar e modelar, pois o futuro professor, ao transcrever a linguagem retórica para a simbologia matemática, estará modelando/generalizando a regra para utilizar nos problemas propostos.

Assim, a quarta característica, operar com o desconhecido, permeia todo o processo de entendimento da regra e ainda da aplicação do problema, visto que os

licenciandos, ao entrarem em contato com o texto, estarão constantemente operando com o desconhecido, primeiramente, com o número presumido (variável) e, em seguida, com o número desconhecido (incógnita), que vai ser encontrado no problema.

A quinta característica, construir significado, mostra-se quando o discente concebe a regra e percebe a diferença entre o número presumido e o número desconhecido, aplicando a regra ao problema de forma satisfatória. Quando o graduando tomar consciência da importância do número presumido para a solução das questões, o mesmo conseguirá estabelecer bem as relações da regra com os problemas.

Dessa maneira, além do pensamento algébrico, os discentes estão em contato com conceitos iniciais, como adição, subtração, divisão e multiplicação de frações e equação do primeiro grau, que são temas, frequentemente, estudados na Educação Básica e este último é contemplado na unidade temática Álgebra, na BNCC.

A partir do estudo envolvendo a parte “um número presumido” de Lilavati e o pensamento algébrico, outro ponto nos chamou atenção, como a ligação que pode ser estabelecida entre a Aritmética e a Álgebra. Essa junção é, algumas vezes, desvinculada atualmente, visto que as duas, no contexto escolar, são estudadas como distintas, independentes, levando o aluno a não compreender o nexo existente entre ambas. Por isso, ressaltamos:

Aritmética e Álgebra constituem, junto com a geometria, a base da matemática escolar. Não apenas essa é a percepção da maioria dos educadores matemáticos, mas essa é de fato a realidade cristalizada nos livros didáticos e nas propostas curriculares (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 12).

Logo, o tratado Lilavati traz essa relação, que pode ser vinculada à prática com os futuros professores, levando-os a considerarem a importância da junção dessas duas áreas, pois isso faz os futuros professores verem que a Álgebra não surgiu do nada e que as letras são a generalização de números. Dessa forma, devemos desmitificar a ideia de que os alunos devem aprender Aritmética antes da Álgebra, incrementando a noção de que as duas devem e podem ser trabalhadas juntas (LINS; GIMENEZ, 1997).

Com a intenção de observar ações didáticas envolvendo a parte do número presumido do Lilavati, elaboramos Unidades Básicas de Problemática (UBP),

propostas por Miguel e Mendes (2021). Essas serão expostas na seção seguinte, juntamente com aspectos iniciais sobre as UBP.

#### 4 UNIDADES BÁSICAS DE PROBLEMATIZAÇÃO ALIADAS AO LILAVATI

No século XXI, a História da Matemática vem ganhando espaço na formação de professores, trazendo reflexões sobre a construção do conhecimento matemático. Assim, buscamos oportunizar aos graduandos experiências que influenciem na sua prática docente, para que chegue aos alunos da Educação Básica uma Matemática significativa.

Dessa maneira, há recursos que foram criados para auxiliar na produção de atividades envolvendo a História da Matemática. Em meio a elas, temos as Unidades Básicas de Problematização (UBP), propostas por Miguel e Mendes (2021), que buscam, através da investigação matemática, fazer os docentes refletirem o ensino para a aprendizagem da Matemática por uma interface, levando em conta a História da Matemática.

Então, a partir da seção 3, em que foram estabelecidos conceitos matemáticos por meio das regras e dos problemas de Lilavati, criamos seis UBP. Portanto, este capítulo será dedicado a relatar, primeiramente, conceitos iniciais relacionados às UBP, tendo em vista autores como: Miguel e Mendes (2021); Wille e Novais (2017); Martins (2021); Tavares e Pereira (2016).

Em seguida, apresentamos as seis Unidades Básicas de Problematização, que foram base para esta dissertação, sendo que as três primeiras são relacionadas a aspectos iniciais do tratado, servindo para discutir seu contexto, seu autor e suas obras, como também a tradução que adotamos para este estudo e a construção das UBP: Taylor (1816).

Nas três últimas, exploramos o pensamento algébrico dos estudantes, sendo que a quarta traz a exploração da primeira regra; a quinta, a aplicação dessa técnica nos problemas 1, 2 e 4; por fim, na sexta, abordamos a discussão da solução desses problemas supracitados com a Matemática atual, objetivando compreender o conceito de número presumido após essa sequência de UBP.

Enfatizamos que, neste trabalho, só analisamos a primeira regra, porém, se o leitor desejar aplicar as demais, sugere-se uma mudança nas UBP finais, adequando-as ao texto da regra e dos problemas que serão utilizados. Já que Bhāskarācārya segue a mesma ideia durante a seção, mencionando a regra e, sucessivamente, propondo um ou mais problemas para aplicá-la.

#### 4.1 Aspectos iniciais das Unidades Básicas de Problematização (UBP)

Quando usamos recursos advindos da História da Matemática na formação de professores, temos que propor experiências significativas, promovendo reflexões sobre suas ações em função de conceitos matemáticos. Dessa maneira, isso leva-nos ao encontro das UBP, que são definidas por Miguel e Mendes (2021):

Uma UBP nada mais é do que um flash discursivo memorialístico que descreve uma prática situada em um determinado campo de atividade humana, e que teria sido de fato realizada para se responder a uma necessidade posta a uma comunidade de prática, em algum momento do processo de desenvolvimento dessa atividade na história (MIGUEL; MENDES, 2021, p. 129).

Assim, ao criar as UBP, estaremos valorizando as diversas matemáticas produzidas ao longo do tempo, promovendo uma discussão de conceitos em suas comunidades, pois cada civilização tem suas particularidades, que precisam ser postas nas unidades. Nesse sentido, concordamos com Tavares e Pereira (2016, p. 61) ao argumentarem que a UBP, quando “empregada de forma correta, pode agregar valores e tornar as aulas de Matemática dinâmicas e instigantes”.

Logo, é essencial compreender o que são essas práticas abordadas no contexto das UBP, quanto a isso, Miguel e Mendes (2021, p. 123) reverberam:

Quando falamos em práticas sociais estamos falando em ações, ou melhor, em conjuntos articulados e pré-interpretados de ações. Não em qualquer ação ou conjunto de ações, mas em ações que, mesmo quando realizadas por uma única pessoa, a fim de que possam ser significadas e interpretadas, devem ser conectadas a diferentes formas de atividade humana constituídas no tempo e no espaço. Podemos, desse modo, falar em práticas de leitura, em práticas de realização de cálculos por escrito, em práticas de coleta de lixo, etc (MIGUEL; MENDES, 2021, p. 123).

A citação nos leva à percepção de que necessitamos investigar ações, ao longo do tempo, que tenham significado e que tragam aprendizados. Fazendo, em face disso, uma exploração destas na formação docente e ainda acrescentando, nessas práticas, atividades que auxiliem na mobilização de saberes, visualizando sua influência e/ou aplicação na Educação Básica.

Ressaltamos que devemos valorizar todas as culturas matemáticas, pois todas elas têm, em seu interior, aspectos que foram importantes em sua época e podem ser pontes para o entendimento de conceitos vistos atualmente (WILLE; NOVAIS, 2017).

Nas UBP, buscam-se encontrar, a partir dessas práticas, problemas que levem os licenciandos a investigarem e a discutirem.

No que se refere à preparação dos questionamentos, o professor deve ter cuidado para que as UBP não sejam confundidas com uma lista de exercícios (MIGUEL; MENDES, 2021), (MARTINS, 2021). Dessa forma, quando abordamos problematizações, devemos construí-las de modo que os graduandos consigam ser agentes participativos de sua própria aprendizagem, adquirindo experiências que possam influenciar na sua prática. Nessa perspectiva, as UBP

Devem ser compreendidas como um convite a uma aula na qual todos têm a oportunidade de se expressar, propor soluções, inferir a partir destas e lançar novas questões que não foram vistas pelos professores. As UBP's podem propiciar um ambiente onde as pessoas são colocadas em movimento, em busca de respostas para os problemas propostos e gerados por em movimento, em buscar de respostas para os problemas propostos e gerados por meio de discussões surgidas na realização das atividades (MARTINS, 2021, p. 204).

Nesse contexto, ao aplicar essas UBP, o pesquisador tem o papel de mediador, auxiliando o futuro professor a compreender o processo de aprendizagem e de discussão, sabendo que a História da Matemática produz instrumentos que podem vir a desencadear recursos que possibilitam o entendimento de uma Matemática significativa.

Desse modo, “por ser uma metodologia ativa, a UBP está atrelada ao trabalho colaborativo promovendo o desenvolvimento de estudo em grupo e individual no ritmo de cada aluno, sendo o professor mediador desse desenvolvimento” (TAVARES; PEREIRA, 2016, p. 61).

Por metodologia ativa, entende-se que, no centro da atividade educativa, está o aluno, no nosso caso, futuros professores de Matemática, sendo eles sujeitos ativos capazes de produzir o seu próprio conhecimento. Nesse processo, o professor/pesquisador é um facilitador desse meio, criando oportunidades que suscitem a protagonização dos discentes (LIMA; CABRAL; SILVANO, 2021).

Diante do apresentado, destacamos a aprendizagem cooperativa, que pode ser propiciada pela UBP sobre a ótica do trabalho em grupo, ofertando aos estudantes a possibilidade de discutirem suas ideias conjuntamente, superando obstáculos, por vezes, difíceis para um do grupo, mas superados por outros. Com isso, concordamos com Lima, Cabral e Silvano (2021), ao afirmarem que

A aprendizagem cooperativa pode ser uma excelente aliada quando se fala em ensino de matemática, pois os alunos conseguem aprender e discutir melhor conteúdos e problemas quando falam a mesma linguagem, diferente do que se tivesse tirado as dúvidas com o professor. Ao estudarem em grupos de estudos, os estudantes perdem obstáculos como medo e vergonha de não terem aprendido certos conteúdos, e passam a construir os seus conhecimentos de forma coletiva, por meio da ajuda dos colegas (LIMA; CABRAL; SILVANO, 2021, p. 9-10).

Isso dito pelos autores não é diferente para a formação de docentes, que estão constantemente aprendendo sobre sua prática, podendo ser próspero para a construção de conhecimento em conjunto e por meio de discussões. Ante isso, nosso estudo aponta para a construção de UBP associadas ao trabalho em grupo nas atividades, que foram posteriormente aplicadas.

No que concerne à elaboração da UBP, não existe um modelo único, ela deve conter uma problematização e questionamentos, como já foi apontado na discussão acima. Comentaremos, aqui, quatro modelos com os quais nos deparamos em trabalhos acadêmicos, que se encontram em: Lima Filho, Santos e Mendes (2013); Wille e Novais (2017); Tavares e Pereira (2016) e Martins (2021).

Lima Filho, Santos e Mendes (2013), quando propõem uma UBP, evidenciam duas partes: problematização e atividades. Na problematização, eles trazem, na primeira parte, uma introdução ao tema, revelando conceitos matemáticos atuais a serem discutidos, esclarecendo seu objetivo com a UBP. Em seguida, expõem informações sobre a problematização histórica investigada. Na segunda parte, eles mostram três atividades envolvendo o contexto atual, nas quais os alunos têm de responder com os conhecimentos do passado.

Wille e Novais (2017), ao apresentarem uma UBP, começam com uma breve introdução sobre a temática explorada no contexto atual. Em seguida, nomeiam a segunda parte de atividade, que contém uma problematização de como os babilônios costumavam medir áreas. Por fim, os autores expõem questionamentos, que devem ser respondidos explorando o texto.

Tavares e Pereira (2016) mostram uma UBP intitulada: Medir o tempo através dos movimentos da Terra pela direção Sul. As autoras dividem a UBP nos seguintes tópicos: introdução, mostrando um panorama geral; conteúdos, sendo os atuais que serão explorados; objetivos; metodologia que adotou para a aplicação; problematização histórica; problematização atual e questionamentos.

Martins (2021) traz várias UBP na sua tese, todas seguem a mesma divisão, apresentando aos leitores os objetivo(s), uma problematização/texto base, que traz o contexto a ser explorado e, no final, elenca uma série de questionamentos com fundamento no texto histórico proposto, estimulando a investigação.

Portanto, para este estudo, seguiremos o modelo adotado por Martins (2021), especificando, inicialmente, o objetivo; depois, um texto base/problematização, que envolve o assunto tratado na UBP; terminando com seus questionamentos, que explorarão a investigação e a protagonização dos estudantes frente aos desafios propostos.

#### **4.2 UBP aliadas ao pensamento algébrico na obra Lilavati, de Bhāskarācārya**

Ao verificar o tópico acima, aliando ao pensamento algébrico, percebemos que as UBP podem ser pertinentes para este estudo, por serem uma metodologia ativa, que busca desenvolver nos futuros professores uma criticidade diante das atividades propostas. Sobre aspectos históricos através de UBP na formação de professores, Tavares e Pereira (2016) mencionam que

A confecção de UBP a partir de práticas históricas de cultura matemática para o ensino tem por objetivo contribuir na formação de professores com uma proposta que enfatiza a participação do aluno no processo de aprendizagem dando-lhe autonomia na aquisição e construção de conhecimento matemático com uma pensar crítico e reflexivo (TAVARES; PEREIRA, 2016, p. 63).

Isso nos faz concluir que, ao fazer a junção do texto histórico de Lilavati, focando em trecho que faça emergirem pensamentos algébricos, os estudantes serão levados a discutirem essa temática proposta na BNCC, como foi explicitado no capítulo 3. Essas ações investigativas podem trazer diversos questionamentos para os licenciandos.

Quanto à exploração do pensamento algébrico envolvendo Lilavati, elaboramos as UBP, que explanam o conteúdo da décima segunda parte de Lilavati, o número presumido, analisado no capítulo anterior. As três primeiras buscam apresentar aos estudantes o tratado estudado, desde seu contexto, perpassando por seu autor e finalizando com uma sinopse da tradução estudada, pois esses aspectos iniciais são

relevantes para que os graduandos se situem em relação à temática histórica estudada.

Já as três finais têm por intuito oportunizar aos estudantes a prática do pensamento algébrico e fomentarão discussões sobre ações e percepções dos licenciandos frente a essa temática. A seguir, expomos um quadro síntese das UBP e de seus objetivos:

**Quadro 22 – Síntese das UBP**

| UBP | Título                                             | Objetivo(s)                                                                                                                            |
|-----|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1   | Aspectos contextuais da cultura matemática indiana | Conhecer os aspectos contextuais e matemáticos da Índia, estabelecendo características dos períodos Ariano e Védico.                   |
| 2   | Bhāskarācārya: vida e obra                         | Conhecer o autor Bhāskarācārya, discutindo aspectos contextuais e matemáticos, que estão em algumas obras de Bhāskarācārya.            |
| 3   | Lilavati e a tradução de Taylor (1816)             | Explorar a obra Lilavati, através da tradução para o inglês de Jonh Taylor (1816), estabelecendo aspectos contextuais e matemáticos.   |
| 4   | Līlavātī e o número presumido                      | Compreender a primeira regra da parte “um número presumido”.                                                                           |
| 5   | Os problemas referentes à primeira regra           | Compreender a aplicação da primeira regra nos problemas 1, 2 e 4.                                                                      |
| 6   | Problemas de Lilavati na Matemática atual          | Desenvolver a solução dos problemas 1, 2 e 4 com a Matemática atual; perceber a diferença do número presumido para o número conhecido. |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Assim, na primeira UBP, buscamos a investigação de aspectos contextuais da cultura matemática da civilização indiana ao longo dos séculos, explorando as suas primeiras civilizações (Harappa e Mohenjodaro). Ademais, visamos investigar matemáticas que foram encontradas nas práticas indianas.

A segunda UBP tem o propósito de os alunos pesquisarem sobre a vida e as obras de Bhāskarācārya, a fim de conhecerem aspectos da Matemática desse autor, observando o contexto em volta das suas obras, construindo, então, elementos culturais e matemáticos, que remontam ao século XII.

A terceira UBP leva os discentes a examinarem, exclusivamente, o tratado Lilavati, de Bhāskarācārya, explorando todo seu conteúdo, relacionando a conceitos matemáticos atuais e ainda procurando elementos desse tratado que podem revelar elementos contextuais do século XII.

A quarta UBP vai aprofundar a primeira regra de Bhāskarācārya, objetivando compreendê-la por meio de um contato inicial, pretendendo, nessa técnica, um modo de aplicá-la. É importante que o graduando identifique os passos que deve seguir para responder a um problema, constatando os termos matemáticos envolvidos, tudo isso mediante a leitura e a exploração da regra apresentada na problematização.

A quinta UBP irá verificar o que os estudantes estabeleceram na UBP 4. Testando se o seu passo a passo e os termos identificados são suficientes para responder aos problemas 1, 2 e 4. Estabelecendo relações entre a regra e as indagações, entendendo o que Bhāskarācārya propôs.

Com isso, na sexta UBP, farão a solução dos problemas pela Matemática atual, os alunos terão que os traduzir para a linguagem atual e resolvê-los. Após essa atividade, eles refletirão sobre todo o processo que passaram durante a aplicação desse conjunto de UBP, apresentando uma síntese do que apreenderam sobre o número presumido e se existe a diferença dele para o número procurado no problema. Portanto, a seguir, mostraremos as seis Unidades Básicas de Problematização.

#### **4.2.1 UBP 1 – Aspectos contextuais da cultura matemática indiana**

**Objetivo:** Conhecer os aspectos contextuais e matemáticos da Índia, estabelecendo características dos períodos Ariano e Védico.

##### **Problematização**

A Matemática da Índia é dividida em dois períodos principais: Ariano e Védico (pós-invasão Ariana). Um texto que aborda uma perspectiva atualizada das características dessas épocas é a tese de Maria Terezinha Jesus Gaspar, intitulada: Aspectos do Desenvolvimento do Pensamento Geométrico em algumas civilizações e

povos e a formação de professores. Verifiquemos um trecho dessa tese em anexo (Anexo 1).

### Questionamentos

1) Após a leitura do Anexo 1, quais características relacionadas à religião; às atividades econômicas do período; às fontes matemáticas iconográficas/documentais; às particularidades ligadas a um dos períodos; aos nomes de estudiosos de ciências matemáticas (se houver); aos conceitos matemáticos da época podem ser percebidas?

**Observação:** Se desejarem, podem utilizar outras fontes de pesquisa, como: livros clássicos de História da Matemática, internet, entre outros, para complementarem suas respostas.

2) Você consegue elaborar um cartaz envolvendo as características do período estudado, utilizando imagens e textos? Existe um painel exposto na sala com imagens, que podem servir de base para a sua produção.

### 4.2.2 UBP 2: Bhāskarācārya: vida e obra

**Objetivo:** Conhecer o autor Bhāskarācārya, discutindo aspectos contextuais e matemáticos, que estão em algumas obras de Bhāskarācārya.

### Problematização

A Índia do século XII foi marcada pela agricultura, pelas manufaturas e pelo comércio. Nesse contexto, a Matemática da época é composta por problemas práticos, que envolvem a venda de ouro, cultivo de grãos, criação de animais (PLOFKER, 2008). Fazendo parte dos estudiosos e escritores dessa época, temos Bhaskara II ou Bhāskarācārya, que foi um astrônomo e astrólogo hindu, que nasceu em *Biddur*, uma cidade no *Deccan*, no ano de 1036, *Salivahana* (*Śaka*<sup>20</sup>), que corresponde ao ano 1114 da era cristã (TAYLOR, 1816). Já Eves (2011) afirma que ele viveu em Ujjain, localizada na região norte da Índia e morreu em 1185. Entretanto, o próprio *Bhāskarācārya* descreve, no último capítulo do livro *Golādhyāya*, que “ele pertencia à linhagem Śāndilya e que viveu em Vijjalavida” (PATWARDHAN; NAIMPALLY; SINGH, 2006, p. XVI).

---

<sup>20</sup> Calendário Hindu.

Embora não se saiba com precisão o local onde *Bhāskarācārya* viveu<sup>21</sup>, todos esses locais se situam na região norte da Índia e, sobre esse local, Plofker (2008, p. 6, tradução nossa) afirma que, “[...] no norte do Sul da Ásia, [...] há um longo histórico de comunidades assentadas com animais domesticados e grãos da agricultura”<sup>22</sup>. E ainda acrescenta que as culturas passadas, nessa região, apresentavam “agricultura, arquitetura, manufatura e comércio amplamente desenvolvidos” (PLOFKER, 2008, p. 7, tradução nossa)<sup>23</sup>.

Patwardhan, Naimpally e Singh (2006, p. XVI) afirmam que ele “estudou todas as ciências sob a orientação de seu pai Maheśvara. Maheśvara que foi um grande astrólogo. Como *Bhāskarācārya* estudou sob a orientação de um professor tão competente, ele se tornou um especialista em muitos ramos do aprendizado”. Esse fato também pode ser confirmado na passagem do problema 61 da obra *Golādhyāya*.

Ele escreveu diversos trabalhos voltados para a área de Astronomia e Matemática, sendo o mais conhecido um compilado de obras intitulado: *Siddhāntaśiromani*, escrito aos 36 anos. Patwardhan, Naimpally e Singh (2006) comentam que essa obra está dividida em quatro partes: (1) *Līlavātī*, (2) *Bījaganita*, (3) *Golādhyāya*, (4) *Gaṇitādhyāya*, em que a primeira aborda conceitos de Aritmética, a segunda de Álgebra, a terceira se refere aos Movimentos Planetários e a quarta trata da Astronomia.

O livro *Līlavātī* é considerado como uma introdução aos assuntos de Astronomia, dedicando sua maior parte ao estudo da Aritmética, mas outras áreas do conhecimento também podem ser encontradas, como Álgebra, Trigonometria e Geometria. Alguns livros de História da Matemática (BOYER, 2011; JOSEFH, 2016; EVES, 2011) contam uma lenda sobre a justificativa envolvendo a escrita do texto e do seu título. Segundo Boyer (2011):

O nome do título é o da filha de Bhaskara que, segundo a lenda, perdeu a oportunidade de se casar por causa da confiança de seu pai em suas previsões astrológicas. Bhaskara tinha calculado que sua filha só poderia se casar de modo propício em uma hora determinada de um dia dado. No dia que deveria ser o de seu casamento, a jovem ansiosa estava debruçada sobre o relógio de água quando se aproximava a hora do casamento, quando

<sup>21</sup> Para uma discussão mais ampliada da cidade onde *Bhāskarācārya* viveu, vide: Patwardhan, Naimpally e Singh (2006, p. XVI e XVII).

<sup>22</sup> “[...] in northern South Asia, [...] there is a long record of settled communities with domesticated animals and grain agriculture (PLOFKER, 2008, p. 6).

<sup>23</sup> “[...] show extensively developed agriculture, architecture, manufacture, and trade (PLOFKER, 2008, p. 7).

uma pérola em seu cabelo caiu, sem ser observada, e deteve o fluxo de água. Antes que o acidente fosse notado, a hora propícia passara. Para consolar a infeliz moça, o pai deu seu nome ao livro que estamos descrevendo (BOYER, 2011, p. 161).

Embora essa lenda seja encontrada em diversos livros didáticos, paradidáticos e de História da Matemática, não se tem certeza se é verídica. Outro ponto a destacar é o fato de o tratado *Līlavāṭī* ter sido utilizado por muitos anos nas escolas indianas, refletindo sua importância acadêmica e histórica, principalmente, como forma de registrar o conhecimento de uma determinada época. Essa afirmação é confirmada por Patwardhan, Naimpally e Singh (2006, p. vi, tradução nossa), ressaltando que *Līlavāṭī* “foi usado na Índia como livro didático por muitos séculos. Ainda agora, ele está sendo usado em escolas de sânscrito em alguns estados”.

O tratado *Līlavāṭī* apresenta diversas definições, métodos matemáticos e 119 problemas envolvendo aplicações do conteúdo proposto, contendo uma Matemática prática que ensina o saber/fazer. O livro não contém demonstrações, indicando um público-alvo mais geral.

O livro *Bījaganita* é dedicado à Álgebra, em particular, ao estudo das equações. Em 1634, Ata Allah Rashidi traduziu para o persa esse tratado e uma versão inglesa foi publicada por Edward Strachey, em 1813, a qual dividiu o livro em seis partes: (1) Introdução, (2) Sobre equações simples (1º grau); (3) Sobre equações quadráticas; (4) Sobre equações envolvendo questões indeterminadas do 1º Grau; (5) Sobre equações envolvendo questões indeterminadas do 2º Grau e (6) Sobre equações envolvendo retângulos (ACHARYA, 1813).

Os livros *Golādhyāya* e *Gaṇitādhyāya* se referem à Astronomia. Conforme Joseph (2016, p. 291, tradução nossa):

A primeira seção de *Siddhantasiromani*, o *Ganitadhyaya*, contém uma discussão de métodos computacionais para calcular medidas como movimentos médios, movimentos verdadeiros, eclipses solares e lunares que formavam o modelo padrão do trabalho astronômico daquele período. A segunda seção, *Goladhyay*, contém assuntos relacionados à gola (ou a esfera) incluindo a forma e a forma da esfera e sua relevância para a terra esférica. Essa discussão é intercalada com uma interpretação poética da majestade das estações e perguntas para testar o conhecimento dos leitores (JOSEPH, 2016, p. 291, tradução nossa).

Dessa forma, percebe-se que o tratado *Siddhāntaśiromani*, de *Bhāskarācārya*, traz importantes elementos para a reconstrução da Matemática indiana no século XII.

### Questionamentos

- 1) Quais aspectos contextuais podem ser estabelecidos, com evidências do texto, após uma leitura longitudinal dos tratados escritos por Bhāskarācārya no seu *Siddhāntaśiromani*: Līlavātī e Bījaganita?
- 2) Quais aspectos matemáticos podem ser estabelecidos, com evidências do texto, após uma leitura longitudinal dos tratados escritos por Bhāskarācārya no seu *Siddhāntaśiromani*: Līlavātī e Bījaganita?
- 3) Você consegue escrever um texto corrido com a sintetização das respostas anteriores, destacando as evidências encontradas nos tratados estudados?

#### 4.2.3 UBP 3: Lilavati e a tradução de Taylor (1816)

**Objetivo:** Explorar a obra Lilavati, através da tradução para o inglês de Jonh Taylor (1816), estabelecendo aspectos contextuais e matemáticos.

A tradução *Lilawati: or a treatise on Arithmetic and Geometry* foi realizada por John Taylor e foi publicada em Bombaim, cidade ao sudoeste da Índia, em 1816. Essa edição se encontra no acervo da coleção da biblioteca de Cambridge e foi feita a partir de um trabalho colaborativo com *Royal Asiatic Society da Grain Britain e Irlanda*. De acordo com Taylor (1816, p. 3), o objetivo da tradução é

Fornecer um documento autêntico que, ao exhibir não apenas o grau real de conhecimento matemático possuído pelos hindus no século XII, mas também, ao mostrar seus modos e princípios de operação, pode levar a uma conclusão justa sobre suas pretensões de originalidade neste departamento de ciência (TAYLOR, 1816, p. 3).

Nessa versão, Taylor (1816), inicialmente, apresenta uma introdução contendo a biografia de *Bhāskarācārya*, uma breve descrição dos livros e comentários sobre as alterações feitas na sua tradução, justificando-as. Segundo ele:

O Lilavati exhibe um sistema aritmético regular, bem relacionado e, considerando o período em que foi escrito; contém muitas proposições úteis em geometria e mensuração. É o primeiro trabalho que é estudado por astrônomos hindus, ou melhor, astrólogos; pois neste país essas duas profissões estão sempre unidas e, em geral, a primeira é considerada subserviente à última. As regras são escritas em versos em um estilo muito conciso e elíptico, e não possuem em nenhum grau a obscuridade, característica das composições sânscritas sobre ciência e filosofia. (TAYLOR, 1816, p. 2, tradução nossa).

Também são mostrados alguns conceitos matemáticos introdutórios, como a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão, ao que o tradutor alega que essas merecem atenção, pois as operações são apresentadas por *Bhāskarācārya* de um modo singular, não existente em nenhum outro livro didático. A seguir, Taylor (1816) exhibe a descrição das partes de *Līlavātī*, conforme o Quadro 23, a seguir:

**Quadro 23 – Conteúdo de *Līlavātī* na versão Taylor (1816)**

| PARTE | CONTEÚDO                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| I     | (1) Tabelas de dinheiro, pesos, etc; (2) Adição e Subtração; (3) Multiplicação; (4) Divisão; (5) O quadrado; (6) Raiz quadrada; (7) Cubo; (8) Raiz cúbica; (9) Frações; (10) O Efeito da Cifra; (11) Inversão; (12) Um número presumido; (13) Multiplicador da Raiz; (14) Regra das três quantidades; (15) Regras de Cinco, etc. quantidades; (16) Regra de trocas; (17) Quantidades mistas; (18) Comprando e vendendo; (19) Computando ouro; (20) Permutação; (21) Progressão. |
| II    | <b>CAPÍTULO I:</b> Operações Geométricas.<br><b>CAPÍTULO II: Seção I</b> – Dos círculos; <b>Seção II</b> – De libras; <b>Seção III</b> – Dos tijolos ou pedras em parede; <b>Seção IV</b> – Do Corte de madeiras, etc.; <b>Seção V</b> – De montes; <b>Seção VI</b> – Das sombras.                                                                                                                                                                                              |
| III   | <b>Seção I</b> – Do <i>Kutaka</i> ; <b>Seção II</b> - Do <i>Sthira</i> ou <i>Kutaka</i> Fixo; <b>Seção III</b> – Do <i>Sanslista Kutaka</i> .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| IV    | Das transposições; Apêndice.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |

Fonte: Adaptado de Taylor (1816).

Por meio do quadro, é perceptível a quantidade de conceitos que *Bhāskarācārya* deixou registrado, refletindo a importância acadêmica e histórica desse tratado, principalmente, como forma de conservar o conhecimento de uma determinada época.

Assim, com o estudo de *Līlavātī*, percebemos que ela é composta de diversas definições, métodos matemáticos e 119 problemas envolvendo aplicações do conteúdo proposto, contendo uma Matemática prática, que ensina o saber/fazer. O livro não contém demonstrações, indicando um público-alvo mais geral (SILVA; SILVA; PEREIRA, 2018).

Ao longo dessa da tradução, Taylor (1816) faz comentários sobre os registros de *Bhāskarācārya*, explicando, detalhadamente, algumas passagens por meio da Matemática atual. Além disso, ele esclarece alguns termos de origem indiana, como,

por exemplo, a *Kutaka*, que se refere a termos desconhecidos presentes em problemas da terceira parte de *Līlavātī*.

### Questionamentos

- 1) Após a leitura, quais elementos matemáticos estão presentes no tratado de *Līlavātī*. Vocês identificam áreas atuais (Aritmética, Geometria, Álgebra, Trigonometria, entre outras) de ensino nos problemas propostos no tratado? Apresentem evidências.
- 2) Você pode descrever as suas impressões iniciais sobre o tratado de *Līlavātī*? O texto deverá ter, no máximo, 20 linhas.

#### 4.2.4 UBP 4: *Līlavātī* e o número presumido

**Objetivo:** Compreender a primeira regra da parte “um número presumido”.

### Problematização

No tratado *Līlavātī*, percebemos uma vasta quantidade de conteúdos, que perpassam pela Aritmética, Geometria e Álgebra. Nesse documento, Bhāskarācārya tem a singularidade de sempre apresentar os métodos de uma Matemática que ensina o como fazer e depois deixa seus problemas para que o leitor possa comprovar que suas regras funcionam.

É importante destacar que o livro não apresenta demonstrações, nem a aplicação do método nas questões propostas. O tópico “um número presumido”, que se encontra na primeira parte do *Līlavātī*, sendo o décimo segundo conteúdo a ser apresentado, é dividido em 7 tópicos, intitulados: (1) número presumido; (2) onde uma certa quantidade é conhecida; (3) onde estão os restos; (4) onde existe uma diferença; (5) quando existe soma e a diferença; (6) quando existe a diferença de quadrados; (7) a respeito de quadrados.

Na primeira regra contida na parte (1), Bhāskarācārya (1816, p. 34) menciona: **“multiplique, divida, subtraia ou some as frações com o número presumido, de acordo com as condições da questão. Pelo resultado da operação anterior, divida o produto do número conhecido pelo presumido. O quociente será o número necessário”**.

### Questionamentos

- 1) Observando a **primeira regra**, quais as suas primeiras impressões sobre ela?

- 2) A partir da leitura e das impressões da regra, qual uma matematização<sup>24</sup> possível para ela? Faça as anotações de como procedeu.
- 3) Quais passos devem ser seguidos para uma possível aplicação da regra?
- 4) Quais conhecimentos matemáticos são apresentados na regra do número presumido exposta por Bhāskarācārya?

#### 4.2.5 UBP 5 - Os problemas referentes à primeira regra

**Objetivo:** Compreender a aplicação da regra nos problemas 1, 2 e 4.

#### Problematização

O contexto apresentado, no tratado Lilavati, é voltado para questões religiosas e, algumas vezes, botânicas. Para os indianos, os deuses eram muito importantes, pois acreditavam que tudo viera deles, a sabedoria, o universo, a destruição, sendo eles politeístas. Entre os deuses hindus, podemos citar Mahadev, Huri, Sol, Devi. O primeiro e o segundo são também nomeados como Shiva e Vishnu e fazem parte dos deuses que compõem o hinduísmo. Lima et al. (2016, p. 13) reverberam que

Podemos citar como os deuses mais importantes do Hinduísmo o Brahma, Shiva e Vishnu, que compõe o que muito denominam como a Trimurti Hindu. Apesar de ser um grupo de três, torna-se difícil colocá-los como trindade, pois cada um possui uma característica própria que o difere dos demais. Os três são tradicionalmente agrupados, pois cada um seria responsável por um aspecto da existência do mundo: criação, manutenção e destruição (LIMA et al., 2016, p. 13).

Já o Sol é encontrado na literatura como Surya, uma das principais divindades solares entre os deuses hindus e, no subalsutra RigVeda, aparecem adorações e elogios a ele. Devi, por sua vez, refere-se à forma feminina de Mahadev, sendo a nomenclatura atribuída a uma Deusa mulher.

Outro personagem importante, na religiosidade indiana, é o professor espiritual, também chamado de Guru, era responsável por educar e repassar saberes aos indianos, “segundo os textos sagrados indianos, a autoridade do mestre espiritual é absoluta e inquestionável, pois ele é considerado uma incorporação do conhecimento que transmite” (MARSON; IVO, 2012, p. 130).

---

<sup>24</sup> É o mesmo que escrever uma fórmula geral para a regra ou linguagem matemática.

Outro fato apresentado é o interesse por questões da botânica, sendo relacionadas também às cerimônias religiosas, pois diversas flores eram oferecidas a deuses como forma de agradecimento desde o período védico (1750-500 a.C). Os estudiosos daquela época tinham um profundo conhecimento das plantas e dos usos das suas diferentes partes, usando-as para orações, rituais, comidas e cerimônias. Isso é apoiado pelos textos das antigas escrituras indianas conhecidas como Vedas, que descrevem e mencionam os vários usos de plantas e flores.

Nesse contexto, essa parte de *Līlavātī* aborda, com frequência, vários tipos de flores, entre elas, aparecem Kadamba, Silandhara, Ketaki, Malati, Nenúfares. Pouco se encontra sobre essas espécies, porém tem-se vestígios de que Kadamba é nativa do sul da Ásia, sendo utilizada em rituais religiosos; Ketaki é atribuída à flor jasmim, muito comum naquele país e as Nenúfares são flores bastante odoríferas, esta espécie possui numerosas pétalas e estames, sendo regulares, isto é, com simetria actinomorfa. O gênero *Nymphaea* é amplamente distribuído nas regiões tropicais e temperadas de todo o mundo (LUCENA, MEDEIROS, MENDES, 2015). Esse contexto, que permeava a região norte da Índia, próspera em cultivo de flores, sendo percebida uma religiosidade envolta, consta nos problemas resolvíveis pela primeira regra de Lilavati, que podem ser vislumbrados na tabela a seguir:

**Quadro 24 – Problemas referentes à primeira regra**

| Ordem | Problemas                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1     | Um número é multiplicado por 5, desse produto é subtraído um terço de si mesmo e o restante é dividido por 10. A este quociente, é adicionado $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ do número presumido e o resultado é 68. Qual é o número?                                           |
| 2     | Um terço de uma coleção de belos nenúfares é oferecido a Mahadev, um quinto a Huri, um sexto ao Sol, um quarto a Devi e seis restantes são apresentados ao professor espiritual. Qual o número inteiro de nenúfares?                                                                     |
| 4     | Um quinto da colmeia de abelhas voou para a flor Kadamba, um terço voou para o Silandhara, três vezes a diferença desses dois números voou para um caramanchão e uma abelha continuou voando, atraída de cada lado pelos perfumados Ketaki e Malati. Qual foi o número total de abelhas? |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

### Questionamentos

1) Seguindo a primeira regra de Bhāskarācārya, qual a solução dos problemas 1, 2 e 4? Organize seu raciocínio em passos. Não utilize conhecimentos matemáticos modernos, use somente os passos que Bhāskarācārya forneceu.

#### 4.2.6 UBP 6 – Problemas de Lilavati na Matemática atual

**Objetivos:** Desenvolver a solução dos problemas 1, 2 e 4 com a Matemática atual; perceber a diferença do número presumido para o número conhecido.

### Problematização

Os problemas podem ser vinculados a conteúdos atuais. Sendo resolvidos por meio de uma equação do primeiro grau, assunto esse pelo qual alunos da Educação Básica desenvolvem uma aversão por, muitas vezes, não conseguirem transpor uma escrita retórica de uma equação para a linguagem matemática e ainda considerarem uma dificuldade a junção de letras com números. Diante disso, observemos, novamente, os problemas propostos na UBP 5, a seguir:

- Um número é multiplicado por 5, desse produto, é subtraído um terço de si mesmo e o restante é dividido por 10. A este quociente, é adicionado  $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$  do número presumido e o resultado é 68. Qual é o número?
- Um terço de uma coleção de belos nenúfares é oferecido a Mahadev, um quinto a Huri, um sexto ao Sol, um quarto a Devi e seis restantes são apresentados ao professor espiritual. Qual o número inteiro de nenúfares?
- Um quinto da colmeia de abelhas voou para a flor Kadamba, um terço voou para o Silandhara, três vezes a diferença desses dois números voou para um caramanchão e uma abelha continuou voando, atraída de cada lado pelos perfumados Ketaki e Malati. Qual foi o número total de abelhas?

### Questionamentos

1) Qual a solução para os problemas 1, 2 e 4 utilizando os conceitos matemáticos atuais? Organize seu raciocínio em passos.

- 2) Quais as similaridades e as diferenças do método utilizado por Bhāskarācārya para o modo de solução atual utilizado?
- 3) Você pode escrever um pequeno texto sobre a compreensão do conceito de “número presumido”? Utilize a discussão da regra e dos problemas/exemplos contidos no Līlavātī, de Bhāskarācārya, apresentados nas UBP anteriores.

## 5 PERCURSO METODOLÓGICO

Uma pesquisa desenvolvida no nível de pós-graduação necessita de metodologias que possam guiar sua elaboração e coleta dos dados. Para esta investigação, escolhemos a metodologia de pesquisa denominada Engenharia Didática, que tem por objetivo arquitetar um estudo, auxiliando desde a construção da temática de investigação, perpassando pela aplicação e pela análise de situações didáticas no ensino.

Nesta seção, primeiramente, iremos comentar sobre os preceitos da Engenharia Didática, descrevendo suas quatro fases: análises prévias ou preliminares; análise *a priori*; experimentação e análise *a posteriori* e validação, abordando como elas estão entrelaçadas com o desenvolvimento desta investigação.

Posteriormente, apresentaremos o lócus, evidenciando suas características, comentado o que nos fez escolhê-lo. Em seguida, trazemos algumas singularidades dos sujeitos participantes da pesquisa e expomos o desenvolvimento da formação aplicada com futuros professores de Matemática. No final, mostramos como se deu a coleta de dados desta investigação.

### 5.1 Preceitos da Engenharia Didática

A Engenharia Didática é uma metodologia de pesquisa que surgiu na década de 1980, emergindo na Didática da Matemática. Artigue (1988) associa essa forma de trabalho didático ao do engenheiro. Baseado na autora supracitada, Almouloud (2007, p. 171) reverbera que esse recurso metodológico, “para realizar um projeto, se apoia em conhecimentos científicos de seu domínio, aceita se submeter a um controle de tipo científico, mas ao mesmo tempo, é obrigado a trabalhar objetos mais complexos que os objetos depurados da ciência”.

Nesse contexto, a Engenharia Didática vem percorrendo toda a pesquisa, moldando o processo, para que os objetivos sejam validados e tenhamos subsídios que formem discussões em sala de aula. Almouloud (2007) menciona que o professor/pesquisador, quando entra em prática, nessa metodologia, tem papel de mediador e orientador, cujas ações devem ser desenvolvidas de modo que não prejudique a participação ativa do discente/participante em relação à aquisição de conhecimentos.

Assim, uma das ações do professor/pesquisador é o planejamento de sessões didáticas para serem aplicadas, fazendo um estudo/investigação em torno de uma problemática identificada anteriormente. Almouloud e Coutinho (2008) caracterizam, detalhadamente, a Engenharia Didática:

A Engenharia Didática, vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se, em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre *análise a priori* e *análise a posteriori*. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste (ALMOULOU; COUTINHO, 2008, p. 66).

Nessa conjuntura, nota-se que a organização dessa metodologia nos permite subsídios, que podem ser aliados às UBP, apresentadas na seção anterior, promovendo situações que concedem aos licenciandos a oportunidade de exercitarem o pensamento algébrico.

No que se refere à aplicação da Engenharia Didática na pesquisa, desenvolvemo-la por meio de quatro fases, a saber: as análises prévias ou preliminares; *análise a priori*; experimentação; *análise a posteriori* e validação.

Portanto, a primeira fase, análises prévias ou preliminares, tem por intuito que o pesquisador estabeleça, com precisão, o seu objeto de estudo, investigando sua problemática. Almouloud (2007, p. 172) menciona que “um dos objetivos das análises prévias é identificar os problemas de ensino e aprendizagem do objeto de estudo e delinear de modo fundamentado a(s) questão(ões), as hipóteses, os fundamentos teóricos e metodológicos da pesquisa”.

Com isso, é importante frisarmos que essa fase pode ser usada em todo o desenrolar da pesquisa e esse termo “preliminar” ou “prévia” indica apenas uma organização das fases (ARTIGUE, 1988). Dessa forma, salientamos que “estas análises preliminares devem permitir ao pesquisador a identificação das variáveis didáticas potenciais que serão explicitadas e manipuladas nas fases que se seguem” (ALMOULOU, 2007, p. 173-174).

Diante disso, na primeira fase, desenvolvemos a tradução de Lilavati, levantando aspectos contextuais, históricos e matemáticos, que são vinculados à interface entre história e ensino de Matemática, o que nos levou a fazer uma pesquisa documental e bibliográfica sobre o tratado e os conceitos presentes nele.

Concernente à segunda etapa, análise *a priori*, o autor Almouloud (2007) apresenta, como propósito seu, a construção de momentos didáticos envolvendo situações-problema, as quais devem levar em conta os resultados da fase anterior, ou seja, precisamos estabelecer conexões entre nossos objetivos, promovendo ações que levem à sua concretização.

Em face disso, enfatizamos que, como apoio para a construção dessas situações didáticas, criamos as Unidades Básicas de Problematização, descritas na seção 4, para aplicação na formação de futuros professores de Matemática. Como definimos nosso objeto de estudo como sendo o pensamento algébrico, então, foram construídas atividades a partir dos conceitos matemáticos estabelecidos na seção 3 e exploradas na seção 4, para dar suporte à discussão da temática.

Assim, as situações-problema, que Almouloud (2007) destaca, devem ser elaboradas por meio de questões abertas ou fechadas, sendo matematizadas com um ou vários domínios de conhecimentos. Logo, as atividades envolvendo essas indagações têm de atender alguns objetivos, que podem ser vislumbrados a seguir:

As atividades devem ser concebidas levando-se em consideração os resultados dos estudos prévios e permitir aos alunos desenvolver certas competências e habilidades. Elas terão, essencialmente, por objetivos:

- Auxiliar o aluno na construção de conhecimentos e saberes de uma maneira construtiva e significativa.
- Desenvolver certas habilidades como, por exemplo, saber ler, interpretar e utilizar as diferentes representações matemáticas, bem como desenvolver o raciocínio dedutivo.

As situações problemas devem ser concebidas de modo a permitir ao aluno agir, se expressar, refletir e evoluir por iniciativa própria, adquirindo assim novos conhecimentos (ALMOULOUD, 2007, p.174).

Em função disso, levando-se em consideração os estudos sobre o pensamento algébrico, esses preceitos de atividade foram utilizados como base para o nosso trabalho. Por isso, buscamos a efetiva participação dos alunos, para que eles tivessem a oportunidade de expressar suas opiniões, exercitando seus saberes e sua leitura matemática, de modo a oportunizar aos graduandos uma aprendizagem significativa, através de ações que envolviam o texto histórico Lilavati.

A terceira etapa, a experimentação, é a fase em que aplicamos as atividades para colher os resultados, observando as ações dos alunos para conseguir dados que conduzam a atingir o objetivo de pesquisa. Dessa maneira, essa fase tem “como pressupostos apresentar os objetivos e condições da realização da pesquisa,

estabelecer o contrato didático e registrar as observações feitas durante a experimentação” (ARTIGUE, 1989 *Apud* ALMOULOU, 2012, p. 26).

À vista disso, fizemos uma formação com graduandos da Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central, Campus da UECE, em Quixadá-CE, a qual tinha por finalidade o desenvolvimento de ações que culminassem em avaliar as características do pensamento algébrico, que surgiram com a aplicação das UBP, apresentadas na seção 4.

Na quarta etapa, análise *a posteriori* e validação, são investigados os registros produzidos na formação, que foram colhidos de ferramentas extras, tais como: questionários, vídeos, entrevistas, diários etc., os quais sintetizam os resultados, que irão ser confrontados/validados com o que foi posto nas análises *a priori*. Almouloud (2007) ressalta que

A análise *a posteriori* de uma sessão é o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração de dados recolhidos e que contribui para a melhoria dos conhecimentos didáticos que se tem sobre as condições da transmissão do saber em jogo. Ela não é a crônica da classe, mas uma análise feita à luz da análise *a priori*, dos fundamentos teóricos, das hipóteses e da problemática da pesquisa [...] (ALMOULOU, 2007, p. 177).

Nessa fase, nós examinamos os nossos resultados à luz da análise de conteúdo de Bardin (2016). Destarte, foram elaboradas categorias com o que foi colhido e estudado nas etapas anteriores, em que buscamos discutir o pensamento algébrico dos estudantes, estas serão mais detalhadas na seção 6.

Portanto, a Engenharia Didática e suas fases arquitetaram esta investigação, guiando-nos pelas suas quatro fases, conforme o Quadro 25, que exhibe o que foi desenvolvido em cada uma dessas etapas na nossa pesquisa, perpassando por todo o nosso caminhar, ou seja, desde o estudo inicial do tema até a análise dos dados.

**Quadro 25- Sintetização das fases da pesquisa relacionando a Engenharia Didática**

| Fases                                            | Atividades desenvolvidas                                                                                                                                              |
|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Etapa 1: Análises prévias ou preliminares</b> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Pesquisa nos bancos de dados: Banco Digital de Teses e Dissertações (BDTD), Portal de periódicos da CAPES (CAFe).</li> </ul> |

|                                                         |                                                                                                                                                                                                               |
|---------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                         | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tradução do tratado Lilavati.</li> <li>• Estudo contextual, histórico e matemático.</li> </ul>                                                                       |
| <b>Etapa 2: Análise <i>a priori</i></b>                 | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Construção das UBP.</li> <li>• Construção da formação.</li> <li>• Definição do público-alvo e do lócus da pesquisa.</li> </ul>                                       |
| <b>Etapa 3: Experimentação</b>                          | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Aplicação da formação com os licenciandos em Matemática da FECLESC UECE.</li> </ul>                                                                                  |
| <b>Etapa 4: Análise <i>a posteriori</i> e validação</b> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Organização dos dados.</li> <li>• Criação das categorias de análise, tendo por base a análise de conteúdo de Bardin (2016).</li> <li>• Análise dos dados.</li> </ul> |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

A seguir, detalhamos o lócus, descrevendo-o e apontamos algumas características dos sujeitos da pesquisa. Posteriormente, apresentamos os momentos desenvolvidos na experimentação, dialogando sobre as atividades e as situações ao longo da formação.

## 5.2 Sobre o lócus da pesquisa

A aplicação da investigação foi realizada na Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central (FECLESC), Campus da Universidade Estadual do Ceará (UECE), localizada em Quixadá, interior do Ceará. Ela foi criada em 1983, tendo como principal objetivo a formação de professores para o Sertão Central do Ceará e regiões vizinhas. Por isso, ela recebe alunos dos mais diversos municípios, entre os quais, podemos citar: Banabuiú, Choró, Deputado Irapuan Pinheiro, Ibaretama, Ibicuitinga, Quixeramobim, Senador Pompeu, Aratuba, Capistrano, Baturité, Guaramiranga, Ocara, Pacoti.

A preferência por essa instituição se deu por ela ser referência na formação de professores, possuindo, atualmente, oito cursos de licenciatura, a saber: Letras-

Português, Letras-Inglês, Matemática, Biologia, Química, História, Física e Pedagogia. As aulas se dividem em dois turnos principais, manhã e noite, pois o campus não possui restaurante universitário e a maioria dos alunos não residem em Quixadá.

Nesse sentido, os estudantes se deslocam até Quixadá em ônibus ofertados pelos seus municípios de origem, sendo que os horários de retorno oscilam, ficando em torno das 11h no período da manhã e das 22h à noite. Tudo isso foi levado em conta na hora do planejamento da formação.

Com esse cenário, a faculdade oferta disciplinas condensadas, que acontecem em um só turno, fazendo com que os alunos tenham somente uma disciplina por dia, funcionando no horário ABCD manhã<sup>25</sup> ou noite<sup>26</sup>.

Na nossa pesquisa, a formação aconteceu no Curso de Licenciatura Plena em Matemática, que teve sua primeira turma em 2005, desde então, tem qualificado profissionais para atuar nos Ensinos Fundamental e Médio, tendo como objetivo geral: “possibilitar que o aluno adquira saber matemático, aliado a um conjunto de competências e habilidades que promovam sua autonomia intelectual – teórico-metodológica - para o exercício da docência” (CEARÁ, 2009, p. 13).

No momento da aplicação desta investigação, em 2022, o curso tinha 134 estudantes matriculados, contando com nove professores, entre os quais, estão seis efetivos e três temporários. Foi, nesse contexto, que aconteceu a formação, sendo que os sujeitos estavam cursando a disciplina de História da Matemática, no semestre 2022.1, ela é ofertada no 6º semestre do curso de Matemática, tendo como pré-requisito a disciplina de Cálculo 3.

No plano de curso da História da Matemática, é explicitada a ementa mencionando: “A história dos números; a história da geometria; a história da álgebra e a história da análise (abordando a matemática nas civilizações antigas, na Antiguidade Clássica, na Idade Média e Renascença, na Idade Moderna e nos séculos XIX e XX)” (CEARÁ, 2009, p. 4). Em suma, o objetivo central da disciplina é “estudar a História da Matemática, como forma de compreender a lógica histórica da Matemática” (CEARÁ, 2009, p. 4).

---

<sup>25</sup> O horário ABCD manhã corresponde ao horário das 7h30min às 11h00min, contemplando um intervalo para os licenciandos de 20 minutos.

<sup>26</sup> O horário ABCD noite corresponde ao horário das 18h30min às 22h00min, contemplando um intervalo para os licenciandos de 20 minutos.

Essa disciplina é dividida em 68 horas-aulas teóricas e, no semestre 2022.1, as aulas aconteciam no período da manhã, na quinta-feira. Desse total de horas, o professor titular cedeu 20 horas-aulas para a aplicação da pesquisa, no final do semestre. Com isso, a formação aconteceu no período de 02 de junho de 2022 a 07 de julho de 2022, totalizando 5 encontros de 4 horas-aulas semanais.

Pontuamos que cada dia/encontro foi dividido em duas aulas, sendo a primeira das 07h50min às 09h20min e a segunda das 09h40min às 11h00min. Esta última teve o tempo diminuído ao longo da aplicação, pois alguns estudantes, por morarem em municípios distantes, tinham que sair cedo para embarcar no ônibus, diante disso, a aula se estendia até, no máximo, 10h45min.

### **5.3 Sobre os sujeitos da pesquisa**

Na frequência da disciplina de História da Matemática, na FECLESC, contávamos com sete alunos matriculados, entretanto, seis deles participaram da formação, visto que um deles nunca compareceu a nenhuma aula, sendo reprovado por faltas pelo docente titular. Assim, esses licenciandos eram cinco homens e uma mulher e estavam cursando do 6º ao 10º semestre, sendo que: dois pertenciam ao 6º semestre; três ao 8º semestre e um ao 10º semestre.

Em relação às experiências na sala de aula, percebemos que somente 1 participante (17,7%) não tinha experiência. Os demais (83,3%) oscilavam entre professor substituto do estado e/ou do município, sendo que 5 deles tiveram vivências no Programa de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) e um desses cinco alunos teve a oportunidade de também participar da Monitoria Acadêmica.

Quando se trata do vínculo dos graduandos com a História da Matemática na sua formação na universidade, cinco deles afirmaram que não participaram de nenhum momento que explorasse a área em questão e um deles afirmou que acompanhou palestras e minicursos que abordavam a história dos números e sua aplicação em atividades práticas.

Nessa conjuntura, conseguindo a aprovação do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia (IFCE)<sup>27</sup> e também do

---

<sup>27</sup> Número do parecer de aprovação do projeto: 5.228.844 (Anexo 2).

CEP da UECE<sup>28</sup>, começamos a formação na FECLESC, o desenrolar das atividades, ao longo dos dias, será descrito no tópico a seguir.

#### 5.4 Estrutura da aplicação da formação

A formação aconteceu na modalidade presencial e foi intitulada: “Sobre os pensamentos algébricos mobilizados nas atividades propostas a partir do tratado Lilavati (1150), de Bhāskarācārya”, tendo como propósito mobilizar os pensamentos algébricos contidos na parte “um número presumido” de Lilavati, utilizando excertos da tradução *Lilawati: or a treatise on Arithmetic and Geometry*, traduzida do sânscrito para o inglês por John Taylor, em 1816. Foi desenvolvida em cinco encontros, conforme mencionado anteriormente e sistematizada no quadro a seguir:

**Quadro 26 – Sistematização dos encontros da formação**

| Encontros | Data       | Temática do encontro                                                                                                                                                               |
|-----------|------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1º        | 02/06/2022 | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Apresentação da formação.</li> <li>• Conhecimentos prévios dos estudantes.</li> <li>• Elementos da cultura matemática indiana.</li> </ul> |
| 2º        | 09/06/2022 | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Bhāskarācārya: vida e obra.</li> <li>• O tratado Lilavati.</li> </ul>                                                                     |
| 3º        | 23/06/2022 | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Primeira regra do subtópico: o número presumido.</li> <li>• Solução dos problemas 1, 2 e 4 pela regra do número presumido.</li> </ul>     |
| 4º        | 30/06/2022 | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Solução dos problemas 1, 2 e 4 utilizando a Matemática atual.</li> <li>• Compreensão do número presumido.</li> </ul>                      |
| 5º        | 07/06/2022 | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Encerramento.</li> </ul>                                                                                                                  |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

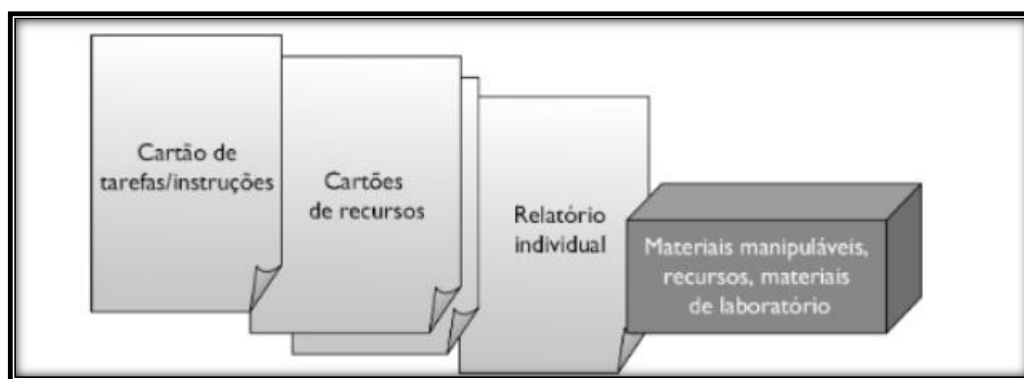
No que se refere aos encontros, separamos dois deles para aspectos contextuais, que julgamos importantes para que os estudantes tivessem uma visão

<sup>28</sup> Número do parecer de aprovação do projeto: 5.416.247 (Anexo 3).

geral da Matemática indiana, do autor Bhāskarācārya e de características que perpassavam pelo século XII, baseando-nos nas três primeiras UBP. Em seguida, dedicamos mais dois encontros para aplicar atividades, que buscavam identificar ações frente à regra e aos problemas de Lilavati, visando observar características do pensamento algébrico, subsidiadas pelas três últimas UBP.

Para nossa aplicação, utilizamos alguns instrumentos para a organização das UBP, retratadas na seção 4, elas foram divididas em quatro cartões de recursos e cinco cartões de atividades. Para isso, baseamo-nos em Cohen e Lotan (2017), porque expõem esses mecanismos, que podem ser utilizados para a promoção de diálogos e discussões em sala de aula, buscando sempre o protagonismo do aluno frente à sua aprendizagem. A seguir, mostramos a Figura 5 abordando um resumo desses aparatos.

**Figura 5 – Mecanismos de apoio da aplicação**



Fonte: Cohan e Lotan (2017, p. 88).

Relacionados a esses materiais de apoio, nos cartões de recursos, vêm informações presentes no texto base das UBP, que servem de ponte para a solução das indagações. Nesta pesquisa, eles trouxeram as problematizações/textos base para os questionamentos.

Nos cartões de atividades, são indicados os direcionamentos que o aluno vai tomar quanto aos cartões de recursos, ainda são acompanhados de um produto final, que é uma sintetização da atividade, que o professor vai solicitar de acordo com o seu objetivo, podendo ser um relatório, uma apresentação, um cartão. Com isso, neles, explanamos os encaminhamentos presentes nos questionamentos das UBP.

Houve uma mudança acerca dos subsídios apontados pelos autores supracitados, sendo que os relatórios ou o produto final de cada atividade foram feitos

em grupos e não individualmente, nessa perspectiva, fizemos um sorteio, montando duas equipes para dar prosseguimento às atividades.

Também ressaltamos que, embora a formação tenha percorrido os cinco encontros, nem todos serviram para a nossa coleta de dados em relação ao pensamento algébrico. Entretanto, esses momentos foram cruciais para a preparação dos participantes, explorando o contato com a História da Matemática, de modo a apresentá-la como fornecedora de recursos, já que o nosso público-alvo tinha pouco contato com essa área de estudos.

Nos subtópicos a seguir, descrevemos as atividades que aconteceram em cada dia. Fizemos um quadro no final de cada momento, sintetizando-as, para uma melhor assimilação do que abordamos em cada uma dessas aulas.

#### **5.4.1 1º dia (02/06/2022): Introdução à formação**

O primeiro encontro aconteceu no dia 02 de junho de 2022, em que a aula teve, inicialmente, por objetivo apresentar o curso, a fim de que os discentes compreendessem como estava arquitetada a formação, explicando a divisão do cronograma, dialogando sobre o Programa de Formação Docente (PFD) do Grupo de Pesquisa de História e Educação Matemática (GPEHM), para que os alunos entendessem a temática e a metodologia que adotamos.

No segundo momento da primeira aula, o objetivo era conhecer os participantes através do diálogo, seguido de um questionário formativo (Apêndice A), que buscava informações sobre aspectos da formação dos participantes, entre os quais, estavam: semestre, atuação profissional, relação com a História da Matemática, participação em programas de bolsas que incentivem a docência.

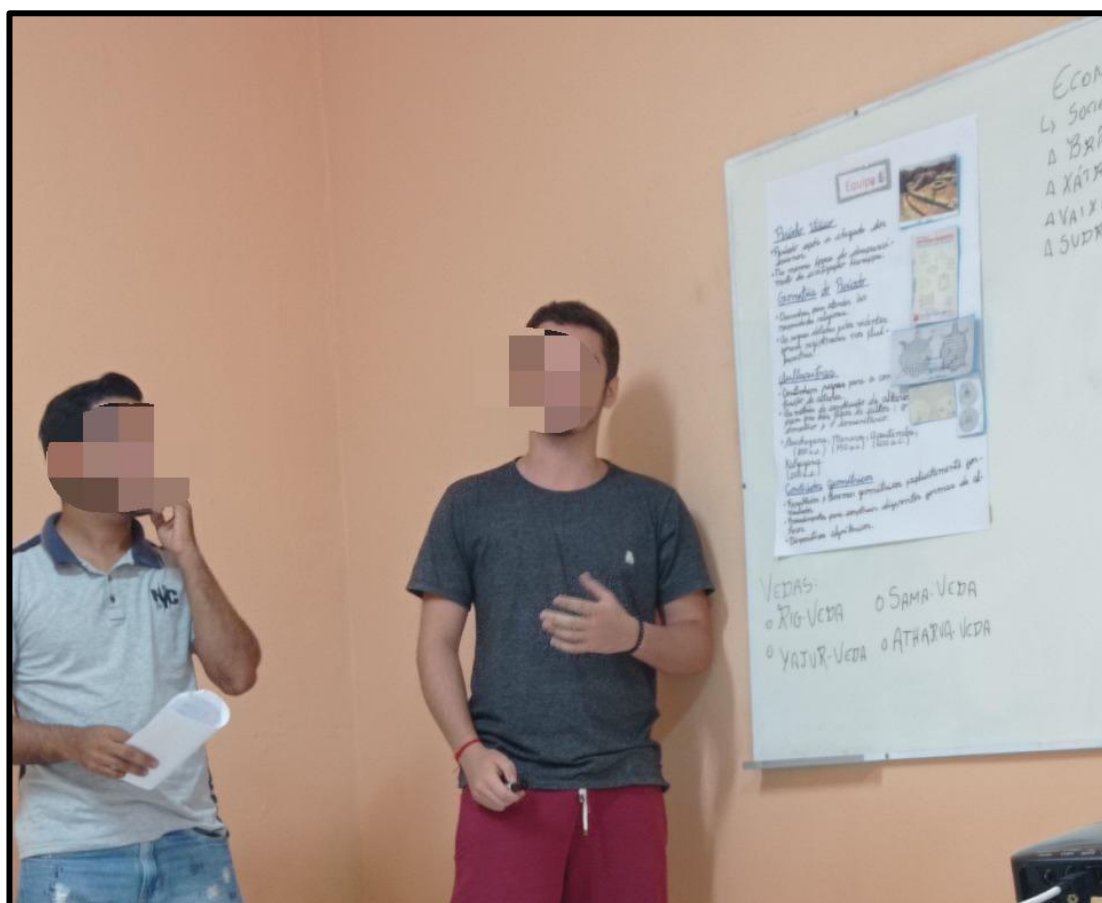
Na segunda aula, tivemos a finalidade de conhecer os alunos no tocante à temática do pensamento algébrico, principalmente, se já tinham contato com a área de estudo, portanto, desenvolvemos uma sondagem diagnóstica (Apêndice B), com o intuito de saber os conhecimentos prévios dos estudantes.

Em seguida, após a aplicação da sondagem, separamos os participantes em duas equipes por meio de um sorteio e entregamos o cartão de recurso 1: “Aspectos contextuais da Índia” (Apêndice C) e a atividade 1 (Apêndice D), contento o texto e os questionamentos da UBP 1.

Cada equipe ficou com um período indiano (pré-ariano ou védico), mediante sorteio, para investigarem as características da História da Matemática indiana. Como apoio ao cartão de recurso, fornecemos livros tradicionais de História da Matemática, tais como: Boyer (2018), Eves (2011), Garbi (2006), para que os graduandos tivessem acesso a diferentes literaturas.

Como produto final, os alunos montaram um cartaz com fotos e textos dos períodos pré-ariano e védico (pós-invasão ariana), evidenciando características do período estabelecido no início da aula, elaborando, em uma cartolina, um resumo da temática. A seguir, podemos vislumbrar a Equipe 1 apresentando seu feito:

**Figura 6 – Momento de apresentação do cartaz pela Equipe 1**



Fonte: Arquivos da pesquisa (2022).

Com o desenvolvimento dessa atividade, foi perceptível o empenho dos estudantes, para explorar a civilização indiana. No Quando 26, observamos a sintetização do momento 1.

**Quadro 26 – Sintetização do momento 1**

| AULAS | TEMA                                     | OBJETIVO (S)                                                                                                                                                                                                                                                    |
|-------|------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1     | Conversa com os participantes.           | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Apresentar o curso.</li> <li>• Conhecer aspectos de cunho pessoal, acadêmico e profissional acerca dos participantes em relação às suas formações e experiências e as possibilidades fornecidas pelo curso.</li> </ul> |
| 2     | Elementos da cultura matemática indiana. | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Saber os conhecimentos prévios dos estudantes sobre o pensamento algébrico.</li> <li>• Discutir elementos da cultura matemática indiana.</li> </ul>                                                                    |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

#### **5.4.2. 2º dia (09/06/2022): Aspectos introdutórios da cultura matemática indiana do século XII**

O segundo encontro aconteceu no dia 09 de junho de 2022, sendo que a terceira aula tinha por objetivo identificar aspectos contextuais e matemáticos do século XII, que estão em obras de Bhāskarācārya, por meio da UBP 2. Dessa forma, entregamos o cartão de recurso 2: “Bhāskarācārya: vida e obra” (Apêndice E), que tinha por intento apresentar aos estudantes pontos sobre Bhāskarācārya e o seu compilado de obras Siddhāntaśiromani, para que os licenciandos entrassem em contato com o autor de Lilavati e o compêndio de livros de que ela fazia parte.

Em seguida, entregamos a atividade 2 (Apêndice F), que indicava que os alunos explorassem o cartão de recurso e as versões impressas na língua inglesa dos tratados Lilavati e Bījaganita<sup>29</sup>, objetivando o contato concreto com textos históricos, permitindo aos alunos o exercício da pesquisa em História da Matemática.

Como produto final, os graduandos fizeram uma sintetização das evidências dos livros de Bhāskarācārya, aliando com o contexto daquela época, exposto no cartão de recurso. Assim, as equipes expuseram, ao final da aula, aspectos contextuais e matemáticos observados por eles nos documentos.

<sup>29</sup> As demais só se encontram disponíveis em sânscrito, o que tornaria inviável sua exploração, já que é uma língua desconhecida pelos estudantes.

Na quarta aula, foi o momento para conhecer o tratado Lilavati, pretendendo que os alunos tivessem uma visão geral sobre esse tratado, conhecendo-o matematicamente e contextualmente. Dessa maneira, foi disponibilizado aos estudantes o cartão de recurso 3: “Lilavati e tradução de Taylor (1816)” (Apêndice G), com informações sobre o livro, explorando a UBP 3. Como suporte, viabilizamos uma versão impressa da tradução de Taylor (1816).

Então, entregamos a atividade 3 (Apêndice H), pedindo aos estudantes que fizessem uma leitura superficial do tratado. Eles podiam utilizar recursos de tradução e precisavam apontar, por meio de um relatório final da equipe, as impressões iniciais a respeito do texto explorado, destacando, através do texto de Lilavati, conceitos matemáticos e características culturais do século XII. A seguir, no Quadro 27, explicitamos o resumo dessas aulas.

**Quadro 27 – Sintetização do momento 2**

| AULAS | TEMA                       | OBJETIVO (S)                                                                                       |
|-------|----------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 3     | Bhāskarācārya: vida e obra | Identificar aspectos contextuais e matemáticos do século XII, que estão em obras de Bhāskarācārya. |
| 4     | O tratado Lilavati         | Conhecer o tratado Lilavati em relação a aspectos matemáticos e contextuais.                       |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Nesse encontro, concluímos o estudo contextual e matemático completo de Lilavati. Nos próximos encontros, detemo-nos em explorar a parte “um número presumido”, que foi escolhida como suporte para averiguar o pensamento algébrico dos estudantes.

#### **5.4.3 3º dia (23/06/2022): A primeira regra e os problemas 1, 2 e 4**

O terceiro encontro ocorreu no dia 23 de julho de 2022, sendo que, na quinta aula, perscrutamos as UBP 4 e 5. Com isso, entregamos o cartão de recurso 4: “Līlavātī e o número presumido” (Apêndice I), contendo um texto base sobre aspectos contextuais da parte “um número presumido” e a tradução da regra e dos problemas, que deveriam ser examinados.

Por conseguinte, disponibilizamos a atividade 4 (Apêndice J), dedicada ao conhecimento e à discussão da primeira regra do número presumido. Buscamos, ao longo da atividade, que os alunos, pela leitura, elencassem o passo a passo da regra, fazendo sua matematização, procurando depreender os conceitos envolvidos, principalmente, frisando o que seria o número presumido.

Adiante, na aula seis, exploramos os problemas de Lilavati, na atividade 5 (Apêndice K), em que o objetivo era que os alunos desenvolvessem a solução dos problemas 1, 3 e 4, utilizando a regra do número presumido. Os alunos testaram o passo a passo feito na aula anterior e, como produto final, os mesmos expuseram a solução dos três problemas, que o grupo conseguiu elaborar. No Quadro 28, podemos ver a sintetização desse momento.

**Quadro 28 – Sintetização do momento 3**

| <b>AULAS</b> | <b>TEMA</b>                                          | <b>OBJETIVO (S)</b>                                                                                 |
|--------------|------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5            | Conhecendo a primeira regra sobre o número presumido | Compreender a primeira regra do tópico “um número presumido”, contido no Lilavati.                  |
| 6            | Aplicando a regra do número presumido                | Desenvolver a solução dos problemas 1, 2 e 4, utilizando a primeira regra sobre o número presumido. |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Nesse dia, observamos as características do pensamento algébrico, referentes à modelação, generalização, manipulação de número desconhecido e o estabelecimento de relações que os estudantes conseguiram expor, diante de ações mediante as atividades apresentadas.

#### **5.4.4 4º dia (30/06/2022): Comparando o método atual com a regra do número presumido**

O quarto encontro foi no dia 30 de junho de 2022, sendo que a sétima aula foi dedicada a explorar a atividade 5.2 (Apêndice L), baseada na UBP 6, na qual propomos aos alunos a solução dos problemas por algum método atual. O objetivo

era que eles refletissem sobre os conceitos e as questões propostas por Bhāskarācārya frente à Matemática atual.

Posteriormente, na aula 8, após os alunos resolverem todos os problemas, as equipes tinham que fazer uma apresentação das suas respostas no quadro, devendo explicar como desenvolveram as respostas. Então, eles finalizaram com uma comparação entre o método utilizado por eles e o feito por Bhāskarācārya.

Para terminar, voltamos à discussão do que significava o número presumido, em que os licenciandos escreveram um pequeno texto sobre a compreensão do conceito de número presumido. Eles tinham que levar em consideração as discussões da regra e dos problemas/exemplos contidos no *Līlavātī*, de Bhāskarācārya. Assim, constatamos o significado que essas equipes estabeleceram ao longo dessas atividades para com o número presumido. Verifiquemos o resumo do momento 4, no Quadro 29.

**Quadro 29 – Sintetização do momento 4**

| AULAS | TEMA                                               | OBJETIVO (S)                                                                                                                                                     |
|-------|----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 7     | Problemas do número presumido e a Matemática atual | Discutir a resolução dos problemas com conceitos matemáticos atuais.                                                                                             |
| 8     | Comparação das regras                              | Comparar a resolução pela regra estudada na aula 4 com a solução utilizada pela equipe na aula 7, compreendendo o que é o número presumido e o número conhecido. |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

#### **5.4.5 5º dia (07/07/2022): Encerramento**

O último encontro aconteceu no dia 07 de julho de 2022, no qual a nona aula tinha por objetivo: sintetizar todos os momentos que perpassaram pela formação; para tal finalidade, propomos uma conversa com os estudantes, para que cada um falasse de pontos relevantes e negativos dessa formação. Isso intencionou compreender, na visão dos estudantes, a importância dessas formações e ainda os pontos que devem ser melhorados.

Para finalizar, mostramos uma sintetização do que aplicamos no curso, trazendo um discussão do valor da História da Matemática na formação de professores. Desenvolvendo, em seguida, um resumo do pensamento algébrico, repassando para os alunos a relevância de atividades que promovam reflexões sobre a temática.

Na décima aula, aplicamos um questionário avaliativo do curso (Apêndice M), que tinha por propósito reunir as opiniões dos estudantes sobre os momentos experienciados durante os cinco encontros. No Quadro 30, podemos contemplar a sinopse do quinto momento.

**Quadro 30 – Sintetização do momento 5**

| <b>AULAS</b> | <b>TEMA</b>                      | <b>OBJETIVO (S)</b>                                         |
|--------------|----------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| 9            | Considerações finais da formação | Sintetizar todos os momentos que perpassaram pela formação. |
| 10           | Questionário final               | Aplicar um questionário avaliativo do curso.                |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Ao longo desses encontros, utilizamos aparatos para a coleta de dados, estes serão detalhados a seguir.

## **5.5 Sobre a coleta de dados**

Essa fase se inicia com “a aplicação dos instrumentos elaborados e das técnicas selecionadas, a fim de efetuar a coleta dos dados previstos” (Lakatos e Markoni, 2017, p. 183). Nessa perspectiva, lançamos mão de alguns subsídios, como questionários, gravações em formato de vídeo e/ou áudio, relatórios e folha de respostas dos questionamentos propostos.

Dessa maneira, ao separarmos os grupos, colocamos-os distantes para que não trocassem informações. Nesse sentido, dispomos de uma câmera e um celular para conseguirmos gravar as ações e as falas das duas equipes no momento da atividade, para consultar sobre eventuais dúvidas quanto à sua escrita.

Em relação às tarefas, deixamos espaço na atividade para que os grupos redigissem suas respostas, eles deveriam entregar essa folha para a pesquisadora ao final da discussão. Também pedimos aos estudantes um produto final, que poderia

ser um texto escrito e/ou apresentações das soluções das atividades solicitadas. Assim, isso foi gravado e armazenado para consultas na análise de dados.

Para uma melhor abrangência do curso, iremos analisar os dois grupos, visto que há singularidades nas equipes, que merecem ser discutidas e mencionadas. No capítulo que se segue, abordaremos a sintetização dos dados colhidos, com a sua respectiva análise, tomando por base as categorias que consideram as categorias do pensamento algébrico.

## **6 ANÁLISE DO PENSAMENTO ALGÉBRICO A PARTIR DAS CONCEPÇÕES DOS LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA DA UECE**

Como foi mencionado na seção cinco, os dados desta pesquisa foram coletados mediante uma formação, que aconteceu na disciplina de História da Matemática, ofertada aos estudantes da Licenciatura em Matemática da Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central (FECLESC), Campus da UECE, localizado em Quixadá-CE. Nessa experiência com os licenciandos, foram obtidos dados através de relatórios, atividades escritas, áudios, vídeos, que serviram de base para a discussão dos resultados deste estudo.

Com isso, a seguir, analisaremos os dados à luz da análise de conteúdo, proposta por Bardin (2016). Assim, na primeira subseção, fizemos um resumo dessa metodologia de análise, apresentando seus preceitos e definindo as categorias de análise desta investigação, em seguida, abordamos os dados da pesquisa aliados a essas categorias.

### **6.1 Suporte Metodológico da Análise de Conteúdo**

Através da coleta de dados, obtivemos diversos registros de comunicações dos participantes, neles, aplicamos a análise de conteúdo de Bardin (2016). Este método é desenvolvido tendo por fundamento técnicas, que buscam, nas escritas e/ou falas dos discentes, subsídios que auxiliem a discutir a resposta para nossa pergunta diretriz. Bardin (2016, p. 37) define esse método afirmando que

A análise de conteúdo é um conjunto de técnicas de análise de comunicações. Não se trata de um instrumento, mas de um leque de apetrechos, ou, com mais rigor, será um único instrumento, mas marcado por uma grande disparidade de formas, e adaptável a um campo de aplicação muito vasto: comunicações (BARDIN, 2016, p. 37).

Dessa maneira, percebemos, ao utilizar esse método, que estamos lidando com interpretações, por isso, devemos tomar cuidado para que não seja feita uma compreensão espontânea, deixando de lado os seus reais significados para concordar com a ideia inicial de pesquisa (BARDIN, 2016); (MENDES; MISKULIN, 2017). Diante disso, conforme a citação, podemos lançar mão de técnicas para esse percurso e,

além disso, precisamos seguir as três fases elencadas por Bardin (2016), elas são mostradas no diagrama a seguir:

**Figura 8 – Diagrama das fases da análise de conteúdo**



Fonte: Adaptado de Bardin (2016).

No que concerne à etapa da pré-análise, o pesquisador faz uma leitura flutuante sobre os dados colhidos, procurando constituir um *corpus*<sup>30</sup> para a pesquisa. Nesse contexto, essa fase possui três missões, que são apontadas por Bardin (2016, p. 125) como sendo: “a escolha dos documentos a serem submetidos à análise, a formulação das hipóteses e dos objetivos, e a elaboração de indicadores que fundamente a interpretação final”. A autora menciona que essas fases não são lineares, sendo possível ajustes ao longo da caminhada.

A segunda etapa refere-se à exploração do material, ou seja, o investigador vai em busca da análise mais profunda do material, estabelecendo relação com suas hipóteses e separando o material em categorias. Bardin (2016, p. 131) ressalta que “esta fase, longa e fastidiosa, consiste essencialmente em operações de codificação, decomposição ou enumeração, em função de regras previamente formuladas”.

A última etapa envolve o tratamento dos resultados e das interpretações, “o analista tendo à sua disposição resultados significativos e fiéis, pode então propor

<sup>30</sup> O corpus é o conjunto dos documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos (BARDIN, 2016, p. 125).

inferências e adiantar interpretações a propósito dos objetivos previstos – ou que digam respeito a outras descobertas inesperadas” (Bardin, 2016, p. 131). Dessa forma, o pesquisador confronta dados com os objetivos iniciais, elencando seus resultados, fazendo uma sistematização.

A nossa investigação perpassou por todas as fases expostas por Bardin (2016), entre as quais, foram desenvolvidas as atividades explicitadas no Quadro 31, a seguir.

**Quadro 31 – Atividades desenvolvidas na análise dos resultados**

| <b>Fases</b>                                | <b>Atividades desenvolvidas</b>                                                                                                                                                               |
|---------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Pré-análise                                 | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Constituição do <i>corpus</i>.</li> <li>• Leitura flutuante em todo o material.</li> <li>• Separação das atividades que foram analisadas.</li> </ul> |
| Exploração do material                      | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Exploração do material escolhido para análise.</li> <li>• Criação das categorias.</li> </ul>                                                         |
| Tratamento dos resultados e interpretações. | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Apresentação e discussão dos dados nas categorias estabelecidas.</li> </ul>                                                                          |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

## **6.2 Analisando os resultados mediante as categorias**

Descreveremos, detalhadamente, as atividades 4 e 5, pois elas forneceram dados para a criação de cada categoria, dando suporte à discussão do pensamento algébrico dos licenciandos frente aos conceitos presentes na regra e nos problemas propostos por Bhāskarācārya, em *Līlavātī*.

As outras atividades (1, 2 e 3) serão investigadas em pesquisas futuras, uma vez que o mestrado tem um período de duração de dois anos, não dando tempo de explanar todos os momentos e todas as atividades relacionadas ao pensamento algébrico. Contudo, consideramos suficiente as que foram escolhidas e debatidas adiante.

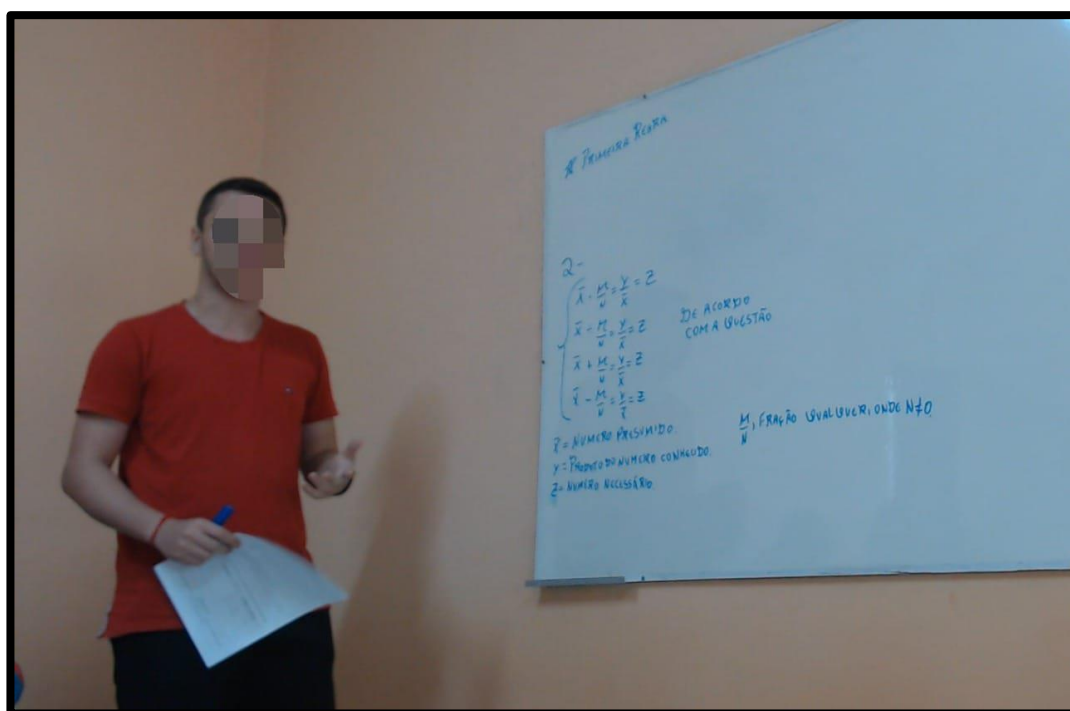
No que tange à atividade 4 (Apêndice D), esta tinha por objetivo que os alunos assimilassem a primeira regra de Bhāskarācārya, conversando sobre ela e explorando-a. Logo ao adentrarem à sala de aula, entregamos o cartão de recurso,

que continha a problematização da UBP 4, juntamente com o cartão de atividade com os questionamentos dessa UBP, que constam a seguir:

- Observando a **primeira regra**, quais as suas primeiras impressões sobre ela?
- A partir da leitura e das impressões da regra, qual uma matematização<sup>31</sup> possível para ela? Faça as anotações de como procedeu.
- Quais passos devem ser seguidos para uma possível aplicação da regra?
- Qual uma possível definição de número presumido?
- Quais conhecimentos matemáticos são apresentados na regra do número presumido exposta por Bhāskarācārya?

Após responderem às indagações, os alunos tinham que mostrar, no quadro, as sintetizações do segundo e do terceiro ponto, para que compreendêssemos o que eles tinham colocado em sua escrita, gerando uma discussão pós-apresentação das duas equipes. Abaixo, podemos ver a exposição da Equipe 1, que foi realizada pelo relator.

**Figura 10 – Apresentação da atividade 4 pela Equipe 1**



Fonte: Arquivos da autora (2022).

<sup>31</sup> É o mesmo que escrever em linguagem matemática a regra.

Pós-debate da regra, na quinta atividade, os alunos tinham que averiguar se sua matematização e seu passo a passo serviam para a solução dos problemas 1, 2, e 4 de Bhāskarācārya. Com isso, entregamos a eles o cartão de recurso contendo uma problematização, um contexto, uma apresentação dos problemas traduzidos e adaptados didaticamente aos estudantes. Posteriormente, de posse da atividade, as equipes deveriam responder:

- Seguindo a primeira regra de Bhāskarācārya, qual a solução dos problemas 1, 2 e 4? Organize seu raciocínio em passos. Não utilize conhecimentos matemáticos modernos, use somente os passos que Bhāskarācārya forneceu.

Assim, o produto final seria, novamente, a exibição da resposta encontrada pelas equipes no quadro, enfatizando o passo a passo que percorreram, evidenciando se seguiram ou não o que tinha sido estabelecido na quarta atividade. Na Figura 11, podemos visualizar o momento em que a Equipe 2 estava argumentando sobre os problemas de Bhāskarācārya.

**Figura 11 – Equipe 2 discutindo a solução das questões propostas**



Fonte: Arquivos da autora (2022).

A quinta atividade tinha uma continuação, perscrutando a última UBP, a qual nomeamos de: atividade 5.1, que tinha a finalidade de propor aos estudantes a solução desses problemas utilizando a Matemática atual, de modo que eles refletissem sobre os dois métodos vistos durante o percurso formativo. Diante disso, como produto final, pedimos às equipes a reflexão sobre o entendimento do que seria o número presumido, tomando por base o uso nas questões e na regra anteriores.

Ao sintetizar nossos resultados, chegamos a três pontos principais, que serviram de fundamento para a criação das categorias de análise para a discussão do pensamento algébrico dos licenciandos, sendo eles: (1) matematização da primeira regra e organização do seu passo a passo; (2) solução dos problemas pela regra de Bhāskarācārya; e (3) discussão do que seria o número presumido.

Com apoio da caracterização do pensamento algébrico de Almeida e Santos (2017), apresentado na seção 3, e também pelos pontos principais que emergiram da pesquisa, elaboramos três categoriais. Desse modo, sobre o ponto (1), estabelecemos a primeira categoria C1: **Generalizar e modelar**; referente ao (2), criamos a segunda categoria C2: **Estabelecer relações e operar com o desconhecido** e ao (3), definimos a terceira categoria C3: **Construir significado**. No Quadro 32, abordamos os pontos encontrados na pesquisa e as categorias relacionadas a eles:

**Quadro 32 – Pontos que estabeleceram as categorias**

| Pontos                                                              | Categorias                                                   |
|---------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| Matematização da primeira regra e organização do seu passo a passo. | <b>C1:</b> Generalizar e modelar.                            |
| Solução dos problemas pela regra de Bhāskarācārya.                  | <b>C2:</b> Estabelecer relações e operar com o desconhecido. |
| Discussão do que seria o número presumido.                          | <b>C3:</b> Construir significado.                            |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Nesse contexto, a seguir, no que diz respeito à C1, analisamos a matematização das equipes e o passo a passo que elas construíram, considerando suas impressões iniciais da regra, visto que isso mostra o movimento dos alunos para transporem o que Bhāskarācārya escreveu, podendo estar mobilizadas as

características do pensamento algébrico postas na primeira categoria, generalizar e modelar.

Na C2, apontamos para a ligação que os estudantes fizeram entre o seu passo a passo e a sua matematização para resolverem os problemas 1, 2 e 4, momento propício para as equipas desenvolverem a terceira característica do pensamento algébrico: estabelecer relações. Além disso, apresentamos como esses alunos lidaram com o desconhecido (quarta característica), ou seja, como eles agiram mediante o uso do número presumido (variável) em busca do número necessário (incógnita).

Concernente à C3, tratamos da finalização da atividade 5.1, para identificar o significado (quinta característica) atribuído ao número presumido ao longo do percurso da formação.

Dessa forma, na fala dos estudantes, procuramos *insights* que nos levassem a debater as características do pensamento algébrico que Lilavati fez emergir na formação de futuros professores de Matemática. Logo, nos subtópicos, a seguir, são expostas as discussões dessas categorias.

### **6.2.1 C1: Generalizar e modelar**

Na primeira categoria, foi utilizada como base a atividade 4, descrita acima, que visava compreender ações e percepções das equipas quanto à primeira regra de Bhāskaraçārya. Como mencionado anteriormente, aqui, focaremos nas questões 1, 2 e 3, sendo elas:

1. Anotem as primeiras impressões que o grupo obteve ao ter contato com ela.
2. A partir da leitura e das impressões da regra, matematize-a no espaço abaixo, fazendo as anotações de como a equipe procedeu.
3. Descreva os passos que devem ser seguidos para uma possível aplicação da regra.

Relativamente às primeiras impressões ao terem contato com a regra, observamos dúvidas dos estudantes relacionadas ao modo como está escrita, palavras que não eram comuns ao seu vocabulário matemático, sendo necessárias várias leituras até a matematização. Assim, no Quadro 33, podemos vislumbrar a escrita das equipas sobre as percepções iniciais.

**Quadro 33 – Impressões iniciais das equipes**

| <b>Equipes</b> | <b>Impressões</b>                                                                                                                                                                                                                                    |
|----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>1</b>       | Confusa pois alguns termos não foram bem esclarecidos.                                                                                                                                                                                               |
| <b>2</b>       | Foi visto que na regra 1 utiliza-se das quatro operações básicas (adição, subtração, multiplicação, divisão), trabalhando também o número desconhecido e frações. Além disso, há questões confusas como o número presumido e desconhecido e produto. |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

É perceptível, na escrita dos graduandos, que, ao terem o primeiro contato com o texto histórico, os discentes tiveram dificuldades, o que já era esperado, pois estávamos lidando com um documento do século XII, com uma linguagem matemática diferente da que costumamos utilizar atualmente.

Desse modo, termos indefinidos apareceram, levando os estudantes a mobilizarem seus conhecimentos adquiridos anteriormente para atribuírem significado a esses vocábulos. Isso vai ao encontro de um dos preceitos da interface entre história e ensino de Matemática, em que se deve “buscar no processo histórico o movimento do pensamento no contexto da formação deste conceito” (SAITO; DIAS, 2013, p. 93).

#### *6.2.1.1 Matematização da regra*

O segundo questionamento solicitava aos estudantes a matematização da regra. Quando nos referimos ao termo matematizar, estamos de acordo com Saito (2015), que dizem que significa escrever matematicamente uma regra, isto é, modelá-la para que possa ser utilizada em resolução de problemas. Com isso, os licenciandos deveriam sistematizar suas ideias iniciais. A Figura 12, a seguir, contém a matematização da Equipe 1:

Figura 12 – Matematização da primeira regra pela Equipe 1

Handwritten mathematical expressions and definitions:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x} \times \frac{M}{N} = \frac{Y}{X} = Z \\ \bar{x} \div \frac{M}{N} = \frac{Y}{X} = Z \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{x} + \frac{M}{N} = \frac{Y}{X} = Z \\ \bar{x} - \frac{M}{N} = \frac{Y}{X} = Z \end{array} \right.$$

$\bar{x}$  = NUMERO PRESUMIDO  
 $Y$  = PRODUTO DO NUMERO CONHECIDO  
 $Z$  = NUMERO NECESSÁRIO  
 $\frac{M}{N}$ , FRAÇÃO QUALQUER ONDE  $N \neq 0$ .

Fonte: Arquivos da pesquisa (2022).

Podemos verificar, pela escrita da primeira equipe, que os participantes perceberam que o número presumido é diferente do número necessário, pois eles simbolizaram esses termos por dois termos distintos, sendo  $\bar{x}$  o número presumido e  $z$  o número necessário.

Um ponto que mostra uma incompreensão no primeiro contato é a simbolização de  $Y =$  produto do número conhecido, que visualizamos na Figura 12. A equipe não deixou explícito qual produto seria esse, quem deveria ser multiplicado pelo número conhecido, isso corrobora o que escreveram em suas percepções iniciais, confirmando que alguns termos não foram bem esclarecidos na regra de Bhāskarācārya. Eles comprovaram isso em sua apresentação final, ao falarem que

Em relação a regra, a gente achou meio confusa, por que alguns termos não foram bem esclarecidos, como o número necessário e o número conhecido. A gente leu, identificamos a presença de três termos, mesmo lendo o texto de apoio antes, não conseguimos compreender (EQUIPE 1, 2022).

Perante o exposto, na matematização, na parte:  $\bar{x} \times \frac{M}{N} = \frac{Y}{X} = Z$ , quando olhamos após o primeiro sinal de igualdade, em que se tem a expressão  $\frac{Y}{X}$ , fica implícito qual seria o valor atribuído ao  $x$ . Todavia, na apresentação, a equipe sanou essa dúvida, dizendo que: “a gente divide, multiplica, soma ou subtrai de acordo com a questão por uma fração. O resultado anterior, que a gente chamou de: produto do número conhecido, **dividimos pelo número presumido**, restando sempre o número

necessário” (EQUIPE 1, 2022). Portanto, averiguamos que os alunos apenas esqueceram de colocar a barra nos seus escritos.

Nesse sentido, os alunos da primeira equipe não conseguiram identificar os termos do trecho seguinte: “pelo resultado da operação anterior, divida o produto do número conhecido pelo presumido” [...] (BHĀSKARĀCĀRYA, 1816, p. 34). Eles não compreenderam que teriam que multiplicar antes de dividir, por isso, essa equipe, por não assimilar a ideia de número presumido, acabou denominando de  $Y$  somente o produto do número conhecido, sem mencionar por qual ele deveria ser multiplicado, mostrando a incompreensão dessa parte da regra.

Por conseguinte, os alunos organizaram o passo a passo que deveria ser feito para se usar a regra. Consoante o estabelecido na seção 3, o passo a passo a ser feito seria: (1) Presumir um número qualquer; (2) Somar, subtrair, multiplicar ou dividir as frações dadas nos problemas dele, de acordo com o pedido da questão; (3) Multiplicar o número presumido no passo 1 pelo número conhecido dado no problema; (4) Dividir o resultado encontrado no passo 3 pelo resultado encontrado no passo 2.

Analisemos, na Figura 13, o passo a passo proposto pela Equipe 1:

**Figura 13 – Passo a passo descrito pela Equipe 1**

|          |                                                                             |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------|
| 1º passo | MULTIPLICA-SE, DIVIDE-SE, SOMA-SE OU SUBTRAI FRAÇÕES COM O NÚMERO PRESUMIDO |
| 2º passo | OBSERVA-SE AS CONDIÇÕES DA QUESTÃO                                          |
| 3º passo | PELO RESULTADO DIVIDE-SE O PRODUTO DO NÚMERO CONHECIDO PELO PRESUMIDO       |
| 4º passo |                                                                             |

Fonte: Arquivos da pesquisa (2022).

De encontro ao passo a passo correto colocado anteriormente, percebemos que a Equipe 1 demonstrou, na sua escrita, um momento confuso desse primeiro contato com a regra, pois eles não conjecturaram o número presumido, além disso, não assimilaram que o passo 1 e 2 estão interligados, já que só fizeram uma das operações, conforme a condição da questão. No passo três, eles fizeram uma cópia

do que foi dito na regra, porém, na sua matematização, eles não conseguiram transpor o que a regra afirmava, uma vez que eles dividiram pelo número presumido e não o multiplicaram.

Quanto à matematização da Equipe 2, os alunos começaram atribuindo ao número presumido a letra “x”, bastante enraizada por eles ao longo da sua caminhada estudantil para designar o que eles não conhecem, levando-nos a concordar com Usiskin (1995, p. 17), que afirma que “todas as letras parecem incógnitas (particularmente x e y, letras que a tradição consagrou para esse propósito)”. Vejamos, na Figura 13, a resposta da Equipe 2:

**Figura 13 – Matematização da Equipe 2**

O que sabemos que x seja o número presumido. Com ele, podemos operar com frações através das quatro operações básicas, então:

|                                                                      |                                                                      |
|----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| <p>• Adição</p> $x + \frac{a}{b} = K$                                | <p>• Subtração</p> $x - \frac{a}{b} = K$                             |
| <p><math>\frac{K}{x} = y \rightarrow</math> RESULTADO NECESSÁRIO</p> | <p><math>\frac{K}{x} = y \rightarrow</math> RESULTADO NECESSÁRIO</p> |
| <p>• Multiplicação</p> $x \cdot \frac{a}{b} = K$                     | <p>• Divisão</p> $\frac{x}{\frac{a}{b}} = K$                         |

Fonte: Arquivos da pesquisa (2022)

Ao observar as expressões colocadas pela Equipe 2, verificamos sua incompreensão do significado dos termos envolvidos na regra: número conhecido, número presumido e número necessário. Isso fica evidente quando o grupo foi se apresentar e mencionou que

A gente não entendeu direito a parte que fala: Pelo resultado, divida o produto do número conhecido pelo presumido. O número conhecido é K, só que a

gente entrou nessa questão: o produto do número presumido por quem? Só que a gente acabou fazendo o número conhecido dividido pelo número presumido, resultando no Y que seria o número necessário (EQUIPE 2, 2022).

Os licenciandos demonstraram que eles entenderam as operações matemáticas que deveriam ser feitas, contudo, não diferenciaram as quantidades envolvidas. Os alunos denominaram o número conhecido de K e o encontraram sendo resultado de uma operação matemática, isso não é estabelecido por Bhāskarācārya, os graduandos tinham de compreender que esse termo estava no problema, fazendo parte da questão.

Destarte, quando a Equipe 2 foi colocar o passo a passo da regra (Figura 14), seguindo a matematização elaborada por eles, constatamos o raciocínio deles no 3º passo, em que eles afirmaram que o resultado anterior deveria ser dividido pelo número presumido x, corroborando o que foi discutido no parágrafo anterior.

**Figura 14 – Passo a Passo da regra pela Equipe 2**

|          |                                                                          |
|----------|--------------------------------------------------------------------------|
| 1º passo | Chamar de x um número presumido.                                         |
| 2º passo | Utilizá-lo para operar com frações através das quatro operações básicas. |
| 3º passo | O resultado obtido pela equação anterior. Divida-o por x.                |
| 4º passo | Após dividir, chega-se no resultado necessário.                          |

Fonte: Arquivos da pesquisa (2022).

Também atentamos que essa equipe colocou um passo a mais que a primeira, sendo ele: “chamar de x o número presumido”, não indicando de onde ele será tirado. Do 2º para o 3º passo, a equipe seguiu sua matematização, não identificando a multiplicação que deveria ser feita do número conhecido pelo presumido e, só após, seria a divisão. Como mencionado na seção 3, para se encontrar o número necessário, é preciso realizar o seguinte cálculo:  $\frac{p \times c}{r}$ , no qual p é o presumido, c o conhecido e r o resultado anterior.

No 3º passo da equipe, notamos a escrita do termo “equação”, sendo que, em nenhum momento, Bhāskarācārya o expõe em seu texto, o que revela um movimento do pensamento dos estudantes ao associarem os termos desconhecidos às equações que estudamos atualmente.

#### *6.2.1.2 Considerações sobre a primeira categoria*

Diante do apresentado nessa categoria, percebemos que as equipes conseguiram transpor ideias da regra, entretanto, revelaram dificuldades no entendimento do texto histórico. Ressaltamos o costume dos estudantes com as letras  $x$ ,  $y$  ou  $z$ , o que nos mostrou a raiz das incógnitas mais utilizadas no ensino de Álgebra atualmente, em que os estudantes atribuem o significado de algo desconhecido a elas.

Pelas ações de ambas as equipes na sala de aula, foi perceptível a discussão dos alunos de que existia mais de um número desconhecido nessa regra. Com isso, ao fornecerem linguagem algébrica para esses termos, os estudantes não modelaram e/ou generalizaram um modo satisfatório para a primeira regra de Bhāskarācārya.

Em geral, os estudantes apresentaram adversidades para transpor/modelar/generalizar o texto retórico para a linguagem Matemática atual, o que não é estranho para nós pesquisadores, que lidamos com a dificuldade diária de ensinar a modelação de problemas matemáticos na Educação Básica. Portanto, alguns alunos não compreendem a linguagem algébrica matemática, isso acontece, muitas vezes, por não conseguirem interpretar. Ante isso, Gil (2008) ressalta que

No estudo de Álgebra, o aluno utiliza muito esta codificação já que este envolve uma interpretação exigindo a tradução da linguagem escrita para a linguagem matemática, e muitas vezes as dificuldades apresentadas pelos alunos na tradução de situação da linguagem corrente para a linguagem formal residem na interpretação. Não sendo capaz de interpretar, o aluno não conseguirá representar formalmente a situação (GIL, 2008, p. 34).

Posto isso, vemos a importância de se trabalhar a generalização e a modelação de problemas na formação de licenciandos, já que dificuldades foram visualizadas a partir dessa prática. Assim, é notável que houve mobilização do pensamento algébrico nessa categoria, apresentando impasses que merecem ser discutidos no seu percurso acadêmico.

### 6.2.2 C2: Estabelecer relações e operar com o desconhecido

Na segunda categoria, tomamos por base a atividade 5, que tinha o intuito de solucionar os problemas 1, 2 e 4 de Bhāskarācārya por meio da primeira regra, seguindo os passos, se possível, da matematização e do passo a passo descritos por eles anteriormente.

Nessa perspectiva, entregamos aos estudantes um cartão de recurso e outro de atividade, advertindo que eles precisavam responder a esses questionamentos apenas com a técnica que Bhāskarācārya forneceu, não utilizando conhecimentos atuais em sua resposta. Como última ação, os participantes fizeram uma apresentação, no quadro, de cada problema respondido.

A ideia central da atividade era que as equipes estabelecessem a relação do que tinham elaborado preliminarmente (matematização e passo a passo). Sendo que ainda continuassem operando com os números desconhecidos nos problemas, agora avaliando seus erros iniciais, chegando a dar significado ao número presumido/variável e também ao número necessário/incógnita. Além disso, os grupos deveriam identificar, no problema, o número conhecido, que não ficava explícito, devendo eles inferi-lo.

#### 6.2.2.1 Problema 1

O 1º problema que foi apresentado às equipes indagava, de acordo com Bhāskarācārya (1816, p. 34):

- Um número é multiplicado por 5, desse produto, é subtraído um terço de si mesmo e o restante é dividido por 10. A este quociente, é adicionado  $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$  do número presumido e o resultado é 68. Qual é o número?

Salientamos que foi realizado, nesses problemas, um tratamento didático, a fim de que os estudantes o compreendessem, mas destacamos que tomamos todo cuidado necessário para não modificar o sentido do problema, permanecendo o que Bhāskarācārya solicitava. A seguir, podemos averiguar as respostas da questão pela Equipe 1.

Passo 1: Presume-se o número 12.

Passo 2: Realize os passos que a questão pede:  $12 \times 5$ . Retira-se  $\frac{1}{3}$  do produto de si mesmo:  $60 - 20 = 40$ . A diferença é dividida por 10:  $40 \div 10 = 4$ . Ao Quociente é adicionado  $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$  do número presumido  $4 + \frac{12}{3} + \frac{12}{2} + \frac{12}{4} = 18$ .

Passo 3: Aplica-se a regra, produto conhecido pelo presumido:  $12 \times 68 = 816$ . Divide-se pelo resultado anterior:  $816 \div 18 = 48$  (EQUIPE 1, 2022).

Ao examinar as soluções das questões, depreendemos que a primeira equipe conseguiu chegar à solução final: 48, que condiz com a mesma resposta encontrada por nós pesquisadoras na seção 3. No entanto, verifica-se um distanciamento dos passos seguidos nessa resposta, que o grupo estabeleceu no início do contato com a regra. No Quadro 34, segue essa distinção:

**Quadro 34 – Diferença do passo a passo inicial da Equipe 1**

| Passo a passo após a matematização                                                   | Passo a passo aplicado na questão                                                                 |
|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1º passo: multiplica-se, divide-se, soma-se, ou subtrai frações do número presumido. | 1º Passo: Presume-se o número.                                                                    |
| 2º passo: Observa-se as condições da questão.                                        | 2º Passo: Realize os passos que a questão pede.                                                   |
| 3º passo: Pelo resultado divide-se o produto do número conhecido pelo presumido.     | 3º Passo: Aplica-se a regra, produto conhecido pelo presumido. Divide-se pelo resultado anterior. |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Pelo exposto, podemos inferir que houve um avanço significativo da primeira equipe ao aplicar a regra na questão. Na sala, percebemos o esforço dos estudantes para entenderem a regra quando repararam que seu método pré-estabelecido não funcionou. Diante disso, os alunos leram a regra e determinaram novos passos.

No que se refere aos termos não compreendidos na fase anterior: número conhecido; número presumido e número necessário, geraram-se ainda discussões iniciais na sala de aula. Mas os alunos relacionaram, imediatamente, o número necessário ao número que a questão pedia no final. Já sobre o número conhecido, eles ressaltaram na sua explicação: “nós julgamos o número 60 como sendo o número conhecido por que era o único que estava ali solto” (EQUIPE 1, 2022).

Em relação ao número presumido, as equipes levaram bastante tempo debatendo o que ele seria e de onde apareceria. Podemos evidenciar isso quando a primeira equipe, ao dialogar com a professora, indagava: “Presume-se o que? Nós fornecemos um número a esse termo, para depois fazer as contas? Se a conta não der certo não é ele” (EQUIPE 1, 2022).

Nesse contexto, eles continuam revelando sua dificuldade para determinar esse termo na sua apresentação final da questão, dizendo: “Primeiro tem a questão do número presumido, que foi complicado de entender. Nós nunca imaginamos no começo que podíamos escolher qualquer número, mas foi isso que fizemos e deu certo” (EQUIPE 1, 2022). Assim, observamos, através da fala dos estudantes, as suas ações mediante essa expressão, que mostram os alunos lidando com esse desconhecido, fazendo testes para obterem um resultado satisfatório.

No que tange à escolha do número, a equipe mencionou: “escolhemos o doze, por que era o número mais confortável para efeito de cálculo, porque na questão tinham as frações  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{4}$ . Então, o doze se encaixou perfeitamente para os cálculos acontecerem de forma tranquila” (EQUIPE 1, 2022). Com isso, o grupo demonstra uma relação que eles encontraram para determinar o número presumido, pois, como comentamos na seção 3, ele pode ser qualquer um, mas é importante que o leitor compreenda que pode escolher um que facilite os cálculos e foi isso que os licenciandos enxergaram.

A segunda equipe também percorreu um passo a passo diferente do estabelecido inicialmente, através da sua matematização. Ela colocou a seguinte solução:

Suponhamos que o número presumido seja 1.  
Temos que o número é multiplicado por 5, então  $1 \times 5 = 5$  é o produto. O produto é subtraído por si mesmo:  $5 - \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$  (RESTANTE). O restante é dividido por 10, então  $\frac{10}{3} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{3} \rightarrow$  é adicionado:  $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{17}{12}$ .  
Seguindo a regra: nº conhecido = 68, nº presumido = 1, nº necessário =  $\frac{17}{12} \rightarrow$   
 $\frac{68 \times 1}{\frac{17}{12}} = 68 \times \frac{12}{17} = \frac{816}{17} = 48$  (EQUIPE 2, 2022).

Verificamos que a segunda equipe, de igual maneira, chega ao resultado 48, que é o correto pela seção 3. O grupo, no decorrer da solução, afirma que o “nº necessário =  $\frac{17}{12}$ ” (EQUIPE 2, 2022), contudo, quando foi se apresentar, relatou que “o número necessário é o resultado da equação que vamos chegar” (EQUIPE 2, 2022).

O que nos chamou atenção na frase da equipe, nesse momento, foi o vocábulo “equação”, visto que os estudantes deduziram que estavam resolvendo uma equação, porém Bhāskarācārya só utilizou, nessa técnica, Aritmética, todavia, os estudantes, por estarem em busca de uma incógnita/número desconhecido, fizeram ligação com a temática.

No tocante aos passos, eles também os alteraram quanto ao que foi posto inicialmente, pois verificaram sua ineficiência. As mudanças podem ser analisadas no Quadro 35.

**Quadro 35– Diferença do passo a passo inicial da Equipe 2**

| <b>Passo a passo após a matematização</b>                                          | <b>Passo a passo aplicado na questão</b>                                        |
|------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| 1º passo: Chamar de $x$ o número presumido.                                        | 1º passo: Supor um número.                                                      |
| 2º passo: Utilizá-lo para operar com frações através das quatro operações básicas. | 2º passo: Aplicar na questão.                                                   |
| 3º passo: O resultado obtido pela equação anterior divida-o por $x$ .              | 3º passo: Fazer a multiplicação do presumido pelo conhecido.                    |
| 4º passo: Após dividir, chega-se no resultado necessário.                          | 4º passo: Divide o resultado da multiplicação pelo número designado necessário. |

Fonte: Adaptado dos arquivos da pesquisa (2022).

De acordo com o quadro, notamos um avanço da equipe em relação ao inicial, eles conseguiram avançar conforme foram aplicando a primeira regra no problema. A dificuldade relatada pela Equipe 2, além disso, foi relacionada ao impasse de descobrir qual era o número presumido, em que se gastou bastante o tempo da solução. Sobre isso, eles disseram: “Depois de muita persistência, a gente descobriu que a gente tinha que presumir o número” (EQUIPE 2, 2022).

Diante do exposto, detectamos que as equipes conseguiram responder, satisfatoriamente, ao primeiro problema, apresentando mudanças acerca dos passos que estabeleceram, inicialmente, na regra. Os alunos, no decorrer da atividade, fizeram associações entre a regra e o problema e perceberam falhas em sua matematização.

A respeito de lidar com o desconhecido, fica explícito o raciocínio dos estudantes para acharem os três termos envolvidos no problema: número presumido, número conhecido e número necessário, isso se evidencia desde a primeira categoria. Quando se refere ao número presumido, é relevante o movimento que os alunos fizeram, sendo o processo cativante para a exploração da investigação matemática, pois vimos o empenho dos alunos para descobrirem como o encontravam. Em meio a essas experiências, identificamos características do pensamento algébrico emergindo.

### 6.2.2.2 Problema 2

Bhāskarācārya (1816, p. 34), no segundo problema, expõe a seguinte situação:

- Um terço de uma coleção de belos nenúfares é oferecido a Mahadev, um quinto a Huri, um sexto ao Sol, um quarto a Devi e seis restantes são apresentados ao professor espiritual. Qual o número inteiro de nenúfares?

Ao observar a resposta da primeira equipe, constatamos que eles seguiram os passos anteriores, discutido no problema 1 (Quadro 34). Porém, por erros no segundo cálculo, o grupo não conseguiu chegar ao resultado correto do problema. Visualizemos, a seguir, a solução da Equipe 1:

**Figura 15- Solução da Equipe 1, referente à questão 2**

2- Passo 1: PRESUME-SE O NUMERO  $\rightarrow 60$

Passo 2: REALIZE OS PASSOS QUE SE PEDE

$$30 + 12 + 10 + 15 = 67$$

Passo 3: APLICA-SE A REGRA

$$60 \times 6 = \begin{array}{r} 360 \\ 335 \\ \hline 250 \\ 201 \end{array} \quad \begin{array}{r} 167 \\ 33 \\ \hline \end{array}$$

Fonte: Arquivos da pesquisa (2022).

No problema, a equipe tinha que presumir um número, no caso dessa equipe, foi 60. O número 60, como explicamos na seção 3, significava um total aleatório de nenúfares, que vai ser usado como o todo para encontrar o resultado correto.

Com isso, posteriormente, como o todo de nenúfares (60) é oferecido a cada um dos deuses, os licenciandos tinham que subtrair as frações referentes a cada um deles, a fim de partirem para o passo 3 com o restante. No entanto, quando reparamos a resposta dos alunos, percebemos que eles somam:  $30+12+10+15=67$ . Pelo contexto, entende-se que eles atribuíram  $\frac{1}{3}$  de 60 ao número 30, o que acarretou um primeiro erro, visto que o certo seria 20. Além disso, os alunos não interpretaram que deveriam fazer uma subtração após a soma dos que haviam sido fornecidos. Depois disso, era que eles aplicariam o passo três.

Sobre a identificação dos termos: número conhecido e número presumido, os estudantes seguiram a mesma lógica da primeira questão, que tem uma relação com as frações, encontrando um número que facilitasse os cálculos posteriores, nessa perspectiva, a Equipe 1 (2022) ressalta: “escolhemos, pelo mesmo motivo anterior, ele se encaixa perfeitamente nas frações”. Ao apreciarmos os rascunhos desse grupo, notamos um cálculo que o levou a chegar no número 60, verifiquemos na Figura 16:

**Figura 16 – Equipe 1 encontrando o número presumido**

Handwritten student work showing the calculation of the least common multiple (LCM) of denominators 2, 3, 2, and 3 to find the number 60. The work is titled "2- PASSO 1: PRESUME O NUMERO". It lists the denominators and their prime factorizations, then multiplies the highest powers of each prime to get 60.

| Denominators | Prime Factorization              |
|--------------|----------------------------------|
| 3, 5, 6, 4   | $2 \times 3 \times 5 \times 2^2$ |
| 3, 5, 3, 2   | $2 \times 3^2 \times 5$          |
| 1, 5, 1, 2   | $2 \times 5$                     |
| 1, 5, 1, 1   | $5$                              |
| 1, 1, 1, 1   | $1$                              |

Final calculation:  $10 \times 6 = 60$

Fonte: Arquivos da pesquisa (2022).

Vê-se, pela figura, que os estudantes multiplicaram todos os números primos da decomposição dos denominadores, o que nos leva à definição de Mínimo Múltiplo

Comum (MMC). Isso significa que os alunos estavam em busca de um divisor comum para os números 3, 5, 6, e 4, o que facilitaria seus cálculos, visto que ficariam partes inteiras.

Assim, depreendemos uma relação construída pelos estudantes, saindo do contexto de Bhāskarācārya, para encontrar o número presumido. Este *insight* mostra que os licenciandos vêm mobilizando conhecimentos matemáticos por meio da História da Matemática, fazendo-os refletirem sobre a construção do conhecimento (SAITO, 2015).

Quando se trata da Equipe 2, observamos, na Figura 17, que os participantes algebrizaram a questão, afastando-se do recomendado para a solução do problema, que pedia para os alunos só utilizarem os conhecimentos fornecidos por Bhāskarācārya.

**Figura 17: Solução do problema 2 pela Equipe 2**

12 Para des cobrir o número inteiro de nemífoes, basta resolver a equação

$$6 = x - \frac{19x}{20}$$

Presumido: 2  
Nº contendo: 6  
Nº NECESSÁRIO?

2. o todo:  $x$   
Mahadev:  $\frac{x}{3}$   
Huni:  $\frac{x}{5}$   
SOL:  $\frac{x}{4}$   
Devi:  $\frac{x}{6}$   
Resto:  $6 = x - \frac{x}{3} + \frac{x}{5} + \frac{x}{6}$

Fonte: Arquivos da pesquisa (2022).

Por isso, perguntamos a eles o porquê de terem recorrido a esse método, eles alegaram: “não conseguimos do outro modo, então resolvemos fazer assim” (EQUIPE, 2022). Frisamos que a equipe passou um tempo extenso nessa questão, tentando compreendê-la, isso é perceptível no lado esquerdo da Figura 17, quando eles ainda presumem o número, conseguindo identificar o número conhecido, porém, quando foram executar os passos propostos na primeira regra, não conseguiram desenvolver a questão.

Desse modo, os alunos recorreram a uma equação do primeiro grau, utilizando a variável  $x$ , que era mais comum ao cotidiano deles. No decorrer das ações da Equipe 2, notamos que os estudantes tiveram, igualmente à Equipe 1, uma dificuldade de

interpretação, gerando diversas dúvidas, como: “o que farei com o número presumido?” (EQUIPE 2, 2022).

As dificuldades das equipes podem ter acontecido por não ter sido feito um tratamento didático adequado no problema, isso nos faz refletir para uma próxima aplicação. Ademais, há a interpretação dos alunos, um ponto que precisa ser averiguado na formação de professores, pois eles tiveram um impasse em compreender o contexto em que o problema estava inserido, em imaginar o que estava se passando e em entender o que significava o número presumido, acarretando não conseguirem uma aplicação satisfatória da regra.

#### 6.2.2.3 Problema 4

Bhāskarācārya, no problema, 4 afirma:

- Um quinto da colmeia de abelhas voou para a flor Kadamba, um terço voou para o Silandhara, três vezes a diferença desses dois números voou para um caramanchão e uma abelha continuou voando, atraída de cada lado pelos perfumados Ketaki e Malati. Qual foi o número total de abelhas?

A Equipe 1 tentou aplicar, novamente, o método da primeira regra, todavia, por erro de interpretação, mais uma vez, não conseguiram chegar à resposta correta. Na Figura 18, a seguir, podemos verificar a proposta de solução dos participantes.

**Figura 18 – Solução do problema 4 pela Equipe 1**

4- PRESUME-SE 15

PASSO 2: REALIZE OS COMANDOS

$$\frac{15}{5} - \frac{15}{3} = 3 - 5 = 2 \times 3 = 6 - 1 = 5$$

PASSO 3: APLICA-SE A REGRA

$$15 \times 1 = \frac{15}{5} = 3$$

Fonte: Arquivos da pesquisa (2022).

Pelo passo 2, é nítido que os estudantes não apreenderam bem o enunciado do problema, principalmente, a parte: “um quinto da colmeia de abelhas voou para a

flor Kadamba, um terço voou para o Silandhara, três vezes a diferença desses dois números voou para um caramanchão e uma abelha continuou voando [...]”, porque a equipe teria de compreender que existia uma terceira fração, que deveria ser calculada inicialmente e, depois, tiravam-se as três frações:  $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \times 3 = \frac{2}{5}$  do número presumido. Eles confirmaram em sua apresentação, vejamos a seguir:

Na questão 4, o número presumido é 15, pois é divisível por 5 e por 3. Em seguida, tínhamos que fazer a diferença deles e multiplicar por três [fala apontando para as frações:  $\frac{15}{3} - \frac{15}{5}$ ] que deu 6. Assim, uma abelha continuou voando, nós não sabíamos se devíamos considerar ou desconsiderar ela. Então desconsideramos e ficou  $6 - 1 = 5$ . No final, multiplicamos o presumido 15 pelo conhecido 1 e dividimos pelo resultado 5 que deu 3 (EQUIPE 1, 2022, grifos nossos).

É perceptível, pela fala da Equipe 1, que eles estavam confusos no tocante ao entendimento do problema, quando eles afirmam: “uma abelha continuou voando, nós não sabíamos se devíamos considerar ou desconsiderar ela. Então desconsideramos e ficou  $6 - 1 = 5$ ” (EQUIPE 1, 2022), isso demonstra que os alunos não fizeram relação com o passo a passo que vinham seguindo anteriormente, pois essa abelha era a parte conhecida, como os próprios notam no final, ao mencionarem: “multiplicamos o presumido 15 pelo conhecido 1” (EQUIPE 1, 2022).

No que tange a essa questão, em meio à apresentação, a Equipe 1 declarou: “por falta de tempo, não terminamos e achamos que está errada” (EQUIPE 1, 2022). Essa adversidade nos mostrou outro ponto que deve ser repensado na formação, já que, por ser algo novo para os estudantes, demora para que eles compreendam a aplicação, sendo um caso a ser discutido.

Outro ponto a ser ressaltado é o fato de a Equipe 1 ter recorrido a uma prova se o resultado estava correto, usando conceitos algébricos atuais, resolvendo uma equação do primeiro grau para encontrar o resultado correto. Eles deixaram na folha, logo abaixo da resposta pela regra, a seguinte solução:

**Figura 19 – Rascunho de uma prova da Equipe 1**

$$\begin{aligned}
 & \frac{x}{5} + \frac{x}{3} + \left( \left[ \frac{x}{5} - \frac{x}{3} \right] \times 3 \right) + 1 = x \\
 & \frac{8x}{15} + \left( \frac{2x}{15} \times 3 \right) \\
 & \frac{8x}{15} + \frac{6x}{15} = \frac{14x}{15} + 1 = \frac{14x+15}{15} \\
 & \frac{14x+15}{15} = x \\
 & 14x + 15 = 15x \\
 & 15x - 14x = 15 \\
 & x = 15
 \end{aligned}$$

Fonte: Arquivos da pesquisa (2022).

Observemos que, para transpor para a linguagem algébrica, os alunos não tiveram dificuldades, pois isso já está ligado ao cotidiano deles, revelando a mecanicidade das operações com letras, fazendo com o que o raciocínio matemático opere, mesmo sem entender as variáveis envolvidas.

Corroborando essa temática, Lins e Gimenez (1997) mencionam que o aluno, ao resolver uma equação corretamente, não significa que ele está pensando algebricamente. Pela foto, é notório que, pelo método algébrico atual, a equipe conseguiu chegar ao resultado correto da questão.

No que se refere à Equipe 2, esta fez, novamente, uma resposta utilizando os conceitos algébricos atuais, não seguindo a regra de Bhāskarācārya. Na Figura 19, pode ser percebido o que fez a Equipe 2:

Figura 20 – Solução do problema 4 pela Equipe 2

3. **Folha de respostas**

todo:  $x$   
 flor Kadamba:  $\frac{x}{5}$   
 Flor Silandhara:  $\frac{x}{3}$   
 a diferença entre  
 3x o número de  
 abelhas que voaram  
 para Silandhara e  
 Kadamba:  $\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{5}\right) \times 3$   
 uma abelha voou  
 para Ketaki e outra  
 para Malati: 2

Somando a quantidade  
 de abelhas que voaram  
 em direção a todas  
 as flores, vai resultar  
 no total de abelhas  
 da colmeia

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3} - \frac{x}{5}\right) \times 3 + 2 = x$$

$$\frac{8x}{15} + \frac{6x}{15} + 2 = x$$

$$\frac{14x}{15} + 2 = x$$

$$2 = x - \frac{14x}{15}$$

$$2 = \frac{x}{15} \rightarrow \boxed{x=30}$$

Fonte: Arquivos da pesquisa (2022).

Através da figura, notamos que a equipe teve dificuldade de compreender o que era o número presumido e a regra associada a ele, recorrendo à incógnita  $x$  e ao método de resolver a equação do primeiro grau. Nesse sentido, ao longo do desenvolvimento da Equipe 2, averiguamos uma dificuldade dos alunos para interpretarem o novo método, apesar disso, tentaram, mas quando não conseguiram aplicar o método, usaram conceitos atuais para não deixarem a atividade em branco.

Detectamos também um erro de interpretação, na parte: “e uma abelha continuou voando, atraída de cada lado pelos perfumados Ketaki e Malati”, porque a equipe colocou como sendo duas abelhas distintas, alterando o resultado no final. Isso provocou divergência na resposta final, mostrando que a equipe não estabeleceu uma relação, inicialmente, com os termos envolvidos no problema.

#### 6.2.2.4 Considerações sobre a segunda categoria

Constatamos que os alunos lidaram, continuamente, com o desconhecido, estabelecendo elos entre o número presumido (variável) e o número necessário (incógnita). Nesse contexto, os estudantes reformularam suas matematizações da regra, concebendo, ao longo da aplicação, a ideia de presumir o número e o fato de que não o encontrariam por meio de cálculos.

Dessa forma, os estudantes conseguiram responder à primeira questão, mas, pelo cansaço e/ou pela interpretação, não chegaram aos resultados dos demais questionamentos. Quanto a isso, a Equipe 1 (2022) ainda ressalta: “a questão 1 eu tenho orgulho de apresentar, porém as outras, pelo tempo eu acho que não deu certo”.

Isso mostra que as equipes antes da formação e do diálogo final, não haviam compreendido inteiramente a regra. Eles entenderam alguns passos, contudo, tinham dificuldades de executá-los e foi perceptível através de várias indagações que foram feitas ao longo da aula, tais como: “O que é esse número presumido? O que faço para descobri-lo? Eu realizo algum tipo de cálculo?”.

### **6.2.3 C3: Construir significado**

Ao longo das categorias analisadas anteriormente, vimos os participantes tentando assimilar o conceito de número presumido, portanto, aqui, apresentaremos como ficou o entendimento desses alunos em torno dessa temática. Levamos em consideração o contato com a regra e com os problemas, ou seja, procuramos saber o significado que essas equipes criaram ao longo da temática estudada.

Por isso, na atividade 5.1, tivemos como um dos objetivos notar a concepção dos estudantes do que seria o número presumido, verificando se, ao longo da atividade, eles perceberam algo que retomasse o pensamento algébrico. Com isso, pedimos às equipes que, no final da atividade, escrevessem um pequeno texto sobre o que apreenderam por número presumido. A seguir, observemos o que a Equipe 1 escreveu:

No começo quando o termo “número presumido” nos foi apresentado houve uma certa confusão pois associamos este termo ao conceito de variável, pela semelhança entre as definições, mas após ler a regra e se abster dos conhecimentos prévios, a compreensão e aplicação do número presumido tornou-se automática a ponto de que a escolha desse número fosse criteriosa, com o intuito de diminuir as dificuldades dos problemas propostos e facilitar os passos aritméticos que surgiram na aplicação da regra (EQUIPE 1, 2022).

Quando a equipe relata sobre, no início, ter associado o número presumido a uma variável e destaca que, ao longo do texto, não a inferiu assim, demonstra certa incompreensão dos participantes em torno do conteúdo trabalhado. Isso fica claro quando afirmam: “houve uma certa confusão pois associamos este termo ao conceito de variável” (Equipe 1, 2022).

Nessa direção, de acordo com Hart *Apud* Usiskin (1995, p. 10): “Uma variável é um número literal que pode assumir dois ou mais valores durante uma determinada discussão”. Logo, era necessário que os graduandos captassem essa ideia, mas notamos que os alunos, ao final da atividade, ainda tinham dúvidas acerca desse conceito, mesmo o supondo, os licenciandos não assimilaram que o número presumido poderia ser qualquer um, entretanto, existiam alguns que facilitavam os cálculos.

A Equipe 1, com a experiência, atribuiu significado ao modo de escolha do número presumido, salientando que “a compreensão e aplicação do número presumido tornou-se automática a ponto de que a escolha desse número fosse criteriosa, com o intuito de diminuir os cálculos” (EQUIPE 1, 2022).

Esse *insight* foi mostrado na categoria anterior, quando a Equipe 1 usou o MMC dos denominadores das frações envolvidas para encontrar um divisor comum, facilitando seus cálculos. Em face disso, os alunos exercitaram seus pensamentos intuitivos para decidirem seus passos futuros nos demais exemplos, aprimorando suas soluções, ou seja, estabelecendo relações.

No que concerne à Equipe 2, podemos vislumbrar seu escrito a seguir:

No início, tivemos dificuldades pois pensamos como número presumido o “x”, mas após compreender o conceito de “número presumido” contido no Lilavati, vimos que número presumido é realmente um número que suponhamos e não uma incógnita. Mas levando em consideração que “x” é uma variável, que pode assumir diversos valores, podemos ver uma certa semelhança entre o “x” e o “número presumido” (EQUIPE 2, 2022).

No texto, ao afirmarem: “ após compreender o conceito de “número presumido” contido no Lilavati, vimos que número presumido é realmente um número que suponhamos e não uma incógnita” (EQUIPE 2, 2022), reparamos uma diferenciação da equipe quanto ao “x”, que é colocado pelos licenciandos como incógnita. Nesse trecho, reconhecemos os alunos atribuindo sentido aos termos, quando os associa a conceitos matemáticos atuais, promovendo uma reflexão sobre seus significados.

Todavia, eles fizeram uma afirmativa no último parágrafo, que reflete uma comparação errônea, quando levantaram a seguinte hipótese: “mas levando em consideração que “x” é uma variável, que pode assumir diversos valores, podemos ver uma certa semelhança entre o “x” e o “número presumido”” (EQUIPE 2, 2022). Assim, é fundamental perceber que a Equipe 2 atribuiu, primeiramente, a “x” um caráter de incógnita e, no trecho, abordou como sendo uma variável, porém, nos problemas de Bhāskarācārya, estamos lidando com equação do 1º grau, por isso, o número necessário só pode sê-lo em uma determinada situação, levando ao conceito de incógnita e o número presumido pode assumir diversos valores em um só problema, caminhando para o conceito de variável citada anteriormente.

#### 6.2.3.1 Considerações sobre a terceira categoria

Quando contemplamos as duas equipes, é perceptível que, durante a formação, elas foram atribuindo significado aos diferentes termos. Apesar disso, tiveram dificuldades de associar os conceitos de número presumido e número necessário ao significado de incógnita e variável. Isso foi importante na discussão, pois são conteúdos repassados na Educação Básica, que, por vezes, não são explorados na formação de futuros professores, deixando lacunas, que podem influenciar em sua prática docente.

Ante isso, ao observar os feitos dos alunos durante esse percurso, é notável o surgimento de conceitos que comentamos no capítulo 3, tais como: frações, equações, variável, incógnita etc. Esses conduziram os alunos a atribuírem significado a essas questões, recorrendo a conceitos já interiorizados por eles, para depreender a regra e solucionar os problemas, contemplando o exercício do pensamento algébrico.

Com isso, evidenciamos esse *insight* de Lilavati, que contribui com o exercício de categorias do pensamento algébrico na formação de futuros professores de Matemática. Como foi analisado, os participantes estavam cursando acima do 6º semestre e ainda apresentaram impasses, que merecem e devem ser debatidos em formações como essas. No próximo capítulo, expomos as considerações finais desta pesquisa, discutindo todo o processo perpassado, tendo em vista os desafios e os percalços desses dois anos.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa está posta no campo de estudo da inserção de tratados históricos matemáticos para a formação de futuros professores da Educação Básica. Nesse sentido, devemos ter critérios, para que esses documentos favoreçam reflexões sobre a construção de conceitos matemáticos.

A investigação perpassou por uma formação de licenciandos em Matemática, adentrando uma disciplina de História da Matemática. Destarte, procuramos, por meio do tratado Lilavati, de Bhāskarācārya, promover estudos referentes às características do pensamento algébrico.

Buscando um momento em que os futuros docentes refletissem e agissem ativamente durante as atividades propostas, elaboramos Unidades Básicas de Problematização (UBP). Levando, nelas, a História da Matemática, oportunizando aos graduandos autonomia para produzirem seu próprio conhecimento, visto que, nesta pesquisa, não tratamos essa área como um repositório fixo de informações, mas como uma fornecedora de recursos.

Em meio a tantas partes que Lilavati possui, escolhemos a concernente à exploração do número presumido, que está em sua primeira seção, no tópico 12, pois esta contempla saberes que podem ser usados como suporte para observar características do pensamento algébrico emergindo.

Diante disso, este trabalho, em sua totalidade, foi regido pela seguinte pergunta diretriz: Que características do pensamento algébrico podem emergir do tratado Lilavati (1150), elaborado por Bhāskarācārya, na formação de licenciandos em Matemática da FECLESC-UECE?

Por meio da questão norteadora, elaboramos o objetivo central deste estudo, que consiste em: compreender as características do pensamento algébrico dos licenciandos em Matemática da FECLESC, que emergiram a partir do tratado Līlāvati (1150), elaborado por Bhaskara II. Para alcançá-lo, elaboramos três objetivos específicos.

O primeiro objetivo específico foi conhecer o tratado Lilavati, com base em suas traduções, evidenciando aspectos contextuais do século XII. Para atingir este, fizemos uma pesquisa bibliográfica, na qual buscamos trabalhos que versassem sobre o tratado Lilavati, o autor Bhāskarācārya e os aspectos contextuais atrelados a esse

documento. Adiante, desenvolvemos uma pesquisa documental com as traduções de Lilavati, visto que o tratado original não se encontra disponível.

Referente a Bhāskarācārya, notamos que ele era um astrônomo e astrólogo hindu, que deixou obras que permitem vislumbrar a Matemática que perpassava por aquele século. Entre seus trabalhos, está Siddhāntaśiromani, um compêndio de tratados, sendo dividido em quatro partes: Lilavati, Bījaganita, Golādhyāya e Gaṇitādhyāya. O primeiro é dedicado à Aritmética; o segundo, à Álgebra e os dois últimos tratam da Astronomia.

O tratado Lilavati é composto de regras e de problemas, sobre os quais, Bhāskarācārya é sucinto, mostrando o como fazer e, ao final, deixa um ou mais problemas para que o leitor resolva utilizando uma técnica. É importante frisar que o autor não demonstra suas regras, nem a solução dos problemas, apenas deixa, em uma declaração, a resposta, que deve ser achada no final da solução.

Sobre os aspectos contextuais do século XII, que emergiram do Lilavati, vemos, em alguns trechos, menções relacionadas: à agricultura, envolvendo criações de animais; à religião, mencionando divindades adoradas naquela época, tais como: Shiva, Vishnus, entre outras; e ainda ao comércio de ouro e pérolas, que apresentava unidades de medidas próprias daquela época.

No que tange a Lilavati, localizamos três traduções: Patwardhan, Nainpally e Singh (2006); Colebrooke (1967) e Taylor (1816). Nestas, observamos uma vasta quantidade de conteúdos, podendo ser estabelecida a ligação com a Matemática atual, uma vez que são aplicáveis na Educação Básica, tais como as quatro operações básicas, a regra de três, as equações.

Mediante essas três versões, selecionamos, para esta dissertação, a versão de Taylor (1816), pois consideramos que ela conservou mais características da época, sendo a mais próxima da data de publicação de Bhāskarācārya, conforme é mencionado na seção 2. Essa tradução é dividida em quatro partes, envolvendo conceitos aritméticos, geométricos e algébricos.

Perante vários tópicos dentro de Lilavati, escolhemos explicar a seção “número presumido” da parte I. Assim, o segundo objetivo consistiu em expressar a relação dos conceitos matemáticos presentes na parte do número presumido de Lilavati, com o desenvolvimento do pensamento algébrico. Na realização dessa finalidade, utilizamos a pesquisa documental, tendo por base a tradução *Lilawati: or a treatise on Arithmetic and Geometry*, de John Taylor, ano de 1816.

Dessa forma, encontramos, nesse tópico, seis regras e sete problemas, que revelaram conceitos matemáticos que podem ser trabalhados com futuros professores. No tocante ao pensamento algébrico, notamos que o processo de matematização e de descrição do passo a passo da primeira regra de Bhāskarācārya, o entendimento do número presumido e a sua aplicação nos problemas desencadeavam características desse modo de raciocínio, que poderiam impulsionar discussões sobre a temática.

Nessa perspectiva, pretendendo contribuir com atividades investigativas explorando essa parte de Lilavati, desenvolvemos o terceiro objetivo específico, que consistia em propor Unidades Básicas de Problematização com fundamento em Lilavati, que promovessem uma reflexão sobre as características do pensamento algébrico.

Dessa maneira, criamos seis UBP, a saber: (1) Aspectos contextuais da cultura matemática indiana; (2) Bhāskarācārya: vida e obra; (3) Lilavati e a tradução de Taylor (1816); (4) Līlavātī e o número presumido; (5) Os problemas referentes à primeira regra; (6) Problemas de Lilavati na Matemática atual. Nelas, procuramos estabelecer conexões com questionamentos que incentivassem a protagonização dos estudantes na construção do conhecimento.

Intencionando uma contribuição para os futuros professores de Matemática, aplicamos uma formação na Licenciatura em Matemática da FECLESC-UECE, utilizando atividades apoiadas nas Unidades Básicas de Problematização. Nessa ação, colhemos resultados para o debate do quarto objetivo específico: discutir as características do pensamento algébrico oriundas da experiência com licenciandos em Matemática da FECLESC-UECE sobre o Lilavati.

Na formação, os estudantes começaram mobilizando a característica de generalizar/modelar, examinando a linguagem retórica proposta em Lilavati, apontando para algumas dificuldades relacionadas à passagem dessa escrita inicial para a Matemática atual, o que nomeamos de matematização. Reverberando na nossa prática com alunos da Educação Básica, que sentem aversão ao transformismo nas expressões algébricas.

Na aplicação da regra, verificamos os discentes fazendo associações e lidando com o desconhecido. Com isso, os participantes perceberam divergências do que pensaram inicialmente, já que os mesmos foram utilizar sua generalização e não conseguiram. Nesse momento, eles estavam mobilizando seu raciocínio para que

relações fossem estabelecidas, a fim de atribuir significado àquele passo a passo que eles designaram introdutoriamente.

Ressaltamos que um dos grandes impasses para os estudantes, na prática, foi o entendimento do conceito de número presumido. Muitos deles confundiram este com a incógnita/todo, que deveria ser encontrada no problema. Logo, os estudantes só conseguiram chegar ao resultado do problema 1, satisfatoriamente, com o método de Bhāskarācārya. Nos problemas 3 e 4, os licenciandos revelaram, em sua escrita, modos diferentes de interpretação, recorrendo à Matemática atual para não deixarem a atividade em branco, porque tinham tempo determinado para o término da atividade.

Posto isso, os estudantes, ao fazerem o relatório final, conferindo significado ao seu percurso, expuseram o que compreenderam por número presumido. No relatório, emergiram os termos incógnita e variável, em que a primeira equipe apresentou o termo como parecido com uma incógnita e o segundo grupo revelou certa dúvida nessa conceituação, não conectando ao contexto em que estavam. Isso mostrou que os estudantes não conseguiram assimilar que, na conjuntura do problema, o número presumido poderia ser qualquer um, tornando-se uma variável. Já o número necessário, que estava sendo procurado, só poderia ser um por cada questão, caracterizando-o dentro do conceito de incógnita.

Por isso, foi perceptível, pela análise do conteúdo, que os estudantes estavam mobilizando características do pensamento algébrico, tais como: estabelecer relações; generalizar; modelar; operar com o desconhecido; e construir significado, evidenciadas nas categorias expostas na seção 6.

No que se refere aos futuros professores de Matemática que participaram desta pesquisa, constatamos seu empenho nas conversas e suas preocupações com o ensino de Álgebra. Essa formação colocou em pauta características do pensamento algébrico, que serão permeadas por eles na Educação Básica, contribuindo para que licenciandos repensem, de forma crítica, os conceitos algébricos.

Desse modo, a investigação reforçou a importância de voltar o olhar para essas discussões que englobam conceitos da Educação Básica, que não foram incorporados, satisfatoriamente, na vida acadêmica dos licenciandos. Alguns deles estão adentrando a universidade com algumas lacunas, que merecem estudos, para que, ao chegarem em sala de aula, ensinem embasados em métodos que foram significativos na sua formação, enxergando a História da Matemática como provedora

de recurso para o ensino, em que os alunos entendem e discutem a construção do conhecimento.

Assim, esta experiência reflete na nossa prática docente, em que foi possível vivenciar, juntamente com os graduandos, práticas que podem ser incorporadas na Educação Básica, oportunizando ao aluno a construção do seu próprio conhecimento. Além disso, nesses dois anos, apropriamo-nos de conhecimentos relativos à Matemática indiana e de conceitos presentes em Lilavati para a Educação Básica, permitindo-nos perceber o valor do estudo de textos históricos na interface entre história e ensino de Matemática.

Nesta jornada, perpassamos por algumas dificuldades na pesquisa. A primeira foi fazer o estudo contextual, pois não encontramos, em uma linguagem acessível, documentos do século XII que tivessem nexos com Lilavati. Perante o exposto, executamos o estudo com base no tratado explorado, levando em conta aspectos apresentados nele. Outro ponto a ser comentado foi o tempo de aplicação das atividades, que, em pesquisas futuras, precisa ser revisto, para que os alunos não tenham esse impasse diante da resolução das atividades propostas.

Portanto, nossas perspectivas futuras serão estudar outros tópicos de Lilavati para levar à formação de professores. O tratado é rico em saberes matemáticos, que podem chegar ao ensino de Matemática através dos professores, promovendo mudanças significativas, trazendo visibilidade para pesquisas que envolvem formação docente e história da Matemática.

## REFERÊNCIAS

- ACHARYA, Bhascara Acharyabhascara. **Bija Ganita**: or, the algebra of the hindus. London: W. Glendinning, 1813. Tradução de: Edward Strachey.
- ALMEIDA, J. R.; SANTOS, M. C. Pensamento algébrico: em busca de uma definição. **Revista Paranaense de educação Matemática**, v.6, n. 10, p. 34-60, 2017.
- ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Paraná: Editora da Universidade Federal de Paraná, 2007.
- ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. **REVEMAT**, Santa Catarina, v. 6, p. 62-72, 2008.
- ALMOULOUD, S. A; SILVA, M. J. F. **Engenharia Didática**: Evolução e Diversidade; Florianópolis, v. 7, n.2, p. 26 – 27, 2012.
- ALVES, V. B. ; PEREIRA, A. C. C. . **Seno, cosseno e tangente: uma atividade com os círculos de proporção de William Oughtred (1633) na formação de professores de matemática**. Amazônia (UFPA), v. 16, p. 74-88, 2020.
- ARTIGUE, M. “Ingénierie Didactique”. Recherches en Didactique des Mathématiques. **Grenoble**: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9.3, p. 281-308, 1988.
- BARDIN, L. Análise de conteúdo. **Lisboa: edições**, v. 70, p. 225, 2016.
- BARDIN, L. Análise de conteúdo. **Lisboa: edições**, v. 70, p. 225, 1977.
- BHĀSKARĀCĀRYA. **Lilavati**. Tradução: Colebrooke. Allahabad: KITAB MAHAL, 1967.
- BHĀSKARĀCĀRYA. **Lilavati of Bhāskarācārya**: A Teatrise of Mathematics of Vedic Tradition. Tradução: Krishnaji S. Patwardhan, Somashekhara A. Naimpally e Shyam L. Singh. New Delhi: Motilal Banarsidass, 2006.
- BHĀSKARĀCĀRYA. **Lilawati: or a treatise on Arithmetic and Geometry**. Tradução: John Taylor. Bombay: Literary society of Bombay, 1816.
- BLANTON, M. L.; KAPUT, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**. v. 36, n. 5. 2005.
- BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2018.

CASTELO, J. A. M. **Resolução de equações quadráticas**: um resgate histórico dos métodos e uma proposta de aplicação da sequencia fedathi no seu ensino. 2013. 58 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional)-Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.

CASTRO, M. R. Educação algébrica e resolução de problemas. In: **Boletim Salto para o Futuro**. TV Escola, 2003.

CEARÁ. **Plano de curso da disciplina: História da Matemática**, Quixadá, 2009.

CEARÁ. **Projeto Pedagógico do Curso de Matemática**: Licenciatura Plena. Quixadá, 2009.

CESANA, A.; SAITO, F. **Mapeando alguns conhecimentos matemáticos incorporados no -esquadro móvel- de Ottavio Fabri (1544-1612)**. AMAZÔNIA, v. 16, p. 89, 2020.

COHEN, Elizabeth G.; LOTAN, Rachel A. **Planejando o trabalho em grupo**. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2017. Tradução de: Luís Fernando Marques Dorvillé, Mila Molina Carneiro, Paula Márcia Schmaltz Ferreira Rozin.

COLEBROOKE. Introduction. In: Lilavati. Kitab Mahal: Allahabad, 1967.

COSTA, L. C. **A evolução na resolução das equações algébricas**. 2016. 41 f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba, Brasil, 2016.

DATTA, B. The Two Bhaskaros. The Indian Historical Quarterly, **Calcutá**, v. 6, p. 727-736, 1930.

ECO, U. **Quase a mesma coisa: experiências de tradução**. São Paulo: Record, 2007.

EVES, H. **Introdução a história da matemática**. Tradução: Hygino Domingues. 5. ed. Campinas - SP: Editora da UNICAMP, 2011.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico**. In: SEMINÁRIO Luso-Brasileiro de Investigações Matemáticas no Currículo e na Formação de Professores. Anais... Lisboa, 2005.

FERREIRA, M. C. N. Álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental: uma análise dos documentos Curriculares Nacionais. **REnCiMa**, v.8, n.5, p.16-34, 2017.

GARBI, Gilberto Geraldo. **A rainha das ciências**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

GIL, K. H. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra**. 2008. 118 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e

Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

GONZÁLEZ-TEJERO, J. M. S.; PARRA, R. M. P.; PADILLA, M. E. O. El desarrollo del Conocimiento Matemático: THE DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL KNOWLEDGE. **Psicogente**, Colômbia, v. 14, p. 269-263, 2011.

GUEDES, E. G. **A equação quadrática e as contribuições de Bhaskara**. 2019. 73 f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2019.

JOSEPH, G. G. **Indian Mathematics**: Enganing with the Word from Ancient to Modern Time. Canadá: World Scientific, 2016.

KAPUT, J. Teaching and learning a new algebra. In FENNEMA, E. ROMBERG, T.A. (Eds.), **Mathematics classrooms that promote understanding**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum. 1999.

KAPUT, J. What is algebra? What is algebraic reasoning? In: KAPUT, J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M. (Eds.), **Algebra in the Early Grades**. Lawrence Erlbaum Associates. New York, 2008.

KUHN, M. C.; LIMA, E. Álgebra nos Anos Finais do Ensino Fundamental: reflexões a partir dos PCN e da BNCC para construção do pensamento algébrico significativo. **REnCiMa**, São Paulo, v. 12, ed. 3, p. 1-23, 12 abr. 2021.

LIMA, A. G. *et al.* **Mitologia Hindu**: Questionamentos simbólicos e representações. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2016.

LIMA FILHO, R. R. C.; SANTOS, R. M.; MENDES, I. A. Elaboração de problematizações a partir de práticas encontradas na história. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 2013, Curitiba-PR. **Anais**. p. 1-12.

LIMA, J. R. C. **Pensamento algébrico no currículo do ciclo de alfabetização: estudo comparativo de duas propostas**. 2018. 80 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2018.

LIMA, P. H.; CABRAL, L. F.; SILVANO, A. M. C. Análise das principais metodologias ativas utilizadas no ensino de Matemática na Educação Básica: um estudo bibliográfico. **Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática-REAMEC**, Mato Grosso, v. 9, n. 2, p. 1-30, 2021.

LINS, R. C. **A framework for understanding what algebraic thinking is**. Tese (Doctor of Philosophy) –School of Education, University of Nottingham, Nottingham, UK: 1992.

LINS, R.C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

LUCENA, E. M. P. de; MEDEIROS, J. B. L. de P.; MENDES, R. M. de S. **Morfologia e anatomia de espermatófitas**. Fortaleza: Eduece, 2015.

MARSON, C. C. O.; IVO, I. P. Gurus indianos entre mundos: trânsitos e mediações culturais. **Revista de Estudos de Religião**, [s. l.], v. 4, n. 2, p. 125-148, 2012.

MARTINS, J. P. **Uma linguagem geométrica singular refletida no Códice Atlântico de Leonardo da Vinci**: contribuições para a geometria escolar. Orientador: Iran Abreu Mendes. 2021. Teses (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Belém (PA), 2021.

MENDES, R. M.; MISKULIN, R. G. S. A análise de conteúdo como uma metodologia. **Cadernos de pesquisa**, [s. l.], v. 47, n. 165, p. 1044-1066, 2017.

MIGUEL, A. ; MENDES, I. A. Mobilizando histórias na formação inicial de educadores matemáticos: memórias, práticas sociais e jogos discursivos. **REMATEC**, Belém (PA), v. 16, p. 120-140, 2021.

OLIVEIRA, F. W. S. ; PEREIRA, A. C. C. . **Elementos Contextuais Do Instrumento Jacente No Plano De Pedro Nunes A Partir Do Tratado De Navegação De Arte Atque Ratione Navigandi**. Revista de Matemática, Ensino e Cultura, v. 15, p. 212-229, 2020.

PATWARDHAN, K. S.; NAIMPALLY, S. A.; SINGH, S. L. Introduction. In: **A Teatrise of Mathematics of Vedic Tradition**. New Delhi: Motilal Banarsidass, 2006.

PLOFKER, K. **Mathematics in Índia**. Estados Unidos: Princeton University Press, 2008.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. Álgebra no Ensino Básico. Portugal: **Direção Geral de Integração e de Desenvolvimento Curricular (DGIDC)**, 2009.

RAINA, D. Disciplinary Boundaries and the Civilizational Encounter: The Mathematics and Astronomy of India in Delambre's Histoire (1800-1820). **Studies in History**, Londres, v. 17, ed. 2, p. 211-243, 2011.

RAMASUBRAMANIAN *et al.* **Grahagaṇitādhyāya of Bhāskācārya's Siddhāntaśiromaṇi**. Bhāskara-prabhā, [S. l.], p. 197-231, 2019.

RAMASWAMY , R.; GODBOLE, R. Bridging the gender gap in Indian science. **NATURE**, [S. l.], v. 460, p. 1082-1082, 2009.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática**. Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2012.

SAITO, F. **História da matemática e suas (re)construções contextuais**. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

SAITO, F.; DIAS, M. S. Interface entre história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 19, n. 1, p. 89-111, 2013.

SANTOS, A. G. ; PEREIRA, A. C. C. . **A incorporação da régua de cálculo no ensino de multiplicação através da sua construção e do seu manuseio**. Boletim Cearense De Educação E História Da Matemática, v. 7, p. 357-369, 2020.

SANTOS, F. M. Análise de conteúdo: a visão de Laurence Bardin. 2012.

SANTOS, A. G.; FREIRE, D. F.; PEREIRA, A. C. C. Explorando as operações aritméticas no antigo Egito por meio da história da Matemática. **Research, Society and Development**, São Paulo, v. 10, p. e4310312944, 2021.

SILVA, I. C.; PEREIRA, A. C. C. Definições e Critérios para o Uso de Textos Originais na Articulação entre História e Ensino de Matemática. **Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)**, Rio Claro - SP, v. 35, n. 69, p. 223-241, 2021.

SILVA, I. C.; SILVA, J. H.; PEREIRA, A. C. C. Os versos de Lilavati como fonte histórica para o ensino de Matemática: propondo uma prática. **Revista Eletrônica da Matemática (REMAT)**, Bento Gonçalves - RS, v. 4, n. 1, p. 78-87, 2018.

SILVA, T. F. F. **“Nem tudo é por Bhaskara”**: a aprendizagem significativa por meio da história em quadrinhos para o ensino da equação do segundo grau. 2017. 127 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências na Educação Básica) - Universidade do Grande Rio "Prof. José de Souza Herdy", Duque de Caxias, 2017.

SILVA, H. F. **Triângulos Heronianos**. 2017. 64f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do ABC, São Paulo, 2017.

TAVARES, M. O.; PEREIRA, A. C. C. Um estudo sobre a inserção das práticas matemáticas históricas por meio de UBP no ensino de matemática. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, Ceará, v. 3, p. 59-70, 2016.

TAYLOR, J. Introduction. In: **Lilawati**: or a treatise on Arithmetic and Geometry. BHĀSKARĀCĀRYA. Bombay: Literary society of Bombay, 1816.

TAHAN, M. **O homem que calculava**. Editora Record, 2013.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (orgs.). **As ideias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 9-22.

WELLESLEY, M.A.; PETERS, A. K. Strange Attractors: Poems of Love and Mathematics. **The Mathematical Intelligencer**, New York, v. 10, p. 74-76, 2009.

WILLE, J. L.; NOVAIS, W. D. A mensuração de áreas na Antiga Mesopotâmia: uma Unidade Básica Problematicadora (UBP). In: Encontro Paranaense de Educação Matemática, 2017, Pará. **Anais**. p. 1-14.

## APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO FORMATIVO



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ (IFCE)  
UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ (UECE)  
FACULDADE DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E LETRAS DO SERTÃO CENTRAL (FECLESC)  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA  
(PGECM/IFCE)  
PFD - PROGRAMA DE FORMAÇÃO DOCENTE DO GPEHM/UECE

Esta **SONDAGEM FORMATIVA** chegou até você, pois julgamos a sua contribuição muito importante para a pesquisa de *Mestrado* que estamos realizando. Pedimos sua colaboração e total honestidade para que possamos realizar um estudo rico, de modo a construir um curso que contribua para a sua formação inicial.

Desde já agradecemos sua colaboração!

### CONHECENDO OS PARTICIPANTES

Sexo: (    ) Masculino    (    ) Feminino    Idade: \_\_\_\_\_

Qual semestre está cursando no momento?

1. Por que você escolheu fazer Licenciatura em Matemática?
2. Você tem experiência em sala de aula da Educação Básica?
  - ☐ Professor substituto/temporário do Estado/Prefeitura (1º a 5º ano do Ensino Fundamental)
  - ☐ Professor substituto/temporário do Estado/Prefeitura (6º a 9º ano do Ensino Fundamental)
  - ☐ Professor substituto/temporário do Estado (1º a 3º ano do Ensino Médio)
  - ☐ Professor de escola particular (1º a 5º ano do Ensino Fundamental)
  - ☐ Professor de escola particular (6º a 9º ano do Ensino Fundamental)
  - ☐ Professor de escola particular (1º a 3º ano do Ensino Médio)
  - ☐ Reforço Escolar (1º a 5º ano do Ensino Fundamental)
  - ☐ Reforço Escolar (6º a 9º ano do Ensino Fundamental)
  - ☐ Reforço Escolar (1º a 3º ano do Ensino Médio)
  - ☐ Aulas particulares
  - ☐ Programas de Formação do estado/prefeitura (Mais educação, Tutoria e/ou Areninha)
  - ☐ Programas de Formação Docente na Universidade (PIBID e/ou Monitoria)
  - ☐ Regência durante a disciplina de Estágio Supervisionado no curso de Licenciatura em Matemática

☐ Não tenho experiência

Outros (Tipo de experiência/Nível de Ensino): \_\_\_\_\_

**3.** Você já participou de programas institucionais que visam promover a formação inicial de discentes (como PIBID, Residência Pedagógica, Monitoria Acadêmica etc.)?

☐ Sim ou ☐ Não

Em caso afirmativo, especifique o programa: \_\_\_\_\_

**4.** Você está cursando a disciplina de História da Matemática, com isso, qual a sua visão sobre a disciplina de História da Matemática quando direcionada para a formação do futuro professor de Matemática?

**5.** Você já participou de curso de extensão/oficina/palestra que abordasse recursos didáticos advindos da História da Matemática?

☐ Sim ou ☐ Não. Em caso afirmativo, qual foi esse momento, quais foram os recursos didáticos e o conteúdo matemático abordados nessa formação?

**6.** Em algum momento da sua vida estudantil (Ensino Fundamental, Médio ou Superior), foram utilizados recursos didáticos advindos da História da Matemática?

☐ Sim ou ☐ Não. Em caso afirmativo, marque o recurso didático utilizado

☐ Biografia de matemáticos

☐ Demonstração histórica de Teoremas

☐ Métodos de calcular de antigas civilizações

☐ Fatos históricos sobre algum conteúdo matemático

☐ Uso de instrumentos históricos de medida

☐ Resolução de problemas antigos

☐ Notação e terminologia das matemáticas na antiguidade

Outros: \_\_\_\_\_.

## APÊNDICE B– SONDAGEM DIAGNÓSTICA



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ  
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ (IFCE)  
FACULDADE DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E LETRAS DO SERTÃO CENTRAL (FECLESC)  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA  
(PGECEM/IFCE)  
PFD - PROGRAMA DE FORMAÇÃO DOCENTE DO GPEHM/UECE

Esta sondagem diagnóstica chegou até você, pois julgamos a sua contribuição muito importante para a pesquisa de *Mestrado* que estamos realizando. Pedimos sua colaboração e total honestidade para que possamos realizar uma pesquisa rica, construindo uma formação que contribua para nossa formação inicial.

Desde já agradecemos sua colaboração!

### CONHECENDO OS CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS DOS PARTICIPANTES

1. Como você definiria a palavra Álgebra?
2. Para você o que significa ser capaz de pensar algebricamente?
3. Na universidade, você presenciou alguma discussão relacionada ao Pensamento Algébrico?
  - ☐ Sim
  - ☐ Não

Se sim, comente esse momento. Entretanto, se não, comente o que acrescentaria na sua formação a discussão dessa temática.

4. Como licenciando em Matemática, você alguma vez presenciou na sala de aula da Educação Básica uma vivência com conteúdos algébricos?
  - ☐ Sim
  - ☐ Não

Se sim, relate-a.

5. Você acha que a Aritmética e a Álgebra são áreas matemáticas interligadas? Se sim ou se não, comente.
6. Responda o problema a seguir utilizando os seus conhecimentos adquiridos até o momento de sua formação, indicando o passo a passo da sua **resolução**:

- Um número é multiplicado por 5; do produto, é subtraído um terço de si mesmo e o restante é dividido por 10; ao quociente, é adicionado  $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$  do número assumido, e o resultado é 68. Qual é o número?

## **APÊNDICE C – CARTÃO DE RECURSO 1**

### **CARTÃO DE RECURSO 1 ASPECTOS CONTEXTUAIS DA ÍNDIA**

A matemática da Índia é dividida em dois períodos principais: Ariano e Védico (pós-invasão Ariana). Um texto que aborda uma perspectiva atualizada das características dessas épocas é a tese de Maria Terezinha Jesus Gaspar, a qual foi orientada pelo professor Dr. Sergio Nobre, intitulada: Aspectos do Desenvolvimento do Pensamento Geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores, defendida no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista (UNESP) - Rio Claro (SP), em 2003. Verifiquemos um trecho dessa tese em anexo (Anexo 1).

## **APÊNDICE D – CARTÃO DE ATIVIDADE 1**

### **CARTÃO DE ATIVIDADE 1 ASPECTOS CONTEXTUAIS DA ÍNDIA**

#### **INDIVIDUALMENTE**

Faça uma leitura do texto exposto no cartão de recurso 1, que trata de dois períodos que foram importantes na história do desenvolvimento da civilização indiana: pré-ariano e período védico (pós-invasão dos arianos).

#### **EM GRUPO**

Após a leitura do cartão de recurso 1, em grupo, identifique algumas características relacionadas a um dos períodos citados no texto, no qual a docente irá sortear. Seguem alguns tópicos, que podem ser observados na leitura:

- 1) Religião.
- 2) Atividades econômicas do período.
- 3) Fontes matemáticas iconográficas/documentais.
- 4) Nomes de estudiosos de ciências matemáticas (se houver).
- 5) Os conceitos matemáticos estudados na época.

**OBS.** O grupo pode utilizar alguns livros clássicos de História da Matemática, que estão disponíveis na sala.

#### **PRODUTO FINAL**

O grupo irá produzir um cartaz envolvendo as características do período estudado, utilizando imagens e textos. Um painel com imagens estará disponível para o grupo de modo a ajudar na composição do produto.

## APÊNDICE E – CARTÃO DE RECURSO 2

### CARTÃO DE RECURSO 2 BHĀSKARĀCĀRYA: VIDA E OBRA

A Índia do século XII foi marcada pela agricultura, manufaturas e pelo comércio. Nesse contexto, a Matemática da época é composta por problemas práticos, que envolvem a venda de ouro, cultivo de grãos, criação de animais (PLOFKER, 2016). Fazendo parte dos estudiosos e escritores dessa época, temos Bhaskara II ou Bhāskarācārya, que foi um astrônomo e astrólogo hindu, que nasceu em *Biddur*, uma cidade no *Deccan*, no ano de 1036, *Salivahana* (*Śaka*<sup>32</sup>), que corresponde ao ano 1114 da era cristã (TAYLOR, 1816). Já Eves (2011) afirma que ele viveu em Ujjain, localizada na região norte da Índia e morreu em 1185. Entretanto, o próprio *Bhāskarācārya* descreve, no último capítulo do livro *Golādhya*, que “ele pertencia à linhagem Śāndilya e que viveu em Vijjalavida” (PATWARDHAN; NAIMPALLY; SINGH, 2006, p. XVI).

Embora não se saiba com precisão o local onde *Bhāskarācārya* viveu<sup>33</sup>, todos esses locais se situam na região norte da Índia e, sobre esse local, Plofker (1993, p. 6, tradução nossa) afirma que, “[...] no norte do Sul da Ásia, [...] há um longo histórico de comunidades assentadas com animais domesticados e grãos da agricultura”<sup>34</sup>. E ainda acrescenta que as culturas passadas, nessa região, apresentavam “agricultura, arquitetura, manufatura e comércio amplamente desenvolvidos” (PLOFKER, 1993, p. 7, tradução nossa)<sup>35</sup>.

Patwardhan, Naimpally e Singh (2006, p. XVI) afirmam que ele “estudou todas as ciências sob a orientação de seu pai Maheśvara. Maheśvara que foi um grande astrólogo. Como Bhāskarācārya estudou sob a orientação de um professor tão competente, ele se tornou um especialista em muitos ramos do aprendizado”. Esse fato também pode ser confirmado na passagem do problema 61 da obra *Golādhya*.

Ele escreveu diversos trabalhos voltados para a área de Astronomia e Matemática, sendo o mais conhecido um compilado de obras intitulado:

---

<sup>32</sup> Calendário Hindu.

<sup>33</sup> Para uma discussão mais ampliada da cidade onde *Bhāskarācārya* viveu, vide: Patwardhan, Naimpally e Singh (2006, p. XVI e XVII).

<sup>34</sup> “[...] in northern South Asia, [...] there is a long record of settled communities with domesticated animals and grain agriculture (PLOFKER, 1993, p. 6).

<sup>35</sup> “[...] show extensively developed agriculture, architecture, manufacture, and trade (PLOFKER, 1993, p. 7).

*Siddhāntaśiromani*, escrito aos 36 anos. Patwardhan, Naimpally e Singh (2006) comentam que essa obra está dividida em quatro partes: (1) *Līlavāṭī*, (2) *Bījaganita*, (3) *Golādhyāya*, (4) *Gaṇitādhyāya*, em que a primeira aborda conceitos de Aritmética, a segunda de Álgebra, a terceira se refere aos Movimentos Planetários e a quarta trata da Astronomia.

O livro *Līlavāṭī* é considerado como uma introdução aos assuntos de Astronomia, dedicando sua maior parte ao estudo da Aritmética, mas outras áreas do conhecimento também podem ser encontradas, como Álgebra, Trigonometria e Geometria. Alguns livros de História da Matemática (BOYER, 2015; JOSEFH, 2016; EVES, 2011) contam uma lenda sobre a justificativa envolvendo a escrita do texto e do seu título. Segundo Boyer (2015):

O nome do título é o da filha de Bhaskara que, segundo a lenda, perdeu a oportunidade de se casar por causa da confiança de seu pai em suas previsões astrológicas. Bhaskara tinha calculado que sua filha só poderia se casar de modo propício em uma hora determinada de um dia dado. No dia que deveria ser o de seu casamento, a jovem ansiosa estava debruçada sobre o relógio de água quando se aproximava a hora do casamento, quando uma pérola em seu cabelo caiu, sem ser observada, e deteve o fluxo de água. Antes que o acidente fosse notado, a hora propícia passara. Para consolar a infeliz moça, o pai deu seu nome ao livro que estamos descrevendo (BOYER, 2015, p. 161).

Embora essa lenda seja encontrada em diversos livros didáticos, paradidáticos e de História da Matemática, não se tem certeza se é verdadeira. Outro ponto a destacar é o fato de o tratado *Līlavāṭī* ter sido utilizado por muitos anos nas escolas indianas, refletindo sua importância acadêmica e histórica, principalmente, como forma de registrar o conhecimento de uma determinada época. Essa afirmação é confirmada por Patwardhan, Naimpally e Singh (2006, p. vi, tradução nossa), ressaltando que *Līlavāṭī* “foi usado na Índia como livro didático por muitos séculos. Ainda agora, ele está sendo usado em escolas de sânscrito em alguns estados”.

O tratado *Līlavāṭī* apresenta diversas definições, métodos matemáticos e 119 problemas envolvendo aplicações do conteúdo proposto, contendo uma Matemática prática que ensina o saber/fazer. O livro não contém demonstrações, indicando um público-alvo mais geral.

O livro *Bījaganita*, é dedicado à Álgebra, em particular, ao estudo das equações. Em 1634, Ata Allah Rashidi traduziu para o persa esse tratado e uma versão inglesa foi publicada por Edward Strachey, em 1813, a qual dividiu o livro em seis partes: (1) Introdução, (2) Sobre equações simples (1º grau); (3) Sobre equações quadráticas; (4) Sobre equações envolvendo questões indeterminadas do 1º Grau; (5) Sobre

equações envolvendo questões indeterminadas do 2º Grau e (6) Sobre equações envolvendo retângulos (ACHARYA, 1813).

Os livros *Golādhya* e *Gaṇitādhya* se referem à Astronomia. Conforme Josefh (2016, p. 291, tradução nossa):

A primeira seção de *Siddhantaśiromani*, o *Ganitadhyaya*, contém uma discussão de métodos computacionais para calcular medidas como movimentos médios, movimentos verdadeiros, eclipses solares e lunares que formavam o modelo padrão do trabalho astronômico daquele período. A segunda seção, *Goladhyay*, contém assuntos relacionados à gola (ou a esfera) incluindo a forma e a forma da esfera e sua relevância para a terra esférica. Essa discussão é intercalada com uma interpretação poética da majestade das estações e perguntas para testar o conhecimento dos leitores.

Dessa forma, percebe-se que o tratado *Siddhāntaśiromani*, de *Bhāskarācārya*, traz importantes elementos para a reconstrução da Matemática indiana no século XII.

## APÊNDICE F – CARTÃO DE ATIVIDADE 2

### CARTÃO DE ATIVIDADE 2 BHĀSKARĀCĀRYA: VIDA E OBRA

#### EM GRUPO

- 1) Façam uma leitura do texto exposto no cartão de recurso 2, que se refere a aspectos contextuais do século XII, a Bhāskarācārya e ao seu compilado de obras *Siddhāntaśiromani*.
- 2) Após a leitura, o grupo deve fazer uma leitura longitudinal nos tratados escritos por Bhāskarācārya no seu *Siddhāntaśiromani*: Līlavāṭī, Bījaganita, Golādhya, Gaṇitādhya, tentando preencher o quadro a seguir, o qual remonta a aspectos contextuais e matemáticos.

**OBS.** Caso necessário, o grupo pode usar o recurso tradutor disponibilizado no celular ou na internet.

| ASPECTOS CONTEXTUAIS | EVIDÊNCIAS CONTIDAS NO TEXTO |
|----------------------|------------------------------|
|                      |                              |
|                      |                              |
|                      |                              |

| CONTEÚDO MATEMÁTICO | EVIDÊNCIAS CONTIDAS NO TEXTO |
|---------------------|------------------------------|
|                     |                              |
|                     |                              |
|                     |                              |

| PRODUTO DA ATIVIDADE 2                                                                                          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| O relator deve apresentar a compilação dos quadros destacando as evidências encontradas nos tratados estudados. |

## APÊNDICE G – CARTÃO DE RECURSO 3

### CARTÃO DE RECURSO 3 LILAVATI E TRADUÇÃO DE TAYLOR (1816)

A tradução *Lilawati: or a treatise on Arithmetic and Geometry* foi realizada por John Taylor e foi publicada em Bombaim, cidade ao sudoeste da Índia, em 1816. Essa edição se encontra no acervo da coleção da biblioteca de Cambridge e foi feita a partir de um trabalho colaborativo com *Royal Asiatic Society da Grain Britain e Irlanda*. De acordo com Taylor (2016, p. 3), o objetivo da tradução é

fornecer um documento autêntico que, ao exibir não apenas o grau real de conhecimento matemático possuído pelos hindus no século XII, mas também, ao mostrar seus modos e princípios de operação, pode levar a uma conclusão justa sobre suas pretensões de originalidade neste departamento de ciência.

Nessa versão, Taylor (1816), inicialmente, apresenta uma introdução contendo a biografia de *Bhāskarācārya*, uma breve descrição dos livros e comentários sobre as alterações feitas na sua tradução, justificando-as. Segundo ele:

O *Lilavati* exibe um sistema aritmético regular, bem relacionado e, considerando o período em que foi escrito; contém muitas proposições úteis em geometria e mensuração. É o primeiro trabalho que é estudado por astrônomos hindus, ou melhor, astrólogos; pois neste país essas duas profissões estão sempre unidas e, em geral, a primeira é considerada subserviente à última. As regras são escritas em versos em um estilo muito conciso e elíptico, e não possuem em nenhum grau a obscuridade, característica das composições sânscritas sobre ciência e filosofia. (TAYLOR, 1816, p. 2, tradução nossa).

Também são mostrados alguns conceitos matemáticos introdutórios, como a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão, ao que o tradutor alega que essas merecem atenção, pois as operações são apresentadas por *Bhāskarācārya* de um modo singular, não existente em nenhum outro livro didático. A seguir, Taylor (1816) exibe a descrição das partes de *Līlavāṭī*, conforme o Quadro 1, a seguir:

**Quadro 1** – Conteúdo de *Līlavāṭī* na versão Taylor (1816)

| PARTE | CONTEÚDO                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| I     | (1) Tabelas de dinheiro, pesos etc; (2) Adição e Subtração; (3) Multiplicação; (4) Divisão; (5) O quadrado; (6) Raiz quadrada; (7) Cubo; (8) Raiz cúbica; (9) Frações; (10) O Efeito da Cifra; (11) Inversão; (12) Um número presumido; (13) Multiplicador da Raiz; (14) Regra das três quantidades; (15) Regras de Cinco, etc. quantidades; (16) Regra de trocas; (17) Quantidades mistas; (18) Comprando e vendendo; (19) Computando ouro; (20) Permutação; (21) Progressão. |

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| II  | <b>CAPÍTULO I:</b> Operações Geométricas.<br><b>CAPÍTULO II:</b> <b>Seção I</b> – Dos círculos; <b>Seção II</b> – De libras; <b>Seção III</b> – Dos tijolos ou pedras em parede; <b>Seção IV</b> – Do Corte de madeiras, etc.; <b>Seção V</b> – De montes; <b>Seção VI</b> – Das sombras. |
| III | <b>Seção I</b> – Do <i>Kutaka</i> ; <b>Seção II</b> - Do <i>Sthira</i> ou <i>Kutaka</i> Fixo; <b>Seção III</b> – Do <i>Sanslista Kutaka</i> .                                                                                                                                             |
| IV  | Das transposições; Apêndice.                                                                                                                                                                                                                                                              |

Fonte: Adaptado de Taylor (1816).

Por meio do quadro, é perceptível a quantidade de conceitos que Bhāskarācārya deixou registrado, refletindo a importância acadêmica e histórica desse tratado, principalmente, como forma de conservar o conhecimento de uma determinada época.

Assim, com o estudo de *Līlavātī*, percebemos que ela é composta de diversas definições, métodos matemáticos e 119 problemas envolvendo aplicações do conteúdo proposto, contendo uma Matemática prática, que ensina o saber/fazer. O livro não contém demonstrações, indicando um público-alvo mais geral (SILVA, SILVA, PEREIRA, 2018).

Ao longo dessa da tradução, Taylor (1816) apresenta comentários sobre os registros de *Bhāskarācārya*, explicando, detalhadamente, algumas passagens por meio da Matemática atual. Além disso, ele esclarece alguns termos de origem indiana, como, por exemplo, a *Kutaka*, que se refere a termos desconhecidos presentes em problemas da terceira parte de *Līlavātī*.

**APÊNDICE H – CARTÃO DE ATIVIDADE 3****CARTÃO DE ATIVIDADE 3  
O TRATADO DE LĪLAVĀTĪ****EM GRUPO**

1. Façam uma leitura do texto exposto no cartão de recurso 3, que se refere à tradução que estudaremos ao longo da formação, que é intitulada como: “*Lilawati: or a treatise on Arithmetic and Geometry*”, produzida por John Taylor e publicada em 1816.
2. Após a leitura, discuta, em grupo, quais elementos matemáticos estão presentes no tratado de Līlavātī. Vocês identificam áreas atuais (Aritmética, Geometria, Álgebra, Trigonometria, entre outras) de ensino nos problemas propostos no tratado?

**PRODUTO FINAL**

Cada grupo irá descrever as impressões iniciais sobre o tratado de Līlavātī. O texto deverá ter, no máximo, 20 linhas.

## APÊNDICE I – CARTÃO DE RECURSO 4

### CARTÃO DE RECURSO 4

#### Līlavātī e o número presumido

No tratado Līlavātī, percebemos uma vasta quantidade de conteúdos, que perpassam pela Aritmética, Geometria e Álgebra. Nesse documento, Bhāskarācārya tem a singularidade de sempre apresentar os métodos de uma Matemática que ensina o como fazer e depois deixa seus problemas para que o leitor possa comprovar que suas regras funcionam.

É importante destacar que o livro não apresenta demonstrações, nem a aplicação do método nas questões propostas. O tópico “um número presumido”, que se encontra na primeira parte do Līlavātī, sendo o décimo segundo conteúdo a ser apresentado, é dividido em 7 tópicos, intitulados: (1) número presumido; (2) onde uma certa quantidade é conhecida; (3) onde estão os restos; (4) onde existe uma diferença; (5) quando existe soma e a diferença; (6) quando existe a diferença de quadrados; (7) a respeito de quadrados.

A primeira regra contida na parte (1), Bhāskarācārya (1816, p. 34) menciona: **“multiplique, divida, subtraia ou some as frações com o número presumido, de acordo com as condições da questão. Pelo resultado da operação anterior, divida o produto do número conhecido pelo presumido. O quociente será o número necessário”**.

O contexto apresentado, no tratado Lilavati, é voltado para questões religiosas e, algumas vezes, botânicas. Para os indianos, os deuses eram muito importantes, pois acreditavam que tudo viera deles, a sabedoria, o universo, a destruição, sendo eles politeístas. Entre os deuses hindus, podemos citar Mahadev, Huri, Sol, Devi. O primeiro e o segundo são também nomeados como Shiva e Vishnu e fazem parte dos deuses que compõem o hinduísmo. Lima et al. (2016, p. 13) reverberam que

Podemos citar como os deuses mais importantes do Hinduísmo o Brahma, Shiva e Vishnu, que compõe o que muito denominam como a Trímurti Hindu. Apesar de ser um grupo de três, torna-se difícil colocá-los como trindade, pois cada um possui uma característica própria que o difere dos demais. Os três são tradicionalmente agrupados, pois cada um seria responsável por um aspecto da existência do mundo: criação, manutenção e destruição.

Já o Sol é encontrado na literatura como Surya, uma das principais divindades solares entre os deuses hindus e, no subalsutra RigVeda, aparecem adorações e

elogios a ele. Devi, por sua vez, refere-se à forma feminina de Mahadev, sendo a nomenclatura atribuída a uma Deusa mulher.

Outro personagem importante, na religiosidade indiana, é o professor espiritual, também chamado de Guru, era responsável por educar e repassar saberes aos indianos, “segundo os textos sagrados indianos, a autoridade do mestre espiritual é absoluta e inquestionável, pois ele é considerado uma incorporação do conhecimento que transmite” (MARÇO; IVO, 2013, p. 130).

Outro fato apresentado é o interesse por questões da botânica, sendo relacionadas também às cerimônias religiosas, pois diversas flores eram oferecidas a deuses como forma de agradecimento desde o período védico (1750-500 a.C). Os estudiosos daquela época tinham um profundo conhecimento das plantas e dos usos das suas diferentes partes, usando-as para orações, rituais, comidas e cerimônias. Isso é apoiado pelos textos das antigas escrituras indianas conhecidas como Vedas, que descrevem e mencionam os vários usos de plantas e flores.

Nesse contexto, essa parte de Līlavātī aborda, com frequência, vários tipos de flores, entre elas, aparecem Kadamba, Silandhara, Ketaki, Malatī, Nenúfares. Pouco se encontra sobre essas espécies, porém tem-se vestígios de que Kadamba é nativa do sul da Ásia, sendo utilizada em rituais religiosos; Ketaki é atribuída à flor jasmim, muito comum naquele país e as Nenúfares são flores bastante odoríferas, esta espécie possui numerosas pétalas e estames, sendo regulares, isto é, com simetria actinomorfa. O gênero *Nymphaea* é amplamente distribuído nas regiões tropicais e temperadas de todo o mundo (LUCENA, MEDEIROS, MENDES, 2015). Esse contexto, que permeava a região norte da Índia, próspera em cultivo de flores, sendo percebida uma religiosidade envolta, consta nos problemas resolvíveis pela primeira regra de Lilavati, que podem ser vislumbrados na tabela a seguir:

**Quadro 24 – Problemas referentes à primeira regra**

| Ordem | Problemas                                                                                                                                                                                                                                       |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1     | Um número é multiplicado por 5, desse produto, é subtraído um terço de si mesmo e o restante é dividido por 10. A este quociente, é adicionado $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ do número presumido e o resultado é 68. Qual é o número? |

|          |                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>2</b> | Um terço de uma coleção de belos nenúfares é oferecido a Mahadev, um quinto a Huri, um sexto ao Sol, um quarto a Devi e seis restantes são apresentados ao professor espiritual. Qual o número inteiro de nenúfares?                                                                     |
| <b>4</b> | Um quinto da colmeia de abelhas voou para a flor Kadamba, um terço voou para o Silandhara, três vezes a diferença desses dois números voou para um caramanchão e uma abelha continuou voando, atraída de cada lado pelos perfumados Ketaki e Malati. Qual foi o número total de abelhas? |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

## APÊNDICE J – CARTÃO DE ATIVIDADE 4

### CARTÃO DE ATIVIDADE 4

#### Primeira regra

#### EM GRUPO

Faça a leitura do cartão de recurso 4, Līlavātī e o número presumido, e discuta com os integrantes do grupo os seguintes questionamentos.

1. Retorne ao cartão, leiam novamente a **regra 1** e anotem as primeiras impressões que o grupo obteve ao ter contato com ela.

---



---



---

2. A partir da leitura e das impressões da regra, matematize-a<sup>36</sup> no espaço abaixo, fazendo as anotações de como a equipe procedeu.

3. Descrevam os passos que devem ser seguidos para uma possível aplicação da regra.

|                 |  |
|-----------------|--|
| <b>1º passo</b> |  |
|-----------------|--|

<sup>36</sup> É o mesmo que escrever uma fórmula geral para a regra.

|                 |  |
|-----------------|--|
| <b>2º passo</b> |  |
| <b>3º passo</b> |  |
| <b>4º passo</b> |  |

4. Em grupo, defina o que é o número presumido, segundo a regra.

---



---



---

5. Quais conhecimentos matemáticos são apresentados na regra do número presumido exposta por Bhāskarācārya?

| <b>CONTEÚDO</b> | <b>EVIDÊNCIA NA REGRA</b> |
|-----------------|---------------------------|
|                 |                           |
|                 |                           |
|                 |                           |
|                 |                           |

### **PRODUTO FINAL**

Cada equipe vai apresentar um resumo do que abordou em cada questão no quadro, sobre o que identificou na regra de Bhāskarācārya.

**APÊNDICE K – CARTÃO DE ATIVIDADE 5****CARTÃO DE ATIVIDADE 5****Alguns problemas de Bhāskarācārya****EM GRUPO**

Leia novamente o cartão de recursos 4, Līlavātī e o número presumido, focando nos problemas 1, 2 e 4. Em seguida, resolva-os seguindo a **regra 1** na folha de respostas, organizando seu raciocínio em passos.

**OBS1:** Não pode utilizar conhecimentos matemáticos modernos, use somente os passos que Bhāskarācārya forneceu.

**OBS2:** Vocês podem utilizar uma notação moderna.

**PRODUTO FINAL**

Cada equipe vai apresentar como chegou à resposta de cada questão no quadro pelo método de Bhāskarācārya.

## APÊNDICE L – CARTÃO DE ATIVIDADE 5.1

### CARTÃO DE ATIVIDADE 5.1

#### Alguns problemas de Bhāskarācārya

#### EM GRUPO

1. Resolva os problemas 1, 2 e 4 estudados na atividade anterior, utilizando os conceitos matemáticos atuais. Organizando seu raciocínio em passos.
2. Descreva as similaridades e diferenças do método utilizado por Bhāskarācārya para o modo de solução atual que a equipe utilizou.

#### Similaridades

| ANTIGO | ATUAL |
|--------|-------|
|        |       |
|        |       |
|        |       |

#### Diferenças

| ANTIGO | ATUAL |
|--------|-------|
|        |       |
|        |       |
|        |       |

#### PRODUTO

Escrever um pequeno texto sobre a compreensão do conceito de “número presumido” após a discussão da regra e dos problemas/exemplos contidos no *Līlavātī*, de Bhāskarācārya. O relator do grupo irá ler o produto para a turma.

## APÊNDICE M – QUESTIONÁRIO AVALIATIVO DO CURSO

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
DO CEARÁ**



**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E  
MATEMÁTICA**

Este **QUESTIONÁRIO AVALIATIVO DO CURSO** chegou até você, pois julgamos a sua opinião muito importante para a formação que foi realizada e que está atrelada a uma *pesquisa de Mestrado* que estamos desenvolvendo. Pedimos sua colaboração e total honestidade para que possamos, a partir desse momento, aperfeiçoar nossas práticas para melhor contribuir para a formação inicial e continuada de outros licenciandos e professores, respectivamente, que vierem a participar desse momento.

Desde já, agradecemos sua colaboração!

1. Ao final dos encontros, a formação **“Sobre os pensamentos algébricos mobilizados nas atividades propostas a partir do tratado Līlavātī (1150) de Bhāskarācārya”** contribuiu para sua formação inicial como futuro professor/professor?

☐ Sim

☐ Não

Em quais aspectos, elenque-os.

2. Em que pontos as tarefas propostas no curso irão lhe ajudar a melhorar sua metodologia de ensino (forma de organizar, conduzir e ensinar um conteúdo) em sala de aula?

3. O que você aprendeu no curso e que não sabia antes de passar por essa formação?

4. Com base nas tarefas que orientaram o curso e que tiveram como objeto principal a investigação da construção do pensamento algébrico dos licenciandos, mediante um texto histórico de Līlavātī, você concorda que esses elementos advindos da História da Matemática podem servir como um recurso didático para auxiliar no trabalho docente no dia a dia?

☐ Sim

☐ Não

Por quê?

5. Na sua opinião, a formação **“Sobre os pensamentos algébricos mobilizados nas atividades propostas a partir do tratado Līlavātī (1150) de Bhāskarācārya”** possibilitou a apropriação de saberes matemáticos e a articulação entre eles?

☐ Sim

☐ Não

Justifique sua resposta.

6. Partindo das tarefas que orientaram a formação, na sua visão elas poderiam ser aplicadas nos Anos Finais do Ensino Fundamental ou no Ensino Médio para ajudar no ensino de algum conteúdo matemático?

☐ Sim

☐ Não

De que forma?

7. A formação **“Sobre os pensamentos algébricos mobilizados nas atividades propostas a partir do tratado Līlavātī (1150) de Bhāskarācārya”** esteve de acordo com suas expectativas iniciais?

☐ Sim

☐ Não

☐ Mais ou menos

8. Na nossa formação, abordamos métodos aritméticos para encontrar números desconhecidos. Aponte vantagens ou desvantagens da exploração desses métodos na formação de professores.

| VANTAGENS | DESVANTAGENS |
|-----------|--------------|
|           |              |
|           |              |

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|  |  |

9. Na disciplina de História da Matemática, utilizamos um trecho do tratado *Līlavāṭī* para construir atividades que explorassem conceitos matemáticos. Você achou importante essa prática? Comente.

10. No decorrer dessa formação, você conseguiu visualizar a relação entre a Aritmética e a Álgebra?

☐ Sim

☐ Não

Onde ocorreu essa visualização? Comente sua resposta.

11. Ao longo da formação, foram discutidos diversos conceitos matemáticos, dentre eles, o de incógnita e de variável. Você considera o texto sobre o “número presumido” potencial para se discutir essa temática na sala de aula da Educação Básica?

☐ Sim

☐ Não

Comente sua resposta.

12. Ao longo da formação, ocorreram alguns momentos nos quais foram mobilizados o pensamento algébrico. Você julga importante esse tipo de experiência na formação de professores?

☐ Sim

☐ Não

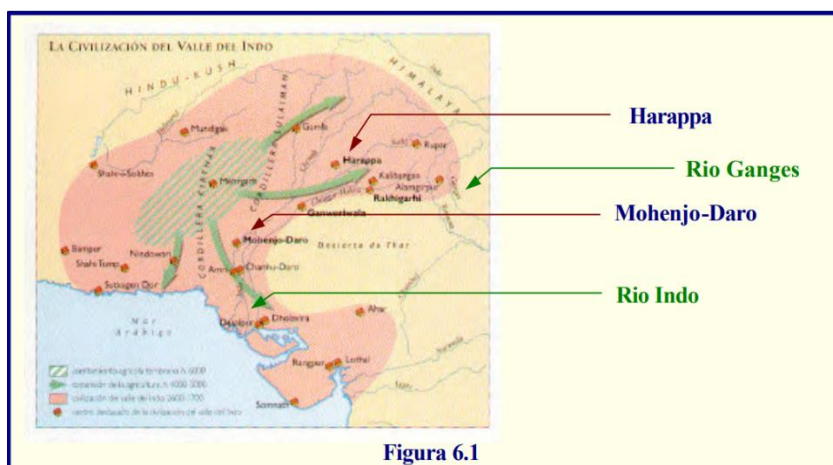
Justifique sua resposta.

13. Cite alguns pontos que para você precisam melhorar na formação ou sugestões/críticas que poderiam enriquecer mais esse momento de formação.

## ANEXO 1 – TEXTO REFERENTE À UBP 1

### A Civilização Harappa

Por volta do quarto milênio a.C. se formou pela primeira vez no território indiano uma sociedade de classes, localizada exatamente no vale do Indo e situada a noroeste. A agricultura nesta região foi favorecida e o vale deu lugar ao nascimento de uma das primeiras civilizações, a antiga Índia há aproximadamente 2500 a.C. É desta civilização a prova mais antiga de cerâmica feita em uma roda. As evidências do surgimento de uma civilização na Índia, por volta de 2500 a.C. foram fornecidas pela descoberta das ruínas de duas cidades da região: Mohenjo-Daro e Harappa, cidades-estado mais importantes deste período.



Uma das invenções desta civilização pode ter sido a fabricação de tijolos cozidos, material que utilizavam na construção das cidades e que também podia ser utilizado na construção de represas, galerias e canais.

Esta civilização era bastante culta, sua escrita pictográfica pode ser encontrada em vários selos provavelmente usados na marcação de fardos de mercadorias e em fragmentos de cerâmica. Além disso, é possível que tenha havido a padronização de pesos e medidas e a construção de grandes celeiros públicos.

Não se sabe quais motivos provocaram o desaparecimento da civilização Harappa por volta de 1750 a.C. Alguns estudiosos consideram a possibilidade de lá ter ocorrido o primeiro desastre ambiental causado pelo desmatamento descontrolado, feito pelo homem, para a utilização da madeira na alimentação de fornos para o fabrico dos tijolos.

## Os arianos

Na mesma época do desaparecimento da civilização Harappa surgem, vindos dos estepes asiáticos, povos indo-europeus, que se instalaram ao longo do vale do Ganges. Os arianos não possuíam uma cultura tão avançada quanto à cultura Harappa, e eram pastores. A escrita desaparece nesta região e só reaparece em meados do primeiro milênio a.C. quando as cidades-estado foram reconstruídas, as pessoas deixaram seus hábitos pastoris e passaram a dedicar-se ao cultivo do arroz, povoando grande região sobre o vale do Ganges.

A cultura ariana deste período estabeleceu as bases da religião hindu que era centrada na realização de sacrifícios. *Agni*, o deus do fogo, era muito importante e os brâmanes, sacerdotes que presidiam as cerimônias, tinham posição de destaque.

Este povo fazia sacrifícios para seus deuses para obter bastante comida, boa fortuna, boa saúde, longa vida e vários outros benefícios materiais. Para agradar os deuses tudo tinha que ser feito de forma precisa. A exatidão matemática era vista como de extrema importância.

As informações que temos sobre os deuses desta cultura vêm dos Vedas, textos sagrados, usados nos rituais de sacrifício que contêm recitações e cânticos executados durante os sacrifícios e explicações de como utilizá-los nestas cerimônias além de informações sobre a origem e importância dos rituais. Acumulada durante séculos esta coleção de mais de mil hinos foi transmitida inicialmente pela tradição oral, reunida e registrada por escrito pela primeira vez por volta de 1000 a.C. e em alguma data depois de 1300 a.C., respectivamente.

Por volta do séc. VIII a.C. estados monarcas foram estabelecidos na área, e por volta do séc. VII a.C., cerca de 16 reinos se espalhavam pelo vale do Ganges. Esta região tornou-se o maior centro da população indiana, talvez devido ao cultivo do arroz.

## O Conhecimento matemático e as fontes

A história da geometria na Índia pode ser dividida em três períodos distintos:

### O pré-ariano

O modo como as cidades deste período eram planejadas e as cerâmicas encontradas nas ruínas de Mohenjo-Daro com motivos de decoração que contém uma série de círculos que se interceptam, quadrados, triângulos unidos pelo vértice, retângulos com os quatro lados encurvados, etc., são evidências do conhecimento geométrico deste povo.

## O período Védico

O motivo mais comum de porcelana do período anterior, os retângulos com lados encurvados, está preservado no mais importante altar de sacrifício védico, o *Mahavedi*, que tem esta forma. Isto pode indicar alguma relação às civilizações dos dois períodos.

A geometria do período védico se manifesta na construção dos diversos altares de sacrifício e se desenvolveu para atender às necessidades religiosas. As regras ditadas pelos videntes védicos para a construção do *vedi* (altar de sacrifício) e do *agni* (local do fogo sagrado) foram registradas nos *Sulbasutras*. Tudo o que se conhece como matemática Védica está contido nos *Sulbasutras* e não sabemos se este povo empreendeu investigações matemáticas por sua própria causa ou se eles só estudaram matemática para resolverem os problemas necessários a seus rituais religiosos. Alguns historiadores têm argumentado que a matemática, em particular a geometria, deve também ter existido para apoiar os trabalhos astronômicos do mesmo período.

Assim, as primeiras fontes escritas da geometria da antiga Índia são da época em que apareceram os livros filosófico-religiosos, os Vedas e são encontradas nos *Sulbasutras* - manuais para construção de altares. A palavra *Sulbasutra* deriva das palavras *sulba-sutra* que significam “regras de corda”. Os *Sulbasutras*, apêndices dos Vedas, continham instruções de caráter religioso para a construção de altares, utilizando cordas e palitos de bambu.

É interessante observar que apesar do conhecimento geométrico encontrado nos *Sulbasutras* estar relacionado às exigências teóricas para construção de altares de tijolos, a tecnologia de construção de tijolos cozidos pertencia à cultura Harappa. Há, portanto, a possibilidade de que o conhecimento geométrico contido nos *Sulbasutras* já existisse no período Harappa e também pode ser uma evidência da possibilidade de haver alguma relação entre estas duas civilizações. De qualquer modo são os *Sulbasutras* as fontes do conhecimento geométrico da Antiga Índia.

## Os *Sulbasutras*

Os *Sulbasutras* contêm regras para a construção dos altares que tinham que ter medidas precisas para que o sacrifício fosse bem sucedido. Eles mostram que o conhecimento matemático dos sacerdotes indianos não era pequeno, e que conheciam o Teorema de Pitágoras.

É desconhecida a época em que os *Sulbasutras* foram escritos, mas alguns estudiosos os colocam aproximadamente em um período entre 800 a.C. e 500 a.C. No entanto, alguns assuntos neles tratados remontam provavelmente ao século XV a.C.

Os autores dos *Sulbasutras* eram os *sulbakaras* e pouco se sabe sobre eles exceto que não foram apenas escribas, mas, provavelmente, também sacerdotes-artesãos que realizavam múltiplas tarefas, entre elas a construção do *vedi* (altar para sacrifício), a manutenção do *agni* (fogo sagrado) e a instrução dos fiéis sobre a escolha adequada tanto dos sacrifícios como dos altares.

Apesar desta coleção de textos sagrados já ser conhecida antes de 1930, ela não é mencionada nem por Neugebauer em seu livro *Vorlesungen Über Geschichte de Antiken Mathematischen Wissenschaften* nem por B. L. van der Waerden em seu livro *Science Awakening*.

As construções encontradas nos *Sulbasutras* eram para desenhar figuras de uma área dada, bem como figuras de área igual a de outras. As áreas eram bem grandes, como por exemplo, se a altura de uma pessoa era a unidade, a área dos altares era de cerca de 7,5 unidades quadradas (cerca de 25 m<sup>2</sup>).

A geometria dos *Sulbasutras* é principalmente construtiva, embora, ocasionalmente, fosse observado e formulado algum resultado geométrico envolvido. As figuras geométricas, usadas para formar os altares, incluíam: triângulos, quadrados, retângulos, trapézios, círculos, semi-círculos, retângulos com um semi-círculo sobre um lado, e assim por diante, que deveriam ajustar-se a dimensões ou áreas específicas. A orientação, formas e áreas dos altares tinham que ser rigorosamente exatas, e esta exatidão era tão importante quanto a pronúncia correta dos cânticos e recitais védicos (os *mantras*). Portanto, métodos precisos de construção estavam envolvidos. Frequentemente os resultados geométricos subjacentes a estas construções não eram enunciados.

A construção dos altares não se restringia a formas geométricas simples. Existiam também construções de figuras com formas bastante elaboradas, como as de uma tartaruga, as de um pássaro voando ou as de um pássaro voando com a cauda inclinada.

A área dessas figuras era calculada por decomposição em partes cujas formas geométricas eram conhecidas e suas áreas simples de calcular. Os métodos de construção de altares contidos neles são para dois tipos de cultos: o culto doméstico

onde os altares eram mais simples e o culto comunitário. Os altares quadrados e circulares bastavam para os ritos domésticos, enquanto que para o culto público eram exigidos altares mais elaborados, cujas formas eram combinações de retângulos, triângulos e trapézios. Um dos altares públicos mais elaborados tinha a forma de um falcão no momento exato de empreender o vôo. Acreditava-se que a alma de quem oferecesse um sacrifício em tal altar se transformava no falcão e voava direto para o paraíso.

Os Sulbasutras mais importantes, do ponto de vista matemático, são o *Baudhayana*, o *Manava*, o *Apastamba* e o *Katyayana* e foram os escritos em versos, sendo o *Apastamba* o mais conhecido.

O *Baudahayana Sulbasutra* foi escrito por volta de 800 a.C., o *Mãnava Sulbasutra* escrito cerca de 750 a.C. o *Apastamba Sulbasutra* aproximadamente 600 a.C., e o *Katyayana Sulbasutra* cerca de 200 a.C.

Em 1875, G. Thibaut traduziu uma grande parte dos *Sulbasutras* e mostrou que o conhecimento matemático dos sacerdotes hindus não era pequeno. Ele traduziu o *Baudhayana Sulbasutra* em *The Pandit*, volume 9 (1874), volume 10 (1875), volume 1 (1876/77) e o *Katyayana em The Pandit*, volume 4 (1882). O *Apastamba Sulbasutra* foi traduzido por Bürk no *Zeitschrift der Deutschen MorgenLändischen Gessellschaft*, volume 56 (1902).

O mais antigo, o *Sulbasutra* de *Baudhayana* possui três capítulos, contém uma formulação geral do teorema de Pitágoras, um procedimento para obter uma aproximação para  $\sqrt{2}$ , e diversas construções geométricas, entre elas, algumas aproximadas para “quadrar o círculo” e outras para construir formas retilíneas cujas áreas são iguais às somas ou diferenças de outras formas. O texto seguinte mais antigo é a obra de *Apastamba*, que contém seis capítulos e trata com maior detalhe os temas examinados por *Baudhayana*. O *Sulbasutra* de *Katyayana* amplia um pouco mais a obra de seus predecessores.

Os conteúdos geométricos contidos nos *Sulbasutras* podem ser divididos entre três categorias:

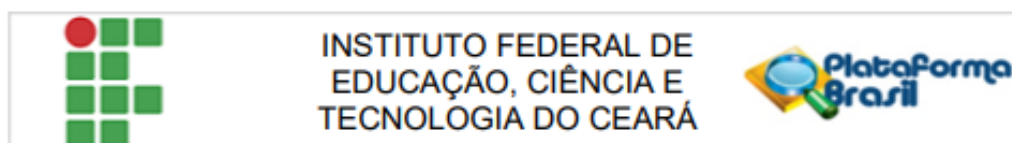
- Resultados e teoremas geométricos explicitamente formulados;
- Procedimentos para construir diferentes formas de altares;
- Dispositivos algorítmicos.

Um outro ponto interessante na geometria dos *Sulbasutras* é que podemos identificar neles três dos postulados de construção de Euclides, a saber:

- Uma reta pode ser desenhada de um ponto A qualquer para um ponto B qualquer;
- Uma reta pode ser prolongada arbitrariamente além de B;
- Um círculo pode ser desenhado com algum ponto como centro e algum comprimento como raio.

Os *Sulbasutras* não contêm provas das regras descritas neles.

## ANEXO 2 – PARECER DO CEP DO IFCE



### PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

#### DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

**Título da Pesquisa:** UM ESTUDO DO TRATADO LILAVATI DE BHASKARA (1150) COMO SUBSÍDIO PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

**Pesquisador:** DIANARA FIGUEIREDO FREIRE

**Área Temática:**

**Versão:** 1

**CAAE:** 54491521.3.0000.5589

**Instituição Proponente:** INSTITUTO FEDERAL DE EDUCACAO, CIENCIA E TECNOLOGIA DO CEARA

**Patrocinador Principal:** Financiamento Próprio

#### DADOS DO PARECER

**Número do Parecer:** 5.228.844

#### Apresentação do Projeto:

Este estudo se caracteriza como uma pesquisa qualitativa, que será distribuída em três etapas. Na primeira etapa, a fase análises prévias ou preliminares da engenharia didática, que ajudará a entender o objeto do estudo. A segunda etapa da pesquisa iniciará com a análise a priori, ou seja, serão analisados o que foi obtido na etapa anterior e posteriormente serão preparadas as atividades de um curso de extensão, com base nos textos históricos do documento Lilavati. A terceira e última etapa será a análise a posteriori e validação, em que será explorado os registros produzidos no curso, para perceber as potencialidades do documento Lilavati, de Bhaskara II.

#### Objetivo da Pesquisa:

Conhecer a contribuição do tratado Lilavati (1150), elaborado por Bhaskara II, na formação dos licenciandos em Matemática em relação a construção do pensamento algébrico, na interface entre história e ensino de matemática.

#### Avaliação dos Riscos e Benefícios:

**Riscos:**

Os riscos existentes nessa pesquisa são:

- Medo de não saber responder às perguntas propostas nos formulários;
- Estresse, cansaço ou aborrecimento no decorrer da resolução dos formulários e/ou

**Endereço:** Rua Jorge Dumar, nº 1703

**Bairro:** Jardim América

**CEP:** 60.410-426

**UF:** CE

**Município:** FORTALEZA

**Telefone:** (85)3401-2332

**E-mail:** cep@ifce.edu.br



INSTITUTO FEDERAL DE  
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E  
TECNOLOGIA DO CEARÁ



Continuação do Parecer: 5.228.844

atividades propostas no decorrer do curso;

- Quebra de sigilo e identificação do participante.

Ressaltamos que buscaremos minimizar quaisquer desconfortos, garantindo que a pesquisa seja desenvolvida em local reservado e que o participante tenha a liberdade. A pesquisadora se responsabilizará pelo sigilo dos dados coletados, assegurando a confidencialidade, privacidade e proteção da imagem dos participantes envolvidos.

**Benefícios:**

A nossa pesquisa contribuirá para a comunidade de licenciados que participaram da investigação, e ainda para a comunidade externa, visto para os primeiros propiciará momentos de discussões, onde será possível discutir o pensamento algébrico a luz de recursos advindos da história da matemática e para os segundos ficará registrados em nossa versão final do trabalho as atividades desenvolvidas para o curso, as quais podem ser usadas e/ou readaptadas pelos demais professores de matemática.

**Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:**

É uma pesquisa interessante e que trará grandes contribuições ao ensino da matemática e formação de novos docentes.

**Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:**

Os termos estão apresentados de forma devida, sem considerações aparentes que impliquem em correções ou não realização da pesquisa.

**Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:**

O projeto apresenta-se a contento assim como os documentos necessários a sua execução.

**Considerações Finais a critério do CEP:**

**Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:**

| Tipo Documento                 | Arquivo                                       | Postagem               | Autor              | Situação |
|--------------------------------|-----------------------------------------------|------------------------|--------------------|----------|
| Informações Básicas do Projeto | PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_1861712.pdf | 29/11/2021<br>21:52:47 |                    | Aceito   |
| Folha de Rosto                 | folha_de_rosto.pdf                            | 28/11/2021<br>22:10:10 | DIANARA FIGUEIREDO | Aceito   |
| Projeto Detalhado / Brochura   | projeto_detalhado.pdf                         | 28/11/2021<br>22:06:30 | DIANARA FIGUEIREDO | Aceito   |

**Endereço:** Rua Jorge Dumar, nº 1703

**Bairro:** Jardim América

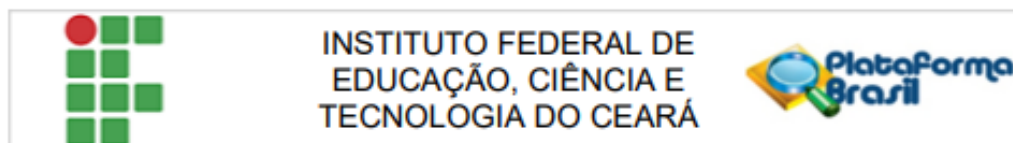
**CEP:** 60.410-426

**UF:** CE

**Município:** FORTALEZA

**Telefone:** (85)3401-2332

**E-mail:** cep@ifce.edu.br



Continuação do Parecer: 5.228.844

|                                                           |                                                                   |                        |                                 |        |
|-----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|------------------------|---------------------------------|--------|
| Investigador                                              | projeto_detalhado.pdf                                             | 28/11/2021<br>22:06:30 | DIANARA<br>FIGUEIREDO           | Aceito |
| Outros                                                    | declaracao_de_compromisso_de_apresentacao_dos_resultados.pdf      | 28/11/2021<br>22:04:10 | DIANARA<br>FIGUEIREDO           | Aceito |
| TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência | TCLE.pdf                                                          | 28/11/2021<br>22:02:43 | DIANARA<br>FIGUEIREDO<br>FREIRE | Aceito |
| Outros                                                    | declaracao_de_garantia_de_regresso_dos_beneficios_da_pesquisa.pdf | 28/11/2021<br>22:01:32 | DIANARA<br>FIGUEIREDO           | Aceito |
| Orçamento                                                 | orcamento.pdf                                                     | 28/11/2021<br>21:58:54 | DIANARA<br>FIGUEIREDO           | Aceito |
| Declaração de Instituição e Infraestrutura                | termo_de_autorizacao_e_declaracao_de_infraestrutura_certo.pdf     | 28/11/2021<br>21:57:44 | DIANARA<br>FIGUEIREDO<br>FREIRE | Aceito |
| Cronograma                                                | cronograma.pdf                                                    | 28/11/2021<br>21:56:29 | DIANARA<br>FIGUEIREDO           | Aceito |

**Situação do Parecer:**

Aprovado

**Necessita Apreciação da CONEP:**

Não

FORTALEZA, 08 de Fevereiro de 2022

---

**Assinado por:**  
**Emmanuel Alves Carneiro**  
**(Coordenador(a))**

**Endereço:** Rua Jorge Dumar, nº 1703

**Bairro:** Jardim América

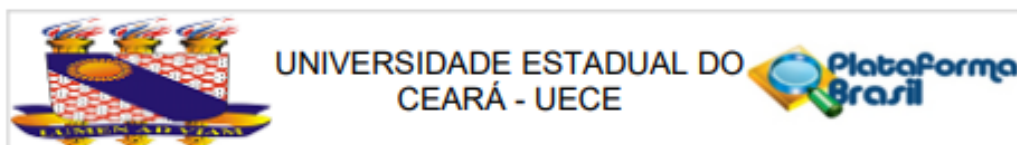
**CEP:** 60.410-426

**UF:** CE **Município:** FORTALEZA

**Telefone:** (85)3401-2332

**E-mail:** cep@ifce.edu.br

### ANEXO 3 – PARECER DO CEP DA UECE



#### PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

Elaborado pela Instituição Coparticipante

#### DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

**Título da Pesquisa:** UM ESTUDO DO TRATADO LILAVATI DE BHASKARA (1150) COMO SUBSÍDIO PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

**Pesquisador:** DIANARA FIGUEIREDO FREIRE

**Área Temática:**

**Versão:** 1

**CAAE:** 54491521.3.3001.5534

**Instituição Proponente:** Centro de Ciências e Tecnologia

**Patrocinador Principal:** Financiamento Próprio

#### DADOS DO PARECER

**Número do Parecer:** 5.416.247

#### Apresentação do Projeto:

Estudo a ser realizado por meio de oficina aplicada a graduandos em Matemática da UECE acerca do tratado de Lilavati e, coleta de dados qualitativos durante aplicação de questionário para conhecer a influência do tratado na formação algébrica do aluno.

#### Objetivo da Pesquisa:

Conhecer a contribuição do tratado Lilvat (1150), elaborado por Bhaskara II, na formação dos licenciandos em Matemática em relação a construção do pensamento algébrico, na interface entre história e ensino de matemática.

#### Avaliação dos Riscos e Benefícios:

Riscos:

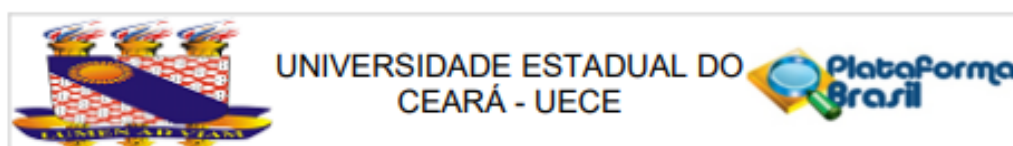
Medo de não saber responder às perguntas propostas nos formulários;

- Estresse, cansaço ou aborrecimento no decorrer da resolução dos formulários e/ou atividades propostas no decorrer do curso;

- Quebra de sigilo e identificação do participante.

Ressaltamos que buscaremos minimizar quaisquer desconfortos, garantindo que a pesquisa seja desenvolvida em local reservado e que o participante tenha a liberdade. A pesquisadora se responsabilizará pelo sigilo dos dados coletados, assegurando a confidencialidade, privacidade e proteção da imagem dos

|                                          |                             |
|------------------------------------------|-----------------------------|
| <b>Endereço:</b> Av. Silas Munguba, 1700 | <b>CEP:</b> 60.714-903      |
| <b>Bairro:</b> Itaperi                   |                             |
| <b>UF:</b> CE                            | <b>Município:</b> FORTALEZA |
| <b>Telefone:</b> (85)3101-9890           | <b>Fax:</b> (85)3101-9906   |
|                                          | <b>E-mail:</b> cep@uece.br  |



Continuação do Parecer: 5.416.247

participantes envolvidos.

**Benefícios:**

A nossa pesquisa contribuirá para a comunidade de licenciados que participaram da investigação, e ainda para a comunidade externa, visto para os

primeiros propiciará momentos de discursões, onde será possível discutir o pensamento algébrico a luz de recursos advindos da história da

matemática e para os segundos ficará registrados em nossa versão final do trabalho as atividades desenvolvidas para o curso, as quais podem ser

usadas e/ou readaptadas pelos demais professores de matemática.

**Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:**

O estudo é interessante por abordar um tratado como instrumento da construção do conhecimento algébrico do graduando.

**Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:**

Todos os termos apresentados estão de acordo com a resolução 510/16 do CNS.

**Recomendações:**

Enviar relatório ao final do estudo.

**Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:**

Aprovado.

**Considerações Finais a critério do CEP:**

**Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:**

| Tipo Documento                                            | Arquivo                                       | Postagem               | Autor                     | Situação |
|-----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|------------------------|---------------------------|----------|
| Informações Básicas do Projeto                            | PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_1895340.pdf | 19/03/2022<br>17:45:50 |                           | Aceito   |
| Folha de Rosto                                            | folha_de_rostoassinada.pdf                    | 19/03/2022<br>17:44:21 | DIANARA FIGUEIREDO        | Aceito   |
| TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência | TCLE_Dianara_alterado.pdf                     | 03/03/2022<br>21:16:34 | DIANARA FIGUEIREDO FREIRE | Aceito   |
| Outros                                                    | Carta_de_anuencia_Dianara.pdf                 | 03/03/2022<br>21:08:06 | DIANARA FIGUEIREDO        | Aceito   |
| Projeto Detalhado / Brochura Investigador                 | projeto_detalhado.pdf                         | 28/11/2021<br>22:06:30 | DIANARA FIGUEIREDO FREIRE | Aceito   |

Endereço: Av. Silas Munguba, 1700

Bairro: Itaperi

CEP: 60.714-903

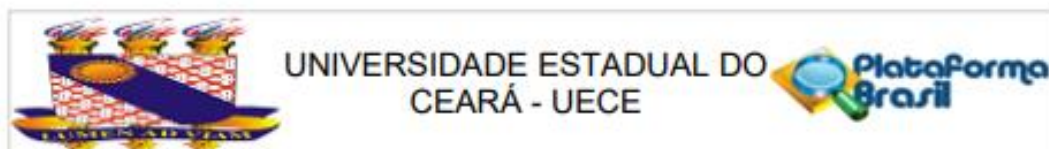
UF: CE

Município: FORTALEZA

Telefone: (85)3101-9890

Fax: (85)3101-9906

E-mail: cep@uece.br



Continuação do Parecer: 5.416.247

|                                                           |                                                                   |                        |                                 |        |
|-----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|------------------------|---------------------------------|--------|
| Outros                                                    | declaracao_de_compromisso_de_apresentacao_dos_resultados.pdf      | 28/11/2021<br>22:04:10 | DIANARA<br>FIGUEIREDO           | Aceito |
| TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência | TCLE.pdf                                                          | 28/11/2021<br>22:02:43 | DIANARA<br>FIGUEIREDO<br>FREIRE | Aceito |
| Outros                                                    | declaracao_de_garantia_de_regresso_dos_beneficios_da_pesquisa.pdf | 28/11/2021<br>22:01:32 | DIANARA<br>FIGUEIREDO           | Aceito |

**Situação do Parecer:**

Aprovado

**Necessita Apreciação da CONEP:**

Não

FORTALEZA, 18 de Maio de 2022

---

**Assinado por:**  
**ISAAC NETO GOES DA SILVA**  
(Coordenador(a))

Endereço: Av. Silas Munguba, 1700  
Bairro: Itaperi CEP: 60.714-903  
UF: CE Município: FORTALEZA  
Telefone: (85)3101-9890 Fax: (85)3101-9906 E-mail: cep@uece.br