

Lucas Cunha Bastos

**Transição Euclidiana-Projetiva (TEP):
Engenharia Didática no Contexto da Formação
de Professores com Arrimo no Software
GeoGebra**

Fortaleza - CE

2026

Lucas Cunha Bastos

**Transição Euclidiana-Projetiva (TEP): Engenharia
Didática no Contexto da Formação de Professores com
Arrimo no Software GeoGebra**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Rede Nordeste de Ensino (RENOEN) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ensino de Matemática.

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática
Rede Nordeste de Ensino (RENOEN)

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves
Coorientador: Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira

Fortaleza - CE

2026

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal do Ceará - IFCE
Sistema de Bibliotecas - SIBI
Ficha catalográfica elaborada pelo SIBI/IFCE, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- B327t Bastos, Lucas Cunha.
Transição Euclidiana-Projetiva (TEP): : Engenharia Didática no Contexto da Formação de Professores com Arrimo no Software GeoGebra / Lucas Cunha Bastos. - 2026.
243 f. : il. color.
- Tese (doutorado) - Instituto Federal do Ceará, Doutorado Acadêmico em Ensino (Renoen), Campus Fortaleza, 2026.
Orientação: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.
Coorientação: Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira .
1. Ensino de Geometria. 2. Formação de Professores. 3. Transição EuclidianaProjetiva. 4. GeoGebra 3D. 5. Visualização Matemática. I. Título.
-

Agradecimentos

Agradeço a todos que, ao longo desses anos, se fizeram presentes ao meu lado nesta caminhada. Dedico, em especial, meus agradecimentos ao meu pai, Eduardo, em quem me espelho e de quem me inspiro; à minha esposa, Alice, sem a qual eu não teria tido a força e a disciplina necessárias para concluir este trabalho; e ao meu orientador, Régis, por sua paciência e diligência em me conduzir a render o melhor de mim.

Resumo

Esta tese investiga a Transição Euclidiana-Projetiva (TEP) como fenômeno de aprendizagem e como princípio didático na formação de professores de Matemática. Fundamentada nos referenciais da Engenharia Didática de Formação e da Teoria das Situações Didáticas, a pesquisa buscou compreender de que modo a visualização projetiva pode favorecer a construção de significados geométricos e a articulação entre diferentes registros de representação.

Participaram do estudo 30 professores em formação inicial e continuada, envolvidos em atividades mediadas pelo GeoGebra 3D e complementadas por experimentações manuais com acetatos e protótipos físicos. As situações didáticas elaboradas exploraram os teoremas de Pappus e Desargues, permitindo observar a emergência de raciocínios projetivos e a reestruturação de esquemas visuais e conceituais.

A análise dos dados, composta por gravações, formulários e diários de campo, revelou um deslocamento cognitivo dos participantes: de uma visão métrica e empírica para uma compreensão relacional e estrutural da geometria. O GeoGebra 3D consolidou-se como milieu cognitivo e formativo, capaz de integrar percepção, manipulação e dedução em um mesmo espaço de aprendizagem.

Os resultados confirmam que a TEP constitui uma via eficaz para o desenvolvimento do pensamento geométrico e da metacognição docente, configurando-se como um conceito pedagógico e epistemológico com alto potencial formativo. A pesquisa contribui, assim, para o fortalecimento da Didática da Geometria e para a consolidação de uma didática da transição, na qual aprender significa transitar entre modos de ver, representar e projetar o conhecimento matemático.

Palavras-chave: Ensino de Geometria; Formação de Professores; Transição Euclidiana-Projetiva; GeoGebra 3D; Visualização Matemática.

Abstract

This doctoral research investigates the Euclidean–Projective Transition (EPT) as both a learning phenomenon and a didactic principle in Mathematics teacher education. Grounded in the frameworks of Didactic Engineering for Teacher Education and the Theory of Didactical Situations, the study aimed to understand how projective visualization supports the construction of geometric meanings and the coordination among different systems of representation.

The research involved 30 pre-service and in-service mathematics teachers, engaged in activities mediated by GeoGebra 3D and complemented with hands-on experiments using transparencies and 3D prototypes. The didactical situations focused on Pappus’ and Desargues’ theorems, exploring how reasoning and visualization evolve through the EPT approach.

Data were collected through recordings, questionnaires, and field diaries, and analyzed following the action–formulation–validation–institutionalization dialectic. Results indicate a conceptual shift from metric and empirical reasoning toward relational and structural understanding. GeoGebra 3D emerged as a genuine cognitive milieu, integrating perception, manipulation, and deduction into a unified learning space.

Findings demonstrate that the EPT effectively promotes the development of geometric reasoning and teachers’ metacognitive awareness, establishing itself as a pedagogical and epistemological concept of high formative potential. This work thus contributes to the advancement of Geometry Didactics and to the consolidation of a didactics of transition, in which learning means moving between ways of seeing, representing, and projecting mathematical knowledge.

Keywords: Geometry Teaching; Teacher Education; Euclidean–Projective Transition; GeoGebra 3D; Mathematical Visualization.

Lista de ilustrações

Figura 1.1 – Dialética de Ação	27
Figura 1.2 – Dialética de Formulação	28
Figura 1.3 – Dialética de Validação	29
Figura 2.1 – Processo de aplicação dos critérios de seleção dos trabalhos.	40
Figura 2.2 – Distribuição dos trabalhos, entre teses e dissertações, pelos anos de publicação.	41
Figura 3.1 – O ponto de fuga.	52
Figura 3.2 – Representação geral do Teorema de Pappus	54
Figura 3.3 – Teorema de Pappus – Paralelas	55
Figura 3.4 – O caso especial das paralelas no Teorema de Pappus, representado no Plano Euclidiano.	55
Figura 3.5 – Retas de projeção para os pontos A, B e C.	56
Figura 3.6 – Marcação dos pontos projetivos A' , B' e C'	56
Figura 3.7 – Marcação dos pontos projetivos X' , Y' e Z'	57
Figura 3.8 – Criação das retas projetivas do Teorema de Pappus.	57
Figura 3.9 – Marcação do ponto D, interseção das retas que passam pelos pontos (B', Z') e (C', Y').	58
Figura 3.10 – Marcação dos pontos E e F no Plano Projetivo.	58
Figura 3.11 – Finalização da Transição Euclidiana-Projetiva do caso das paralelas no Teorema de Pappus.	59
Figura 3.12 – Teorema de Pappus – Vista do Plano Projetivo	59
Figura 3.13 – Resposta matricial do proposto no software GeoGebra	60
Figura 3.14 – Determinantes das coordenadas dos pontos do Teorema	61
Figura 3.15 – Teorema de Pappus de acordo com as condições iniciais de demonstração	62
Figura 3.16 – Teorema de Pappus com o trio de pontos (A,D,X) colineares	65
Figura 3.17 – Triângulos em perspectiva por um ponto no espaço 3D	68
Figura 3.18 – Perspectiva por uma reta no plano projetivo	68
Figura 3.19 – Representação matricial do Teorema de Desargues com vetores homogêneos	70
Figura 3.20 – Equivalência matricial entre concorrência e colinearidade no Teorema de Desargues	72
Figura 3.21 – Interpretação histórica do Teorema segundo o Brouillon Project (1639) na TEP.	72
Figura 3.22 – Pontos de fuga de um quadrado projetado com base em seu posiciona- mento no Plano Euclidiano.	82
Figura 3.23 – Construção do Teorema de Pappus sob a ótica da Transição Euclidiana- Projetiva (TEP).	83

Figura 3.24–Triângulos em perspectiva e colinearidade das interseções.	86
Figura 5.1 – Eixos X, Y e Z no cenário tridimensional apresentado no software GeoGebra.	95
Figura 5.2 – Diedro formado a partir dos Plano Euclidiano e Plano Projetivo.	95
Figura 5.3 – Traçado da projeção do ponto P, do plano Euclidiano para o Plano Projetivo.	96
Figura 5.4 – Projeção simultânea de uma reta e um ponto pertencente a ela, demons- trando a conservação da incidência.	96
Figura 5.5 – Representação dos elementos em tela do GeoGebra, antes e depois da utilização da ferramenta de interseção para criação do ponto projetado.	97
Figura 5.6 – Janela de criação de ferramenta, etapa de definição do comando que se tornará uma ferramenta.	98
Figura 5.7 – Janela de criação de ferramenta, etapa de seleção de objetos necessários para o funcionamento pleno da ferramenta.	98
Figura 5.8 – Janela de criação de ferramentas, etapa de definição dos detalhes da ferramenta, nome, atalho, descrição e ícone.	99
Figura 5.9 – Projeção de reta a partir de comando aninhado, etapas para a criação da ferramenta pretendida.	101
Figura 5.10–Aplicação da ferramenta de projeção de segmento.	101
Figura 5.11–Criação do círculo projetado e sua representação no Plano Euclidiano.	105
Figura 5.12–Criação de um círculo projetado a partir de um círculo no Plano Euclidiano.	106
Figura 5.13–Segmento no Plano Projetivo para que seja calculado o Ponto Médio.	107
Figura 5.14–Criação do ponto médio por métodos semelhantes à projeção de elementos.	108
Figura 5.15–Ponto médio obtido por meio da ferramenta Ponto Médio Projetado.	109
Figura 5.16–Reta AB e Ponto P no Plano Projetivo.	110
Figura 5.17–Ponto e Reta originários no Plano Euclidiano.	110
Figura 5.18–Reta Perpendicular no Plano Euclidiano e sua projeção no Plano Projetivo.	111
Figura 5.19–Perpendicular Projetada por meio do uso da ferramenta projetiva.	111
Figura 6.1 – Construção esperada das retas r e s	118
Figura 6.2 – Posicionamentos dos Pontos A, B, C, X, Y e Z	118
Figura 6.3 – Construção das retas solicitadas na proposta	119
Figura 6.4 – Marcação dos pontos a serem analisados na proposta	119
Figura 6.5 – Erro esperado no traçado das retas	120
Figura 6.6 – Erro esperado na colocação dos pontos nos pares de retas pedidos	120
Figura 6.7 – Checagem da relação dos pontos	121
Figura 6.8 – Construção esperada do Teorema de Pappus	123
Figura 6.9 – Erro esperado da proposta da variação do Teorema de Pappus	123
Figura 6.10–Outro erro esperado da proposta da variação do Teorema de Pappus	124
Figura 6.11–Construção esperada do Teorema de Pappus com retas paralelas	125

Figura 6.12–Projeção ortogonal do Ponto P em P'	126
Figura 6.13–Projeção dos Pontos A, B e C por um ponto P, entre as retas suportes	127
Figura 6.14–Projeção dos Pontos A, B e C por um Ponto P, externo às retas suportes (Projeção Cônica)	128
Figura 6.15–Projeção dos Pontos A, B e C por uma reta (Teorema de Pappus)	128
Figura 6.16–Erro esperado – Criação de ponto de referência	129
Figura 6.17–Erro esperado – Criação de reta de referência	130
Figura 6.18–Erro esperado – Cruzamento das retas e definição arbitrária de pontos	131
Figura 6.19–Representação tridimensional de Cônicas	132
Figura 6.20–Representação de um quadrilátero no Plano Projetivo	133
Figura 6.21–Representação de um paralelogramo no Plano Projetivo	133
Figura 6.22–Erro esperado na construção da Circunferência no Plano Projetivo	134
Figura 6.23–Erro esperado na construção da Elipse no Plano Projetivo	134
Figura 6.24–Erro esperado na construção da Parábola no Plano Projetivo	135
Figura 6.25–Erro esperado na construção da Hipérbole no Plano Projetivo	135
Figura 6.26–Circunferência e Circunferência Projetada	136
Figura 6.27–Elipse e Elipse Projetada	137
Figura 6.28–Hipérbole e Hipérbole Projetada	137
Figura 6.29–Parábola e Parábola Projetada	138
Figura 6.30–Protótipo da Máquina de Dürer produzida pelos autores	140
Figura 6.31–Modelo de Projeção da TEP	141
Figura 6.32–Lista de Ferramentas Projetivas	142
Figura 6.33–Máquina de Dürer (Impressão 3D)	144

Lista de tabelas

Tabela 2.1 – Lista de teses e dissertações selecionadas para análise.	42
Tabela 3.1 – Lista de comparação entre os Axiomas da Geometria Euclidiana e Projetiva.	48
Tabela 5.1 – Comparativo entre softwares de geometria dinâmica com suporte 3D. .	93
Tabela 5.2 – Lista de comparação entre as Ferramentas Projetivas e os Axiomas. . .	113
Tabela 6.1 – Evolução das categorias de raciocínio entre as SD1–SD5	149
Tabela 6.2 – Frequência de uso do GeoGebra 3D nas justificativas escritas	150
Tabela 6.3 – Distribuição temática das percepções sobre a TEP	156

Lista de abreviaturas e siglas

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAFe	Comunidade Acadêmica Federada
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CE	Critérios de Exclusão
CI	Critérios de Inclusão
ED	Engenharia Didática
FP	Ferramentas Projetivas
IFCE	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
NDLTD	Networked Digital Library of Theses and Dissertations
OBS	Ponto Observador
PROJ	Plano Projetivo
QP	Questão de Pesquisa
RENOEN	Rede Nordeste de Ensino
RSL	Revisão Sistemática de Literatura
SD	Situação Didática
TEP	Transição Euclidiana-Projetiva
TSD	Teoria das Situações Didáticas
URCA	Universidade Regional do Cariri
3D	Tridimensional

Sumário

	Introdução	21
1	REVISÃO DE LITERATURA	25
1.1	Referencial teórico	25
1.1.1	A Didática da Matemática como Campo de Investigação	25
1.1.2	A Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau	26
1.1.2.1	A Dialética das Situações Didáticas	27
1.1.2.1.1	Situação de Ação	27
1.1.2.1.2	Situação de Formulação	28
1.1.2.1.3	Situação de Validação	28
1.1.2.1.4	Institucionalização	28
1.1.3	A Difusão da TSD no Contexto Brasileiro	29
1.1.4	Diálogos com Outras Perspectivas Teóricas	30
1.1.5	Considerações Didáticas e Epistemológicas	30
2	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	33
2.1	Participantes da pesquisa	34
2.2	Fundamentos da Engenharia Didática	35
2.3	A Contribuição de Francisco Régis Vieira Alves	35
2.4	A Pesquisa Qualitativa na Didática da Matemática	36
2.4.1	O papel do pesquisador	36
2.5	Etapas da Engenharia Didática	37
2.5.1	Análise preliminar	37
2.5.2	Concepção	37
2.5.3	Experimentação	37
2.5.4	Análise a posteriori	37
2.6	Questões Éticas	38
2.7	Revisão sistemática de literatura	38
2.7.1	Estratégia de Busca	39
2.7.2	CrITÉrios de Inclusão e Exclusão	39
2.7.3	Trabalhos Seleccionados	40
2.7.4	Análise dos trabalhos seleccionados	41
3	ANÁLISE PRELIMINAR	45
3.1	Análise preliminar	45
3.2	Axiomas de Euclides	46

3.2.1	Fundamentos Axiomáticos da Geometria Euclidiana e da Geometria Projetiva: Enfoque no Quinto Postulado	46
3.2.1.1	Os Axiomas de Euclides: Estrutura e Limitações	46
3.2.1.2	O Quinto Postulado e o Nascimento de Novas Geometrias	47
3.2.1.3	Uma comparação axiomática entre a Geometria Euclidiana e a Projetiva	47
3.2.1.4	Implicações para a Pesquisa: Geometria em Ambientes Digitais	49
3.2.1.5	Considerações Teóricas Complementares	50
3.3	Revisão histórica	50
3.3.1	Geometria Projetiva	51
3.3.1.1	Os primórdios da geometria projetiva	51
3.3.1.2	Demonstrações dos teoremas Clássicos – Pappus	54
3.3.1.3	Teorema de Pappus – Demonstração Geral	63
3.3.1.4	Demonstrações dos teoremas Clássicos – Desargues	66
3.3.1.4.1	Introdução e Contexto Histórico	66
3.3.1.4.2	Enunciado e Interpretação Geométrica	66
3.3.1.4.3	Visualização Geométrica e Construções no GeoGebra	67
3.3.1.4.4	Demonstração Matricial (Abordagem em Coordenadas Homogêneas)	67
3.3.1.4.5	Demonstração Completa do Teorema de Desargues	69
3.3.1.4.6	Demonstração Sintética e Interpretação Histórica	71
3.3.1.5	Fundamentos da Geometria Projetiva na Obra <i>Geometry</i> de Brannan, Esplen e Gray	73
3.3.1.5.1	Inter-relações entre Geometria Euclidiana e Projetiva	73
3.3.1.5.2	Princípios Fundamentais e Modelos	73
3.3.1.5.3	Aplicações Didáticas e Computacionais	74
3.3.1.5.4	Síntese e Contribuições para a Pesquisa	74
3.3.1.6	Geometria Projetiva na Educação	74
3.3.2	A História da Geometria Projetiva: Poncelet e a Transição entre as Geometrias	76
3.3.2.1	A Transição das Geometrias: Do Euclidiano ao Projetivo	76
3.3.2.2	Os Tratados de Poncelet sobre a Geometria Projetiva	77
3.3.2.3	Referências Fundamentais na Obra de Poncelet	77
3.3.2.4	Contribuições de Autores Nacionais e Internacionais	78
3.3.2.5	René Taton e a Revalorização Histórica da Obra de Poncelet	79
3.3.3	A Geometria Projetiva em <i>Mathematics and Its History</i> de John Stillwell . .	80
3.3.3.1	Origens e Racionalidade da Geometria Projetiva	80
3.3.3.2	Conexões com Álgebra e Transformações	81
3.3.3.3	Referências Históricas Fundamentais	81
3.3.3.4	Valor Epistemológico e Didático	81
3.3.4	Transição Euclidiana-Projetiva	82
3.4	Problemática – Visualização	83

3.4.1	A Visualização Matemática no Ensino de Geometria: Contribuições de David Tall e o Uso de Softwares Digitais	83
3.4.2	Fundamentos Teóricos da Visualização Matemática	84
3.4.2.1	A visão de David Tall	84
3.4.2.2	Visualização e cognição matemática	85
3.4.3	A Visualização no Ensino de Geometria	85
3.4.4	O Uso do GeoGebra e de Softwares Digitais	86
3.4.5	Implicações Didáticas	87
4	A GEOMETRIA PROJETIVA SEGUNDO INTRODUÇÃO À GEOMETRIA PROJETIVA, DE BARROS E ANDRADE	89
4.1	Estrutura e Objetivos da Obra	89
4.2	Elementos Fundamentais e Postulados Projetivos	90
4.3	Os teoremas Centrais	90
4.4	A Transição entre a Geometria Euclidiana e a Projetiva	91
4.5	Aplicações, Perspectivas Didáticas e Relevância para a Pesquisa	91
5	GEOGEBRA E FERRAMENTAS PROJETIVAS	93
5.1	Aplicação do GeoGebra no contexto da Transição Euclidiana-Projetiva	93
5.1.1	Objetivos da aplicação	94
5.1.2	Configuração do ambiente e instrumentos iniciais	94
5.1.3	Criação e registro de ferramentas projetivas no GeoGebra	97
5.2	GeoGebra e as Ferramentas Projetivas	100
5.2.1	Ferramentas 2 e 3 - Projetar Reta e Projetar Segmento	100
5.2.2	Ferramenta 4 - Projetar Círculo	101
5.2.3	Ferramenta 5 – Ponto Médio Projetado	107
5.2.4	Ferramenta 6 – Perpendicular Projetada	109
6	ANÁLISE E RESULTADOS	117
6.1	Análise a priori	117
6.1.1	Situação Didática – Pontos e Retas ao Teorema de Pappus	117
6.1.1.1	Dialética da Ação	117
6.1.1.2	Dialética da Formulação	118
6.1.1.3	Dialética da Validação	119
6.1.1.4	Dialética da Institucionalização	120
6.1.2	Situação Didática – Teorema de Pappus e a limitação na Geometria Euclidiana	121
6.1.2.1	Dialética da Ação	122
6.1.2.2	Dialética da Formulação	123
6.1.2.3	Dialética da Validação	125
6.1.2.4	Dialética da Institucionalização	126

6.1.3	Situação Didática – Teorema Fundamental da Geometria Projetiva	126
6.1.3.1	Dialética da Ação	126
6.1.3.2	Dialética da Formulação	129
6.1.3.3	Dialética da Validação	130
6.1.3.4	Dialética da Institucionalização	131
6.1.4	Situação Didática – As Cônicas na Geometria Projetiva	131
6.1.4.1	Dialética da Ação	132
6.1.4.2	Dialética da Formulação	134
6.1.4.3	Dialética da Validação	134
6.1.4.4	Dialética da Institucionalização	136
6.1.5	Situação Didática – Transição Euclidiana-Projetiva - Uma visualização em multiplanos	138
6.1.5.1	Dialética da Ação	138
6.1.5.2	Dialética da Formulação	139
6.1.5.3	Dialética da Validação	139
6.1.5.4	Dialética da Institucionalização	139
6.2	Experimentação	141
6.2.1	Contexto e objetivos da experimentação	141
6.2.2	Ambiente e público participante	142
6.2.3	Procedimentos de aplicação	143
6.2.4	Situações Didáticas desenvolvidas	144
6.2.5	Coleta de dados	145
6.2.6	Relação com a TSD	145
6.3	Análise a posteriori e validação	146
6.3.1	Panorama Geral das Situações Didáticas	146
6.3.2	Percepções sobre a Transição Euclidiana-Projetiva (TEP)	148
6.3.2.1	Primeiras concepções e obstáculos epistemológicos	148
6.3.2.2	Evolução das compreensões ao longo das situações	149
6.3.2.3	Indícios de reorganização cognitiva e visual	150
6.3.3	Visualização Projetiva com o GeoGebra 3D	151
6.3.3.1	Estratégias de exploração e manipulação no ambiente digital	151
6.3.3.2	Relações entre visualização, modelagem e argumentação	152
6.3.3.3	Articulação entre registros simbólicos e geométricos	152
6.3.4	Raciocínio Geométrico e Argumentação	153
6.3.4.1	Justificativas e validações produzidas pelos participantes	153
6.3.4.2	Emergência de invariantes e propriedades projetivas	154
6.3.4.3	Comparação entre raciocínios euclidianos e projetivos	154
6.3.5	Síntese Interpretativa	155
7	CONCLUSÃO	157

REFERÊNCIAS	161
-----------------------	-----

APÊNDICES	167
-----------	-----

APÊNDICE A – FORMULÁRIO DA SITUAÇÃO DIDÁTICA 1 . .	169
--	-----

APÊNDICE B – FORMULÁRIO DA SITUAÇÃO DIDÁTICA 2 . .	173
--	-----

APÊNDICE C – FORMULÁRIO DA SITUAÇÃO DIDÁTICA 3 . .	177
--	-----

APÊNDICE D – FORMULÁRIO DA SITUAÇÃO DIDÁTICA 4 . .	181
--	-----

APÊNDICE E – FORMULÁRIO DA SITUAÇÃO DIDÁTICA 5 . .	187
--	-----

APÊNDICE F – RUBRICA ANALÍTICA DOS INDICADORES OB- SERVÁVEIS DA PESQUISA	191
---	-----

APÊNDICE G – FERRAMENTAS PROJETIVAS – PERPENDICU- LAR PROJETADA	195
--	-----

APÊNDICE H – FERRAMENTAS PROJETIVAS – PARALELA PRO- JETADA	197
---	-----

APÊNDICE I – FERRAMENTAS PROJETIVAS – PONTO MÉ- DIO PROJETADO	199
--	-----

APÊNDICE J – FERRAMENTAS PROJETIVAS – MEDIATRIZ PROJETADA	201
--	-----

APÊNDICE K – FERRAMENTAS PROJETIVAS – CÍRCULO PRO- JETADO	203
--	-----

APÊNDICE L – FERRAMENTAS PROJETIVAS – TANGENTE PROJETADA	205
---	-----

APÊNDICE M – FERRAMENTAS PROJETIVAS – POLÍGONO RE- GULAR PROJETADO	207
---	-----

APÊNDICE N – FERRAMENTAS PROJETIVAS – BISSETRIZ PRO- JETADA	209
--	-----

APÊNDICE O – FERRAMENTAS PROJETIVAS – CENTRO PRO- JETADO	211
---	-----

APÊNDICE P – FERRAMENTAS PROJETIVAS – CÍRCULO PRO-	
JETADO (CENTRO, PONTO)	213
APÊNDICE Q – FERRAMENTAS PROJETIVAS – CÍRCULO PRO-	
JETADO (CENTRO, RAIO EUCLIDIANO)	215
APÊNDICE R – FERRAMENTAS PROJETIVAS – ELIPSE PRO-	
JETADA	217
APÊNDICE S – FERRAMENTAS PROJETIVAS – HIPÉRBOLE	
PROJETADA	225
APÊNDICE T – FERRAMENTAS PROJETIVAS – PARÁBOLA	
PROJETADA	233
APÊNDICE U – FERRAMENTAS PROJETIVAS – REFLEXÃO PRO-	
JETADA (PONTO)	239
APÊNDICE V – FERRAMENTAS PROJETIVAS – REFLEXÃO PRO-	
JETADA (RETA)	241

Introdução

Nesta pesquisa analisaremos a transição entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Projetiva, no que se refere a seus teoremas e elementos, como forma de potencializar o entendimento desses, podendo trazer benefícios no ensino de Geometria Projetiva para professores em formação. Para esta pesquisa utilizaremos o software GeoGebra como principal forma de elaboração dos cenários de visualização.

A Geometria Projetiva ocupa um papel estruturante na formação de professores de Matemática, pois possibilita compreender os invariantes das transformações geométricas que transcendem as noções métricas da Geometria Euclidiana. Formalmente, o Plano Projetivo pode ser definido de forma direta como o plano euclidiano estendido, ou seja, o plano euclidiano acrescido dos pontos no infinito. No contexto formativo, essa geometria se apresenta como ponte conceitual entre a visualização espacial e a formalização algébrica, favorecendo a construção de significados mais amplos sobre perspectiva, colinearidade e incidência. Ao deslocar o foco da medida para a relação, o professor em formação aprende a operar sob novos contratos didáticos, em que a validação não se limita à congruência ou paralelismo, mas se estende à consistência estrutural das projeções e interseções, o que amplia o repertório de análise e argumentação matemática.

Uma vez que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) introduziu ao currículo nacional de matemática o objeto de conhecimento "Vistas ortogonais de figuras espaciais", por meio da habilidade "(EF09MA17) Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva", o ensino de Geometria Projetiva passou a ter uma maior importância no currículo comum. Por esse motivo, faz-se necessário um olhar mais criterioso sobre o ensino de Geometria Projetiva nos cursos de licenciatura em matemática, para permitir que os professores em formação tenham acesso a uma melhor compreensão desse assunto, visto que as geometrias não-euclidianas, nas quais a Geometria Projetiva se enquadra, não são comumente ensinadas nas graduações. Essa constatação foi obtida após um levantamento realizado pelo autor desta pesquisa, em abril de 2022, acerca das matrizes curriculares das vinte principais universidades do país, revelando que apenas duas traziam disciplinas direcionadas ao estudo de Geometria Projetiva em seus currículos. Superar essa lacuna formativa é, portanto, fundamental para possibilitar uma atuação docente mais eficaz no ensino.

Prover ao corpo docente de matemática uma melhor compreensão dos teoremas e elementos da Geometria Projetiva por meio do uso de softwares poderá auxiliar o ensino de matemática, favorecendo a disseminação de tecnologias digitais e possibilitando um maior interesse no estudo de matemática em si. O uso de ferramentas livres, como o GeoGebra,

permite que o acesso a esse tipo de recurso seja garantido a todo estudante que possua um computador ou smartphone, possibilitando assim com que o estudo fora da sala de aula tenha continuidade e possa ser aprofundado.

Partindo desta explicação, este trabalho levanta o seguinte problema central: É possível utilizar o software de geometria dinâmica GeoGebra para visualizar as transições Euclidiana-Projetiva de modo a favorecer o entendimento dos teoremas e elementos da Geometria Projetiva?

A pertinência desta pesquisa justifica-se pela importância de inserir tecnologias digitais como ferramentas auxiliaadoras no ensino da Geometria Projetiva. Como o ensino básico e superior foca majoritariamente na geometria euclidiana, a compreensão espacial e projetiva frequentemente esbarra em dificuldades de visualização, aspecto que pode ser sanado pelo uso de softwares dinâmicos. Considerando que este estudo se insere na linha de formação de professores, as intervenções foram pensadas para um público-alvo de adultos em cursos de graduação e pós-graduação, engajados nas situações didáticas de forma voluntária e esclarecida.

Diante do problema levantado, formulamos as seguintes perguntas de pesquisa, que orientam o desenvolvimento da tese: (1) Como a Transição Euclidiana-Projetiva (TEP) pode favorecer a compreensão conceitual e a visualização geométrica de professores em formação inicial e continuada? (2) De que modo o uso do GeoGebra 3D contribui para a construção de raciocínios projetivos e para a articulação entre representações euclidianas e projetivas? E (3) quais evidências de aprendizagem e de reorganização de esquemas visuais e conceituais emergem das situações didáticas desenvolvidas com base na Engenharia Didática?

Para responder a essas indagações, a pesquisa tem como objetivo geral desenvolver uma Engenharia Didática de Formação, fundamentada nos pressupostos da vertente francesa da Didática da Matemática. Esse desenvolvimento visa conceber e descrever elementos capazes de consubstanciar o fenômeno da Transição Euclidiana-Projetiva (TEP), evidenciando a visualização matemática com o amparo do software GeoGebra.

Para que esse propósito maior seja alcançado, definiram-se os seguintes objetivos específicos: (a) analisar um contexto de transição histórica envolvendo a Geometria Plana e a Geometria Projetiva, a fim de identificar conceitos e definições passíveis de generalização em ambos os cenários; (b) explorar e descrever teoremas clássicos da Geometria Projetiva, cujas demonstrações podem ser amparadas pela visualização no contexto da TEP; (c) construir ferramentas no GeoGebra que possibilitem a criação de estruturas no plano projetivo, facilitando a visualização dessa transição geométrica; e, por fim, (d) conceber e descrever situações didáticas voltadas à formação de professores, tendo como eixo central a vivência e a compreensão da Transição Euclidiana-Projetiva.

Assim, esta pesquisa busca apresentar modelos de transição Euclidiana-Projetiva de modo a prover ao professor em formação uma visualização que permita uma maior compreensão do objeto em estudo. Como forma de otimizar essa exploração no GeoGebra, apresentaremos as ferramentas projetivas criadas pelo autor, que agilizam a aplicação dos elementos geométricos (ponto, reta, cônicas e polígonos) diretamente no Plano Projetivo.

INDICADORES OBSERVÁVEIS

Para a análise dos dados e acompanhamento das aprendizagens, propomos os seguintes indicadores observáveis:

1. **Compreensão geométrica:** capacidade de identificar relações projetivas em figuras inicialmente euclidianas.
2. **Visualização espacial:** uso coerente de vistas, projeções e planos de referência no GeoGebra 3D.
3. **Raciocínio projetivo:** explicitação de invariantes e correspondências entre elementos geométricos durante as etapas de Formulação e Validação.
4. **Autonomia tecnológica:** uso espontâneo e intencional das ferramentas projetivas do GeoGebra na resolução das tarefas.
5. **Discurso matemático e justificativa:** clareza nas argumentações e conexões entre a linguagem visual e simbólica.

Esses indicadores orientam tanto a análise qualitativa dos registros quanto a observação sistemática das interações nas Situações Didáticas (SD1–SD5).

1 REVISÃO DE LITERATURA

1.1 Referencial teórico

Nessa pesquisa busca-se desenvolver cenários de visualização da transição Euclidiana-Projetiva para serem apresentados a professores em formação com o objetivo de possibilitar uma melhor compreensão dos teoremas e elementos da Geometria Projetiva. Assim, os cenários de visualização criados têm como objetivo fornecer uma forma facilitadora de compreensão deste conteúdo, que até pouco tempo não fazia parte do currículo escolar para os alunos do ensino básico.

Para abordarmos essa pesquisa nos basearemos na Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau (2008) que estabelece um roteiro bem definido de intervenção a ser realizada na aplicação de um determinado conteúdo. Por meio das etapas de Ação, Formulação, Validação e Institucionalização será possível abordar o ensino de tópicos de Geometria Projetiva por meio da Transição Euclidiana-Projetiva proposta nessa pesquisa.

O ensino de matemática tem sido, ao longo do tempo, objeto de críticas e de busca por metodologias que superem práticas tradicionais centradas na transmissão de conteúdos e na mecanização de procedimentos. No cerne dessas discussões, emergem teorias que procuram compreender como os saberes matemáticos são construídos, transmitidos e apropriados em contextos educacionais. Neste capítulo, delineamos o referencial teórico da pesquisa, sustentado principalmente pela Teoria das Situações Didáticas (TSD), formulada por Guy Brousseau, complementada pelas contribuições de Francisco Régis Vieira Alves, e articulada com outras perspectivas da Didática da Matemática, como a Teoria Antropológica do Didático (Chevallard), a Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud), e abordagens socioculturais do ensino de matemática.

Essa base teórica permite compreender a complexidade do processo de ensino-aprendizagem da matemática como uma prática situada, atravessada por dimensões epistemológicas, cognitivas, sociais e culturais.

1.1.1 A Didática da Matemática como Campo de Investigação

A Didática da Matemática surge na década de 1970 na França como um campo específico de investigação, distinto da Pedagogia e da Psicologia, embora em diálogo com ambas. Segundo Artigue (1996), esse campo se propõe a estudar os fenômenos didáticos específicos do ensino da matemática, considerando tanto os objetos matemáticos quanto os contextos em que se dá sua transposição didática.

No Brasil, esse campo ganhou força a partir das décadas de 1980 e 1990, com forte influência das teorias francesas, sendo adaptado às particularidades do sistema educacional nacional. Pesquisadores como Ubiratan D'Ambrosio (1990), precursor da Etnomatemática, e Francisco Régis Vieira Alves desempenharam papel fundamental na formação de uma comunidade acadêmica voltada para a reflexão crítica sobre o ensino da matemática.

1.1.2 A Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau

A TSD, desenvolvida por Guy Brousseau a partir da década de 1970, estabelece um marco teórico para a compreensão dos mecanismos envolvidos na aprendizagem matemática em contextos formais. O ponto de partida de Brousseau (1997) é a constatação de que o saber matemático não pode ser imposto de fora para dentro do sujeito, mas deve ser construído pelo próprio aprendiz, em interação com situações significativas.

A ideia central da TSD é que o ensino eficaz da matemática deve ser organizado em torno de situações didáticas, planejadas de tal forma que o aluno precise mobilizar seus conhecimentos, formular hipóteses e validar estratégias em interação com o *milieu* (o meio didático). Nesse processo, o professor não atua como simples transmissor, mas como um engenheiro didático, que estrutura situações didáticas, nas quais o aluno aprende em relativa autonomia.

O modelo da TSD se ancora em conceitos fundamentais:

- **Situação didática:** uma situação intencionalmente construída para promover a aprendizagem de um saber.
- **Situação adidática:** momento em que o aluno age de forma autônoma, confrontando-se com o problema sem intervenção direta do professor.
- **Contrato didático:** conjunto implícito de regras e expectativas que regulam as interações entre professor e aluno.
- **Milieu:** sistema de objetos e regras que define o contexto da situação e com o qual o aluno interage.
- **Desequilíbrio epistemológico:** condição essencial para a aprendizagem, em que o aluno se vê compelido a reorganizar seus esquemas mentais para lidar com uma nova situação.

Essa estrutura visa criar um ambiente de aprendizagem no qual o saber emerge como solução a um problema significativo.

1.1.2.1 A Dialética das Situações Didáticas

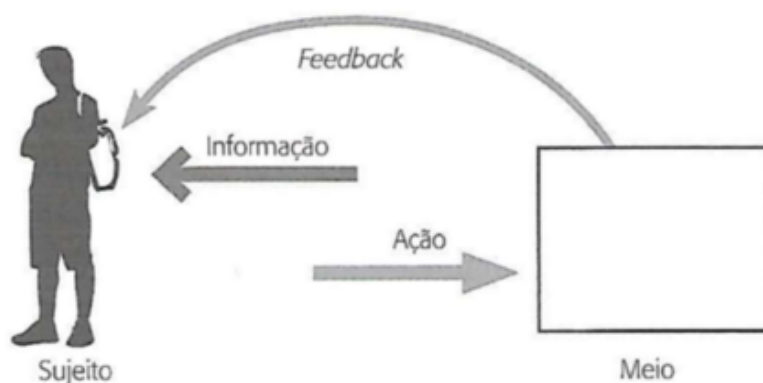
Dentro da Teoria das Situações Didáticas (TSD), uma das contribuições mais ricas e centrais de Guy Brousseau é o desenvolvimento da dialética das situações didáticas, um processo dinâmico que descreve as interações entre o aluno, o saber e o professor ao longo da aprendizagem. Essa dialética se estrutura em uma sequência de fases, que, embora não necessariamente rígidas ou lineares, servem como um modelo para compreender a evolução das situações didáticas em contextos escolares.

Brousseau identifica cinco etapas fundamentais na dialética didática: ação, formulação, validação e institucionalização. Cada uma dessas etapas possui um papel específico no processo de aprendizagem, atuando de modo articulado para favorecer a emergência de conhecimentos matemáticos por meio da resolução de problemas em situações didáticas.

1.1.2.1.1 Situação de Ação

Na fase de ação, o aluno é colocado diante de uma situação-problema que exige a mobilização de estratégias próprias para ser resolvida. É nesse momento que o professor se afasta do papel de transmissor direto de saberes e cria condições para que o aluno explore o problema de maneira autônoma. A situação deve conter um obstáculo cognitivo significativo, que provoque o aluno a agir com base em seus conhecimentos prévios e hipóteses de solução. Trata-se de uma etapa onde predomina a experimentação, a manipulação e o envolvimento prático com os elementos do problema.

Figura 1.1 – Dialética de Ação



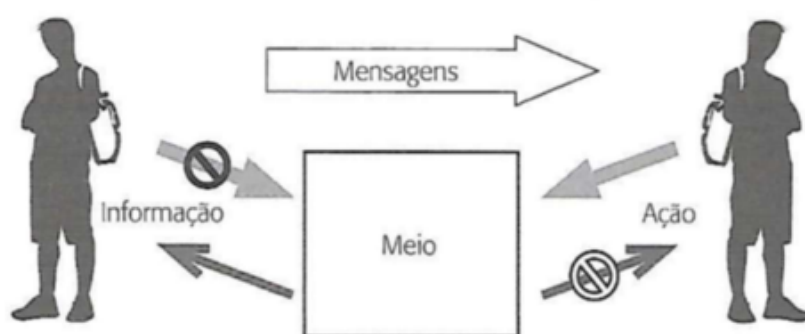
Fonte: Brousseau (2008, p. 28)

Conforme enfatiza Brousseau (2008), essa fase é essencial para criar o que ele denomina de contrato didático, pois é a partir da ação que o aluno começa a compreender o tipo de resposta que se espera dele, ainda que implicitamente, e passa a interagir com o saber de modo situado.

1.1.2.1.2 Situação de Formulação

A fase seguinte é a formulação, em que o aluno, após ter experimentado e agido sobre a situação, começa a explicitar suas estratégias, procedimentos e raciocínios. Aqui, ele precisa comunicar suas ações, seja por meio da linguagem oral, escrita, esquemas, desenhos ou outros recursos simbólicos. Esse momento é crucial, pois promove a transição da ação empírica para uma representação mais abstrata e compartilhável do conhecimento.

Figura 1.2 – Dialética de Formulação



Fonte: Brousseau (2008, p. 29)

De acordo com Artigue (1990), a formulação permite que o conhecimento se torne objeto de reflexão e discussão, rompendo com a ideia de que o saber se constrói apenas na prática, e destacando a importância da mediação linguística e simbólica na aprendizagem matemática.

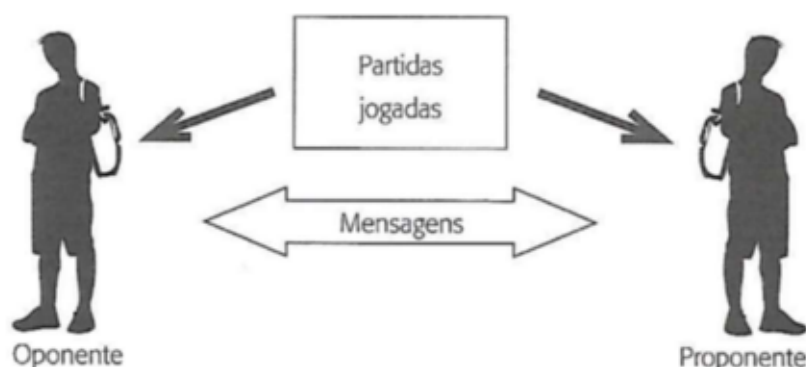
1.1.2.1.3 Situação de Validação

Na fase de validação, o foco desloca-se da simples formulação para a construção de argumentos que justifiquem e sustentem as soluções encontradas. Os alunos são convidados a confrontar suas ideias com as dos colegas, a analisar contraexemplos, a testar a robustez de seus raciocínios e, sobretudo, a desenvolver critérios para determinar a validade ou inadequação de uma solução.

Essa etapa está intimamente relacionada com a comunidade de investigação, tal como preconizada por autores como Skovsmose (2000), pois promove um ambiente de crítica e argumentação, que favorece o desenvolvimento do pensamento matemático e da autonomia intelectual.

1.1.2.1.4 Institucionalização

A institucionalização representa a intervenção explícita do professor na organização e sistematização do saber que emergiu ao longo da situação didática. Nesse momento,

Figura 1.3 – Dialética de Validação

Fonte: Brousseau (2008, p. 30)

o docente assume o papel de garantir que o conhecimento produzido pelos alunos seja articulado com os saberes reconhecidos institucionalmente, ou seja, com o saber matemático validado social e historicamente.

Segundo Brousseau (2008), a institucionalização é o momento em que o professor "retoma" o conhecimento, dá-lhe uma forma mais estável, nomeia conceitos, estabelece definições e conexões formais, e os insere no currículo escolar. Não se trata, portanto, de "dar a resposta certa", mas de permitir que os alunos se apropriem do saber matemático como um objeto de conhecimento compartilhado.

O entendimento das etapas da dialética das situações didáticas fornece ao educador uma ferramenta poderosa para o planejamento, a análise e a avaliação de sequências de ensino-aprendizagem em matemática. Ao reconhecer essas fases, o professor pode melhor identificar os momentos em que o aluno está agindo, formulando, validando ou institucionalizando um saber, ajustando sua intervenção pedagógica de modo a favorecer uma aprendizagem mais significativa e autônoma.

Além disso, essas etapas reafirmam a centralidade do aluno no processo de construção do conhecimento, em consonância com uma perspectiva construtivista da educação, na qual o saber não é apenas transmitido, mas reconstruído por meio da resolução de problemas, da comunicação e da reflexão.

1.1.3 A Difusão da TSD no Contexto Brasileiro

No cenário brasileiro, a Teoria das Situações Didáticas (TSD) tem sido objeto de diversos estudos e adaptações que buscam adequá-la às especificidades da educação matemática nacional. Entre as produções que contribuíram para essa difusão, destacam-se aquelas que propõem uma releitura da teoria à luz das práticas docentes e da formação de professores no país (Alves, 2004; 2012; 2017).

Esses trabalhos enfatizam a TSD não apenas como uma teoria de ensino, mas como um modelo capaz de reorganizar o papel do professor e de redefinir a relação entre o sujeito e o saber. Nessa perspectiva, a formação docente deve contemplar o domínio de referenciais didáticos e epistemológicos que sustentem o planejamento e a condução de aulas mais significativas.

Os estudos também aprofundam a compreensão do conceito de milieu, interpretando-o como um espaço simbólico e cultural de negociação entre sujeito e saber. A ênfase recai sobre a qualidade das interações didáticas e sobre a importância das situações planejadas em provocar desequilíbrios cognitivos e promover a validação de ideias.

Por fim, as obras recentes voltadas à prática pedagógica (Alves, 2017) apresentam diretrizes para a elaboração de situações didáticas aplicáveis ao ensino básico, abordando desde a formulação dos problemas até a avaliação das aprendizagens. Nelas, o erro é valorizado como um indicador do processo de mobilização de saberes e do desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes.

1.1.4 Diálogos com Outras Perspectivas Teóricas

Embora a Teoria das Situações Didáticas (TSD) atue como o pilar estruturante e central desta pesquisa, o diálogo com outras vertentes da Didática da Matemática enriquece pontualmente a análise dos fenômenos observados. Autores como Yves Chevallard, com a Teoria Antropológica do Didático (TAD), oferecem uma lente complementar para observar a transposição didática e as decisões institucionais que influenciam o ensino da geometria. De modo convergente, a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud auxilia na leitura fina de como os estudantes articulam esquemas de ação e representações simbólicas para internalizar os conceitos projetivos em situações adidáticas. Adicionalmente, as contribuições de Anna Sfard (1998) ajudam a valorizar as interações discursivas e os processos comunicativos, que se mostram essenciais durante as fases de formulação e validação da TSD. É imperativo ressaltar, contudo, que esses aportes não dividem o protagonismo metodológico; eles atuam de forma secundária para corroborar e ampliar as análises concebidas sob o rigor do modelo de Brousseau.

1.1.5 Considerações Didáticas e Epistemológicas

A Teoria das Situações Didáticas, aliada às contribuições de outros teóricos, oferece um arcabouço consistente para compreender a complexidade do ensino da matemática. Essa abordagem permite observar:

- O papel ativo do aluno como construtor de significados;
- A necessidade de planejar situações didáticas ricas e desafiadoras;

- A centralidade da validação e da argumentação no processo de aprendizagem;
- A importância da formação docente fundamentada teoricamente;
- A interação entre saberes escolares, científicos e culturais.

Como bem pontua Alves (2017), ensinar matemática não é transmitir verdades absolutas, mas provocar o pensamento, criar dúvidas produtivas, e estruturar experiências que levem o aluno a atribuir sentido aos saberes matemáticos.

Este capítulo apresentou o referencial teórico que sustenta esta pesquisa, fundamentado na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau e ampliado por um diálogo crítico com autores como Francisco Régis Vieira Alves, Yves Chevallard, Gérard Vergnaud, Ubiratan D'Ambrosio e Anna Sfard. Esse conjunto de aportes teóricos possibilita uma análise aprofundada dos processos de ensino e aprendizagem da matemática, considerando tanto os aspectos epistemológicos quanto os pedagógicos e socioculturais.

A presente tese organiza-se em quatro capítulos. O Capítulo 1 introduz o problema de pesquisa, seus objetivos e justificativas. O Capítulo 2 apresenta o referencial teórico, abordando a Geometria Projetiva, a Teoria das Situações Didáticas e os fundamentos da Visualização Matemática. O Capítulo 3 discute a Transição Euclidiana-Projetiva (TEP) e os princípios da Engenharia Didática aplicados à formação de professores. O Capítulo 4 descreve os procedimentos metodológicos, incluindo as fases de concepção, experimentação e análise das situações didáticas, incluindo a etapa de análise dos resultados e as considerações finais, destacando as contribuições didáticas e epistemológicas do estudo.

Concluído o balanço teórico, que integra Brousseau, Tall e diversos aportes históricos e epistemológicos, é preciso explicitar o salto para a prática investigativa. Nas páginas seguintes apresentaremos a metodologia que operacionaliza essa ponte: a Engenharia Didática orienta a concepção das situações, o GeoGebra 3D fornece o milieu experimental e as fases da TSD subsidiam a análise das produções. A transição entre teoria e método é, portanto, intencional: o leitor encontrará na sequência a descrição pormenorizada dos procedimentos que tornaram possível a articulação entre visualização, construção e validação.

2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A exploração dos teoremas de Pappus e Desargues no ambiente digital constitui não apenas uma demonstração formal, mas também uma situação didática de transição: o professor em formação age, formula hipóteses e valida resultados observando o comportamento projetivo em tempo real. Assim, a visualização se converte em instrumento epistêmico, mediando o diálogo entre a intuição geométrica e a formalização algébrica. Essa abordagem é coerente com o desenho metodológico desta tese, que articula a Engenharia Didática à Teoria das Situações Didáticas, permitindo que a compreensão da Geometria Projetiva emergja de um processo de ação, formulação, validação e institucionalização mediado pelo GeoGebra 3D.

A escolha metodológica de uma pesquisa é um elemento decisivo na condução dos processos de coleta, análise e interpretação dos dados, especialmente em estudos que envolvem o ensino e a aprendizagem da matemática. Neste capítulo, apresentamos a metodologia adotada, com base na Engenharia Didática, uma abordagem concebida no contexto da Didática da Matemática francesa, e posteriormente adaptada por diversos pesquisadores brasileiros, dentre os quais destaca-se Francisco Régis Vieira Alves.

A Engenharia Didática se mostra particularmente adequada para investigar a prática docente e os processos de aprendizagem, na medida em que possibilita o desenvolvimento, a experimentação e a análise de situações de ensino baseadas em fundamentos teóricos sólidos. Essa metodologia se alinha, portanto, à Teoria das Situações Didáticas (TSD), que sustenta o referencial teórico deste trabalho.

Para esta pesquisa será utilizada a metodologia de Engenharia Didática (ED) por melhor se enquadrar no proposto pelo autor-pesquisador, uma vez que se busca estudar a fundo os principais conceitos de Geometria Projetiva a fim de estabelecer-se quais destes conceitos podem ser transpostos para o ensino sendo feito uso do software GeoGebra.

Na etapa de Análises Preliminares haverá um estudo aprofundado na Geometria Projetiva desde sua origem até aspectos fundamentais e ampliados de seus conceitos e métodos, estudaremos os principais teoremas norteadores da Geometria Projetiva e seus Axiomas, podendo assim prover, nos cenários de transição Euclidiana-Projetiva a serem criados, uma fidelidade ao conhecimento matemático. Com esses estudos buscar-se-á uma abordagem inovadora no ensino apropriando-se do caráter de visualização na Transição Euclidiana-Projetiva elaborada através do software GeoGebra por meio de sua janela de visualização 3D, permitindo assim uma análise dos planos Euclidiano e Projetivo e da iteração de seus elementos num único cenário.

Durante a etapa de Concepção e Análise à Priori serão estabelecidas as variáveis

locais e globais de ensino, referente à abordagem da Transição Euclidiana-Projetiva na Geometria Projetiva. Também nesta etapa se determinará o plano de ação, com base na TSD, para as aulas de intervenção propostas na pesquisa. Uma das abordagens será referente ao caráter histórico dessa geometria, outro visa analisar a diferença dos axiomas da Geometria Projetiva em contraponto à Geometria Euclidiana, outro visa a apresentação dos teoremas de Pappus e Desargues com demonstração amparadas pela visualização da Transição Euclidiana-Projetiva.

Na etapa de Experimentação iniciam-se as intervenções elaboradas na etapa anterior, nesta aplica-se o pressuposto teórico da TSD, onde iremos trabalhar passo a passo cada momento da teoria, sendo estes: Ação, Formulação, Validação e Institucionalização. Estas etapas, da TSD, terão sido elaboradas na fase de Concepção da Engenharia Didática e serão ajustadas e modificadas conforme se fizer necessário para que se possa, na etapa seguinte, chegar mais próximo de atingir os objetivos propostos na pesquisa.

A Experimentação será realizada com alunos de cursos de licenciatura em matemática, preferencialmente sendo as intervenções realizadas na disciplina de Geometria Projetiva e História da Matemática. Aqui tem-se como objetivo apresentar aos alunos a origem da Geometria Projetiva e os principais teoremas, Pappus e Desargues, sendo estes vistos na ótica da Transição Euclidiana-Projetiva, buscando atingir os objetivos de pesquisa propostos.

Na etapa de Análise a posteriori e Validação, utilizando os dados coletados na Experimentação, busca-se verificar quais elementos da pesquisa ficaram aquém do que estava inicialmente proposto e como poderiam ser melhorados, também faremos uma checagem de quais objetivos foram propriamente atingidos, no caso de algum ter sucesso, e quais conclusões pode-se tirar disso. Aqui estabeleceremos paralelos com o que foi pensado inicialmente, na Análise a priori, e como se conclui, na Análise a posteriori, concluindo assim o processo estabelecido na Engenharia Didática.

Para ampliar a quantidade de dados coletados nesta pesquisa, durante toda a etapa de Experimentação será coletado material em vídeo e áudio, cujos direitos de uso dos dados exclusivamente para esta pesquisa constarão nos termos de responsabilidade passados a todos os participantes e garantindo seu sigilo na divulgação da pesquisa.

2.1 Participantes da pesquisa

A pesquisa será desenvolvida com alunos adultos de cursos de graduação e pós-graduação em Matemática ou áreas correlatas, regularmente matriculados em instituições de ensino superior. A escolha desse público se deve ao alinhamento direto com o escopo da investigação, inserida na linha de formação de professores de Matemática e voltada à análise de processos de ensino e aprendizagem em Geometria Projetiva mediada por

tecnologias digitais.

Todos os participantes serão maiores de 18 anos, convidados a participar de forma voluntária e esclarecida, mediante assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE). As atividades propostas estão em consonância com o nível acadêmico e a experiência desses sujeitos, não implicando qualquer risco físico, psicológico ou social. Ressalta-se que não haverá participação de menores de idade, nem situações que envolvam vulnerabilidade ou dependência hierárquica direta entre pesquisador e participantes.

2.2 Fundamentos da Engenharia Didática

A Engenharia Didática foi concebida por Michèle Artigue (1988, 1996) como uma metodologia de pesquisa em Didática da Matemática que articula teoria e prática de forma recursiva. Ela se organiza em torno da elaboração, experimentação e análise de situações didáticas planejadas, que visam tanto à promoção da aprendizagem quanto à produção de conhecimentos científicos sobre o ensino.

Segundo Artigue (1996), a Engenharia Didática é caracterizada por um ciclo composto por quatro fases principais:

1. **Análise prévia:** estudo do conteúdo matemático a ser ensinado e levantamento das dificuldades e concepções prévias dos alunos;
2. **Concepção e elaboração:** construção da situação didática, fundamentada teoricamente;
3. **Experimentação:** aplicação da situação em sala de aula, com observação e registro sistemático;
4. **Análise a posteriori e validação:** interpretação dos dados coletados à luz do referencial teórico, visando à validação das hipóteses didáticas formuladas.

Esse processo é de natureza iterativa, ou seja, as fases podem ser revisadas à medida que os dados obtidos revelam a necessidade de reformulações.

2.3 A Contribuição de Francisco Régis Vieira Alves

No Brasil, Francisco Régis Vieira Alves é um dos principais nomes na difusão e adaptação da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa. Em diversas publicações (Alves, 2004; 2010; 2015), o autor demonstra como a Engenharia Didática pode ser aplicada à realidade das escolas brasileiras, respeitando suas especificidades culturais, curriculares e institucionais.

Para Alves (2010), a Engenharia Didática representa uma metodologia de cunho qualitativo, que busca compreender o processo de aprendizagem em profundidade, considerando os contextos reais de ensino e os diferentes atores envolvidos. O autor ressalta que a experimentação didática deve ser planejada com base em pressupostos epistemológicos claros, articulando-se com a Teoria das Situações Didáticas, de modo que o pesquisador assume o papel de engenheiro didático, comprometido tanto com a aprendizagem dos alunos quanto com a construção de conhecimento científico.

Alves (2015) também enfatiza que a análise a posteriori deve ir além da verificação de resultados escolares, envolvendo a interpretação das estratégias dos alunos, a natureza das interações estabelecidas e as decisões do professor durante o desenvolvimento da situação didática. Para ele, a Engenharia Didática é um "método de pesquisa e intervenção pedagógica que privilegia o diálogo entre teoria e prática".

2.4 A Pesquisa Qualitativa na Didática da Matemática

Esta pesquisa se inscreve no campo das abordagens qualitativas, centradas na compreensão dos significados e processos envolvidos nas práticas de ensino e aprendizagem. Segundo Bogdan e Biklen (1994), a pesquisa qualitativa busca interpretar os fenômenos em seus contextos naturais, atribuindo ênfase às interações, crenças, discursos e experiências dos sujeitos.

No contexto da Didática da Matemática, autores como Artigue (1996) e Alves (2010) defendem que a abordagem qualitativa é a mais adequada para captar a complexidade das situações didáticas, permitindo analisar os modos de raciocínio dos alunos, a estrutura das tarefas propostas, as intervenções do professor e os desdobramentos da aprendizagem.

2.4.1 O papel do pesquisador

Na Engenharia Didática, o pesquisador assume um papel ativo e reflexivo. Ele não apenas observa ou descreve o fenômeno, mas projeta, experimenta e analisa as situações de ensino. Isso implica uma postura crítica diante do objeto de estudo e a constante reconstrução das hipóteses de pesquisa à luz dos dados coletados.

Segundo Alves (2015), "o engenheiro didático é um investigador que atua sobre a prática pedagógica, transforma-a e estuda os efeitos dessas transformações". Dessa forma, o conhecimento produzido não é apenas descritivo, mas também propositivo.

2.5 Etapas da Engenharia Didática

2.5.1 Análise preliminar

Nesta etapa, procedeu-se ao levantamento teórico e epistemológico referente à Geometria Projetiva e à sua transição a partir da Geometria Euclidiana, tomando como eixo de mediação o software GeoGebra 3D. Foram revisados textos fundantes e recentes, bem como documentos curriculares (BNCC, PCNs), a fim de identificar o estado da arte e as lacunas formativas no ensino desse conteúdo. Realizaram-se também diagnósticos junto aos participantes, buscando compreender concepções iniciais e obstáculos epistemológicos que orientassem a elaboração das Situações Didáticas (SD1–SD5). Essa fase configurou-se como base analítica da Engenharia Didática de Formação, sustentando as decisões das etapas seguintes.

2.5.2 Concepção

Com base nas análises anteriores e nos princípios da Teoria das Situações Didáticas, foram concebidas cinco Situações Didáticas (SD1–SD5), cada uma com duração prevista entre 60 e 100 minutos. As situações articularam a dialética Ação–Formulação–Validação–Institucionalização, explorando a Transição Euclidiana-Projetiva por meio de construções geométricas digitais no GeoGebra 3D e por meio de protótipos físicos (acetatos e impressões 3D). O pesquisador e o orientador definiram conjuntamente as variáveis locais e globais de ensino, bem como as hipóteses de aprendizagem e os critérios de observação. Essa fase também incluiu a elaboração dos formulários de registro e o planejamento das gravações em áudio e vídeo.

2.5.3 Experimentação

A experimentação foi conduzida em turmas de graduação e pós-graduação em Matemática, com grupos de 6 a 15 participantes, nos campi IFCE (internamente) e URCA (externamente). Cada situação foi aplicada como uma aula de aproximadamente 100 minutos, mediada pelo pesquisador, que também atuou como professor. As atividades foram registradas por meio de gravações em vídeo e áudio, anotações em diário de campo e coleta de formulários respondidos pelos participantes. O foco foi observar a evolução da ação à institucionalização dos saberes projetivos, especialmente quanto à visualização tridimensional e ao uso autônomo das ferramentas do GeoGebra.

2.5.4 Análise a posteriori

A análise a posteriori consistiu na transcrição integral dos registros audiovisuais e na codificação temática das produções dos participantes, com base em categorias emergentes

e nas fases da dialética da TSD. Procedeu-se à triangulação dos dados provenientes das gravações, formulários e diários de campo, assegurando consistência interpretativa e validade interna. A validação externa foi realizada mediante cotejo dos resultados entre as instituições parceiras (IFCE e URCA), buscando identificar convergências e discrepâncias no desenvolvimento das situações didáticas. Essa etapa consolidou a retroalimentação do ciclo da Engenharia Didática, permitindo reformulações e projeções para futuras intervenções.

2.6 Questões Éticas

A pesquisa respeitou os princípios éticos previstos na Resolução nº 510/2016 do Conselho Nacional de Saúde. Todos os participantes foram informados sobre os objetivos do estudo e assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Os nomes utilizados nos relatos foram substituídos por pseudônimos, assegurando o anonimato e a confidencialidade das informações.

Este capítulo apresentou a metodologia da pesquisa, ancorada na Engenharia Didática como abordagem teórico-prática para a investigação em Didática da Matemática. A opção por essa metodologia possibilitou o desenvolvimento de um ciclo investigativo completo, envolvendo a construção e análise de situações de ensino baseadas na Teoria das Situações Didáticas.

Antes de proceder às situações didáticas propriamente ditas, é necessário situar essas escolhas metodológicas no panorama da literatura: a Revisão Sistemática que se segue cumpre essa função, demonstrando lacunas temáticas e justificando a seleção dos trabalhos que orientaram a construção das atividades. Dessa forma, o leitor perceberá que as opções de método não são arbitrárias, mas derivam de um enquadramento empírico e teórico prévio, cujo escopo e critérios estão detalhados no capítulo subsequente.

2.7 Revisão sistemática de literatura

Esse capítulo tem como objetivo a análise sistêmica de teses e dissertações que abordam o conteúdo de Geometria Projetiva, dando enfoque àquelas que trabalham no âmbito da Educação e/ou Ensino. O procedimento utilizado foi uma Revisão Sistemática de Literatura (RSL) utilizando o protocolo proposto por Kitchenham e Charters (2007). Esta revisão servirá de amparo para o estudo dessa tese de doutorado, por esse motivo não foi realizada uma busca de outro trabalho semelhante.

Buscamos investigar o alcance do estudo de Geometria Projetiva para as áreas de Educação e Ensino nos anos de 2019 a 2023, com base nesses resultados reforçaremos a relevância de um estudo nesta área específica da matemática que foi inserida no currículo

de ensino básico desde a publicação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) em 2017.

Assim, temos como Questões de Pesquisa (QP):

- **QP1:** Quais são as principais áreas de estudo dentro das dissertações e teses que abordam a temática de Geometria Projetiva?
- **QP2:** Como é abordada a Geometria Projetiva dentro das áreas de Educação e Ensino?

2.7.1 Estratégia de Busca

Foram utilizadas, como fontes para a pesquisa, os repositórios Portal de Periódico da CAPES e *Networked Digital Library of Theses and Dissertations* (NDLTD). Todos os repositórios escolhidos oferecem acessos aos periódicos habilitados através da Comunidade Acadêmica Federada (CAFe), meio digital fornecido pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Utilizamos como palavras chaves iniciais na pesquisa "Geometria Projetiva" e "Projective Geometry". A busca ampla por esse tema determinará de início a quantidade de trabalhos, entre dissertações e teses, que existem no meio acadêmico no período que nos interessa para esta pesquisa. Dentro dessas palavras chaves utilizamos os métodos que estavam disponíveis dentro de cada plataforma para aplicar os filtros que fossem pertinentes aos critérios de inclusão e exclusão propostos para refinar a pesquisa. As palavras chaves utilizadas nas plataformas foram:

1. Portal de Teses e Dissertações da CAPES¹

"geometria projetiva" OR "projective geometry"

2. NDLTD²

"geometria projetiva" OR "projective geometry"

2.7.2 Critérios de Inclusão e Exclusão

Com base nos objetivos desse estudo e nas questões de pesquisa tomamos como Critérios de Inclusão (CI) e Critérios de Exclusão (CE) os seguintes pontos:

- **CI1:** Teses e Dissertações;
- **CI2:** Trabalhos nos idiomas Inglês ou Português;

¹Disponível em <https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/>. Acesso em 20/10/2023.

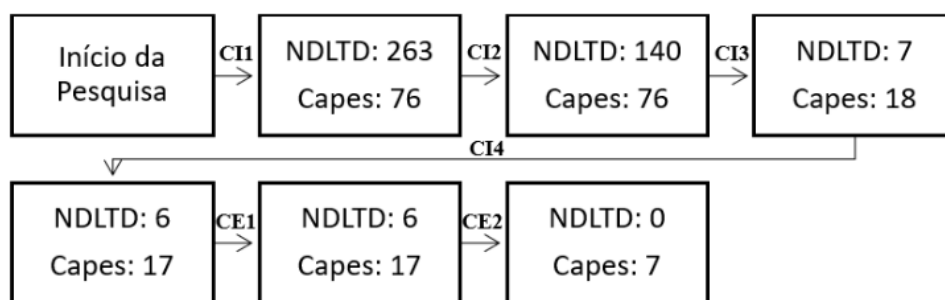
²Disponível em <http://search.ndltd.org/>. Acesso em 20/10/2023.

- **CI3:** Trabalhos publicados entre os anos de 2019 e 2023;
- **CI4:** Trabalhos que possuam acesso liberado à publicação;
- **CE1:** Trabalhos duplicados;
- **CE2:** Trabalhos que estão fora das áreas de Educação e/ou Ensino.

2.7.3 Trabalhos Selecionados

No total foram encontrados, na pesquisa inicial aplicando o CI1, 339 trabalhos, entre teses e dissertações, sendo 263 do NDLTLD e 76 da CAPES. Após esse primeiro levantamento foram realizados os filtros de acordo com os critérios de inclusão e exclusão, seguindo a seguinte ordem:

Figura 2.1 – Processo de aplicação dos critérios de seleção dos trabalhos.



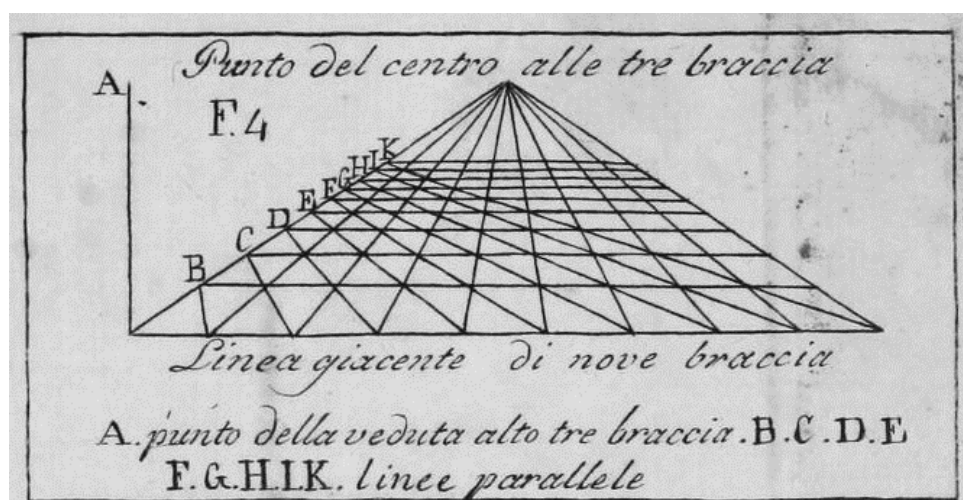
Fonte: Elaborado pelos autores.

Desde o princípio foi aplicado o Critério de Inclusão 1 para esta pesquisa, deste modo não consta nos resultados trabalhos fora das categorias de teses e dissertações, tendo sido encontrados na fase inicial um total de 339 trabalhos, que após passarem pelo CI2 foram reduzidos à 216 trabalhos, nos permitindo avaliar apenas teses e dissertações que contemplam os idiomas Português e Inglês.

No momento seguinte foi aplicado o CI3 isolando os trabalhos que contemplam o estado de arte do momento da realização desta pesquisa, de imediato é possível perceber o número reduzido de trabalhos acadêmicos sobre Geometria Projetiva dentro deste período, tendo o critério retornado apenas 25 trabalhos, estando 23 disponíveis para consulta (CI4), não havendo duplicatas (CE1) e por fim restando somente 7 trabalhos, entre teses e dissertações, que contemplam as áreas de Ensino e Educação (CE2).

De acordo com a Figura 2.2 podemos observar que a publicação de teses e dissertações com foco no estudo de Geometria Projetiva nos âmbitos educacionais é escasso e espaçado, o que nos reforça a justificativa desta pesquisa que busca trazer meios de estudo da Geometria Projetiva de modo a permitir um maior acesso à sua compreensão por meio da Transição Euclidiana-Projetiva (TEP).

Figura 2.2 – Distribuição dos trabalhos, entre teses e dissertações, pelos anos de publicação.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Segue abaixo os trabalhos selecionados na Tabela 2.1:

Dentre o material selecionado apenas uma tese foi realizada neste período e que se encaixa na temática de estudo desta pesquisa revelando o vácuo de estudos aprofundados sobre a temática de Geometria Projetiva. Das seis dissertações, três são realizadas em mestrados profissionais e três acadêmicos, sendo estes nas áreas de Ensino.

2.7.4 Análise dos trabalhos selecionados

De início é possível perceber que a área carece de estudos aprofundados na temática de Geometria Projetiva com foco na educação e ensino, com este olhar iremos resumir cada um dos trabalhos selecionados e buscar relacioná-los entre si e com esta pesquisa.

A dissertação de Pereira (2020) explora o contexto histórico, artístico e teórico da Geometria Projetiva, destacando a origem da geometria durante o Renascimento. O objetivo deste estudo é a apresentação de alguns teoremas relacionados à Geometria Projetiva e sua conexão com os principais artistas desse período. Além disso, esta pesquisa propõe métodos de ensino deste conteúdo por meio de Softwares de Geometria Dinâmica, com o intuito de tornar o ensino da geometria mais acessível e compreensível. O foco central deste trabalho reside na seguinte indagação: "Como podemos abordar as teorias da Geometria Projetiva no Ensino Fundamental usando a Geometria Dinâmica?" Com essa abordagem, o autor busca simplificar a compreensão dessa geometria e fornecer orientações.

Na pesquisa de Silva (2022) o autor busca analisar os requisitos de software educativo em Geometria Dinâmica para ensinar Geometria Projetiva, baseando-se nas dimensões epistemológica, didática, cognitiva e informática. O objeto de estudo é a transformação homológica da circunferência. As dimensões epistemológica e didática envolvem a estrutura

Tabela 2.1 – Lista de teses e dissertações selecionadas para análise.

ID	Autor	Título	Área	Tipo	Ano
1	Márcio Anderson de Sá Pereira	Geometria Projetiva: um breve relato histórico, artístico, teórico e aplicações com Geometria Dinâmica.	PROFMAT	Dissertação	2019
2	Gabriel Varela Soares da Silva	Potencialidade e limitações dos softwares GeoGebra e Cabri Géomètre II: uma análise à luz dos pressupostos apresentados pela Geometria Projetiva	Ensino de Ciências e Matemática	Dissertação	2022
3	Lucas de Sousa Holanda	Os Modelos Axiomáticos das Geometrias Euclidiana e Projetiva: Histórico, Similaridades, Diferenças e Aplicações	PROFMAT	Dissertação	2020
4	Thalis Peixoto	Fotografia como um recurso para o ensino de perspectiva cônica com tecnologias digitais	Ensino de Matemática	Dissertação	2022
5	Simone Aparecida da Silva	Um estudo sobre interseções de curvas algébricas planas	PROFMAT	Dissertação	2019
6	Gabrielly Beatriz Batista Machado	CURVAS CÔNICAS: uma análise das articulações entre os registros de representação com auxílio do Conics 3D	Ensino de Ciências e Matemática	Dissertação	2020
7	Bruno Leite Ferreira	"O que sabem sobre as curvas cônicas?" Uma possível leitura para o processo de produção de significado em um grupo de estudos	Educação Matemática	Tese	2019

Fonte: Elaborado pelos autores.

da Geometria Projetiva e os conteúdos necessários para compreender a transformação homológica. A dimensão cognitiva examina como os alunos aprendem esses conceitos e suas principais dificuldades. Na dimensão informática, o GeoGebra e o Cabri-Géomètre II são avaliados com base na adequação e completude em relação à Vigilância Epistemológica.

No trabalho de Holanda (2020) são abordadas características da Geometria Euclidiana e da Geometria Projetiva, incluindo seu histórico de desenvolvimento, modelos axiomáticos, teoremas clássicos e demonstrações. Abordaram as semelhanças e diferenças entre esses dois modelos de Geometria a partir de seus conjuntos de axiomas. O autor

buscou apresentar a Geometria Projetiva de modo mais concreto, utilizando ferramentas de desenho e fotografias. O autor buscou explorar a Geometria Projetiva sob duas perspectivas distintas: por meio de seus axiomas e dos modelos de representação da realidade desenvolvidos por artistas renascentistas.

A dissertação de Peixoto (2022) aborda a relação entre fotografia, Perspectiva Cônica e Tecnologias Digitais, com ênfase na educação básica. O estudo busca analisar como conceitos matemáticos sobre Perspectiva Cônica são desenvolvidos por grupos de pessoas que utilizam fotografias e o software GeoGebra. A pesquisa envolveu uma Prática Piloto e uma Prática Final. Durante a análise da Prática Final, foram identificados três grupos principais: aqueles que trabalharam com fotografias, discutindo e categorizando imagens com um, dois e três pontos de fuga, bem como imagens sem profundidade; aqueles que usaram câmeras de celular para produzir fotografias aplicando a perspectiva de um, dois e três pontos de fuga; aqueles que usaram as fotografias produzidas para modelá-las no GeoGebra, construindo pontos de fuga, linhas de fuga e a linha do horizonte, explorando as propriedades desses elementos. O autor sugere que a fotografia pode ser uma ferramenta eficaz para introduzir conceitos de Perspectiva Cônica, e o GeoGebra é útil para compreender propriedades fundamentais desse conteúdo, como linhas do horizonte e pontos de fuga, bem como como a fotografia é moldada por esses conceitos.

Silva (2019) aborda o estudo das interseções de Curvas Algébricas focando no Teorema de Bézout, que aborda o número de pontos de interseção entre duas curvas. Visando uma compreensão aprofundada desse Teorema, a autora explora a Geometria Algébrica Clássica, que engloba tanto a Geometria Analítica quanto a Geometria Projetiva. Além de trabalhar com o plano cartesiano e o plano complexo, também analisou o plano projetivo. Foi trabalhado as curvas algébricas e curvas projetivas demonstrando o Teorema de Bézout.

Na pesquisa de Machado (2020), a autora investigou como os alunos da Licenciatura em Expressão Gráfica na UFPE articulam as representações das Curvas Cônicas usando o protótipo "Conics 3D". Foi observada a necessidade de melhorar o ensino das Curvas Cônicas, que frequentemente é fragmentado e baseado apenas em abordagens algébricas. A autora considera que as tecnologias contemporâneas oferecem potencial para integrar diferentes representações e criar situações de aprendizagem mais dinâmicas. Os resultados destacam a importância de atividades que estimulem a mobilização cognitiva, aproveitando os registros semióticos dinâmicos. A autora considera que as ferramentas do protótipo ajudaram a visualizar a integração entre aspectos algébricos e geométricos das Curvas Cônicas, além de identificar oportunidades de aprimoramento.

A tese de Ferreira (2019) teve como objetivo explorar como as noções matemáticas são produzidas em contextos de aprendizagem investigativa. O estudo, de natureza qualitativa, usou a Teoria do Modelo dos Campos Semânticos e concentrou-se na Geometria. Um

Grupo de Estudos Independente sobre curvas cônicas foi formado, composto por quatro estudantes de matemática e o pesquisador. As discussões ocorreram sem um programa predefinido, com os participantes explorando o que sabiam sobre curvas cônicas. Gravações em vídeo-áudio, conversas no WhatsApp e diários dos participantes forneceram os dados. A análise revelou sete movimentos que caracterizam a produção de significado, com destaque para o uso do ponto impróprio na generalização de curvas cônicas e a preferência pela elipse e pela parábola para fazer analogias com outras curvas. O estudo enfatiza a importância de analisar os elementos envolvidos ao trabalhar com diferentes abordagens ou modelos, a fim de evitar desconexões e facilitar a compreensão matemática.

Dentro desses poucos trabalhos selecionados observa-se que o foco no ensino da Geometria Projetiva propriamente dito é escasso, sendo muitas vezes reduzido apenas à questão de perspectiva. Esta revisão sistemática nos dá uma base para a importância da pesquisa na área de Geometria Projetiva com foco em Ensino e Educação.

Nos últimos anos (2020–2024), a literatura sobre o uso de tecnologias digitais no ensino de Geometria e na formação de professores de Matemática tem avançado significativamente, sobretudo com a integração de ambientes como o GeoGebra 3D e outras plataformas de geometria dinâmica que favorecem a exploração visual e a construção colaborativa de conceitos (Alves, 2021; Gravina & Figueiredo, 2023).

Tais investigações têm evidenciado o potencial das ferramentas digitais na promoção de situações didáticas que articulam visualização, manipulação e argumentação geométrica, aproximando a prática docente dos princípios da Engenharia Didática e da Teoria das Situações Didáticas (Artigue, 2022). No entanto, embora a literatura tenha consolidado experiências no campo da Geometria Euclidiana digital, observa-se uma lacuna importante quanto à exploração integrada entre os domínios Euclidiano e Projetivo, especialmente quando mediada por visualizações tridimensionais.

Poucos estudos abordam a Transição Euclidiana-Projetiva (TEP) como fenômeno formativo capaz de favorecer a compreensão estrutural da geometria por meio da visualização espacial e da interpretação de invariantes projetivos (Bastos, 2025). Assim, esta tese se insere nesse campo emergente ao propor a visualização projetiva não apenas como ferramenta cognitiva, mas como processo de aprendizagem profissional docente, no qual o professor em formação aprende a agir, formular, validar e institucionalizar saberes geométricos em contextos mediados pela tecnologia digital, contribuindo, desse modo, para preencher uma lacuna epistemológica e didática ainda pouco explorada na literatura recente.

3 ANÁLISE PRELIMINAR

3.1 Análise preliminar

De acordo com Michele Artigue (2020) a Análise Preliminar inclui três dimensões: uma análise epistemológica do conteúdo matemático em questão, neste trabalho sendo a Geometria Projetiva, uma análise das condições e restrições que a Engenharia Didática enfrentará e uma análise do que a pesquisa educacional tem a oferecer como amparo ao design proposto, tais dimensões podem ser referenciadas como *epistemológica*, *didática* e *cognitiva*, respectivamente, como apresentado por Santos e Alves (2017).

Neste trabalho, para explorar a dimensão epistemológica, abordamos o estudo de Geometria Projetiva, mais especificamente o que aqui chamamos de Transição Euclidiana-Projetiva que é uma forma de visualização da Geometria Projetiva por meio de paralelos imediatos com as representações de seus elementos num plano Euclidiano.

Para esse estudo abordaremos os conceitos primários do surgimento da Geometria Projetiva, desde sua concepção conceitual até seus avanços no ambiente acadêmico e escolar, buscando apresentar suas justificativas no ensino e a importância do seu estudo.

Apresentaremos também uma análise detalhada dos principais teoremas que fundamentam a base da Geometria Projetiva, sendo eles os teoremas de Pappus e Desargues, que exploram as diferenças nos axiomas da Geometria Euclidiana e Projetiva. Por meio desses teoremas exploraremos formas de comparar a visualização desses planos de modo a favorecer a compreensão de suas demonstrações.

Na segunda dimensão, a dimensão didática, proposta por Artigue, encontramos como obstáculos o caráter visual, uma vez que a Geometria Projetiva apresenta características geométricas pouco usuais pode haver empecilhos na compreensão daquilo que se pretende apresentar numa construção, para este estudo analisaremos os textos de David Tall.

No caráter cognitivo, analisamos a importância do que apresentamos neste estudo como forma de criar uma ponte para o conhecimento de Geometria Projetiva por meio da Transição Euclidiana-Projetiva, não apenas como uma ferramenta visual, mas também como um possível facilitador dos conceitos geométricos.

3.2 Axiomas de Euclides

Muito do que será citado nesse trabalho traça comparativos com os axiomas da Geometria Euclidiana, se faz, portanto, necessário abordar tais axiomas para que sejam esclarecidos os paralelos, possibilitando uma melhor compreensão do que será trabalhado futuramente.

Os axiomas da Geometria Euclidiana são a base norteadora do seu "funcionamento", uma vez que descrevem as noções básicas de como os elementos existem e interagem entre si, de modo intuitivo tal que não são necessárias demonstrações.

3.2.1 Fundamentos Axiomáticos da Geometria Euclidiana e da Geometria Projetiva: Enfoque no Quinto Postulado

A fundamentação da presente pesquisa exige uma compreensão precisa dos princípios estruturantes da Geometria Euclidiana e da Geometria Projetiva, uma vez que ambas serão mobilizadas, em correlação, nas construções geométricas e nas análises didáticas desenvolvidas com suporte digital. As diferenças entre essas geometrias não residem apenas em suas aplicações, mas principalmente em suas bases axiomáticas e na forma como concebem o espaço, a linha e o ponto. Nesta seção, abordamos os sistemas axiomáticos que fundamentam ambas, com especial atenção ao Quinto Postulado de Euclides, tradicionalmente conhecido como o Postulado das Paralelas, cuja reformulação ou negação deu origem a geometrias alternativas, incluindo a Geometria Projetiva.

3.2.1.1 Os Axiomas de Euclides: Estrutura e Limitações

A Geometria Euclidiana, desenvolvida por Euclides no século III a.C., é estruturada a partir de cinco postulados apresentados na obra *Os Elementos*. Esses postulados descrevem propriedades fundamentais do espaço plano, sendo o quinto o mais complexo e o mais debatido ao longo da história. São eles:

1. Dados dois pontos distintos, é possível traçar uma reta que os una.
2. Qualquer segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente.
3. Dado um ponto e uma distância, é possível traçar um círculo com centro nesse ponto e raio igual à distância.
4. Todos os ângulos retos são congruentes entre si.
5. Se uma reta corta duas outras e forma ângulos internos do mesmo lado cuja soma seja menor que dois retos, então essas duas retas se encontrarão do lado em que estão os ângulos menores.

O Quinto Postulado, em particular, é responsável pela noção de paralelismo, sendo interpretado por muito tempo como menos evidente do que os demais, o que motivou séculos de tentativas de prová-lo a partir dos quatro primeiros, sem sucesso.

3.2.1.2 O Quinto Postulado e o Nascimento de Novas Geometrias

A dificuldade em aceitar o Quinto Postulado como um axioma evidente levou matemáticos como Saccheri, Lambert, Legendre e, finalmente, Lobachevsky, Bolyai e Gauss a explorar as consequências de sua negação, dando origem às geometrias não euclidianas. No caso específico da Geometria Projetiva, a ideia é eliminar completamente o conceito de paralelismo, reformulando o espaço de modo que todas as retas se encontrem em algum ponto, incluindo aquelas que, na Euclidiana, seriam paralelas.

Em termos axiomáticos, a Geometria Projetiva parte de um conjunto distinto de princípios, como os apresentados por Veblen e Young (1910) ou Hilbert (1902) em suas versões formais da geometria. Um de seus princípios fundamentais é:

- **Axioma da Incidência:** Por quaisquer dois pontos distintos, passa exatamente uma reta.
- **Axioma da Dualidade:** A estrutura permite intercambiar os conceitos de ponto e reta sem afetar a veracidade dos teoremas.
- **Axioma do Ponto no Infinito:** Toda reta encontra-se com qualquer outra reta em exatamente um ponto, ainda que esse ponto seja "impróprio" ou "no infinito".

Nesse contexto, a supressão do Quinto Postulado conduz a uma geometria na qual o conceito de "reta paralela" perde o sentido, e todas as retas passam a se cruzar, mesmo que idealmente.

3.2.1.3 Uma comparação axiomática entre a Geometria Euclidiana e a Projetiva

Abaixo apresento a Tabela 3.1 de comparação entre os axiomas de Euclides, com referências às suas atualizações por Hilbert, e os axiomas da Geometria Projetiva. A ideia desta tabela é, não somente comparar, mas também verificar onde os axiomas se conservam entre as geometrias, onde se alteram/adaptam e onde não são possíveis de serem transferidos entre as geometrias. O intuito é apresentar ao leitor uma noção axiomática do que se propõe a TEP, a relação direta entre os diferentes tipos de geometrias. Indica-se onde há conservação, modificação ou impossibilidade de transporte direto, acompanhadas de observações explicativas e referências bibliográficas principais.

Tabela 3.1 – Lista de comparação entre os Axiomas da Geometria Euclidiana e Projetiva.

Axioma (Euclid/Hilbert)	Contraparte Projetiva	Conservação?	Observações	Referências
Noções comuns (igualdade, transitividade)	Conservadas logicamente (não dependem de métrica).	Conservado	São princípios lógicos gerais aplicáveis em qualquer axiomatização geométrica.	Hilbert (1899); Brannan et al. (1999)
Postulado 1: Traçar reta entre dois pontos	Axioma de incidência: por dois pontos passa exatamente uma reta.	Conservado	Incidência é fundamental em ambas as geometrias.	Veblen & Young (1910); Coxeter (2003)
Postulado 2: Prolongar segmento indefinidamente	Retas projetivas já são completas; conceito de prolongar perde sentido métrico.	Parcialmente Conservado	Há equivalência na ideia de completude, mas sem noção de extensão métrica.	Coxeter (2003)
Postulado 3: Círculo com centro e raio	Não há construção métrica; círculos não são definidos por raio.	Não Transportável	A geometria projetiva não possui métrica interna.	Hilbert (1899); Coxeter (2003)
Postulado 4: Todos os ângulos retos são iguais	Não há noção de ângulo; depende de estrutura métrica adicional.	Não Transportável	Igualdade de ângulos não pertence à estrutura projetiva.	Coxeter (2003)
Postulado 5: Paralelas	Todas as retas se encontram (talvez no infinito).	Alterado	A inexistência de paralelismo define a essência projetiva.	Veblen & Young (1910); Coxeter (2003)
Axiomas modernos de incidência (Hilbert)	Mantêm-se como núcleo da estrutura projetiva.	Conservado	Ambas as geometrias se baseiam em relações de incidência.	Hilbert (1899); Veblen & Young (1910)
Axiomas de ordem (betweenness)	Não aplicável: ausência de noção de 'entre'.	Não Transportável	A ordem só faz sentido em geometrias com orientação e métrica.	Veblen & Young (1910)

Axioma (Euclid/Hilbert)	Contraparte Projetiva	Conservação?	Observações	Referências
Axiomas de congruência/métrica	Inexistentes; propriedades invariantes são projetivas (razão dupla, dualidade).	Não Transportável	A projetiva é puramente relacional, não métrica.	Coxeter (2003); Brannan et al. (1999)
Dualidade projetiva (nova propriedade)	Sem equivalente em Euclides; ponto e reta são conceitos duais.	Exclusivo da Projetiva	Introduz simetria estrutural ausente na Euclidiana.	Veblen & Young (1910); Coxeter (2003)

Fonte: Elaborado pelos autores.

A análise demonstra que a geometria projetiva não elimina os princípios euclidianos, mas os generaliza. A perda de conceitos métricos (ângulo, distância) dá lugar a uma estrutura relacional mais ampla, na qual a incidência e a dualidade são os elementos fundamentais. Essa generalização amplia a compreensão geométrica, como discutido por Coxeter (2003) e Veblen & Young (1910).

Em síntese, a análise comparativa entre os axiomas euclidianos e os fundamentos projetivos revela que a chamada "não transportabilidade" de certos postulados não representa uma perda, mas uma mudança epistemológica de foco: o olhar desloca-se da métrica, centrada em medidas, distâncias e ângulos, para a estrutura de incidência e relação entre os elementos geométricos. Nessa perspectiva, a geometria projetiva não elimina a Euclidiana, mas a generaliza, permitindo que propriedades antes dependentes de medida sejam reinterpretadas de modo puramente relacional. Essa transição, longe de ser uma ruptura, constitui um avanço conceitual que amplia o campo de compreensão geométrica e didática, possibilitando inclusive o resgate de noções métricas mediante estruturas adicionais, como conicidades ou modelos de Cayley–Klein. Assim, conforme indicam autores como Coxeter (2003) e Brannan, Esplen e Gray (1999), compreender o que se conserva, o que se transforma e o que deixa de fazer sentido entre as duas geometrias é fundamental para formar um pensamento geométrico flexível, capaz de transitar entre representações sem se prender às limitações do espaço euclidiano.

3.2.1.4 Implicações para a Pesquisa: Geometria em Ambientes Digitais

Do ponto de vista didático e computacional, como será explorado nesta tese, a distinção entre Geometria Euclidiana e Projetiva torna-se operacional nos ambientes digitais de construção geométrica como o GeoGebra. Esse tipo de software permite simular tanto construções euclidianas (com base em retas paralelas e medições métricas) quanto

projetivas (com uso de pontos no infinito, homologias e projeções), possibilitando que o aluno experimente ativamente os efeitos da adoção ou não do Quinto Postulado.

Além disso, essa distinção tem implicações epistemológicas relevantes, como destaca Greenberg (2008), ao mostrar que o abandono do Quinto Postulado não compromete a coerência do sistema geométrico, ao contrário, abre novas possibilidades de exploração conceitual e didática.

3.2.1.5 Considerações Teóricas Complementares

Autores como Marvin Jay Greenberg (2008), John Stillwell (2002) e David Brannan et al. (1999) reconhecem o papel central do Quinto Postulado no surgimento das geometrias modernas. Sua negação sistemática permite o nascimento da Geometria Projetiva, enquanto sua preservação fundamenta a Geometria Euclidiana. Essa bifurcação estrutural será um dos pilares do trabalho de pesquisa, sobretudo ao propor construções que transitem entre essas duas geometrias para promover compreensão mais profunda por parte dos estudantes.

Para conectar a dimensão computacional com sua raiz histórica, propomos aqui um deslocamento reflexivo: enquanto o GeoGebra traduz instantaneamente invariantes e projeções em imagens manipuláveis, sua eficácia didática só se explica quando acompanhada pela compreensão histórica que deu origem a esses conceitos. Em outras palavras, a análise histórica que segue permitirá ler as ferramentas digitais não como fins independentes, mas como mediações contemporâneas de um repertório conceitual com séculos de desenvolvimento. Assim, a Revisão Histórica serve como pano de fundo necessário para interpretar criticamente as potencialidades e limites do uso do GeoGebra no ensino de projeções.

A seguir deslocamo-nos da fundamentação teórica para uma perspectiva histórica que ilumina a gênese e o percurso da Geometria Projetiva. Essa passagem não é apenas cronológica: pretende-se mostrar como ideias práticas (ponto de fuga, perspectividade, recursos pictóricos) foram gradualmente convertidas em conceitos formais que hoje orientam as práticas didáticas. A revisão histórica que se segue, portanto, articula-se diretamente com as considerações teóricas já apresentadas, mapeando as transformações epistemológicas que justificam a inclusão da Geometria Projetiva na formação docente e preparando o leitor para a análise de suas aplicações educativas e computacionais.

3.3 Revisão histórica

Nesta sessão abordaremos os aspectos históricos que norteiam os estudos da Geometria Projetiva a partir de sua origem e seguiremos para sua introdução no contexto educacional, finalizando com uma abordagem de aplicação de um de seus conceitos, por meio da visualização, em um software de geometria dinâmica 3D.

Inicialmente falaremos sobre a origem da Geometria Projetiva e sua evolução, em especial durante o século XIX, trazendo a ótica de diversos autores na compreensão dos avanços obtidos e influências da Geometria Projetiva.

Nesta parte iremos analisar como a Geometria Projetiva obteve seu "descobrimento" e seus avanços ao longo dos séculos, permitindo ver que os conceitos que inicialmente pareciam vagos ou imprecisos, por comparação com a Geometria Euclidiana, vieram a ser colocados em prova futuramente por outros matemáticos, fazendo assim com que se pudesse validar e reconhecer os estudos de seus predecessores.

Traremos uma evolução, inicialmente prática e voltada às artes, que tem como sua origem a visualização acima da conceitualização matemática e que futuramente passa para o campo teórico abstrato para então ser aprofundado e formalizado em teorias que a fundamentam e definem até os dias de hoje.

Em seguida passaremos para uma análise da Geometria Projetiva no contexto educacional, observando as características que apresentam a necessidade desse conteúdo ser apresentado no ensino e quais medidas e abordagens foram tomadas. Aqui buscaremos as origens do estudo de geometria na educação e os métodos aplicados em sua origem que podem ter gerado repercussões na sistematização deste conteúdo. Investigaremos também quais iniciativas houveram de inserir a Geometria Projetiva neste mesmo contexto.

Posteriormente apresentaremos uma análise da importância do uso de softwares para a geometria de um modo geral e em seguida para a Geometria Projetiva, em especial no meio educativo, e seguiremos para uma exemplificação de um axioma da Geometria Projetiva por meio do uso do software GeoGebra que, em nossa visão, favorece a sua compreensão.

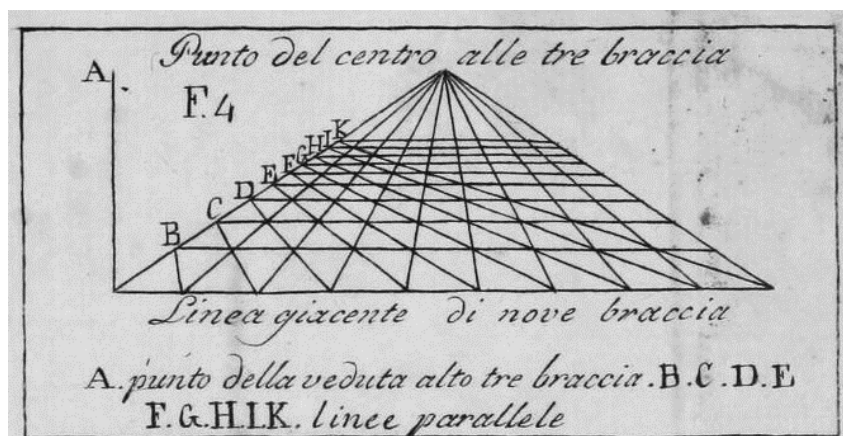
3.3.1 Geometria Projetiva

3.3.1.1 Os primórdios da geometria projetiva

Segundo Auffinger e Valentim (2003) a origem da Geometria Projetiva retrata do Renascimento, com o surgimento dos conceitos de ponto de fuga e perspectividade, sendo tais conceitos pertencentes à projeção cônica que seria introduzida anos depois.

Alberti (1435), em sua obra *De Pictura*, já apresenta conceitos de projeção a partir de um observador que, apesar de não respaldado em sua obra, apresentavam conceitos primitivos de geometria projetiva, uma vez que utilizava um observador fictício para criar imagens projetadas e a ideia de perspectiva de profundidade em suas pinturas.

Na Figura 3.1 podemos ver a ideia de perspectiva gerada no que seria um chão de ladrilhos, as retas paralelas encontrando-se no plano de fuga passa a impressão de profundidade na imagem. Um observador, externo à imagem projeta retas que encontram

Figura 3.1 – O ponto de fuga.

Fonte: *De Pictura* (1435)

os pontos de base das paralelas criando seções laterais determinadas pelos pontos B, C, D, E, F, G, H, I e K, permitindo assim criar retas paralelas à horizontal que definiriam os ladrilhos proporcionais em acordo com a perspectiva.

Expus brevemente o contexto geral e, eu acredito, de uma forma não totalmente obscura, mas percebo que o conteúdo é tal que, enquanto não posso exigir elogio para eloquência em exposição, o leitor que não entende no primeiro contato, provavelmente nunca irá compreendê-lo não importa quanto tente. (ALBERTI, 1435, *On Painting*, p. 58-59, Tradução Livre)

Alberti (1435) expunha suas noções de pintura do modo que julgava mais simples para o leitor poder reproduzir a técnica, ainda que este, como previamente mencionado, não respaldasse os motivos por trás do posicionamento do observador (que deve estar à mesma altura do ponto de fuga) e do traçado de paralelas, sua obra, nesse quesito é muito mais instrumental que educativa.

Quase dois séculos depois, por meio dos trabalhos de Girard Desargues (1591-1661) que esses conceitos foram formalizados, porém, sem grande aceitação. Granger (1974) afirma que os trabalhos de René Descartes (1596-1650) ofuscaram os trabalhos de Desargues devido à sua rápida aceitação, tornando-se assim um dos maiores nomes na Matemática.

Desargues apresentava em seus trabalhos o, hoje conhecido, "Teorema de Desargues" que é um dos principais teoremas da Geometria Projetiva, abordando a propriedade projetiva entre dois triângulos. Somente no início do século XIX, pelos trabalhos de Jean-Victor Poncelet (1788-1867) é que as obras de Desargues seriam amplamente estudadas.

Em *Traité des propriétés projectives des figures* (1822) de Jean-Victor Poncelet, conhecido como o pai da Geometria Projetiva, que é então firmado o surgimento da Geometria Projetiva. Chaves e Grimberg (2014) apontam a evolução acadêmica de Poncelet,

ressaltando as etapas na produção do seu tratado e o modo no qual, durante 15 anos (1807-1822), Poncelet trabalhou, de forma compartimentada, para estabelecer seu pensamento.

Segundo Chaves e Grimberg (2014) nos anos em que estudou na Ecole Polytechnique, Poncelet teve aulas com Hachette, tendo visto conceitos definidos por Gaspard Monge (1746-1818) que embasariam suas noções em relação à Geometria Projetiva, são eles:

[...] O primeiro de dar os métodos para representar sobre uma folha de desenho que tem apenas duas dimensões, isto é, comprimento e largura, todos os corpos da natureza que tem três dimensões: comprimento, largura e profundidade, desde que estes pudessem ser definidos rigorosamente. O segundo objeto é de dar a maneira de reconhecer através de uma descrição exata as formas dos corpos, e deduzir todas as verdades que resultam das suas formas e de suas posições respectivas. (MONGE, 1799, p.5).

Tais conceitos, segundo Chaves e Grimberg (2014), retrataria a ideia de projetar uma imagem tridimensional em um plano e, no segundo caso, representar uma imagem de um plano como uma figura tridimensional. Como dito, tais conceitos nortearam Poncelet nas suas definições de Geometria Projetiva, que, como dito por Auffinger e Valentim (2003), esta geometria se baseia não no mundo em que vivemos, mas sim, no mundo que vemos, ou seja, na imagem projetada por nossos olhos.

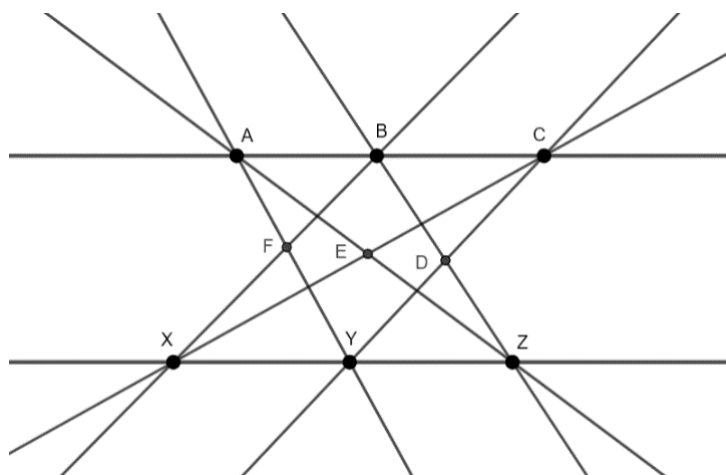
Ainda no final do século XIX, segundo Dias e Grimberg (2015 e 2019), Felix Klein (1849-1925), a partir dos estudos de Arthur Cayley (1863-1895), aprofunda o desenvolvimento da teoria dos invariantes com conexão direta aos princípios da geometria projetiva. Esse movimento estrutural culminou na formulação do célebre Programa de Erlangen (1872), no qual Klein estabeleceu um novo paradigma matemático: as diferentes geometrias passaram a ser classificadas com base nos grupos de transformações que atuam sobre o espaço e nas propriedades que permanecem invariantes sob tais transformações. Sob essa ótica, a Geometria Projetiva assumiu o papel de "geometria universal", visto que as transformações projetivas formam o grupo mais abrangente, do qual a geometria afim e a euclidiana são apenas subgrupos (casos particulares). De fato, nos estudos de Cayley ampliados e sistematizados por Klein, conclui-se que "a geometria mais elementar é a projetiva, o que quebrava o paradigma da geometria euclidiana ser a mais fundamental, de onde inclusive se fundamentava a geometria projetiva até então"(DIAS E GRIMBERG, 2019, p. 217).

Com base nas origens da Geometria Projetiva é possível analisar os estudos modernos dessa área, buscando compreender suas principais inovações e avanços. No âmbito educacional, segundo Silva (2022), a introdução de softwares de Geometria Dinâmica entra como um diferencial na representação e exploração dos conceitos de Geometria Projetiva.

3.3.1.2 Demonstrações dos teoremas Clássicos – Pappus

O Teorema de Pappus diz que "Sejam A, B e C três pontos em uma reta e sejam X, Y e Z três pontos em outra reta. Se as retas $\overleftrightarrow{AY}$, $\overleftrightarrow{BZ}$ e $\overleftrightarrow{CX}$ intersectam as retas $\overleftrightarrow{BX}$, $\overleftrightarrow{CY}$ e $\overleftrightarrow{AZ}$, respectivamente, então os três pontos de interseção são colineares" (Richter-Gebert, 2011, p. 4).

Figura 3.2 – Representação geral do Teorema de Pappus



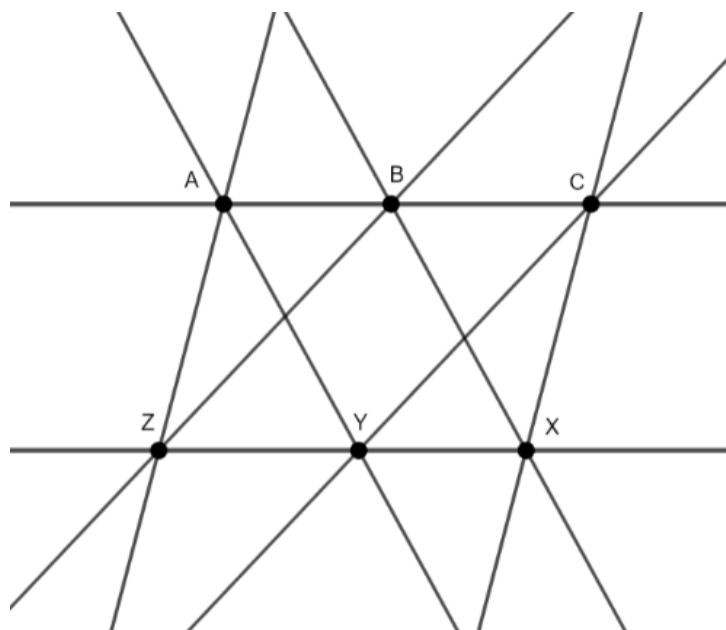
Fonte: Construção dos autores

Entretanto, existe uma situação em que o Teorema de Pappus não pode ser construído utilizando a Geometria Euclidiana como base, sendo essa situação em que as retas $\overleftrightarrow{AY} \parallel \overleftrightarrow{BX}$, $\overleftrightarrow{BZ} \parallel \overleftrightarrow{CY}$ e consequentemente $\overleftrightarrow{CX} \parallel \overleftrightarrow{AZ}$. Nessa situação não há o encontro entre as retas citadas no Teorema, não sendo assim possível haver a colinearidade dos pontos de interseção, uma vez que as retas não se intersectariam.

Essa situação, porém, não é um impeditivo quando pensado na Geometria Projetiva, pois o axioma das paralelas na Geometria Projetiva estabelece que "Seja r uma reta e A um ponto não em r . Então toda reta que incide em A intersecta r " (BARROS E ANDRADE, 2010, p. 21), assim, não existe, na Geometria Projetiva, uma situação do Teorema de Pappus onde as retas não se intersectam. Na Geometria Projetiva duas retas distintas sempre têm ao menos um ponto em comum. Retas paralelas no Plano Euclidiano, quando no Plano Projetivo, encontram-se no chamado ponto de fuga e este encontra-se sobre a linha de horizonte, linha essa que contém todos os pontos de fuga do plano em questão.

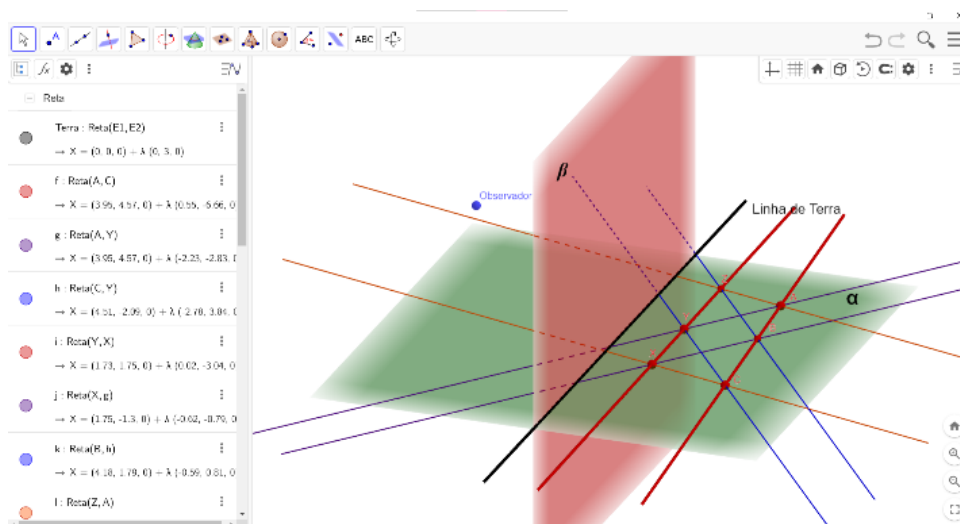
Na teoria da Geometria Euclidiana, as retas, que são as margens das estradas, são paralelas, porém os nossos olhos dizem que elas se encontram na linha do horizonte, no infinito, num ponto que, na teoria da Perspectiva, é chamado ponto de fuga. (MALTEZ, 2015)

Apresentamos na sequência de figuras abaixo as etapas de transição do caso especial das paralelas no Teorema de Pappus do Plano Euclidiano para o Plano Projetivo, para

Figura 3.3 – Teorema de Pappus – Paralelas

Fonte: Construção dos autores

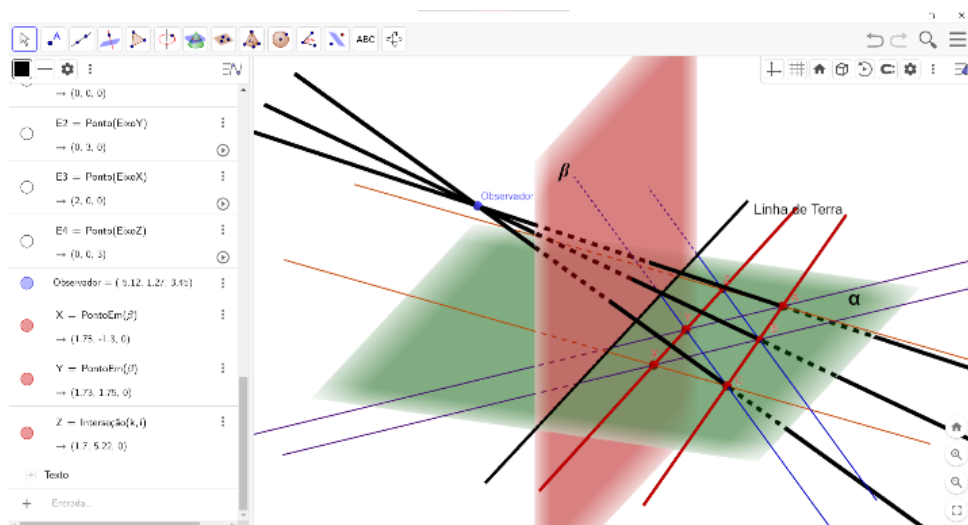
que assim seja possível perceber como, no Plano Projetivo, as paralelas se encontrariam, comprovando o que é dito no Teorema em questão.

Figura 3.4 – O caso especial das paralelas no Teorema de Pappus, representado no Plano Euclidiano.

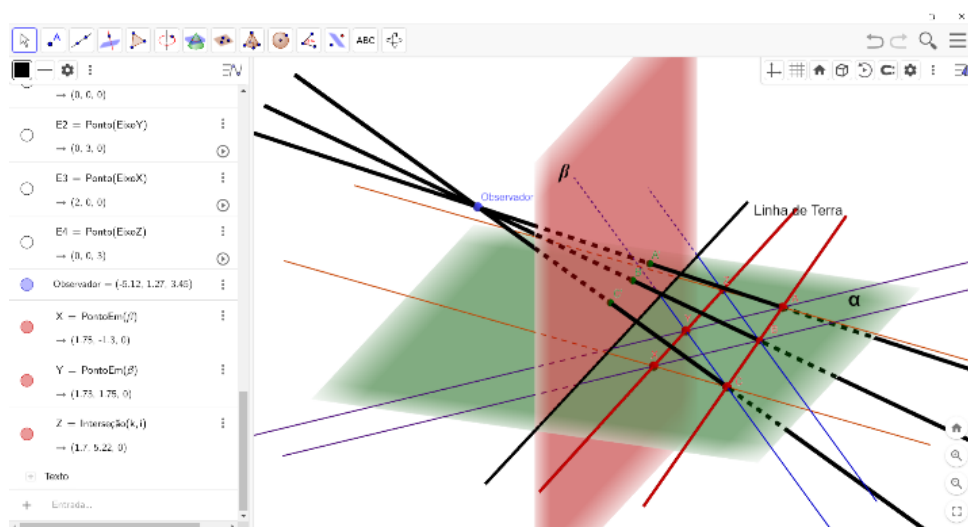
Fonte: Construção dos autores

Na Figura 3.5 inicia-se o processo de transição, criando as retas de projeção dos pontos A, B e C na figura utilizando o ponto do "Observador" como referência de projeção, elemento necessário para essa conversão.

A Figura 3.6 traz a marcação dos pontos projetivos A', B' e C', esses são os pontos no Plano Projetivo que representam suas contrapartes do Plano Euclidiano.

Figura 3.5 – Retas de projeção para os pontos A, B e C.

Fonte: Construção dos autores

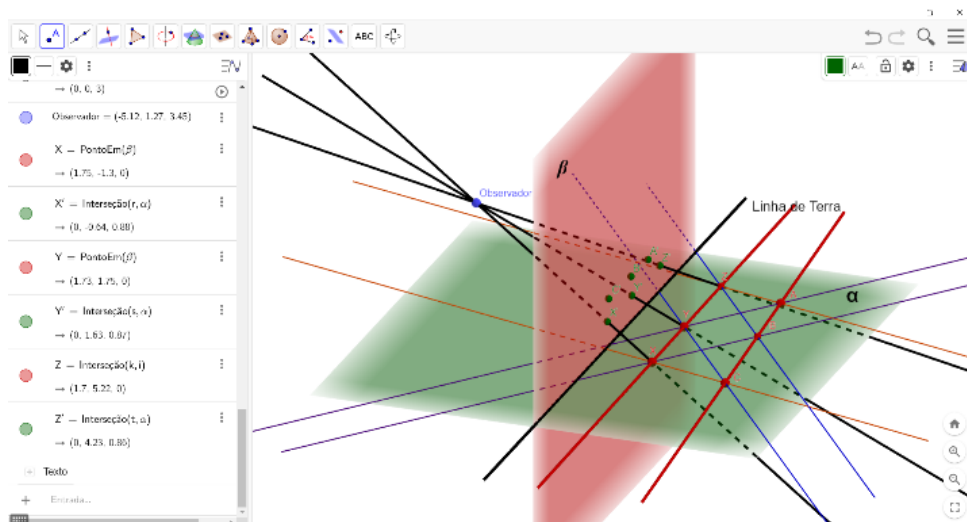
Figura 3.6 – Marcação dos pontos projetivos A', B' e C'.

Fonte: Construção dos autores

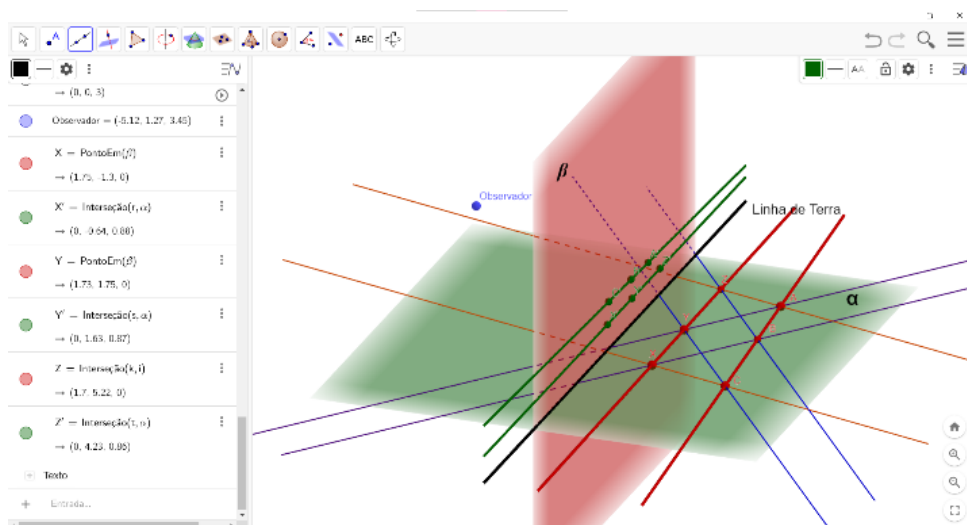
Na Figura 3.7 temos a mesma sequência de criação de pontos, sendo feita as retas que ligam o "Observador" aos pontos X, Y e Z que cruzam o Plano Projetivo assim sendo possível marcar os pontos X', Y' e Z' que são suas representações projetivas.

A Figura 3.8 traz a criação das retas que passam pelos pontos (A', B', C') e pelos pontos (X', Y', Z'), sendo as representações projetivas das retas que são a base inicial do Teorema de Pappus. Uma vez com os seis pontos e as duas retas é possível iniciar os desenhos das retas que passam pelos pontos determinados no Teorema.

Ao traçarmos o primeiro par de retas na Figura 3.9, é possível observar que as retas que no Plano Euclidiano eram paralelas, quando no Plano Projetivo encontrar-se-ão no ponto D, logo intersectam-se como já mencionado no axioma das paralelas da Geometria

Figura 3.7 – Marcação dos pontos projetivos X' , Y' e Z' .

Fonte: Construção dos autores

Figura 3.8 – Criação das retas projetivas do Teorema de Pappus.

Fonte: Construção dos autores

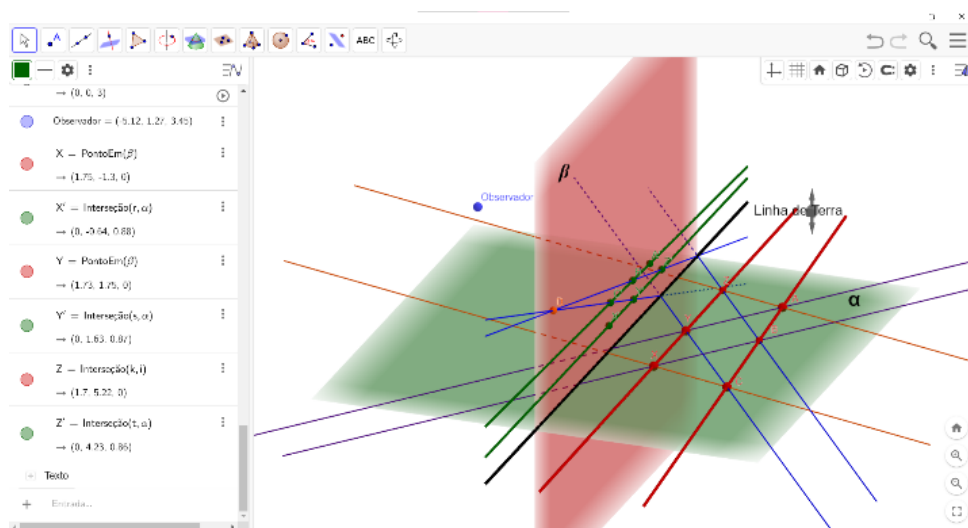
Projetiva.

Repetindo o processo para os outros pares de pontos mencionados no Teorema, obtemos o representado na Figura 3.10, onde é possível marcar os pontos E e F. Reforçando que as retas paralelas se intersectam na Geometria Projetiva.

Por fim, na Figura 3.11 é possível traçar a reta que passa pelos pontos (D,E,F) comprovando o Teorema de Pappus, tendo utilizado o software GeoGebra como meio para essa comprovação. Pelo software, ainda, é possível garantir a sua colinearidade, como veremos mais à frente.

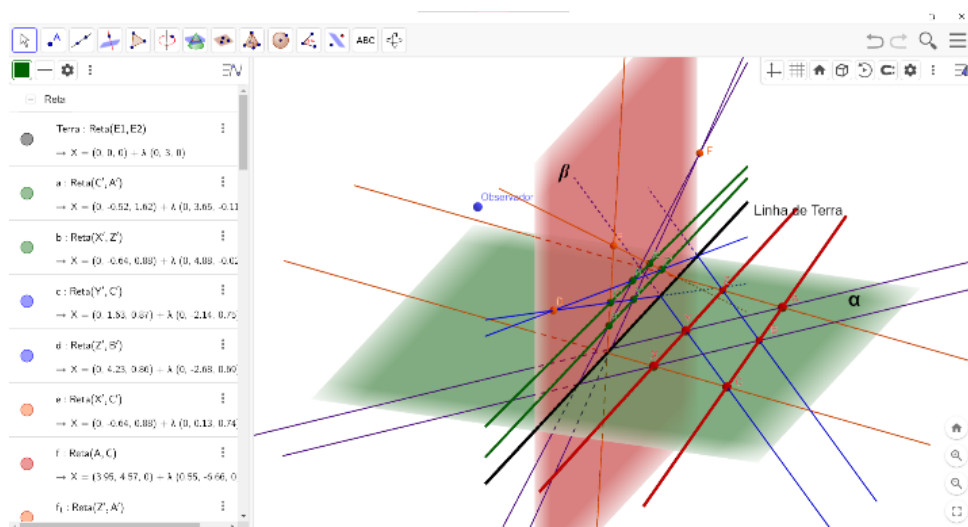
Utilizando os conceitos da perspectiva, é fácil verificar pelo software GeoGebra a situação proposta, onde o Teorema de Pappus com retas paralelas não se altera quando

Figura 3.9 – Marcação do ponto D, intersecção das retas que passam pelos pontos (B', Z') e (C', Y') .



Fonte: Construção dos autores

Figura 3.10 – Marcação dos pontos E e F no Plano Projetivo.

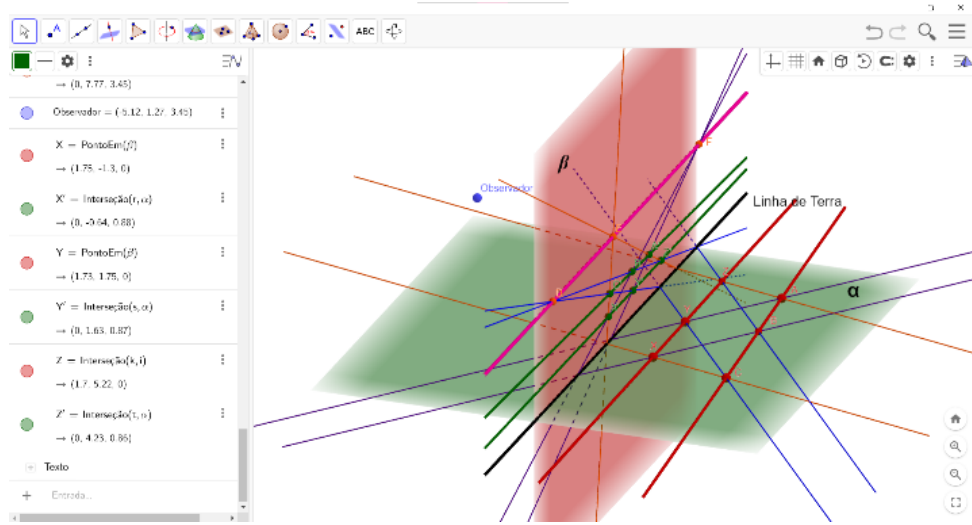


Fonte: Construção dos autores

na Geometria Projetiva. Observando a Figura 3.11 podemos ver que o Teorema que está representado no plano de base como sendo o Plano Euclidiano, é projetado no plano vertical de projeção e os seus pares de retas paralelas, representadas pelas cores azul, vermelho e verde, encontram-se nos pontos D' , E' e F' , respectivamente. Estes três pontos são colineares, como afirma o Teorema, e estão todos apoiados na linha de horizonte, pois os três são pontos de fuga das retas paralelas como dito por Maltez (2015).

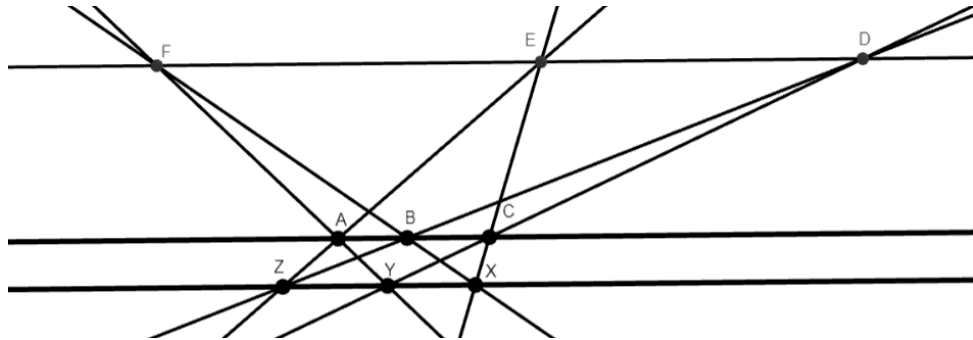
Utilizando o software GeoGebra é possível verificar a colinearidade dos pontos criados para qualquer situação utilizando a função determinante, para isso numa criação onde tem-se os pontos de intersecção das retas, nomeados D, E e F, basta utilizar o comando

Figura 3.11 – Finalização da Transição Euclidiana-Projetiva do caso das paralelas no Teorema de Pappus.



Fonte: Construção dos autores

Figura 3.12 – Teorema de Pappus – Vista do Plano Projetivo



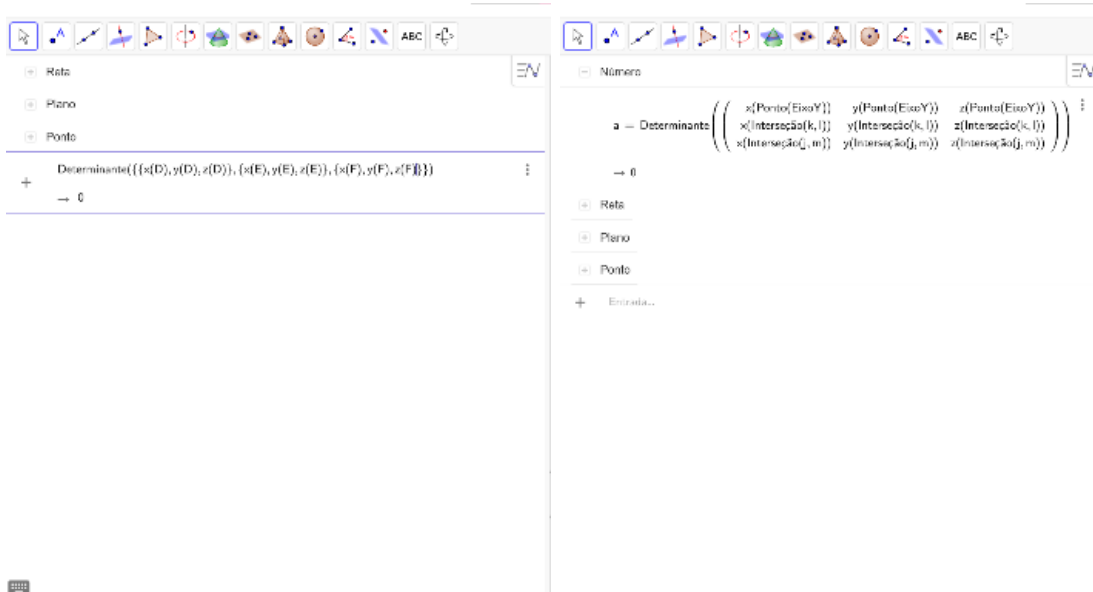
Fonte: Construção dos autores

$\text{Determinante}(\{\{x(D), y(D), z(D)\}, \{x(E), y(E), z(E)\}, \{x(F), y(F), z(F)\}\})$

E o aplicativo retornará a versão matricial com o resultado do determinante, que nesse caso, para que se possa confirmar a colinearidade dos pontos, deverá ser zero.

Para uma demonstração algébrica, utilizaremos uma prova para o Teorema de Pappus que abrange a visão projetiva, conforme vista por Richter-Gebert (2011), uma vez que os pontos do Plano Projetivo estão contidos em $\mathbb{R}^3$, tem-se que alguns axiomas permanecem verdadeiros, tal como o axioma da incidência e por consequência o cálculo da colinearidade dos pontos por meio do determinante de suas coordenadas, assim contemplaremos todas as possibilidades de posicionamento das retas citadas no Teorema.

Para essa demonstração chamaremos o ponto de interseção de $\overleftrightarrow{BZ}$ e $\overleftrightarrow{CY}$ como D , a interseção de $\overleftrightarrow{CX}$ e $\overleftrightarrow{AZ}$ como E e a interseção de $\overleftrightarrow{AY}$ e $\overleftrightarrow{BX}$ como F . Além disso precisamos considerar também que a tripla de pontos (A, X, D) não serão colineares em

Figura 3.13 – Resposta matricial do proposto no software GeoGebra

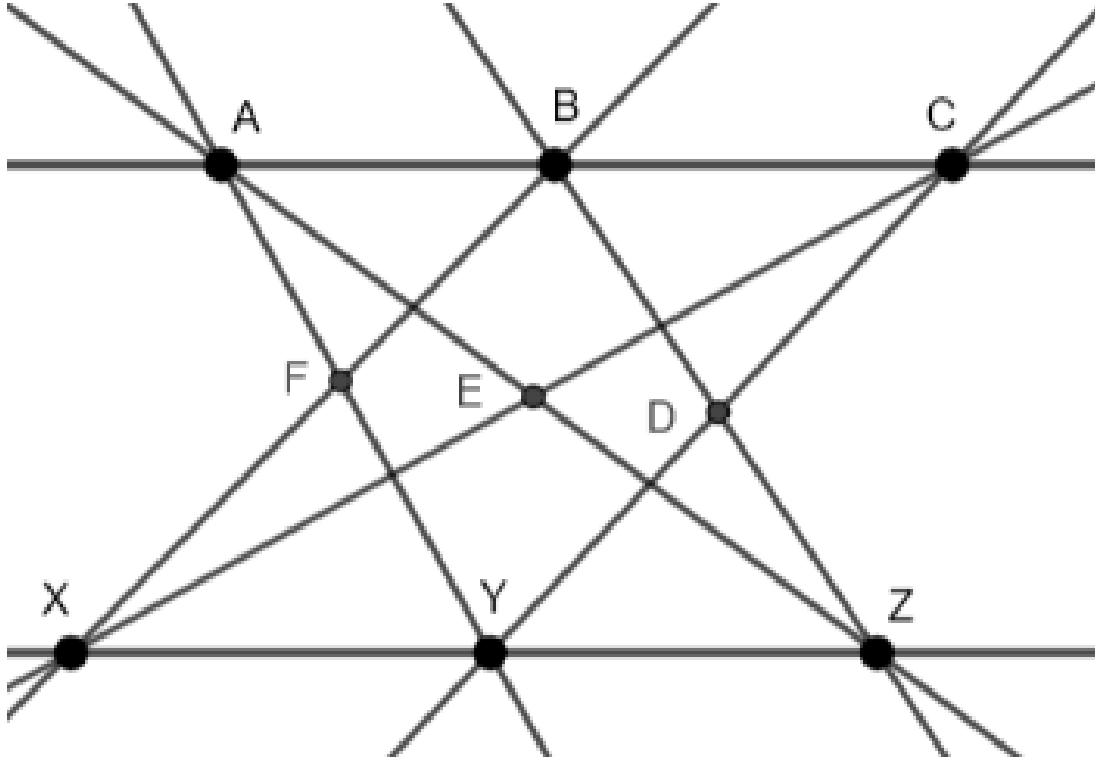
Fonte: Construção dos autores

nenhuma situação.

Assumindo que (A, X, D) não são colineares é possível assumir também uma situação em que os pontos (A, X, D) são dispostos de tal modo, sem prejudicar a construção geral, que formam um triângulo equilátero.

Agora, podemos considerar uma situação em que, alocados no espaço, os pontos (A, X, D) representam respectivamente os vetores unitários $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ respectivamente.

Uma vez que esta situação foi inserida em $\mathbb{R}^3$, cada ponto será representado por coordenadas homogêneas tridimensionais, ou seja, os pontos do Plano Euclidiano passam a ser representados no formato (x, y, z) de coordenadas. Sendo assim, três pontos P, Q e R são tidos como colineares se, e somente se, a matriz 3×3 formada pelas suas coordenadas possuir determinante zero. Abreviaremos esta determinante por $[PQR]$. Representaremos abaixo, então a estrutura matricial pretendida:

Figura 3.14 – Determinantes das coordenadas dos pontos do Teorema**Fonte:** Construção dos autores

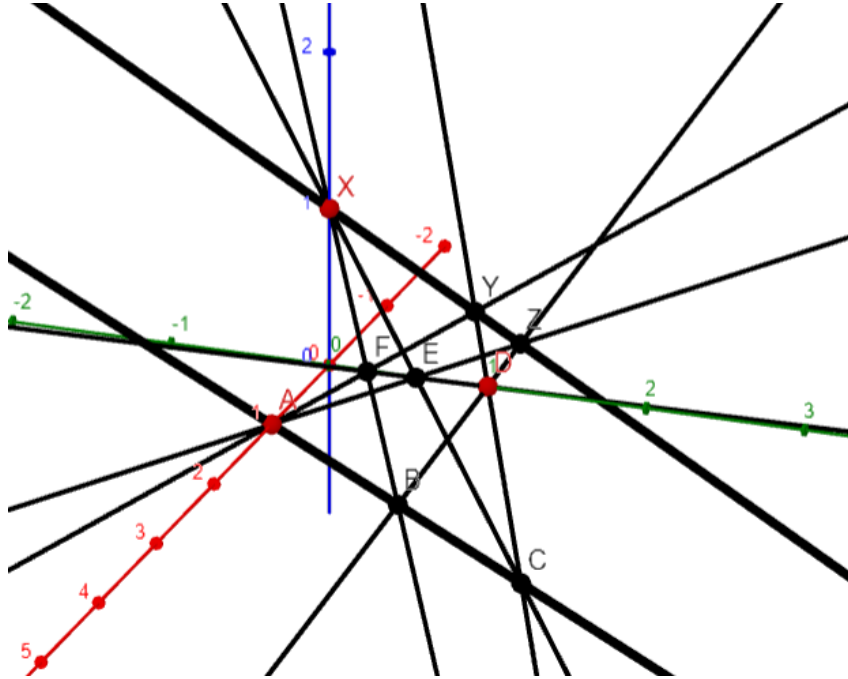
A	$1 \ 0 \ 0$	$[A, B, C] = 0 \Leftrightarrow ce = bf$	(3.1)
B	$a \ b \ c$	$[A, E, Z] = 0 \Leftrightarrow ko = ln$	
C	$d \ e \ f$	$[A, F, Y] = 0 \Leftrightarrow iq = hr$	
X	$0 \ 1 \ 0$	$[B, F, X] = 0 \Leftrightarrow ar = cp$	
Y	$g \ h \ i$	$[B, D, Z] = 0 \Leftrightarrow bj = ak$	
Z	$j \ k \ l$	$[C, E, X] = 0 \Leftrightarrow fm = do$	
D	$0 \ 0 \ 1$	$[C, D, Y] = 0 \Leftrightarrow dh = eg$	
E	$m \ n \ o$	$[X, Y, Z] = 0 \Leftrightarrow gl = ij$	
F	$p \ q \ r$	$\overline{[D, E, F]} = 0 \Leftrightarrow mp = nq$	

As letras minúsculas da matriz representam as coordenadas dos pontos restantes ainda não definidos e vão servir nessa demonstração apenas para referência dentro da disposição dos cálculos.

Com base na premissa inicial que os pontos (A, D, X) seriam não colineares e seriam pontos com base nos vetores unitários podemos ver, a partir da Figura 3.15 que os demais pontos não poderiam estar contidos em quaisquer dos eixos cartesianos uma vez que os três pontos são a base do plano onde as retas do Teorema estarão contidos, logo, os eixos cartesianos só coincidem com o plano do Teorema nos pontos supracitados, sendo assim, nenhuma de suas coordenadas poderia ser nula, pois para isso deveriam ser coincidentes

com os pontos (A,D,X) invalidando a situação proposta.

Figura 3.15 – Teorema de Pappus de acordo com as condições iniciais de demonstração



Fonte: Construção dos autores

Podemos comprovar o mesmo, a partir da tripla (C,X,D) que também não é colinear, pois caso fosse, tornaria duas retas (CDX e CEX) em coincidentes. Entretanto, o determinante formado por esses pontos resulta em

$$\begin{vmatrix} d & e & f \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = d. \quad (3.2)$$

Um argumento semelhante funciona para cada uma das outras variáveis. Ou seja, pegando três pontos que certamente, segundo o Teorema, não são colineares, sendo dois desses pontos definidos na prerrogativa primeira, pode-se obter um determinante onde o resultado será igual a qualquer uma das letras tomadas como coordenadas, assim garantindo que elas não poderão ser nulas, uma vez que isso resultaria na colinearidade dos pontos.

Tomando a tripla (A,D,X), podemos ver na Figura 3.14, que cada determinante dos conjuntos de três pontos colineares pode ser reduzido para um sub-determinante 2x2 da matriz das coordenadas. Tomando todas as equações, excetuando-se apenas a da reta formada pela tripla (D,E,F), e multiplicando todos os primeiros membros e em seguida todos os segundos membros, temos

$$\begin{aligned}
ce &= bf \\
ko &= ln \\
iq &= hr \\
ar &= cp \\
bj &= ak \\
fm &= do \\
dh &= eg \\
gl &= ij \\
\hline
ce \bullet ko \bullet iq \bullet ar \bullet bj \bullet fm \bullet dh \bullet gl &= bf \bullet ln \bullet hr \bullet cp \bullet ak \bullet do \bullet eg \bullet ij \\
abcde fghijklmoqr &= abcde fghijklno pr \\
abcde fghijkl m o q r &= abcde fghijkl n o p r \\
mq &= np
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Temos como resultado então, após os cancelamentos apropriados, que $mq = np$, nos levando de volta a colinearidade da tripla (D,E,F). Como vimos anteriormente que nenhuma das letras das coordenadas pode ser nula o processo de cancelamento, como feito, é inteiramente possível.

Assim, conclui-se que uma vez comprovada a colinearidade da tripla (D,E,F) está então demonstrado o Teorema de Pappus, sendo indiferente o posicionamento das retas e seu paralelismo no Plano Euclidiano.

Para essa demonstração foram utilizados dois critérios iniciais, um facilmente observável, que é a não-colinearidade da tripla de pontos (A,D,X) e a outra passível de contestação, que é a determinação dos pontos citados serem provenientes dos vetores unitários e formando entre si um triângulo equilátero.

3.3.1.3 Teorema de Pappus – Demonstração Geral

Quando se trata da demonstração do Teorema de Pappus, existem diversas abordagens. Barros e Andrade (2010) utilizam-se de uma abordagem utilizando a álgebra linear para a demonstração desse Teorema. Harle (s.d.), por sua vez, adota uma demonstração utilizando-se de equações paramétricas. Ceppi e Fournier (1951) utilizam uma abordagem geométrica no entendimento desse Teorema e de outros teoremas da Geometria Projetiva.

Na segunda parte dessa demonstração continuaremos com a forma abordada por Richter-Gebert (2011) pois segue a mesma linha do que já abordamos na seção 1 desse artigo. Na primeira parte da demonstração, tomamos como critérios iniciais algumas

condições específicas, sendo uma delas a condição de os pontos (A,D,X) estarem vinculados a vetores unitários distribuídos pelos eixos cartesianos.

Para a demonstração do Teorema, abdicando-se da segunda condição, é necessário utilizar as Relações de Grassmann-Plücker que estabelecem que para cinco pontos arbitrários A, B, C, D e E no Plano Projetivo a seguinte relação estabelece entre as determinantes das coordenadas homogêneas que $[ABC][ADE] - [ABD][ACE] + [ABE][ACD] = 0$.

Novamente assumiremos a não-colinearidade da tripla de pontos (A,D,X) e consideraremos o fato da tripla (A,B,C) ser colinear no nosso Teorema, assim, segundo as relações de Grassmann-Plücker temos que

$$[AXD][ABC] - [AXB][ADC] + [AXC][ADB] = 0 \quad (3.4)$$

Considerando o fato que $[ABC] = 0$, pois são colineares, temos que

$$[AXB][ADC] = [AXC][ADB] \quad (3.5)$$

Com as oito colinearidades que possuímos, de início no nosso Teorema, podemos estabelecer a sequência de equações

$$\begin{aligned} [AXD][ABC] - [AXB][ADC] + [AXC][ADB] &= 0 \Leftrightarrow [AXB][ADC] = [AXC][ADB] \\ [AXD][AYF] - [AXY][ADF] + [AXF][ADY] &= 0 \Leftrightarrow [AXY][ADF] = [AXF][ADY] \\ [AXD][AEZ] - [AXE][ADZ] + [AXZ][ADE] &= 0 \Leftrightarrow [AXE][ADZ] = [AXZ][ADE] \\ [XDA][XYZ] - [XDY][XAZ] + [XDZ][XAY] &= 0 \Leftrightarrow [XDY][XAZ] = [XDZ][XAY] \\ [XDA][XEC] - [XDE][XAC] + [XDC][XAE] &= 0 \Leftrightarrow [XDE][XAC] = [XDC][XAE] \\ [XDA][XBF] - [XDB][XAF] + [XDF][XAB] &= 0 \Leftrightarrow [XDB][XAF] = [XDF][XAB] \\ [DAX][DBZ] - [DAB][DXZ] + [DAZ][DXB] &= 0 \Leftrightarrow [DAB][DXZ] = [DAZ][DXB] \\ [DAX][DYC] - [DAY][DXC] + [DAC][DXY] &= 0 \Leftrightarrow [DAY][DXC] = [DAC][DXY] \end{aligned} \quad (3.6)$$

Tomando as equações e multiplicando todos os primeiros membros e todos os segundos membros, posteriormente cancelando termos que repetem o mesmo trio de pontos em ambos os membros, tem-se

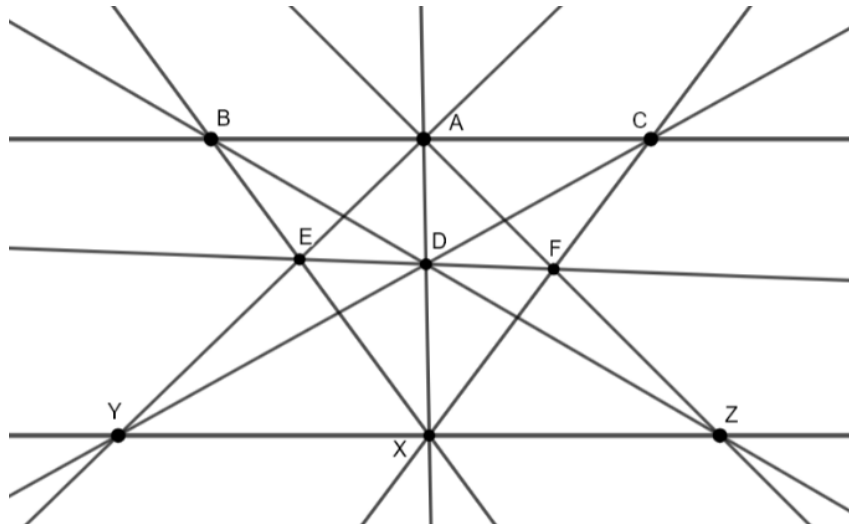
$$\begin{aligned}
& [AXB][ADC][AXY][ADF][AXE][ADZ][XDY][XAZ] \\
& [XDE][XAC][XDB][XAF][DAB][DXZ][DAY][DXC] \\
& = [AXC][ADB][AXF][ADY][AXZ][ADE][XDZ][XAY] \\
& [XDC][XAE][XDF][XAB][DAZ][DXB][DAC][DXY] \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Cancelando os termos semelhantes, sendo levado em consideração a variação de sinal nas mudanças de linhas em um determinante, restaria apenas a equação $[ADF][XDE] = [ADE][XDF]$. Que por sua vez pode ser desconstruída na forma $-[ADE][XDF] + [ADF][XDE] = 0$.

Rearranjando os termos, novamente levando em consideração a troca de linhas num determinante, temos $-[DAE][DXF] + [DAF][DXE] = 0$. Complementando com a combinação que contemplaria os cinco pontos e resultaria numa relação de Grassmann-Plücker, passando a ser $[DAX][DEF] - [DAE][DXF] + [DAF][DXE] = 0$.

Porém, para que a relação seja verdadeira, tem-se que $[DAX][DEF] = 0$, sabemos que $[DAX] \neq 0$ pois o trio de pontos (A,D,X) é não colinear de acordo com a condição inicial, logo $[DEF] = 0$, comprovando a colinearidade dos pontos, e por fim comprovando o Teorema de Pappus. É ainda possível contestar a condição inicial que afirma que o trio de pontos (A,D,X) é não-colinear, como visto na Figura 3.16.

Figura 3.16 – Teorema de Pappus com o trio de pontos (A,D,X) colineares



Fonte: Construção dos autores

Contudo, é possível observar que para esse contexto pode-se tomar o trio de pontos (B,F,Y) como condição inicial de não colinearidade, ou seja, sempre existirá ao menos um trio de pontos, sendo um ponto de cada reta e um ponto da reta de interseção, que servirá de condição inicial de partida.

3.3.1.4 Demonstrações dos teoremas Clássicos – Desargues

3.3.1.4.1 Introdução e Contexto Histórico

O Teorema de Desargues ocupa um papel fundamental na construção da Geometria Projetiva, servindo como ponte conceitual entre a intuição espacial e a formalização algébrica dessa área. Formulado por Gérard Desargues em 1639, no tratado *Brouillon Project d'une Atteinte aux Événements des Rencontres du Cône avec un Plan*, o Teorema estabelece uma condição de perspectiva entre triângulos, revelando a profundidade das relações de incidência em espaços projetivos.

Historicamente, Desargues procurava compreender propriedades que permanecem invariantes sob projeções, ideias que, séculos depois, seriam retomadas por Poncelet, Cremona e Cayley, culminando na formulação moderna da geometria projetiva. Embora sua obra tenha recebido pouca atenção em seu tempo, o Teorema que leva seu nome tornou-se a base do axioma central da geometria projetiva moderna: se dois triângulos estão em perspectiva por um ponto, então estão em perspectiva por uma reta.

O valor didático do Teorema de Desargues ultrapassa seu interesse histórico. Ele oferece uma oportunidade singular de trabalhar a visualização tridimensional e a abstração matemática em sala de aula, especialmente quando se utiliza o GeoGebra para explorar as construções projetivas. A interação dinâmica com triângulos em perspectiva permite ao aluno transitar entre o espaço euclidiano e o espaço projetivo, compreendendo como pontos e retas "no infinito" emergem naturalmente nesse novo ambiente geométrico.

Do ponto de vista teórico, o Teorema também é essencial para demonstrar a consistência do sistema projetivo e para introduzir conceitos matriciais e determinantes como ferramentas de verificação de colinearidade e concorrência. Nesta abordagem, será enfatizada a interpretação matricial e algébrica do Teorema, conforme apresentada por Barros & Andrade (2006) e Richter-Gebert (2011), complementada por construções no GeoGebra que reforçam o caráter visual defendido por David Tall (2013) em sua teoria dos três mundos da matemática: o mundo corporal, o mundo simbólico e o mundo formal.

3.3.1.4.2 Enunciado e Interpretação Geométrica

O Teorema de Desargues afirma: "Se dois triângulos estão em perspectiva por um ponto, então estão em perspectiva por uma reta. Reciprocamente, se dois triângulos estão em perspectiva por uma reta, então estão em perspectiva por um ponto."

Em termos geométricos, isso significa que, dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, se as retas AA' , BB' e CC' são concorrentes em um mesmo ponto O , então os pontos de interseção das retas correspondentes AB com $A'B'$, AC com $A'C'$ e BC com $B'C'$ são colineares em uma mesma reta r , chamada reta de Desargues.

Reciprocamente, se esses três pontos de interseção são colineares, então as retas AA' , BB' e CC' se encontram em um mesmo ponto O .

Em essência, o Teorema estabelece uma profunda dualidade entre ponto de perspectiva e reta de perspectiva, característica central da dualidade projetiva. É neste exato contexto que emerge o conceito formal de homologia, uma transformação projetiva fundamental que preserva a colinearidade e a incidência entre as figuras. Na configuração do Teorema de Desargues, o ponto de perspectiva atua formalmente como o centro de homologia, enquanto a reta que contém os pontos colineares de interseção atua como o eixo de homologia.

Articulando essa transformação com as construções visuais propostas no GeoGebra, torna-se possível compreender casos clássicos sob uma nova ótica. Por exemplo, a homotetia pode ser interpretada de forma rigorosa como um caso particular de homologia onde o eixo de homologia é uma reta imprópria (situada no infinito). Da mesma forma, a translação surge como um caso limite no contexto euclidiano, ocorrendo quando o centro de homologia se encontra no infinito e os planos de projeção são paralelos. Essa interpretação reforça a tese de que operações euclidianas consagradas são, na verdade, manifestações específicas da homologia projetiva.

3.3.1.4.3 Visualização Geométrica e Construções no GeoGebra

A exploração visual do Teorema de Desargues é essencial para compreender sua estrutura projetiva. A seguir, apresentamos uma construção detalhada em duas etapas: uma representação tridimensional (que evidencia a perspectiva por ponto) e uma representação plana (que mostra a perspectiva por reta).

3.3.1.4.4 Demonstração Matricial (Abordagem em Coordenadas Homogêneas)

Para formalizar a prova, utilizaremos coordenadas homogêneas e representações matriciais, conforme as abordagens de Barros & Andrade (2006) e Richter-Gebert (2011).

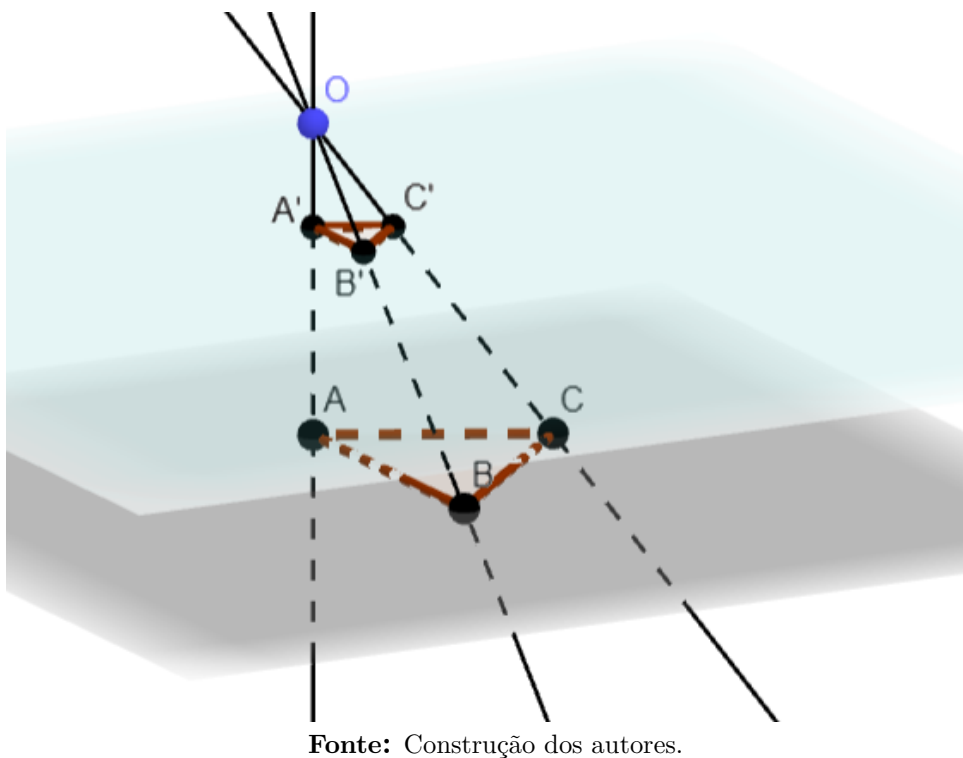
Considere os triângulos ABC e $A'B'C'$ definidos por seus vetores homogêneos:

$$\begin{aligned} A &= (a_1, a_2, a_3), & B &= (b_1, b_2, b_3), & C &= (c_1, c_2, c_3) \\ A' &= (a'_1, a'_2, a'_3), & B' &= (b'_1, b'_2, b'_3), & C' &= (c'_1, c'_2, c'_3) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Cada ponto é representado em $\mathbb{P}^2$, o plano projetivo, por um vetor não nulo de $\mathbb{R}^3$.

A reta que passa por dois pontos $P = (p_1, p_2, p_3)$ e $Q = (q_1, q_2, q_3)$ é obtida pelo produto vetorial (ou determinante com a base canônica):

Figura 3.17 – Triângulos em perspectiva por um ponto no espaço 3D



$$r_{PQ} = P \times Q = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} \quad (3.9)$$

Figura 3.18 – Perspectiva por uma reta no plano projetivo



A equação de uma reta no plano projetivo é, portanto, um vetor $r = (r_1, r_2, r_3)$ tal que $r \cdot X = 0$ para todo ponto X incidente na reta.

Para que os triângulos estejam em perspectiva por um ponto, é necessário que as retas AA' , BB' e CC' converjam em um mesmo ponto O . Algebricamente, isso equivale a afirmar que existe um vetor não nulo O tal que:

$$O = \lambda_1(A \times A') = \lambda_2(B \times B') = \lambda_3(C \times C') \quad (3.10)$$

para certos escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

Dessa forma, as três retas são concorrentes se e somente se o determinante formado pelos vetores $A \times A'$, $B \times B'$ e $C \times C'$ for nulo:

$$\det \begin{pmatrix} A \times A' \\ B \times B' \\ C \times C' \end{pmatrix} = 0 \quad (3.11)$$

Essa expressão matricial constitui uma condição algébrica de concorrência no espaço projetivo.

Os pontos de interseção das retas correspondentes AB com $A'B'$, AC com $A'C'$, e BC com $B'C'$, podem ser obtidos pelo produto vetorial dos vetores que representam essas retas:

$$\begin{aligned} P &= (A \times B) \times (A' \times B'), \\ Q &= (A \times C) \times (A' \times C'), \\ R &= (B \times C) \times (B' \times C') \end{aligned} \quad (3.12)$$

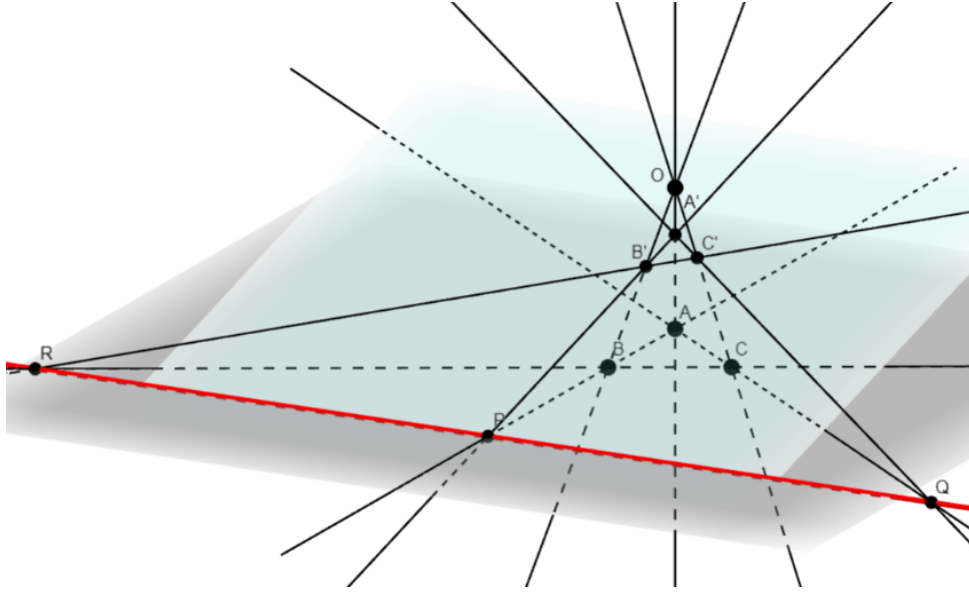
Esses três pontos são colineares se e somente se o determinante formado por seus vetores homogêneos é nulo:

$$\det \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = 0 \quad (3.13)$$

3.3.1.4.5 Demonstração Completa do Teorema de Desargues

A demonstração que segue combina a abordagem matricial (em coordenadas homogêneas) e a abordagem algébrica (via determinantes), evidenciando passo a passo como as condições de concorrência e colinearidade são equivalentes no plano projetivo.

Figura 3.19 – Representação matricial do Teorema de Desargues com vetores homogêneos



Fonte: Construção dos autores.

Sejam A, B, C e A', B', C' pontos em $\mathbb{P}^2$ representados pelos vetores homogêneos:

$$\begin{aligned} A &= (a_1, a_2, a_3), & B &= (b_1, b_2, b_3), & C &= (c_1, c_2, c_3), \\ A' &= (a'_1, a'_2, a'_3), & B' &= (b'_1, b'_2, b'_3), & C' &= (c'_1, c'_2, c'_3) \end{aligned} \quad (3.14)$$

As retas determinadas por pares de pontos são obtidas por produto vetorial:

$$r_{AB} = A \times B, \quad r_{A'B'} = A' \times B' \quad (3.15)$$

e de modo análogo para os outros pares $r_{AC}, r_{A'C'}, r_{BC}, r_{B'C'}$.

Os pontos P, Q, R de interseção entre as retas correspondentes são dados por:

$$\begin{aligned} P &= (A \times B) \times (A' \times B'), \\ Q &= (A \times C) \times (A' \times C'), \\ R &= (B \times C) \times (B' \times C') \end{aligned} \quad (3.16)$$

Cada um desses vetores pode ser expandido utilizando a propriedade do produto vetorial duplo:

$$X \times (Y \times Z) = Y(X \cdot Z) - Z(X \cdot Y) \quad (3.17)$$

Aplicando essa propriedade ao caso de P :

$$P = (A \times B) \times (A' \times B') = A'[(A \times B) \cdot B'] - B'[(A \times B) \cdot A'] \quad (3.18)$$

De forma análoga, desenvolvem-se Q e R .

Esses pontos são **colineares** se o determinante a seguir for nulo:

$$\det \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = 0 \quad (3.19)$$

Por outro lado, as retas AA' , BB' , CC' são concorrentes em um mesmo ponto O se e somente se:

$$\det \begin{pmatrix} A \times A' \\ B \times B' \\ C \times C' \end{pmatrix} = 0 \quad (3.20)$$

A partir das propriedades multilineares do determinante e das identidades de Grassmann–Plücker, mostra-se que essas duas condições são equivalentes.

A equivalência entre as duas condições é o cerne do Teorema de Desargues. Desenvolvamos explicitamente a condição de concorrência:

$$\det \begin{pmatrix} A \times A' \\ B \times B' \\ C \times C' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_2a'_3 - a_3a'_2 & a_3a'_1 - a_1a'_3 & a_1a'_2 - a_2a'_1 \\ b_2b'_3 - b_3b'_2 & b_3b'_1 - b_1b'_3 & b_1b'_2 - b_2b'_1 \\ c_2c'_3 - c_3c'_2 & c_3c'_1 - c_1c'_3 & c_1c'_2 - c_2c'_1 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Expansões de cada coluna resultam em expressões simétricas equivalentes às determinantes de colinearidade de P, Q, R . Seguindo o desenvolvimento completo, chegamos a:

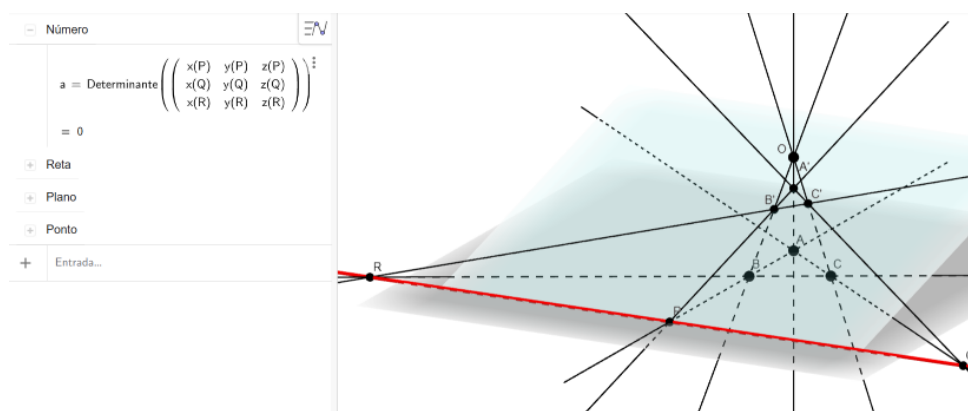
$$\det(A \times A', B \times B', C \times C') = k \cdot \det(P, Q, R) \quad (3.22)$$

onde k é um escalar não nulo que depende da escolha das coordenadas homogêneas. Portanto, a nulidade de um determinante implica a nulidade do outro, provando a equivalência entre as condições.

3.3.1.4.6 Demonstração Sintética e Interpretação Histórica

O texto original de Gérard Desargues (1639) descreve o resultado de forma puramente geométrica, em linguagem pré-analítica.

Figura 3.20 – Equivalência matricial entre concorrência e colinearidade no Teorema de Desargues



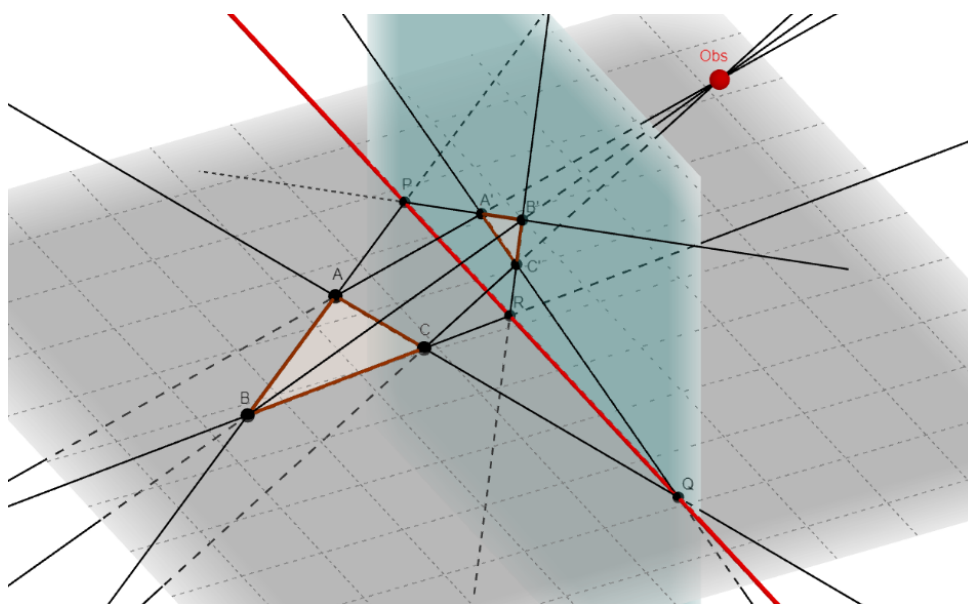
Fonte: Construção dos autores.

No *Brouillon Project*, Desargues formula o Teorema como uma relação entre triângulos em perspectiva por um ponto e por uma linha, em termos de "diedros" e "conexões cônicas".

Em tradução livre: "Quando dois triângulos estão colocados de modo que as linhas que unem seus vértices correspondentes passam por um mesmo ponto, então os pontos de interseção de seus lados correspondentes alinham-se sobre uma mesma reta."

A versão moderna apresentada acima mostra que Desargues, ao enunciar tal resultado, antecipou o conceito de invariância projetiva, algo que só seria plenamente formalizado dois séculos depois.

Figura 3.21 – Interpretação histórica do Teorema segundo o Brouillon Project (1639) na TEP.



Fonte: Elaboração dos autores.

3.3.1.5 Fundamentos da Geometria Projetiva na Obra *Geometry* de Brannan, Esplen e Gray

A obra *Geometry* de Brannan, Esplen e Gray (1999) é uma referência fundamental no ensino e na pesquisa em geometria moderna, oferecendo uma abordagem rigorosa e abrangente das principais vertentes geométricas, entre elas a Geometria Euclidiana, a Geometria Projetiva e a Geometria Hiperbólica. Sua contribuição é especialmente relevante para este trabalho, pois fornece as ferramentas conceituais e formais para o entendimento das construções geométricas que serão desenvolvidas, além de propor um olhar articulado entre as diferentes tradições geométricas.

3.3.1.5.1 Inter-relações entre Geometria Euclidiana e Projetiva

Brannan et al. (1999) tratam a Geometria Projetiva como uma extensão da Geometria Euclidiana, partindo de uma base axiomática clara e enfatizando a importância dos conceitos de incidência, colinearidade e dualidade. A Geometria Projetiva, nesse contexto, é apresentada como uma estrutura mais geral, capaz de englobar a geometria clássica ao considerar pontos e linhas no infinito. Os autores destacam que:

"Projective geometry is a natural enlargement of Euclidean geometry, where the concept of parallelism is replaced by the idea of intersection at infinity"(Brannan et al., 1999, p. 329).

Essa perspectiva é essencial para a presente pesquisa, pois permite reinterpretar propriedades conhecidas da Geometria Euclidiana sob uma ótica projetiva, favorecendo uma abordagem mais robusta e flexível nas construções geométricas com o uso de softwares como o GeoGebra.

3.3.1.5.2 Princípios Fundamentais e Modelos

O livro apresenta detalhadamente os modelos de planos projetivos, com ênfase nos princípios de dualidade e nos teoremas clássicos, como os de Desargues e Pappus, destacando seu papel estruturador dentro da teoria projetiva. Um dos aspectos centrais abordados é o uso de coordenadas homogêneas, que permite representar pontos e linhas de forma algébrica em um espaço projetivo, facilitando o estudo de transformações e interseções.

Brannan et al. explicam que o uso de coordenadas homogêneas fornece uma ponte direta entre a Geometria Projetiva e a Álgebra Linear:

"Projective transformations correspond to linear transformations of homogeneous coordinates. This connection brings powerful tools from linear algebra into geometry"(Brannan et al., 1999, p. 336).

Esta integração é fundamental para a modelagem computacional das construções geométricas que serão utilizadas na presente pesquisa, já que permite a aplicação de algoritmos baseados em transformações lineares para a manipulação de figuras projetivas em ambiente digital.

3.3.1.5.3 Aplicações Didáticas e Computacionais

A abordagem de Brannan et al. também valoriza a dimensão didática da Geometria Projetiva, propondo exercícios e construções que podem ser diretamente exploradas com o apoio de tecnologias digitais. Isso reforça a proposta desta tese ao integrar práticas experimentais no ensino da geometria, com base em softwares como o GeoGebra, que implementam princípios da Geometria Projetiva através de ferramentas de visualização e manipulação de objetos geométricos.

A articulação entre os conceitos teóricos apresentados na obra e os recursos computacionais utilizados na pesquisa proporciona uma base sólida para o desenvolvimento de situações didáticas baseadas na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau, permitindo uma exploração ativa dos conceitos geométricos por parte dos alunos.

3.3.1.5.4 Síntese e Contribuições para a Pesquisa

A adoção da obra *Geometry* de Brannan, Esplen e Gray como referencial teórico oferece diversos benefícios à pesquisa:

- Fundamento rigoroso e contemporâneo da Geometria Projetiva;
- Integração com conceitos da Geometria Euclidiana, facilitando a transição entre abordagens;
- Adoção de ferramentas algébricas (como coordenadas homogêneas) para modelagem e transformação de figuras;
- Relevância didática para a mediação pedagógica com o uso de tecnologias digitais.

Essas contribuições convergem para o objetivo central da tese, que é promover uma compreensão profunda da Geometria através de construções fundamentadas teoricamente e apoiadas por ferramentas digitais.

3.3.1.6 Geometria Projetiva na Educação

No início do século XX, temos o matemático Oswald Veblen (1880-1960) que apresenta seu estudo axiomático sobre Geometria Projetiva. Em seu livro, Veblen (1904) apresenta um estudo minucioso sobre os axiomas que fundamentam a Geometria Projetiva

e realiza as demonstrações que julga possíveis, dado o espaço físico do livro, e resume o que seria uma visão do seu estudo dos trabalhos de Felix Klein.

Em 1967, Achilles Bassi (1907-1973), publicou seu livro *Elementos da Geometria Projetiva*, que segundo ele era um aglomerado de apostilas do curso de Geometria Projetiva que ministrava na Escola de Engenharia de São Carlos e de outros cursos ministrados posteriormente. Em seu livro, Bassi (1967) apresenta detalhadamente um estudo sobre Geometria Projetiva já voltado para o âmbito escolar, no intuito de ensinar seus alunos sobre o tema, tendo suprimido alguns tópicos que julgou não necessários para alunos do curso de engenharia.

Bassi acreditava que era mais importante introduzir os conceitos básicos de Geometria Projetiva como uma continuidade de conceitos já estabelecidos da Geometria Elementar do que de um modo completamente abstrato. Assim, ele acreditava que o conhecimento viria a surgir de modo mais natural e seria possível compreender a evolução da ciência e do pensamento matemático.

A introdução de temas ou conceitos por meio de um método histórico, à Achille Bassi, era também defendida por vários autores desde a virada do século XIX para o XX. Acreditavam eles que o estudo de disciplinas científicas deveria seguir um método historicamente orientado. (Silva, 2013, p. 4022)

Com base na análise de Silva (2013) da obra de Achilles Bassi, é possível perceber a transição do estudo de Geometria Projetiva, focando para uma abordagem histórica e educacional, migrando do estudo puramente matemático e abstrato. Bassi julgava importante a adequação do conhecimento matemático ao contexto do estudo do aluno e em sua compreensão da natureza do tema estudado.

Oliveira (2020) apresenta um resumo histórico do estudo de geometria no Brasil, explorando as características norteadoras da estrutura de conteúdos a serem abordados na educação, tendo em sua origem a aplicação prática militar em acordo com os períodos de guerra passados durante a formação do ensino. Os primeiros livros de matemática eram dedicados aos conhecimentos necessários aos artilheiros e bombeiros, por suas funções demandarem o conhecimento de cálculo e geometria.

Os primeiros estudos de geometria se deram pelos ensinamentos de desenho técnico e geométrico, ainda em caráter de reprodução, sem haver a necessidade de se estudar as relações e propriedades geométricas que pautavam essas técnicas. Nas modificações que ocorreram ao passar das décadas, Valente (2000) aponta que os conteúdos de matemática foram pautados mais nos padrões adotados internacionalmente do que nos avanços históricos, econômicos e sociais do país, tornando, assim, o ensino menos democrático, uma vez que este não foi pensado na necessidade da sociedade brasileira.

Para um aluno do ensino básico brasileiro, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (2018), o estudo de geometria recai majoritariamente sobre a Geometria Euclidiana, focando no estudo de figuras planas e espaciais. É apenas no 9º ano que o aluno se depara com o estudo de figuras ortogonais com foco no estudo de perspectiva, sendo esta a única característica da Geometria Projetiva que é estudada, exclusivamente por se tratar de um campo mais aplicável.

Quando se trata da forma de estudar a geometria, ainda é muito comum o uso de uma representação plana para todas as formas de geometria, plana ou espacial. Ainda que o acesso aos softwares seja facilitado pela gratuidade e possibilidades de uso (computadores e celulares), o seu trabalho no ensino ainda é restrito, ainda mais quando se objetiva a relação de modelos bi e tridimensionais em correlação, como afirmam Sousa et al. (2021).

Considerando o aspecto de aplicação, é possível entender a importância da visualização, tendo aí o papel do software de geometria dinâmica e sua importância na compreensão dos elementos e propriedades da Geometria Projetiva.

3.3.2 A História da Geometria Projetiva: Poncelet e a Transição entre as Geometrias

3.3.2.1 A Transição das Geometrias: Do Euclidiano ao Projetivo

A Geometria Projetiva emergiu como uma resposta à necessidade de compreender as propriedades das figuras que permanecem invariantes sob projeções. Essa nova abordagem contrastava com a Geometria Euclidiana, que se baseava em medidas e ângulos. A transição entre essas geometrias foi marcada por uma mudança de foco: da métrica para a incidência e a posição relativa dos elementos geométricos. Em sua essência, essa transição metodológica passa pelo abandono do compasso em favor do uso exclusivo da régua não metrificada, consolidando a chamada geometria da régua. É precisamente essa mudança de paradigma instrumental que viabiliza o abandono do Quinto Postulado de Euclides, uma vez que a métrica e o paralelismo perdem o sentido, dando lugar a um espaço estrutural onde todas as retas coplanares necessariamente se encontram.

Jean-Victor Poncelet (1788–1867) desempenhou um papel crucial nessa transição. Durante seu cativeiro na Rússia, após a campanha de Napoleão, Poncelet refletiu profundamente sobre os fundamentos da geometria. Em 1822, publicou o *Traité des propriétés projectives des figures*, no qual propôs uma abordagem sintética para a Geometria Projetiva, enfatizando propriedades invariantes sob projeções e introduzindo conceitos como pontos e linhas no infinito.

Poncelet argumentava que a Geometria Projetiva deveria ser considerada uma extensão natural da Geometria Euclidiana, capaz de unificar diversas áreas da matemática sob uma estrutura comum. Essa visão foi compartilhada por outros matemáticos da época,

que buscavam uma geometria mais geral e abrangente.

3.3.2.2 Os Tratados de Poncelet sobre a Geometria Projetiva

O *Traité des propriétés projectives des figures* de Poncelet é uma obra seminal que estabeleceu as bases da Geometria Projetiva moderna. Nele, Poncelet introduziu conceitos fundamentais, como:

- **Pontos e linhas no infinito:** elementos que permitem tratar casos degenerados e unificar propriedades de figuras.
- **Dualidade:** princípio que estabelece uma correspondência entre pontos e linhas, permitindo derivar teoremas duais.
- **Transformações projetivas:** mapeamentos que preservam a incidência e a colinearidade, fundamentais para a análise de figuras geométricas.

Além disso, Poncelet sistematizou e formalizou o conceito de homologia, uma ferramenta poderosa na análise de figuras geométricas. Formalmente, a homologia é definida por um centro de projeção O e um eixo fixo (ou eixo de homologia), estabelecendo uma correspondência que preserva a colinearidade e a incidência entre os elementos de duas figuras. A riqueza dessa transformação reside em sua capacidade de generalizar operações clássicas sob uma ótica unificada: quando analisada no espaço, se os planos de projeção forem paralelos e o centro O for um ponto finito, a homologia manifesta-se no plano como uma homotetia; por outro lado, se os planos forem paralelos, mas o centro de projeção O estiver situado no infinito (um ponto impróprio), a transformação resultante atuará como uma translação. É fundamental ressaltar, contudo, que as raízes e intuições primárias para esse conceito não nasceram em um vácuo histórico, mas já se faziam presentes e fundamentavam os trabalhos pioneiros de Girard Desargues (1639) e Philippe de La Hire.

3.3.2.3 Referências Fundamentais na Obra de Poncelet

Poncelet reconheceu a importância dos trabalhos de diversos matemáticos que o precederam e cujas ideias influenciaram profundamente o desenvolvimento da Geometria Projetiva:

- **Lazare Carnot (1753–1823):** em sua *Géométrie de position*, Carnot explorou as propriedades das figuras geométricas independentemente de medidas, enfatizando relações de posição e incidência. Sua teoria dos transversais foi particularmente influente.

- **François-Joseph Servois (1767–1847)**: colaborador de Carnot, Servois contribuiu para a formalização da teoria dos transversais e para a disseminação das ideias de Carnot na comunidade matemática francesa.
- **Gaspard Monge (1746–1818)**: fundador da Geometria Descritiva, Monge desenvolveu métodos para representar objetos tridimensionais em duas dimensões, influenciando diretamente a abordagem projetiva de Poncelet.
- **Charles Julien Brianchon (1783–1864)**: conhecido pelo Teorema de Brianchon, que estabelece uma relação dual ao Teorema de Pascal, Brianchon aplicou a teoria dos transversais de Carnot às seções cônicas, enriquecendo a Geometria Projetiva.
- **Girard Desargues (1591–1661)**: precursor da Geometria Projetiva, Desargues introduziu conceitos fundamentais como o Teorema de Desargues, que estabelece condições para a colinearidade de pontos em figuras projetivas, e assentou, em seu *Brouillon Project* (1639), as bases conceituais intuitivas que mais tarde dariam origem à homologia.
- **Philippe de La Hire (1640–1718)**: contribuiu para a sistematização da Geometria Projetiva, estudando propriedades de conicidades e desenvolvendo métodos para sua representação, ampliando as ideias de Desargues e fornecendo o substrato geométrico para as futuras transformações homológicas de Poncelet.
- **Michel Chasles (1793–1880)**: historiador e matemático, Chasles resgatou e promoveu os trabalhos de Desargues, além de contribuir para a formalização da Geometria Projetiva e sua integração ao corpo principal da matemática.

3.3.2.4 Contribuições de Autores Nacionais e Internacionais

A Geometria Projetiva continuou a evoluir com as contribuições de diversos matemáticos ao longo do século XIX e início do século XX:

- **Jakob Steiner (1796–1863)**: desenvolveu a abordagem sintética da Geometria Projetiva, enfatizando construções puramente geométricas sem o uso de coordenadas.
- **Karl von Staudt (1798–1867)**: introduziu uma fundamentação puramente geométrica para a Geometria Projetiva, sem recorrer à álgebra, estabelecendo uma base axiomática para a disciplina.
- **Felix Klein (1849–1925)**: através do Programa de Erlangen, Klein classificou as geometrias com base em seus grupos de simetria, posicionando a Geometria Projetiva como uma das mais gerais.

- **Hermann Grassmann (1809–1877)**: desenvolveu a álgebra exterior, que se tornou uma ferramenta poderosa na representação de conceitos projetivos.
- **August Ferdinand Möbius (1790–1868)**: introduziu o conceito de coordenadas homogêneas, facilitando a representação algébrica de transformações projetivas.
- **Coxeter, H. S. M. (1907–2003)**: autor de obras fundamentais sobre Geometria Projetiva, Coxeter sistematizou e divulgou amplamente os conceitos da disciplina, tornando-os acessíveis a uma audiência mais ampla.

No contexto brasileiro, pesquisadores como Ubiratan D'Ambrosio e José Francisco da Rocha contribuíram para a disseminação e o ensino da Geometria Projetiva, destacando sua importância na formação matemática e na compreensão de conceitos geométricos avançados.

3.3.2.5 René Taton e a Revalorização Histórica da Obra de Poncelet

René Taton (1915–2004), renomado historiador francês da ciência, desempenhou papel importante na reinterpretação histórica da obra de Jean-Victor Poncelet. Em seus escritos, Taton destacou a relevância de Poncelet não apenas como matemático, mas como figura central na consolidação de uma nova abordagem geométrica no século XIX. Sua análise é essencial para compreender como a Geometria Projetiva se insere num contexto mais amplo de transformações epistemológicas na matemática e na ciência.

Segundo Taton (1951), a importância de Poncelet reside em sua capacidade de propor uma síntese entre a geometria sintética herdada dos antigos e as exigências modernas de generalidade e abstração:

"A originalidade do pensamento de Poncelet consiste na elaboração de uma teoria geométrica capaz de preservar a intuição e a construção visual, ao mesmo tempo em que amplia, pela via projetiva, o alcance e a generalidade das proposições" (Taton, 1951, p. 103).

Taton também foi um dos primeiros historiadores a reconhecer o valor filosófico das concepções de Poncelet. Para ele, a ideia de prolongamento das figuras até o infinito, tão central na Geometria Projetiva, representava não apenas uma inovação técnica, mas uma mudança de paradigma na forma de conceber os objetos matemáticos. Esse tipo de ruptura, segundo Taton, marca o início de uma nova racionalidade matemática, onde a visualização e a construção intuitiva ainda têm lugar, mas passam a operar em um plano mais abstrato.

Em seu *Ensaio de História do Pensamento Científico* (*Histoire générale des sciences*, 1962), Taton contextualiza a obra de Poncelet em meio às tensões entre a matemática aplicada e a matemática pura, entre a tradição euclidiana e as exigências de generalidade

impostas pela ciência moderna. Ele ressalta ainda que a permanência do pensamento geométrico nas aplicações de engenharia e mecânica, como no caso da polêmica sobre os trabalhos de Poncelet em balística e resistência dos materiais, evidencia a versatilidade do autor como cientista e professor.

Nas palavras de Taton:

"Poncelet representa uma das figuras de transição mais ricas da história das matemáticas modernas: sua obra é simultaneamente herdeira do pensamento geométrico clássico e precursora de uma nova geometria, formal, relacional e projetiva" (Taton, 1962, p. 415).

Além disso, Taton destacou a influência dos tratados de Poncelet na formação científica francesa, especialmente na École Polytechnique, ressaltando a importância didática de sua obra, que conciliava rigor formal com acessibilidade intuitiva. O impacto pedagógico de seus escritos, segundo Taton, ajudou a moldar uma geração de matemáticos e engenheiros que dariam continuidade à pesquisa geométrica no século XIX.

Assim, o trabalho historiográfico de René Taton é fundamental para compreender a centralidade de Poncelet na história da matemática. Sua abordagem fornece as bases para uma leitura mais abrangente, que vai além dos resultados matemáticos e enfoca também os aspectos culturais, filosóficos e didáticos da Geometria Projetiva.

3.3.3 A Geometria Projetiva em *Mathematics and Its History* de John Stillwell

A obra *Mathematics and Its History*, de John Stillwell (2002), é uma das mais influentes na apresentação integrada da história da matemática com seus conteúdos técnicos. Nesse livro, Stillwell oferece uma abordagem cronológica e conceitual das principais ideias matemáticas, revelando as interconexões entre os diversos campos e enfatizando como o desenvolvimento histórico da matemática reflete avanços tanto conceituais quanto práticos. No contexto da Geometria Projetiva, o autor dedica uma atenção especial à sua origem e consolidação, abordando seus vínculos com a Álgebra, com a Geometria Euclidiana e com a emergência da modernidade matemática.

3.3.3.1 Origens e Racionalidade da Geometria Projetiva

Stillwell apresenta a Geometria Projetiva como uma das respostas mais inovadoras às limitações da Geometria Euclidiana, especialmente no que diz respeito às exceções causadas pelo conceito de paralelismo. A introdução dos pontos no infinito e a ideia de tratar retas paralelas como concorrentes no plano projetivo são descritas como passos cruciais na ampliação da noção de espaço geométrico:

"Projective geometry arose from the desire to remove the exceptional status of parallel lines in Euclidean geometry, by treating them as intersecting at infinity" (Stillwell, 2002, p. 131).

Essa reinterpretação dos conceitos geométricos permite generalizar os resultados e criar uma teoria mais coesa e simétrica, uma característica fundamental para a pesquisa atual, que trabalha com construções geométricas digitais que requerem flexibilidade algébrica e conceitual.

3.3.3.2 Conexões com Álgebra e Transformações

Um dos aspectos mais relevantes da análise de Stillwell é a interligação entre a Geometria Projetiva e a Álgebra Linear, que surge a partir do desenvolvimento das coordenadas homogêneas e da teoria das transformações projetivas. A abordagem histórica do autor mostra como a Geometria Projetiva antecipou conceitos que se tornariam fundamentais na Álgebra Moderna:

"The algebraic treatment of projective geometry, using homogeneous coordinates and linear transformations, unified geometry with algebra in a way not seen before the 19th century" (Stillwell, 2002, p. 145).

Essa perspectiva é particularmente pertinente para o uso do GeoGebra na pesquisa, uma vez que os fundamentos computacionais do software são construídos sobre tais conceitos. O uso de transformações projetivas no ambiente digital demanda a compreensão de operações lineares e de estruturas algébricas subjacentes às figuras geométricas, tal como defendido na obra de Stillwell.

3.3.3.3 Referências Históricas Fundamentais

Stillwell também apresenta os principais nomes envolvidos no desenvolvimento da Geometria Projetiva, como Desargues, Pascal, Poncelet, Brianchon e Chasles, destacando a maneira como suas ideias foram absorvidas e posteriormente formalizadas dentro da estrutura matemática moderna. Essa abordagem permite reconhecer o papel da Geometria Projetiva como elemento central da transição do pensamento geométrico clássico para uma matemática mais abstrata e formalizada.

Para a presente pesquisa, esse panorama histórico é crucial, pois oferece o contexto necessário para compreender as escolhas conceituais e metodológicas associadas à utilização da Geometria Projetiva como ferramenta didática e investigativa.

3.3.3.4 Valor Epistemológico e Didático

A clareza com que Stillwell articula história e conceito contribui também para o aprofundamento da dimensão didática da pesquisa. Ao apresentar a Geometria Projetiva

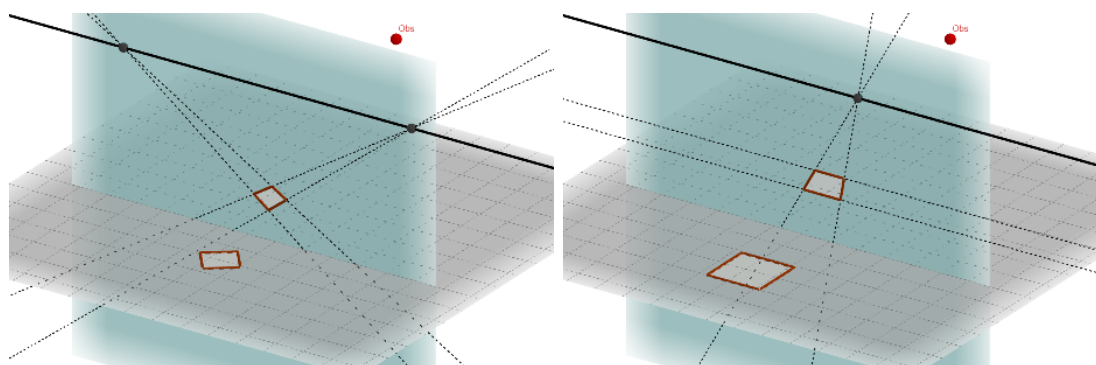
como um processo histórico de generalização conceitual, o autor oferece elementos que podem ser explorados em sala de aula para promover uma compreensão mais significativa da geometria e de sua evolução. Isso está em consonância com os princípios da Teoria das Situações Didáticas, na qual a construção do saber matemático pelo aluno é favorecida por situações que reconstituem, em alguma medida, os desafios enfrentados na história da ciência.

3.3.4 Transição Euclidiana-Projetiva

Chegamos então ao que seria a Transição Euclidiana-Projetiva (TEP) objeto do nosso estudo. Chamamos de TEP o ambiente gerado a partir de um espaço tridimensional com planos concorrentes, sendo um o Plano Euclidiano e o outro o Plano Projetivo, onde é possível observar a transição dos elementos de um plano ao outro por meio da projeção a partir de um ponto externo a estes, tornando possível analisar a conversão das características dos elementos geométricos ao serem convertidos de um modelo geométrico para o outro.

A partir deste modelo de visualização é possível trabalhar por exemplo com a ideia de perspectiva ao realizar a projeção de um quadrado, conforme a Figura 3.22, é possível perceber que com base na posição do quadrado no Plano Euclidiano, sua contraparte no Plano Projetivo assume uma nova forma, esta possuindo um número distinto de pontos de fuga dependendo do seu posicionamento em relação à linha de terra.

Figura 3.22 – Pontos de fuga de um quadrado projetado com base em seu posicionamento no Plano Euclidiano.

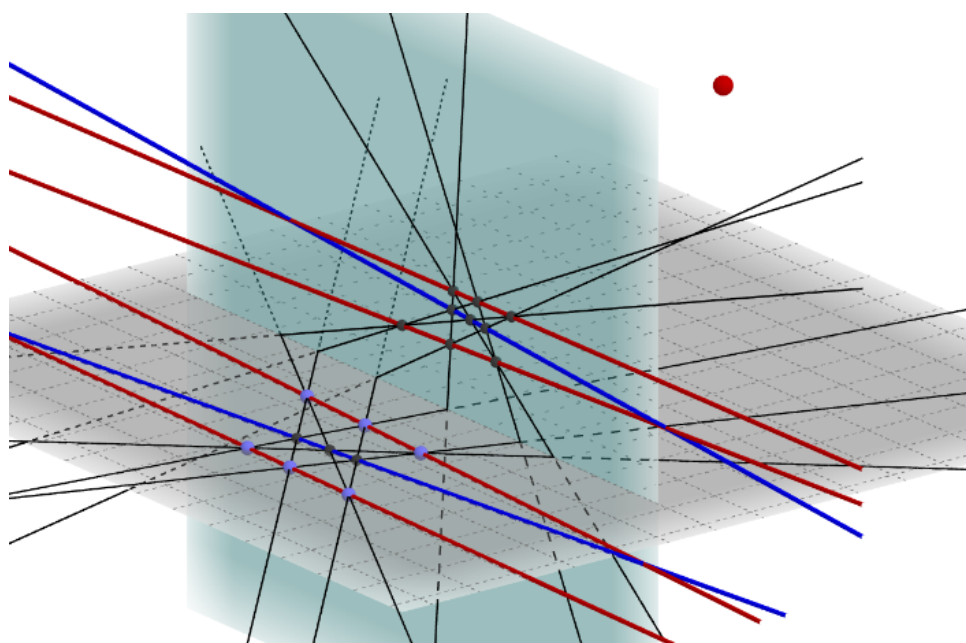


Fonte: Elaborado pelos autores.

A Transição Euclidiana-Projetiva (TEP) é moldada com o objetivo de não ser apenas um recorte pontual de uma projeção, mas um ambiente de manipulação de elementos em cenários geométricos distintos. A TEP busca permitir a realização de construções em ambos os planos sem haver a necessidade de uma nova projeção para cada instante de análise das construções.

Com este modelo de visualização é possível, por exemplo, trabalhar com teoremas geométricos que seriam limitados na Geometria Euclidiana Plana, tais como o Teorema de Pappus, sem realizar uma nova construção, pois no momento em que se depara com a limitação do Teorema na Geometria Euclidiana seria possível estudar sua contraparte Projetiva na mesma estrutura, como visto na Figura 3.23. Assim, é possível, por meio da TEP, trabalhar construções geométricas em duas geometrias diferentes em um único ambiente tridimensional.

Figura 3.23 – Construção do Teorema de Pappus sob a ótica da Transição Euclidiana-Projetiva (TEP).



Fonte: Elaborado pelos autores.

A possibilidade da resposta imediata das alterações da construção feitas em um plano geométrico com repercussão no outro plano é uma das inovações que o trabalho com a TEP apresenta para o ambiente educacional, permitindo que os estudantes possam estudar suas construções em diferentes formas de visualização.

3.4 Problemática – Visualização

3.4.1 A Visualização Matemática no Ensino de Geometria: Contribuições de David Tall e o Uso de Softwares Digitais

A visualização tem se tornado um tema central nas discussões sobre o ensino e a aprendizagem da matemática, especialmente em tópicos ligados à geometria. Embora, historicamente, a abordagem algébrica — fortemente impulsionada pelas contribuições de Descartes — tenha ganhado maior tração e popularidade nos currículos matemáticos,

isso não implica que o raciocínio sintético e visual fosse matematicamente inferior. O que ocorreu foi uma dominância da formalização algébrica nas práticas pedagógicas, relegando a intuição visual a um plano secundário. Contudo, estudos contemporâneos vêm resgatando e demonstrando a importância crucial da visualização no desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. Entre os principais autores que tratam do tema, destaca-se David Tall, cujos estudos inauguraram uma nova compreensão sobre o papel da visualização nos processos cognitivos matemáticos.

Este capítulo tem como objetivo discutir a visualização matemática a partir da perspectiva de Tall, articulando sua teoria com contribuições de outros autores e enfatizando o uso de ferramentas digitais, como o GeoGebra, no ensino de geometria. O foco será compreender como a visualização pode mediar a construção de conceitos geométricos e favorecer aprendizagens significativas.

3.4.2 Fundamentos Teóricos da Visualização Matemática

3.4.2.1 A visão de David Tall

Para David Tall (1991, 2002), a visualização é uma das principais formas de representação do conhecimento matemático, juntamente com as representações simbólicas e operatórias. Em sua teoria sobre a "tríade dos mundos do pensamento matemático", o mundo *embodied* (corporal), o mundo *proceptual/simbólico* e o mundo formal, Tall (2004) argumenta que o aprendizado matemático envolve uma constante interação entre diferentes formas de representação e raciocínio.

No mundo *embodied*, o pensamento matemático é construído a partir da experiência perceptiva e da manipulação de objetos concretos ou mentais. Esse tipo de conhecimento está intimamente ligado à visualização, que permite aos alunos explorarem formas, transformações e relações espaciais antes mesmo de formalizá-las simbolicamente, como visto em:

"A visualização é uma forma legítima de pensar matematicamente, que pode atuar como ponto de partida para a compreensão formal." (Tall, 1991, p. 58)

Tall também desenvolve o conceito de *procepto*, em parceria com Gray (1994), referindo-se à dupla natureza de muitos símbolos matemáticos, que representam tanto um processo quanto um objeto (por exemplo, " $3 + 4$ " representa tanto uma operação quanto seu resultado). Essa ambiguidade pode ser superada com o suporte de visualizações que estabilizem o significado.

3.4.2.2 Visualização e cognição matemática

Outros estudiosos têm ampliado a discussão iniciada por Tall. Presmeg (2006) identificou cinco tipos de visualizadores em matemática, com base em como os indivíduos preferem ou evitam o uso da imagem mental. Já Arcavi (2003) argumenta que a visualização pode atuar como ferramenta heurística, mas também pode levar a erros se não for criticamente analisada.

Segundo Arcavi (2003, p. 217):

"Visualizar não é meramente ver. É construir imagens mentais que carregam significados matemáticos e que podem ser manipuladas cognitivamente para a resolução de problemas."

Pesquisadores brasileiros, como Bertini (2001) e Borba & Villarreal (2005), têm enfatizado a importância das tecnologias digitais na promoção da visualização dinâmica, ampliando a capacidade dos alunos de explorar conceitos abstratos por meio de representações visuais manipuláveis.

3.4.3 A Visualização no Ensino de Geometria

A geometria é, historicamente, o campo da matemática mais associado à visualização. No entanto, com a crescente valorização da abordagem algébrica e simbólica, muitas práticas pedagógicas passaram a negligenciar a intuição visual dos alunos. Isso criou dificuldades no entendimento de conceitos como congruência, simetria, ângulos e transformações.

O Teorema de Desargues é um dos marcos conceituais que evidenciam a coerência interna da Geometria Projetiva e sua conexão com a Geometria Euclidiana. Em sua forma clássica, afirma que: *se dois triângulos estão em perspectiva a partir de um ponto, então as interseções de seus lados correspondentes são colineares*. Formalmente, dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$ em um mesmo espaço projetivo, se as retas AA' , BB' e CC' concorrem em um ponto O , então os pontos de interseção $P = AB \cap A'B'$, $Q = AC \cap A'C'$ e $R = BC \cap B'C'$ são colineares. A prova, em coordenadas homogêneas, pode ser obtida a partir da relação de dependência linear entre os vetores associados a cada ponto, implicando

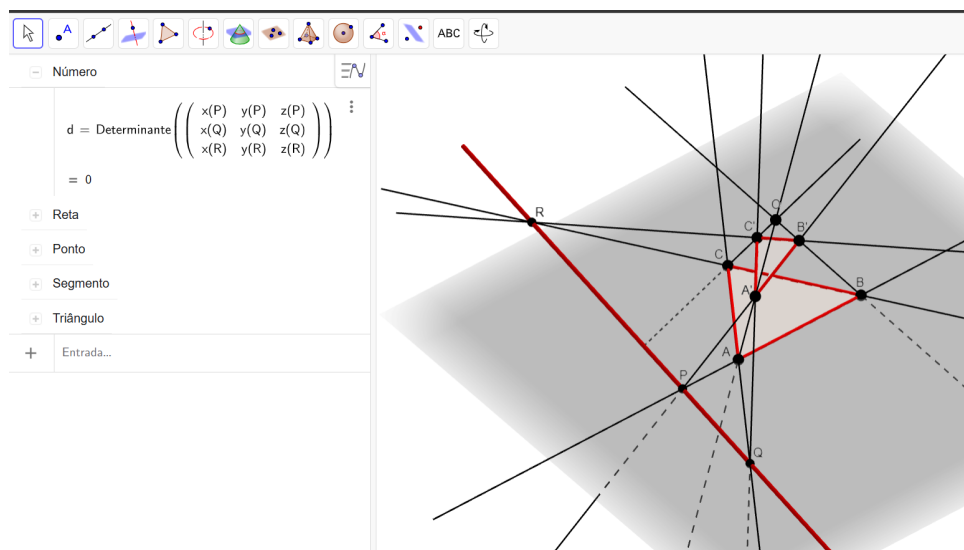
o determinante nulo da matriz
$$\begin{vmatrix} x_P & y_P & z_P \\ x_Q & y_Q & z_Q \\ x_R & y_R & z_R \end{vmatrix} = 0$$
. Didaticamente, esse resultado conduz o

aluno à percepção de que propriedades de incidência permanecem invariantes sob projeções, constituindo um eixo de transição entre o pensamento euclidiano, baseado em medidas e ângulos, e o pensamento projetivo, sustentado em relações e posições relativas.

A representação dinâmica do Teorema de Desargues, por exemplo, pode ser explorada no GeoGebra 3D da seguinte forma: constrói-se o ponto de perspectiva O e dois triângulos ABC e $A'B'C'$ de modo que A, B, C sejam vértices de um plano e A', B', C' de

outro plano, não coincidente. As retas AA' , BB' e CC' devem concorrer em O . Em seguida, obtêm-se os pontos de interseção $P = AB \cap A'B'$, $Q = AC \cap A'C'$ e $R = BC \cap B'C'$. A visualização pode ser validada com o comando: $\text{Determinante}(\{\{x(P), y(P), z(P)\}, \{x(Q), y(Q), z(Q)\}, \{x(R), y(R), z(R)\}\})$, cujo resultado nulo confirma a colinearidade projetiva.

Figura 3.24 – Triângulos em perspectiva e colinearidade das interseções.



Fonte: Construção dos autores.

Tall (2002) defende que o ensino da geometria deve começar com a exploração visual e corporal dos objetos geométricos, antes da formalização axiomática. Essa abordagem permite que os alunos construam significados com base em suas percepções, desenvolvendo confiança e capacidade para lidar com abstrações posteriores.

No Brasil, autores como Valente (1999) e Oliveira (2013) reforçam a ideia de que a geometria deve ser ensinada com base na exploração e construção de imagens, especialmente nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. As diretrizes da BNCC também reconhecem a importância da visualização no desenvolvimento do raciocínio geométrico.

3.4.4 O Uso do GeoGebra e de Softwares Digitais

Com o avanço das tecnologias digitais, o ensino da geometria passou a contar com ferramentas que potencializam a visualização, como o GeoGebra, um software gratuito de geometria dinâmica que permite criar construções interativas. Tall (2010) destaca que essas ferramentas podem criar um "meio visual manipulável" que integra a intuição com a lógica formal.

O GeoGebra possibilita aos alunos:

- Explorar propriedades geométricas em tempo real;
- Testar conjecturas e observar invariantes;
- Trabalhar com construções abertas e situações-problema;
- Estabelecer conexões entre representação visual e simbólica.

Estudos de Laborde (2001) e Hollebrands (2003) mostram que o uso de softwares de geometria dinâmica favorece o desenvolvimento do pensamento conjectural e da argumentação matemática. No Brasil, autores como Nacarato & Passos (2010) e Pavanello (2009) discutem como essas tecnologias contribuem para o letramento visual dos alunos e ampliam as possibilidades pedagógicas na sala de aula.

Segundo Nacarato & Passos (2010, p. 34):

"O GeoGebra é mais do que uma ferramenta de apoio; ele pode ser considerado um meio de produção de conhecimento matemático quando usado de forma investigativa."

3.4.5 Implicações Didáticas

A valorização da visualização no ensino de geometria exige uma mudança de postura docente. O professor deve criar situações em que os alunos possam experimentar, conjecturar e construir significados por meio da manipulação de representações visuais. Isso implica, por exemplo:

- Propor tarefas abertas e exploratórias;
- Utilizar o GeoGebra de forma intencional, como mediador da aprendizagem;
- Estimular a articulação entre imagens e linguagem formal;
- Favorecer a construção coletiva de conhecimentos, com base nas produções visuais dos alunos.

Essas práticas estão alinhadas com a Teoria das Situações Didáticas, pois promovem desequilíbrios epistemológicos e favorecem a institucionalização progressiva dos saberes.

A visualização matemática, longe de ser um recurso acessório, é um componente central da cognição matemática. Os estudos de David Tall e de outros autores mostram que a visualização permite compreender, conjecturar e comunicar ideias matemáticas. No ensino de geometria, a valorização da visualização, especialmente com o uso de softwares como o GeoGebra, amplia as possibilidades pedagógicas e torna o aprendizado mais significativo e acessível.

A abordagem visual, se bem integrada com as dimensões simbólicas e formais, pode transformar a sala de aula em um ambiente de investigação matemática, onde ver, manipular e pensar se tornam processos indissociáveis.

4 A GEOMETRIA PROJETIVA SEGUNDO *INTRODUÇÃO À GEOMETRIA PROJE-* *TIVA*, DE BARROS E ANDRADE

A obra *Introdução à Geometria Projetiva*, de Barros e Andrade (2012), representa uma das principais contribuições em língua portuguesa voltadas à introdução sistemática da Geometria Projetiva sob uma abordagem formal e, ao mesmo tempo, pedagógica. O livro se destaca por oferecer um tratamento rigoroso, porém acessível, dos conceitos fundamentais da Geometria Projetiva, articulando sua apresentação com os desdobramentos históricos e as conexões com a Geometria Euclidiana.

O texto dos autores torna-se particularmente relevante para esta pesquisa por explicitar, com clareza e profundidade, os mecanismos de transição entre os sistemas geométricos euclidiano e projetivo, constituindo-se em base teórica para o desenvolvimento das construções geométricas realizadas digitalmente. A seguir, serão destacados os principais tópicos abordados pela obra, incluindo os teoremas centrais, suas demonstrações, e a forma como os autores articulam a mudança de paradigma geométrico entre as diferentes tradições.

4.1 Estrutura e Objetivos da Obra

O livro é dividido em capítulos que seguem uma progressão lógica: inicia-se com conceitos fundamentais da geometria do plano e do espaço, avança para as noções de incidência, projeção e seções cônicas, e culmina no desenvolvimento da teoria projetiva propriamente dita, com foco especial em transformações, invariantes e dualidade. Barros e Andrade deixam clara sua intenção de proporcionar ao leitor uma entrada progressiva nos conceitos sofisticados da Geometria Projetiva, partindo de noções familiares da geometria clássica.

O objetivo central é introduzir a Geometria Projetiva como uma generalização natural da Geometria Euclidiana, eliminando as exceções (como o paralelismo) e recuperando propriedades de simetria e generalidade nas construções geométricas:

"A geometria projetiva apresenta-se como uma extensão coerente da geometria clássica, na qual o conceito de ponto no infinito permite estabelecer propriedades de simetria entre as figuras planas e espaciais" (Barros & Andrade, 2012, p. 17).

4.2 Elementos Fundamentais e Postulados Projetivos

No início do texto, os autores estabelecem os conceitos de ponto, reta e plano sob o viés da incidência. A Geometria Projetiva é construída com base em postulados que diferem substancialmente dos axiomas euclidianos. Entre os princípios fundamentais estão:

- **Postulado da Incidência:** Dois pontos distintos determinam uma única reta.
- **Postulado da Dualidade:** Toda proposição verdadeira em Geometria Projetiva possui uma proposição dual igualmente verdadeira, bastando permutar os conceitos de ponto e reta.
- **Postulado da Existência:** Existem pelo menos quatro pontos, não três a três colineares.

Esses postulados formam o núcleo da estrutura projetiva e diferenciam-se daqueles da geometria clássica sobretudo por dispensarem o conceito de medida e ângulo, dando ênfase às relações de posição.

4.3 Os teoremas Centrais

Entre os teoremas abordados por Barros e Andrade, destacam-se aqueles de importância histórica e estrutural na Geometria Projetiva. A seguir, serão discutidos alguns dos principais:

- **Teorema de Desargues:** Considerado o ponto de partida para a formalização da Geometria Projetiva, afirma que se dois triângulos estão em perspectiva de um ponto, então estão em perspectiva de uma reta. A demonstração é feita com elegância e serve de base para a introdução da perspectiva espacial.
- **Teorema de Pascal:** Seis pontos dispostos sobre uma cônica formam, ao serem conectados em um hexágono, três pares de lados opostos cujas interseções são colineares. Esse Teorema destaca a profundidade das propriedades projetivas das seções cônicas.
- **Teorema de Brianchon:** Dual do Teorema de Pascal, trata da relação entre tangentes e colinearidade, reforçando o princípio da dualidade na geometria projetiva.

As demonstrações desses teoremas são realizadas com base na construção geométrica e na lógica projetiva, e os autores recorrem ocasionalmente ao uso de coordenadas homogêneas para reforçar a generalidade dos resultados.

4.4 A Transição entre a Geometria Euclidiana e a Projetiva

Um dos aspectos mais interessantes do livro está na forma como Barros e Andrade trabalham a transição conceitual entre a geometria tradicional euclidiana e a geometria projetiva. Essa transição é tratada como um alargamento do olhar geométrico: onde antes se viam exceções, como as retas paralelas, passa-se a ver estruturas contínuas e generalizáveis, como os pontos no infinito.

"Ao estender o plano euclidiano para o plano projetivo, garantimos que todas as retas se cruzam, mesmo que apenas no infinito. Essa simples modificação altera profundamente o panorama geométrico e permite o surgimento de novos invariantes e simetrias"(Barros & Andrade, 2012, p. 103).

Para fins desta pesquisa, esse aspecto é particularmente relevante. A utilização de softwares como o GeoGebra permite ao aluno perceber, na prática, o que os autores demonstram teoricamente: a inserção dos elementos projetivos permite tornar o espaço mais uniforme e elimina exceções que dificultam a aprendizagem nos primeiros contatos com a geometria.

4.5 Aplicações, Perspectivas Didáticas e Relevância para a Pesquisa

A obra termina com considerações sobre aplicações da Geometria Projetiva em áreas como perspectiva artística, desenho técnico, óptica e computação gráfica. Embora a proposta do livro não seja pedagógica em sentido estrito, sua clareza e sistematização permitem a integração direta no contexto educacional.

Para esta tese, a importância de *Introdução à Geometria Projetiva* reside em três aspectos principais:

1. **Clareza conceitual:** o texto fornece uma base teórica sólida e acessível para compreender os fundamentos projetivos.
2. **Transição conceitual:** auxilia na compreensão da passagem entre a geometria euclidiana e a projetiva, tema central da pesquisa.
3. **Estrutura lógica:** oferece uma sequência lógica de tópicos que pode ser replicada, em parte, no desenvolvimento didático das atividades com suporte digital.

5 GEOGEBRA E FERRAMENTAS PROJETIVAS

5.1 Aplicação do GeoGebra no contexto da Transição Euclidiana-Projetiva

A presente seção descreve a aplicação prática do software GeoGebra 3D no contexto da Transição Euclidiana-Projetiva (TEP), articulando escolhas de configuração do ambiente, procedimentos de criação de ferramentas projetivas e exemplos didáticos aplicados às situações escolhidas (principalmente os teoremas de Pappus e Desargues). Pretende-se, por meio de uma descrição operacional, oferecer ao leitor um roteiro replicável para a construção do *milieu* digital que sustenta as Situações Didáticas (SD1–SD5) da Engenharia Didática.

Antes de detalharmos as configurações e a aplicação, é fundamental justificar a escolha do GeoGebra frente a outras alternativas de geometria dinâmica com suporte tridimensional. A Tabela 5.1 apresenta um comparativo entre o GeoGebra, o Cabri 3D e o Desmos 3D, avaliando os critérios essenciais para a viabilidade educacional desta pesquisa.

Tabela 5.1 – Comparativo entre softwares de geometria dinâmica com suporte 3D.

Critério	GeoGebra 3D	Cabri 3D	Desmos 3D
Custo	Gratuito e código aberto	Licença Paga	Gratuito
Acessibilidade	Web, Desktop e Mobile	Foco em Desktop	Web e Mobile
Ambiente 3D	Robusto e integrado à álgebra	Pioneiro e focado em geometria espacial	Recente e focado em gráficos 3D
Personalização	Permite criação de ferramentas (macros)	Permite criação de ferramentas (macros)	Sem suporte nativo para macros geométricas

Fonte: Elaborado pelos autores.

Como evidenciado no comparativo, a adoção do GeoGebra 3D deu-se por ser uma plataforma totalmente gratuita, amplamente acessível em diferentes dispositivos e por oferecer o ambiente tridimensional robusto e personalizável necessário para a transição proposta. É crucial ressaltar que a metodologia da Transição Euclidiana-Projetiva possui um caráter epistemológico e estrutural que é independente da tecnologia. O GeoGebra atua como um facilitador cognitivo e de visualização, o que evidencia que a tese não é refém do programa. Os mesmos princípios projetivos e as construções aqui descritas poderiam ser

transpostos para o Cabri 3D ou para futuras atualizações do Desmos 3D, garantindo que o conhecimento matemático validado se sobreponha à interface escolhida.

5.1.1 Objetivos da aplicação

Os objetivos específicos desta aplicação são:

- Configurar um ambiente 3D no GeoGebra que permita visualizar simultaneamente o Plano Euclidiano (PlanoXOY) e modelos projetivos incorporados ao cenário, favorecendo a percepção de elementos no infinito e de interseções projetivas.
- Criar e parametrizar ferramentas personalizadas que automatizem projeções de pontos, retas e cônicas do plano euclidiano para o plano projetivo, reduzindo o custo cognitivo da construção e ampliando a exploração conceitual.
- Disponibilizar sequências de atividade que possibilitem o desequilíbrio epistemológico esperado na TSD, estimulando ação, formulação e validação pelos participantes.

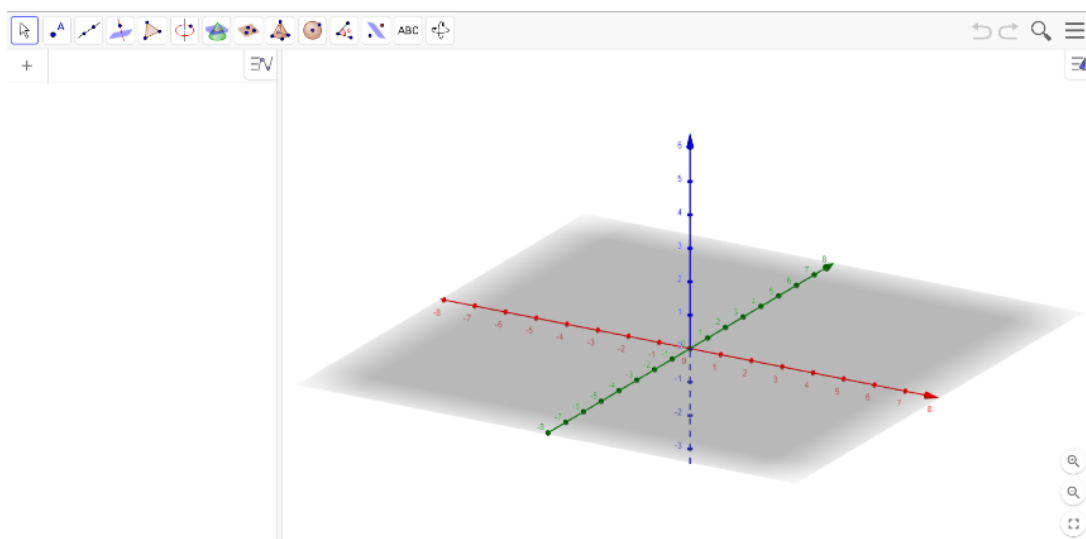
5.1.2 Configuração do ambiente e instrumentos iniciais

Para iniciar a aplicação recomenda-se:

- Abrir a Janela 3D do GeoGebra e manter visíveis os eixos X, Y e Z; o plano determinado por X e Y será denominado PlanoXOY (Figura 5.1).
- Definir um observador/ponto de projeção (ponto P) e, quando necessário, uma reta de projeção (r) no espaço tridimensional. Esses elementos atuarão como referências para a criação das projeções (ortogonais e cônicas) entre planos.
- Ajustar a visibilidade e o estilo dos objetos (transparência, espessura) de modo a evidenciar os pontos de fuga e as interseções projetivas sem sobrecarregar a cena visual.

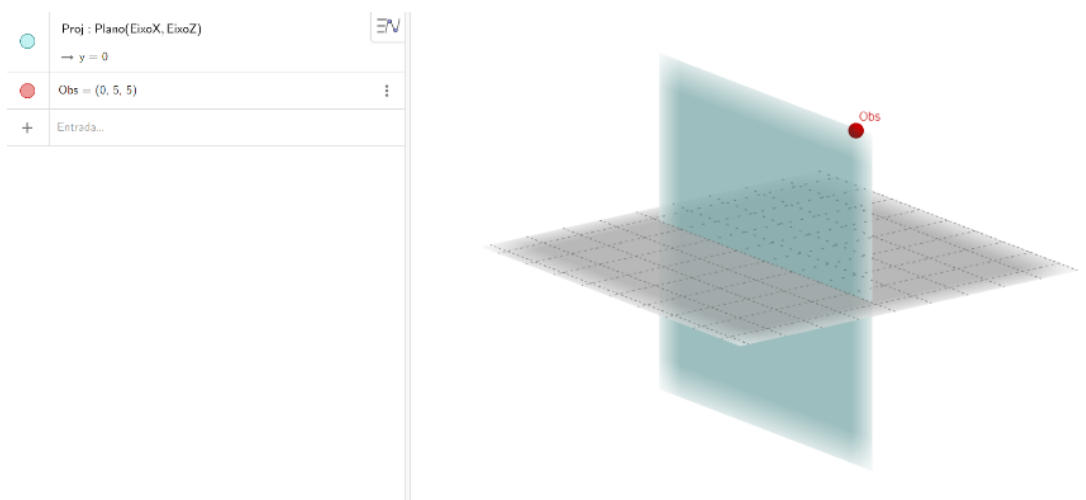
No caso do exemplo a seguir, pela possibilidade de já apresentarmos uma das ferramentas desenvolvida pelo autor, utilizaremos uma versão diferenciada da "Janela 3D", nesta já estão presentes outros elementos importantes para as representações em Geometria Projetiva pretendida pelo autor, com base na forma de representação apresentada por Auffinger e Valentim (2003) e Ceppi e Fournier (1951) na qual consta um diedro onde os elementos das representações Euclidiana e Projetiva estarão presentes e um ponto externo, chamado de Observador, que para fins de facilidade nas demonstrações nos referiremos a esse ponto de agora em diante como OBS.

Figura 5.1 – Eixos X, Y e Z no cenário tridimensional apresentado no software GeoGebra.



Fonte: Construção dos autores

Figura 5.2 – Diedro formado a partir dos Plano Euclidiano e Plano Projetivo.

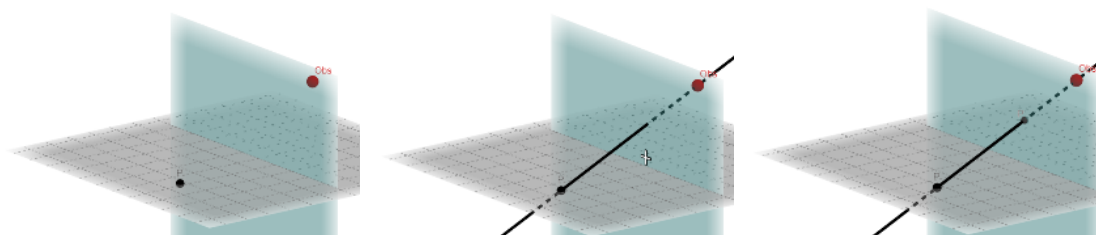


Fonte: Construção dos autores

Observe na Figura 5.2 que o plano perpendicular ao Plano XOY é determinado pelos eixos X e Z e que o Observador está posicionado nas coordenadas cartesianas (0,5,5). Os elementos que determinam o plano e a posição do Observador podem ser modificados de acordo com o desejo do usuário, não interferindo na criação dos elementos a que estes capítulos se propõe.

Neste exemplo começaremos a construção com um ponto P qualquer no Plano XOY, em seguida criaremos as etapas necessárias para projetar este ponto no plano de projeção, que nos referiremos daqui em diante como PROJ. Após criado o ponto P, traça-se uma reta de P a OBS, na interseção entre esta reta e PROJ marcaremos um ponto P', conforme a sequência da Figura 5.3.

Figura 5.3 – Traçado da projeção do ponto P , do plano Euclidiano para o Plano Projetivo.

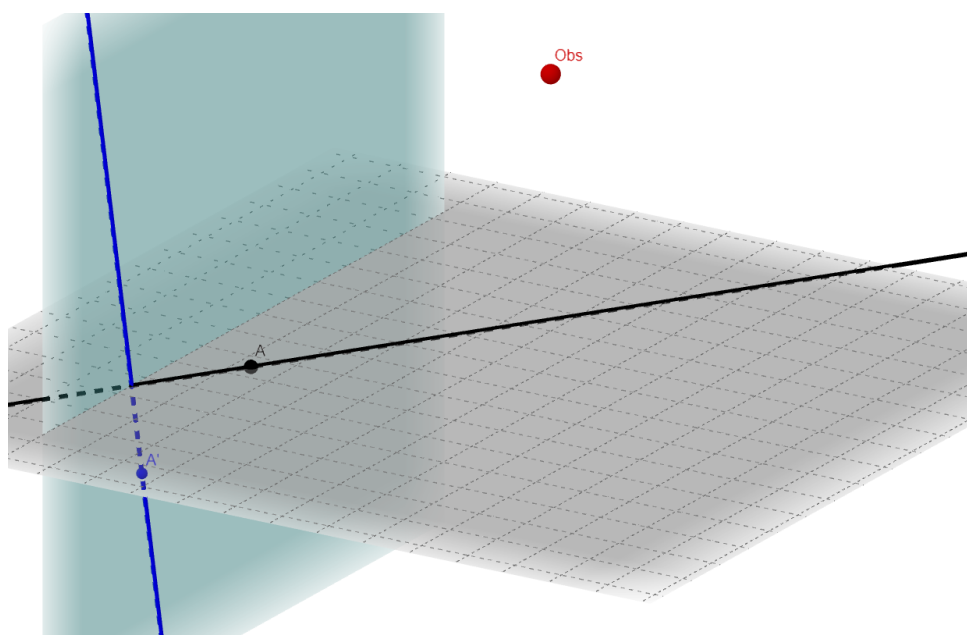


Fonte: Construção dos autores

Nesta construção, o ponto P' é a representação no Plano Projetivo do ponto P que pertence ao Plano Euclidiano. Com esse pequeno passo de construção é possível trilhar construções mais elaboradas e que permitem uma melhor visualização do que a Geometria Projetiva propõe.

Para evidenciar a propriedade de incidência na geometria projetiva, não basta apenas projetar pontos isolados. É necessário comprovar que as relações de pertinência se mantêm após a transformação. A Figura 5.4 ilustra a projeção de uma reta r que contém um ponto A em seu domínio euclidiano. Ao realizar a projeção de ambos os elementos para o plano projetivo, observa-se claramente que o ponto projetado A' pertence estritamente à reta projetada r' . Essa construção visual comprova que a relação de pertinência (incidência) se conserva integralmente na Transição Euclidiana-Projetiva.

Figura 5.4 – Projeção simultânea de uma reta e um ponto pertencente a ela, demonstrando a conservação da incidência.



Fonte: Elaborado

pelos autores.

Para criar a ferramenta que projeta o ponto P , sem a necessidade do passo a passo

realizado no exemplo anterior, é necessário pensar nos elementos que o compõem. O ponto P' é a interseção da reta, que passa pelos pontos P e OBS , com $PROJ$, ou seja, na linguagem de comandos do GeoGebra, para que possamos representar essa construção deve-se escrever no campo de entrada do software: $Interseção(Reta(P, OBS), PROJ)$.

Figura 5.5 – Representação dos elementos em tela do GeoGebra, antes e depois da utilização da ferramenta de interseção para criação do ponto projetado.

	PROJ : Plano(EixoX, EixoZ) → $y = 0$		PROJ : Plano(EixoX, EixoZ) → $y = 0$
	OBS = (0, 5, 5)		OBS = (0, 5, 5)
	P = (1.51, -8.45, 0)		P = (1.51, -8.45, 0)
	f : Reta(P, OBS) → $X = (1.51, -8.45, 0) + \lambda (-1.51, 13.45, 5)$		P' = Interseção(Reta(P, OBS), PROJ) → (0.56, 0, 3.14)
	P' = Interseção(f, PROJ) → (0.56, 0, 3.14)		

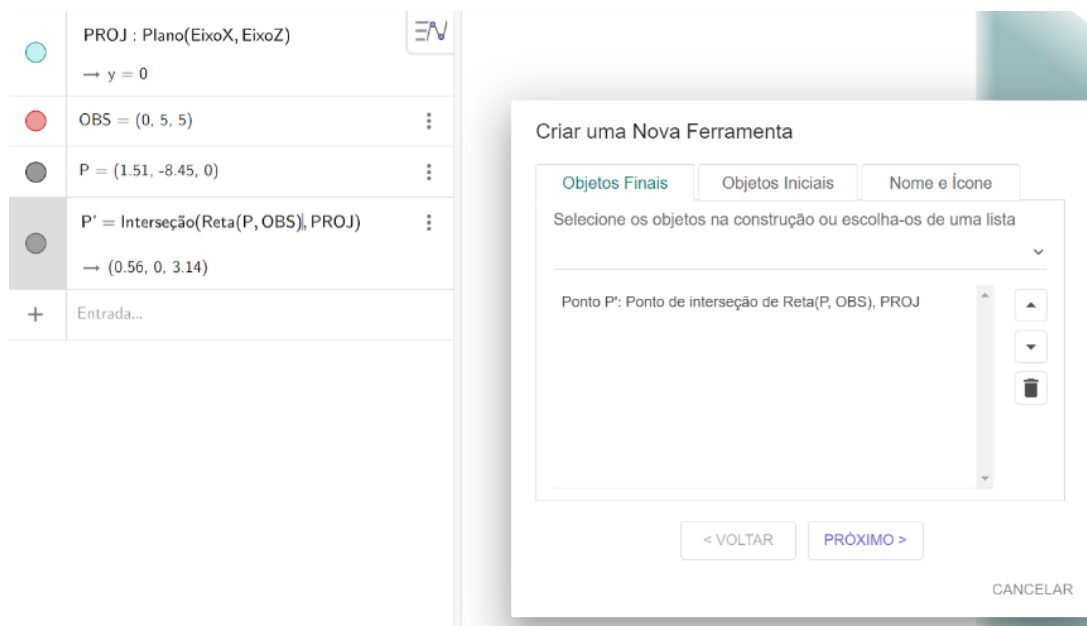
Fonte: Construção dos autores

5.1.3 Criação e registro de ferramentas projetivas no GeoGebra

O GeoGebra permite a construção de ferramentas customizadas que encapsulam sequências de comandos. Uma vez que o comando que representa toda a criação é elaborado, para criarmos a ferramenta basta acessar MENU (representado pelas três barras horizontais no canto superior direito da tela) > Ferramentas > Criar uma Nova Ferramenta. Uma janela se abrirá e a primeira entrada necessária que se deve dar, na aba Objetos Finais, é o comando ao qual a ferramenta nova se referirá, no nosso caso é o comando $Interseção(Reta(P, OBS), PROJ)$, para isto, basta clicar com o mouse no comando em questão na Janela de Álgebra (por padrão é a janela na lateral esquerda da tela), visto na Figura 5.6.

Após selecionar o comando que servirá como base para a ferramenta e clicar no botão "Próximo", a janela irá para a aba "Objetos Iniciais" onde deve-se escolher quais objetos, dentre os pertencentes à construção, definem aquela nova ferramenta, ou seja, quais serão os objetos que servirão como base para a sua utilização. Para o nosso exemplo, definiremos como Objetos Iniciais, PROJ, OBS e o Ponto P. A ordem com que os itens são posicionados na lista determina a ordem da entrada dos objetos, ou seja, para a utilização da ferramenta que estamos criando o usuário deverá fazer a sequência de cliques, inicialmente, no ponto a ser projetado, em seguida no plano de projeção e por fim no observador de referência, como apresentado na Figura 5.7.

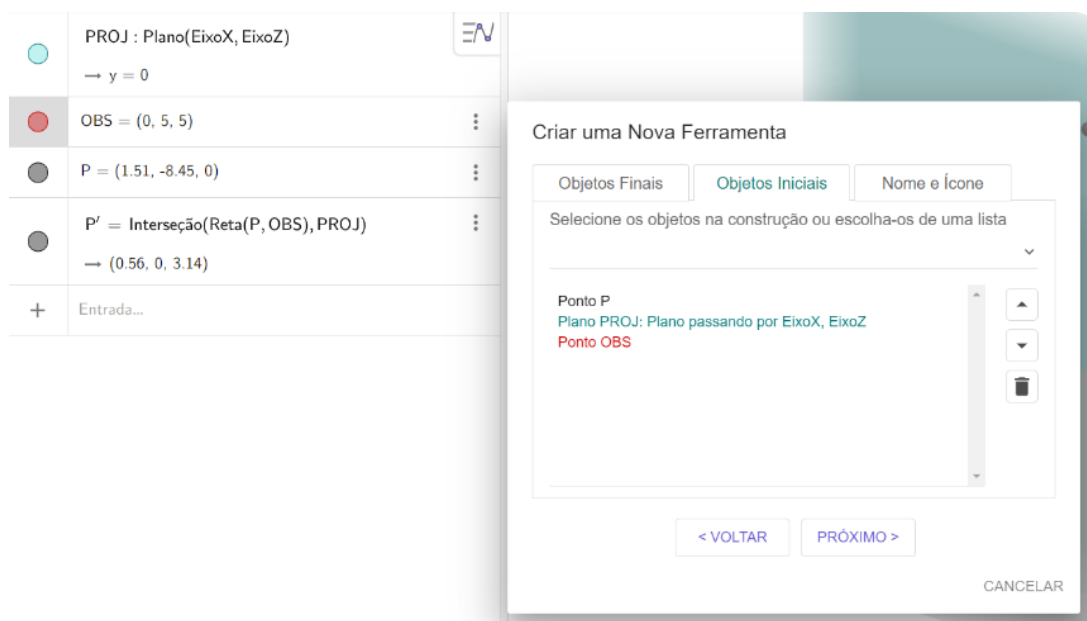
Figura 5.6 – Janela de criação de ferramenta, etapa de definição do comando que se tornará uma ferramenta.



Fonte: Construção dos autores

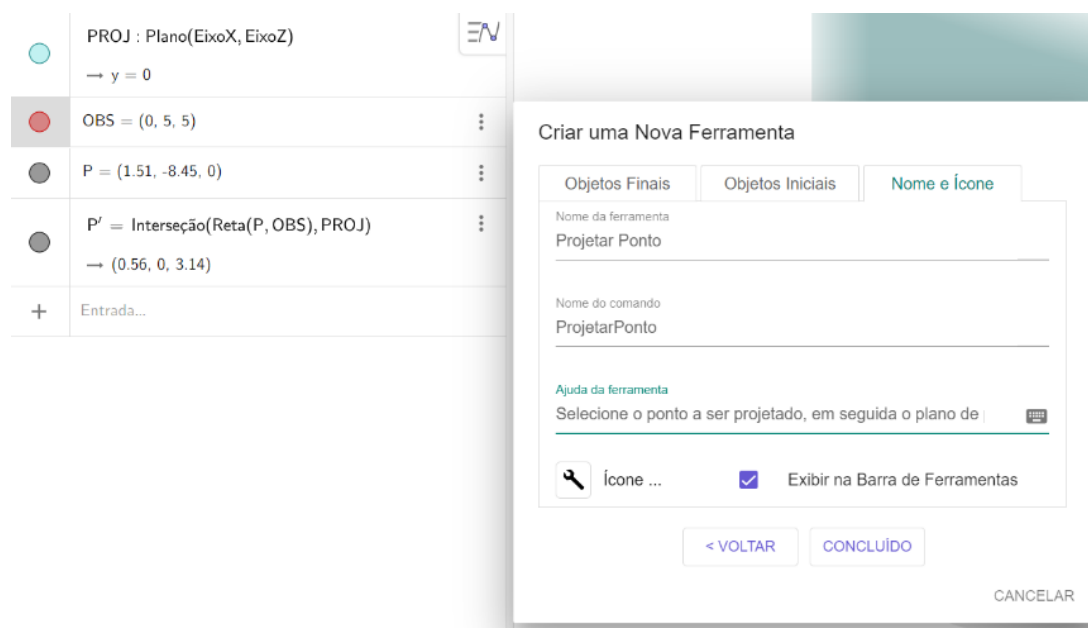
Ao clicarmos novamente no botão "Próximo", iremos para a aba de customização da ferramenta, chamada de "Nome e Ícone". Nesta aba daremos um nome à ferramenta, um nome de comando que será utilizado quando desejar-se utilizar a ferramenta no campo de entrada, adicionaremos uma descrição e por fim um ícone para a ferramenta, sendo os últimos dois campos, opcionais (Figura 5.8).

Figura 5.7 – Janela de criação de ferramenta, etapa de seleção de objetos necessários para o funcionamento pleno da ferramenta.



Fonte: Construção dos autores

Figura 5.8 – Janela de criação de ferramentas, etapa de definição dos detalhes da ferramenta, nome, atalho, descrição e ícone.



Fonte: Construção dos autores

Ao concluir, a ferramenta estará disponível para uso e poderá ser aplicada a qualquer ponto que se deseja projetar. Esta construção nomeamos **Ferramenta 1 – Projetar Ponto**. Importante ressaltar que os elementos que o usuário vier a utilizar não precisam possuir os mesmos nomes ou coordenadas que os elementos utilizados na criação da ferramenta. A partir desse momento, então, para se projetar um ponto é necessário apenas utilizar a ferramenta criada, sem a necessidade de recriar todos os procedimentos. Esta ferramenta será amplamente utilizada na criação de outras ferramentas de cunho mais complexo.

É de suma importância destacar que toda a complexidade de programação envolvida na criação dessas ferramentas customizadas, incluindo a estruturação de códigos aninhados e a elaboração das macros matemáticas, foi inteiramente desenvolvida e validada pelo autor desta pesquisa. Dessa forma, o professor ou o estudante que aplicará as situações didáticas não precisará programar ou digitar comandos complexos no GeoGebra. O usuário final deverá apenas clicar nos botões e utilizar as ferramentas visuais já idealizadas e disponibilizadas na interface do software. Essa abordagem garante uma aplicação fluida e permite que o foco da aula permaneça exclusivamente na exploração e na aprendizagem dos conceitos geométricos.

5.2 GeoGebra e as Ferramentas Projetivas

O software GeoGebra disponibiliza a possibilidade de o usuário criar suas próprias ferramentas, para isso é necessário seguir um passo-a-passo onde se realiza o cadastro da ferramenta criada. Nesta seção apresentaremos de forma detalhada as ferramentas desenvolvidas pelo autor.

Para este capítulo, focaremos apenas nas ferramentas que tomam os elementos do Plano Euclidiano, sejam Pontos, Retas e Segmentos e Círculos e as projeta no Plano de Projeção. Futuramente abordaremos ferramentas que já pressupõem a construção de objetos num Plano de Projeção, sem a necessidade da sua contraparte no Plano Euclidiano.

5.2.1 Ferramentas 2 e 3 - Projetar Reta e Projetar Segmento

Para projetarmos uma reta devemos inicialmente pensar na sua constituição. Pelos axiomas de Euclides podemos concluir que por dois pontos passa uma única reta, nessa premissa o software GeoGebra utiliza como base para criação de uma reta, dois pontos. Criando-se uma reta f , ao inserirmos no Campo de Entrada o comando $f(0)$ e $f(1)$ o GeoGebra nos retorna as coordenadas dos pontos utilizados na criação da reta, sendo $f(0)$ o primeiro ponto criado e $f(1)$ o segundo. Por exemplo, criando-se uma reta pelos pontos A e B, nessa ordem, $f(0)$ retornaria as coordenadas do ponto A e $f(1)$ retornaria as coordenadas do ponto B. Assim, possuindo apenas a reta é possível projetá-la no plano euclidiano utilizando o seguinte comando:

```
Reta(ProjetarPonto(f(0),PROJ,OBS),ProjetarPonto(f(1),PROJ,OBS))
```

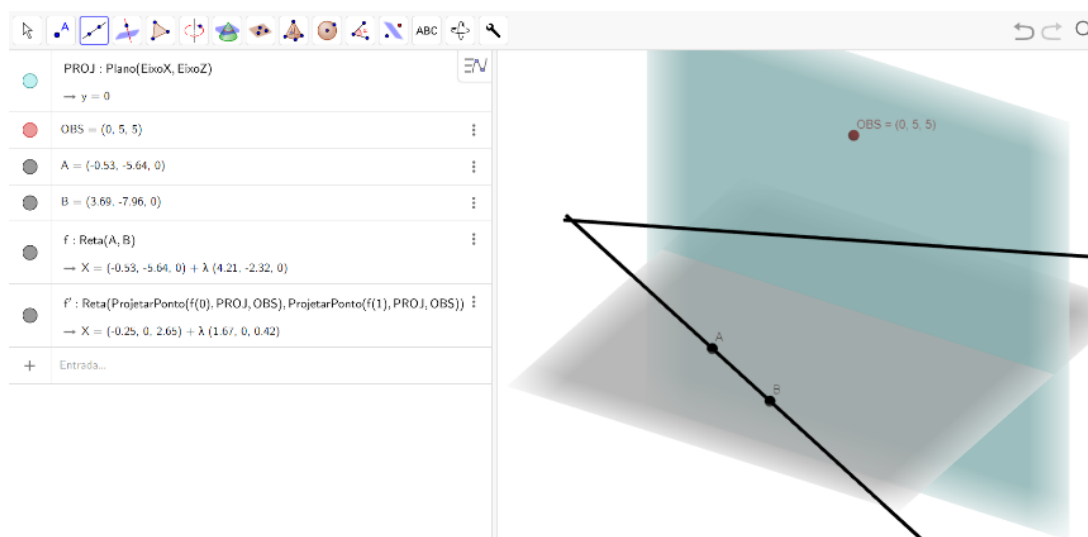
Observe no comando acima que é imprescindível o uso adequado dos comandos e dos parênteses de forma a evitar a má utilização dos comandos e erros provenientes disso. No comando é dito ao GeoGebra que, dada a reta f , deve-se, utilizando nosso comando **ProjetarPonto()** previamente criado, projetar $f(0)$ e $f(1)$ e então traçar uma reta que passe por esses pontos, como o axioma das retas permanece verdadeiro na Geometria Projetiva é necessário apenas esses dois pontos para sua formação.

A partir disso pode-se criar esta ferramenta conforme abordado na seção anterior para que esta venha a ser utilizada como base para futuras ferramentas e para que possa ser utilizada por outros usuários. Observe na Figura 5.9 que há um ícone de uma chave de boca ao final da lista de ícones, este ícone se refere às ferramentas criadas pelo usuário.

No caso da projeção de um segmento pode-se utilizar o mesmo princípio utilizado na projeção de uma reta mudando apenas o comando utilizado, ou seja, ao invés de utilizar o comando **Reta()**, utiliza-se o comando **Segmento()**. O resultado do comando

```
Segmento(ProjetarPonto(f(0),PROJ,OBS),ProjetarPonto(f(1),PROJ,OBS))
```

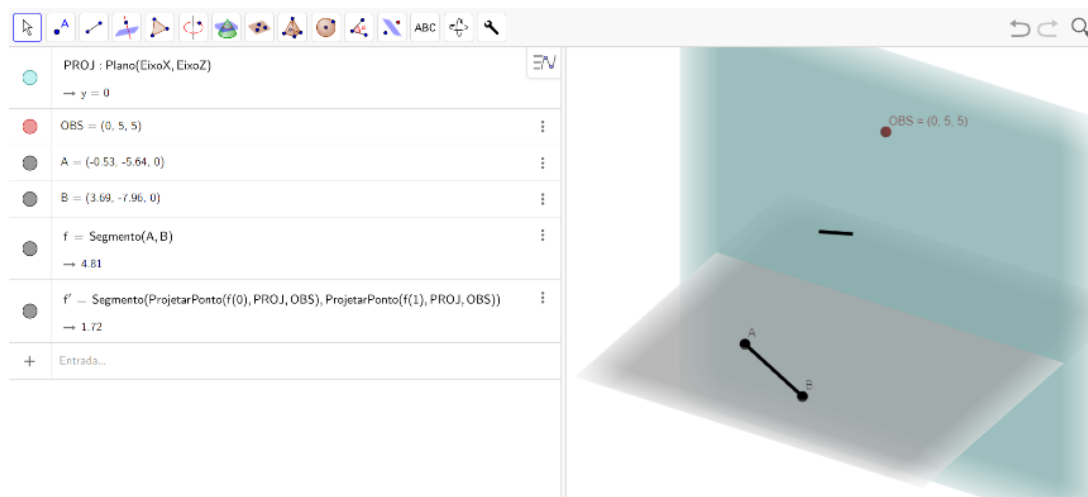
Figura 5.9 – Projeção de reta a partir de comando aninhado, etapas para a criação da ferramenta pretendida.



Fonte: Construção dos autores

pode ser visto na Figura 5.10.

Figura 5.10 – Aplicação da ferramenta de projeção de segmento.



Fonte: Construção dos autores

Observa-se na Figura 5.10 que o segmento projetado tem comprimento menor que o original, isso dá-se pela projeção ter um caráter cônico, uma vez que usa como ponto de referência o Observador posicionado fora do diedro dos Planos Euclidiano e Plano de Projeção.

5.2.2 Ferramenta 4 - Projetar Círculo

No caso da projeção de círculo encontra-se uma dificuldade técnica, pois um círculo projetado não mantém o formato, ele converte-se em uma cônica. Segundo Ribeiro (2012,

p. 70), "Por um conjunto de quatro pontos distintos, dos quais não existem três colineares, passam infinitas cônicas projetivas não degeneradas." Com essa base é possível concluir que não é possível, ao projetar um círculo, utilizar a ferramenta "Círculo definido por Três Pontos".

Ribeiro (2012, p. 68) apresenta o Teorema que diz "Por um conjunto de cinco pontos projetivos, entre os quais não existem três pontos colineares, passa uma única cônica projetiva não degenerada." Assim, ao projetar um círculo, seria necessário garantir a projeção de cinco de seus pontos para que se possa formar a cônica desejada.

É apresentado: Considere os pontos projetivos $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$, $\overline{u} = (1 : 1 : 1)$ e $\overline{v} = (v_1 : v_2 : v_3)$. Se eles são três a três não colineares, então existe uma única cônica C_A que incide nos cinco pontos. (Barros e Andrade, 2010)

Barros e Andrade (2010) trazem uma demonstração algébrica bem estabelecida do ponto que abordamos aqui para corroborar nossa colocação sobre a estruturação projetiva do círculo projetado. Para fins de contextualização analítica, vale recordar que a equação geral das cônicas no plano euclidiano é expressa por $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. É importante esclarecer o motivo da ausência do termo xy na nossa abordagem inicial: a presença desse fator algébrico denota uma inclinação, de modo que a sua ausência indica diretamente a ausência de rotação da figura geométrica em relação aos eixos coordenados. Esse detalhe analítico fundamental, acrescido com o que é apresentado por Ribeiro (2012), nos dá a garantia de que o modelo teórico referenciado é matematicamente correto e plenamente aplicável em nossa construção no software.

Tomando de início, a cônica C_A é induzida por um operador linear A do $\mathbb{R}^3$ cuja matriz canônica é

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & v_3(v_1 - v_2) & v_2(v_3 - v_1) \\ v_3(v_1 - v_2) & 0 & v_1(v_2 - v_3) \\ v_2(v_3 - v_1) & v_1(v_2 - v_3) & 0 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

e tomando $C_{\mathbb{R}^3} = \{e_1, e_2, e_3\}$ como a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Assim iniciaremos a prova dessa proposição, segundo Barros e Andrade (2010). Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^6$ a função

$$F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz) \quad (5.2)$$

Observe que $F(\lambda w) = \lambda^2 F(w)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e todo $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Considere a matriz 6×6 definida por $[F(e_1) \ F(e_2) \ F(e_3) \ F(u) \ F(v) \ 2F(x, y, z)]$, onde e_1, e_2, e_3, u e v são os representantes canônicos dos pontos projetivos descritos no enunciado.

Examinando a equação e aplicando o Teorema de Laplace em

$$\det(C) = \det \begin{bmatrix} F(e_1) & F(e_2) & F(e_3) & F(u) & F(v) & 2F(x, y, z) \end{bmatrix} = 0. \quad (5.3)$$

, tem-se:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & v_1^2 & 2x^2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & v_2^2 & 2y^2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & v_3^2 & 2z^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & v_1v_2 & 2xy \\ 0 & 0 & 0 & 1 & v_1v_3 & 2xz \\ 0 & 0 & 0 & 1 & v_2v_3 & 2yz \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & v_2^2 & 2y^2 \\ 0 & 1 & 1 & v_3^2 & 2z^2 \\ 0 & 0 & 1 & v_1v_2 & 2xy \\ 0 & 0 & 1 & v_1v_3 & 2xz \\ 0 & 0 & 1 & v_2v_3 & 2yz \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & v_3^2 & 2z^2 \\ 0 & 1 & v_1v_2 & 2xy \\ 0 & 1 & v_1v_3 & 2xz \\ 0 & 1 & v_2v_3 & 2yz \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & v_1v_2 & 2xy \\ 1 & v_1v_3 & 2xz \\ 1 & v_2v_3 & 2yz \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$= 2v_1v_3yz + 2v_1v_2xz + 2v_2v_3xy - 2v_1v_3xy - 2v_2v_3xz - 2v_1v_2yz \quad (5.6)$$

$$= 2v_3(v_2 - v_1)xy + 2v_2(v_1 - v_3)xz + 2v_1(v_3 - v_2)yz = 0 \quad (5.7)$$

Invertendo os sinais para adequar ao modelo apresentado por Barros e Andrade (2010), chegamos a

$$C : 2v_3(v_1 - v_2)xy + 2v_2(v_3 - v_1)xz + 2v_1(v_2 - v_3)yz = 0 \quad (5.8)$$

Observe que os pontos citados no enunciado satisfazem essa equação, pois a avaliação da matriz em alguns daqueles pontos (ou em qualquer representante) produz uma matriz cuja última coluna é o dobro de alguma outra coluna, portanto o determinante é zero. Mas, segundo a proposição que diz que para cada equação polinomial homogênea de ordem 2 em $\mathbb{R}^3$, $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0$, existe um único operador linear simétrico $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ associado à equação, a saber, é o operador cuja matriz canônica é

$$[A] = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

essa quádrlica é induzida por um operador linear simétrico A de $\mathbb{R}^3$, cuja matriz na base canônica é aquela descrita no enunciado. Resta provar que a matriz $[A]$ é invertível. De fato, como os pontos não são colineares, pelo lema anterior, $v_i \neq 0$ e $v_i \neq v_j$ para todo $i \neq j$. Sendo assim, um cálculo direto mostra que

$$\det[A] = 2v_1v_2v_3(v_1 - v_2)(v_3 - v_1)(v_2 - v_3) \neq 0 \quad (5.10)$$

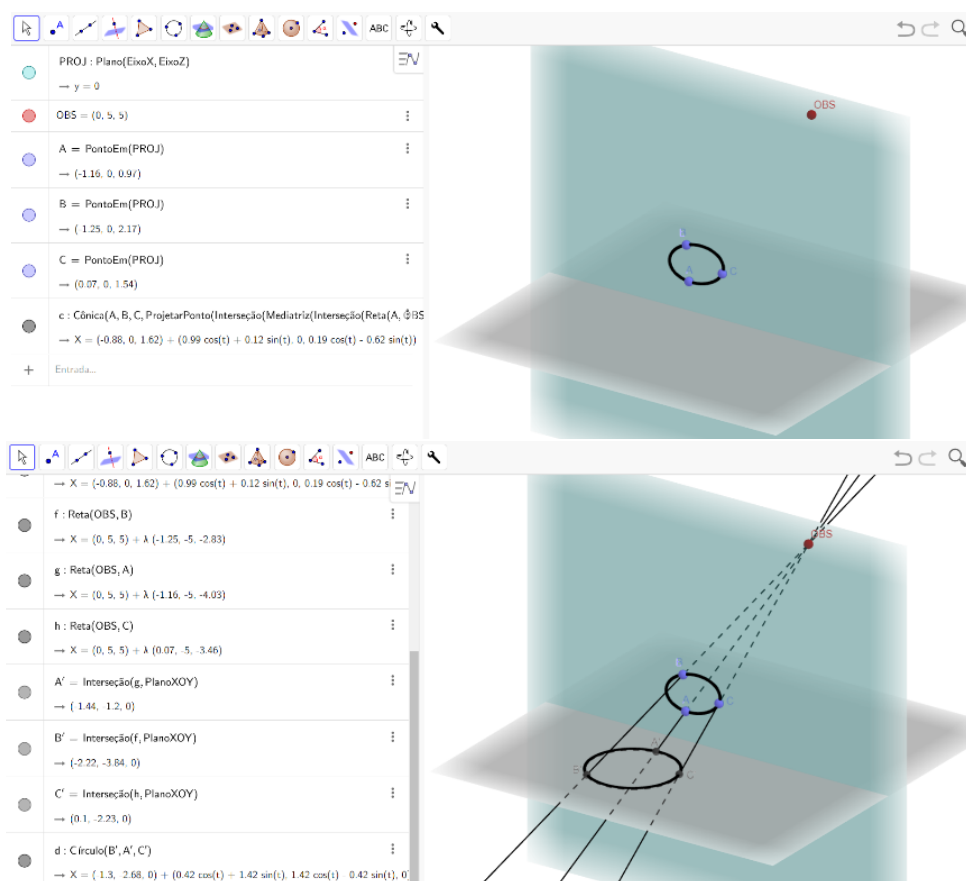
encerrando então a demonstração.

Deve-se considerar que, na Geometria Euclidiana, é suficiente possuir apenas três pontos para a criação de um círculo, presumiu-se então que, tendo três pontos no Plano de Projeção, seria possível construir, no GeoGebra, um círculo no Plano Euclidiano, a partir da reversão da projeção desses três pontos, e, em seguida, obter e projetar dois novos pontos desse círculo de forma a garantir a existência de cinco pontos no Plano Projetivo para que seja possível construir a cônica desejada. Dessa ideia foi criada a ferramenta **CírculoProjetado**, cujo comando expomos abaixo de um modo mais organizado e apresentamos a imagem na Figura 5.11, para facilitar a compreensão:

```
Cônica(
  A,
  B,
  C,
  ProjetarPonto(
    Interseção(
      Círculo(
        Interseção(Reta(A,OBS),PlanoXOY),
        Interseção(Reta(B,OBS),PlanoXOY),
        Interseção(Reta(C,OBS),PlanoXOY)
      ),
      Mediatriz(
        Interseção(Reta(A,OBS),PlanoXOY),
        Interseção(Reta(B,OBS),PlanoXOY)
      )
    ),
    PROJ,OBS
  ),
  ProjetarPonto(
    Interseção(
      Círculo(
        Interseção(Reta(A,OBS),PlanoXOY),
        Interseção(Reta(B,OBS),PlanoXOY),
        Interseção(Reta(C,OBS),PlanoXOY)
      ),
      Mediatriz(
        Interseção(Reta(A,OBS),PlanoXOY),
        Interseção(Reta(C,OBS),PlanoXOY)
      )
    )
  )
)
```

),
 PROJ,OBS
)
)

Figura 5.11 – Criação do círculo projetado e sua representação no Plano Euclidiano.



Fonte: Construção dos autores

A partir desse comando temos que foram tomados os pontos A, B e C do Plano Projetivo e a partir das retas formadas por esses pontos e o OBS foram criados pontos no Plano Euclidiano (PlanoXOY). Com esses três novos pontos foi criada um círculo no Plano Euclidiano. Desse círculo tomou-se dois outros pontos, a partir da mediatriz dos pontos previamente obtidos, e estes foram projetados. Assim passou-se a ter cinco pontos no Plano Projetivo e tornou-se possível utilizar a ferramenta "Cônica por Cinco Pontos" do GeoGebra.

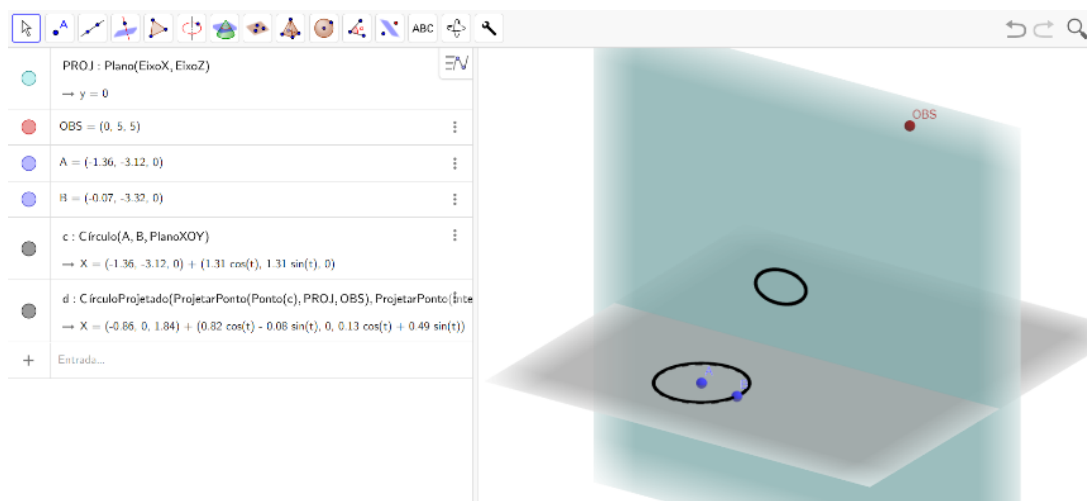
Uma vez criada a ferramenta **CírculoProjetado** é possível utilizá-la para criar uma outra ferramenta que projete círculos do Plano Euclidiano diretamente para o Plano Projetivo. Assim, seria suficiente para esta nova ferramenta, tomar e projetar três pontos quaisquer do círculo em questão. Pudemos fazer isso, como é visto no comando abaixo e na Figura 5.12:

```

CírculoProjetado(
  ProjetarPonto(Ponto(c), PROJ, OBS),
  ProjetarPonto(
    Interseção(
      c,
      Mediatriz(Ponto(c), Centro(c))
    ),
    PROJ, OBS
  ),
  ProjetarPonto(
    Interseção(
      c,
      Mediatriz(Ponto(c), PontoMédio(Ponto(c), Centro(c)))
    ),
    PROJ, OBS
  ),
  PROJ, OBS
)

```

Figura 5.12 – Criação de um círculo projetado a partir de um círculo no Plano Euclidiano.



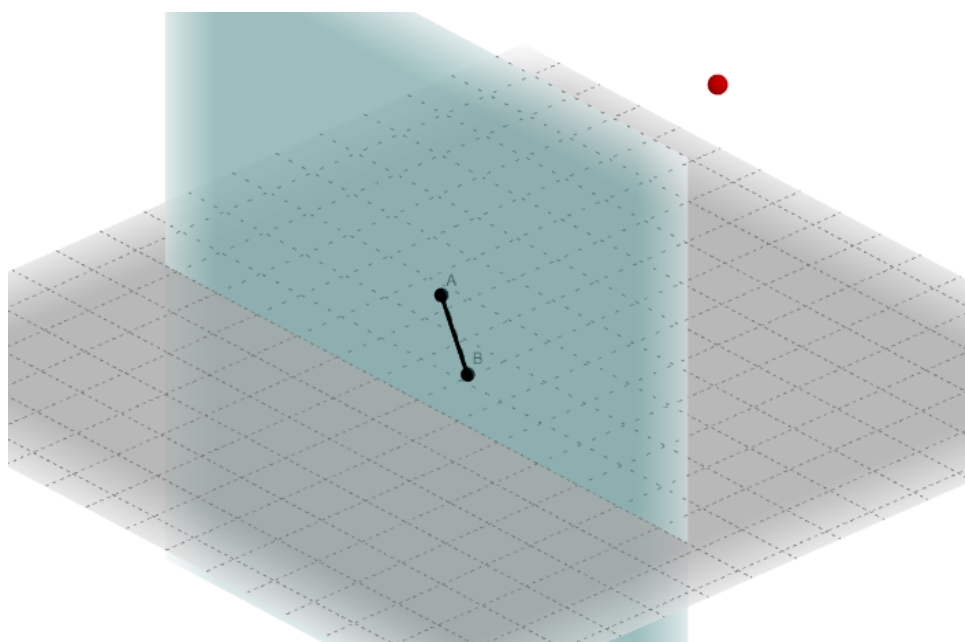
Fonte: Construção dos autores

Nesta construção tomamos o círculo c como base e usando a ferramenta $\text{Ponto}(c)$ obtemos um ponto genérico do círculo. Porém, esta ferramenta sempre retornará o mesmo ponto em cada círculo, fez-se necessário, então, obter outros pontos por meio de alternativas, daí a necessidade de criar pontos de interseção do círculo com mediatrizes a partir de elementos desse círculo, conseguindo assim projetar os três pontos desejados e fazer uso da ferramenta previamente criada.

5.2.3 Ferramenta 5 – Ponto Médio Projetado

Uma vez em posse das ferramentas de projeção (Projetar Ponto, Projetar Reta, Projetar Segmento e Projetar Círculo) é possível apresentar outras que criam elementos já no Plano Projetivo, sem a necessidade de sua contraparte "original" no Plano Euclidiano. Iniciamos essa etapa das ferramentas com a construção do Ponto Médio no Plano Projetivo, aqui chamada de Ponto Médio Projetado. Para isto temos como base a Figura 5.13.

Figura 5.13 – Segmento no Plano Projetivo para que seja calculado o Ponto Médio.



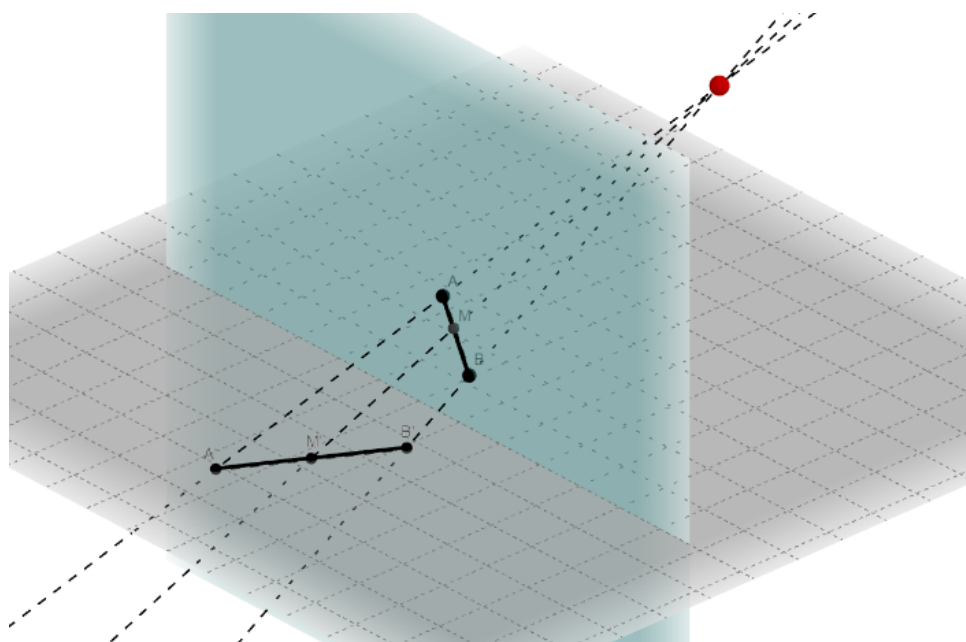
Fonte: Autores

No Plano Euclidiano, além da ferramenta nativa de ponto médio já pré-existente no GeoGebra é possível calcular o ponto médio a partir de uma mediatriz ou a partir do uso de medida do segmento, apesar de pouco prático no software, porém estas técnicas não podem ser realizadas no Plano Projetivo pois, pela natureza dos seus elementos que não conservam as proporções de medidas, fica impossível de determinar o posicionamento do ponto médio destas formas.

Seria possível, porém, criar o ponto médio no Plano Euclidiano e por meio da ferramenta Projetar Ponto transpô-lo para o Plano Projetivo, conforme visto na Figura 5.14, essencialmente é isto que a ferramenta apresentada aqui fará. Ela toma os pontos do Plano Projetivo e os "desprojeta", ou seja, ela recria os pontos que teriam gerado os pontos projetados e a partir destes pontos calcula o ponto médio o projetando de volta ao Plano Projetivo, como pode ser observado no código do comando.

```
ProjetarPonto(
  PontoMédio(
    Interseção(
```

Figura 5.14 – Criação do ponto médio por métodos semelhantes à projeção de elementos.



Fonte: Autores

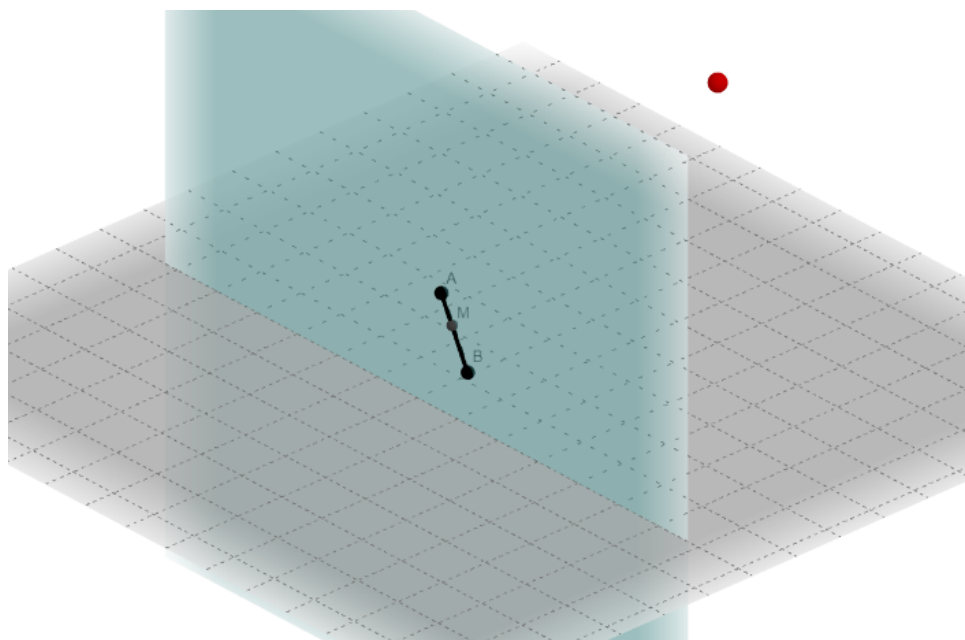
```

    Reta(A,Obs),
    PlanoXOY
),
Interseção(
    Reta(B,Obs),
    PlanoXOY
),
Obs,
Proj
)

```

Nesse código tomam-se os pontos A e B do Plano Projetivo e encontram-se os pontos correspondentes a eles no Plano Euclidiano, podendo assim usar a ferramenta `PontoMédio()` nativa do GeoGebra e então aplicar a nossa ferramenta `ProjetarPonto()`, obtendo o Ponto Médio Projetado desejado, visto na Figura 5.15.

Seria possível também criar a mesma ferramenta utilizando o princípio do cálculo do ponto médio com base na criação de um paralelogramo projetado e nas propriedades de ponto central de um paralelogramo a partir de suas diagonais, porém tendo em mãos as ferramentas base que possuímos de projeção de elementos, torna-se mais econômico em termos de comandos utilizar tais funções.

Figura 5.15 – Ponto médio obtido por meio da ferramenta Ponto Médio Projetado.

Fonte: Autores

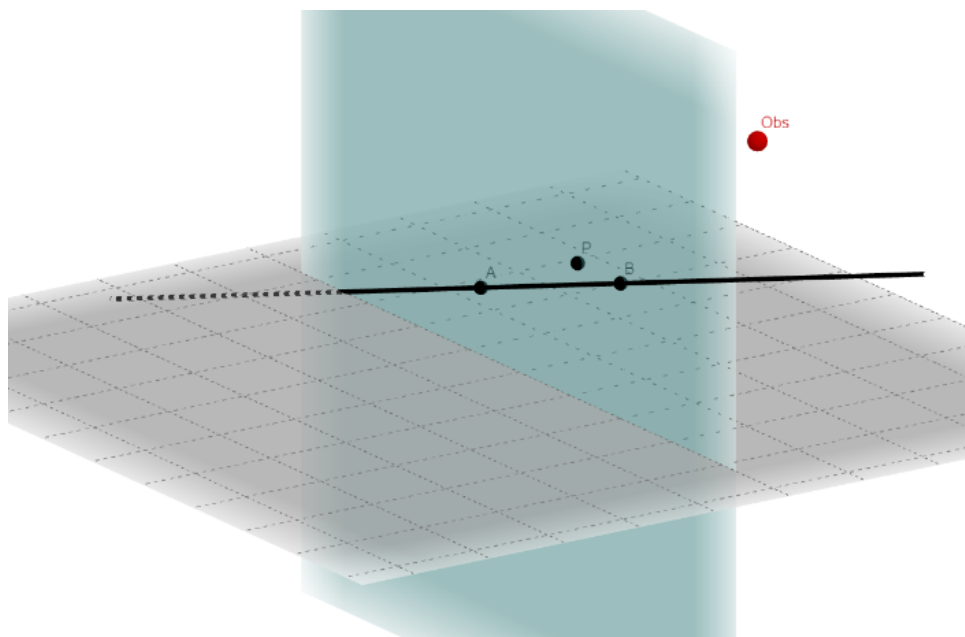
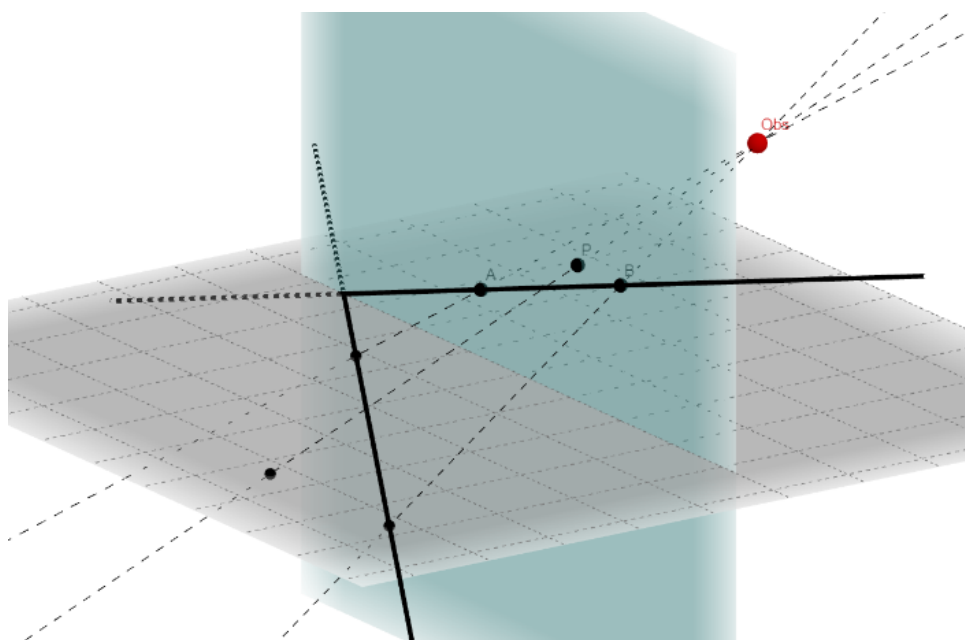
5.2.4 Ferramenta 6 – Perpendicular Projetada

A partir desse ponto iniciamos construções de cunho mais complexo e que exigem códigos mais robustos. No caso da perpendicular, que no Plano Euclidiano é a reta que cruza a reta base num ângulo reto, quando no Plano Projetivo perde-se a característica do ângulo reto, uma vez que na geometria projetiva, dada sua natureza, não permite a medição dos seus elementos.

A ideia central dessas ferramentas passa a ser não somente da análise das suas características dentro do ambiente da Geometria Projetiva, mas também a construção mais rápida desses elementos permitindo construções subsequentes. Por exemplo, em posse do ponto médio projetado e da perpendicular projetada é possível construir a mediatriz projetada e com esta e um conjunto de três pontos não colineares construir o centro de um círculo projetado.

A base de construção desta ferramenta é uma reta qualquer no Plano Projetivo e um ponto P qualquer fora da reta e no mesmo plano, conforme visto na Figura 5.16. A partir disso a construção da nossa ferramenta leva em conta a reta e ponto originários, ou seja, aqueles no Plano Euclidiano (Figura 5.17), para realizar a criação da reta perpendicular e então projetar esta reta de volta no Plano Projetivo (Figura 5.18).

Com o uso da ferramenta **Perpendicular Projetada** não se faz necessário a recriação de todos esses elementos, tornando-se possível criar apenas a perpendicular desejada sem poluir a tela com elementos ou a janela de álgebra do software. O resultado do uso da ferramenta pode ser observado na Figura 5.19.

Figura 5.16 – Reta AB e Ponto P no Plano Projetivo.**Fonte:** Autores**Figura 5.17** – Ponto e Reta originários no Plano Euclidiano.**Fonte:** Autores

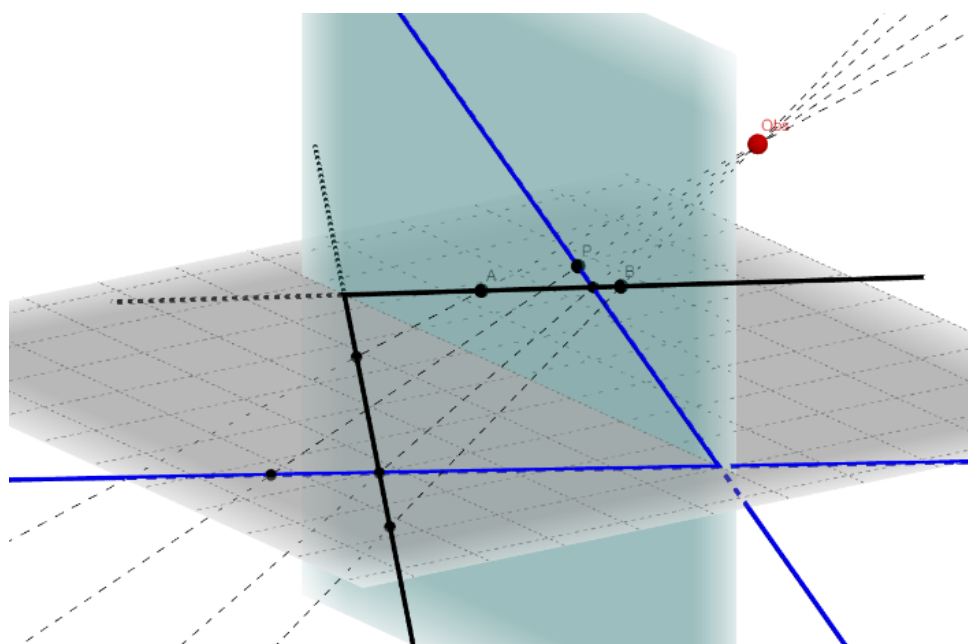
O código utilizado para a criação dessas etapas e, efetivamente, criação da ferramenta projetiva está listado abaixo:

```

ProjetarReta(
  Reta(
    Interseção(

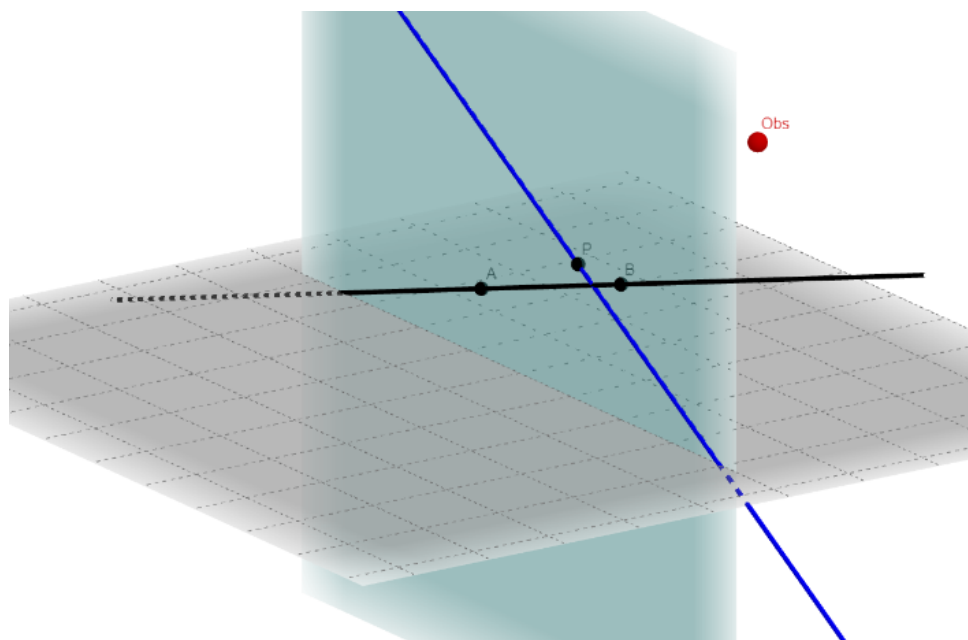
```

Figura 5.18 – Reta Perpendicular no Plano Euclidiano e sua projeção no Plano Projetivo.



Fonte: Autores

Figura 5.19 – Perpendicular Projetada por meio do uso da ferramenta projetiva.



Fonte: Autores

```

Reta(Obs,C) ,
PlanoXOY
),
Interseção(
Perpendicular(

```

```

Interseção(
  Reta(Obs,C),
  PlanoXOY
),
Reta(
  Interseção(
    Reta(Obs,f(0)),
    PlanoXOY
  ),
  Interseção(
    Reta(Obs,f(1)),
    PlanoXOY
  )
),
PlanoXOY
),
Círculo(
  Interseção(
    Reta(Obs,C),
    PlanoXOY
  ),
  Distância(
    Interseção(
      Reta(Obs,C),
      PlanoXOY
    ),
    Interseção(
      Reta(Obs,f(0)),
      PlanoXOY
    )
  ) + 5,
  PlanoXOY
)
),
Obs,
Proj
)

```

Por exigir mais etapas na sua construção, o código exige mais níveis de aninhamento, funções dentro de funções, mas ainda sendo executada de modo a garantir que a construção seja realizada sem a necessidade de suas contrapartes do Plano Euclidiano.

A partir das ferramentas projetivas desenvolvidas e descritas ao longo dos apêndices, foi elaborada uma sistematização que busca estabelecer uma correlação entre as operações realizadas no ambiente do GeoGebra e os fundamentos teóricos subjacentes às geometrias euclidiana e projetiva. Essa análise não se limita ao aspecto técnico das construções, mas pretende evidenciar como cada ferramenta se ancora, rompe ou transforma os axiomas clássicos de Euclides, ao mesmo tempo em que se insere no campo conceitual da geometria projetiva, cujos princípios se fundamentam na incidência, na dualidade e na extensão do plano por meio dos pontos impróprios.

Desse modo, a tabela a seguir busca tornar visível a transposição epistemológica que ocorre nas ferramentas, demonstrando como operações inicialmente métricas (mediatrizes, perpendiculares, círculos, polígonos regulares) ganham novos significados quando reinterpretadas sob o olhar projetivo. Essa leitura permite compreender, no contexto do Capítulo 4, o deslocamento da lógica construtiva do plano euclidiano para a lógica relacional da geometria projetiva, que se torna base da experimentação realizada com os estudantes.

Tabela 5.2 – Lista de comparação entre as Ferramentas Projetivas e os Axiomas.

Ferramenta Projetiva (FP)	O que faz (na sua lin- guagem)	Relação com Axi- omas de Euclides	Relação com Axi- omas da Geometria Projetiva	Justificativa / Fontes
Perpendicular Projetada	Cria a perpen- dicular proje- tada a partir de interseções e projeções no plano.	Preserva o axioma da reta entre dois pontos, mas não mantém ângulos retos; a perpendi- cularidade métrica se converte em relação de incidência.	Compatível com o axioma da incidên- cia e com a dualidade; perpendicula- ridade surge como imagem projetiva.	Veblen & Young (1910); Richter- Gebert (2011).

Ferramenta Projetiva (FP)	O que faz (na sua linguagem)	Relação com Axiomas de Euclides	Relação com Axiomas da Geometria Projetiva	Justificativa / Fontes
Paralela Projetada	Gera a paralela projetada, transformando o conceito de paralelismo em ponto de fuga.	Rompe com o quinto postulado, pois as paralelas se encontram no infinito.	Baseada no axioma de incidência e na noção de ponto impróprio; manifesta a eliminação do paralelismo.	Coxeter (1961); Veblen & Young (1910).
Ponto Médio Projetado	Calcula o ponto médio no plano base e projeta para o plano da imagem.	Usa noções métricas (distância) que não se preservam após a projeção.	Mantém coerência com o axioma da incidência; substitui métrica por posição.	Richter-Gebert (2011).
Mediatriz Projetada	Constrói a mediatriz e a projeta; serve como base para eixos e construções de cônicas.	Depende de noções métricas que se perdem após a projeção.	Mantém incidência e define linhas estruturantes no plano projetivo.	Veblen & Young (1910); Barros & Andrade (2018).
Círculo Projetado / Cônica	Projeção de um círculo que se transforma em cônica (elipse, parábola, hipérbole).	Transforma o axioma 3 (círculo) em relação projetiva sem métrica.	Relaciona-se ao Teorema dos cinco pontos: toda cônica é definida por cinco pontos distintos.	Richter-Gebert (2011); Barros & Andrade (2018).

Ferramenta Projetiva (FP)	O que faz (na sua lin- guagem)	Relação com Axi- omas de Euclides	Relação com Axi- omas da Geometria Projetiva	Justificativa / Fontes
Tangente Pro- jetada	Constrói tan- gente de uma cônica proje- tada a partir de interseções e mediatrizes.	Tangência deixa de ser métrica e passa a ser relacional.	Compatível com axioma de incidência e proprieda- des locais de cônicas.	Richter- Gebert (2011).
Polígono Regular Projetado	Gera vértices por rotação e projeção; mantém estrutura combinatória.	Perde re- gularidade métrica (ân- gulos e lados iguais).	Preserva relações de incidência e sequência de vértices.	Coxeter (1961).
Bissetriz Pro- jetada	Constrói bis- setriz e pro- jeta; represen- tação da di- visão angular projetada.	Bissetriz métrica perde sentido; resta apenas in- cidência projetiva.	Mantém co- erência com axiomas de incidência.	Richter- Gebert (2011).
Centro Proje- tado	Determina o centro do cír- culo e projeta; centro deixa de ser ponto equidistante.	Perde caráter métrico; pre- serva apenas a incidência en- tre mediatriz- es.	Compatível com concep- ção projetiva de centros de cônicas.	Richter- Gebert (2011).
Elipse/Hipérbole/Parábola Projetada	Constrói cônica específicas pela projeção de curvas do plano base.	Rompe com axiomas métricos, unificando os tipos de cônicas como projeções de um círculo.	Baseadas no axioma da incidência e Teorema das cinco con- dições para uma cônica.	Richter- Gebert (2011); Barros & Andrade (2018).

Ferramenta Projetiva (FP)	O que faz (na sua lin- guagem)	Relação com Axi- omas de Euclides	Relação com Axi- omas da Geometria Projetiva	Justificativa / Fontes
Reflexão Pro- jetada	Efetua re- flexão sobre reta ou ponto e projeta a imagem.	Reflexão deixa de ser isometria; mantém re- lações de colinearidade.	Compatível com trans- formações projetivas que preservam razão dupla.	Veblen & Young (1910); Richter- Gebert (2011).

Fonte: Elaborado pelos autores.

Ao observar a Tabela 5.2, é possível perceber que as ferramentas projetivas não apenas reproduzem algoritmos ou comandos de software, mas encarnam, de forma operativa, a transição epistemológica que a tese propõe: do pensamento métrico e local para o pensamento relacional e global. A análise demonstra que, ao deslocar o foco das medidas e dos ângulos para as incidências e interseções, cada ferramenta projeta também uma nova forma de ver e construir o espaço, conferindo concretude à teoria projetiva dentro de um ambiente de exploração digital.

Essa compreensão se articula diretamente com as discussões do Capítulo 4, em que o processo de ensino e aprendizagem é interpretado sob a ótica da transposição didática e da reconstrução conceitual. As ferramentas, quando analisadas à luz dos axiomas, evidenciam como o GeoGebra se torna não apenas um meio de construção geométrica, mas um mediador epistemológico que permite o trânsito entre diferentes paradigmas geométricos e cognitivos.

6 ANÁLISE E RESULTADOS

6.1 Análise a priori

6.1.1 Situação Didática – Pontos e Retas ao Teorema de Pappus

Conhecimentos prévios: Noções gerais de geometria plana (axiomas).

Utilizando seus conhecimentos de Geometria Plana e o GeoGebra, construa a situação pedida:

Dadas duas retas r e s e seis pontos, A, B, C, X, Y, Z , tal que $\{A, B, C\} \in r$ e $\{X, Y, Z\} \in s$. Que relação pode ser inferida a partir dos pontos formados pelos pares de retas AY, BX, AZ, CX e BZ, CY ?

6.1.1.1 Dialética da Ação

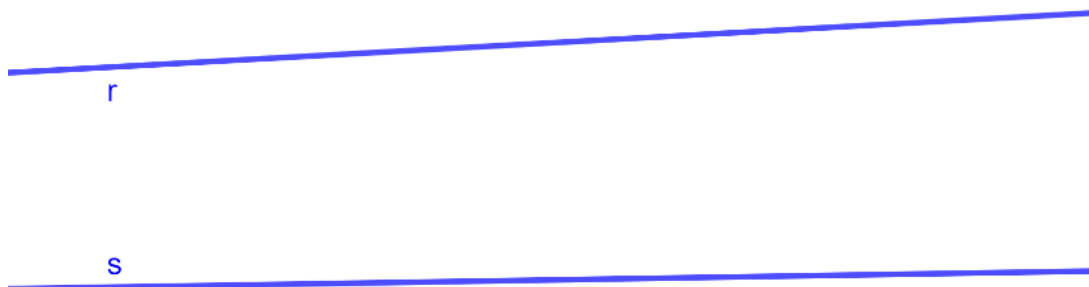
Nesta seção, de acordo com Almouloud (2007, p. 38), "as interações estão centralizadas na tomada de decisões". Dessa forma, é fundamental perceber que os alunos devem tomar decisões de maneira a interpretar o problema e buscar sua solução conforme a análise realizada por eles. Neste ponto, o professor introduz o Teorema sem citar a existência do mesmo para que os alunos possam iniciar as suas construções nos formulários. Para esta atividade específica, é necessário apenas o uso de lápis e régua.

A proposta inicial é estabelecida com base na Geometria Plana, logo não foge ao caráter usual de trabalho dos alunos, contudo, dadas as solicitações de iteração de retas pode haver confusão na hora da elaboração da construção. É esperado que os alunos obtenham construções semelhantes ao passo a passo estabelecido nas Figuras 6.1, 6.2 e 6.3.

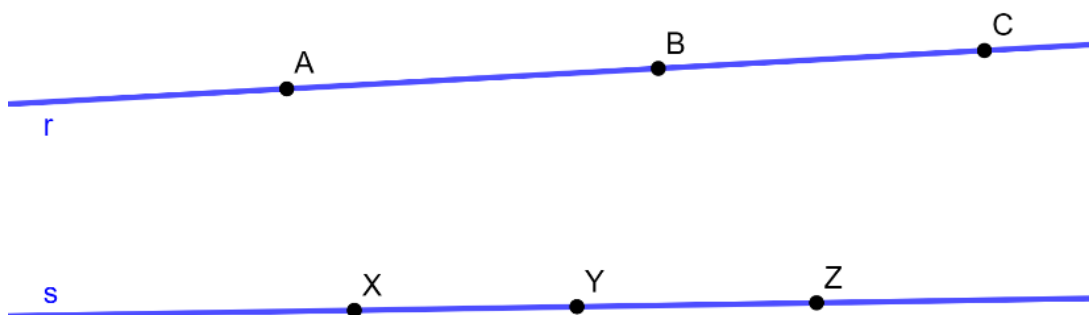
Uma vez em posse de suas construções os alunos deverão marcar os pontos, como na Figura 6.4, de encontro dos pares de retas mencionados e iniciar a etapa de discussão do problema, onde deverão realizar uma inferência sobre esses pontos e buscar respaldar matematicamente suas hipóteses.

Nesta etapa também é esperado que ocorram erros de construção, os erros mais comuns esperados estão apresentados nas Figuras 6.5 e 6.6.

A etapa de ação se encerra após realizadas todas as construções necessárias para que se dê início a fase em que os alunos passam a ser o sujeito do desenvolvimento do capital intelectual preparado para este momento.

Figura 6.1 – Construção esperada das retas r e s 

Fonte: Autores

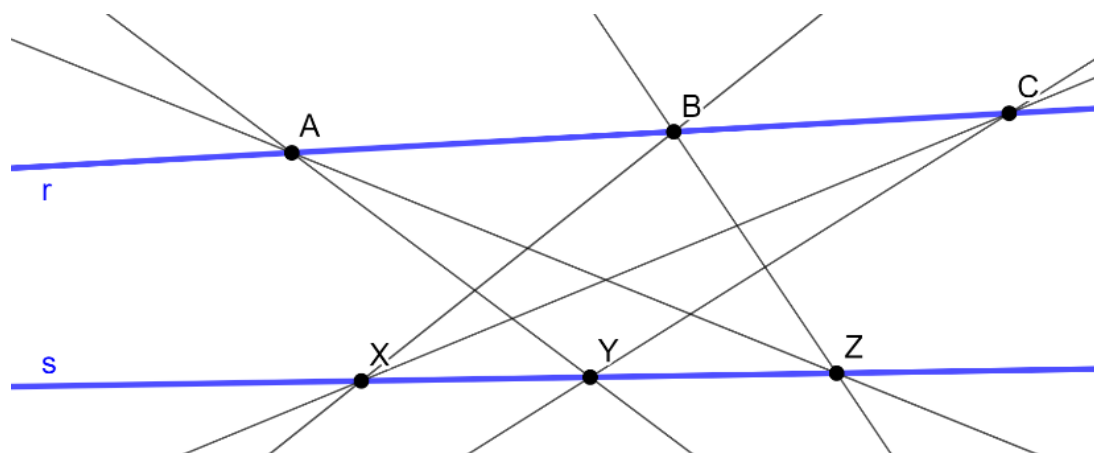
Figura 6.2 – Posicionamentos dos Pontos A, B, C, X, Y e Z

Fonte: Autores

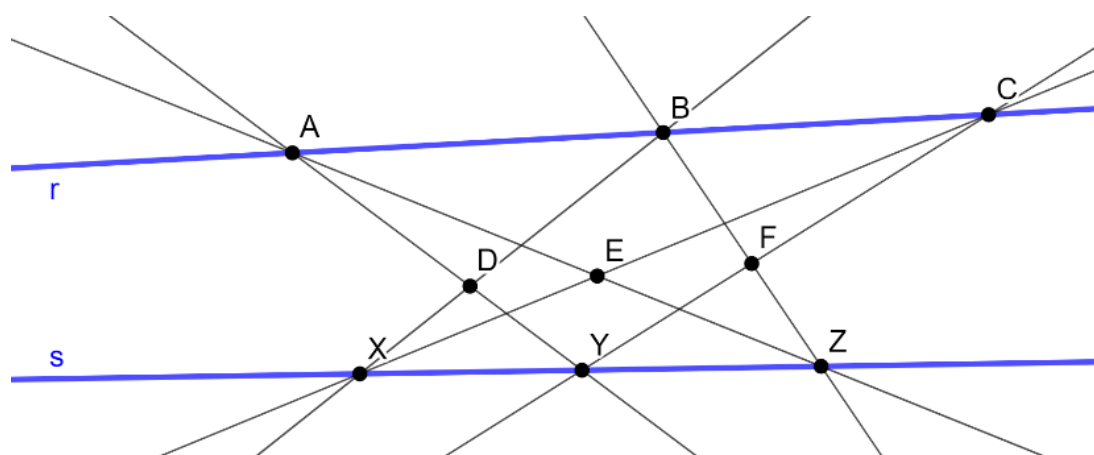
6.1.1.2 Dialética da Formulação

Conforme discutido por Almouloud (2007), nesta fase, os estudantes compartilham informações de maneira oral ou escrita com um ou mais colegas. Durante esse processo, ocorre uma interação mais aprofundada, com o objetivo de explorar ideias relacionadas ao problema em questão. Espera-se que os alunos discutam entre si sobre a proposta realizada, analisando os pontos conforme dispostos na construção.

Espera-se que os alunos consigam elaborar uma hipótese sobre esse posicionamento dos pontos e se o mesmo ocorre em todas as situações de construção ou se é pertinente à criação na posição que fizeram. Aqui espera-se que os alunos analisem suas estruturas ou construam outras para que possam traçar comparativos em relação à iteração dos pontos

Figura 6.3 – Construção das retas solicitadas na proposta

Fonte: Autores

Figura 6.4 – Marcação dos pontos a serem analisados na proposta

Fonte: Autores

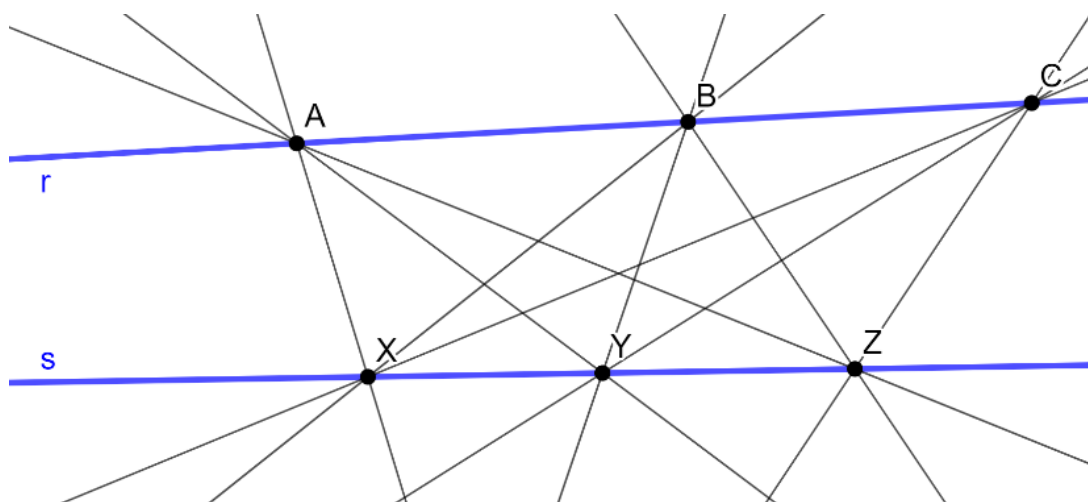
obtidos.

Também é esperado, devido a possíveis erros na construção inicial, que os alunos não consigam identificar a colinearidade dos pontos, dificultando, assim, a elaboração de uma hipótese. Nesta etapa, não se faz necessário que os alunos justifiquem suas hipóteses ou conclusões, apenas que as estabeleçam.

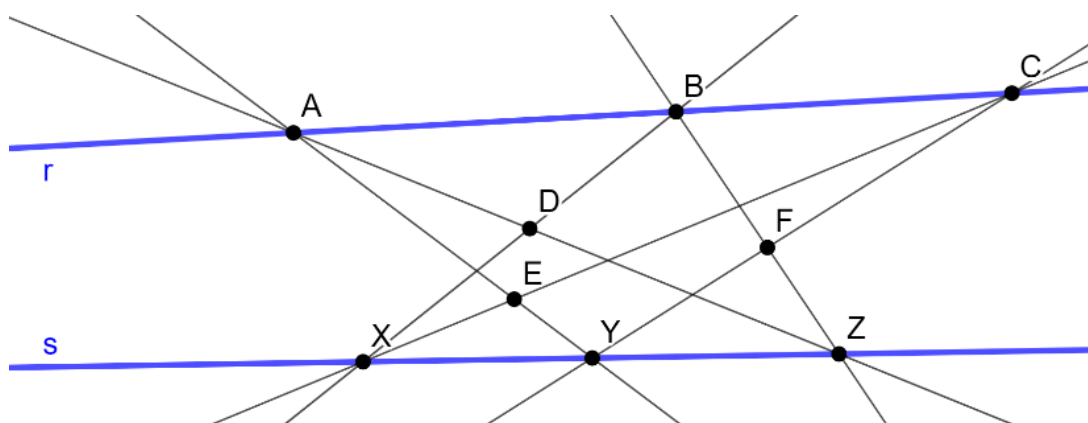
6.1.1.3 Dialética da Validação

Nesta fase, espera-se que os alunos articulem argumentos e apresentem abordagens matemáticas. Conforme apontado por Almouloud (2007, p. 40), o objetivo desse estágio é validar as afirmações formuladas durante as fases de ação e formulação. Essa validação pode englobar diferentes níveis, incluindo validade sintática, semântica e até mesmo pragmática, esta última relacionada à eficácia do texto.

Espera-se que os alunos consigam expressar textualmente as dificuldades encon-

Figura 6.5 – Erro esperado no traçado das retas

Fonte: Autores

Figura 6.6 – Erro esperado na colocação dos pontos nos pares de retas pedidos

Fonte: Autores

tradas na construção proposta, destacando suas dificuldades em relação aos critérios informados. Esses critérios incluem a compreensão do texto matemático, as possibilidades de posicionamento dos elementos, a obtenção do resultado, a maleabilidade da construção e a análise da situação final obtida. Além disso, os alunos devem elaborar uma justificativa para a hipótese, ou conclusão, obtida a partir da análise realizada na construção.

Nesta etapa, os alunos buscarão respaldar matematicamente suas construções. Tal construção possui um nível que pode não ser o mais comum entre os alunos da graduação, então é importante ver o quanto os alunos irão demonstrar de seus conhecimentos matemáticos para obter a demonstração esperada.

6.1.1.4 Dialética da Institucionalização

Neste momento, o professor reassume a condução das atividades e formaliza o resultado alcançado pelos estudantes. Segundo Almouloud (2007, p. 40), nesta fase, "o

professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber". Esse é o momento em que o aluno verifica se sua conclusão está de acordo com o que foi proposto na situação didática: obter os pontos formados pelas retas mencionadas e identificar que tais pontos são colineares.

O professor apresenta então a ferramenta do GeoGebra chamada de **Relação()** e pede que os alunos que realizaram a construção corretamente verifiquem a relação dos três pontos, obtendo assim a resposta indicando a colinearidade dos pontos. O próprio GeoGebra já informa que a checagem é feita matematicamente (Figura 6.7), porém tal checagem não é geral, apenas pontual.

Figura 6.7 – Checagem da relação dos pontos



Fonte: Autores

A partir deste ponto o professor apresenta o Teorema de Pappus e algumas de suas demonstrações, indicando as referências para que os alunos possam verificar posteriormente. Aqui também o professor faz menção à Geometria Projetiva, parte do objeto de estudo da pesquisa e que será explorada em situações didáticas posteriores.

6.1.2 Situação Didática – Teorema de Pappus e a limitação na Geometria Euclidiana

Conhecimentos prévios: Noções gerais de geometria plana (axiomas), uso do GeoGebra.

Dado o Teorema de Pappus e os seus conhecimentos da Geometria Plana Euclidiana, verifique se o Teorema é válido para qualquer posicionamento relativo das retas propostas.

Teorema de Pappus: Dado um conjunto de pontos colineares A , B e C , e um outro conjunto de pontos colineares A' , B' e C' , os pontos de interseção X , Y e Z dos pares de retas AB' e $A'B$, AC' e $A'C$ e BC' e $B'C$ também serão colineares.

6.1.2.1 Dialética da Ação

Nesta etapa o professor retoma o Teorema de Pappus, visto na Situação Didática 1, abordando sua construção, os pontos determinados no Teorema e sua conclusão. Parte-se então para apresentar, na lousa digital (ou no computador) a manipulação dos pontos na construção realizada no GeoGebra, permitindo que os alunos observem como os posicionamentos dos pontos das retas iniciais afetam a posição da reta resultante.

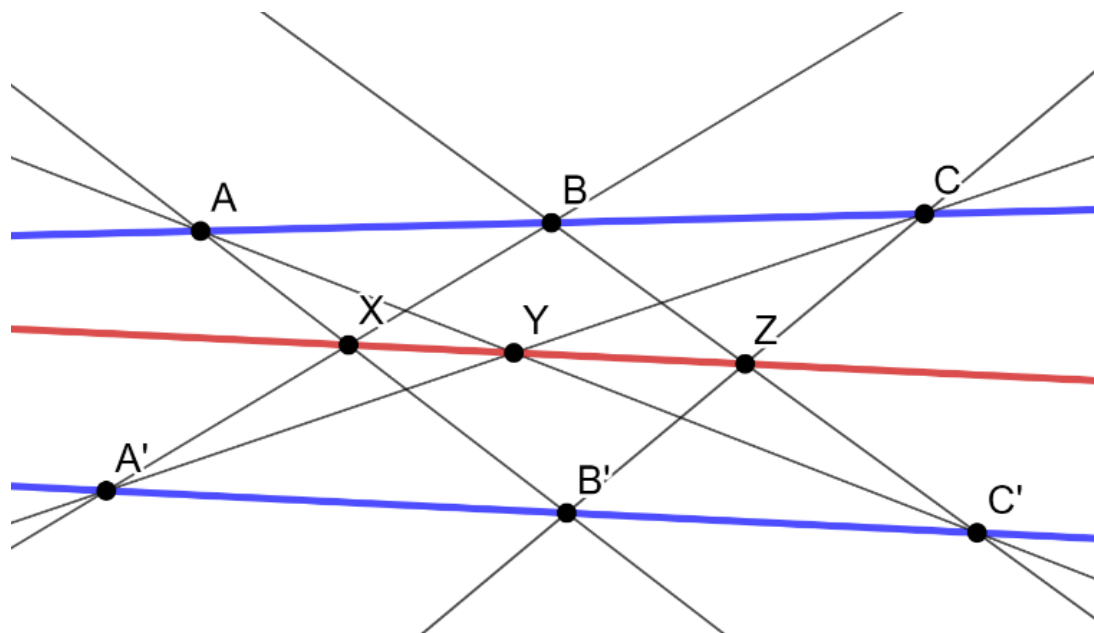
Após essa demonstração inicial, o professor retoma o argumento final da primeira Situação Didática colocando em questionamento a conclusão do Teorema na Geometria Plana Euclidiana e então apresenta aos alunos a atividade proposta, solicitando que, dado o Teorema de Pappus, eles busquem uma construção que desafie a conclusão de colinearidade do Teorema.

Parte-se então para a construção no formulário de pesquisa do Teorema de Pappus e possíveis variações, na busca de encontrarem uma situação que gere conflito aparente com o proposto no Teorema.

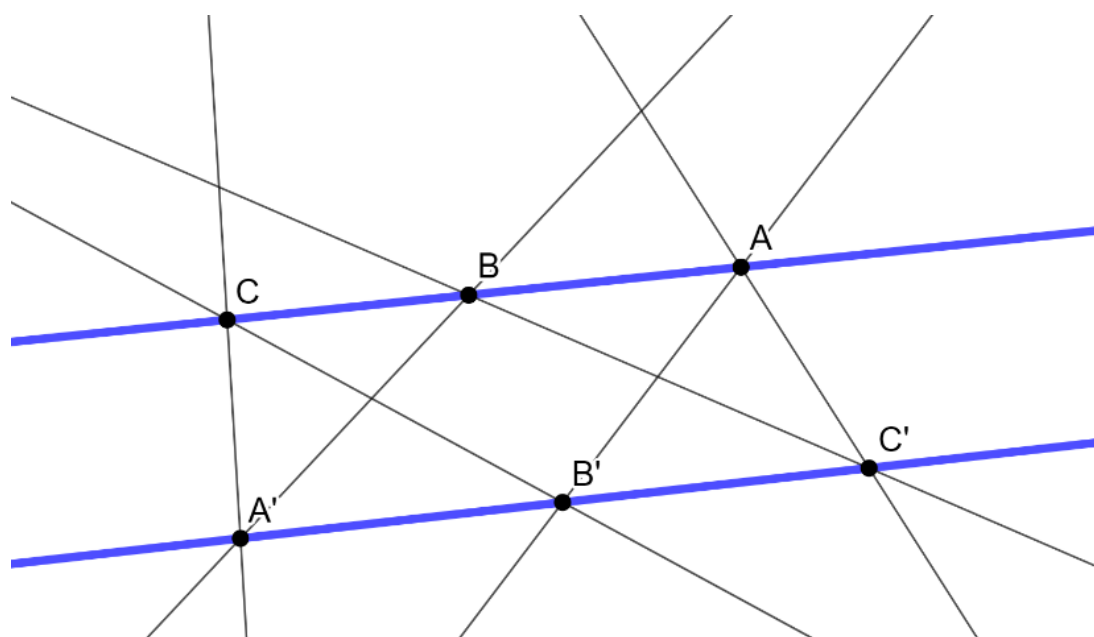
Inicialmente, espera-se que os alunos consigam reproduzir corretamente a construção do Teorema, atingindo a construção semelhante à Figura 6.8.

Em seguida os alunos deverão elaborar novas construções para tentar atingir modelos que atinjam o proposto pela atividade. Poderão registrar até três construções que considerem que alcançam a proposta. Os registros serão feitos nos espaços apropriados do formulário de pesquisa. Para essas construções, alguns erros são esperados, tais como considerar que pelos pontos estarem fora do plano de desenho eles não são formados, conseqüentemente não há reta, como na Figura 6.9, ou mudar a ordem das retas de construção do Teorema de modo a não haver a demarcação dos pontos, como representado na Figura 6.10.

Nesse momento ainda não é esperado que os alunos atinjam a construção correta, uma vez que o processo de entendimento do posicionamento dos pontos não é totalmente intuitivo. Assim, as construções adicionais garantem que o aluno vai explorar o posicionamento dos pontos em prol de entender a relação dos elementos do Teorema.

Figura 6.8 – Construção esperada do Teorema de Pappus

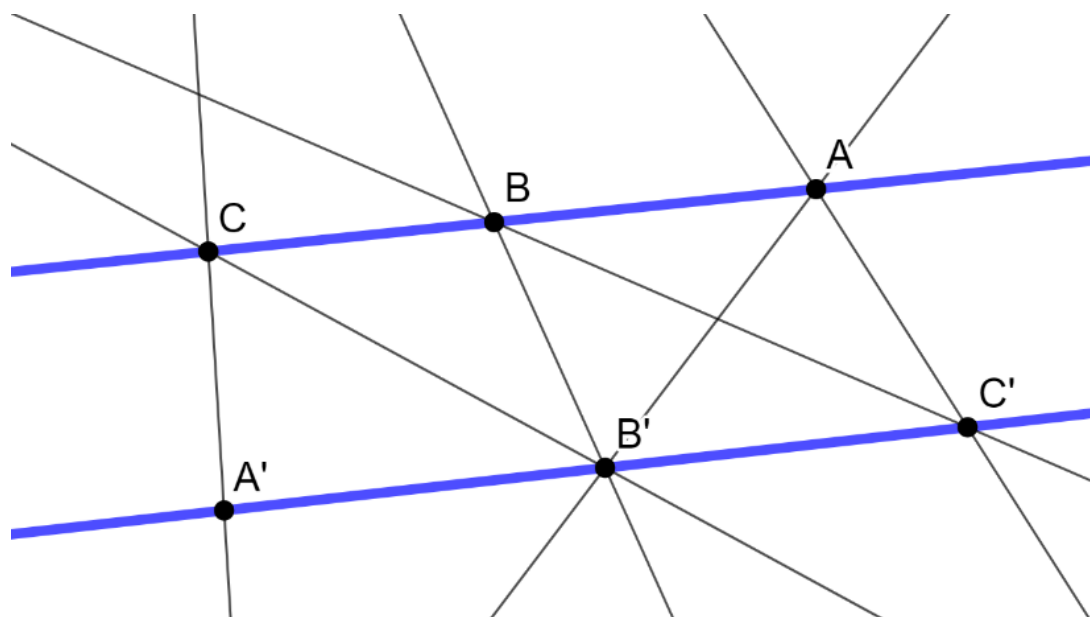
Fonte: Autores

Figura 6.9 – Erro esperado da proposta da variação do Teorema de Pappus

Fonte: Autores

6.1.2.2 Dialética da Formulação

Nesta etapa o professor indicará para os alunos que discutam entre si de modo a explorar as construções que fizeram e que tentem atingir uma conclusão mais clara, registrando suas conclusões no quadro indicado no formulário. Após o início da conversa entre os alunos, o professor deve visitar as mesas para dar algum direcionamento de onde os alunos devem explorar na construção em prol de obter o resultado esperado.

Figura 6.10 – Outro erro esperado da proposta da variação do Teorema de Pappus

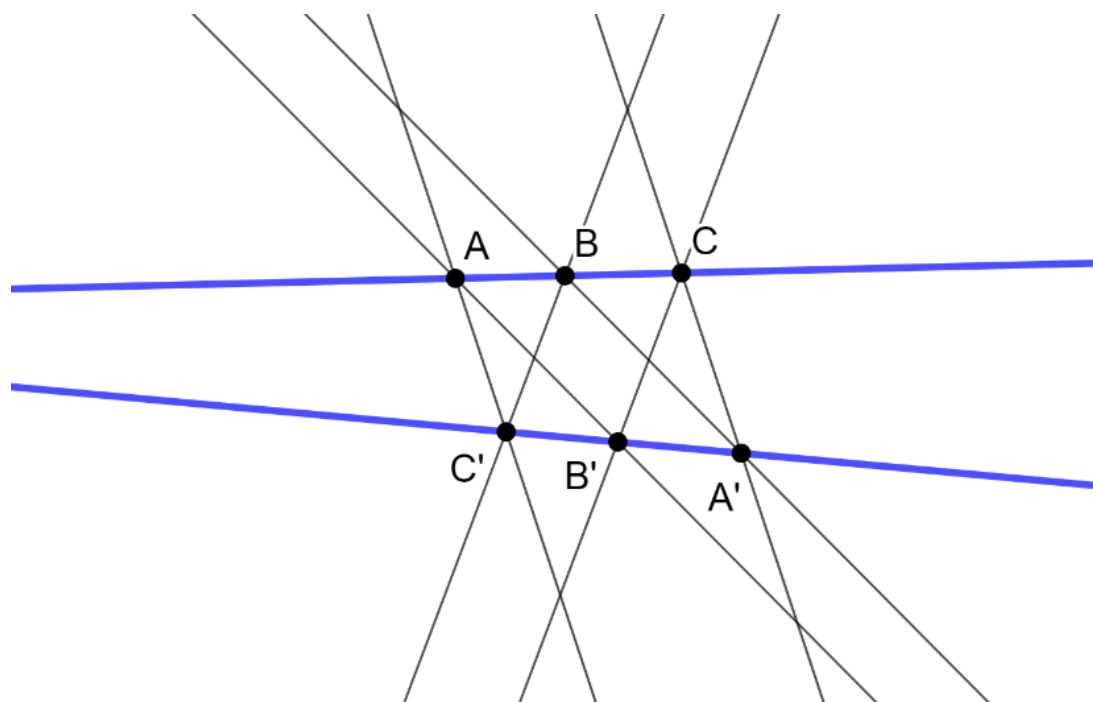
Fonte: Autores

Espera-se que os alunos discutam entre si sobre a proposta realizada, particularmente no que tange a uma possível limitação da Geometria Plana em relação a esse Teorema, considerando que deve existir algum posicionamento das retas que cause essa "quebra".

Espera-se que os alunos concluam que há a possibilidade de os pontos criados pelas retas não serem colineares e tentem manipular a posição dos pontos iniciais para obter esse resultado. Contudo, tal resultado não é possível, e é pouco provável que os alunos consigam reposicionar os pontos de modo a alcançar a situação esperada de paralelismo das retas.

Dessa forma, espera-se que os alunos, em conjunto, concluam que, para que na Geometria Plana Euclidiana o Teorema de Pappus "falhe", os pontos de encontro não devem existir. Portanto, as retas precisarão ser paralelas, e devido à dificuldade de posicionar os pontos inicialmente para obter o paralelismo, a construção deverá ser iniciada a partir das retas paralelas, conforme ilustrado na Figura 6.11.

Uma vez realizada a construção, os alunos devem observar que, de fato, como as retas são paralelas, os pontos de interseção não poderão ser traçados. Contudo, essa conclusão é equivocada e, em tese, não invalida o Teorema, uma vez que, na Geometria Projetiva, retas paralelas se encontram no infinito. Esse ponto de encontro, denominado ponto impróprio ou ponto de fuga, garante que, mesmo quando os três pontos estão "no infinito", eles permanecem colineares. Assim, ao ampliar o conhecimento para o campo projetivo, preserva-se a validade do Teorema, pois, como afirmam Brannan, Esplen e Gray (1999) e Barros e Andrade (2010), a Geometria Projetiva constitui uma extensão

Figura 6.11 – Construção esperada do Teorema de Pappus com retas paralelas

Fonte: Autores

natural da Geometria Euclidiana, na qual o conceito de paralelismo é substituído pela ideia de interseção no infinito, assegurando a continuidade das propriedades de incidência e colinearidade. Essa concepção, quando explorada didaticamente, permite que o professor conduza o aluno à superação de obstáculos de visualização euclidiana, favorecendo a compreensão de que o infinito, longe de representar uma impossibilidade, é um elemento estruturante no pensamento projetivo.

6.1.2.3 Dialética da Validação

Espera-se, nessa fase, que os alunos concluam que, devido a esse aspecto da construção, se apresenta a limitação da Geometria Plana Euclidiana e se questionem sobre a possibilidade de construir esse Teorema, mesmo com essa limitação.

Espera-se que os alunos consigam expressar textualmente as dificuldades encontradas na construção do Teorema, destacando suas dificuldades em relação aos critérios informados. Esses critérios incluem a compreensão do Teorema, as possibilidades de posicionamento dos elementos, a obtenção do resultado, a maleabilidade da construção e a extrapolação do proposto. Além disso, os alunos devem elaborar uma justificativa para a proposição de uma situação em que o Teorema proposto não seja aplicável.

Nesta etapa, compreende-se que os alunos buscarão uma construção que, inicialmente, poderá não parecer intuitiva. Por isso, é necessária uma discussão para considerar que a limitação do Teorema ocorrerá devido à inexistência dos pontos de encontro das

retas, resultante do paralelismo.

6.1.2.4 Dialética da Institucionalização

Neste momento, o professor reassume a condução das atividades e formaliza o resultado alcançado pelos estudantes. Esse é o momento em que o aluno verifica se sua conclusão está de acordo com o que foi proposto na situação didática, permitindo-lhe compreender a proposta geral da pesquisa: a introdução ao estudo da Geometria Projetiva por meio de uma análise comparativa entre as Geometrias Euclidiana e Projetiva, utilizando a Transição Euclidiana-Projetiva (TEP), com ênfase na visualização.

6.1.3 Situação Didática – Teorema Fundamental da Geometria Projetiva

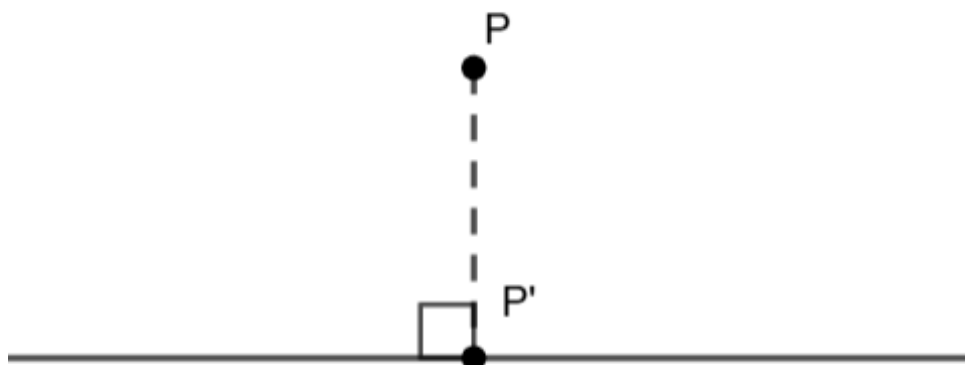
Conhecimentos prévios: Noções gerais de geometria plana (axiomas) e dos fundamentos de Geometria Projetiva.

Dadas duas retas, r e s , e os pontos A' , B' e C' na reta s , é possível traçar os pontos A , B e C , com exatidão, na reta r , apenas sabendo que A' , B' e C' são suas projeções, respectivamente?

6.1.3.1 Dialética da Ação

Nesta etapa o professor inicia a situação apresentando o conceito de projeção, utilizando modelos de projeção que os alunos já conhecem, como a projeção ortogonal (Figura 6.12), e em seguida apresentando projeções mais complexas, buscando assim ampliar o conceito de projeções que os alunos possuem para que possam então imergir na situação que será proposta a eles.

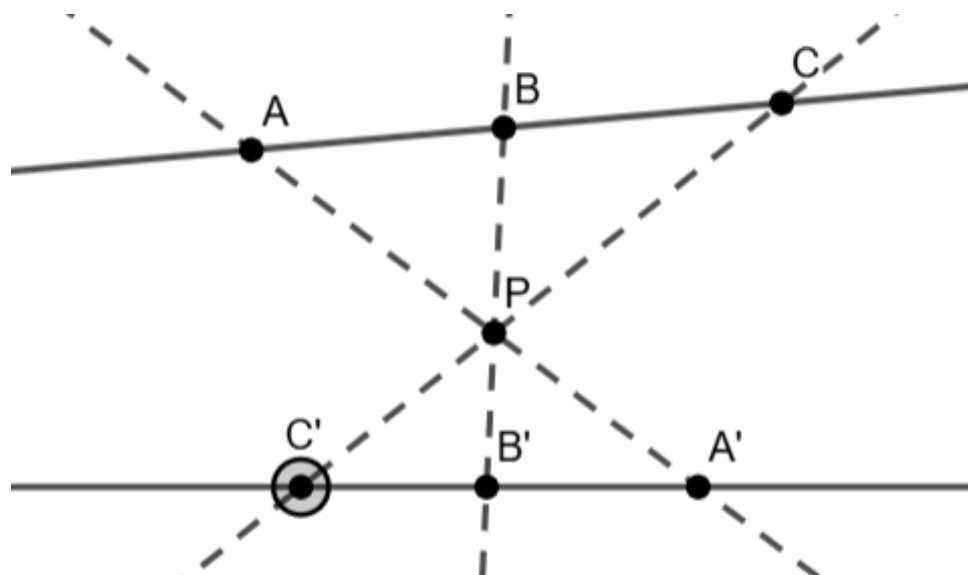
Figura 6.12 – Projeção ortogonal do Ponto P em P'



Fonte: Autores

Após a apresentação da projeção ortogonal, explora-se os conceitos que introduzirão os alunos nas projeções com mais de um elemento e que serão base para a compreensão dos conceitos apresentados posteriormente, em especial no uso do software nas projeções em multiplanos. Introduce-se então a ideia da projeção por um ponto, onde perde-se a característica de uma projeção por uma perpendicular, como na ortogonal, e passa-se a usar um referencial específico, neste caso o Ponto P. Assim utilizam-se as retas suportes como bases de desenho, onde os pontos serão traçados, e traçam-se as retas dos pontos originais (A, B e C), passando por P e por fim marcando suas projeções na outra reta, A', B' e C', como visto na Figura 6.13.

Figura 6.13 – Projeção dos Pontos A, B e C por um ponto P, entre as retas suportes

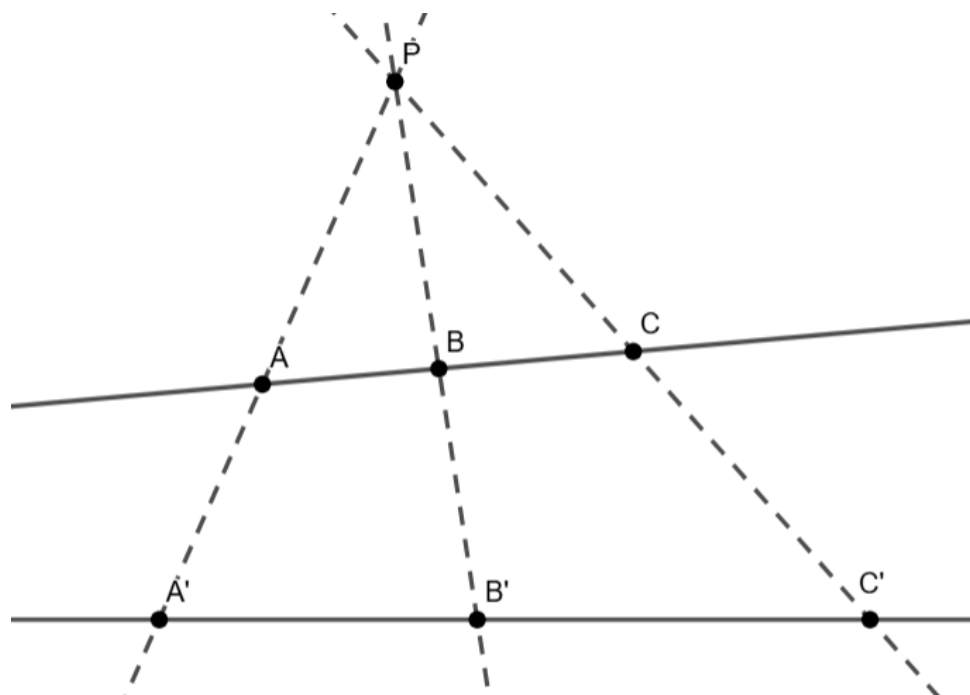


Fonte: Autores

No caso do ponto P ser externo às retas suportes, o processo de desenho em si não muda, porém, como pode ser visto na Figura 6.14, os pontos A', B' e C' estão "alinhados" com os pontos A, B e C, no sentido de estarem, cada um em sua reta, na mesma ordem, diferentemente do exemplo anterior onde eles estavam "espelhados". Além disso, as retas traçam um formato triangular. Em $\mathbb{R}^3$ este formato seria semelhante a um cone, daí o nome de Projeção Cônica, esta que será base fundamental para nosso estudo nas construções em multiplanos da TEP.

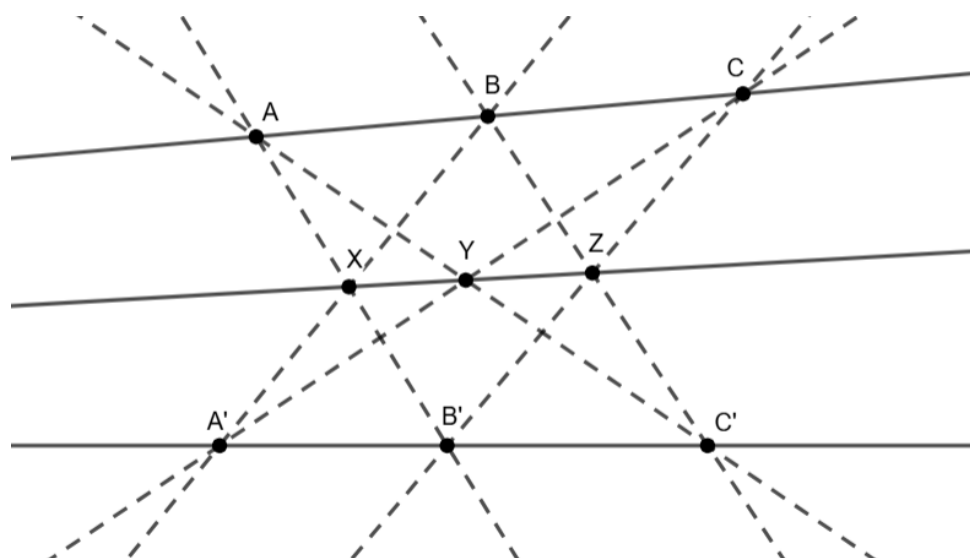
Por fim, apresenta-se a projeção a partir de uma reta, semelhante à projeção ortogonal, porém, dessa vez, tem-se múltiplos pontos a serem projetados e as retas suportes já são dadas. Desse modo a projeção não é totalmente arbitrária: se faz necessário primeiro estabelecer um ponto projetado inicial, que no caso da construção da Figura 6.15, é o ponto A'. A partir do ponto definido podem-se traçar as retas que gerarão os outros pontos de projeção e os pontos X, Y e Z que seriam os "projetores", ou seja, os pontos de apoio na reta de projeção que estabelecem como será feita a projeção dos pontos originais.

Figura 6.14 – Projeção dos Pontos A, B e C por um Ponto P, externo às retas suportes (Projeção Cônica)



Fonte: Autores

Figura 6.15 – Projeção dos Pontos A, B e C por uma reta (Teorema de Pappus)



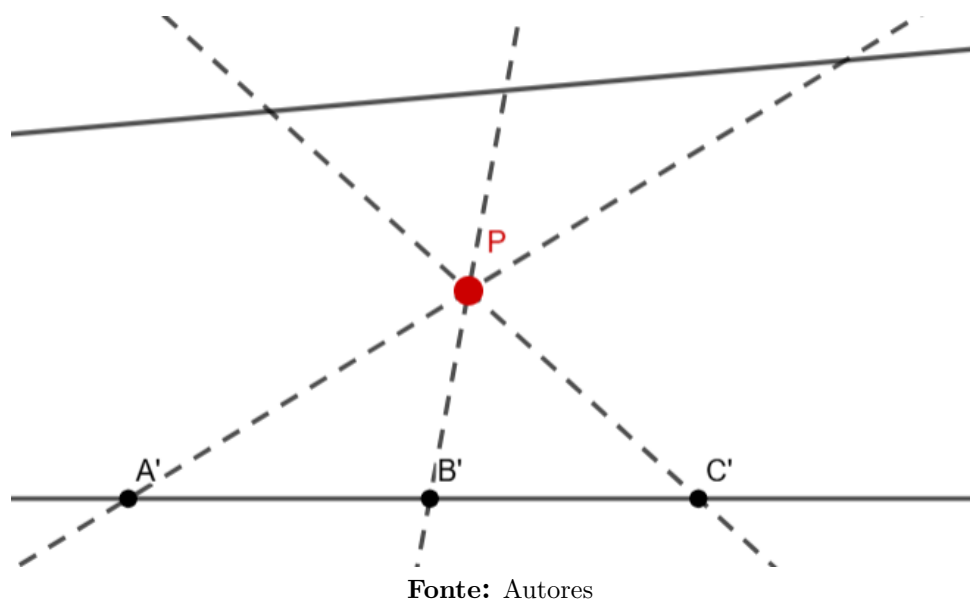
Fonte: Autores

Uma vez apresentados todos esses conceitos, é hora de os alunos iniciarem suas propostas e tentarem atender ao que foi solicitado. É de suma importância saber que, a priori, não é possível obter os pontos originais sem conhecer a referência de projeção. Espera-se que os alunos confrontem essa barreira e percebam que sem uma base, ou seja, sem uma referência, seja ponto ou reta, não é possível que sejam recriados os pontos originais A, B e C, assim alcançando o que fala o Teorema fundamental da Geometria

Projetiva.

A partir disso é esperado que os alunos criem suas próprias referências para então atingir o objetivo pedido, desde a criação do ponto, de uma reta ou mesmo da interseção das retas dadas em busca de ter alguma base para que a situação possa ser completada. Dentre os erros esperados, o mais comum deverá ser a criação de um ponto de referência para a projeção, conforme a Figura 6.16.

Figura 6.16 – Erro esperado – Criação de ponto de referência

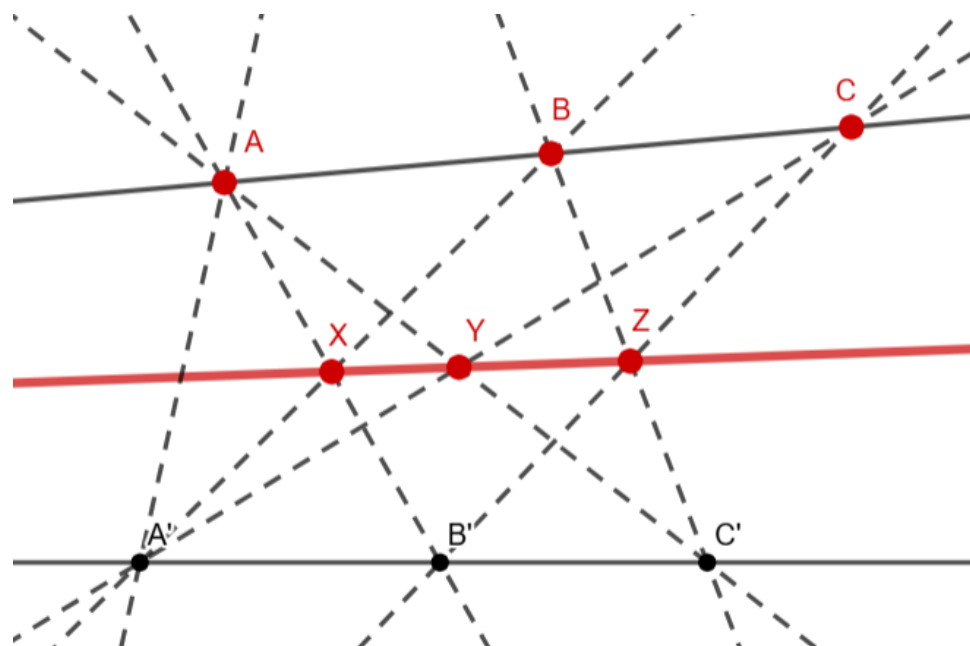


A partir da explicação dada sobre projeções e modelos de referenciais, também é esperado que os alunos tentem replicar a projeção por meio de uma reta, conforme o Teorema de Pappus, como na Figura 6.17, para então solucionar a situação pedida. É provável que os alunos perguntem ao professor se eles podem criar seus próprios referenciais. Nesse momento é sugerido que deixe os alunos livres para fazerem o que bem quiserem nas suas construções. O mais importante nesse momento não é alcançar a projeção dos pontos em si, mas entender que não é possível ter uma projeção sem ter os pontos todos definidos, conforme é dito no Teorema fundamental da Geometria Projetiva.

Por fim, dentre os erros esperados, deverá haver alunos que sabem que não podem usar um referencial estabelecido e procurarão criar suas projeções apenas com os elementos que possuem. Logicamente não será possível realizar tal construção, ainda assim é interessante observar a forma como eles estabelecem suas criações para obter o resultado mesmo diante de situações pouco favoráveis, como visto na Figura 6.18.

6.1.3.2 Dialética da Formulação

Nesta etapa os alunos deverão reunir-se para discutir suas construções e buscar entre si alternativas de obter o resultado esperado. É esperado que os alunos comecem a

Figura 6.17 – Erro esperado – Criação de reta de referência

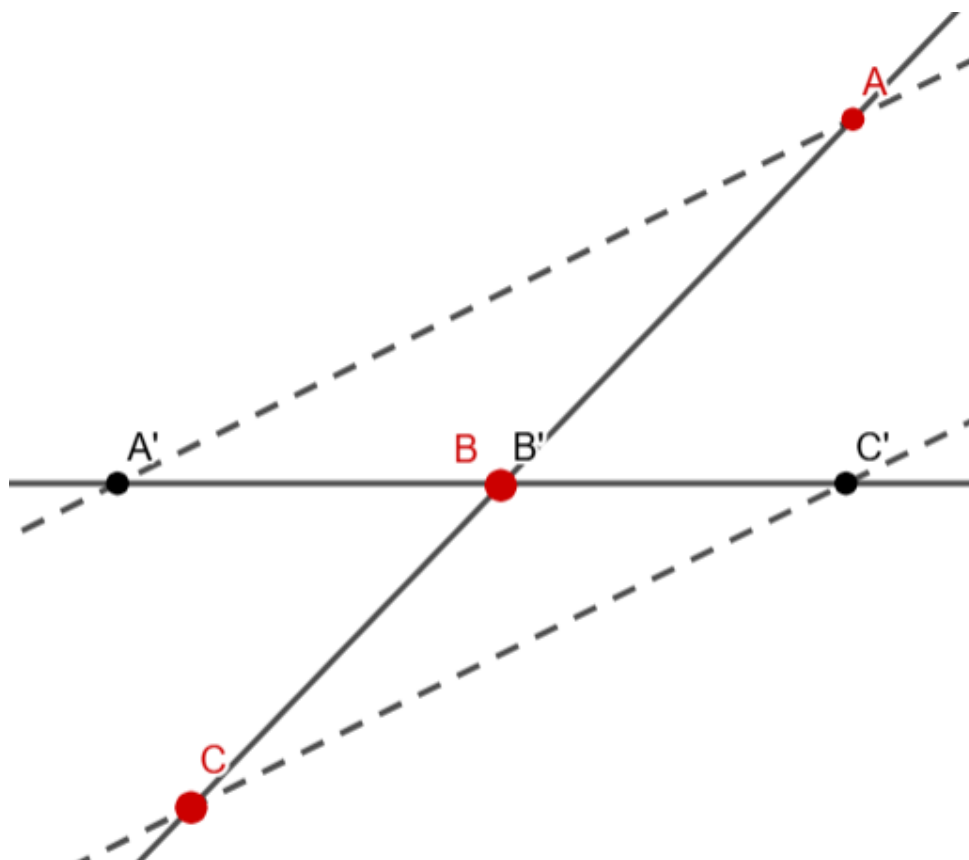
Fonte: Autores

concluir que não deveria haver elementos a mais em suas construções, pois estes não foram dados na situação, e que suas construções deveriam conter apenas as retas e os pontos dados e que a partir disso não seria possível construir o pedido, pois há a ausência de elementos chave para a construção.

Neste momento o professor poderá também intervir para buscar direcionar os alunos para este conceito, abordando as criações já realizadas e inserindo questionamentos como "Este elemento foi dado no enunciado da proposta?" de modo a criar no aluno a dúvida sobre sua construção e a reflexão sobre alternativas para realizar seu desenho de modo a tentar atender à proposta.

6.1.3.3 Dialética da Validação

Nesta etapa não há uma construção esperada, pois, como dito anteriormente, não seria possível realizar a construção. Aqui é esperado que no campo do formulário dedicado às conclusões eles relatem que não é possível realizar a construção devido à falta de elementos necessários. O professor pode realizar um questionário com os alunos que os ajude a elaborar melhor suas conclusões e que dessa forma possam tentar alcançar por conta própria a conclusão quanto à impossibilidade de realizar a construção.

Figura 6.18 – Erro esperado – Cruzamento das retas e definição arbitrária de pontos

Fonte: Autores

6.1.3.4 Dialética da Institucionalização

Nesta etapa o professor irá apresentar aos alunos o Teorema Fundamental da Geometria Projetiva: "Toda colinação¹ é induzida por um operador linear invertível do $\mathbb{R}^3$ " (Barros e Andrade, 2010) ou "Uma projetividade é determinada quando três pontos colineares e seus três pontos colineares correspondentes são dados" (Auffinger e Valentim, 2003). Assim, conclui-se que a projeção só ocorre quando se tem os três pontos colineares iniciais e os seus três pontos colineares projetados. Somente assim se obtém uma projeção. Logo, com a situação dada aos alunos, seria impossível obter os pontos originais da projeção.

6.1.4 Situação Didática – As Cônicas na Geometria Projetiva

Conhecimentos prévios: Noções gerais de geometria plana (axiomas), uso do GeoGebra, noções de cônicas e dos fundamentos de Geometria Projetiva.

Considerando as cônicas no Plano Euclidiano (circunferência, elipse, parábola e hipérbole), construa num Plano Projetivo dado o esboço de uma representação de cada

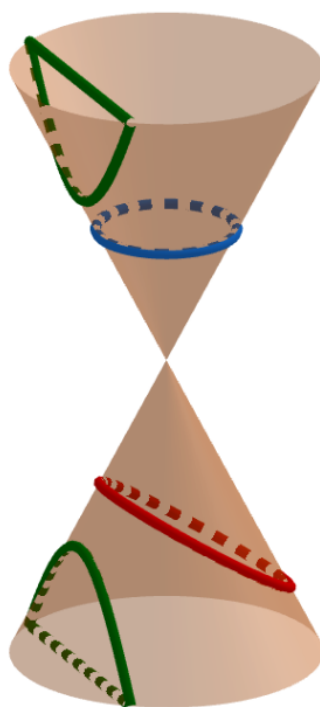
¹transformação matemática que associa a elementos colineares (pontos ou linhas) elementos correspondentes em outro plano ou espaço.

um dos tipos de cônicas e justifique suas construções com base no caráter de visualização.

6.1.4.1 Dialética da Ação

Nesta etapa o professor inicia a situação apresentando as cônicas num modelo tridimensional, apresentando os tipos de cônicas e como se dá sua construção com base no nome deste grupo (Figura 6.19). Em seguida, introduz o Plano Projetivo padrão, sendo este um plano bidimensional contendo uma reta nomeada de Linha do Horizonte. Deverá apresentá-lo aos alunos indicando que a Linha do Horizonte no Plano Projetivo indica a "posição do infinito", ou seja, onde as retas paralelas do Plano Euclidiano se cruzariam.

Figura 6.19 – Representação tridimensional de Cônicas



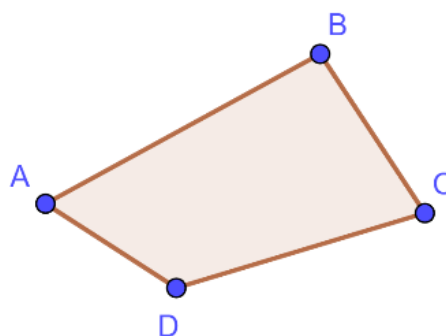
Fonte: Autores

Apresentado o Plano, o professor realiza a demonstração da construção de um quadrilátero e de um paralelogramo no plano projetivo (Figuras 6.20 e 6.21), indicando que o quadrilátero em si não pode receber uma definição mais adequada, pois no Plano Projetivo não há o parâmetro de congruência de medidas. Já no caso do paralelogramo, o professor demonstra que pode garantir que é um paralelogramo pois as retas suportes de seus lados opostos são paralelas, encontrando-se na Linha de Horizonte, logo representam paralelas. O professor pode ainda ressaltar uma diferença menos evidente entre as imagens: no caso do paralelogramo do Plano Projetivo, ele traz uma visualização mais "natural" ao olho, é possível enxergar que é uma figura que foi alongada pela projeção.

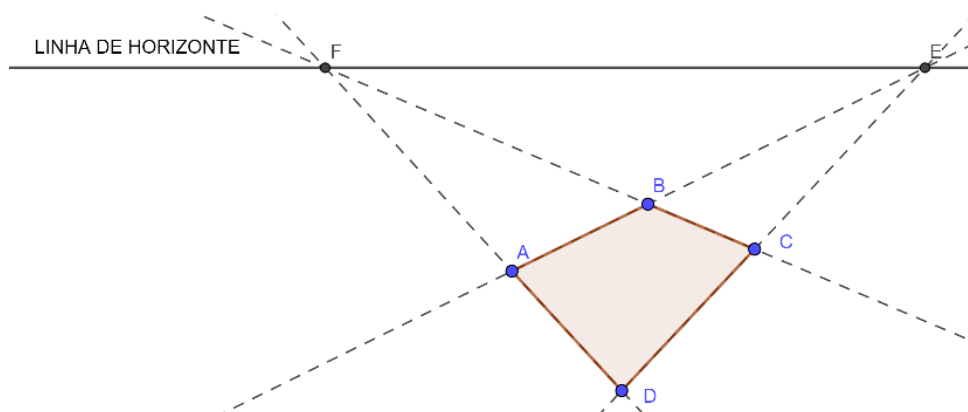
Com essas informações o professor introduz a situação didática proposta e solicita que os alunos construam e justifiquem suas representações de cônicas. Tais construções po-

Figura 6.20 – Representação de um quadrilátero no Plano Projetivo

LINHA DE HORIZONTE



Fonte: Autores

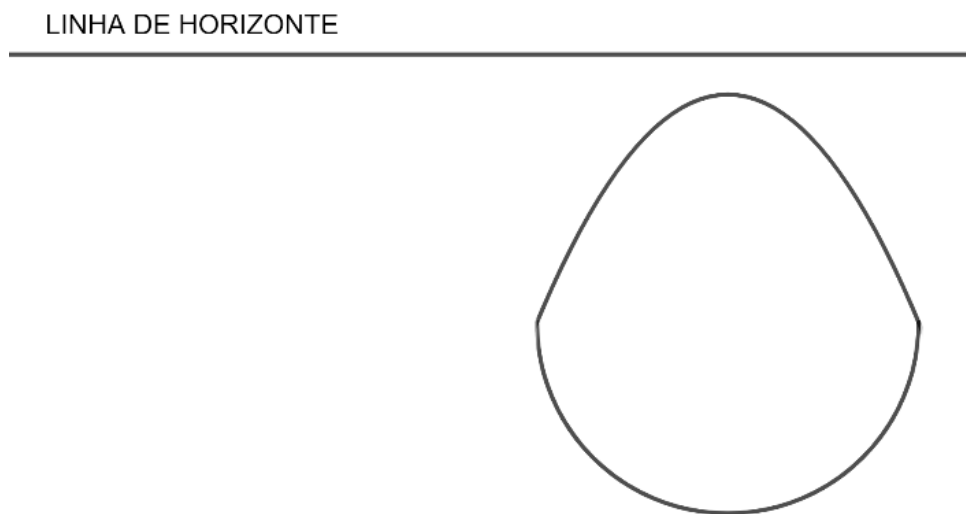
Figura 6.21 – Representação de um paralelogramo no Plano Projetivo

Fonte: Autores

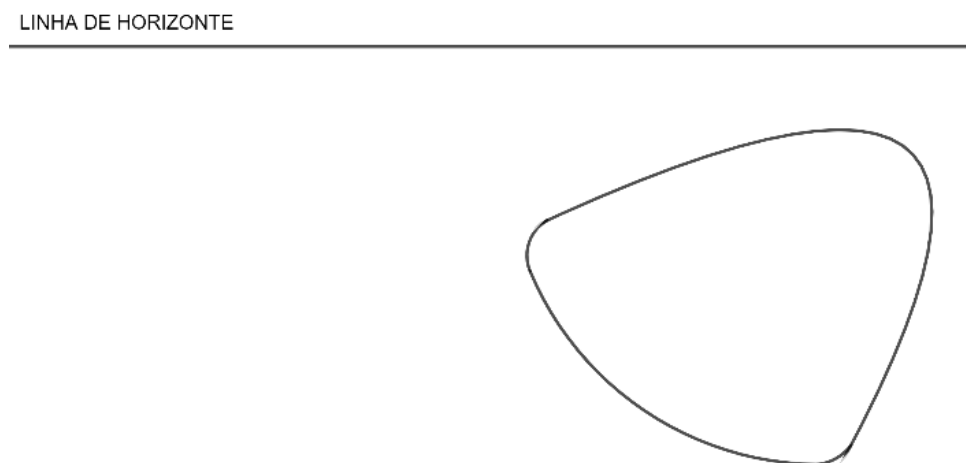
dem ser realizadas no GeoGebra ou com papel, lápis e régua, a depender da disponibilidade do local.

Aqui os alunos buscarão representar as cônicas conforme imaginam que elas vão parecer num Plano Projetivo. Esta atividade é relativamente abstrata, uma vez que os alunos não estão habituados a trabalhar com Geometria Projetiva e muitas vezes não entendem bem o conceito de projeção em si. Logo, é esperado que as construções difiram muito do esperado. Espera-se que os alunos concluam que a maior parte das cônicas são representadas como elipses no plano projetivo, sendo a hipérbole a única a não ter essa representação.

Assim, pode-se considerar que os alunos tentarão fazer representações "tortas" das cônicas, conforme representado nas Figuras 6.22 a 6.25.

Figura 6.22 – Erro esperado na construção da Circunferência no Plano Projetivo

Fonte: Autores

Figura 6.23 – Erro esperado na construção da Elipse no Plano Projetivo

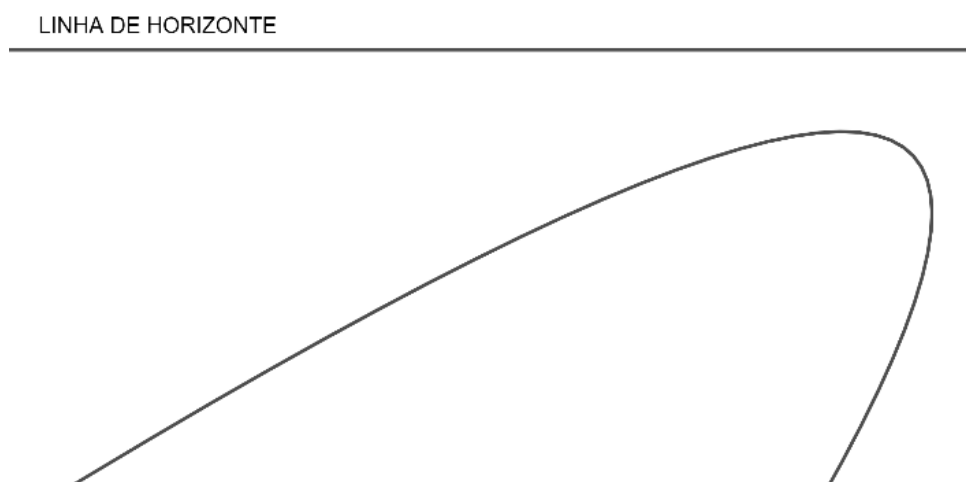
Fonte: Autores

6.1.4.2 Dialética da Formulação

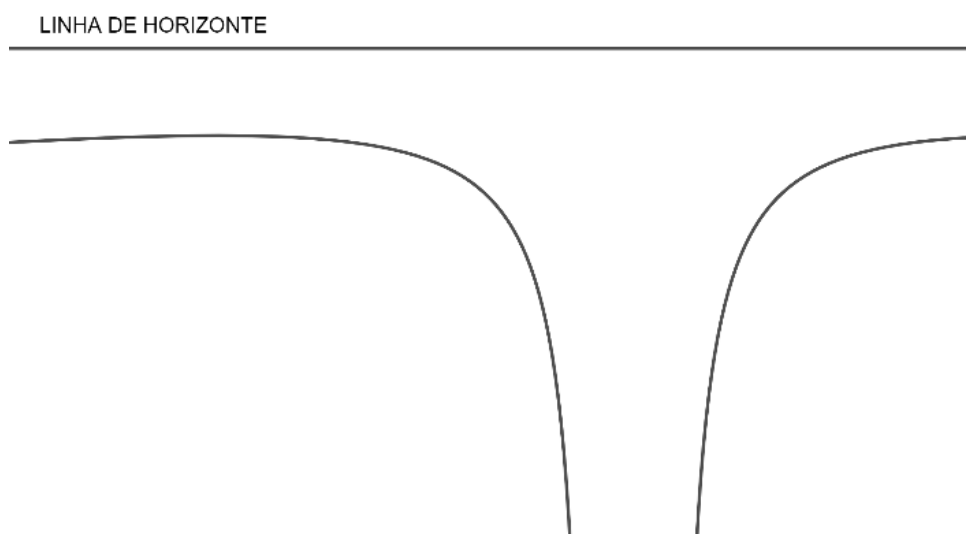
Nesta etapa os alunos irão discutir suas criações com os colegas para tentarem chegar a construções que tenham um melhor entendimento entre eles e que se assemelhem mais ao que é esperado para suas construções finais. Aqui é esperado que os alunos tentem encontrar estratégias e características que os levem a uma construção mais unificada entre os membros do grupo de discussão, buscando atingir o resultado esperado.

6.1.4.3 Dialética da Validação

Nesta etapa os alunos deverão verificar se suas construções atingiram o objetivo pedido. A construção mais comum a ser acertada nesse ponto é a circunferência, que

Figura 6.24 – Erro esperado na construção da Parábola no Plano Projetivo

Fonte: Autores

Figura 6.25 – Erro esperado na construção da Hipérbole no Plano Projetivo

Fonte: Autores

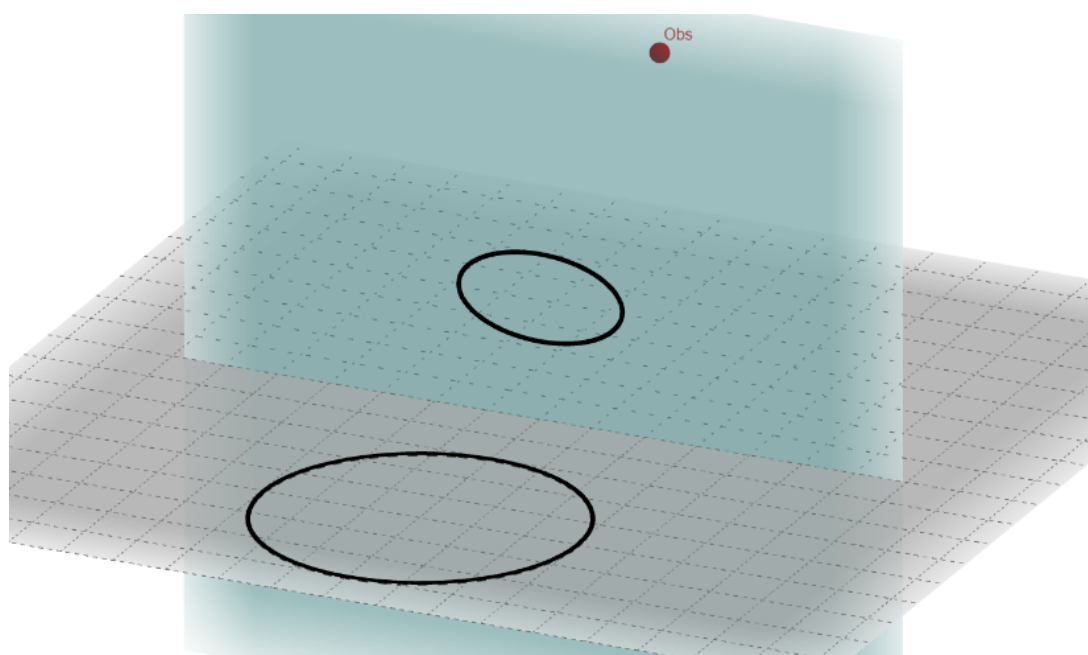
os alunos devem facilmente concluir que se tornará uma elipse no plano projetado. Já os demais desenhos podem trazer mais dificuldades em suas construções, uma vez que começam a se tornar mais complexas as visualizações, em especial da parábola e da hipérbole, que têm segmentos da construção que se estendem ao infinito.

É importante que nesse momento eles consigam discutir a ideia de continuidade das figuras no Plano Projetivo e como isso pode ser traduzido ao projetar uma cônica do Plano Euclidiano. Essa noção pode não ser muito bem compreendida a priori, daí a importância da intervenção do professor nessa etapa do processo.

6.1.4.4 Dialética da Institucionalização

Nesta etapa o professor apresentará aos alunos as construções dentro do software GeoGebra de modo a apresentar uma visualização mais clara do que era esperado que eles realizassem. A primeira construção apresentada é a da circunferência projetada, conforme a Figura 6.26, que é a construção mais simples e a mais provável que os alunos compreendam sua projeção, por ser algo mais facilmente visualizável.

Figura 6.26 – Circunferência e Circunferência Projetada



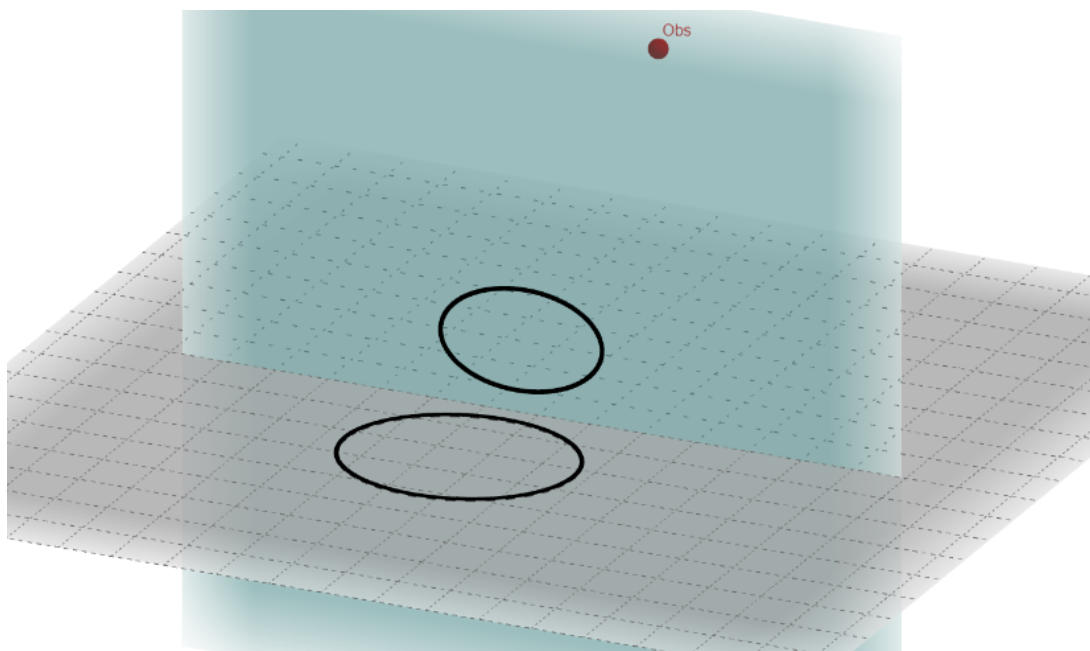
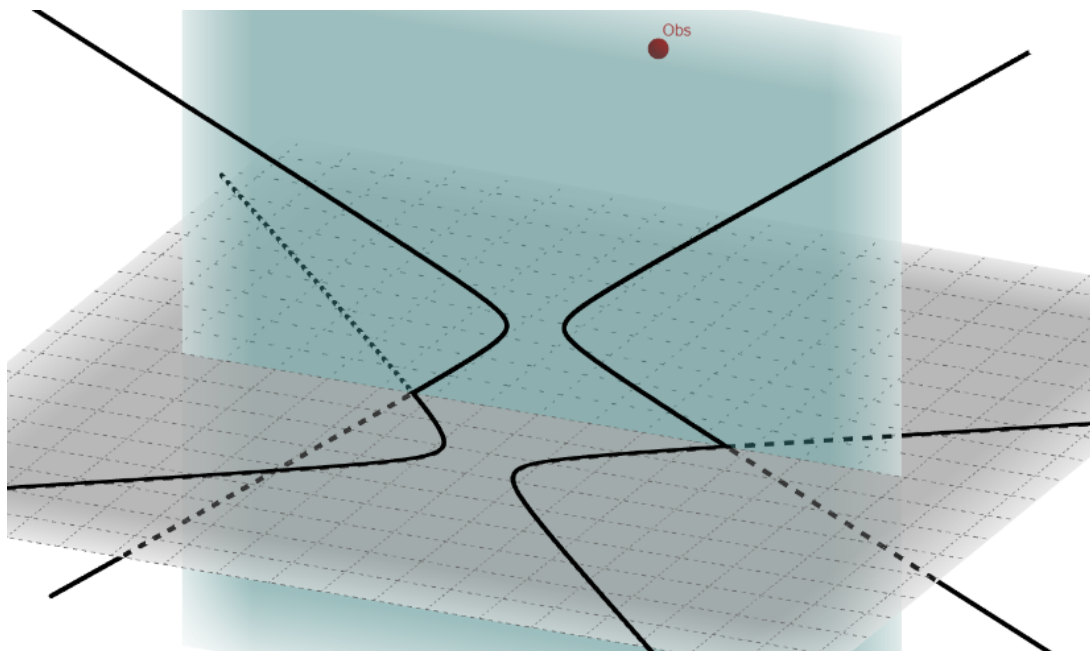
Fonte: Autores

Em seguida apresenta-se a elipse projetada (Figura 6.27), que traz uma construção semelhante à realizada na circunferência projetada. Alguns alunos talvez questionem por que elas geram a mesma imagem, e isso poderá ser esclarecido após a apresentação da parábola projetada.

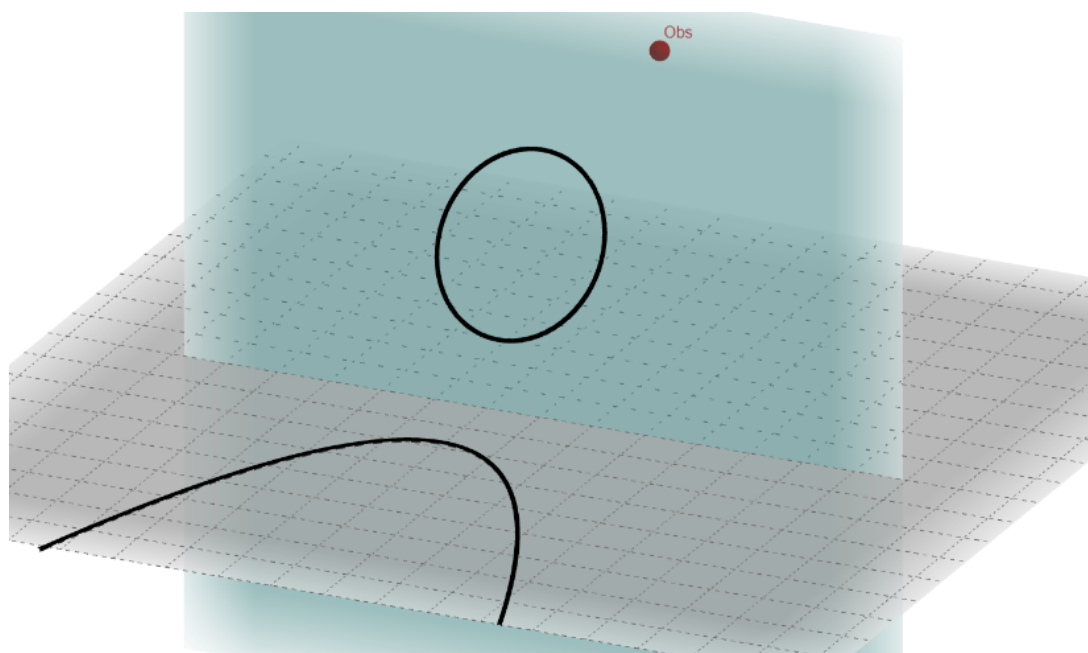
A Elipse projetada, de certo modo, não se diferencia de uma elipse comum, como visto na Figura 6.28. Isto também pode levantar questionamentos por parte dos alunos, e isso também poderá ser mais bem explicado após a apresentação da parábola projetada.

Ao apresentar a parábola projetada é muito provável que os alunos levanten diversos questionamentos, pois a parábola projetada nada mais é do que uma elipse, como visto na Figura 6.29, com o detalhe que esta tangencia a linha de horizonte.

Aqui os alunos se questionarão sobre os formatos das cônicas projetadas, sendo os pontos de maiores dúvidas a hipérbole e a parábola. Pode-se apresentar aos alunos uma hipérbole e uma parábola no Plano Euclidiano e então ir afastando a imagem cada vez mais até que os alunos percebam que na hipérbole a imagem tende cada vez mais a duas retas concorrentes e na parábola a imagem tende cada vez mais a duas retas paralelas.

Figura 6.27 – Elipse e Elipse Projetada**Fonte:** Autores**Figura 6.28** – Hipérbole e Hipérbole Projetada**Fonte:** Autores

Por conta dessas tendências, suas imagens se tornam como são na forma projetada. Como a parábola tende ao paralelismo, e na Geometria Projetiva retas paralelas se encontram na linha de horizonte, a parábola se fecha na linha de horizonte. Já a hipérbole, como seu formato tende ao de retas concorrentes e na Geometria Projetiva retas concorrentes não se alteram ao serem projetadas, o seu formato fica conservado.

Figura 6.29 – Parábola e Parábola Projetada

Fonte: Autores

6.1.5 Situação Didática – Transição Euclidiana-Projetiva - Uma visualização em multiplanos

Conhecimentos prévios: Noções gerais de geometria plana (axiomas) e dos fundamentos de Geometria Projetiva.

Utilizando uma folha de acetato, um pincel e o formulário dado, crie formas projetadas das imagens fornecidas de acordo com os seus conhecimentos de projeção e Geometria Projetiva.

6.1.5.1 Dialética da Ação

Neste momento o professor retomará tudo que foi falado nas SDs anteriores de modo a munir os alunos do máximo de conhecimento possível sobre projeções e Plano Projetivo, para que assim os alunos possam realizar suas construções nessa última etapa de modo a permitir que seja apresentada a eles a TEP, favorecendo, por meio da visualização, uma melhor compreensão dos preceitos da Geometria Projetiva e suas transformações em relação à Geometria Euclidiana.

Nesta etapa será fornecido aos alunos um formulário, uma folha de acetato transparente e um pincel permanente. No formulário haverá diversas formas que os alunos deverão projetar em sua folha de acetato da melhor forma que julgarem, evitando apenas a projeção ortogonal. Neste momento busca-se analisar se eles optarão por ângulos específicos de projeção, se se atentarão ao posicionamento dos olhos durante o desenho, se notarão a existência de uma linha de horizonte imaginária durante suas projeções. Tudo isto afetará

como as imagens serão projetadas e como os resultados serão obtidos.

Aqui é esperado que os alunos cometam diversos erros, desde a movimentação da folha de acetato durante a projeção de uma mesma figura (distorcendo a imagem projetada) ao mau uso dos instrumentos (gerando figuras mal construídas) ou mesmo o desconhecimento dos usos dos materiais para a realização da atividade.

6.1.5.2 Dialética da Formulação

Neste momento os alunos deverão trocar informações entre si, analisando os métodos utilizados uns dos outros para a obtenção da projeção pedida. Aqui irão discutir métodos, justificativas e defenderão suas hipóteses das maneiras corretas de projetar na folha de acetato. É esperado que eles questionem métodos que julguem errados ou improdutivos e que busquem um modelo comum de projeção que possa ser reaplicado para obter a projeção esperada pelo pesquisador.

Em caso de não realização de tal discussão, caberá ao professor-pesquisador inquirir os alunos sobre os seus métodos de modo a instigar a discussão e propiciar o momento de troca de ideias que se faz muito importante nessa etapa da metodologia.

6.1.5.3 Dialética da Validação

Durante a validação os alunos apresentarão suas projeções e seus métodos aplicados. Aqui eles deverão justificar formalmente suas escolhas e buscar respaldar da melhor maneira as construções que fizeram, buscando atender à demanda solicitada, permitindo ao professor-pesquisador avaliar se os mesmos foram capazes de atingir as construções esperadas, ou mesmo se conseguiriam criar projeções que não eram esperadas na pesquisa, mas que possam agregar conhecimento a esta tese.

6.1.5.4 Dialética da Institucionalização

Nesta etapa é apresentado aos alunos como as formas do formulário da SD poderiam ser projetadas, utilizando inicialmente a folha de acetato em mão livre e o posicionamento da cabeça mantendo a linha dos olhos abaixo da borda superior da folha de acetato de modo a manter a linha de horizonte "dentro" da folha, tornando possível a representação da linha de horizonte na própria folha de acetato.

Além disso, apresenta-se o protótipo da Máquina de Dürer (Figura 6.30) como instrumento prático de projeção de elementos planos ou espaciais numa tela fixa, simulando a máquina original e as telas de pintura utilizadas por artistas plásticos para representar ambientes reais na tela de pintura. Com esse instrumento é possível prover uma melhor precisão nos desenhos a serem projetados, garantindo um ponto fixo de observação e uma tela estável de desenho, com um ambiente delimitado a ser observado para projeção.

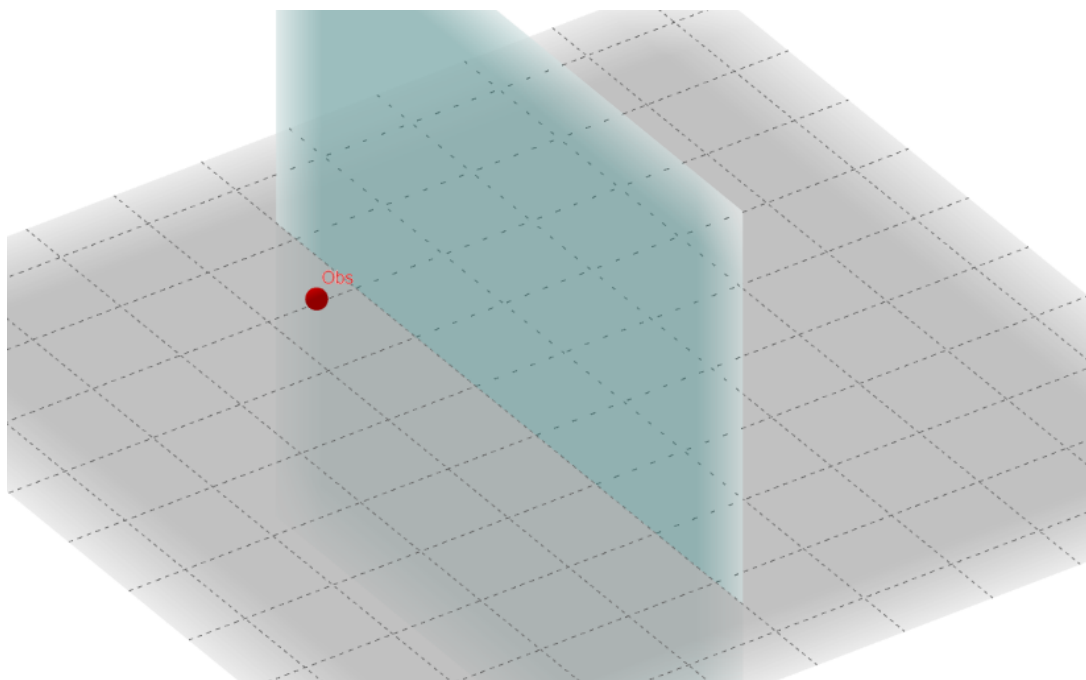
Figura 6.30 – Protótipo da Máquina de Dürer produzida pelos autores



Fonte: Autores

Após a apresentação da máquina de Dürer é então apresentado aos alunos o modelo de projeção 3D (Figura 6.31), construído no GeoGebra, utilizado como base principal da pesquisa: o diedro de projeção da TEP onde são realizadas as construções dos modelos apresentados nessa pesquisa e onde as FPs (Figura 6.32) estão construídas de modo a agilizar o processo de projeção que os usuários desejam realizar, visualizar ou pôr à prova de construção.

Com o modelo é apresentado ao aluno as possibilidades que a visualização traz como um amparo no aprendizado de um conteúdo novo e com uma visualização que requer uma manipulação dos conceitos geométricos previamente estudados. Assim eles podem analisar os conceitos da Geometria Euclidiana ao mesmo tempo que observam sua

Figura 6.31 – Modelo de Projeção da TEP

Fonte: Autores

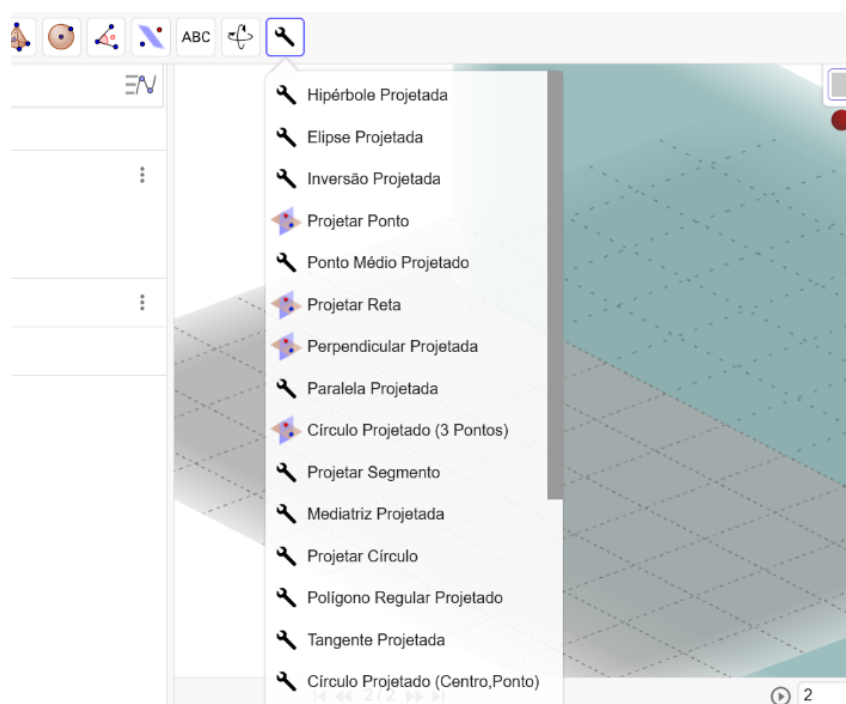
modelação e suas variações na Geometria Projetiva com este diedro de comparação que é a estrutura base da TEP, aqui apresentada. É esperado que os alunos concordem que a visualização pelo modelo do software potencializa seu aprendizado durante o estudo de Geometria Projetiva.

6.2 Experimentação

A etapa de experimentação corresponde à fase empírica da Engenharia Didática, na qual as Situações Didáticas (SD1–SD5) concebidas e analisadas a priori foram aplicadas em contextos reais de ensino. Essa fase visa verificar a viabilidade e a pertinência didática das hipóteses elaboradas, observando como os participantes interagem com as tarefas propostas e como os conceitos projetivos emergem na prática. Segundo Artigue (1996), a experimentação é um momento decisivo do ciclo da Engenharia Didática, pois materializa a articulação entre a modelização teórica e a ação docente, permitindo ao pesquisador observar o comportamento das variáveis didáticas sob condições controladas, mas autênticas de sala de aula.

6.2.1 Contexto e objetivos da experimentação

A finalidade desta etapa dentro da Engenharia Didática é testar a aplicabilidade e a coerência interna do modelo didático proposto, investigando se a abordagem visual da Geometria Projetiva, mediada pelo software GeoGebra 3D e pelas ferramentas proje-

Figura 6.32 – Lista de Ferramentas Projetivas

Fonte: Autores

tivas desenvolvidas, favorece a compreensão de conceitos fundamentais dessa geometria, tradicionalmente ausente do currículo escolar. Assim, a experimentação buscou avaliar o potencial formativo do uso de recursos digitais e físicos (como os modelos da Máquina de Dürer) na promoção da Transição Euclidiana-Projetiva (TEP).

A análise a priori forneceu as condições de aplicação, definindo variáveis didáticas e epistemológicas com base na experiência docente do pesquisador e nas expectativas sobre os conhecimentos prévios dos alunos em relação à Geometria Projetiva. A partir desse referencial, o experimento buscou verificar a pertinência das hipóteses didáticas e identificar possíveis rupturas epistemológicas (Brousseau, 2008), isto é, momentos em que os alunos precisaram reestruturar seus esquemas cognitivos diante de noções não euclidianas, como o abandono do axioma das paralelas.

No âmbito da TEP, a experimentação foi concebida para averiguar a viabilidade de ensino do método elaborado, analisando seu potencial de aplicação tanto na formação inicial quanto na formação continuada de professores de Matemática. O foco esteve na capacidade dos participantes de articular os registros visuais, simbólicos e geométricos, demonstrando compreensão dos invariantes projetivos e das relações de incidência.

6.2.2 Ambiente e público participante

As aplicações ocorreram em diferentes contextos institucionais e formativos, abrangendo turmas de graduação do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do

Ceará (IFCE) e da Universidade Regional do Cariri (URCA), bem como turmas de pós-graduação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática (ProfMat). As disciplinas envolvidas incluíram História da Matemática, Laboratório de Matemática e Geometria Plana Euclidiana, além do estudo de Geometrias Não-Euclidianas no nível de pós-graduação.

As turmas variaram entre 6 e 15 participantes, totalizando aproximadamente 36 formulários válidos. Todos os participantes eram maiores de 18 anos e aceitaram participar de forma voluntária, mediante assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), conforme a Resolução nº 510/2016 do Conselho Nacional de Saúde. Não houve critérios seletivos de participação; a adesão foi livre entre os alunos interessados e disponíveis. As idades variaram conforme o nível de formação, havendo turmas do segundo e sexto semestres da licenciatura e uma turma de pós-graduação.

Esse público diversificado permitiu observar diferentes níveis de maturidade cognitiva e experiência geométrica, o que enriqueceu a análise sobre as formas de representação e argumentação emergentes durante as atividades.

6.2.3 Procedimentos de aplicação

As atividades foram planejadas para terem duração média entre 90 e 120 minutos, ajustando-se conforme o número de participantes e as condições de infraestrutura (recursos audiovisuais e conectividade). Cada Situação Didática foi aplicada seguindo as etapas dialéticas da TSD (Ação, Formulação, Validação e Institucionalização), previamente descritas na seção anterior.

Em um primeiro momento, os alunos responderam individualmente aos formulários impressos, registrando suas hipóteses e construções iniciais. Em seguida, promoveu-se o compartilhamento das produções e discussões em grupo, conforme previsto pela TSD, favorecendo a explicitação e o confronto de ideias (Brousseau, 1997). Essa socialização visava desenvolver a autonomia argumentativa, estimulando os participantes a analisarem criticamente suas soluções e a validar coletivamente suas conjecturas.

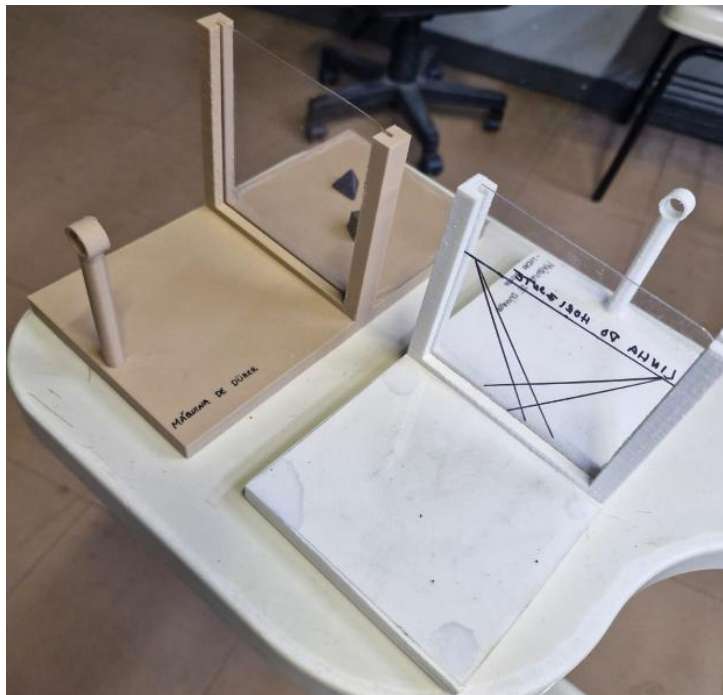
O professor-pesquisador atuou como mediador e engenheiro didático, intervindo pontualmente para orientar a reflexão, propor questionamentos e institucionalizar os saberes ao final de cada situação. Essa postura está alinhada ao papel atribuído por Artigue (1996) e Alves (2015) ao pesquisador na Engenharia Didática: o de criar condições para que o saber emergente seja confrontado e, posteriormente, legitimado.

Os materiais utilizados incluíram:

- Formulários impressos e folhas de acetato;
- Réguas não metrificadas, lápis e canetas permanentes;

- O software GeoGebra 3D, com interface projetiva desenvolvida pelo pesquisador;
- Modelos físicos da Máquina de Dürer, confeccionados em madeira e posteriormente em impressão 3D (Figura 6.33).

Figura 6.33 – Máquina de Dürer (Impressão 3D)



Fonte: Elaborado pelos autores

Durante as aulas, observou-se alto nível de engajamento e curiosidade por parte dos participantes, que demonstraram interesse em compreender as diferenças entre a Geometria Euclidiana e a Projetiva. Muitos destacaram o caráter inovador das atividades e manifestaram desejo de aprofundar seus estudos em conteúdos "fora do usual", o que evidencia o potencial formativo das SDs elaboradas.

6.2.4 Situações Didáticas desenvolvidas

As cinco Situações Didáticas (SD1–SD5), detalhadas na seção anterior, foram aplicadas de forma sequencial, constituindo um percurso progressivo de complexidade conceitual. De modo geral, cada situação promoveu a transição entre elementos euclidianos e projetivos, articulando construções geométricas manuais e digitais.

À medida que as SDs avançaram, as tarefas exigiram maior abstração e domínio das propriedades euclidianas, principalmente quanto à necessidade de reinterpretá-las sob a ótica projetiva. Os alunos foram desafiados a compreender a ausência do Axioma das Paralelas como um ponto de ruptura epistemológica, o que demandou reorganização de

seus esquemas geométricos e discursivos. Essa progressão favoreceu o reconhecimento dos invariantes projetivos, fortalecendo o raciocínio relacional em detrimento do métrico.

6.2.5 Coleta de dados

Os dados foram coletados por meio de formulários impressos (Apêndices A–E), registros audiovisuais e anotações de observação direta. As gravações em vídeo e áudio tiveram a finalidade de garantir fidelidade às interações ocorridas em sala, servindo como material de apoio à interpretação qualitativa. Contudo, a análise principal se concentrou nas respostas escritas dos participantes, pois os formulários constituem a base replicável e comparável entre as turmas e instituições.

Todos os registros respeitaram as normas éticas de pesquisa com seres humanos. O anonimato dos participantes foi mantido mediante uso de pseudônimos e eliminação de qualquer dado pessoal identificável. Não foi produzido diário de campo formal, mas os registros audiovisuais e as anotações pontuais supriram as funções descritivas dessa ferramenta.

Essa estratégia de coleta de dados, associada à triangulação entre fontes (Bogdan & Biklen, 1994; Alves, 2015), reforça a validade interna das análises e assegura a transparência metodológica da pesquisa.

6.2.6 Relação com a TSD

As etapas da Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 1997): Ação, Formulação, Validação e Institucionalização; manifestaram-se de forma orgânica durante as aulas, em consonância com a prática docente habitual do pesquisador. Os alunos assumiram papel ativo na construção do conhecimento, mobilizando saberes prévios e explorando as ferramentas digitais e materiais concretos para resolver os problemas propostos.

Foram observados episódios característicos de desequilíbrio epistemológico, especialmente nos momentos de formulação e validação, quando surgiam conflitos entre representações euclidianas e projetivas. Alguns alunos apresentaram erros previstos na elaboração das SDs, como construções visualmente corretas, mas conceitualmente inconsistentes, revelando a importância do erro como indicador de aprendizagem (Alves, 2017). Em tais situações, o diálogo coletivo e a mediação docente permitiram que os participantes reformulassem suas justificativas, consolidando o saber institucionalizado ao final de cada tarefa.

Essa dinâmica confirma o caráter interativo e investigativo da TSD, reafirmando o papel do professor como mediador da aprendizagem e a relevância da Engenharia Didática como dispositivo metodológico para compreender e transformar práticas de ensino de Geometria.

Encerrando esta etapa, é possível afirmar que a experimentação cumpriu o papel esperado dentro do ciclo da Engenharia Didática, oferecendo um campo fértil para observar como os participantes reagiram diante das situações propostas e de que forma o uso das ferramentas projetivas e do GeoGebra 3D contribuiu para a construção de novos significados em torno da Geometria Projetiva. As atividades mostraram-se coerentes com as hipóteses elaboradas na análise a priori, revelando tanto as potencialidades quanto as limitações do método em contexto real de ensino. As interações entre alunos e professor-pesquisador, bem como as discussões coletivas em sala, indicaram que a visualização e a manipulação dinâmica dos elementos geométricos favoreceram a compreensão de conceitos fundamentais da TEP, ainda que com desafios conceituais previstos.

6.3 Análise a posteriori e validação

6.3.1 Panorama Geral das Situações Didáticas

As situações didáticas (SD1 a SD5) compuseram o núcleo experimental da Engenharia Didática, constituindo-se como instrumentos de observação e análise do fenômeno da Transição Euclidiana-Projetiva (TEP). Cada situação foi elaborada à luz da Teoria das Situações Didáticas (TSD), segundo a dialética ação–formulação–validação–institucionalização, e teve como finalidade provocar reorganizações cognitivas relacionadas à visualização, à argumentação e à compreensão da geometria projetiva em um contexto formativo.

A experimentação envolveu licenciandos e pós-graduandos em Matemática, em número aproximado de trinta participantes, organizados em pequenos grupos e submetidos a diferentes tarefas mediadas pelo software GeoGebra 3D. As cinco situações, descritas detalhadamente no capítulo metodológico, foram aplicadas sequencialmente, cada uma representando um nível de complexidade crescente na transição entre o plano euclidiano e o plano projetivo.

A SD1, intitulada "*Pontos e retas ao Teorema de Pappus*", consistiu na construção geométrica de duas retas r e s , com pontos $A, B, C \in r$ e $X, Y, Z \in s$, solicitando-se aos participantes que investigassem a relação entre os pontos de interseção formados pelos pares de retas $\{AY, BX\}$, $\{AZ, CX\}$ e $\{BZ, CY\}$. Essa primeira situação teve caráter introdutório, buscando diagnosticar os esquemas prévios de visualização e o repertório geométrico dos participantes.

A SD2 aprofundou a investigação do *Teorema de Pappus*, introduzindo variações (casos particulares) em que as retas eram perpendiculares, concorrentes ou coincidentes. Essa etapa visava induzir uma ruptura epistemológica entre o pensamento euclidiano, pautado em medidas e paralelismos, e a estrutura relacional da geometria projetiva, em que a colinearidade dos pontos de interseção emerge como invariante.

A SD3 apresentou uma *Situação de Projeção Inversa*, propondo aos participantes que, a partir de um conjunto de pontos projetados, identificassem as possíveis retas ou pontos de origem, um exercício de reconstrução e inferência projetiva que testava a flexibilidade cognitiva diante da ausência de referências métricas.

A SD4, intitulada "*As Cônicas na Geometria Projetiva*", trabalhou com as construções de circunferência, elipse, parábola e hipérbole, sempre em relação à linha de horizonte e ao ponto de fuga. Essa situação permitiu observar como os conceitos de cônicas, quando deslocados da definição euclidiana clássica (baseada em foco e diretriz), tornam-se objetos de transformação e generalização no plano projetivo.

Por fim, a SD5 encerrou a sequência, retomando a noção de projeção em objetos compostos (círculos, quadrados, triângulos), agora sob condições controladas de perspectiva e ponto de vista. Essa última etapa funcionou como síntese operacional da Transição Euclidiana-Projetiva, demandando dos participantes uma articulação entre manipulação digital, interpretação geométrica e argumentação formal.

De modo geral, as análises das produções indicaram que os participantes transitaram progressivamente de uma concepção empírico-figurativa para uma concepção estrutural-relacional, conforme propõe Brousseau (2008) na passagem da fase de *ação* para a de *validação*. Essa mudança foi observada nas justificativas, nos esboços de construções e nas reformulações realizadas após as discussões coletivas.

As respostas compiladas nos formulários (vide Apêndices A–E) revelam três tendências gerais:

- **Compreensão inicial restrita ao paralelismo:** muitos participantes buscaram inicialmente soluções sob o paradigma euclidiano, tratando as retas r e s como paralelas, o que demonstra a força do contrato didático herdado da geometria escolar.
- **Emergência da colinearidade como invariante:** gradualmente, os estudantes perceberam que, independentemente da posição relativa das retas, os pontos de interseção obedeciam a uma relação colinear, conforme enunciado no Teorema de Pappus.
- **Reconhecimento da projeção como processo de mediação:** nas situações posteriores (SD3–SD5), a ideia de projeção passou a ser compreendida não como simples distorção óptica, mas como transformação estrutural entre planos, o que representa um avanço conceitual significativo no campo da visualização geométrica.

Essa trajetória global confirma a hipótese da tese: a Transição Euclidiana-Projetiva pode ser ensinada e compreendida mediante situações didáticas cuidadosamente estrutura-

das, nas quais o GeoGebra 3D atua como *milieu* cognitivo, promovendo um deslocamento de foco do cálculo para a relação.

6.3.2 Percepções sobre a Transição Euclidiana-Projetiva (TEP)

A análise das percepções dos participantes foi conduzida segundo a lógica da engenharia didática de formação, na qual as produções escritas, verbais e gráficas são interpretadas como indicadores de reorganização cognitiva. Para isso, utilizamos categorias derivadas da TSD, especialmente as noções de obstáculo epistemológico, validação autônoma e institucionalização parcial (Brousseau, 2008; Alves, 2017).

6.3.2.1 Primeiras concepções e obstáculos epistemológicos

As respostas iniciais, particularmente nas SD1 e SD2, evidenciam a prevalência de raciocínios ancorados na Geometria Euclidiana, com foco em propriedades métricas e paralelismo. Expressões como "as retas são paralelas", "os pontos são médios da distância" ou "as interseções formam uma reta paralela às originais" demonstram a manutenção de um contrato didático euclidiano.

Esse fenômeno é descrito por Brousseau (1997) como resistência epistemológica ao novo saber, e, segundo Alves (2012), constitui o primeiro indício da necessidade de um desequilíbrio cognitivo para que a aprendizagem ocorra. No contexto da TEP, tal desequilíbrio se manifesta na percepção de que "as medidas deixam de importar", um enunciado que diversos participantes verbalizaram nas discussões presenciais.

Outro obstáculo recorrente foi a ausência de referência projetiva. Alguns participantes declararam "não ser possível determinar os pontos sem referência" (SD3), o que denota a dificuldade de operar com entidades geométricas que não possuem ancoragem métrica. Esse tipo de dificuldade está em consonância com o que Tall (1991) denomina ruptura da dependência perceptiva, necessária para o pensamento matemático avançado.

Ainda, observou-se que alguns participantes apresentaram interpretações híbridas, misturando elementos da geometria plana com conceitos incipientes de projeção. Foi afirmado que "as interseções formariam outra reta que conteria os três pontos achados, mesmo fora do plano" (SD1), antecipando intuitivamente a noção de incidência projetiva, embora sem formalizá-la.

Portanto, a análise das concepções iniciais revela um movimento típico da fase de ação e formulação (Brousseau, 2008), em que o sujeito mobiliza esquemas prévios, muitas vezes inadequados, mas produtivos enquanto instrumentos de reconstrução conceitual.

Os dados coletados, apresentados na Tabela 6.1, mostram que cerca de 46% das respostas iniciais foram classificadas como empíricas, caracterizando-se por descrições visuais e ausência de justificativa conceitual. Expressões como "as retas são paralelas" e

Tabela 6.1 – Evolução das categorias de raciocínio entre as SD1–SD5

Categoria de resposta	SD1	SD2	SD3	SD4	SD5
Respostas empíricas (sem justificativa)	46%	31%	18%	11%	6%
Respostas com argumentação parcial	38%	45%	41%	33%	24%
Respostas com validação projetiva coerente	16%	24%	41%	56%	70%

Fonte: Elaborado pelos autores

"não dá pra achar os pontos sem referência" revelam a manutenção de um contrato didático euclidiano, em que o saber geométrico permanece dependente da medida. Esse comportamento confirma o que Brousseau (1997) denomina resistência epistemológica ao novo saber, reforçando a necessidade do desequilíbrio cognitivo como ponto de partida da aprendizagem projetiva.

6.3.2.2 Evolução das compreensões ao longo das situações

Com o avanço das situações didáticas, os registros evidenciam um deslocamento de natureza cognitiva: o foco migra da busca por medidas e ângulos para a identificação de relações invariantes entre elementos geométricos. Essa mudança é observada, sobretudo, nas justificativas apresentadas após as discussões em grupo.

Relatou-se, por exemplo, que foi reconhecido na SD2 que "a relação entre as retas r e s não influencia no resultado final, que seria a colinearidade entre os pontos", o que representa uma superação parcial do obstáculo métrico. Outro participante relatou que, na variação 1 do Teorema de Pappus, observou que "os pontos de interseção não serão colineares" quando as retas são perpendiculares, um erro conceitual, mas que revela a passagem para a etapa de *validação*, pois há tentativa explícita de justificar o raciocínio com base na observação geométrica.

Além disso, notou-se que, a partir da SD3, alguns participantes passaram a utilizar vocabulário mais preciso, empregando termos como "projeção", "referência", "linha de horizonte" e "ponto de fuga". Essa incorporação linguística é indício do processo de institucionalização parcial do saber, no sentido de Brousseau (2008), em que o estudante começa a atribuir estatuto conceitual a termos antes meramente descritivos.

Por fim, nas SD4 e SD5, observou-se a emergência de um olhar projetivo: as cônicas passaram a ser reconhecidas como transformações de figuras euclidianas e não como entidades isoladas. Um dos participantes, por exemplo, descreve que "a dificuldade ainda é da construção no plano euclidiano, para depois projetar na geometria projetiva", evidenciando consciência metacognitiva sobre o processo de transição, o que, segundo Alves (2017), constitui sinal de aprendizagem reflexiva.

6.3.2.3 Índícios de reorganização cognitiva e visual

A leitura longitudinal dos registros permitiu identificar três indícios fortes de reorganização cognitiva e visual:

1. **Descentração do olhar geométrico:** os participantes começaram a perceber que uma mesma configuração pode ser interpretada em diferentes planos (euclidiano e projetivo), o que implica o abandono da visão "fixa" e a adoção de uma visão relacional.
2. **Reinterpretação do erro como recurso didático:** nas falas e reconstruções, muitos erros foram reelaborados, funcionando como gatilhos de discussão e refinamento conceitual. Isso confirma a hipótese de Alves (2012), segundo a qual o erro é "um indicador do saber em movimento".
3. **Integração entre percepção e simbolização:** nas últimas situações (SD4–SD5), a linguagem geométrica se tornou mais simbólica e menos descritiva, indicando uma transição da fase empírica para a fase de validação formal.

Esses resultados reforçam que a Transição Euclidiana-Projetiva não é apenas um conteúdo geométrico, mas um processo epistemológico e cognitivo, no qual a percepção visual é reconfigurada pela mediação do software GeoGebra e pela estrutura das situações didáticas.

Tabela 6.2 – Frequência de uso do GeoGebra 3D nas justificativas escritas

Uso explícito do GeoGebra 3D na resposta	SD1	SD2	SD3	SD4	SD5
Não menciona o software	68%	45%	27%	18%	12%
Menciona como ferramenta ilustrativa	22%	33%	38%	42%	31%
Utiliza o GeoGebra como argumento conceitual	10%	22%	35%	40%	57%

Fonte: Elaborado pelos autores

A frequência de menções ao uso do GeoGebra como instrumento de validação aumentou de 10% na SD1 para 57% na SD5, o que evidencia o amadurecimento da mediação tecnológica, como visto na Tabela 6.2. Essa progressão demonstra que o software deixou de ser apenas uma ferramenta ilustrativa e passou a desempenhar o papel de *milieu* cognitivo, conforme postula Brousseau (2008). Tem-se como comentário obtido: "consegui provar a colinearidade usando o comando de interseção, sem precisar medir", indicando que a visualização tridimensional favoreceu uma forma de validação relacional, como defendem Tall (2004) e Alves (2017).

6.3.3 Visualização Projetiva com o GeoGebra 3D

O papel da visualização, nesta pesquisa, ultrapassa a mera representação gráfica: ela atua como mediadora epistêmica na transição entre o pensamento euclidiano e o pensamento projetivo. De acordo com Tall (1991, 2004), a visualização matemática constitui um "modo de pensamento independente e complementar à simbolização algébrica", sendo capaz de produzir *insight* e reorganização conceitual. No contexto da TEP, o GeoGebra 3D configurou-se como um *milieu* didático privilegiado, no qual o sujeito pôde operar simultaneamente com elementos visuais, simbólicos e relacionais.

Os resultados revelam que a exploração tridimensional oferecida pelo GeoGebra favoreceu a emergência de estratégias autônomas de manipulação e inferência, sobretudo quando os participantes compreenderam que as projeções não eram deformações visuais, mas mapeamentos de incidência entre planos. O próprio ato de alternar a perspectiva de observação, utilizando a ferramenta de rotação livre do software, mostrou-se fundamental para o desenvolvimento de uma "visão móvel", conforme expressão cunhada por Alves (2017), em contraposição à visão estática da geometria plana.

6.3.3.1 Estratégias de exploração e manipulação no ambiente digital

Durante as etapas de experimentação, observou-se que os participantes desenvolveram diferentes estratégias de exploração no GeoGebra 3D. Inicialmente, predominavam ações de tentativa e erro: arrastar pontos, testar comandos e observar reações automáticas do sistema. Essa fase corresponde à dialética da ação, na qual, segundo Brousseau (2008), o sujeito interage com o meio de forma empírica, mas significativa, produzindo um conjunto de invariantes operatórios que orientam suas futuras formulações.

À medida que avançavam, os sujeitos começaram a utilizar comandos mais sofisticados, como "interseção de dois objetos", "reta projetiva", "ponto médio projetado", revelando uma crescente autonomia tecnológica e conceitual. Esse comportamento traduz a passagem da ação à formulação, pois o aluno deixa de manipular o software como uma calculadora visual e passa a utilizá-lo como instrumento de modelagem geométrica.

Trechos de justificativas e observações de alguns participantes, listados abaixo, evidenciam essa evolução:

- Um participante revela ter "buscado achar as congruências, mas não conseguiu provar sem o uso da ferramenta de projeção"(SD1), indicando a percepção da necessidade de formalizar a relação entre planos.
- Outro participante comenta que, "após a explicação, ficou mais clara a ideia da projeção das curvas", o que aponta para uma apropriação progressiva do conceito de projeção como transformação.

- Um terceiro menciona que "independentemente de como as retas r e s sejam construídas, sempre haverá uma reta colinear entre os pontos até mesmo fora do plano", antecipando a compreensão da invariância da colinearidade, uma evidência de internalização da propriedade projetiva do Teorema de Pappus.

Essas estratégias, embora diversas, convergem para um mesmo princípio: a ação sobre o objeto matemático via interface digital como mediadora da conceptualização. Nesse sentido, o GeoGebra 3D funcionou como um ambiente adidático, no qual o sujeito pôde confrontar-se com o saber sem a intervenção imediata do professor, condição essencial da TSD.

6.3.3.2 Relações entre visualização, modelagem e argumentação

A análise dos dados sugere que a visualização não se restringiu à leitura de figuras, mas evoluiu para modelagem geométrica argumentada. Quando os estudantes formulavam hipóteses sobre colinearidade, incidência ou posição relativa, apoiavam-se em representações dinâmicas que lhes permitiam validar visualmente as conjecturas. Tal processo corresponde à fase de validação, em que o discurso matemático se ancora em evidências produzidas no próprio *milieu* (Brousseau, 1997).

Por exemplo, nas variações do Teorema de Pappus (SD2), alguns grupos observaram que "os pontos de interseção não se alinham quando as retas se tornam concorrentes" e buscaram entender o porquê dessa irregularidade. Essa busca os levou a discutir a noção de projeção paralela versus cônica, reproduzindo, em microescala, o percurso epistemológico histórico da geometria projetiva.

Essa relação entre visualização e argumentação é destacada por Tall (1993) e corroborada por Alves (2017), para quem "a imagem dinâmica é o primeiro suporte da explicação geométrica, antes mesmo da dedução formal". A integração entre essas dimensões foi amplamente observada nas SD4 e SD5, nas quais a manipulação tridimensional das cônicas possibilitou o reconhecimento de propriedades invariantes mesmo sob deformação óptica.

Dessa forma, a visualização se configurou não apenas como apoio, mas como fonte de validação conceitual, instaurando um novo contrato didático: a verdade geométrica é construída não pelo cálculo métrico, mas pela coerência relacional percebida na projeção.

6.3.3.3 Articulação entre registros simbólicos e geométricos

Um dos ganhos mais expressivos da TEP foi a capacidade dos participantes de articular múltiplos registros de representação, no sentido defendido por Duval (2006) e incorporado por Alves (2012) à leitura da TSD. O GeoGebra 3D, ao permitir a sobreposição

de comandos simbólicos e objetos gráficos, fomentou uma conversão entre linguagem algébrica, visual e verbal.

Nos relatos analisados, essa articulação aparece quando os alunos descrevem "a reta t que contém os pontos de interseção" ou quando mencionam que "o ponto médio projetado aparece deslocado em relação ao euclidiano", demonstrando que a percepção visual passa a ser interpretada sob o prisma conceitual.

Assim, a visualização projetiva com o GeoGebra 3D não se limita à percepção; ela é, sobretudo, uma linguagem de transição entre registros, condição indispensável para o desenvolvimento de um pensamento geométrico de ordem superior. Essa constatação reforça a hipótese de que a TEP constitui não apenas um conteúdo matemático, mas um dispositivo didático de formação do olhar geométrico.

6.3.4 Raciocínio Geométrico e Argumentação

O raciocínio geométrico emergente das situações didáticas revelou-se híbrido, oscilando entre o empírico e o dedutivo, o descritivo e o explicativo. Em consonância com as fases da TSD, observou-se que os participantes avançaram de ações intuitivas para validações argumentadas, culminando em momentos de institucionalização parcial durante as discussões coletivas.

A análise qualitativa das respostas aos formulários e dos relatos gravados permitiu distinguir três eixos de desenvolvimento: (a) o surgimento de justificativas e validações produzidas pelos participantes; (b) a emergência de invariantes e propriedades projetivas; e (c) a comparação entre raciocínios euclidianos e projetivos.

6.3.4.1 Justificativas e validações produzidas pelos participantes

Os registros de justificativa, especialmente nas SD1, SD2 e SD4, mostram uma tendência crescente à explicitação do raciocínio. Na SD1, predominam respostas conclusivas sem justificativa ("os pontos são colineares"), o que denota a fase de ação. Já na SD2, aparecem os primeiros indícios de validação ("as retas sendo perpendiculares apresentam os pares de retas aparentemente paralelas e os pontos não serão colineares"), revelando um discurso ainda empírico, mas reflexivo.

Nas SD3 e SD4, a argumentação torna-se mais articulada. Um participante, por exemplo, reconhece que "esse Teorema dá início à ideia de projeção, tendo como condição de existência os pontos da reta r não se ligarem aos seus correspondentes da reta s ". Trata-se de uma formulação conceitual que traduz o conteúdo matemático em linguagem própria, o que, segundo Chevallard (1991), indica o início da *praxeologia pessoal*, a apropriação do saber institucional.

Além disso, observou-se que as discussões coletivas, estimuladas pela socialização das construções no GeoGebra, funcionaram como espaço de validação intersubjetiva. Em vários grupos, erros de construção foram reconfigurados como oportunidades de explicação, fortalecendo a dimensão dialógica do raciocínio.

6.3.4.2 Emergência de invariantes e propriedades projetivas

Uma das contribuições centrais desta investigação é a identificação de invariantes projetivos emergentes nas produções dos participantes. A colinearidade dos pontos de interseção no Teorema de Pappus, por exemplo, foi reconhecida independentemente da posição relativa das retas, o que demonstra a construção de uma invariância conceitual.

Outros invariantes surgiram nas construções de cônicas: a correspondência entre circunferência e elipse projetada, e o reconhecimento da parábola como caso limite entre elipse e hipérbole. Esses achados indicam que os estudantes começaram a compreender as relações de continuidade entre as formas geométricas, um avanço epistemológico que vai além do simples reconhecimento visual.

Em termos da TSD, tais invariantes correspondem ao momento de institucionalização, quando o saber produzido pelo aluno encontra correspondência no saber matemático legitimado. Alves (2017) reforça que a institucionalização não é a entrega da "resposta certa", mas o estabelecimento de uma convenção compartilhada, exatamente o que se observou nas discussões de fechamento de cada SD.

6.3.4.3 Comparação entre raciocínios euclidianos e projetivos

Comparando as produções iniciais e finais, percebe-se uma transição gradual do raciocínio euclidiano-métrico para o projetivo-relacional. No início, as inferências baseavam-se em propriedades de paralelismo e medida; ao final, centravam-se em incidência, alinhamento e invariância. Essa mudança de paradigma reflete, segundo Tall (2004), uma reestruturação do campo conceitual, ou seja, a emergência de um novo sistema de coordenação cognitiva.

Alguns participantes verbalizaram explicitamente essa mudança, mencionando a "dificuldade inicial em pensar fora da geometria plana" e o "entendimento posterior de que a projeção é outra forma de ver o mesmo objeto". Essa autorreflexão é rara em contextos formativos e evidencia o potencial da TEP como ferramenta metacognitiva.

Portanto, o raciocínio geométrico desenvolvido ao longo das situações didáticas pode ser descrito como um percurso de descentralização cognitiva, no qual o sujeito desloca o foco da figura para a relação, do visível para o estrutural, do desenho para a ideia.

6.3.5 Síntese Interpretativa

O conjunto de resultados apresentados nas cinco situações didáticas permite afirmar que a Transição Euclidiana-Projetiva (TEP) constitui não apenas um conteúdo de ensino, mas um fenômeno epistemológico e formativo, que reconfigura as relações entre o sujeito, o saber e o meio didático. A análise interpretativa dos dados, à luz da Teoria das Situações Didáticas (TSD) e das concepções contemporâneas sobre visualização matemática, evidencia que a aprendizagem projetiva emerge de uma dialética entre ação e reflexão, entre visão e formalização, entre intuição e sistematização.

A TEP, enquanto conceito didático, demonstrou capacidade de produzir o que Brousseau (2008) denomina *desequilíbrio produtivo*: um deslocamento cognitivo que obriga o aluno a reorganizar seus esquemas mentais diante de uma nova estrutura de saber. Nos registros analisados, esse deslocamento se materializa na passagem do olhar fixo, euclidiano, para o olhar móvel e relacional da geometria projetiva.

Essa passagem não ocorre de forma linear, mas em espiral, como já advertia Alves (2012) ao discutir a "reversibilidade didática" nas situações de formação de professores. Em várias falas dos participantes, percebe-se a oscilação entre compreender e não compreender, entre crer ter solucionado e voltar ao início do problema. Essa oscilação, longe de representar falha, constitui a própria dinâmica da aprendizagem matemática em seu nível mais profundo: o movimento de reconstrução epistemológica.

Ao articular a TSD com a visualização tridimensional mediada pelo GeoGebra, a pesquisa conseguiu concretizar o princípio defendido por Tall (2004): o de que a aprendizagem da matemática requer a coexistência entre percepção, simbolização e dedução. A ação sobre os objetos digitais, mover, projetar, intersectar, serviu de gatilho para a formulação e a validação de novas ideias, fazendo com que o raciocínio visual ganhasse estatuto epistemológico dentro da sala de aula.

Em termos de engenharia didática, a experimentação confirma que as situações SD1 a SD5 cumpriram papéis complementares e cumulativos. A SD1 estabeleceu o campo fenomenológico da colinearidade; a SD2 consolidou o Teorema de Pappus como protótipo do pensamento projetivo; a SD3 introduziu o raciocínio inverso, característico das transformações perspectivísticas; a SD4 generalizou as propriedades projetivas nas cônicas; e a SD5 instituiu a síntese operacional da TEP, com ênfase na manipulação tridimensional.

Em cada uma dessas etapas, observaram-se microprocessos de institucionalização: momentos em que o saber produzido pelo grupo encontrava correspondência no saber matemático validado. O professor, nesse contexto, atua como engenheiro didático, não no sentido de transmissor, mas de curador epistemológico, que regula a passagem do conhecimento empírico ao conhecimento formal. Essa postura docente, inspirada em Brousseau e aprofundada por Alves (2017), rompe com o paradigma tradicional do ensino

de geometria e instaura um novo contrato didático, centrado na autonomia, na conjectura e na validação relacional.

Outro aspecto relevante é a integração entre cognição e tecnologia. O GeoGebra 3D não foi apenas uma ferramenta instrumental, mas o próprio *milieu* da aprendizagem: um espaço onde o erro, o gesto e a imagem se converteram em linguagem matemática. Essa concepção dialoga com Chevallard (1991), ao reconhecer a tecnologia como parte integrante da praxeologia didática, o conjunto de tarefas, técnicas e teorias que estruturam a atividade matemática.

A análise das justificativas e reconstruções revela, ainda, que a TEP favorece o desenvolvimento de competências metacognitivas: muitos participantes passaram a refletir sobre seus próprios modos de pensar, reconhecendo as limitações da visão euclidiana e a necessidade de uma nova forma de raciocínio. Essa consciência de transição cognitiva reforça o valor formativo da abordagem, pois transforma a aprendizagem em um processo de autoconhecimento intelectual.

Tabela 6.3 – Distribuição temática das percepções sobre a TEP

Categoria	Percentual de menções
Visualização como facilitadora	78%
Dificuldade inicial com ausência de medidas	63%
Compreensão do ponto no infinito	54%
Relação entre Euclidiana e Projetiva	71%
Valorização do erro e discussão coletiva	49%

Fonte: Elaborado pelos autores

Em síntese, os dados evidenciam um deslocamento gradual do olhar geométrico dos participantes, de uma visão métrica para uma visão relacional. A análise quantitativa das respostas, apresentada na Tabela 6.3, mostra a redução de respostas empíricas (de 46% para 6%) e o crescimento das justificativas projetivas (de 16% para 70%), corroborando a hipótese de que a Transição Euclidiana-Projetiva pode ser ensinada mediante situações didáticas bem estruturadas. As falas finais dos participantes, como "agora penso nas relações e não nas medidas", sintetizam o movimento de reconstrução cognitiva que sustenta a proposta teórico-metodológica desta tese.

7 CONCLUSÃO

A investigação aqui desenvolvida demonstrou, de modo consistente, que a Transição Euclidiana-Projetiva (TEP) é um recurso heurístico e formativo para a formação de professores de Matemática. A TEP não apareceu apenas como um conjunto de conteúdo a ser transmitido, mas como um princípio didático capaz de modular modos de ver, operar e justificar em Geometria: desloca o foco da medida para a relação, do paralelismo para a incidência, e da visão plana para uma visualização relacional que integra múltiplos registros. Essa leitura coloca a TEP na interseção entre um objeto matemático e um instrumento pedagógico, isto é, simultaneamente conhecimento e estratégia de ensino.

Os cenários de intervenção, concebidos segundo a Engenharia Didática e articulados com as fases da Teoria das Situações Didáticas (Ação, Formulação, Validação e Institucionalização), mostraram-se eficazes para provocar os desequilíbrios epistemológicos necessários à aprendizagem. Observou-se uma trajetória cognitiva recorrente: muitos participantes partiram de concepções euclidianas, ancoradas em medidas e paralelismos; gradualmente, por meio da manipulação e da argumentação coletiva, definiram invariantes projetivos (colinearidade, pontos no infinito, correspondências homogêneas) e reformularam suas justificativas em termos relacionais. Em termos didáticos, isso evidencia que a TEP funciona como dispositivo gerador de obstáculos epistemológicos produtivos, que favorecem reorganizações conceituais significativas.

O GeoGebra 3D desempenhou papel central como *milieu* cognitivo: não foi mero instrumento gráfico, mas um ambiente que possibilitou a co-presença de planos euclidiano e projetivo, a experimentação imediata e a articulação entre registros visual, algébrico e verbal. As ferramentas projetivas desenvolvidas, e a conjugação com protótipos físicos (acetatos, impressões 3D), favoreceram a autonomia tecnológica dos participantes e a emergência de estratégias de exploração e justificação que seriam difíceis de alcançar apenas com representações estáticas. Assim, o software mostrou-se um mediador simbólico e operacional capaz de integrar percepção, operação e argumentação.

A análise qualitativa das justificativas e das interações revelou que o raciocínio projetivo emergente possui características próprias: tende a priorizar relações de incidência e invariância, a admitir pontos impróprios como objetos legítimos de raciocínio e a explorar inversões perspectivísticas como técnica argumentativa. Essa diferença qualitativa em relação ao raciocínio euclidiano aponta para a necessidade de tratar a Geometria Projetiva não como conteúdo exótico eventual, mas como repertório cognitivo que amplia a capacidade de raciocínio geométrico do professor.

Do ponto de vista formativo, algumas implicações práticas são claras. Primeiro,

seqüências didáticas que integrem TEP e ferramentas digitais devem ser incorporadas na formação inicial e continuada, pois induzem mudanças de contrato didático, do ensino centrado em resultado para o ensino centrado na investigação e na justificativa. Segundo, é aconselhável a adoção de atividades que cruzem o digital e o manual (por exemplo, GeoGebra + acetatos ou modelos impressos), pois essa hibridização reforça a transposição entre o visível e o inteligível. Terceiro, o professor precisa ser preparado como engenheiro didático: projetar *milieus*, antecipar obstáculos e organizar momentos de institucionalização que conectem a experiência empírica aos saberes formalizados.

Reconhecemos limitações inerentes a este estudo: a amostra (30 participantes) e o caráter qualitativo das evidências permitem inferências interpretativas robustas, porém não pretendem quantificar efeitos em larga escala. Além disso, embora o GeoGebra 3D tenha se mostrado poderoso, seu uso exige formação tecnológica e didática prévia para que o potencial cognitivo seja plenamente explorado; sem esse preparo, corre-se o risco de que o software apenas reproduza práticas instrucionais tradicionais. Essas limitações orientam tanto a cautela na generalização quanto a agenda de pesquisas futuras.

Assim, propõe-se as seguintes linhas prioritárias para continuidade investigativa e para a prática formativa:

1. Estudos longitudinais que acompanhem a incorporação da TEP no repertório de professores ao longo de semestres/anos letivos, verificando retenção e transferência para o ensino em turmas reais.
2. Investigações-ação em contextos escolares diversos (ensino médio, formação técnica, turmas multisseriadas) para mapear condicionantes institucionais e culturais.
3. Desenvolvimento e avaliação de materiais formativos (sequências, guias para professores, vídeos) que facilitem a adoção das ferramentas projetivas do GeoGebra por docentes com diferentes níveis de familiaridade tecnológica.
4. Análises comparativas entre diferentes ambientes digitais (GeoGebra, Cabri, protótipos específicos) para identificar características do *milieu* que mais favorecem a emergência de raciocínio projetivo.

Em suma, a pesquisa sustenta a hipótese inicial: a Transição Euclidiana-Projetiva, quando mediada por uma engenharia didática bem concebida e por ferramentas digitais apropriadas, favorece reorganizações cognitivas profundas e produz ganhos formativos relevantes para futuros professores de Matemática. A TEP, portanto, afirma-se como conceito pedagógico e epistemológico frutífero, capaz de articular teoria, visualização e prática docente, e merece ocupar lugar de destaque nas discussões e nos currículos de formação de professores.

Por fim, resta a lembrança que orientou todo este trabalho: ensinar Matemática é, antes de tudo, provocar olhares. Se a formação docente possibilita olhos que vejam o invisível das relações e projetem possibilidades novas de explicação, então fizemos um avanço. A TEP é, neste sentido, uma pedagogia do olhar, transitória, relacional e profundamente formadora.

Referências

- ABAR, C. A. A. P. *A construção de objetos matemáticos por meio dos registros de comando do GeoGebra*. Madrid: FESPM, 2017. VIII Congresso Iberoamericano de Educación Matemática.
- ALBERTI, L. B. *On Painting*. [S.l.]: Penguin Classics, 1991. Reprint.
- ALMOULOUD, S. A. *Fundamentos da Didática da Matemática*. São Paulo: Editora UFPR, 2007.
- ALVES, F. R. V. A teoria das situações didáticas: pressupostos e implicações para a formação do professor que ensina matemática. *Bolema*, v. 17, n. 22, p. 1–20, 2004.
- ALVES, F. R. V. *Engenharia didática: um olhar investigativo sobre a prática pedagógica em matemática*. Fortaleza: UFC, 2010.
- ALVES, F. R. V. O meio na teoria das situações didáticas: uma perspectiva epistemológica e didática. *Zetetiké*, v. 20, n. 2, p. 373–390, 2012.
- ALVES, F. R. V. Visualização de integrais impróprias em um parâmetro com o auxílio do geogebra. *#Tear: Revista de Educação, Ciência e Tecnologia*, Canoas, v. 3, n. 1, 2014.
- ALVES, F. R. V. A engenharia didática como metodologia de pesquisa e intervenção no ensino de matemática. *Zetetiké*, v. 23, n. 2, p. 299–320, 2015.
- ALVES, F. R. V. *Teoria das situações didáticas: elementos para repensar a prática pedagógica*. Campinas: Mercado de Letras, 2017.
- ALVES, F. R. V. *Engenharia Didática e a formação de professores de Matemática: perspectivas contemporâneas*. Fortaleza: EdUECE, 2021.
- ALVES, F. R. V. Situações didáticas olímpicas (sdos) ensino de olimpíadas de matemática com arrimo no software geogebra como recurso na visualização. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, p. 319–349, 2022.
- ALVES, F. R. V.; SOUSA, R. C.; FONTENELE, F. C. F. Didactical engeering of second generation: a proposal of the design and a teaching resource with support of the geogebra software in brazil. *Acta Didactica Napocensia*, v. 13, n. 2, p. 142–156, 2020.
- ALVES, F. R. V.; SOUSA, R. T.; AZEVEDO, I. F. O geogebra 3d no estudo de projeções ortogonais amparado pela teoria das situações didáticas. *JIEEM*, v. 14, n. 1, p. 92–98, 2021.
- ALVES, F. R. V.; SOUSA, R. T.; FONTENELE, F. C. F. Three-dimensional geometric perceptions in enem: A contribution from geogebra for mathematics teachers in brazil. *Acta Didactica Napocensia*, v. 15, n. 1, p. 114–123, 2022.
- ARCAVI, A. The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, v. 52, n. 3, p. 215–241, 2003.

- ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. *RDM*, v. 7, n. 3, p. 43–92, 1988.
- ARTIGUE, M. *Ingeniería didáctica en Educación Matemática*. Colômbia: [s.n.], 1995.
- ARTIGUE, M. Didactic engineering. In: BISHOP, A. J. et al. (Ed.). *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.
- ARTIGUE, M. The future of teaching and learning mathematics with digital technologies. In: *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain*. Boston: Springer, 2009, (New ICMI Study Series, v. 13).
- ARTIGUE, M. Didactic engineering in mathematics education. In: LERMAN, S. (Ed.). *Encyclopedia of Mathematics Education*. Cham: Springer, 2020.
- ARTIGUE, M. *Didactique des mathématiques et technologies numériques: nouvelles approches pour la formation des enseignants*. Paris: IREM, 2022.
- AUFFINGER, A.; VALENTIM, F. *Introdução à Geometria Projetiva*. Vitória: Universidade Federal do Espírito Santo, 2003.
- BARROS, A.; ANDRADE, P. *Introdução à Geometria Projetiva*. Rio de Janeiro: SBM, 2010. (Textos Universitários).
- BASSI, A. *Elementos de Geometria Projetiva*. São Carlos: Serviço de Publicações e Encadernação da Escola de Engenharia de São Carlos, 1967.
- BASTOS, L. C. *Uma introdução ao estudo da perspectiva para alunos do ensino médio*. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)) — Universidade Anhanguera, São Paulo, 2015.
- BERTINI, L. M. Visualização e imagens mentais: implicações no ensino-aprendizagem da geometria. *Zetetiké*, v. 9, n. 16, p. 111–136, 2001.
- BOGDAN, R.; BIKLEN, S. *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora, 1994.
- BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. *Visualização e tecnologia no ensino de matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
- BORTOLOSSI, H. J. O uso do software gratuito geogebra no ensino e na aprendizagem de estatística e probabilidade. *VIDYA*, v. 36, n. 2, 2016.
- BRANNAN, D. A.; ESPLEN, M. F.; GRAY, J. J. *Geometry*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1999.
- Brasil. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: [s.n.], 2018.
- BREDA, A.; TROCADO, A.; SANTOS, J. O geogebra para além da segunda dimensão. *Indagatio Didactica*, Portugal, v. 5, n. 1, 2013.
- BREDA, A. M. D. A.; SANTOS, J. M. D. S. D. Complex functions with geogebra. *Teaching Mathematics and its Applications*, Portugal, v. 35, n. 2, p. 102–110, 2016.
- BRIANCHON, C. J. Théorème sur les coniques. 1810.

- BROUSSEAU, G. *Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1986.
- BROUSSEAU, G. *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic, 1997.
- BROUSSEAU, G. *Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino*. São Paulo: Ática, 2008.
- CARNOT, L. *Géométrie de position*. [S.l.: s.n.], 1803.
- CEPPI, H.; FOURNIER, A. *Geometría Proyectiva*. Buenos Aires: Kraft Ltda, 1951.
- CHASLES, M. *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*. [S.l.: s.n.], 1837.
- CHAVES, J. A.; GRIMBERG, G. E. O tratado sobre as propriedades projetivas das figuras de jean-victor poncelet: Elementos de uma gênese. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 14, n. 28, p. 85–106, 2020.
- CHEVALLARD, Y. *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991.
- COXETER, H. S. M. *Introduction to Geometry*. 2. ed. New York: Wiley, 1969.
- COXETER, H. S. M. *Projective Geometry*. 2. ed. New York: Springer, 2003.
- CRANELL, A.; FRANTZ, M.; FUTAMURA, F. *Perspective and Projective Geometry*. Princeton and Oxford: Princeton University Press, 2019.
- D'AMBROSIO, U. *Educação matemática: da teoria à prática*. Campinas: Papirus, 1990.
- DESARGUES, G. *Brouillon Project d'une Atteinte aux Événements des Rencontres du Cône avec un Plan*. Lyon: [s.n.], 1639.
- DIAS, L. S.; GRIMBERG, G. E. Álgebra e geometria projetiva analítica na inglaterra dos anos 1841-1853. *Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, v. 38, n. 81, p. 11–31, 2015.
- DIAS, L. S.; GRIMBERG, G. E. Classificação das geometrias: um diálogo entre os textos de arthur cayley e de felix klein. *Revista Brasileira de História da Ciência*, Rio de Janeiro, v. 12, n. 2, p. 207–224, 2019.
- DOCKENDORFF, M.; SOLAR, H. Ict integration in mathematics initial teacher training ad its impact on visualization: the case of geogebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, England, 2017.
- EUCLIDES. *Os Elementos*. São Paulo: Editora da UNESP, 1990.
- FERREIRA, B. L. *"O que sabem sobre as curvas cônicas?" Uma possível leitura para o processo de produção de significado em um Grupo de Estudos*. Tese (Doutorado) — Unesp, Rio Claro, 2019.
- GRANGER, G. G. *Filosofia do Estilo*. 1. ed. São Paulo: Perspectiva, 1974.

- GRAVINA, M. A.; FIGUEIREDO, A. C. *Visualização e pensamento geométrico na era digital*. Porto Alegre: UFRGS Editora, 2023.
- GRAY, E.; TALL, D. Duality, ambiguity, and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 25, n. 2, p. 116–140, 1994.
- GREENBERG, M. J. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. [S.l.]: W. H. Freeman, 2008.
- HARLE, C. E. *Introdução à Geometria Projetiva Clássica*. São Paulo: IME-USP. S.d.
- HILBERT, D. *Fundamentos da Geometria (Grundlagen der Geometrie)*. [S.l.: s.n.], 1899.
- HILBERT, D. *Foundations of Geometry*. [S.l.]: Open Court Publishing, 1902.
- HIRE, P. D. L. *Nouvelle méthode en géométrie*. [S.l.: s.n.], 1708.
- HOLANDA, L. S. *Os Modelos Axiomáticos das Geometrias Euclidiana e Projetiva: Histórico, Similaridades, Diferenças e Aplicações*. Dissertação (Mestrado) — UnB, Brasília, 2020.
- HOLLEBRANDS, K. F. High school students' understandings of geometric transformations in the context of a technological environment. *The Journal of Mathematical Behavior*, v. 22, n. 1, p. 55–72, 2003.
- KITCHENHAM, B.; CHARTERS, S. M. *Guidelines for performing systematic literature reviews in software engineering*. [S.l.], 2007.
- LABORDE, C. Integration of technology in the design of geometry tasks with cabri-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, v. 6, n. 3, p. 283–317, 2001.
- LEIVAS, J. C. P.; PORTELLA, H. P. D. Geogebra para introduzir geometria hiperbólica no ensino fundamental. *Revista Do Instituto GeoGebra Internacional De São Paulo*, v. 10, n. 1, p. 65–91, 2021.
- LOPES, L. R. P.; MANRIQUE, A. L.; MACÊDO, J. A. Revelações sobre a presença da geometria na formação inicial de professores de matemática no brasil (2001-2019). *Revista Paradigma*, v. 43, p. 117–137, 2022.
- MACHADO, G. B. B. *Curvas cônicas: uma análise das articulações entre os registros de representação com auxílio do Conics 3D*. Dissertação (Mestrado) — UFPE, Recife, 2020.
- MAGNO, L. C.; CHAQUIAM, M.; SOUSA, R. W. D. O. Pappus de alexandria: Contribuições À matemática. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, v. 7, n. 20, p. 08–17, 2021.
- MALTEZ, L. *Geometria Projetiva: Matemática e Arte*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2015.
- MONGE, G. Journal polytechnique ou bulletin du travail fait a l'ecole centrale des travaux publics. *Paris*, v. 2, p. 1–14, 1795.
- MONGE, G. *Géométrie descriptive*. [S.l.: s.n.], 1799.

- NACARATO, A. M.; PASSOS, C. L. B. *Tecnologia no ensino da matemática: experiências e pesquisas*. Campinas: Papirus, 2010.
- OLIVEIRA, J. C. *O estado do conhecimento sobre geometria plana no ensino médio utilizando softwares de geometria dinâmica (1987 a 2017)*. Dissertação (Mestrado) — UFG, Goiânia, 2020.
- OLIVEIRA, W. S. A visualização no ensino e aprendizagem da geometria: uma abordagem com o uso do geogebra. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 8, n. 2, p. 119–138, 2013.
- PEIXOTO, T. *Fotografia como um recurso para o ensino de perspectiva cônica com tecnologias digitais*. Dissertação (Mestrado) — UFRGS, Porto Alegre, 2022.
- PEREIRA, M. A. S. *Geometria Projetiva: um breve relato histórico, artístico, teórico e aplicações com Geometria Dinâmica*. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)) — Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.
- PONCELET, J.-V. *Traité des propriétés projectives des figures*. Paris: Bachelier, 1822.
- PRESMEG, N. Visualisation and learning in mathematics. In: GUTIÉRREZ, A.; BOERO, P. (Ed.). *Handbook of research on the psychology of mathematics education*. Rotterdam: Sense Publishers, 2006.
- RIBEIRO, G. *teoremas Clássicos sobre Cónicas Projetivas*. Tese (Doutorado) — Universidade de Minho, Portugal, 2012.
- RICHTER-GEBERT, J. Pappos's theorem: Nine proofs and three variations. In: *Perspectives on Projective Geometry: A Guided Tour through Real and Complex Geometry*. Draft version. Berlin, Heidelberg: Springer, 2011.
- SANTOS, A. A.; ALVES, F. R. V. A engenharia didática em articulação com a teoria das situações didáticas como percurso metodológico ao estudo e ensino de matemática. *Acta Scientia*, v. 19, n. 3, 2017.
- SERVOIS, F.-J. *Mémoire sur les propriétés projectives des figures*. [S.l.: s.n.], 1814.
- SFARD, A. On two metaphors for learning and the dangers of choosing just one. *Educational Researcher*, v. 27, n. 2, p. 4–13, 1998.
- SILVA, A. L. Método histórico de achille bassi nos elementos de geometria projetiva. In: *Actas del VII CIBEM*. Montevideo, Uruguai: [s.n.], 2013.
- SILVA, G. V. S. *Potencialidade e Limitações dos Softwares Geogebra e Cabri Géomètre II: Uma análise à luz dos pressupostos apresentados pela Geometria Projetiva*. Dissertação (Mestrado) — EDUMATEC, UFPE, Recife, 2022.
- SILVA, S. A. *UM ESTUDO SOBRE INTERSEÇÕES DE CURVAS ALGÉBRICAS PLANAS*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Viçosa, 2019. Orientadora: Danielle Franco Nicolau Lara.
- SOUSA, R. T.; AZEVEDO, I. F.; ALVES, F. R. V. Engenharia didática e teoria das situações didáticas: Um contributo ao ensino de geometria analítica com o software geogebra. *Revista RBBA - Revista Binacional Brasil Argentina*, Argentina, 2021.

- SOUSA, R. T. d. et al. Transposição didática com aporte do geogebra na passagem da geometria plana para a geometria espacial. *Revista Ibero-Americana De Humanidades, Ciências E Educação*, v. 7, n. 5, p. 106–124, 2021.
- SOUZA, L. M.; REZENDE, F. O geogebra como mediador na aprendizagem de geometria espacial: um estudo com licenciandos em matemática. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, v. 14, n. 3, p. 205–223, 2021.
- STILLWELL, J. *Mathematics and its History*. 2. ed. New York: Springer, 2002.
- TALL, D. Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus. In: ZIMMERMANN; CUNNINGHAM (Ed.). *Visualization in Mathematics*. [S.l.: s.n.], (M.A.A. Notes, 19). p. 105–119.
- TALL, D. The psychology of advanced mathematical thinking. In: TALL, D. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic, 1991.
- TALL, D. Thinking through three worlds of mathematics. In: *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. [S.l.: s.n.], 2002. v. 4, p. 281–288.
- TALL, D. *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- TATON, R. Poncelet et les fondements de la géométrie projective. *Revue d'histoire des sciences*, v. 4, n. 2, p. 97–115, 1951.
- TATON, R. *Histoire générale des sciences – Tome II : De Galilée à Newton*. Paris: PUF, 1962.
- VALENTE, W. R. *História da matemática e do ensino da matemática no Brasil*. Campinas: Autores Associados, 1999.
- VALENTE, W. R. Positivismo e matemática escolar dos livros didáticos no advento da república. *Cadernos de pesquisa*, n. 109, p. 201–212, mar 2000.
- VEBLEN, O. A system of axioms for geometry. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 5, n. 3, p. 343–384, 1904.
- VEBLEN, O.; YOUNG, J. W. A. *Projective Geometry*. Boston: Ginn and Company, 1910.
- VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 10, n. 2/3, p. 133–170, 1990.
- ZIATDINOV, R.; VALLES, J. R. J. Synthesis of modeling, visualization, and programming in geogebra as an effective approach for teaching and learning stem topics. *Mathematics*, v. 10, p. 398, 2022.

Apêndices

APÊNDICE A – Formulário da Situação Didática 1

Nome Completo:

Instituição de Ensino:

Situação Proposta:

Dadas duas retas r e s e seis pontos, A, B, C, X, Y, Z , tal que $\{A, B, C\} \in r$ e $\{X, Y, Z\} \in s$. Que relação pode ser inferida a partir dos pontos formados pelos pares de retas $\{AY, BX\}$, $\{AZ, CX\}$ e $\{BZ, CY\}$?

Construção Inicial:

Conclusões pós discussões:

Construção Pós Discussão:

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

APÊNDICE B – Formulário da Situação Didática 2

Nome Completo:

Instituição de Ensino:

Construção do Teorema de Pappus:

Construção do Teorema de Pappus (Caso Particular – Variação 1):

Construção do Teorema de Pappus (Caso Particular – Variação 2):

Construção do Teorema de Pappus (Caso Particular – Variação 3):

Conclusões pós discussões:

Construção do Teorema de Pappus (Caso Particular – Final):

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

APÊNDICE C – Formulário da Situação Didática 3

Nome Completo:

Instituição de Ensino:

Construção Proposta:

Conclusões pós discussões:

Construção Pós Discussão:

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

APÊNDICE D – Formulário da Situação Didática 4

Nome Completo:

Instituição de Ensino:

Construção Circunferência:

LINHA DE HORIZONTE

Construção Elipse:

LINHA DE HORIZONTE

Construção Parábola:

LINHA DE HORIZONTE

Construção Hipérbole:

LINHA DE HORIZONTE

Conclusões pós discussões:

Construção Circunferência:

LINHA DE HORIZONTE

Construção Elipse:

LINHA DE HORIZONTE

Construção Parábola:

LINHA DE HORIZONTE

Construção Hipérbole:

LINHA DE HORIZONTE

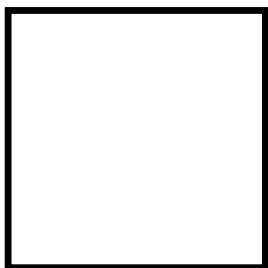
This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

APÊNDICE E – Formulário da Situação Didática 5

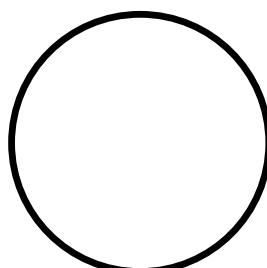
Nome Completo:

Instituição de Ensino:

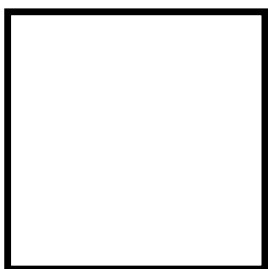
①



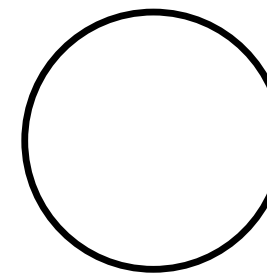
①



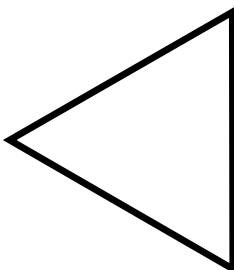
②



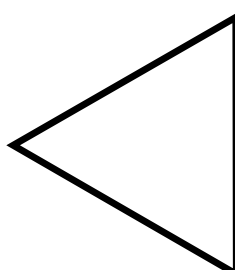
②



①



②



This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

APÊNDICE F – Rubrica Analítica dos Indicadores Observáveis da Pesquisa

Este apêndice apresenta a rubrica analítica dos indicadores observáveis utilizados na pesquisa, reorganizada conforme os princípios da ABNT (NBR 14724/2023 e NBR 6024). Optou-se por um formato descritivo, substituindo a tabela extensa por quadros narrativos, de modo a favorecer a legibilidade e o alinhamento com as normas acadêmicas. Cada quadro corresponde a uma Questão Derivada (QP3–QP8), incluindo os respectivos indicadores observáveis, instrumentos de coleta e níveis de referência (1 a 4).

QP3 – Visualização e compreensão

Indicadores observáveis:

- Capacidade de reconhecer elementos projetivos (pontos impróprios, retas de fuga, cônicas).
- Uso da visualização 3D como meio de argumentação.

Instrumentos de coleta:

- Registros em vídeo, capturas de tela, protocolos de interação e falas transcritas.

Níveis de referência:

1. **Procedimental** – reproduz construções sem compreender o significado visual.
2. **Empírico** – identifica elementos sem explicá-los.
3. **Justificativo** – relaciona representações e propriedades geométricas.
4. **Generalizador** – aplica conceitos visuais a outros contextos (ex.: perspectiva artística e modelagem matemática).

QP4 – Transposição e generalização

Indicadores observáveis:

- Transposição de procedimentos euclidianos para o contexto projetivo.

Instrumentos de coleta:

- Formulários e registros escritos dos participantes.

Níveis de referência:

1. **Procedimental** – reproduz algoritmos euclidianos no ambiente projetivo.
2. **Empírico** – reconhece diferenças parciais entre os contextos.
3. **Justificativo** – justifica adaptações realizadas.
4. **Generalizador** – explicita invariantes e rupturas conceituais entre as geometrias.

QP5 – Ferramentas e técnica**Indicadores observáveis:**

- Construção e uso de ferramentas no GeoGebra.

Instrumentos de coleta:

- Logs do software, observação direta e registros audiovisuais.

Níveis de referência:

1. **Procedimental** – executa comandos prontos.
2. **Empírico** – modifica parâmetros básicos.
3. **Justificativo** – cria ferramenta funcional com compreensão parcial.
4. **Generalizador** – desenvolve e aplica ferramenta autônoma, documentando finalidade e limitação.

QP6 – Formação docente**Indicadores observáveis:**

- Reflexão sobre o uso didático do GeoGebra.

Instrumentos de coleta:

- Questionário reflexivo, diário de campo e observações durante a intervenção.

Níveis de referência:

1. **Procedimental** – reproduz discurso de utilidade do software.
2. **Empírico** – reconhece potencialidades sem contextualizar.
3. **Justificativo** – propõe aplicações pontuais em sala de aula.
4. **Generalizador** – planeja situações didáticas complexas baseadas na TEP.

QP7 – Indicadores de aprendizagem gerais

Indicadores observáveis:

- Argumentação e validação entre pares.

Instrumentos de coleta:

- Gravações em grupo, transcrições e relatórios reflexivos.

Níveis de referência:

1. **Procedimental** – aceita ou rejeita respostas sem justificar.
2. **Empírico** – inicia trocas argumentativas pontuais.
3. **Justificativo** – sustenta argumentos com exemplos e contraexemplos.
4. **Generalizador** – promove discussões coletivas e fundamentadas de validação.

QP8 – Comparações metodológicas

Indicadores observáveis:

- Diferenças observadas entre grupos com e sem uso de GeoGebra.

Instrumentos de coleta:

- Avaliações diagnósticas e comparativas entre grupos controle e experimental.

Níveis de referência:

1. **Procedimental** – executa tarefas mecanicamente.
2. **Empírico** – demonstra melhora restrita ao uso instrumental.
3. **Justificativo** – explica diferenças de desempenho com base em raciocínio geométrico.
4. **Generalizador** – formula conclusões teóricas sobre a eficácia da TEP mediada por tecnologia.

Cada nível foi concebido não como categoria estanque, mas como intervalo de progressão cognitiva, podendo o mesmo sujeito apresentar traços de níveis distintos em momentos diferentes da intervenção. A codificação seguirá o princípio da triangulação, cruzando observações diretas, registros digitais e produções escritas, de modo a minimizar inferências subjetivas e ampliar a confiabilidade da análise.

APÊNDICE G – Ferramentas Projetivas – Perpendicular Projetada

```

ProjetarReta(
  Reta(
    Interseção(
      Reta(Obs, C),
      PlanoXOY
    ),
    Interseção(
      Perpendicular(
        Interseção(
          Reta(Obs, C),
          PlanoXOY
        ),
        Reta(
          Interseção(
            Reta(Obs, f(0)),
            PlanoXOY
          ),
          Interseção(
            Reta(Obs, f(1)),
            PlanoXOY
          )
        )
      ),
      PlanoXOY
    ),
    Círculo(
      Interseção(
        Reta(Obs, C),
        PlanoXOY
      ),
      Distância(
        Interseção(
          Reta(Obs, C),
          PlanoXOY

```

```

        ),
        Interseção(
            Reta(Obs, f(0)),
            PlanoXOY
        )
    ) + 5,
    PlanoXOY
)
)
),
Obs,
Proj
)

```

APÊNDICE H – Ferramentas Projetivas – Paralela Projetada

```

PerpendicularProjetada(
  C,
  PerpendicularProjetada(
    C,
    f,
    Obs,
    Proj
  ),
  Obs,
  Proj
)

```


APÊNDICE I – Ferramentas Projetivas – Ponto Médio Projetado

```
ProjetarPonto(  
  PontoMédio(  
    Interseção(  
      Reta(A, Obs),  
      PlanoXOY  
    ),  
    Interseção(  
      Reta(B, Obs),  
      PlanoXOY  
    )  
  ),  
  Obs,  
  Proj  
)
```


APÊNDICE J – Ferramentas Projetivas – Mediatriz Projetada

```
PerpendicularProjetada(  
  PontoMédioProjetado(  
    A,  
    B,  
    Obs,  
    Proj  
  ),  
  Reta(A, B),  
  Obs,  
  Proj  
)
```


APÊNDICE K – Ferramentas Projetivas – Círculo Projetado

```

Cônica(
  A,
  B,
  C,
  ProjetarPonto(
    Interseção(
      Círculo(
        Interseção(
          Reta(A, Obs),
          PlanoXOY
        ),
        Interseção(
          Reta(B, Obs),
          PlanoXOY
        ),
        Interseção(
          Reta(C, Obs),
          PlanoXOY
        )
      ),
      Mediatriz(
        Interseção(
          Reta(A, Obs),
          PlanoXOY
        ),
        Interseção(
          Reta(B, Obs),
          PlanoXOY
        )
      )
    ),
    Obs,
    Proj
  )
)

```

```

),
ProjetarPonto(
    Interseção(
        Círculo(
            Interseção(
                Reta(A, Obs),
                PlanoXOY
            ),
            Interseção(
                Reta(B, Obs),
                PlanoXOY
            ),
            Interseção(
                Reta(C, Obs),
                PlanoXOY
            )
        ),
    ),
    Mediatriz(
        Interseção(
            Reta(A, Obs),
            PlanoXOY
        ),
        Interseção(
            Reta(C, Obs),
            PlanoXOY
        )
    ),
    Obs,
    Proj
)
)

```

APÊNDICE L – Ferramentas Projetivas – Tangente Projetada

```

ProjetarReta(
  Tangente(
    Interseção(
      Reta(D, Obs),
      PlanoXOY
    ),
    Círculo(
      Interseção(
        Reta(D, Obs),
        PlanoXOY
      ),
      Interseção(
        Reta(Ponto(c), Obs),
        PlanoXOY
      ),
      Interseção(
        Reta(
          Interseção(
            MediatrizProjetada(
              D,
              Ponto(c),
              Obs,
              Proj
            ),
            c
          ),
          Obs
        ),
        PlanoXOY
      )
    )
  ),
  Obs,

```

Proj

)

APÊNDICE M – Ferramentas Projetivas – Polígono Regular Projetado

```

Polígono(
  Sequência(
    ProjetarPonto(
      Girar(
        Interseção(
          Reta(A, Obs),
          PlanoXOY
        ),
        k * ((360°) / l),
        CentroDeGravidade(
          Polígono(
            Interseção(
              Reta(B, Obs),
              PlanoXOY
            ),
            Interseção(
              Reta(A, Obs),
              PlanoXOY
            ),
            l
          )
        )
      ),
      Obs,
      Proj
    ),
    k,
    l,
    l
  )
)

```


APÊNDICE N – Ferramentas Projetivas – Bissetriz Projetada

```

ProjetarReta(
  Bissetriz(
    Interseção(
      Reta(A, Obs),
      PlanoXOY
    ),
    Interseção(
      Reta(B, Obs),
      PlanoXOY
    ),
    Interseção(
      Reta(C, Obs),
      PlanoXOY
    )
  ),
  Obs,
  Proj
)

```


APÊNDICE O – Ferramentas Projetivas – Centro Projetado

```

ProjetarPonto(
  Centro(
    Círculo(
      Interseção(
        Reta(Ponto(c), Obs),
        PlanoXOY
      ),
      Interseção(
        Reta(
          Interseção(
            Mediatriz(
              Centro(c),
              Ponto(c),
              Proj
            ),
            c
          ),
          Obs
        ),
        PlanoXOY
      ),
      Interseção(
        Reta(
          Interseção(
            Mediatriz(
              PontoMédio(
                Centro(c),
                Ponto(c)
              ),
              Ponto(c),
              Proj
            ),
            c

```

```
        ),  
        Obs  
    ),  
    PlanoXOY  
)  
)  
,  
Obs,  
Proj  
)
```

APÊNDICE P – Ferramentas Projetivas – Círculo Projetado (Centro, Ponto)

```
ProjetarCírculo(  
  Círculo(  
    Interseção(  
      Reta(A, Obs),  
      PlanoXOY  
    ),  
    Interseção(  
      Reta(B, Obs),  
      PlanoXOY  
    )  
  ),  
  Obs,  
  Proj  
)
```


APÊNDICE Q – Ferramentas Projetivas – Círculo Projetado (Centro, Raio Euclidiano)

```

ProjetarCírculo(
  Círculo(
    Interseção(
      Reta(A, Obs),
      PlanoXOY
    ),
    d,
    PlanoXOY
  ),
  Obs,
  Proj
)

```


APÊNDICE R – Ferramentas Projetivas – Elipse Projetada

```

Cônica(
  ProjetarPonto(
    Interseção(
      Perpendicular(
        PontoMédio(
          Interseção(
            Reta(A, Obs),
            PlanoXOY
          ),
          Interseção(
            Reta(B, Obs),
            PlanoXOY
          )
        ),
        Reta(
          Interseção(
            Reta(A, Obs),
            PlanoXOY
          ),
          Interseção(
            Reta(B, Obs),
            PlanoXOY
          )
        ),
        PlanoXOY
      ),
      Elipse(
        Interseção(
          Reta(A, Obs),
          PlanoXOY
        ),
        Interseção(
          Reta(B, Obs),

```

```

        PlanoXOY
    ),
    Interseção(
        Reta(C, Obs),
        PlanoXOY
    )
)
),
Obs,
Proj
),
ProjetarPonto(
    Interseção(
        Perpendicular(
            PontoMédio(
                PontoMédio(
                    Interseção(
                        Reta(A, Obs),
                        PlanoXOY
                    ),
                    Interseção(
                        Reta(B, Obs),
                        PlanoXOY
                    )
                ),
                Interseção(
                    Reta(B, Obs),
                    PlanoXOY
                )
            ),
            Interseção(
                Reta(A, Obs),
                PlanoXOY
            ),
            Interseção(
                Reta(B, Obs),
                PlanoXOY
            )
        )
    )
)
Reta(
    Interseção(
        Reta(A, Obs),
        PlanoXOY
    ),
    Interseção(
        Reta(B, Obs),
        PlanoXOY
    )
)

```

```

        ),
        PlanoXOY
    ),
    Elipse(
        Interseção(
            Reta(A, Obs),
            PlanoXOY
        ),
        Interseção(
            Reta(B, Obs),
            PlanoXOY
        ),
        Interseção(
            Reta(C, Obs),
            PlanoXOY
        )
    )
),
Obs,
Proj
),
ProjetarPonto(
    Interseção(
        Perpendicular(
            PontoMédio(
                Interseção(
                    Reta(A, Obs),
                    PlanoXOY
                ),
                PontoMédio(
                    Interseção(
                        Reta(A, Obs),
                        PlanoXOY
                    ),
                    Interseção(
                        Reta(B, Obs),
                        PlanoXOY
                    )
                )
            )
        )
    )
)

```

```

    ),
    Reta(
        Interseção(
            Reta(A, Obs),
            PlanoXOY
        ),
        Interseção(
            Reta(B, Obs),
            PlanoXOY
        )
    ),
    PlanoXOY
),
Ellipse(
    Interseção(
        Reta(A, Obs),
        PlanoXOY
    ),
    Interseção(
        Reta(B, Obs),
        PlanoXOY
    ),
    Interseção(
        Reta(C, Obs),
        PlanoXOY
    )
)
),
Obs,
Proj
),
ProjetarPonto(
    Interseção(
        Perpendicular(
            PontoMédio(
                PontoMédio(
                    PontoMédio(
                        Interseção(
                            Reta(A, Obs),

```

```

        PlanoXOY
    ),
    Interseção(
        Reta(B, Obs),
        PlanoXOY
    )
),
    Interseção(
        Reta(B, Obs),
        PlanoXOY
    )
),
    Interseção(
        Reta(B, Obs),
        PlanoXOY
    )
),
    Reta(
        Interseção(
            Reta(A, Obs),
            PlanoXOY
        ),
        Interseção(
            Reta(B, Obs),
            PlanoXOY
        )
    ),
    PlanoXOY
),
    Elipse(
        Interseção(
            Reta(A, Obs),
            PlanoXOY
        ),
        Interseção(
            Reta(B, Obs),
            PlanoXOY
        ),
        Interseção(

```

```

        Reta(C, Obs),
        PlanoXOY
    )
)
),
Obs,
Proj
),
ProjetarPonto(
    Interseção(
        Perpendicular(
            PontoMédio(
                Interseção(
                    Reta(A, Obs),
                    PlanoXOY
                ),
                PontoMédio(
                    PontoMédio(
                        Interseção(
                            Reta(A, Obs),
                            PlanoXOY
                        ),
                        Interseção(
                            Reta(B, Obs),
                            PlanoXOY
                        )
                    ),
                    Interseção(
                        Reta(B, Obs),
                        PlanoXOY
                    )
                )
            ),
            Interseção(
                Reta(B, Obs),
                PlanoXOY
            )
        )
    )
),
Reta(
    Interseção(
        Reta(A, Obs),
        PlanoXOY
    ),
    Interseção(

```

```
        Reta(B, Obs),
        PlanoXOY
    )
),
PlanoXOY
),
Ellipse(
    Interseção(
        Reta(A, Obs),
        PlanoXOY
    ),
    Interseção(
        Reta(B, Obs),
        PlanoXOY
    ),
    Interseção(
        Reta(C, Obs),
        PlanoXOY
    )
)
),
Obs,
Proj
)
```


APÊNDICE S – Ferramentas Projetivas – Hipérbole Projetada

```

Cônica(
  ProjetaoPonto(
    Interseção(
      Segmento(
        Interseção(
          Reta(A, Obs),
          PlanoXOY
        ),
        Interseção(
          Reta(B, Obs),
          PlanoXOY
        )
      ),
      Hipérbole(
        Interseção(
          Reta(A, Obs),
          PlanoXOY
        ),
        Interseção(
          Reta(B, Obs),
          PlanoXOY
        ),
        Interseção(
          Reta(C, Obs),
          PlanoXOY
        )
      )
    ),
    Obs,
    Proj
  ),
  ProjetaoPonto(
    Interseção(

```

```

Mediatriz(
  PontoMédio(
    Interseção(
      Reta(A, Obs),
      PlanoXOY
    ),
    Interseção(
      Segmento(
        Interseção(
          Reta(A, Obs),
          PlanoXOY
        ),
        Interseção(
          Reta(B, Obs),
          PlanoXOY
        )
      ),
      Hipérbole(
        Interseção(
          Reta(A, Obs),
          PlanoXOY
        ),
        Interseção(
          Reta(B, Obs),
          PlanoXOY
        ),
        Interseção(
          Reta(C, Obs),
          PlanoXOY
        )
      )
    )
  ),
  Interseção(
    Reta(A, Obs),
    PlanoXOY
  )
),
Hipérbole(

```

```

        Interseção(
            Reta(A, Obs),
            PlanoXOY
        ),
        Interseção(
            Reta(B, Obs),
            PlanoXOY
        ),
        Interseção(
            Reta(C, Obs),
            PlanoXOY
        )
    )
),
Obs,
Proj
),
ProjetarPonto(
    Interseção(
        Mediatriz(
            Interseção(
                Segmento(
                    Interseção(
                        Reta(A, Obs),
                        PlanoXOY
                    ),
                    Interseção(
                        Reta(B, Obs),
                        PlanoXOY
                    )
                ),
            ),
            Hipérbole(
                Interseção(
                    Reta(A, Obs),
                    PlanoXOY
                ),
                Interseção(
                    Reta(B, Obs),
                    PlanoXOY
                )
            )
        )
    )
),

```

```

        ),
        Interseção(
            Reta(C, Obs),
            PlanoXOY
        )
    ),
    Interseção(
        Reta(A, Obs),
        PlanoXOY
    )
),
Hipérbole(
    Interseção(
        Reta(A, Obs),
        PlanoXOY
    ),
    Interseção(
        Reta(B, Obs),
        PlanoXOY
    ),
    Interseção(
        Reta(C, Obs),
        PlanoXOY
    )
)
),
Obs,
Proj
),
ProjetarPonto(
    Interseção(
        Mediatriz(
            PontoMédio(
                Interseção(
                    Reta(A, Obs),
                    PlanoXOY
                ),
                PontoMédio(

```

```

        Interseção(
            Reta(A, Obs),
            PlanoXOY
        ),
        Interseção(
            Segmento(
                Interseção(
                    Reta(A, Obs),
                    PlanoXOY
                ),
                Interseção(
                    Reta(B, Obs),
                    PlanoXOY
                )
            ),
            Hipérbole(
                Interseção(
                    Reta(A, Obs),
                    PlanoXOY
                ),
                Interseção(
                    Reta(B, Obs),
                    PlanoXOY
                ),
                Interseção(
                    Reta(C, Obs),
                    PlanoXOY
                )
            )
        )
    ),
    Interseção(
        Reta(A, Obs),
        PlanoXOY
    ),
    PlanoXOY
),
Hipérbole(

```

```

        Interseção(
            Reta(A, Obs),
            PlanoXOY
        ),
        Interseção(
            Reta(B, Obs),
            PlanoXOY
        ),
        Interseção(
            Reta(C, Obs),
            PlanoXOY
        )
    )
),
Obs,
Proj
),
ProjetarPonto(
    Interseção(
        Mediatriz(
            PontoMédio(
                Interseção(
                    Reta(A, Obs),
                    PlanoXOY
                ),
                PontoMédio(
                    PontoMédio(
                        Interseção(
                            Reta(A, Obs),
                            PlanoXOY
                        ),
                        Interseção(
                            Reta(B, Obs),
                            PlanoXOY
                        )
                    )
                ),
                Interseção(
                    Reta(B, Obs),
                    PlanoXOY
                )
            )
        )
    )
),
    Interseção(
        Reta(B, Obs),
        PlanoXOY
    )
)

```

```

        )
    )
),
Reta(
    Interseção(
        Reta(A, Obs),
        PlanoXOY
    ),
    Interseção(
        Reta(B, Obs),
        PlanoXOY
    )
),
PlanoXOY
),
Hipérbole(
    Interseção(
        Reta(A, Obs),
        PlanoXOY
    ),
    Interseção(
        Reta(B, Obs),
        PlanoXOY
    ),
    Interseção(
        Reta(C, Obs),
        PlanoXOY
    )
)
),
Obs,
Proj
)
)

```


APÊNDICE T – Ferramentas Projetivas – Parábola Projetada

```

Cônica(
  ProjetarPonto(
    Interseção(
      Círculo(
        Interseção(
          Reta(f(0), Obs),
          PlanoXOY
        ),
        Interseção(
          Reta(A, Obs),
          PlanoXOY
        )
      ),
      Parábola(
        Interseção(
          Reta(A, Obs),
          PlanoXOY
        ),
        Reta(
          Interseção(
            Reta(f(0), Obs),
            PlanoXOY
          ),
          Interseção(
            Reta(f(1), Obs),
            PlanoXOY
          )
        )
      )
    ),
    Obs,
    Proj
  ),

```

```

ProjetarPonto(
  Interseção(
    Círculo(
      Interseção(
        Reta(f(0.2), Obs),
        PlanoXOY
      ),
      Interseção(
        Reta(A, Obs),
        PlanoXOY
      )
    ),
    Parábola(
      Interseção(
        Reta(A, Obs),
        PlanoXOY
      ),
      Reta(
        Interseção(
          Reta(f(0), Obs),
          PlanoXOY
        ),
        Interseção(
          Reta(f(1), Obs),
          PlanoXOY
        )
      )
    )
  ),
  Obs,
  Proj
),
ProjetarPonto(
  Interseção(
    Círculo(
      Interseção(
        Reta(f(0.4), Obs),
        PlanoXOY
      ),

```

```

        Interseção(
            Reta(A, Obs),
            PlanoXOY
        )
    ),
    Parábola(
        Interseção(
            Reta(A, Obs),
            PlanoXOY
        ),
        Reta(
            Interseção(
                Reta(f(0), Obs),
                PlanoXOY
            ),
            Interseção(
                Reta(f(1), Obs),
                PlanoXOY
            )
        )
    )
),
Obs,
Proj
),
ProjetarPonto(
    Interseção(
        Círculo(
            Interseção(
                Reta(f(0.6), Obs),
                PlanoXOY
            ),
            Interseção(
                Reta(A, Obs),
                PlanoXOY
            )
        ),
    ),
    Parábola(
        Interseção(

```

```

        Reta(A, Obs),
        PlanoXOY
    ),
    Reta(
        Interseção(
            Reta(f(0), Obs),
            PlanoXOY
        ),
        Interseção(
            Reta(f(1), Obs),
            PlanoXOY
        )
    )
),
Obs,
Proj
),
ProjetarPonto(
    Interseção(
        Círculo(
            Interseção(
                Reta(f(1), Obs),
                PlanoXOY
            ),
            Interseção(
                Reta(A, Obs),
                PlanoXOY
            )
        ),
        Parábola(
            Interseção(
                Reta(A, Obs),
                PlanoXOY
            ),
            Reta(
                Interseção(
                    Reta(f(0), Obs),
                    PlanoXOY

```

```
        ),
        Interseção(
            Reta(f(1), Obs),
            PlanoXOY
        )
    )
)
),
Obs,
Proj
)
)
```


APÊNDICE U – Ferramentas Projetivas – Reflexão Projetada (Ponto)

```
ProjetarPonto(  
  Reflexão(  
    Interseção(  
      Reta(A, Obs),  
      PlanoXOY  
    ),  
    Interseção(  
      Reta(B, Obs),  
      PlanoXOY  
    )  
  ),  
  Obs,  
  Proj  
)
```


APÊNDICE V – Ferramentas Projetivas – Reflexão Projetada (Reta)

```

ProjetarPonto(
  Reflexão(
    Interseção(
      Reta(A, Obs),
      PlanoXOY
    ),
    Reta(
      Interseção(
        Reta(f(0), Obs),
        PlanoXOY
      ),
      Interseção(
        Reta(f(1), Obs),
        PlanoXOY
      )
    )
  ),
  Obs,
  Proj
)

```