



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ
IFCE CAMPUS FORTALEZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA
MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

THAMIRES SILVA AQUINO DE SOUZA

SEQUÊNCIA GENERALIZADA DE JACOBSTHAL: UMA ENGENHARIA
DIDÁTICA SOBRE SEU ENSINO

FORTALEZA

2020

THAMIRES SILVA AQUINO DE SOUZA

SEQUÊNCIA GENERALIZADA DE JACOBSTHAL: UMA ENGENHARIA DIDÁTICA
CLÁSSICA SOBRE SEU ENSINO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) - campus fortaleza, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Coorientador: Prof. Dr. Paulo César Cavalcante Oliveira

FORTALEZA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal do Ceará - IFCE
Sistema de Bibliotecas - SIBI
Ficha catalográfica elaborada pelo SIBI/IFCE, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- S729s Souza, Thamires Silva Aquino de Souza.
Sequência generalizada de Jacobsthal : uma engenharia didática sobre seu ensino / Thamires Silva Aquino de Souza Souza. - 2020.
169 f. : il. color.
- Dissertação (Mestrado) - Instituto Federal do Ceará, Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Campus Fortaleza, 2020.
Orientação: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.
Coorientação: Prof. Dr. Paulo César Cavalcante Oliveira.
1. Engenharia Didática . 2. Teoria das Situações Didáticas. 3. Sequência de Jacobsthal. I. Título.
CDD 510.07
-

THAMIRES SILVA AQUINO DE SOUZA

SEQUÊNCIA GENERALIZADA DE JACOBSTHAL: UMA ENGENHARIA DIDÁTICA
CLÁSSICA SOBRE SEU ENSINO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) - campus fortaleza, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Francisco Regis Vieira Alves (Orientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE

Prof. Dr. Paulo César Cavalcante Oliveira (Coorientador)
Universidade Regional do Cariri – URCA

Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes
Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA

Prof. Dr. Elion Souza da Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE

Prof^a. Dra. Francisca Cláudia Fernandes Fontenele
Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA

Prof. Dr. Laerte Silva da Fonseca
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Sergipe – IFS

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus que me deu força para enfrentar mais um de muitos obstáculos e não me desamparou quando fraquejei.

Aos meus pais Lourdes e Francisco e minha irmã Lays, pelo amor incondicional, por todas as orações e por toda ajuda e motivação nos momentos difíceis.

Ao meu esposo Paulo Rômulo, companheiro de todos os momentos, que me estimulou nas batalhas diárias e me incentivou a continuar indo em frente.

Ao meu Orientador Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves, pela disponibilidade e dedicação em contribuir para a realização desse trabalho.

Ao meu Coorientador, Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira, pela paciência e contribuições dadas.

Aos meus professores do PGECM que contribuíram na minha formação.

Aos professores Daniel Brandão, Elion Souza, Francisca Cláudia e Laerte Silva por aceitarem o convite para participarem da banca e por proporem sugestões para melhoria da pesquisa.

Aos meus colegas de curso, em especial minha amiga Gabriela Brito, que se fez presente diariamente durante todo esse período.

Às amigas Anna Rosina, Ariane, Fabiana e Winnie por todo o companheirismo e amizade, e aos demais amigos, pelo apoio durante a trajetória.

A todos que de forma direta ou indireta contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

A presente dissertação de mestrado se constitui do relato de pesquisa no âmbito da História da Matemática sobre a Sequência de Jacobsthal e seus modelos de generalização e de extensão. Nesse sentido, referendados por alguns periódicos de matemática pura, buscamos identificar os principais teoremas, definições e propriedades atinentes ao objeto matemático em estudo. Assim, em consonância com as orientações da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa e em complementaridade com a Teoria das Situações Didáticas, que permite uma análise minuciosa dos fenômenos relativos ao ensino e aprendizagem da Sequência de Jacobsthal, descrevemos os elementos principais que constituem a ED. Dessa forma, o emprego dessa metodologia viabilizou uma experimentação a fim de identificar os aspectos evolutivos dessa sequência e, além disso, produzir situações de ensino com objetivo de estimular a formulação de definições e teoremas relativos aos modelos estudados. A análise realizada dos dados coligidos no decurso da aplicação da pesquisa permitem concluir que foi favorecido aos professores de matemática em formação inicial, uma compreensão epistemológica da História da Matemática e seus processos de evolução matemática.

Palavra-chave: Engenharia Didática. Teoria das Situações Didáticas. Sequência de Jacobsthal.

ABSTRACT

In this research, we present an investigation in the context of the History of Mathematics about the Jacobsthal Sequence and its models of generalization and extension. In this sense, endorsed in some journals of pure mathematics to identify the main theorems, definitions and properties pertaining to the mathematical object. Thus, in line with the guidelines of Didactic Engineering as a research methodology and in complementarity with the Theory of Didactic Situations, which allows a thorough analysis of the phenomena related to the teaching and learning of Jacobsthal Sequence, we will describe the main elements that constitute ED. Thus, the use of this methodology allowed an experimentation to be made in order to identify the evolutionary aspects of this sequence and, in addition, to produce teaching situations in order to stimulate the formulation of definitions and theorems related to the models studied. The data collected in the course of applying the research allows us to conclude that mathematics teachers in initial training were favored, an epistemological understanding of the History of Mathematics and its mathematical evolution processes. Thus, we hope that the methodological approach covered in this work will serve as a reference for organizing and systematizing future research in the field of mathematics education.

Keywords: Didactic Engineering. Theory of Didactic Situations. Sequence of Jacobsthal.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Triângulo Didático.....	21
Figura 2 –	Organização da teoria das situações didáticas.....	24
Figura 3 –	Saber e Conhecimento.....	26
Figura 4 –	Fases da Engenharia Didática.....	28
Figura 5 –	Propriedades das sequências numéricas estudadas por Jacobsthal.....	36
Figura 6 –	listagem dos primeiros termos da SPJ.....	63
Figura 7 –	Produto octoniônico.....	75
Figura 8 –	Produto sedeniônico.....	81
Figura 9 –	Descrição do campo epistêmico matemático.....	113
Figura 10 –	Processo histórico-evolutivo da SJ.....	127
Figura 11 –	Determinação das potências do tipo α^n e β^n (aluno 1, fase de ação)	129
Figura 12 –	Relação entre as potências do tipo α^n com os termos da SJ (aluno 3, fase de formulação)	129
Figura 13 –	Relação entre as potências do tipo β^n com os termos da SJ (aluno 4, fase de formulação).....	130
Figura 14 –	Potências do tipo β^n e relações com os termos da SJ (aluno 3, fase de formulação)	130
Figura 15 –	Demonstração da relação $\alpha^n = \alpha J_n + 2J_{n-1}$ (aluno 1, fase de validação)	131
Figura 16 –	Demonstração da relação $\beta^n = \beta J_n + 2J_{n-1}$ (aluno 3, fase de validação).	131
Figura 17 –	Exposição da demonstração para potências do tipo α^n e β^n	132
Figura 18 –	Determinação dos termos da SJ como modelo de extensão aos inteiros (aluno 2, fase de ação)	132
Figura 19 –	Indicação dos termos da SJ como modelo de extensão aos inteiros (aluno 3, fase de ação)	133
Figura 20 –	Conjectura da fórmula de Binet estendida aos inteiros (aluno 5, fase de ação e formulação)	133
Figura 21 –	Estabelecimento de hipóteses para a fórmula de Binet estendida aos inteiros (aluno 6, fase de ação e formulação).....	134
Figura 22 –	Verificação da propriedade de extensão aos inteiros para a SJ (aluno	

	3, fase de validação)	135
Figura 23 –	Demonstração de $J_{-n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \cdot J_n$ (aluno 3, fase de validação).....	135
Figura 24 –	Cálculo do determinante das matrizes F, F^2, F^3 e F^4 e conjectura da expressão $\det F^n = (-2)^n$ (aluno 2, fases de ação e formulação).....	136
Figura 25 –	Caracterização do determinante das matrizes F, F^2, F^3 e F^4 $\det F^n = (-2)^n$ (aluno 2, fase de ação).....	136
Figura 26 –	Indicação do determinante das matrizes F, F^2, F^3 e F^4 e conjectura da expressão $\det F^n = (-2)^n$ (aluno 3, fases de ação e formulação)....	137
Figura 27 –	Exposição da identidade de Cassini (aluno 6, fase de validação).....	138
Figura 28 –	Demonstração da identidade de Cassini para a SJ (aluno 6, fase de validação)	139
Figura 29 –	Demonstração da identidade de Cassini para a SJ (aluno 6, fase de validação)	139
Figura 30 –	Caracterização das matrizes do tipo $F^{-1}, F^{-2}, \dots$ (aluno 5, fase de ação)	140
Figura 31 –	Indicação das matrizes do tipo $F^0, F^{-1}, F^{-2}, \dots$ (aluno 6, fase de ação)	140
Figura 32 –	Caracterização da inversa da matriz do tipo F (aluno 2, fase de ação)	141
Figura 33 –	Caracterização da inversa da matriz do tipo F^{-n} (aluno 1, fase de formulação)	141
Figura 34 –	Dedução da inversa da matriz do tipo F^{-n} (aluno 3, fase de .formulação)	142
Figura 35 –	Demonstração de uma fórmula fechada para cálculo de inversas do tipo F^{-n} (aluno 6, fase de validação).....	142
Figura 36 –	Verificação de matrizes do tipo F^{-n} (aluno 3, fase de validação).....	143
Figura 37 –	Demonstração para cálculo de inversas do tipo F^{-n} por meio da definição (aluno 3, fase de validação).....	143
Figura 38 –	Demonstração para cálculo de inversas do tipo F^{-n} por meio da definição (aluno 3, fase de validação)	144
Figura 39 –	Conclusão da demonstração para cálculo de inversas do tipo F^{-n} por	

	meio da definição (aluno 3, fase de validação).....	145
Figura 40 –	Indicação dos termos da s-SGJ como modelo de extensão aos inteiros (aluno 1, fase de ação)	146
Figura 41 –	Indicação dos termos da s-SGJ como modelo de extensão aos inteiros (aluno 5, fase de ação).....	147
Figura 42 –	Caracterização de uma generalização para os termos da s-SGJ como modelo de extensão aos inteiros (aluno 3, fase de formulação).....	147
Figura 43 –	Caracterização de uma generalização para os termos da s-SGJ como modelo de extensão aos inteiros (aluno 2, fase de formulação).....	148
Figura 44 –	Demonstração da s-SGJ como modelo de extensão aos inteiros (aluno 1, fase de validação)	148
Figura 45 –	Demonstração da s-SGJ extensão aos inteiros (aluno 3, fase de validação)	149
Figura 46 –	Demonstração da s-SGJ como modelo de extensão aos inteiros (aluno 2, fase de validação)	149
Figura 47 –	Determinação de alguns termos SPJ (Aluno 12, fase de ação).....	151
Figura 48 –	Identificação de termos da SPJ (aluno 10, fase de ação).....	151
Figura 49 –	Determinação das raízes da equação característica (Aluno 8, fase de formulação)	152
Figura 50 –	Estabelecimento das raízes $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ (Aluno 9, fase de formulação)	152
Figura 51 –	Demonstração da fórmula de Binet para SPJ (Aluno 11, fase de validação)	153
Figura 52 –	Continuação da demonstração (Aluno 11, fase de validação).....	153
Figura 53 –	Demonstração da fórmula de Binet para a SPJ (Aluno 12, fase de validação)	154
Figura 54 –	Estabelecimento de alguns valores da $h(x)$ – SPGJ (Aluno 8, fases de ação e formulação)	155
Figura 55 –	Caracterização de alguns valores da $h(x)$ - SPGJ (Aluno 11, fases de ação e formulação)	155
Figura 56 –	Caracterização das matrizes do tipo $B^2(x), B^3(x), \dots$ (Aluno 12, fases de ação e formulação)	156
Figura 57 –	Estabelecimento das matrizes do tipo $B^2(x), B^3(x), \dots$ (Aluno 11,	

	fases de ação e formulação).....	157
Figura 58 –	Demonstração para $B(x)^n$ (Aluno 11, fase de validação).....	158
Figura 59 –	Finalização da Demonstração pra $B^n(x)$ (Aluo 11, fase de validação)	158

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 –	Descrição dos primeiros valores numéricos da Sequência de Jacobsthal estendida aos inteiros.....	39
Quadro 2 –	Descrição das definições decorrentes da Sequência de Jacobsthal.....	68
Quadro 3 –	Categorização das etapas de resolução das situações didáticas pautadas na TSD.....	158

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DM	Didática da Matemática
ED	Engenharia Didática
HM	História da Matemática
SJ	Sequência de Jacobsthal
SGJ	Sequência Generalizada de Jacobsthal
SPJ	Sequência Polinomial de Jacobsthal
$h(x)$ - SPGJ	$h(x)$ – Sequência generalizada polinomial de Jacobsthal
TSD	Teoria das Situações Didáticas

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Objetivo Geral.....	16
1.2	Objetivos Específicos	17
2	REFERENCIAL TEÓRICO.....	19
2.1	Teoria das Situações Didáticas (TSD).....	19
2.2	Engenharia Didática	26
2.2.1	<i>Análises Preliminares</i>	<i>28</i>
2.2.2	<i>Concepção e Análises a Priori</i>	<i>29</i>
2.2.3	<i>Experimentação</i>	<i>30</i>
2.2.4	<i>Análise a Posteriori.....</i>	<i>30</i>
3	SOBRE O ESTUDO DO PROCESSO DOS MODELOS DE GENERALIZAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE JACOBSTHAL	32
3.1	Análises Preliminares	32
3.2	Recorrências Lineares	34
3.3	A fórmula de Binet como modelo de generalização da SJ	35
3.4	Algumas propriedades da s- Sequência Generalizada de Jacobsthal.	43
3.5	Algumas Propriedades da (s,t) – Sequência de Jacobsthal.....	47
3.6	A Sequência de k- Jacobsthal	52
3.6.1	<i>A fórmula de Binet para sequência k- Jacobsthal.....</i>	<i>52</i>
3.6.2	<i>Representação Matricial da Sequência k-Jacobsthal</i>	<i>54</i>
3.6.3	<i>A fórmula de Binet para os números de k-jacobsthal.....</i>	<i>57</i>
3.6.4	<i>Uma segunda representação matricial para a sequência de k- Jacobsthal.....</i>	<i>60</i>
3.7	Sequência dos Polinômios de Jacobsthal – SPJ	62
3.7.1	<i>h(x) – Sequência polinomial de Jacobsthal.....</i>	<i>64</i>
3.7.2	<i>Representações matriciais para a h(x) - SPJ.....</i>	<i>66</i>
3.8	Quatérnios de Jacobsthal	68
3.8	Octonios de Jacobsthal	75
3.10	Sedênios de Jacobsthal	80
3.11	Números Gaussianos de Jacobsthal.....	86

3.11.1	<i>Polinômios Gaussianos de Jacobsthal</i>	87
3.12	Relações Recorrentes e Crescimento Dimensional	91
3.12.1	<i>Relações Recorrentes Bidimensionais e Identidades</i>	92
3.12.2	<i>Relações Recorrentes Tridimensionais e Identidades</i>	98
3.12.3	<i>Relações Recorrentes n-dimensionais e Identidades</i>	109
4	UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO DO MODELO GENERALIZADO DE JACOBSTHAL NUM CURSO DE LICENCIATURA	115
4.1	<i>Análise a priori</i> das situações didáticas	115
4.2	Concepção e descrição das situações didáticas	115
4.3	Experimentação	125
5	ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS	127
5.1	<i>Análise a posteriori</i> e Validação Interna da Pesquisa.....	128
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	163
	REFERÊNCIAS	165

1 INTRODUÇÃO

Costumeiramente observamos nos compêndios especializados em História da Matemática – HM uma inclinação a evidenciar os pressupostos do Cálculo Diferencial e Infinitesimal, discutindo a historicidade dos conceitos matemáticos que lhe são intrínsecos. (ALVES, 2018a).

Em contrapartida, torna-se relevante uma discussão histórica dos conceitos matemáticos, bem como o seu desenvolvimento desde sua gênese até a contemporaneidade e a compreensão de um processo epistemológico evolutivo ininterrupto da matemática, que expõe o caráter não estático do conhecimento matemático (ALVES, 2017; ALVES, 2018a).

Nesse contexto, evidenciamos o surgimento de diversas sequências numéricas desconsideradas pelos autores de livros de história da matemática. Tais sequências foram evidenciadas por meio da mobilização de matemáticos do mundo inteiro que tinham como intuito fornecer novos modelos generalizados. (ALVES, 2016). Assim, pautados na perspectiva da formação de professores e nos referendando por livros de HM, elegemos a Sequência de Jacobsthal como objeto de estudo, com interesse na discussão histórica do seu processo epistemológico, matemático e evolutivo. Assim, o trabalho em tela tem como finalidade fazer investigações sobre os obstáculos encontrados na disciplina de História da Matemática e de modo mais específico, a Sequência de Jacobsthal.

Nessa perspectiva, apoiados nos pressupostos da vertente francesa de investigação sobre Didática da Matemática – DM propomos a utilização de sequências que estimulem a busca pelo saber. Para elaboração dessas situações, tomamos como base as contribuições de diversos pesquisadores e de modo específico, os trabalhos de Brousseau (1986) e Artigue (1988). Esses autores defendem que a utilização de situações didáticas contribui na evolução do aluno, visto que o mesmo tem a oportunidade de traçar caminhos, organizar e interpretar informações e, a partir disso, tomar decisões para a construção do conhecimento matemático.

Nesse escopo, destacamos as dissertações de mestrados de Santos (2017) que adotam uma abordagem sobre a generalização da Sequência de Fibonacci por meio da Engenharia Didática com enfoque na formação inicial de professores. Não obstante, Oliveira (2018) em seu trabalho apresenta uma investigação em situações de ensino sobre o estudo de complexificação do modelo de Fibonacci. Tais pesquisas, foram elaboradas segundo os percursos metodológicos da Engenharia Didática. Além disso, as situações de ensino foram

organizadas com enfoque na TSD visando a mobilização de uma concepção epistemológica do ensino de História da Matemática para os estudantes da licenciatura em matemática.

Sob esse aspecto, elegemos como metodologia de pesquisa a Engenharia Didática – ED que permite a organização de situações didáticas que podem produzir interações entre professor, aluno e saber, de modo a promover a aprendizagem do objeto matemático. Destarte, pretende-se discorrer à respeito das fases da Engenharia Didática, explorando seus recursos, que podem ser utilizados pelo professor para conceber, desenvolver e analisar situações didáticas.

Por outro lado, os conceitos matemáticos aqui apresentados são voltados em sua maioria, para um tratamento no âmbito da matemática pura. Desse modo, a preocupação pedagógica não é evidenciada. Nessa perspectiva, pretendemos uma abordagem envolvendo uma transposição didática do saberes científicos para o saber escolar no contexto da HM, que pode oportunizar uma concepção epistemológica sobre o seu ensino e contribuir para a formação dos professores de matemática.

Isto posto, elegemos para essa pesquisa a seguinte indagação: ***de que modo podemos desenvolver uma engenharia didática clássica, sobre o estudo e ensino do processo de generalização da sequência de Jacobsthal de modo a realizar situações didáticas que oportunizem a investigação histórica relativa ao seu processo matemático evolutivo?***

Com o intuito de responder à questão ora levantada, traçamos objetivos que nos permitiam responder às hipóteses formuladas. Portanto, esta pesquisa é baseada nos seguintes objetivos:

1.1 Geral

Desenvolver uma Engenharia Didática de 1ª geração, envolvendo a noção de sequência generalizada de Jacobsthal, visando à compreensão do seu processo histórico-matemático evolutivo.

Com o intuito de alcançar nosso objetivo geral, bem como responder à questão tomada como problema para a realização desta pesquisa, apresentamos os seguintes objetivos específicos:

1.2 Específicos

- Discutir o processo matemático, epistemológico e histórico-evolutivo dos modelos de generalização da sequência de Jacobsthal;
- Conceber situações didáticas de ensino para a noção de SGJ;
- Aplicar a TSD na organização de atividades deste tópico que possibilitem a formulações de demonstrações e definições no contexto da formação de professores de matemática.

Quanto à organização, este trabalho encontra-se dividido em cinco capítulos. No capítulo 1, apresentamos a problemática e a justificativa da pesquisa, bem como os objetivos traçados para a investigação. O segundo capítulo foi dedicado para à discussão das teorias que servem de base para o desenvolvimento do nosso estudo, a saber, a Teoria das Situações Didáticas e suas fases de ação, formulação, validação e institucionalização. Complementarmente, tratamos sobre a metodologia de pesquisa adotada, qual seja Engenharia Didática. Além disso, expomos detalhadamente cada uma de suas etapas.

O terceiro capítulo foi voltado para a descrição do campo epistêmico-matemático. Dessa forma, abordamos os conceitos básicos inerentes à SJ, tais como: fórmula de binet, extensão aos inteiros e modelos de representações matriciais. Além disso, foram destacadas a s-Sequência de Jacobsthal, a s,t – Sequência de Jacobsthal e seus modelos de generalização. Não obstante, apresentamos a sequência de k- Jacobsthal e pudemos verificar os modelos de generalização para a mesma, como por exemplo: fórmula de Binet, representações matriciais e identidades de Catalan, Cassini e d'Ocagne. Continuando, tratamos sobre a SPJ e os principais teoremas e propriedades relativos a esse tópico. Por fim, realizamos um estudo sobre os quatérnios de Jacobsthal, bem como os números gaussianos. Finalizando o capítulo 3, apresentamos uma abordagem para as relações recorrentes bi, tri e n-dimensionais, evidenciando o seu crescimento dimensional.

No capítulo 4, apresentamos a experiência realizada com uma turma de Licenciatura em Matemática do IFCE, nos anos de 2018 e 2019. Na ocasião, os sujeitos da pesquisa estavam cursando a disciplina de História da Matemática. Nesse sentido, foi elaborado um conjunto de oito situações didáticas com a finalidade de observar os comportamentos dos estudantes e verificar o desenvolvimento do seu raciocínio para resolver o problema proposto. Além disso, a fase de concepção das situações foi organizada com fins a possibilitar a formulação de

definições e teoremas no contexto da HM. Concluindo o capítulo, delineamos a etapa de experimentação e a descrição dos momentos de aplicação das situações didáticas, destacando a importância desse momento para a realização da pesquisa.

O capítulo 5 foi destinado à análise dos dados coletados na etapa de experimentação. Assim, observamos as principais produções dos licenciandos a fim de identificar os caminhos lógicos seguidos para a resolução de cada uma das situações propostas. Igualmente, a etapa de validação da pesquisa permitiu uma confrontação dos elementos levantados *a priori* e as ponderações e observações realizadas posteriormente. Por fim, apresentamos as considerações finais sobre o trabalho em questão e perspectivas para próximas investigações.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

A seguir, apresentamos as teorias que servirão como base para o nosso estudo e que fornecem um norte para responder à questão problema levantada previamente.

2.1 Teoria das Situações Didáticas

No âmbito das pesquisas voltadas para a área de ensino, destacamos o ramo da Educação Matemática. Segundo Pais (2015), tal domínio tem como objetivo estudar a compreensão, identificação e descrição de fenômenos ligados ao processo de ensino e aprendizagem de matemática. Ademais, a Educação Matemática abriu espaço para um leque de possibilidades e tendências educacionais que apreciam (contemplam) distintas temáticas relacionadas ao ensino e aprendizagem de Matemática. Dentre essas vertentes, destacamos a Didática da Matemática.

Tal vertente desenvolveu-se principalmente na França, durante a década 70, com o surgimento dos Institutos de Investigação acerca do Ensino das Matemáticas (IREM) e teve como marco a reforma da matemática moderna, bem como o êxito das teorias piagetianas sobre a psicologia do desenvolvimento.

Alguns autores apresentam definições sobre a Didática da Matemática. Dentre as quais nos interessa a seguinte aceção:

(...) uma das tendências da grande área de educação matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica. (PAIS, 2015,p.8)

Dessa forma, as pesquisas e teorias funcionam como aporte para fortalecer práticas de ensino e colaborar na aprendizagem matemática.

Por outro lado, vislumbramos uma outra concepção sobre o assunto:

A didática da matemática (que nós consideramos como um aspecto da educação matemática mais geral) é a arte de conceber e conduzir condições que podem determinar a aprendizagem de um conhecimento matemático por parte de um sujeito (que pode ser qualquer organismo envolvido nessa atividade: uma pessoa, uma instituição, um sistema, até mesmo um animal).(D'AMORE, 2007, p.4)

O autor assegura que a aprendizagem se dá por meio de modificações de comportamentos e condições que possam ser favoráveis a esse processo. Ainda nesse entendimento, Gálvez (1996) comenta que o objetivo primordial da Didática da Matemática é analisar como funcionam as situações didáticas e quais características de cada situação são imprescindíveis para a evolução da conduta dos alunos e, conseqüentemente, de seus conhecimentos. Vale salientar que, mesmo no fracasso, podemos explorar o potencial de uma situação didática. De fato, podemos identificar onde o processo falhou e contornar o erro para experiências futuras.

Nesse contexto, apresentamos uma teoria que supera as tradicionais vertentes do processo de ensino e aprendizagem e procura intensificar as relações entre professor, aluno e saber, sendo nomeada como Teoria das Situações Didáticas (TSD).

Esse estudo foi desenvolvido pelo educador matemático francês Guy Brousseau na década de 80 e teve como influência a organização de um processo sequencial dividido por fases. Tal processo verificava o desenvolvimento cognitivo do indivíduo, proposto por Piaget. Todavia, ao contrário do que era idealizado por Piaget, Brousseau considerou, além das etapas de desenvolvimento da criança, a especificidade da aprendizagem de cada saber matemático.

De acordo com Almouloud (2007), a teoria das situações didáticas pretende produzir um modelo de interação entre o aprendiz, o saber e o *milieu*. Esse último termo de origem francesa, que significa “meio”, é utilizado para caracterizar o ambiente no qual a aprendizagem deverá se desenvolver.

Nesse sentido, Brousseau (1986, p.6 citado por Almouloud, 2007, p.31), defende que:

Um processo de aprendizagem pode ser caracterizado de modo (se não determinado) por um conjunto de situações identificáveis (naturais ou didáticas) reprodutíveis, conduzindo frequentemente à modificação de um conjunto de comportamentos de alunos, modificação característica da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos.

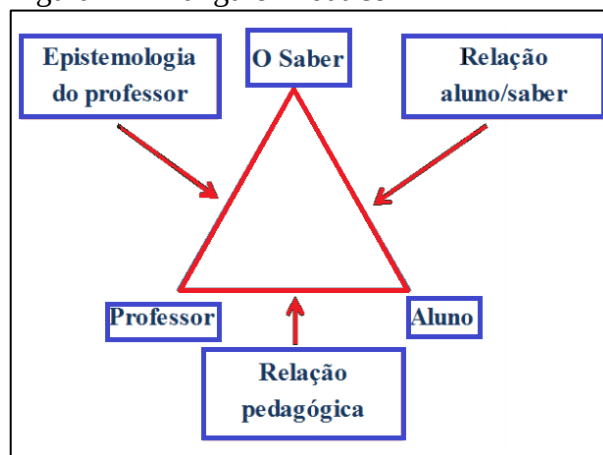
Ainda segundo Almouloud (2007), essa teoria objetiva a caracterização de um processo de aprendizagem ligado a um encadeamento de situações que possam ser reproduzidas, de modo a conduzir frequentemente à modificação de um conjunto de comportamento dos alunos. Assim, o centro dessa teoria não é o aluno, mas sim a situação didática em sua essência que possibilita a interação entre o professor, aluno e o saber matemático.

Essas relações, que são desenvolvidas em sala de aula, partem de uma concordância entre professor e aluno, chamada de contrato didático. A esse respeito, Brousseau (1986, p.127 citado por D' Amore, 2005, p.71) atesta:

Em uma situação de ensino, preparada e realizada por um professor, o aluno tem, em geral, como tarefa, de resolver um problema (matemático) que lhe é apresentado, mas o acesso a essa tarefa é feito através da interpretação de perguntas colocadas, das informações fornecidas, das obrigações estabelecidas que são constantes da maneira de ensinar do professor. Esses hábitos (específicos) do professor esperados pelo aluno e os comportamentos do aluno esperados pelo professor constituem o contrato didático.

Desse modo, esse acordo entre professor e aluno estabelece regras a serem cumpridas por ambos e possibilitam a construção de um ambiente favorável ao ensino e a aprendizagem. Para a sistematização da teoria das Situações Didáticas, Brousseau (1996) aponta elementos substanciais para a verificação dos conceitos concebidos pelo aluno. É proposto um modelo de sistema didático estruturado por três componentes: professor, aluno e saber, que normalmente é intitulado triângulo didático. Tal esquema apresenta as relações estabelecidas entre essas partes durante uma situação didática. A seguir, apresentamos o modelo desenvolvido por Brousseau.

Figura 1 - Triângulo Didático



Fonte: elaborada pela autora.

Nessa perspectiva, Almouloud (2007) apresenta hipóteses sobre as quais a TSD está apoiada. Na primeira hipótese, o autor destaca que o aluno aprende adaptando-se a um *milieu*, que é agente de dificuldades, contradições e desequilíbrio. Tal conjectura é baseada na epistemologia construtivista de Piaget. Na hipótese seguinte é evidenciado que somente o *milieu* não provido de situações didáticas é insuficiente para aquisição de conhecimentos matemáticos. Desse modo, é necessário que o professor intencione uma situação de ensino, de modo a germinar a aprendizagem. Na última hipótese, é ressaltado que esse *milieu* e as

situações didáticas devem interligar os saberes matemáticos inerentes ao processo de ensino e aprendizagem.

No enfoque do sistema didático, a relação entre professor e aluno, denominada relação pedagógica, merece destaque. O docente desempenha papel de mediador, considerando que o mesmo é responsável pela organização da sequência didática. Assim, quando o saber está sendo introduzido, a relação do aluno com o saber ainda é imprópria. O professor fica incumbido de produzir situações que aproximem o aluno do saber (MENEZES, 2006).

À vista disso, a prática pedagógica do docente deve ser realizada de modo a estimular o aprendiz à ressignificação, conceituação e identificação de uma situação proposta, para que em posse desses elementos consiga construir um conhecimento matemático.

Em síntese, nas palavras de Brousseau (1996, p.49, citado por Pommer, 2008, p.49) o trabalho do professor será “propor ao aluno uma situação de aprendizagem para que [este] elabore seus conhecimentos como resposta pessoal a uma pergunta, e os faça funcionar, ou os modifique como resposta às exigências do meio e não a um desejo do professor”. Desse modo, fica evidente a necessidade de novas experiências e práticas educativas que tragam situações de aprendizagem como forma de viabilizar a estruturação do saber matemático.

Outra conexão manifestada na teoria das situações didáticas é a relação entre professor e saber. De acordo com Almouloud (2007, p.27) “A relação do docente com o saber depende da sua formação e história de vida.” Tal relação é caracterizada como Epistemologia do professor e exprime a ideia de que o docente não deve possuir somente o domínio do conteúdo matemático, mas elaborar estratégias para incitar o processo de interiorização da situação didática, de modo que o educando se aproprie e use essa situação para significar o conhecimento.

Na última relação aluno-saber, deve-se considerar os conhecimentos prévios dos alunos e proporcionar um ambiente favorável no qual o mesmo sinta-se instigado a realizar investigações, fazer deduções e comprovar suas suposições. Além disso, Brousseau (1996) aponta essa fase como sendo a devolução da situação didática, que significa o aceite do aluno pela responsabilidade na busca da solução do problema aventado. Isto posto, Pommer (2013,p.16) salienta que: “as situações didáticas abrem a possibilidade do aluno vivenciar uma mudança do ponto de vista didático, o que favorece a construção de uma nova relação deste com o saber, relação que coloca o aluno numa postura construtiva: o autor do próprio conhecimento”. Desse modo, o educando tem a oportunidade de modelar o saber e redescobrir caminhos para ir ao encontro da aprendizagem.

Ainda no que concerne à TSD, destacamos o núcleo central dessa teoria: a situação didática que é definida por Brousseau (1978, p.25 citado por Almouloud, 2007, p.33) como:

O conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, um certo milieu (contendo eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (o professor) para que esses alunos adquiram um saber constituído ou em constituição.

Assim, percebemos que a situação didática estará caracterizada sempre que se verificar, por parte do professor, o propósito de proporcionar a aprendizagem de um determinado conteúdo.

Outro enfoque relevante que merece evidência é a situação *adidática*, que é caracterizada como parte substancial da situação didática. Nesse quadro, o desejo de ensinar não é deixado claro para o discente, mas foi intencionado pelo professor de modo a fornecer oportunidades para que este tome posse do saber vindouro (ALMOULOU, 2007).

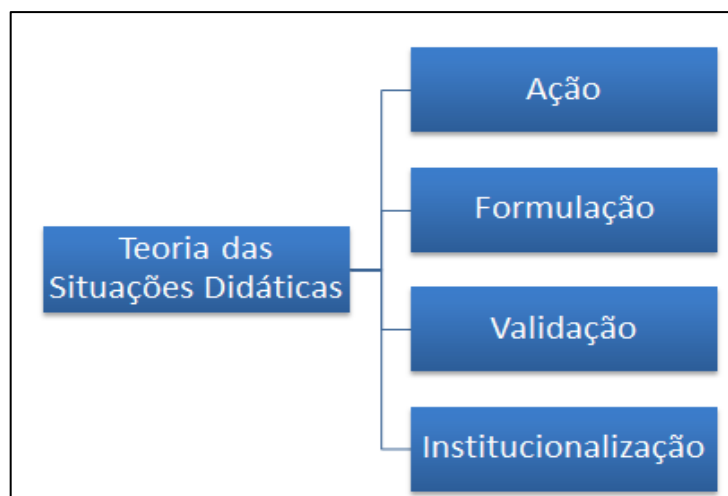
Em consonância com Almouloud (2007), na situação adidática o problema é selecionado de maneira a fazer o educando progredir por interesse próprio. A aquisição de conhecimentos será justificada pelo desafio da problemática, concebida sem o apelo às razões didáticas. Além disso, o professor novamente encarrega-se da função de mediador, criando oportunidades para que o aluno seja o principal agente da sua aprendizagem. Destarte, Freitas (2010, p.86) explica a relevância dessas situações no processo de ensino quando reitera que:

As situações adidáticas representam os momentos mais importantes da aprendizagem, pois o sucesso dos alunos nelas significa que ele, por seu mérito, conseguiu sintetizar algum conhecimento. Nesse sentido, elas não podem ser confundidas com as chamadas situações não-didáticas, que são aquelas que não foram planejadas visando uma aprendizagem.

De acordo com o autor, é importante observar que as situações adidáticas, ainda que não sejam percebidas pelo aluno, são idealizadas pelo professor com o propósito de conduzir à aprendizagem. Portanto, não deve ser confundida com uma situação que não foi planejada para construção de conhecimento.

Com fins a sistematizar o processo de aprendizagem, a Teoria das Situações Didáticas analisa e desmembra esse processo em quatro etapas dissemelhantes, em que o educando tem relações distintas com o saber. O esquema da figura 2 mostra a disposição cronológica dessas fases:

Figura 2 - Organização da teoria das situações didáticas



Fonte: elaborada pela autora.

Os estágios iniciais (ação, formulação e validação) são caracterizados como situações didáticas. Tendo em vista que, nesses tempos dominantes, o aluno é o autor da sua aprendizagem e interage com o *milieu* de modo que ele possa transitar entre ação e reflexão. Na última fase (institucionalização), o professor novamente assume a função principal, considerando que, o mesmo irá designar o conteúdo a ser concebido como um estatuto oficial.

Nessa concepção, inicialmente será discutida a dialética da **ação**. Nesse momento, os alunos têm a oportunidade de interagir com o meio e tomar decisões para organizar estratégias para a solução do problema exposto. A esse respeito, Almouloud (2007, p.37) afirma que:

Uma boa situação de ação não é somente uma situação de manipulação livre ou que exija uma lista de instruções para seu desenvolvimento. Ela deve permitir ao aluno julgar o resultado de sua ação e ajustá-lo, se necessário, sem a intervenção do mestre, graças à retroação do *milieu*. Assim, o aluno pode melhorar ou abandonar seu modelo para criar um outro: a situação provoca assim uma aprendizagem por adaptação.

Desse modo, o aluno toma suas decisões por meio de ações sobre o *milieu*. Nessa altura, é possível haver troca de informações entre os alunos, e suas escolhas são conduzidas pelas retroações do *milieu*.

Na fase seguinte, a situação de **formulação** apresenta as interações existentes em determinada atividade proposta. Tal situação é caracterizada pela troca de saberes entre alunos e outros indivíduos que serão emissores ou receptores. Essa transferência de informações pode ser expressa, por meio de mensagens escritas ou orais. Além disso, a linguagem utilizada pelo aluno nessa fase pode ser a linguagem natural ou mesmo matemática. (ALMOULOU, 2007, p.38)

2007). Vale salientar que, nessa dialética, os alunos podem trabalhar de modo colaborativo, buscando interagir e complementar os conhecimentos uns dos outros.

De modo geral, para Brousseau (1998,p.36) citado em Almouloud (2007,p.39) a situação de formulação consiste em “desenvolver progressivamente uma linguagem compreensível por todos e que leva em conta os objetos e as relações pertinentes da situação de forma adequada (isto é, permitindo raciocínios úteis e ações)”.

Na terceira fase, a dialética da **validação**, o aprendiz tenta convencer um ou vários interlocutores da legitimidade das asserções que são feitas. Assim, a comprovação empírica não é suficiente, os alunos devem elaborar provas e demonstrações para veracidade das suas afirmações.

Segundo Almouloud (2007), o emissor deve fundamentar a exatidão e a importância do seu modelo e fornecer uma validação semântica e sintática. No que lhe concerne, o receptor pode discordar do argumento exposto ou não entender a lógica que foi utilizada e esclarecer sua objeção. Desse modo, diferente da situação de formulação em que o objetivo fundamental é a comunicação linguística, a dialética da validação propõe a argumentação sobre a firmeza das asserções, e desse modo permite sistematizar as interações com o *milieu*.

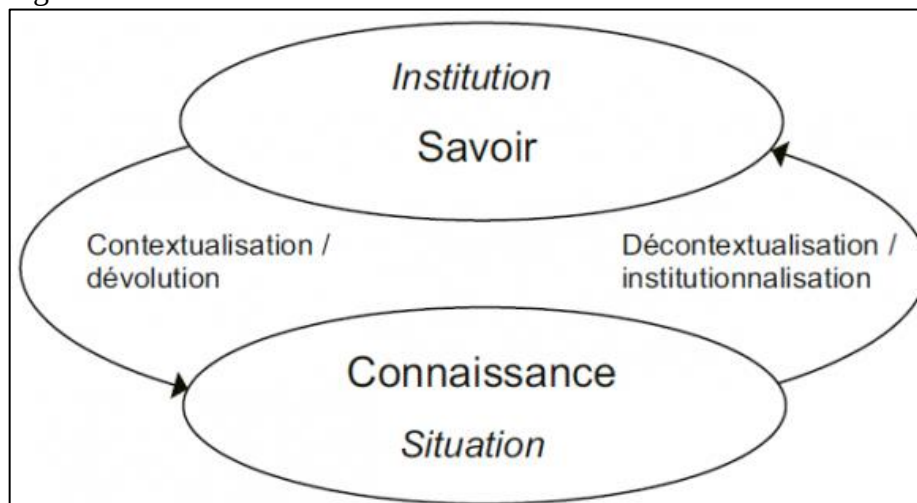
Como observado nas fases anteriores, o professor concede parte do seu comprometimento ao aluno com o propósito de desenvolver suas potencialidades, bem como administrar a sua relação com o saber. Na última etapa, o docente reassume o seu compromisso. Tal fase se denomina institucionalização.

Na **dialética da institucionalização**, espera-se que o aluno ou grupo de alunos assumam o significado de um saber que foi elaborado por ele mesmo ao longo das fases anteriores. Segundo Almouloud (2007, p.40), nessa situação “o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber”. Após a estruturação e validação do conhecimento, este fará parte do patrimônio matemático do educando.

É importante aludir que o momento em que a institucionalização ocorre pode interferir no processo, sendo capaz de desorganizar todas as fases elaboradas e desenvolvidas. Almouloud (2007) assevera que, se a institucionalização for feita prematuramente, o educando não terá o entendimento conveniente do significado do saber, obstaculizando a aprendizagem de modo generalizado. Se for feita tardiamente, pode desenvolver no aluno concepções desconformes que, além de retardar a aprendizagem, bloqueiam as aplicações desse conhecimento.

Em suma, após a vivência de todas essas fases, o saber efetua-se e os alunos devem se apropriar do mesmo e utilizá-lo em questões futuras. A imagem a seguir, ilustra a complementariedade entre esses processos.

Figura 3 – Saber e Conhecimento



Fonte: Laparra e Margolinas (2010).

Diante do exposto, observamos que as reflexões levantadas e debatidas ao longo do texto nos remetem à importância de uma teoria intimamente ligada ao ensino e aprendizagem de matemática, tendo em vista que alguma aversão à disciplina é corriqueiramente desenvolvida por alunos. É importante enfatizar que tal teoria foi concebida de modo a levantar hipóteses sobre as fragilidades no ensino dessa disciplina e, a partir disso, elaborar situações que visem estimular a construção do saber matemático, bem como mensurar as funções e relações entre aluno, professor e saber diante de uma sequência didática elaborada e que tenha por finalidade estimular autonomia do aprendiz na construção do conhecimento.

2.2 Engenharia didática

Sobre o campo epistêmico de estudos nominado Engenharia Didática, percebemos uma série de influências que culminaram na delimitação dessa área de estudos. A seguir apresentaremos as principais contribuições para constituição da ED.

Podemos destacar inicialmente a influência de um viés piagetiano, no que diz respeito a objetivar situações de ensino pautadas na análise minuciosa do indivíduo em situações de aprendizagem. Por outro lado, destacamos os traços do pensamento de Bachelard (1996), no que concerne à descrição de obstáculos epistemológicos. A noção de obstáculos

epistemológicos foi concebida originalmente para a Física, mas vale salientar que sua ideia pode ser expandida para outras áreas do conhecimento.

Assim, de maneira análoga ao caso de Bachelard, Brousseau adaptou esse conceito para a matemática e aponta o expediente inescapável dos obstáculos, procedente da interação dialética entre “conhecimento” e “meio”. De fato, assegura que:

Um conhecimento, como obstáculo, é sempre fruto de uma interação de um aluno com o meio e, mais precisamente com uma situação que torna o conhecimento interessante [...] todavia, tais concepções são comandadas por intermédio das condições de interação. (BROUSSEAU, 1976, p.107)

Nessa perspectiva, apresentamos outra corrente de grande importância para a Engenharia Didática. Estamos nos referindo à Didática da Matemática, que se desenvolveu principalmente na França do final dos anos 60, com o surgimento dos Institutos de Investigação acerca do Ensino das Matemáticas (IREM). A Didática da Matemática tem como marco a reforma da matemática moderna, bem como o êxito das teorias piagetianas sobre a psicologia do desenvolvimento. No âmbito das pesquisas em Didática da Matemática, podemos enfatizar a Teoria das Situações Didáticas, descrita por Brousseau (1986), que estuda as formas de elaboração e apresentação do saber escolar.

Artigue (1995) evidencia que a Teoria das Situações Didáticas passou por alguns entraves metodológicos e assim culminou no desenvolvimento, em oposição aos paradigmas clássicos de experimentação em sala de aula, de uma metodologia específica: A Engenharia Didática.

Assim, Artigue (1995) ao apresentar o termo Engenharia Didática faz uma analogia entre a forma de trabalho do professor e o trabalho de um engenheiro que para realizar um projeto específico, baseia-se em um conhecimento científico e aceita submeter-se à um controle do tipo científico. Ao mesmo tempo, é obrigado a trabalhar objetos bem mais complexos do que os objetos depurados da ciência e, portanto, enfrentar, com todos os meios de que dispõe, problemas que a ciência não quer ou não pode assumir.

Por outro lado, ainda conforme Artigue (1995) a Engenharia Didática vista como metodologia de pesquisa é inicialmente caracterizada por um esquema experimental baseado em “realizações didáticas” em sala de aula. Esse esquema consiste na concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino.

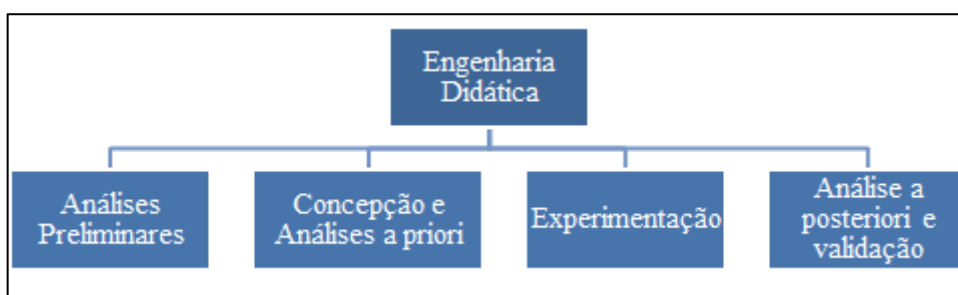
Nesse escopo, a engenharia didática apresenta dois níveis de pesquisa – microengenharia e macroengenharia. A primeira diz respeito à uma visão mais restrita na

medida em que se interessa pelas relações e fenômenos que ocorrem no interior da própria sala de aula e “são mais fáceis de desenvolver na prática” (ARTIGUE, 1995, p.36). Já a segunda, macroengenharia, diz respeito às dificuldades de cunho metodológico e/ou institucional e envolvem um interesse de identificação de condicionantes oriundos do funcionamento da escola ou de uma instituição (ALVES, 2016).

A pesquisa que ora apresentamos trata-se de uma microengenharia que busca desenvolver uma Engenharia Didática no ensino de História da Matemática relativo ao conteúdo sequência de Jacobsthal no campo dos inteiros. Além disso, apresentamos também a sistematização de variáveis macrodidáticas que dizem respeito à organização global e as variáveis microdidáticas, que se relacionam à um estágio específico da engenharia, sobretudo, à fase da experimentação.

Outrossim, a Engenharia Didática que visamos se apoia em sua fase de experimentação, na metodologia de ensino nomeada Teoria das Situações Didáticas - TSD, conforme foi mencionado anteriormente. Essa teoria foi desenvolvida especificamente para o ensino de matemática e pretende produzir um modelo de interação entre o aluno, o saber e o ambiente de aprendizagem no qual o conhecimento deverá se constituir (ALMOULOU, 2007). Empenhada em coletar e analisar dados de uma determinada pesquisa, a Engenharia Didática é subdividida em quatro, fases que serão delineadas a seguir:

Figura 4 – Fases da Engenharia Didática



Fonte: elaborada pela autora.

2.2.1 Análises Preliminares

É a fase inicial da Engenharia Didática. Sobre essa etapa, Pommer (2013, p.23) assegura que:

Nesta análise preliminar é feita uma revisão bibliográfica envolvendo as condições e contextos presentes nos vários níveis de produção didática e no ambiente onde ocorrerá a pesquisa, assim como uma análise geral quanto aos aspectos histórico-epistemológicos dos assuntos do ensino a serem trabalhados e dos efeitos por eles provocados, da concepção, das dificuldades e obstáculos encontrados pelos alunos dentro deste contexto de ensino.

Nesse sentido, o investigador tem a incumbência de analisar aspectos indispensáveis, por exemplo: realizar uma abordagem histórica relativa à gênese dos conceitos que serão tratados no decorrer da pesquisa; definir e estruturar os conceitos matemáticos, objetivando motivar uma melhor compreensão do objeto de estudo; examinar os sistemas de ensino, de modo a investigar como os saberes são ministrados, avaliar os livros didáticos adotados e analisar as concepções de professores e alunos a respeito dos desafios encontrados.

Ainda nesse estágio, é preciso estabelecer o problema de pesquisa, apresentar hipóteses e fundamentar as escolhas feitas no decorrer do trabalho. Para isso, os objetivos específicos têm de estar bem definidos, de forma a justificar a necessidade do estudo.

Outrossim, é essencial produzir uma revisão bibliográfica sobre os aspectos que influenciam no processo de ensino e aprendizagem dos saberes. Para tal, realiza-se consultas em artigos, livros, revistas e demais fontes.

2.2.2 Análises *a priori*

É a etapa que tem como finalidade validar as conjecturas apontadas nas análises preliminares. A esse respeito Artigue (1995, p.42) pontua que “nesta fase, o pesquisador tomará a decisão em atuar sobre um número determinado de variáveis do sistema, fixadas por determinadas restrições. Estas são as variáveis de comando, percebidas como pertinentes com relação ao problema estudado”

Essa etapa é marcada pela construção dos princípios desejados pela aplicação da sequência didática. Nessa perspectiva, necessitam estar bem definidas as variáveis da pesquisa, que poderão garantir o alcance dos objetivos esperados pela experimentação. A esse respeito, Artigue (1988) destaca dois tipos de variáveis: as *macrodidáticas* ou *globais* que são referentes à organização global da engenharia e as *variáveis microdidáticas* ou *locais*, relacionadas à organização local da engenharia, ou seja, a organização de uma seção ou de uma fase.

Destarte, na análise *a priori* devemos: descrever as escolhas das variáveis locais, relacionando-as sempre que possível com as globais; elaborar e desenvolver situações

didáticas; investigar a importância da situação para o aluno e prever os comportamentos prováveis, mostrando de que modo a análise realizada pode controlar essas ações.

2.2.3 Experimentação

É considerada como clássica. É a fase de aplicação de todo o instrumental preparado. Segundo Almouloud (2007), é a ocasião de pôr em prática o dispositivo construído, corrigindo-o quando as análises locais identificam essa necessidade, possibilitando uma complementação, por meio de um retorno às análises a priori. Além disso, Carneiro (2005, p.105) esclarece que:

Durante a experimentação, coletamos e organizamos um corpus de pesquisa variado, composto por produção dos alunos, registro de perguntas, dúvidas e erros constatados durante o acompanhamento de suas ações e diários de classe dos ministrantes. A análise desse material é essencial para a etapa da validação

Não obstante, segundo Almouloud e Silva (2012), nesse período apresenta-se os objetivos e as condições em que a pesquisa foi concretizada. É também a oportunidade de instaurar o contrato didático e registrar as observações feitas durante o processo de experimentação. Assim, a descrição de todos os acontecimentos deve ser realizada. Esta pode ser feita por meio de relatos, questionários e até mesmo transcrição de gravações. (NASSERALA, 2014).

2.2.4 Análises a posteriori

É o último passo de aplicação da ED. Essa etapa consiste em analisar os dados obtidos durante a experimentação, tais como material produzido pelos alunos, vídeos e observações. Essas informações permitirão a construção dos protocolos da pesquisa. Nessa acepção, Almouloud e Coutinho (2008), atestam que:

A análise a posteriori de uma sessão é o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos e que contribuem para melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre as condições da transmissão do saber em jogo. Ela não é a crônica da classe, mas uma análise feita à luz da análise a priori, dos fundamentos teóricos, das hipóteses e da problemática da pesquisa.

Desse modo, os resultados da análise a *posteriori* viabilizam uma comparação com as hipóteses e objetivos propostos ao longo das análises a *priori*. Apresentando, a validação ou não das hipóteses levantadas na pesquisa. Além disso, Artigue (1988) reitera que cada uma dessas fases é retomada e aprofundada no decorrer da pesquisa, em função das necessidades decorrentes. Na verdade, deve existir uma harmonia em todos os estágios do estudo.

3 SOBRE O ESTUDO DO PROCESSO DOS MODELOS DE GENERALIZAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE JACOBSTHAL

3.1 Análises preliminares

Segundo os pressupostos da Engenharia Didática, como forma de sistematizar a análise preliminar, é recomendável proceder a uma descrição das principais dimensões que definem o fenômeno a ser analisado e que se relacionam com o sistema de ensino, quais sejam: a didática, a epistemológica e a cognitiva. Cada uma dessas perspectivas atua na constituição do objeto de estudo (PAIS, 2015).

Desse modo, no que concerne à dimensão didática, analisamos a abordagem dada à sequência de Jacobsthal, por meio de uma pesquisa de cunho bibliográfico, buscando discutir as definições e propriedades referentes a esse objeto que foram apresentadas em artigos científicos. Inicialmente, para elucidarmos a sequência clássica de Jacobsthal, selecionamos os trabalhos de Horadam (1996), Koken&Bozkurt (2008), Gnanam&Anitha (2016). Nesses trabalhos, encontramos propriedades relativas à fórmula de Binet, representações matriciais, bem como o modelo de extensão aos inteiros para a SJ.

Num segundo momento, foi realizado um estudo sobre a s - Sequência Generalizada de Jacobsthal e a (s,t) – Sequência Generalizada de Jacobsthal. Nesse sentido, selecionamos os trabalhos de Atanassov (2011) e Alves (2017). Tais produções serviram de subsídio para o delineamento de propriedades como: extensão aos inteiros e representações matriciais das referidas sequência.

Vale salientar que Alves (2017) apresenta as duas fases iniciais de uma Engenharia Didática para a s -sequência de Jacobsthal e para a (s,t) - Sequência de Jacobsthal, buscando realizar uma transposição didática do saberes científicos para o saber escolar . Destacamos nesse texto uma proximidade com o que tencionamos desenvolver, tendo em vista que propomos a utilização da Engenharia Didática em completude com a Teoria das Situações Didáticas.

Dando prosseguimento ao levantamento bibliográfico, selecionamos as obras de Falcon e Plaza (2007) e Jhala, Rathore e Sisodiya (2014) em que os autores apresentam a sequência de k -Jacobsthal. Esse tipo de sequência apresenta uma espécie de generalização para a SJ. Assim, os autores estabelecem algumas adaptações da fórmula de Binet e as identidades de Catalan e d'Ocagne para os números de k -Jacobsthal.

Ao trabalharmos com a Sequência dos Polinômios de Jacobsthal (SPJ), foram selecionados os artigos de Horadam (1997), Catarino e Morgado (2016) e Alves (2018). Os autores apresentam inicialmente as propriedades básicas e gradativamente realizam o desenvolvimento algébrico dos conceitos matemáticos inerentes. Outrossim, é destacada também uma abordagem matricial para SPJ, bem como as extensões das identidades de Cassini, Catalan e d'Ocagne.

Iniciando a abordagem sobre quaternios, octônios e sedênios de Jacobsthal, foram exploradas suas definições e principais propriedades. Para isso, privilegiaram-se os artigos discutidos no âmbito da matemática pura. Nesse sentido, destacam-se os trabalhos de: Liana e Wloch (2015), Aydin e Yuce (2017), Çimem e Ipek (2017a) e Çimem e Ipek (2017b).

Finalmente, encerrando o campo epistêmico matemático, foram desenvolvidos os números gaussianos de Jacobsthal, fundamentando-se nos trabalhos de Berzsenyi (1997), Harmam (1981) e Asci & Gurel (2013). Ademais, no que diz respeito as relações bi, tri e n-dimensionais, os autores consultados foram: Harmam (1981), Oliveira, Alves & Paiva (2017) e Oliveira (2018).

Em um segundo momento, elegemos alguns trabalhos para compreensão da metodologia de pesquisa, bem como a teoria de ensino utilizada. Assim, destacamos as produções de Brousseau (1996, 1997), Artigue (1995), Almouloud (2007), Pais (2015), (Gálvez, 1996), D'Amore (2005) que versavam sobre a Didática da Matemática e sua origem francesa e sobre Engenharia Didática como metodologia de pesquisa.

Considerando agora a dimensão epistemológica, foram ponderados aspectos tais como a origem e o progresso dos conceitos matemáticos relativos à sequência de Jacobsthal. Para isso, foram considerados os trabalhos de Santos (2017) e Oliveira (2018). O primeiro apresenta ao longo de sua investigação uma abordagem para Sequência de Fibonacci, dando ênfase a formula de Binet e seus diversos modelos de representação e generalização. Por outro lado, Oliveira (2018) realiza o processo de complexificação da Sequência de Fibonacci e ainda discute o crescimento dimensional por meio das relações recorrentes: bidimensionais, tridimensionais e n-dimensionais e através da álgebra quaterniônica e octoniônica.

Além disso, divisamos as afinidades desse objeto com outros conceitos matemáticos que podem sugerir um amplo repertório de relações matemáticas conceituais imprescindíveis tanto para os estudantes como, também, a partir de uma perspectiva de ensino de Matemática.

Assim, é possível associar o objeto matemático em questão a outros conteúdos estudados na academia. É perceptível que podemos fazer analogias entre a sequência de

Jacobsthal e outros temas matemáticos que vão, desde os mais simples, como os estudados no ensino médio, até os mais abstratos, que são contemplados apenas no ensino superior. Desse modo, confirmamos sua evolução tanto no âmbito epistêmico quanto no que concerne ao desenvolvimento matemático gradativo.

Sobre a dimensão didática, o levantamento realizado em artigos e periódicos no âmbito da matemática pura permite traçar caminhos para a realização da transposição didática, ou seja, transformar o conteúdo científico em um conteúdo que possa ser ensinado em sala de aula.

No que se refere à dimensão cognitiva, foram propostas situações didáticas de modo que o aluno possa discernir e manifestar a intuição, conduzindo-o ao desenvolvimento de um raciocínio lógico-dedutivo e, desse modo, mobilizar o conhecimento deste tópico.

Na seção a seguir, iniciaremos nossa discussão sobre recorrências lineares e os processos matemático-evolutivos da Sequência Generalizada de Jacobsthal.

3.2 Recorrências Lineares

Algumas sequências podem ser definidas recursivamente, por meio de uma carga que permite calcular qualquer termo em função dos antecessores imediatos. Entretanto, para que a sequência fique perfeitamente determinada, faz-se necessário o estabelecimento dos seus primeiros termos. (LIMA et. al., 2016). Assim, Martinez et al. (2013, p.451), apresenta a seguinte definição:

Definição 1: Sequências recorrentes são sequências $x_0, x_1, x_2, \dots$ em que cada termo é determinado por uma dada função dos termos anteriores. Dado um inteiro positivo k , uma sequência recorrente de ordem k é uma sequência em que cada termo é determinado em função dos k termos anteriores:

$$x_{n+k} = f(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \dots, x_{n+1}, x_n), \forall n \in \mathbb{N}$$

Nesse escopo, divisamos o interesse em evidenciar as sequências recorrentes lineares. Segundo Martinez et al. (2013) quando a função é linear existem constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$ tal que: $x_{n+k} = c_1 x_{n+k-1} + c_2 x_{n+k-2} + \dots + c_k x_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Essas sequências são determinadas pelos seus k primeiros termos.

Assim, priorizamos o estudo relativo às recorrências lineares de segunda ordem. Nesse sentido, conforme Lima et al. (2016) as recorrências lineares de segunda ordem homogêneas

(que não possuem termo independente de x_n) e com coeficientes constantes, que são definidas da forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ em que $q \neq 0$. Podemos associar a cada recorrência linear de segunda ordem homogênea e com coeficientes constantes uma equação do segundo grau, chamada equação característica dada por: $r^2 + pr + q = 0$. O teorema a seguir mostra uma forma de obter uma solução mais geral para recorrência, com base nas raízes da equação característica r_1 e r_2 . Assim, temos o seguinte teorema.

Teorema 1: Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2 , então, $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes c_1 e c_2 .

Demonstração: Ver Lima et al. (2016, p.67)

O Teorema anterior propõe uma obtenção para a fórmula de Binet, que será tratada mais adiante. Na seção a seguir, será apresentada a Sequência de Jacobsthal que se configura como uma recorrência linear de segunda ordem. Serão apresentadas suas principais propriedades, bem como seus modelos de generalização.

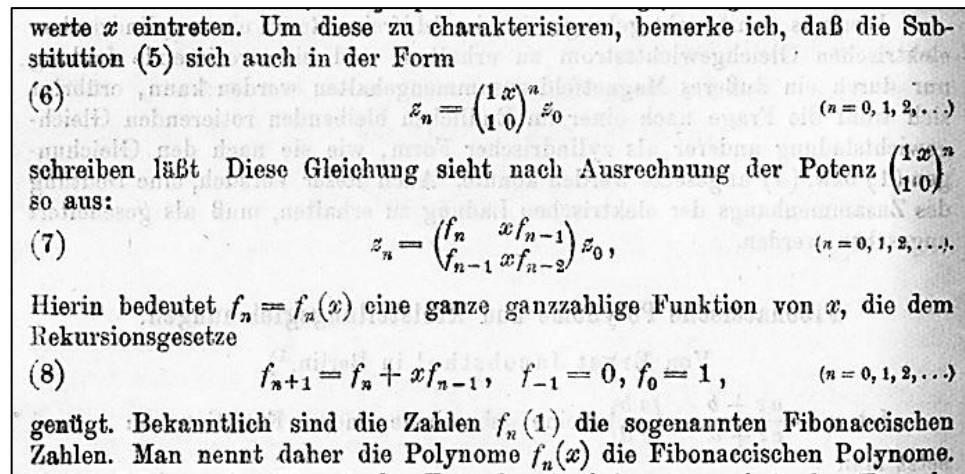
3.3 A fórmula de Binet como modelo de generalização da SJ

A sequência de Jacobsthal é definida pela seguinte relação de recorrência $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, n \geq 2$, tais que as condições iniciais são $J_0 = 0, J_1 = 1$ que descreve o seguinte conjunto numérico: $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, \dots\}$ e possui propriedades que se relacionam com outros conceitos matemáticos.

Tal sequência recebe esse nome como referência ao matemático Ernest Erich Jacobsthal (1882-1965), especialista em Teoria dos Números e ex-aluno de Ferdinand G. Frobenius, que foi um dos primeiros a estudar/definir os polinômios de Fibonacci.

A respeito dessa temática, destacamos o próprio trabalho de Jacobsthal (1882-1965), intitulado *Fibonacci'sche Polynome und Kreisteilungsgleichungen*, em que o mesmo apresenta propriedades relativas aos polinômios de Fibonacci e equações circulares. Na figura 4, apresentamos parte importante de seu trabalho, que envolve uma forte abordagem de pesquisa em termo de sequências recorrentes que enfatizaram representações matriciais.

Figura 5 - Propriedades das seqüências numéricas estudadas por Jacobsthal



Fonte: Jacobsthal (1919-1920)

Com base na figura anterior, destacamos a equação de recorrência $f_{n+1} = f_n + x \cdot f_{n-1}$. Fundamentados na análise da mesma, observamos que para $x=1$ obtemos a seqüência de Fibonacci. Para $x=2$ e $n \geq 1$ resulta a seqüência de Jacobsthal mencionada anteriormente. Também é possível a extração propriedades relativas às matrizes de ordem 2.

Não obstante, notamos que, para a obtenção de um número qualquer de Jacobsthal, é necessário conhecer os seus dois elementos anteriores e, em seguida, utilizar a relação de recorrência. A título de exemplo, se desejarmos obter o número J_{70} é necessário estabelecer os elementos J_{69} e J_{68} , e prosseguir com a relação de recorrência.

Um tópico que merece investigação é sobre a possibilidade de obter os termos dessa seqüência sem a necessidade de utilizar a relação de recorrência mencionada anteriormente. Para tal, adotamos o emprego da fórmula de Binet. Segundo Horadam (1996), essa fórmula é obtida considerando-se $\alpha = 2$ e $\beta = -1$, que são raízes da equação característica $x^2 - x - 2 = 0$. Entre as muitas propriedades existentes, podemos mencionar $\alpha^2 = \alpha + 2$; $\alpha + \beta = 1$; $\alpha \cdot \beta = -2$; $\alpha - \beta = 3$; $\beta^2 = \beta + 2$; $\alpha^2 - \beta^2 = 3$.

Prosseguindo, temos que as raízes desta equação devem satisfazer a $\alpha^2 = \alpha + 2$ e $\beta^2 = \beta + 2$. Multiplicando a primeira dessas relações α^n , e a segunda por β^n , obtemos

(i) $\alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + 2\alpha^n$ e $\beta^{n+2} = \beta^{n+1} + 2\beta^n$ (ii). Subtraindo a segunda equação da primeira, e

dividindo ambas por $\alpha - \beta$, chegamos a: $\frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} - 2 \cdot \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right)$. Se

colocarmos $H_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, temos: $H_{n+2} = H_{n+1} + 2H_n$. Temos $\alpha + \beta = 1, \alpha - \beta = 3, \alpha \cdot \beta = -2$,

consequentemente obtemos:

$$H_0 = \frac{\alpha^0 - \beta^0}{\alpha - \beta} = 0; H_1 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta} = 1; H_2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} = \alpha + \beta = 1; H_3 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)}{\alpha - \beta} = 3$$

e $H_4 = \frac{(\alpha^2 - \beta^2) \cdot (\alpha^2 + \beta^2)}{\alpha - \beta} = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha^2 + \beta^2) = 5$. Com isto, os resultados $H_1, H_2, H_3, \dots$,

representam a sequência de Jacobsthal, com $J_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, onde $n \geq 1$

Isto posto, observamos que a fórmula de Binet permite a obtenção dos termos inteiros da sequência de Jacobsthal, sem precisarmos utilizar os conceitos de recursividade, atuando assim, como um modelo de generalização da sequência de Jacobsthal. A seguir, podemos formalizar um modelo de Generalização para essa sequência por intermédio da fórmula de Binet com a apresentação do teorema a seguir:

Teorema 2: Dado um número $n \geq 1$, então $J_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{3} = \frac{1}{3} \left(2^n - (-1)^n \right)$, onde os números

$\alpha = 2, \beta = -1$ correspondem às duas raízes da equação $x^2 - x - 2 = 0$.

Demonstração:

A demonstração imediata segue por Indução Matemática. Para $n = 1$, temos

$$J_1 = \frac{2^1 - (-1)^1}{3} = \frac{2+1}{3} = 1. \text{ Supomos a validade para } n=1, 2, \dots, k. \text{ Vamos mostrar que é}$$

válida para $k+1$

$$\begin{aligned} J_{k+1} &= J_k + 2J_{k-1} = \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta} + 2 \left(\frac{\alpha^{k-1} + \beta^{k-1}}{\alpha - \beta} \right) = \frac{\alpha^k - \beta^k + 2\alpha^{k-1} + 2\beta^{k-1}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^k(1+2\alpha^{-1}) - \beta^k(1+2\beta^{-1})}{3} = \\ &= \frac{\alpha^k \cdot \alpha - \beta^k \cdot \beta}{3} = \frac{2^k \cdot 2 - (-1)^k \cdot (-1)}{3} = \frac{2^{k+1} - (-1)^{k+1}}{3} \quad \square \end{aligned}$$

No que diz respeito às propriedades relativas a essa sequência, encontramos no trabalho de Kovačić, Špoljarić & Marohnić (2014), algumas propriedades. Adotando procedimento análogo aos autores, apresentaremos as proposições e suas respectivas demonstrações:

Proposição 1: Para todo $n \in \mathbb{N}$, são válidas as proposições:

$$(i) J_{n+1} = 2J_n + (-1)^n$$

$$(ii) J_{n+1} = 2^n - J_n$$

Demonstração: Para realizar nossa demonstração, usaremos o Princípio da Indução Matemática:

(i) - Para $n = 1$, temos $J_2 = 2 \cdot J_1 + (-1)^1 = 1$.

Agora, supomos a validade para algum k e vamos mostrar que vale para o seu sucessor $k+1$. Observamos que:

$$J_{k+2} = J_{k+1} + 2 \cdot J_k = J_{k+1} + (J_{k+1} - (-1)^k) = 2 \cdot J_{k+1} + (-1)^{k+1} \square$$

(ii)- Para $n = 1$, temos: $J_2 = 2^1 - J_1 = 1$.

Analogamente ao item (i), supomos que a proposição é válida para algum k e mostramos que também é verdadeira para o seu sucessor. Desse modo, temos:

$$J_{k+2} = J_{k+1} + 2 \cdot J_k = J_{k+1} + 2 \cdot (2^k - J_{k+1}) = J_{k+1} + 2^{k+1} - 2J_{k+1} = 2^{k+1} - J_{k+1} \square$$

Prosseguindo os estudos relativos à Sequência de Jacobsthal, será apresentada a possibilidade de extensão a números inteiros, contrapondo a abordagem clássica dada a essa sequência. Nesse sentido, recorreremos à definição proposta por Lind & Marcos (1995) que propõe uma ampliação para noção de sequência e apresenta o conceito de sequência bi-infinita, que é útil para tratar sequências longas como infinito em duas direções. Desse modo, temos a seguinte definição:

Definição 2: A sequência bi-infinita denotada por $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ pode ser descrita por:

$$\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots$$

Com base na definição acima propomos uma extensão de uma sequência cujo domínio é definido pelo conjunto dos números naturais, para os números inteiros conforme posto abaixo.

Definição 3: Considerando uma sequência $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definimos uma extensão para sequência x , a aplicação $z: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, em que $z|_{\mathbb{N}=x}$. Nomeamos de sequência estendida.

Denotamos a função $z: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ por $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Em situações oportunas podemos descrever a sequência estendida em questão por:

$$(\dots, z_{-k}, \dots, z_{-2}, z_{-1}, z_0, z_1, z_2, \dots, z_k, \dots) k \in \mathbb{N}.$$

Nesse escopo, Gnanam & Anitha (2016) apresentaram um trabalho sobre os números negativos de Jacobsthal e por meio disso descrevem um novo conjunto numérico. Assim, observamos a obtenção de alguns casos particulares.

$$\text{Fazendo } n = 1, \text{ temos: } \begin{cases} J_1 = J_0 + 2J_{-1} \\ 1 = 0 + 2J_{-1} \\ J_{-1} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{Fazendo } n = 2, \text{ temos: } \begin{cases} J_0 = J_{-1} + 2J_{-2} \\ 0 = \frac{1}{2} + 2J_{-2} \\ J_{-2} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Repetindo o raciocínio anterior podemos conjecturar alguns valores, tais quais:

Quadro 1 - Descrição dos primeiros valores numéricos da Sequência de Jacobsthal estendida aos inteiros

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
J_{-n}	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{5}{16}$	$\frac{11}{32}$	$-\frac{21}{64}$	$\frac{43}{128}$	$-\frac{85}{256}$	$\frac{171}{512}$	$-\frac{314}{1024}$

Fonte: elaborada pela autora.

Assim, vamos apresentar uma fórmula fechada para a obtenção dos termos da sequência estendida aos inteiros. Desse modo, como a fórmula de Binet é dada por $J_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ é natural esperarmos que possamos obter J_{-n} com a substituição direta de n por $-n$ na fórmula abaixo.

Teorema 3: Para todo inteiro positivo $n \geq 0$, temos $J_{-n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \cdot J_n$

Demonstração: Vamos utilizar a fórmula de Binet para obter o resultado desejado

$$\begin{aligned} J_{-n} &= \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{3} = \frac{\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n}}{3} = \frac{\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n}}{3} = \frac{1}{3\alpha^n} - \frac{1}{3\beta^n} = \frac{\beta^n - \alpha^n}{3\alpha^n\beta^n} = \frac{(\beta^n - \alpha^n)}{3(\alpha\beta)^n} = \frac{(-1)(\alpha^n - \beta^n)}{3(-2)^n} = \\ &= \frac{(-1)}{(-2)^n} \cdot \frac{(\alpha^n - \beta^n)}{3} = \frac{(-1)}{(-1)^n \cdot (2)^n} \cdot \frac{((2)^n - (-1)^n)}{3} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2)^n} \cdot J_n \square \end{aligned}$$

Sobre as relações existentes entre α e β , destacamos aquela que relacionam as raízes da equação característica com os termos da sequência de Jacobsthal. Dessa maneira, temos a seguinte propriedade:

Propriedade 1: Para todo $n \geq 0$, vale que:

$$(i): \alpha^n = \alpha J_n + 2J_{n-1}$$

$$(ii): \beta^n = \beta J_n + 2J_{n-1}$$

Demonstração: Usaremos o Princípio de Indução Matemática para demonstrar as propriedades.

$$(i) \text{ Vamos verificar a validade para } n = 0, \text{ temos: } \alpha^0 = 1 = \alpha \cdot J_0 + 2J_{-1} = \alpha \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Agora, supomos a validade para $n = 1, \dots, k$. Vamos mostrar que é válida para $k+1$. Temos que: $\alpha^k = \alpha J_k + 2J_{k-1}$, então $\alpha^{k+1} = \alpha \cdot \alpha^k = \alpha(\alpha J_k + 2J_{k-1}) = \alpha^2 J_k + 2\alpha J_{k-1}$

Como consideramos a validade para $n = 2$, temos: $\alpha^2 = \alpha J_2 + 2J_1$. Assim,

$$\begin{aligned} \alpha^{k+1} &= \alpha^2 J_k + 2\alpha J_{k-1} = (\alpha J_2 + 2J_1) \cdot J_k + 2\alpha J_{k-1} = \alpha J_k + 2J_k + 2\alpha J_{k-1} = \alpha(J_k + 2J_{k-1}) + 2J_k = \\ &= \alpha J_{k+1} + 2J_k \text{ (c.q.d)} \end{aligned}$$

Faremos procedimento análogo para o segundo caso:

$$(ii) \text{ Verificando a veracidade para } n = 0, \text{ temos: } \beta^0 = 1 = \beta \cdot J_0 + 2J_{-1} = \beta \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Supomos a validade para $n = 1, \dots, k$. Vamos mostrar a validade para $k+1$. Temos que:

$$\beta^k = \beta J_k + 2J_{k-1}, \text{ então } \beta^{k+1} = \beta \cdot \beta^k = \beta(\beta J_k + 2J_{k-1}) = \beta^2 J_k + 2\beta J_{k-1}.$$

Como consideramos a validade para $n = 2$, temos: $\beta^2 = \beta J_2 + 2J_1$. Assim,

$$\begin{aligned} \beta^{k+1} &= \beta^2 J_k + 2\beta J_{k-1} = (\beta J_2 + 2J_1) \cdot J_k + 2\beta J_{k-1} = \beta J_k + 2J_k + 2\beta J_{k-1} = \beta(J_k + 2J_{k-1}) + 2J_k = \\ &= \beta J_{k+1} + 2J_k \square \end{aligned}$$

Da propriedade anterior, podemos ainda extrair a fórmula de Binet. Desse modo, fazendo (i) – (ii), temos:

$$\alpha^n - \beta^n = \alpha J_n - \beta J_n$$

$$\alpha^n - \beta^n = J_n(\alpha - \beta)$$

$$J_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

As investigações de Koken&Bozkurt (2008) apresentam uma discussão que relaciona os números de Jacobsthal com matrizes. Iniciaremos nosso estudo apresentando a matriz que os autores caracterizam como $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Seguindo um raciocínio comum às pesquisas mencionadas, obtemos alguns casos do produto entre matrizes:

$$F^2 = F \cdot F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, F^3 = F^2 \cdot F = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

e $F^4 = F^3 \cdot F = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$. De acordo com os casos levantados, podemos

conjecturar o seguinte resultado: $F^n = \begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{bmatrix}$. Assim, enunciamos o seguinte teorema:

Teorema 4: Para um dado $n \in \mathbb{N}$ a n -ésima potência da matriz F é dada por:

$$F^n = \begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{bmatrix}, \text{ sendo } J_{n+1}, J_n \text{ e } J_{n-1} \text{ números de Jacobsthal.}$$

Demonstração: Faremos a demonstração do teorema anterior utilizando o Princípio da Indução

Matemática. Assim, para $n = 1$, temos: $F^1 = \begin{bmatrix} J_2 & 2J_1 \\ J_1 & 2J_0 \end{bmatrix}$. Assim, suponhamos a validade para

$n = k$, temos $F^k = \begin{bmatrix} J_{k+1} & 2J_k \\ J_k & 2J_{k-1} \end{bmatrix}$. Vamos mostrar a validade para $n = k + 1$. Então,

$$F^{k+1} = F^k \cdot F = \begin{bmatrix} J_{k+1} & 2J_k \\ J_k & 2J_{k-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{k+1} + 2J_k & 2J_{k+1} \\ J_k + 2J_{k-1} & 2J_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{k+2} & 2J_{k+1} \\ J_{k+1} & 2J_k \end{bmatrix} \square$$

Consideremos agora a matriz $F^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Se observarmos, tal matriz é a matriz inversa

da matriz F que vimos anteriormente. De modo semelhante, podemos obter as matrizes

$$F^{-2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^2}{2^{2-1}} \cdot 1 & 2 \cdot \frac{(-1)^{2+1}}{2^2} \cdot 1 \\ \frac{(-1)^{2+1}}{2^2} \cdot 1 & 2 \cdot \frac{(-1)^{2+2}}{2^{2+1}} \cdot 3 \end{bmatrix} \text{ em que } F^{-2} \text{ é a inversa da matriz } F^2.$$

Seguindo o procedimento, obtemos:

$$F^{-3} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{8} & -\frac{5}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^3}{2^{3-1}} \cdot 1 & 2 \cdot \frac{(-1)^{3+1}}{2^3} \cdot 3 \\ \frac{(-1)^{3+1}}{2^3} \cdot 3 & 2 \cdot \frac{(-1)^{3+2}}{2^{3+1}} \cdot 5 \end{bmatrix}, \text{ novamente podemos notar que } F^{-3} \text{ é a inversa}$$

da matriz F^3 . Com base nos casos levantados, podemos conjecturar o seguinte resultado:

$$F^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \cdot J_{n-1} & 2 \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \cdot J_n \\ \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \cdot J_n & 2 \cdot \frac{(-1)^{n+2}}{2^{n+1}} \cdot J_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{-(n-1)} & 2J_{-n} \\ J_{-n} & 2J_{-(n+1)} \end{bmatrix}$$

Teorema 5: Para um dado $n \in \mathbb{N}$ a n -ésima potência da inversa da matriz F é dada por:

$$F^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \cdot J_{n-1} & 2 \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \cdot J_n \\ \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \cdot J_n & 2 \cdot \frac{(-1)^{n+2}}{2^{n+1}} \cdot J_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{-(n-1)} & 2J_{-n} \\ J_{-n} & 2J_{-(n+1)} \end{bmatrix}$$

Demonstração: Usaremos o Princípio da Indução Matemática para chegar ao resultado desejado.

Desse modo temos que para $n=1$, a matriz inversa correspondente é F^{-1} . Desse modo, temos:

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^1}{2^{1-1}} \cdot J_0 & 2 \cdot \frac{(-1)^{1+1}}{2^1} \cdot J_1 \\ \frac{(-1)^{1+1}}{2^1} \cdot J_1 & 2 \cdot \frac{(-1)^{1+2}}{2^{1+1}} \cdot J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_0 & 2J_{-1} \\ J_{-1} & 2J_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Agora, vamos considerar que o teorema seja válido para algum k , provaremos a validade para o seu sucessor $k+1$. Desse modo, obtemos:

$$\begin{aligned} F^{-k-1} &= F^{-k} \cdot F^{-1} = F^{-k} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^k}{2^{k-1}} \cdot J_{k-1} & 2 \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} \cdot J_k \\ \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} \cdot J_k & 2 \cdot \frac{(-1)^{k+2}}{2^{k+1}} \cdot J_{k+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} \cdot J_k & \frac{(-1)^{k+2}}{2^{k-1}} \cdot J_{k-1} + \frac{(-1)^{k+2}}{2^k} \cdot J_k \\ \frac{(-1)^{k+2}}{2^{k+1}} \cdot J_{k+1} & \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} \cdot J_k + \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} \cdot J_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} \cdot J_k & \frac{(-1)^{k+2}}{2^k} \cdot (2J_{k-1} + J_k) \\ \frac{(-1)^{k+2}}{2^{k+1}} \cdot J_{k+1} & \frac{(-1)^{k+3}}{2^{k+1}} \cdot (2J_k + J_{k+1}) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} \cdot J_k & 2 \cdot \frac{(-1)^{k+2}}{2^{k+1}} \cdot (J_{k+1}) \\ \frac{(-1)^{k+2}}{2^{k+1}} \cdot J_{k+1} & 2 \cdot \frac{(-1)^{k+3}}{2^{k+2}} \cdot (J_{k+2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{-k} & 2J_{-(k+1)} \\ J_{-(k+1)} & 2J_{-(k+2)} \end{bmatrix} \square \end{aligned}$$

Teorema 6: Para um dado inteiro n , temos $\det(F^n) = (-2)^n$.

Demonstração: dos estudos relativos aos determinantes sabemos que $\det(F^n) = (\det F)^n$.

Temos que $\det F = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$, concluímos que: $\det(F)^n = (-2)^n$.

Com origem no teorema anterior, vamos demonstrar uma identidade, a partir de sua extensão aos índices inteiros. Tal identidade é atribuída ao matemático italiano Giovanni Domenico Cassini (1625-1712), que propôs a seguinte relação para a Sequência de Fibonacci $f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$ (KOSHY, 2011). Com base na identidade anterior e ainda tendo como

apoio os trabalhos de Koken & Bozkurt (2008), apresentaremos um modelo de extensão da identidade de Cassini para a Sequência de Jacobsthal.

Teorema 7: Considerando as matrizes $F^n = \begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2 \cdot J_{n-1} \end{bmatrix}$ e $F^{-n} = \begin{bmatrix} J_{-(n-1)} & 2J_{-n} \\ J_{-n} & 2J_{-(n+1)} \end{bmatrix}$ vale

que: (i) $J_{n-1}J_{n+1} - J_n^2 = (-1)^{n-1} \cdot 2^{n-1}$ (ii) $J_{-(n-1)}J_{-(n+1)} - J_{-n}^2 = (-1)^n \cdot 2^{-n-1}$

Demonstração: (i) Sabendo que $F^n = \begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{bmatrix}$ e $\det F = (-2)$. Dessa forma, teremos:

$$(-2)^n = \det F^n = \det \begin{bmatrix} J_{n+1} & 2 \cdot J_n \\ J_n & 2 \cdot J_{n-1} \end{bmatrix} = 2 \cdot J_{n-1} \cdot 2 \cdot J_{n+1} - 2 \cdot J_n \cdot J_n.$$

Assim, $J_{n-1}J_{n+1} - J_n^2 = (-2)^{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot 2^{n-1} \square$

$$(ii) \det F^{-n} = \det \begin{bmatrix} J_{-(n-1)} & 2J_{-n} \\ J_{-n} & 2J_{-(n+1)} \end{bmatrix} = 2(J_{-(n-1)}J_{-(n+1)} - J_{-n}^2)$$

Por outro lado, temos que: $\det F^{-1} = -\frac{1}{2}$. Assim, podemos escrever que

$$\det F^{-n} = \underbrace{\det F^{-1} \cdot \det F^{-1} \cdot \dots \cdot \det F^{-1}}_{n \text{ vezes}} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n. \text{ Assim,}$$

$$2(J_{-(n-1)}J_{-(n+1)} - J_{-n}^2) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$2(J_{-(n-1)}J_{-(n+1)} - J_{-n}^2) = (-1)^n \cdot (2)^n$$

$$J_{-(n-1)}J_{-(n+1)} - J_{-n}^2 = (-1)^n \cdot (2)^{n-1} \square$$

Isto posto, apresentaremos algumas propriedades como forma de generalizar a sequência de Jacobsthal.

3.4 Algumas propriedades da s- Sequência Generalizada de Jacobsthal

À esse respeito Atanassov (2011), expõe a s-Sequência Generalizada com a seguinte definição.

Definição 4: O conjunto numérico $\{J_n^s\}_{n \in \mathbb{N}}$ definido por meio da relação de recorrência:

$$J_n^s = \frac{s^n - (-1)^n}{s+1}, n \geq 0, s \geq 2$$

é chamado de s- Sequência Generalizada de Jacobsthal

Se observarmos, para $s=2$ obtemos a sequência clássica de Jacobsthal, definida por Horadam (1996). Empregando raciocínio semelhante ao utilizado por Gnanam & Anitha (2016), apresentamos o seguinte lema que relaciona a s -Sequência de Jacobsthal à números inteiros.

Lema 1: Para todo inteiro positivo ‘ n ’, temos:

$$(i): J_{-n}^s = \frac{(-1)^{n+1}}{s^n} \cdot J_n^s$$

$$(ii): J_{n+1}^s = s \cdot J_n^s + (-1)^n$$

Demonstração (i): Temos que

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^{n+1}}{s^n} \cdot J_n^s &= (-1) \cdot \frac{(-1)^n}{s^n} \cdot \frac{s^n - (-1)^n}{s+1} = (-1) \cdot (-1)^n \cdot \frac{1 - (-1)^n s^{-n}}{s+1} = \\ &= (-1) \cdot (-1)^n = \frac{[(-1)^n (-1)^{-n} - (-1)^n s^{-n}]}{s+1} = (-1)(-1)^{2n} \left(\frac{(-1)^{-n} - s^{-n}}{s+1} \right) = \left(\frac{s^{-n} - (-1)^{-n}}{s+1} \right) = J_{-n}^s \square \\ J_{n+1}^s &= \frac{s^{n+1} - (-1)^{n+1}}{s+1} = \frac{s \cdot s^n - s \cdot (-1)^n + s \cdot (-1)^n + (-1)^n}{s+1} = \frac{s \cdot (s^n - (-1)^n) + s \cdot (-1)^n + (-1)^n}{s+1} = \\ (ii) &= \frac{s \cdot (s^n - (-1)^n)}{s+1} + \frac{(s+1)(-1)^n}{s+1} = s \cdot \frac{(s^n - (-1)^n)}{s+1} + (-1)^n = s \cdot J_n^s + (-1)^n \square \end{aligned}$$

Tendo em vista o raciocínio empregado por Koken&Bozkurt (2008) apresentamos a matriz $F_s = \begin{bmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, s \geq 3$.

Nesse sentido, Alves (2017) apresenta algumas propriedades matriciais referentes à s -sequência de Jacobsthal. A seguir veremos algumas propriedades expostas pelo autor.

Teorema 8: Para todo inteiro positivo ‘ n ’, temos:

$$(i): F_s^n = \begin{bmatrix} J_{n+1}^s & s \cdot J_n^s \\ J_n^s & s \cdot J_{n-1}^s \end{bmatrix}, n \geq 2;$$

$$(ii): F_s^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n}{s^{n-1}} \cdot J_{n-1}^s & s \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{s^n} \cdot J_n^s \\ \frac{(-1)^{n+1}}{s^n} \cdot J_n^s & s \cdot \frac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}} \cdot J_{n+1}^s \end{bmatrix}$$

Demonstração (i):

Faremos a demonstração do Teorema acima utilizando o Princípio da Indução Matemática.

Assim, para $n = 2$, temos: $F_s^2 = \begin{bmatrix} s^2 - s + 1 & s(s-1) \\ s-1 & s \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_3^s & s \cdot J_2^s \\ J_2^s & sJ_1^s \end{bmatrix}$. Agora, suponhamos a

validade para $n = k$, temos $F_s^k = \begin{bmatrix} J_{k+1}^s & sJ_k^s \\ J_k^s & sJ_{k-1}^s \end{bmatrix}$. Vamos mostrar a validade para $n = k + 1$.

Então,

$$\begin{aligned} F_s^{k+1} &= F_s^k \cdot F_s = \begin{bmatrix} J_{k+1}^s & sJ_k^s \\ J_k^s & sJ_{k-1}^s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (s-1)J_{k+1}^s + sJ_k^s & sJ_{k+1}^s \\ (s-1)J_k^s + sJ_{k-1}^s & sJ_k^s \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} s \cdot J_{k+1}^s - J_{k+1}^s + s \cdot J_k^s & s \cdot J_{k+1}^s \\ s \cdot J_k^s - J_k^s + s \cdot J_{k-1}^s & s \cdot J_k^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \cdot J_{k+1}^s - (-1)^k & s \cdot J_{k+1}^s \\ s \cdot J_k^s - (-1)^{k-1} & s \cdot J_k^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \cdot J_{k+1}^s + (-1)^{k+1} & s \cdot J_{k+1}^s \\ s \cdot J_k^s + (-1)^k & s \cdot J_k^s \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} J_{k+2}^s & s \cdot J_{k+1}^s \\ J_{k+1}^s & s \cdot J_k^s \end{bmatrix} \square \end{aligned}$$

(ii)

Utilizaremos o princípio da indução matemática para chegar ao resultado desejado.

Desse modo, temos que para $n = 1$, a matriz inversa correspondente é F_s^{-1} . Assim, temos:

$$F_s^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^1}{s^{1-1}} \cdot J_0^s & s \cdot \frac{(-1)^{1+1}}{s^1} \cdot J_1^s \\ \frac{(-1)^{1+1}}{s^1} \cdot J_1^s & s \cdot \frac{(-1)^{1+2}}{s^{1+1}} \cdot J_2^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_0^s & J_1^s \\ \frac{1}{s} \cdot J_1^s & \frac{-s}{s^2} \cdot J_2^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{s} & \frac{1-s}{s} \end{bmatrix}$$

Agora vamos considerar que o teorema seja válido para algum k . Provaremos a validade para o seu sucessor $k + 1$. Desse modo, obteremos:

$$\begin{aligned} F_s^{-k-1} &= F_s^{-k} \cdot F_s^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^k \cdot J_{k-1}^s}{s^{k-1}} & s \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{s^k} \cdot J_k^s \\ \frac{(-1)^{k+1}}{s^k} \cdot J_k^s & s \cdot \frac{(-1)^{k+2}}{s^{k+1}} \cdot J_{k+1}^s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{s} & \frac{1-s}{s} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{(-1)^{k+1}}{s^k} \cdot J_k^s & \frac{(-1)^k}{s^{k-1}} \cdot J_{k-1}^s + (1-s) \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{s^k} \cdot J_k^s \\ \frac{(-1)^{k+2}}{s^{k+1}} \cdot J_{k+1}^s & \frac{(-1)^{k+1}}{s^k} \cdot J_k^s + (1-s) \cdot \frac{(-1)^{k+2}}{s^{k+1}} \cdot J_{k+1}^s \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{(-1)^{k+1}}{s^k} \cdot J_k^s & \frac{(-1)^k \cdot s \cdot J_{k-1}^s + (1-s) \cdot (-1)^{k+1} \cdot J_k^s}{s^k} \\ \frac{(-1)^{k+2}}{s^{k+1}} \cdot J_{k+1}^s & \frac{(-1)^{k+1} \cdot s \cdot J_k^s + (1-s) \cdot (-1)^{k+2} \cdot J_{k+1}^s}{s^{k+1}} \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \frac{(-1)^{k+1}}{s^k} \cdot J_k^s & \frac{(-1)^k \cdot (sJ_{k-1}^s + sJ_k^s - J_k^s)}{s^k} \\ \frac{(-1)^{k+2}}{s^{k+1}} \cdot J_{k+1}^s & \frac{(-1)^{k+1} \cdot (sJ_k^s + sJ_{k+1}^s - J_{k+1}^s)}{s^{k+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^{k+1}}{s^k} \cdot J_k^s & \frac{(-1)^k \cdot ([sJ_{k-1}^s - J_k^s] + sJ_k^s)}{s^k} \\ \frac{(-1)^{k+2}}{s^{k+1}} \cdot J_{k+1}^s & \frac{(-1)^{k+1} \cdot ([sJ_k^s - J_{k+1}^s] + sJ_{k+1}^s)}{s^{k+1}} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{(-1)^{k+1}}{s^k} \cdot J_k^s & s \frac{(-1)^k}{s^{k+1}} ((-1)^k + sJ_k^s) \\ \frac{(-1)^{k+2}}{s^{k+1}} \cdot J_{k+1}^s & s \frac{(-1)^2 (-1)^{k+1}}{s^{k+2}} ((-1)^{k+1} + sJ_{k+1}^s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^{k+1}}{s^k} \cdot J_k^s & s \frac{(-1)^k}{s^{k+1}} \cdot J_{k+1}^s \\ \frac{(-1)^{k+2}}{s^{k+1}} \cdot J_{k+1}^s & s \frac{(-1)^{k+3}}{s^{k+2}} \cdot J_{k+2}^s \end{bmatrix} \quad \square
\end{aligned}$$

Vale salientar que as matrizes anteriores, nos fornecem subsídios para calcular as matrizes inversas associadas à s-sequência de Jacobsthal.

Assim como foi trabalhado anteriormente, o teorema abaixo nos fornece uma extensão da identidade de Cassini para s- Sequência de Jacobsthal.

Teorema 9: Considerando as potências de matrizes indicadas por

$$F_s^n = \begin{bmatrix} J_{n+1}^s & s \cdot J_n^s \\ J_n^s & s \cdot J_{n-1}^s \end{bmatrix} e F_s^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n}{s^{n-1}} \cdot J_{n-1}^s & s \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{s^n} \cdot J_n^s \\ \frac{(-1)^{n+1}}{s^n} \cdot J_n^s & s \cdot \frac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}} \cdot J_{n+1}^s \end{bmatrix}.$$

Então vale que

$$\begin{aligned}
(i): J_{n-1}^s \cdot J_{n+1}^s - (J_n^s)^2 &= (-1)^{n-1} \cdot s^{n-1} \\
(ii): J_{-(n-1)}^s \cdot J_{-(n+1)}^s - (J_{-n}^s)^2 &= (-1)^{n-1} \cdot s^{-n}
\end{aligned}$$

Demonstração (i):

Sabendo que o determinante da matriz F_s é dado por $\begin{vmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -s$. Dessa forma, teremos que

o determinante $(-s)^n = (-s) \cdot (-s) \cdot \dots \cdot (-s) = \det F_s^n$.

Destarte, temos que: $\det \begin{bmatrix} J_{n+1}^s & s \cdot J_n^s \\ J_n^s & s \cdot J_{n-1}^s \end{bmatrix} = s \cdot J_{n-1}^s \cdot J_{n+1}^s - s \cdot (J_n^s)^2$. Assim,

$$s \cdot J_{n-1}^s \cdot J_{n+1}^s - s \cdot (J_n^s)^2 = (-s)^n \leftrightarrow J_{n-1}^s \cdot J_{n+1}^s - (J_n^s)^2 = (-s)^{n-1} \quad \square$$

(ii): De maneira análoga temos que $\det F_s^{-1} = -\frac{1}{s}$. Em contrapartida, temos que

$$\det F_s^{-n} = \det \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n}{s^{n-1}} \cdot J_{n-1}^s & \frac{(-1)^{n+1}}{s^{n-1}} \cdot J_n^s \\ \frac{(-1)^{n+1}}{s^n} \cdot J_n^s & \frac{(-1)^{n+2}}{s^n} \cdot J_{n+1}^s \end{bmatrix} = \frac{(-1)^n}{s^{n-1}} \cdot J_{n-1}^s \cdot \frac{(-1)^{n+2}}{s^n} \cdot J_{n+1}^s - \frac{(-1)^{n+1}}{s^{n-1}} \cdot J_n^s \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{s^{n-1}} \cdot J_n^s =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^n}{s^{n-1}} \cdot J_{n-1}^s \cdot \frac{(-1)^{n+2}}{s^n} \cdot J_{n+1}^s - \frac{(-1)^{n+1}}{s^n} \cdot J_n^s \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{s^{n-1}} \cdot J_n^s = \\
&= \frac{1}{s^{2n-1}} \cdot J_{n-1}^s \cdot J_{n+1}^s - \frac{1}{s^{2n-1}} \cdot J_n^s \cdot J_n^s = \frac{1}{s^{2n-1}} (J_{n-1}^s \cdot J_{n+1}^s - J_n^s \cdot J_n^s) = \\
&= \frac{1}{s^{2n-1}} \cdot (J_{n-1}^s \cdot J_{n+1}^s - J_n^s \cdot J_n^s) = (-1)^{n-1} \cdot s^{n-1} \cdot \frac{1}{s^{2n-1}} = (-1)^{n-1} \cdot s^{-n} \square
\end{aligned}$$

Isto posto, de maneira análoga ao que foi realizado até o momento, na seção subsequente elucidaremos propriedades e relações associadas a (s,t) – sequência generalizada de Jacobsthal, que foi introduzida na literatura especializada por Anatassov (2011).

3.5 Algumas Propriedades da (s,t) – Sequência de Jacobsthal

De maneira semelhante ao que realizamos anteriormente, apoiamo-nos na definição abaixo para apresentar as demais propriedades relativas a (s,t) – Sequência de Jacobsthal. Assim, conforme Anatassov (2011) temos a seguinte definição.

Definição 5: Chamamos de (s,t) – Sequência Generalizada de Jacobsthal a seguinte relação de recorrência determinada por :

$$J_n^{s,t} = \frac{s^n - (-t)^n}{s+t}, n \geq 0, t, s \geq 2, s \neq -t$$

Nesse sentido, com o lema a seguir, proporcionará a extensão ao campo de índices inteiros.

Lema 2: Para ‘n’ inteiro positivo, teremos:

$$\begin{aligned}
(i) : J_{n+1}^{s,t} &= s \cdot J_n^{s,t} + (-t)^n \\
(ii) : J_{-n}^{s,t} &= \frac{(-1)^{n+1}}{(st)^n} \cdot J_n^{s,t}
\end{aligned}$$

Demonstração (i): Vamos desenvolver o primeiro lado da equação a fim de chegar à demonstração do lema.

$$\begin{aligned}
J_{n+1}^{s,t} &= \frac{s^{n+1} - (-t)^{n+1}}{s+t} = \frac{s \cdot s^n + t \cdot (-t)^n}{s+t} = \frac{s \cdot s^n - s \cdot (-t)^n + s \cdot (-t)^n + t \cdot (-t)^n}{s+t} = \\
&= \frac{s \cdot (s^n - (-t)^n) + (s+t) \cdot (-t)^n}{(s+t)} = s \cdot \left[\frac{s^n - (-t)^n}{s+t} \right] + \frac{(s+t) \cdot (-t)^n}{s+t} = s \cdot J_n^{s,t} + (-t)^n \quad \square
\end{aligned}$$

Demonstração (ii): Temos que

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^{n+1}}{s^n t^n} \cdot J_n^{s,t} &= \frac{(-1)^{n+1}}{s^n t^n} \cdot \frac{s^n - (-t)^n}{s+t} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\frac{s^n}{s^n t^n} - (-1)^n \cdot \frac{t^n}{s^n t^n}}{s+t} = \\
&= (-1)^{n+1} \cdot \frac{t^{-n} - (-1)^n s^{-n}}{s+t} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{(t^{-n} - (-1)^n s^{-n})}{s+t} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{[(-1)^{-n} \cdot (-1)^n t^{-n} - (-1)^n s^{-n}]}{s+t} = \\
&= (-1)^{2n+1} \cdot \frac{((-1)^{-n} \cdot t^{-n} - s^{-n})}{s+t} = (-1)^{2n} \cdot \frac{(s^{-n} - (-t)^{-n})}{s+t} = \frac{(s^{-n} - (-t)^{-n})}{s+t} = J_{-n}^{s,t} \quad \square
\end{aligned}$$

Dando continuidade aos estudos relativos a (s,t) - sequência de Jacobsthal, apresentamos agora algumas propriedades matriciais que também foram propostas por Alves (2017). Para isso, recorreremos ao modelo de representação matricial e consideremos a matriz

$$F_{s,t} = \begin{bmatrix} s-t & s \cdot 1 \\ t \cdot 1 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Nesse sentido, podemos obter as matrizes a seguir por meio de } F_{s,t}.$$

Assim, obtemos:

$$\begin{aligned}
F_{s,t}^2 &= \begin{bmatrix} s^2 - st + t^2 & s(s-t) \\ t(s-t) & (s \cdot t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_3^{s,t} & s \cdot J_2^{s,t} \\ t \cdot J_2^{s,t} & (s \cdot t) \cdot J_1^{s,t} \end{bmatrix} \\
F_{s,t}^3 &= \begin{bmatrix} s^3 - s^2 t + st^2 - t^3 & s(s^2 - st + t^2) \\ t(s^2 - st + t^2) & (s \cdot t)(s-t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_4^{s,t} & s \cdot J_3^{s,t} \\ t \cdot J_3^{s,t} & (s \cdot t) J_2^{s,t} \end{bmatrix} \\
F_{s,t}^4 &= \begin{bmatrix} s^4 - s^3 t + s^2 t^2 - st^3 + t^4 & s(s^3 - s^2 t + st^2 - t^3) \\ t(s^3 - s^2 t + st^2 - t^3) & (s \cdot t)(s^2 - st + t^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_5^{s,t} & s \cdot J_4^{s,t} \\ t \cdot J_4^{s,t} & (s \cdot t) \cdot J_3^{s,t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Observemos agora a matriz $F_{s,t}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{t} \\ \frac{1}{s} & \frac{t-s}{st} \end{bmatrix}$. Se atentarmos, tal matriz é a matriz inversa da

matriz $F_{s,t}$ que apresentamos anteriormente. De modo semelhante, podemos obter as matrizes

$$F_{s,t}^{-2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{st} & \frac{t-s}{t^2s} \\ \frac{t-s}{ts^2} & \frac{s^2-st+t^2}{s^2t^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^2}{st} \cdot J_1^{s,t} & s \cdot \frac{(-1)^3}{t^2s^2} \cdot J_2^{s,t} \\ t \cdot \frac{(-1)^3}{s^2t^2} \cdot J_2^{s,t} & (st) \cdot \frac{(-1)^4}{s^3t^3} \cdot J_3^{s,t} \end{bmatrix} \text{ em que } F_{s,t}^{-2} \text{ é a inversa da matriz}$$

$F_{s,t}^2$. Seguindo esse raciocínio, obtemos

$$F_{s,t}^{-3} = \begin{bmatrix} \frac{t-s}{s^2t^2} & \frac{s^2-st+t^2}{t^3s^2} \\ \frac{s^2-st+t^2}{t^2s^2} & \frac{-s^3+s^2t-st^2+t^3}{s^3t^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^3}{s^2t^2} \cdot J_2^{s,t} & s \cdot \frac{(-1)^4}{t^3s^3} \cdot J_3^{s,t} \\ t \cdot \frac{(-1)^4}{t^3s^3} \cdot J_3^{s,t} & (st) \cdot \frac{(-1)^5}{s^4t^4} \cdot J_4^{s,t} \end{bmatrix} \text{ que é a inversa da}$$

$$\text{matriz } F_{s,t}^3 \text{ e } F_{s,t}^{-4} = \begin{bmatrix} \frac{s^2-st+t^2}{s^3t^3} & \frac{-s^3+s^2t-st^2+t^3}{t^4s^3} \\ \frac{-s^3+s^2t-st^2+t^3}{t^3s^4} & \frac{s^4-s^3t+s^2t^2-st^3+t^4}{s^4t^4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^4}{s^3t^3} \cdot J_3^{s,t} & s \cdot \frac{(-1)^5}{t^4s^4} \cdot J_4^{s,t} \\ t \cdot \frac{(-1)^5}{t^4s^4} \cdot J_4^{s,t} & (st) \cdot \frac{(-1)^6}{s^5t^5} \cdot J_5^{s,t} \end{bmatrix}$$

em que $F_{s,t}^{-4}$ é a inversa da matriz $F_{s,t}^4$.

Dessa forma, com os casos apresentados, podemos conjecturar os seguintes resultados:

$$F_{s,t}^n = \begin{bmatrix} J_{n+1}^{s,t} & s \cdot J_n^{s,t} \\ t \cdot J_n^{s,t} & (s \cdot t) J_{n-1}^{s,t} \end{bmatrix} \text{ e } F_{s,t}^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n}{s^{n-1}t^{n-1}} \cdot J_{n-1}^{s,t} & s \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{t^n s^n} \cdot J_n^{s,t} \\ t \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{t^n s^n} \cdot J_n^{s,t} & (s \cdot t) \cdot \frac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}t^{n+1}} \cdot J_{n+1}^{s,t} \end{bmatrix}. \text{ Assim, enunciamos o}$$

seguinte teorema:

Teorema 10: Para todo inteiro ‘n’ não negativo, temos:

$$(i) F_{s,t}^n = \begin{bmatrix} J_{n+1}^{s,t} & s \cdot J_n^{s,t} \\ t \cdot J_n^{s,t} & (s \cdot t) J_{n-1}^{s,t} \end{bmatrix}; (ii) F_{s,t}^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n}{s^{n-1}t^{n-1}} \cdot J_{n-1}^{s,t} & s \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{t^n s^n} \cdot J_n^{s,t} \\ t \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{t^n s^n} \cdot J_n^{s,t} & (s \cdot t) \cdot \frac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}t^{n+1}} \cdot J_{n+1}^{s,t} \end{bmatrix}.$$

Demonstração (i): Estabeleceremos a demonstração do teorema em questão, utilizando o Princípio da Indução Matemática. Dessa forma, para $n=1$, temos:

$$F_{s,t} = \begin{bmatrix} s-t & s \cdot 1 \\ t \cdot 1 & st \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_2^{s,t} & s \cdot J_1^{s,t} \\ t \cdot J_1^{s,t} & (st) \cdot J_0^{s,t} \end{bmatrix}$$

Agora, suponhamos a validade para $n=k$, então $F_{s,t}^k = \begin{bmatrix} J_{k+1}^{s,t} & s \cdot J_k^{s,t} \\ t \cdot J_k^{s,t} & (s \cdot t) \cdot J_{k-1}^{s,t} \end{bmatrix}$. Vamos mostrar a

validade para $n=k+1$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
F_{s,t}^{k+1} &= F_{s,t}^k \cdot F_{s,t} = \begin{bmatrix} J_{k+1}^{s,t} & s \cdot J_k^{s,t} \\ t \cdot J_k^{s,t} & (s \cdot t) \cdot J_{k-1}^{s,t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s-t & s \cdot 1 \\ t \cdot 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{k+1}^{s,t} & s \cdot J_k^{s,t} \\ t \cdot J_k^{s,t} & (s \cdot t) \cdot J_{k-1}^{s,t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s-t & s \cdot 1 \\ t \cdot 1 & st \cdot 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} (s-t)J_{k+1}^{s,t} + st \cdot J_k^{s,t} & s \cdot J_{k+1}^{s,t} \\ (s-t) \cdot t \cdot J_k^{s,t} + (s \cdot t^2) \cdot J_{k-1}^{s,t} & (s \cdot t) \cdot J_k^{s,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \cdot J_{k+1}^{s,t} - t \cdot J_{k+1}^{s,t} + st \cdot J_k^{s,t} & s \cdot J_{k+1}^{s,t} \\ st \cdot J_k^{s,t} - t^2 J_k^{s,t} + s \cdot t^2 \cdot J_{k-1}^{s,t} & (s \cdot t) \cdot J_k^{s,t} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} s \cdot J_{k+1}^{s,t} - t(J_{k+1}^{s,t} - s \cdot J_k^{s,t}) & s \cdot J_{k+1}^{s,t} \\ st \cdot J_k^{s,t} - t^2(J_k^{s,t} - sJ_{k-1}^{s,t}) & (s \cdot t) \cdot J_k^{s,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \cdot J_{k+1}^{s,t} - t[(-t)^k] & s \cdot J_{k+1}^{s,t} \\ st \cdot J_k^{s,t} - t^2[(-t)^{k-1}] & (s \cdot t) \cdot J_k^{s,t} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} s \cdot J_{k+1}^{s,t} + (-t)^{k+1} & s \cdot J_{k+1}^{s,t} \\ t[s \cdot J_k^{s,t} + (-t)^{k+1}] & (s \cdot t) \cdot J_k^{s,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{k+2}^{s,t} & s \cdot J_{k+1}^{s,t} \\ t \cdot J_{k+1}^{s,t} & (s \cdot t) \cdot J_k^{s,t} \end{bmatrix} \square
\end{aligned}$$

(ii): De maneira análoga ao caso anterior, faremos a demonstração da segunda parte por indução matemática. Dessa forma, para $n=1$, temos:

$$F_{s,t}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{t} \\ \frac{1}{s} & \frac{t-s}{st} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^1}{s^0 t^0} \cdot J_0^{s,t} & s \cdot \frac{(-1)^2}{t^1 s^1} \cdot J_1^{s,t} \\ t \cdot \frac{(-1)^2}{t^1 s^1} \cdot J_1^{s,t} & (st) \cdot \frac{(-1)^3}{s^2 t^2} \cdot J_2^{s,t} \end{bmatrix}$$

Agora, suponhamos a validade para $n=k$ e vamos mostrar que a validade para $k+1$. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
F_{s,t}^{-k-1} &= F_{s,t}^{-k} \cdot F_{s,t}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^k}{s^{k-1} t^{k-1}} \cdot J_{k-1}^{s,t} & s \frac{(-1)^{k+1}}{t^k s^k} \cdot J_k^{s,t} \\ t \frac{(-1)^{k+1}}{t^k s^k} \cdot J_k^{s,t} & (st) \cdot \frac{(-1)^{k+2}}{s^{k+1} t^{k+1}} \cdot J_{k+1}^{s,t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{t} \\ \frac{1}{s} & \frac{t-s}{st} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{(-1)^k}{s^{k-1} t^{k-1}} \cdot J_{k-1}^{s,t} & \frac{(-1)^{k+1}}{t^k s^{k-1}} \cdot J_k^{s,t} \\ \frac{(-1)^{k+1}}{t^{k-1} s^k} \cdot J_k^{s,t} & \frac{(-1)^{k+2}}{s^k t^k} \cdot J_{k+1}^{s,t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{t} \\ \frac{1}{s} & \frac{t-s}{st} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^{k+1}}{t^k s^k} \cdot J_k^{s,t} & \frac{(-1)^k}{t^k s^{k-1}} \cdot J_{k-1}^{s,t} + \frac{(-1)^{k+1}}{t^k s^{k-1}} \cdot J_k^{s,t} \cdot \frac{t-s}{st} \\ \frac{(-1)^{k+2}}{s^{k+1} t^k} \cdot J_{k+1}^{s,t} & \frac{(-1)^{k+1}}{t^k s^k} \cdot J_k^{s,t} + \frac{(-1)^{k+2}}{s^k t^k} \cdot J_{k+1}^{s,t} \cdot \frac{t-s}{st} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{(-1)^{k+1}}{t^k s^k} \cdot J_k^{s,t} & s \cdot \frac{(-1)^{k+2}}{t^{k+1} s^{k+1}} \cdot J_{k+1}^{s,t} \\ t \cdot \frac{(-1)^{k+2}}{t^{k+1} s^{k+1}} \cdot J_{k+1}^{s,t} & (st) \cdot \frac{(-1)^{k+2}}{t^{k+2} s^{k+2}} \cdot J_{k+2}^{s,t} \end{bmatrix} \square
\end{aligned}$$

De fato, tendo em vista o elemento a_{12} , podemos considerar a segunda expressão:

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^k}{t^k s^{k-1}} \cdot J_{k-1}^{s,t} + \frac{(-1)^{k+1}}{t^k s^{k-1}} \cdot J_k^{s,t} \cdot \frac{t-s}{st} &= \frac{(-1)^k}{t^k s^{k-1}} \left(J_{k-1}^{s,t} - J_k^{s,t} \cdot \frac{(t-s)}{st} \right) = \frac{(-1)^k}{t^k s^{k-1}} \left(\frac{st \cdot J_{k-1}^{s,t} - tJ_k^{s,t} + sJ_k^{s,t}}{st} \right) = \\
&= \frac{(-1)^k}{t^k s^{k-1}} \left(\frac{t(s \cdot J_{k-1}^{s,t} - J_k^{s,t}) + sJ_k^{s,t}}{st} \right) = \frac{(-1)^k}{t^k s^{k-1}} \left(\frac{t(-(-t)^{k+1}) + sJ_k^{s,t}}{st} \right) = \frac{(-1)^k}{t^k s^{k-1}} \left(\frac{(-t)^{k+2} + sJ_k^{s,t}}{st} \right) = \\
&= \frac{(-1)^k}{t^k s^{k-1}} \left(\frac{sJ_k^{s,t} + (-t)^k}{st} \right) = \frac{(-1)^k}{t^{k+1} s^k} \cdot J_{k+1}^{s,t} = s \cdot \frac{(-1)^{k+2}}{t^{k+1} s^{k+1}} \cdot J_{k+1}^{s,t}
\end{aligned}$$

Recordando que foi empregada a relação $J_{k+1}^{s,t} = s \cdot J_k^{s,t} + (-t)^k$.

Por fim, apresentamos a extensão da identidade de Cassini para a s, t - sequência de Jacobsthal. Dessa forma, vejamos o teorema a seguir:

Teorema 11: Considerando as potências de matrizes

$$F_n^{s,t} = \begin{bmatrix} J_{n+1}^{s,t} & s \cdot J_n^{s,t} \\ t \cdot J_n^{s,t} & (s \cdot t) \cdot J_{n-1}^{s,t} \end{bmatrix} \text{ e } F_{s,t}^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n}{s^{n-1}t^{n-1}} \cdot J_{n-1}^{s,t} & s \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{t^n s^n} \cdot J_n^{s,t} \\ t \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{t^n s^n} \cdot J_n^{s,t} & (st) \cdot \frac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}t^{n+1}} \cdot J_{n+1}^{s,t} \end{bmatrix}. \text{ Então, valem as}$$

relações: (i) : $J_{n-1}^{s,t} \cdot J_{n+1}^{s,t} - (J_n^{s,t})^2 = (-1)^n \cdot (st)^{n-1}$
(ii) : $J_{-(n-1)}^{s,t} \cdot J_{-(n+1)}^{s,t} - (J_{-n}^{s,t})^2 = (-1)^n \cdot (st)^{-n-1}$

Demonstração (i)

Vale lembrar que $\det F_{s,t} = (-st)$. Assim, temos que:

$$(-st) \cdot (-st) \cdot (-st) \cdot \dots \cdot (-st) = (-st)^n = (-1)^n \cdot (st)^n = \det F_{s,t}^n. \text{ Por sua vez,}$$

$$\det F_{s,t}^n = \det \begin{bmatrix} J_{n+1}^{s,t} & s \cdot J_n^{s,t} \\ t \cdot J_n^{s,t} & (s \cdot t) \cdot J_{n-1}^{s,t} \end{bmatrix} = (st) \cdot (J_{n-1}^{s,t} \cdot J_{n+1}^{s,t} - J_n^{s,t} \cdot J_n^{s,t}). \text{ Dessa forma, obtemos que}$$

$$(st) \cdot (J_{n-1}^{s,t} \cdot J_{n+1}^{s,t} - J_n^{s,t} \cdot J_n^{s,t}) = (-1)^n \cdot (st)^n. \text{ Assim, determinamos que}$$

$$J_{n-1}^{s,t} \cdot J_{n+1}^{s,t} - (J_n^{s,t})^2 = (-1)^n \cdot (st)^{n-1} \square.$$

(ii) Observando que

$$F_{s,t}^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n}{s^{n-1}t^{n-1}} \cdot J_{n-1}^{s,t} & s \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{t^n s^n} \cdot J_n^{s,t} \\ t \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{t^n s^n} \cdot J_n^{s,t} & (st) \cdot \frac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}t^{n+1}} \cdot J_{n+1}^{s,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{-(n-1)}^{s,t} & s \cdot J_{-n}^{s,t} \\ t \cdot J_{-n}^{s,t} & (st) J_{-(n+1)}^{s,t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Assim, temos que } \det F_{s,t}^{-n} &= \frac{(-1)^n}{s^{n-1}t^{n-1}} \cdot J_{n-1}^{s,t} (st) \cdot \frac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}t^{n+1}} \cdot J_{n+1}^{s,t} - t \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{t^n s^n} \cdot J_n^{s,t} \cdot s \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{t^n s^n} \cdot J_n^{s,t} = \\ &= (st) \cdot \frac{1}{t^{2n} s^{2n}} \cdot J_{n-1}^{s,t} \cdot J_{n+1}^{s,t} - (st) \cdot \frac{1}{t^{2n} s^{2n}} (J_n^{s,t})^2 = \frac{1}{(st)^{2n-1}} (J_{n-1}^{s,t} \cdot J_{n+1}^{s,t} - (J_n^{s,t})^2) \end{aligned}$$

Por fim, podemos estabelecer que

$$(st) (J_{-(n-1)}^{s,t} \cdot J_{-(n+1)}^{s,t} - (J_{-n}^{s,t})^2) = \frac{1}{(st)^{2n-1}} \cdot ((-1)^n \cdot (st)^{n-1}) = (-1)^n \cdot (st)^{-n}$$

$$\text{Portanto, } J_{-(n-1)}^{s,t} \cdot J_{-(n+1)}^{s,t} - (J_{-n}^{s,t})^2 = (-1)^n \cdot (st)^{-n-1} \square$$

Na seção seguinte, objetivamos apresentar o comportamento algébrico de uma sequência em que introduziremos o parâmetro k . Desse modo, introduzimos essa sequência no sentido de propor um modelo de generalização para a sequência clássica.

3.6 A Sequência k-Jacobsthal

Falcon e Plaza (2007) já haviam definido para todo número real positivo k a sequência k - Fibonacci, conforme a lei de recorrência $F_{k,n+1} = k \cdot F_{k,n} + F_{k,n-1}$ para $n \geq 1$, e cujas condições iniciais são $F_{k,0} = 0$ e $F_{k,1} = 1$. Ao tomarmos $k = 1$, obtemos a clássica sequência de Fibonacci $\{F_n\} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$. Por outro lado, fazendo $k = 2$ obtemos a sequência de Pell $\{P_n\} = \{0, 1, 2, 5, 12, 70, 169, \dots\}$.

De modo análogo, Falcon (2014, p.68) apresenta uma definição para sequência k - Jacobsthal com a relação de recorrência $J_k = J_{k,n-1} + k \cdot J_{k,n-2}$ com $n \geq 2$ e tais condições iniciais $J_{k,0} = 0$ e $J_{k,1} = 1$. Vale salientar que, neste caso, para $k = 1$ e $k = 2$, obtemos, respectivamente, a usual sequência de Fibonacci e a sequência de Jacobsthal que apresentamos anteriormente $\{J_n\} = \{0, 1, 1, 3, 5, 11, \dots\}$. A seguir, apresentamos a discussão das principais propriedades atinentes à sequência k -Jacobsthal.

3.6.1 A fórmula de Binet para sequência k - Jacobsthal

Da relação de recorrência $J_{k,n} = J_{k,n-1} + k \cdot J_{k,n-2}$ podemos escrever que

$$\frac{J_{k,n}}{J_{k,n-1}} = 1 + k \cdot \frac{1}{\left(\frac{J_{k,n-1}}{J_{k,n-2}}\right)} \text{ e considerando a relação } t_n = \frac{J_{k,n}}{J_{k,n-1}}, \text{ podemos obter que}$$

$$t_n = \frac{J_{k,n}}{J_{k,n-1}} = 1 + k \cdot \frac{1}{\left(\frac{J_{k,n-1}}{J_{k,n-2}}\right)} = 1 + k \cdot \frac{1}{t_{n-1}}.$$

Nesse sentido, apoiamo-nos no trabalho de Martínez e Salas (2011), que versa sobre a convergência de quocientes de termos consecutivos de uma sequência. Assim, consideramos o teorema:

Teorema 12: Suponhamos que $a, b, p, q > 0$ sejam números positivos tais que:

$$\frac{b}{a} \stackrel{\text{def}}{=} r \neq \mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

Então a sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por $a_n = \frac{c_{n+1}}{c_n}$.

Onde $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ é definido por $c_n = \begin{cases} a & \text{se } n = 1 \\ b & \text{se } n = 2 \\ pc_{n-1} + qc_{n-2} & \text{se } n \geq 3; p, q \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$

converge e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$

Demonstração: Ver Martínez e Salas (2011, p. 1957)

Com base nisso, assumimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_{k,n}}{J_{k,n-1}} = \lambda$ existe. Dessa forma, podemos

determinar a equação do 2º grau $\lambda^2 - \lambda - k = 0$ que possui raízes $\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4k}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4k}}{2}$.

Assim, temos que $J_{k,n} = a_1 \cdot \lambda_1^n + a_2 \cdot \lambda_2^n$. Nesse sentido, para $n = 0$ e $n = 1$ podemos indicar o seguinte sistema

$$\begin{cases} J_{k,0} = a_1 \cdot \lambda_1^0 + a_2 \cdot \lambda_2^0 = 0 \\ J_{k,1} = a_1 \cdot \lambda_1^1 + a_2 \cdot \lambda_2^1 = 1 \end{cases} \therefore \begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 \cdot \lambda_1 + a_2 \cdot \lambda_2 = 1 \end{cases}.$$

Com isso, obtemos $a_1 = -a_2$ e substituindo na outra equação

$$a_1 \cdot \lambda_1 + a_2 \cdot \lambda_2 = 1 \Leftrightarrow a_1(\lambda_1 - \lambda_2) = a_1(\sqrt{4k+1}) = 1 \text{ em que obtemos } a_1 = \frac{1}{\sqrt{1+4k}} = -a_2.$$

$$\text{Finalmente, temos : } J_{k,n} = \frac{1}{\sqrt{4k+1}} \cdot \left[\left(\frac{1 + \sqrt{1+4k}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{1+4k}}{2} \right)^n \right].$$

Ademais, podemos estabelecer uma representação para números do tipo $J_{k,-n}$ usando raciocínio semelhante ao que foi empregado por Gnanam e Anitha (2016) para estabelecer termos do tipo J_{-n} . Dessa forma, apresentamos o seguinte teorema:

Teorema 13: Para todo inteiro positivo $n \geq 0$, temos $J_{k,-n} = \frac{(-1)^{n+1}}{k^n} \cdot J_{k,n}$.

Demonstração: Pela fórmula de Binet temos que

$$\begin{aligned}
J_{k,-n} &= \frac{\lambda_1^{-n} - \lambda_2^{-n}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\frac{1}{\lambda_1^n} - \frac{1}{\lambda_2^n}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{(\lambda_1 \lambda_2)^n}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{(-1)(\lambda_1^n - \lambda_2^n)}{(-k)^n(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{(-1)}{(-1)^n(k)^n} \cdot \frac{(\lambda_1^n - \lambda_2^n)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} = \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{k^n} \cdot J_{k,n} \quad \square
\end{aligned}$$

O teorema anterior nos permite obter a extensão aos inteiros para os termos da sequência de k-Jacobsthal, nos quais podemos exemplificar alguns valores.

$$\begin{aligned}
J_{k,-1} &= \frac{1}{k} \\
J_{k,-2} &= -\frac{1}{k^2} \\
J_{k,-3} &= \frac{1+k}{k^3} \\
J_{k,-4} &= -\frac{1+2k}{k^4}
\end{aligned}$$

De modo semelhante ao que foi realizado anteriormente, vamos estabelecer algumas propriedades matriciais referentes à sequência k- Jacobsthal.

3.6.2 Representação Matricial da Sequência k-Jacobsthal

De maneira análoga ao que realizamos para a matriz F , tomamos a matriz

$$F_k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Assim, podemos analisar alguns casos especiais}$$

$$\begin{aligned}
F_k^2 &= \begin{bmatrix} 1+k & k \\ 1 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{k,3} & k \cdot J_{k,2} \\ J_{k,2} & k \cdot J_{k,1} \end{bmatrix}; F_k^3 = \begin{bmatrix} 1+2k & (1+k)k \\ 1+k & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{k,4} & k \cdot J_{k,3} \\ J_{k,3} & k \cdot J_{k,2} \end{bmatrix} \\
F_k^4 &= \begin{bmatrix} k^2 + 3k + 1 & (1+2k)k \\ 1+2k & (k+1)k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{k,5} & k \cdot J_{k,4} \\ J_{k,4} & k \cdot J_{k,3} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\text{O que nos leva a conjecturar que } F_k^n = \begin{bmatrix} J_{k,n+1} & k \cdot J_{k,n} \\ J_{k,n} & k \cdot J_{k,n-1} \end{bmatrix}. \text{ Diante disso, enunciamos o}$$

seguinte teorema.

Teorema 14: Seja a matriz $F_k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, temos que $F_k^n = \begin{bmatrix} J_{k,n+1} & k \cdot J_{k,n} \\ J_{k,n} & k \cdot J_{k,n-1} \end{bmatrix}, n \geq 2$.

Demonstração: Utilizando o Método da Indução Matemática temos que

$$F_k^{n+1} = F_k^n \cdot F_k^1 = \begin{bmatrix} J_{k,n+1} & k \cdot J_{k,n} \\ J_{k,n} & k \cdot J_{k,n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & k \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{k,n+1} + k \cdot J_{k,n} & k \cdot J_{k,n+1} \\ J_{k,n} + k \cdot J_{k,n-1} & k \cdot J_{k,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{k,n+2} & k \cdot J_{k,n+1} \\ J_{k,n+1} & k \cdot J_{k,n} \end{bmatrix} \square$$

Além disso, o teorema a seguir nos permite uma generalização para matrizes do tipo F_k^{n+m} .

Teorema 15: Seja a matriz $F_k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ então $J_{k,n+m+1} = J_{k,n+1}J_{k,m+1} + k \cdot J_{k,n}J_{k,m}$

Demonstração: Por meio de algumas propriedades matriciais elementares temos que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} J_{k,n+m+1} & k \cdot J_{k,n+m} \\ J_{k,n+m} & k \cdot J_{k,n+m-1} \end{bmatrix} &= F_k^{m+n} = F_k^n \cdot F_k^m = \begin{bmatrix} J_{k,n+1} & k \cdot J_{k,n} \\ J_{k,n} & k \cdot J_{k,n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_{k,m+1} & k \cdot J_{k,m} \\ J_{k,m} & k \cdot J_{k,m-1} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} J_{k,n+1}J_{k,m+1} + k \cdot J_{k,n}J_{k,m} & (J_{k,n+1}J_{k,m} + kJ_{k,n}J_{k,m-1})k \\ J_{k,n}J_{k,m+1} + k \cdot J_{k,n-1}J_{k,m} & (J_{k,n}J_{k,m} + kJ_{k,n-1}J_{k,m-1})k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Da igualdade entre matrizes, determinamos que $J_{k,n+m+1} = J_{k,n+1}J_{k,m+1} + k \cdot J_{k,n}J_{k,m}$ para $n, m \geq 0$ $\square$

De modo análogo às propriedades estabelecidas para matrizes inversas, vamos determinar as matrizes do tipo F_k^{-n} . Nesse sentido, podemos estabelecer alguns casos particulares para as matrizes inversas, tais quais:

$$\begin{aligned} F_k^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{k} & -\frac{1}{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^1}{k^0} \cdot J_{k,0} & k \cdot \frac{(-1)^2}{k} \cdot J_{k,1} \\ \frac{(-1)^2}{k} \cdot J_{k,1} & k \cdot \frac{(-1)^3}{k^2} \cdot J_{k,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{k,0} & kJ_{k,-1} \\ J_{k,-1} & kJ_{k,-2} \end{bmatrix} \\ F_k^{-2} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & -\frac{1}{k} \\ -\frac{1}{k^2} & \frac{1+k}{k^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^2}{k} \cdot J_{k,1} & k \cdot \frac{(-1)^3}{k^2} \cdot J_{k,2} \\ \frac{(-1)^3}{k^2} \cdot J_{k,2} & k \cdot \frac{(-1)^4}{k^3} \cdot J_{k,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{k,-1} & kJ_{k,-2} \\ J_{k,-2} & kJ_{k,-3} \end{bmatrix} \\ F_k^{-3} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{k^2} & \frac{k+1}{k^2} \\ \frac{1+k}{k^3} & -\frac{1+2k}{k^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^3}{k^2} \cdot J_{k,2} & k \cdot \frac{(-1)^4}{k^3} \cdot J_{k,3} \\ \frac{(-1)^4}{k^3} \cdot J_{k,3} & k \cdot \frac{(-1)^5}{k^4} \cdot J_{k,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{k,-2} & kJ_{k,-3} \\ J_{k,-3} & kJ_{k,-4} \end{bmatrix} \\ F_k^{-4} &= \begin{bmatrix} \frac{k+1}{k^3} & -\frac{2k+1}{k^3} \\ -\frac{1+2k}{k^4} & \frac{k^2+3k+1}{k^4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^4}{k^3} \cdot J_{k,3} & k \cdot \frac{(-1)^5}{k^4} \cdot J_{k,4} \\ \frac{(-1)^5}{k^4} \cdot J_{k,4} & k \cdot \frac{(-1)^6}{k^5} \cdot J_{k,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{k,-3} & kJ_{k,-4} \\ J_{k,-4} & kJ_{k,-5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Assim, podemos conjecturar que F_k^{-n} é da forma $F_k^{-n} = \begin{bmatrix} J_{k, -(n-1)} & k \cdot J_{k, -n} \\ J_{k, -n} & k \cdot J_{k, -(n+1)} \end{bmatrix}$.

Teorema 16: Para um dado inteiro ‘n’ não negativo, vale que

$$F_k^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n}{k^{n-1}} \cdot J_{k, n-1} & k \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{k^n} \cdot J_{k, n} \\ \frac{(-1)^{n+1}}{k^n} \cdot J_{k, n} & k \cdot \frac{(-1)^{n+2}}{k^{n+1}} \cdot J_{k, n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{k, -(n-1)} & k \cdot J_{k, -n} \\ J_{k, -n} & k \cdot J_{k, -(n+1)} \end{bmatrix}$$

Demonstração: Utilizamos o Princípio da Indução Matemática para realizar a prova do teorema. Assim,

$$\begin{aligned} F_k^{-n} \cdot F_k^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n}{k^{n-1}} \cdot J_{k, n-1} & k \frac{(-1)^{n+1}}{k^n} \cdot J_{k, n} \\ \frac{(-1)^{n+1}}{k^n} \cdot J_{k, n} & k \frac{(-1)^{n+2}}{k^{n+1}} \cdot J_{k, n+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{k} & -\frac{1}{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^{n+1}}{k^n} J_{k, n} & \frac{(-1)^n}{k^{n-1}} J_{k, n-1} + \frac{(-1)^{n+2}}{k^n} J_{k, n} \\ \frac{(-1)^{n+2}}{k^{n+1}} J_{k, n+1} & \frac{(-1)^{n+1}}{k^n} J_{k, n} + \frac{(-1)^{n+3}}{k^{n+1}} J_{k, n+1} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{(-1)^{n+1}}{k^n} \cdot J_{k, n} & \frac{(-1)^{n+2}}{k^n} \cdot [k \cdot J_{k, n-1} + J_{k, n}] \\ \frac{(-1)^{n+2}}{k^{n+1}} J_{k, n+1} & \frac{(-1)^{n+3}}{k^{n+1}} \cdot [k \cdot J_{k, n} + J_{k, n+1}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^{n+1}}{k^n} \cdot J_{k, n} & \frac{(-1)^{n+2}}{k^n} \cdot J_{k, n+1} \\ \frac{(-1)^{n+2}}{k^{n+1}} \cdot J_{k, n+1} & \frac{(-1)^{n+3}}{k^{n+1}} \cdot J_{k, n+2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{(-1)^{n+1}}{k^n} \cdot J_{k, n} & k \cdot \frac{(-1)^{n+2}}{k^{n+1}} \cdot J_{k, n+1} \\ \frac{(-1)^{n+2}}{k^{n+1}} \cdot J_{k, n+1} & k \cdot \frac{(-1)^{n+2}}{k^{n+2}} \cdot J_{k, n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{k, -n} & k \cdot J_{k, -(n+1)} \\ J_{k, -(n+1)} & k \cdot J_{k, -(n+2)} \end{bmatrix} \square \end{aligned}$$

Contudo, podemos estabelecer relações semelhantes as que realizamos anteriormente. Nesse sentido, vamos estabelecer algumas identidades tal qual a identidade de Cassini que pode ser obtida por meio do cálculo do determinante da matriz F_k^n .

Teorema 17: Para $n \geq 2$, temos que

$$(i): J_{k, n-1} J_{k, n+1} - J_{k, n}^2 = (-1)^n \cdot k^{n-1}; (ii): J_{k, -(n-1)} J_{k, -(n+1)} - J_{k, -n}^2 = (-1)^n (k)^{-n-1}.$$

Demonstração (i): Podemos observar que

$$\det F_k^n = \det \begin{bmatrix} J_{k, n+1} & k \cdot J_{k, n} \\ J_{k, n} & k \cdot J_{k, n-1} \end{bmatrix} = k \cdot J_{k, n-1} J_{k, n+1} - k \cdot J_{k, n} \cdot J_{k, n} = k (J_{k, n-1} J_{k, n+1} - J_{k, n}^2)$$

Por outro lado, temos que: $\det F_k^n = \det(F_k) \cdots \det(F_k) = (-k) \cdots (-k) = (-1)^n \cdot k^n$. Finalmente, obtemos que $J_{k, n-1} J_{k, n+1} - J_{k, n}^2 = (-1)^n \cdot k^{n-1} \square$

(ii): Nesse item, repetimos o mesmo argumento para determinar que

$$\det F_k^{-n} = \det \begin{bmatrix} J_{k, -(n-1)} & kJ_{k, -n} \\ J_{k, -n} & kJ_{k, -(n+1)} \end{bmatrix} = k(J_{k, -(n-1)}J_{k, -(n+1)} - J_{k, -n}^2) = \left(-\frac{1}{k}\right)^n = (-1)^n \cdot k^{-n-1} \square$$

Não obstante, podemos estabelecer algumas propriedades envolvendo somas utilizando a lei de recorrência $J_{k,n} = J_{k,n-1} + k \cdot J_{k,n-2}$ temos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{k,2} = J_{k,1} + k \cdot J_{k,0} \\ J_{k,3} = J_{k,2} + k \cdot J_{k,1} \\ J_{k,4} = J_{k,3} + k \cdot J_{k,2} \\ J_{k,5} = J_{k,4} + k \cdot J_{k,3} \\ \vdots \\ J_{k,n-1} = J_{k,n-2} + k \cdot J_{k,n-3} \\ J_{k,n} = J_{k,n-1} + k \cdot J_{k,n-2} \\ J_{k,n+1} = J_{k,n} + k \cdot J_{k,n-1} \\ J_{k,n+2} = J_{k,n+1} + k \cdot J_{k,n} \end{array} \right. \quad \therefore \quad \left\{ \begin{array}{l} J_{k,2} - J_{k,1} = k \cdot J_{k,0} \\ J_{k,3} - J_{k,2} = k \cdot J_{k,1} \\ J_{k,4} - J_{k,3} = k \cdot J_{k,2} \\ J_{k,5} - J_{k,4} = k \cdot J_{k,3} \\ \vdots \\ J_{k,n+1} - J_{k,n} = k \cdot J_{k,n-1} \\ J_{k,n+2} - J_{k,n+1} = k \cdot J_{k,n} \end{array} \right.$$

Efetuada as operações cabíveis, determinamos que $J_{k,n+2} - J_{k,1} = k \sum_{i=0}^n J_{k,i}$.

Quando consideramos índices negativos, observamos que

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{k,0} = J_{k,-1} + k \cdot J_{k,-2} \\ J_{k,-1} = J_{k,-2} + k \cdot J_{k,-3} \\ J_{k,-2} = J_{k,-3} + k \cdot J_{k,-4} \\ J_{k,-3} = J_{k,-4} + k \cdot J_{k,-5} \\ J_{k,-4} = J_{k,-5} + k \cdot J_{k,-6} \\ \vdots \\ J_{k,-n} = J_{k,-n-1} + k \cdot J_{k,-n-2} \\ J_{k,-n-1} = J_{k,-n-2} + k \cdot J_{k,-n-3} \end{array} \right. \quad \therefore \quad \left\{ \begin{array}{l} J_{k,0} - J_{k,-1} = k \cdot J_{k,-2} \\ J_{k,-1} - J_{k,-2} = k \cdot J_{k,-3} \\ J_{k,-2} - J_{k,-3} = k \cdot J_{k,-4} \\ J_{k,-3} - J_{k,-4} = k \cdot J_{k,-5} \\ J_{k,-4} - J_{k,-5} = k \cdot J_{k,-6} \\ \vdots \\ J_{k,-n} - J_{k,-n-1} = k \cdot J_{k,-n-2} \\ J_{k,-n-1} - J_{k,-n-2} = k \cdot J_{k,-n-3} \end{array} \right.$$

Finalmente temos, $J_{k,0} - J_{k,-n-2} = k \sum_{i=2}^{n+3} J_{k,-i}$

3.6.3 A fórmula de Binet para os números de k -Jacobsthal

Observamos que a introdução do parâmetro ‘ k ’ na sequência de Jacobsthal, apresenta algumas variações no contexto da matemática pura, como por exemplo a concepção dada por Jhala, Rathore e Sisodiya (2014). Desse modo, com origem na próxima definição, discutiremos algumas identidades e propriedades que confirmam uma evolução contínua das propriedades atuais estudadas por especialistas ao redor do mundo.

Definição 6: Definimos os números de k-Jacobsthal por meio da relação de recorrência $J_{k,n} = k \cdot J_{k,n-1} + 2 \cdot J_{k,n-2}$, $n \geq 2$ com condições iniciais $J_{k,0} = 0$ e $J_{k,1} = 1$. Com base nisso, podemos encontrar que:

$$J_{k,2} = k; J_{k,3} = k^2 + 2; J_{k,4} = k^3 + 4k; J_{k,5} = k^4 + 6k^2 + 4$$

Da relação de recorrência $J_{k,n} = kJ_{k,n-1} + 2 \cdot J_{k,n-2}$ podemos escrever que

$$\frac{J_{k,n}}{J_{k,n-1}} = k + 2 \cdot \frac{1}{\left(\frac{J_{k,n-1}}{J_{k,n-2}}\right)} \text{ e considerando a relação } t_n = \frac{J_{k,n}}{J_{k,n-1}}, \text{ podemos obter que}$$

$$t_n = \frac{J_{k,n}}{J_{k,n-1}} = k + 2 \cdot \frac{1}{\left(\frac{J_{k,n-1}}{J_{k,n-2}}\right)} = k + 2 \cdot \frac{1}{t_{n-1}}. \text{ Novamente, recorremos ao teorema apresentado por}$$

Martínez e Salas (2011), e assumindo que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_{k,n}}{J_{k,n-1}} = r$ existe. Dessa forma,

podemos determinar a equação do 2º grau $r^2 - k \cdot r - 2 = 0$ que possui raízes $r_1 = \frac{k + \sqrt{k^2 + 8}}{2}$

e $r_2 = \frac{k - \sqrt{k^2 + 8}}{2}$. Desse modo, temos que $J_{k,n} = a_1 \cdot r_1^n + a_2 \cdot r_2^n$. Assim, para $n = 0$ e $n = 1$

$$\text{podemos indicar o seguinte sistema: } \begin{cases} J_{k,0} = a_1 \cdot r_1^0 + a_2 \cdot r_2^0 = 0 \\ J_{k,1} = a_1 \cdot r_1^1 + a_2 \cdot r_2^1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 \cdot r_1 + a_2 \cdot r_2 = 1 \end{cases}.$$

Diante disso, obtemos $a_1 = -a_2$ e substituindo na outra equação

$$a_1 \cdot r_1 + a_2 \cdot r_2 = 1 \Leftrightarrow a_1(r_1 - r_2) = a_1(\sqrt{k^2 + 8}) = 1 \text{ em que obtemos } a_1 = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 8}} = -a_2. \text{ Por fim,}$$

$$\text{temos : } J_{k,n} = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 8}} \cdot \left[\left(\frac{k + \sqrt{k^2 + 8}}{2} \right)^n - \left(\frac{k - \sqrt{k^2 + 8}}{2} \right)^n \right].$$

Do mesmo modo, se utilizamos a fórmula de Binet, podemos estabelecer uma fórmula fechada para a obtenção dos termos da sequência k-jacobsthal como modelo de extensão aos inteiros e podemos obter que $J_{k,-n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \cdot J_{k,n}$. Alguns casos particulares podem ser levantados, tais quais:

$$J_{k,-1} = \frac{1}{2}$$

$$J_{k,-2} = -\frac{k}{4}$$

$$J_{k,-3} = \frac{k^2 + 2}{8}$$

$$J_{k,-4} = \frac{k^3 + 4k}{16}$$

De maneira semelhante ao que realizamos anteriormente, podemos estabelecer algumas identidades matemáticas para a k-sequência de Jacobsthal. Assim, nas seções subsequentes apresentamos propriedades que nos permitem designar relações da referida sequência.

Segundo Jhala, Rathore e Sisodiya (2013) a identidade de Catalan é dada por:

Proposição 2: Para qualquer inteiro positivo, temos que

$$J_{k,n-r} J_{k,n+r} - J_{k,n}^2 = (-1)^{n+1-r} \cdot J_{k,r} \cdot 2^{n-r}$$

Demonstração: Utilizando a fórmula de Binet, temos:

$$\begin{aligned} J_{k,n-r} J_{k,n+r} - J_{k,n}^2 &= \left(\frac{r_1^{n-r} - r_2^{n-r}}{r_1 - r_2} \cdot \frac{r_1^{n+r} - r_2^{n+r}}{r_1 - r_2} \right) - \left(\frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} \right)^2 = \\ &= \frac{r_1^{2n} - r_1^{n-r} r_2^{n+r} - r_1^{n+r} r_2^{n-r} + r_2^{2n}}{(r_1 - r_2)^2} - \frac{r_1^{2n} - 2r_1^n r_2^n + r_2^{2n}}{(r_1 - r_2)^2} = \\ &= \frac{r_1^{2n} - r_1^{n-r} r_2^{n+r} - r_1^{n+r} r_2^{n-r} + r_2^{2n} - r_1^{2n} + 2r_1^n r_2^n - r_2^{2n}}{(r_1 - r_2)^2} = \frac{2(r_1 r_2)^n - r_1^{n-r} r_2^{n+r} - r_1^{n+r} r_2^{n-r}}{(r_1 - r_2)^2} = \\ &= \frac{2(-2)^n - r_1^{n-r} r_2^{n+r} - r_1^{n+r} r_2^{n-r}}{(r_1 - r_2)^2} = \frac{2(-2)^n - (-2)^n r_1^{-r} r_2^r - (-2)^n r_1^r r_2^{-r}}{(r_1 - r_2)^2} = \\ &= (-2)^n \cdot \frac{2 - r_1^{-r} r_2^r - r_1^r r_2^{-r}}{(r_1 - r_2)^2} = (-1)^n \cdot 2^n \cdot \frac{2r_1^r r_2^r - r_2^r r_2^r - r_1^r r_1^r}{(r_1 r_2)^r (r_1 - r_2)^2} = \\ &= (-1)^{n+1} \cdot 2^n \frac{(r_1^r - r_2^r)^2}{(-2)^r (r_1 - r_2)^2} = (-1)^{n+1} \cdot 2^n \frac{(r_1^r - r_2^r)^2}{(-1)^r \cdot 2^r (r_1 - r_2)^2} = \\ &= (-1)^{n+1-r} \cdot (2)^{n-r} \cdot \left(\frac{r_1^{2r} - 2r_1^r r_2^r + r_2^{2r}}{(r_1 - r_2)^2} \right) = (-1)^{n+1-r} \cdot (2)^{n-r} \cdot \left(\frac{r_1^r - r_2^r}{r_1 - r_2} \right)^2 = \\ &= (-1)^{n+1-r} (2)^{n-r} \cdot J_{k,r}^2, r \geq 0 \square \end{aligned}$$

Jhala, Rathore e Sisodiya (2013) apontam a identidade abaixo conhecida como Identidade de d'Ocagne;

Proposição 3: Se $m > n$ temos que $J_{k,m}J_{k,n+1} - J_{k,m+1}J_{k,n} = (-2)^n J_{k,m-n}$.

Demonstração: Pela fórmula de Binet, temos:

$$\begin{aligned}
 J_{k,m}J_{k,n+1} - J_{k,m+1}J_{k,n} &= \left(\frac{r_1^m - r_2^m}{r_1 - r_2} \cdot \frac{r_1^{n+1} - r_2^{n+1}}{r_1 - r_2} \right) - \left(\frac{r_1^{m+1} - r_2^{m+1}}{r_1 - r_2} \cdot \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} \right) = \\
 &= \frac{r_1^{m+n+1} - r_1^m r_2^{n+1} - r_2^m r_1^{n+1} + r_2^{m+n+1}}{(r_1 - r_2)^2} - \frac{r_1^{m+n+1} - r_1^{m+1} r_2^n - r_2^{m+1} r_1^n + r_2^{m+n+1}}{(r_1 - r_2)^2} = \\
 &= \frac{r_1^{m+1} r_2^n + r_2^{m+1} r_1^n - r_1^m r_2^{n+1} - r_2^m r_1^{n+1}}{(r_1 - r_2)^2} = \frac{(r_1 \cdot r_2)^n (r_1^{m-n} r_1 + r_2^{m-n} r_2 - r_1^{m-n} r_2 - r_1 r_2^{m-n})}{(r_1 - r_2)^2} = \\
 &= (-2)^n \cdot \frac{r_1^{m-n} (r_1 - r_2) - r_2^{m-n} (r_1 - r_2)}{(r_1 - r_2)^2} = (-2)^n \cdot \frac{(r_1 - r_2)(r_1^{m-n} - r_2^{m-n})}{(r_1 - r_2)^2} = \\
 &= (-2)^n \cdot \frac{r_1^{m-n} - r_2^{m-n}}{r_1 - r_2} = (-2)^n \cdot J_{k,m-n} \quad \square
 \end{aligned}$$

3.6.4 Uma segunda representação matricial para a sequência de k -Jacobsthal

Vamos definir a seguinte matriz $IF = \begin{bmatrix} k & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Com origem na mesma podemos

especificar alguns casos particulares, tais como:

$$\begin{aligned}
 IF^2 &= \begin{bmatrix} k^2 + 2 & 2k \\ k & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{k,3} & 2J_{k,2} \\ J_{k,2} & 2J_{k,1} \end{bmatrix}; IF^3 = \begin{bmatrix} k^3 + 4k & 2k^2 + 4 \\ k^2 + 2 & 2k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{k,4} & 2J_{k,3} \\ J_{k,3} & 2J_{k,2} \end{bmatrix}; \\
 IF^4 &= \begin{bmatrix} k^4 + 6k^2 + 4 & 2(k^3 + 4k) \\ k^3 + 4k & 2k^2 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{k,5} & 2J_{k,4} \\ J_{k,4} & 2J_{k,3} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Tais representações nos levam ao próximo teorema

Teorema 18: Seja ' n ' um inteiro positivo, tal que $n \geq 2$ podemos determinar que:

$$IF^n = \begin{bmatrix} J_{k,n+1} & 2J_{k,n} \\ J_{k,n} & 2J_{k,n-1} \end{bmatrix}$$

Demonstração: Dos casos particulares anteriores, tomamos a hipótese de indução

$IF^n = \begin{bmatrix} J_{k,n+1} & 2J_{k,n} \\ J_{k,n} & 2J_{k,n-1} \end{bmatrix}$. Assim, vale observar que $IF^{n+1} = IF^n \cdot IF$. Desse modo,

$$IF^{n+1} = \begin{bmatrix} J_{k,n+1} & 2J_{k,n} \\ J_{k,n} & 2J_{k,n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cdot J_{k,n+1} + 2J_{k,n} & 2J_{k,n+1} \\ kJ_{k,n} + 2J_{k,n-1} & 2J_{k,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{k,n+2} & 2 \cdot J_{k,n+1} \\ J_{k,n+1} & 2 \cdot J_{k,n} \end{bmatrix} \quad \square$$

Corolário 1: Para quaisquer inteiros positivos $m, n \geq 1$ temos que

$$J_{k,m+n+1} = J_{k,m+1}J_{k,n+1} + 2 \cdot J_{k,m}J_{k,n}$$

Demonstração: Podemos observar que $IF^{m+n} = IF^m IF^n = \begin{bmatrix} J_{k,m+n+1} & 2J_{k,m+n} \\ J_{k,m+n} & 2J_{k,m+n-1} \end{bmatrix}$. Por outro

lado, temos:

$$\begin{aligned} IF^m \cdot IF^n &= \begin{bmatrix} J_{k,m+1} & 2J_{k,m} \\ J_{k,m} & 2J_{k,m-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_{k,n+1} & 2J_{k,n} \\ J_{k,n} & 2J_{k,n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{k,m+1}J_{k,n+1} + 2J_{k,m}J_{k,n} & 2J_{k,n}J_{k,n+1} + 2J_{k,n}2J_{k,n-1} \\ J_{k,m}J_{k,n+1} + 2J_{k,m-1}J_{k,n} & 2J_{k,m}J_{k,n} + 2J_{k,m-1}2J_{k,n-1} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} J_{k,m+1}J_{k,n+1} + 2J_{k,m}J_{k,n} & 2(J_{k,n}J_{k,n+1} + 2J_{k,n}J_{k,n-1}) \\ J_{k,n}J_{k,n+1} + 2J_{k,n-1}J_{k,n} & 2(J_{k,m}J_{k,n} + 2J_{k,n-1}J_{k,m-1}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

E por meio das relações matriciais obtemos que $J_{k,m+n+1} = J_{k,m+1}J_{k,n+1} + 2J_{k,m}J_{k,n} \square$

Adotando procedimento similar ao que realizamos anteriormente, vamos estabelecer a representação para matrizes inversas do tipo IF^{-n} . Dessa forma, analisamos alguns casos particulares.

$$\begin{aligned} IF^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{k}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^1}{2^0} J_{k,0} & 2 \cdot \frac{(-1)^2}{2} J_{k,1} \\ \frac{(-1)^2}{2} J_{k,1} & 2 \cdot \frac{(-1)^3}{2^2} J_{k,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{k,0} & 2J_{k,-1} \\ J_{k,-1} & 2J_{k,-2} \end{bmatrix} \\ IF^{-2} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{k}{2} \\ -\frac{k}{4} & \frac{k^2+2}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^2}{2} J_{k,0} & 2 \cdot \frac{(-1)^3}{2^2} J_{k,2} \\ \frac{(-1)^3}{2^2} J_{k,2} & 2 \cdot \frac{(-1)^4}{2^3} J_{k,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{k,-1} & 2J_{k,-2} \\ J_{k,-2} & 2J_{k,-3} \end{bmatrix} \\ IF^{-3} &= \begin{bmatrix} -\frac{k}{4} & \frac{k^2+2}{4} \\ \frac{k^2+2}{8} & -\frac{k^3+4k}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^3}{2^2} J_{k,2} & 2 \cdot \frac{(-1)^4}{2^3} J_{k,3} \\ \frac{(-1)^4}{2^3} J_{k,3} & 2 \cdot \frac{(-1)^5}{2^4} J_{k,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{k,-2} & 2J_{k,-3} \\ J_{k,-3} & 2J_{k,-4} \end{bmatrix} \\ IF^{-4} &= \begin{bmatrix} \frac{k^2+2}{8} & -\frac{k^3+4k}{8} \\ -\frac{k^3+4k}{16} & \frac{k^4+6k^2+4}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^4}{2^3} J_{k,3} & 2 \cdot \frac{(-1)^5}{2^4} J_{k,4} \\ \frac{(-1)^5}{2^4} J_{k,4} & 2 \cdot \frac{(-1)^6}{2^5} J_{k,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{k,-3} & 2J_{k,-4} \\ J_{k,-4} & 2J_{k,-5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Com base nos casos particulares levantados acima, temos o seguinte teorema:

Teorema 19: Para um dado inteiro ‘n’ não negativo, vale que:

$$IF^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} J_{k,n-1} & 2 \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} J_{k,n} \\ \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} J_{k,n} & 2 \cdot \frac{(-1)^{n+2}}{2^{n+1}} J_{k,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{k,-(n-1)} & 2J_{k,-n} \\ J_{k,-n} & 2J_{k,-(n+1)} \end{bmatrix}$$

Demonstração: Tomando a hipótese de indução $IF^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} J_{k,n-1} & 2 \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} J_{k,n} \\ \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} J_{k,n} & 2 \cdot \frac{(-1)^{n+2}}{2^{n+1}} J_{k,n+1} \end{bmatrix}$

Desse modo temos que:

$$\begin{aligned}
 IF^{-n} \cdot IF^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} J_{k,n-1} & 2 \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} J_{k,n} \\ \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} J_{k,n} & k \frac{(-1)^{n+2}}{k^{n+1}} J_{k,n+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{k}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} J_{k,n} & \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} J_{k,n-1} + k \frac{(-1)^{n+2}}{2^n} J_{k,n} \\ \frac{(-1)^{n+2}}{2^{n+1}} J_{k,n+1} & \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} J_{k,n} + k \frac{(-1)^{n+3}}{2^{n+1}} J_{k,n+1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} J_{k,n} & \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} J_{k,n-1} + k \frac{(-1)^{n+2}}{2^n} J_{k,n} \\ \frac{(-1)^{n+2}}{2^{n+1}} J_{k,n+1} & \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} J_{k,n} + k \frac{(-1)^{n+3}}{2^{n+1}} J_{k,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} J_{k,n} & \frac{(-1)^{n+2}}{2^n} \cdot [2 \cdot J_{k,n-1} + k J_{k,n}] \\ \frac{(-1)^{n+2}}{2^{n+1}} J_{k,n+1} & \frac{(-1)^{n+3}}{2^{n+1}} \cdot [2 \cdot J_{k,n} + k J_{k,n+1}] \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} J_{k,n} & \frac{(-1)^{n+2}}{2^n} J_{k,n+1} \\ \frac{(-1)^{n+2}}{2^{n+1}} J_{k,n+1} & \frac{(-1)^{n+3}}{2^{n+1}} J_{k,n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} J_{k,n} & 2 \cdot \frac{(-1)^{n+2}}{2^{n+1}} J_{k,n+1} \\ \frac{(-1)^{n+2}}{2^{n+1}} J_{k,n+1} & 2 \cdot \frac{(-1)^{n+2}}{2^{n+2}} J_{k,n+2} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} J_{k,-n} & 2 \cdot J_{k,-(n+1)} \\ J_{k,-(n+1)} & 2 \cdot J_{k,-(n+2)} \end{bmatrix} \square
 \end{aligned}$$

3.7 Sequência dos Polinômios de Jacobsthal – SPJ

Nessa seção, nos propomos a discutir o estudo de propriedades relativas à Sequência dos $h(x)$ polinômios de Jacobsthal (SPJ). Assim, observamos um interesse sistemático, por parte de vários matemáticos especialistas, no sentido de obter generalizações de propriedades e elementos invariantes distinguidos da sequência de Jacobsthal. (ALVES, 2018b). Nesse sentido, a seguinte definição aponta uma forma de generalização da sequência de Jacobsthal.

Definição 7: Os polinômios da forma $\{J_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, definidos pela seguinte relação de recorrência $J_n(x) = J_{n-1}(x) + 2x \cdot J_{n-2}(x), n \geq 2$ com as condições iniciais $J_0(x) = 0$ e $J_1(x) = 1$ são chamados de polinômios de Jacobsthal (HORADAM, 1997).

Na figura 5, apresentamos os primeiros elementos presentes na sequência dos polinômios de Jacobsthal.

Figura 6 - listagem dos primeiros termos da SPJ

$J_0(x) = 0$	$J_6(x) = 1 + 8x + 12x^2$
$J_1(x) = 1$	$J_7(x) = 1 + 10x + 24x^2 + 8x^3$
$J_2(x) = 1$	$J_8(x) = 1 + 12x + 40x^2 + 32x^3$
$J_3(x) = 1 + 2x$	$J_9(x) = 1 + 14x + 60x^2 + 80x^3 + 16x^4$
$J_4(x) = 1 + 4x$	$J_{10}(x) = 1 + 16x + 84x^2 + 160x^3 + 80x^4$
$J_5(x) = 1 + 6x + 4x^2$	

Fonte: Horadam (1997)

A lei de recorrência fornecida anteriormente, nos informa a equação característica para a sequência dos polinômios de Jacobsthal tal qual $\lambda^2 - \lambda - 2x = 0$ que possui raízes:

$\alpha(x) = \frac{1 + \sqrt{8x+1}}{2}$; $\beta(x) = \frac{1 - \sqrt{8x+1}}{2}$. Além disso, algumas relações podem ser facilmente estabelecidas, como por exemplo:

$$\begin{aligned}\alpha(x) + \beta(x) &= 1 \\ \alpha(x) \cdot \beta(x) &= -2x \\ \alpha(x) - \beta(x) &= \sqrt{8x+1}\end{aligned}$$

Cabe observar, que quando tomamos $x = 1$ na equação característica acima, obtemos a equação característica referente à clássica sequência de Jacobsthal. Agora, vamos adotar alguns procedimentos realizados anteriormente para a sequência dos polinômios de Jacobsthal. Desse modo, temos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} J(x)_2 = J(x)_1 + 2x \cdot J(x)_0 \\ J(x)_3 = J(x)_2 + 2x \cdot J(x)_1 \\ J(x)_4 = J(x)_3 + 2x \cdot J(x)_2 \\ J(x)_5 = J(x)_4 + 2x \cdot J(x)_3 \\ \vdots \\ J(x)_{n+1} = J(x)_n + 2x \cdot J(x)_{n-1} \\ J(x)_{n+2} = J(x)_{n+1} + 2x \cdot J(x)_n \end{array} \right. \quad \therefore \quad \left\{ \begin{array}{l} J(x)_2 - J(x)_1 = 2x \cdot J(x)_0 \\ J(x)_3 - J(x)_2 = 2x \cdot J(x)_1 \\ J(x)_4 - J(x)_3 = 2x \cdot J(x)_2 \\ J(x)_5 - J(x)_4 = 2x \cdot J(x)_3 \\ \vdots \\ J(x)_{n+1} - J(x)_n = 2x \cdot J(x)_{n-1} \\ J(x)_{n+2} - J(x)_{n+1} = 2x \cdot J(x)_n \end{array} \right.$$

E com algumas eliminações de termos correspondentes, obtemos que

$$J(x)_{n+2} - J(x)_1 = 2 \sum_{i=0}^n J(x)_i \quad \text{ou} \quad \sum_{i=0}^n J(x)_i = \frac{1}{2} (J(x)_{n+2} - J(x)_1).$$

$$\text{Analogamente, podemos determinar que } \begin{cases} J(x)_0 - J(x)_{-1} = 2x \cdot J(x)_{-2} \\ J(x)_{-1} - J(x)_{-2} = 2x \cdot J(x)_{-3} \\ J(x)_{-2} - J(x)_{-3} = 2x \cdot J(x)_{-4} \\ J(x)_{-3} - J(x)_{-4} = 2x \cdot J(x)_{-5} \\ \vdots \\ J(x)_{-n} - J(x)_{-n-1} = 2x \cdot J(x)_{-n-2} \\ J(x)_{-n-1} - J(x)_{-n-2} = 2x \cdot J(x)_{-n-3} \end{cases}$$

O que nos leva a obter que $J(x)_0 - J(x)_{-n-2} = 2x \sum_{i=2}^{n+3} J(x)_{-i}$.

Não obstante, Catarino e Morgado (2016) apresentaram uma espécie de generalização para os polinômios de Jacobsthal. Tal representação foi nominada como $h(x)$ – Sequência polinomial de Jacobsthal.

3.7.1 $h(x)$ – Sequência polinomial generalizada de Jacobsthal

Para introduzir tal sequência, recorremos a definição proposta por Catarino e Morgado (2016).

Definição 8: A sequência dos polinômios de Jacobsthal pode ser definida segundo a regra de recorrência $J_{h,n+1}(x) = J_{h,n}(x) + h(x) \cdot J_{h,n-1}(x)$, $n > 0$, com as condições iniciais $J_{h,0}(x) = 0$, $J_{h,1} = 1$ em que $h(x)$ é um polinômio com coeficientes reais que determina a $h(x)$ -sequência polinomial generalizada de Jacobsthal – $h(x)$ – SPGJ.

Note que no caso em que $h(x) = 2x$, recaímos na sequência proposta por Horadam (1997). Por outro lado, a definição anterior nos permite motivar alguns casos particulares, tais quais: $J_{h,2}(x) = 1$; $J_{h,3}(x) = 1 + h(x)$; $J_{h,4}(x) = 1 + 2 \cdot h(x)$; $J_{h,5}(x) = h(x)^2 + 3 \cdot h(x) + 1$

Com base na recorrência estabelecida anteriormente, podemos associar uma equação característica tal qual $\lambda^2 - \lambda - h(x) = 0$ cujas raízes são $\alpha(x) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4h(x)}}{2}$ e

$\beta(x) = \frac{1 - \sqrt{1 + 4h(x)}}{2}$. Ainda podemos estabelecer algumas relações entre esses valores,

como por exemplo:

$$\alpha(x) + \beta(x) = 1; \alpha(x) \cdot \beta(x) = -h(x); \alpha(x) - \beta(x) = \sqrt{1 + 4h(x)}$$

Destarte, podemos escrever uma generalização da fórmula de Binet para essa sequência, qual seja $J_{h,n}(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}, n \geq 0$.

De modo similar ao que realizamos em etapas anteriores, vamos estabelecer algumas identidades matemáticas para a $h(x)$ - Sequência dos Polinômios de Jacobsthal. Iniciaremos pela generalização da identidade de Catalan, que é proposta por Catarino e Morgado (2016). Diante disso, apresentamos o teorema.

Teorema 20: Considerando n e r , números inteiros não negativos, tais que $r \leq n$, temos:

$$J_{h,n-r}(x)J_{h,n+r}(x) - J_{h,n}^2(x) = (-1)^{n+1-r} \cdot (h(x))^{n-r} \cdot J_{h,r}^2(x)$$

Demonstração: Pela generalização da fórmula de Binet, temos

$$\begin{aligned} J_{h,n-r}(x)J_{h,n+r}(x) - J_{h,n}^2(x) &= \left(\frac{\alpha^{n-r}(x) - \beta^{n-r}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \cdot \frac{\alpha^{n+r}(x) - \beta^{n+r}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right) - \left(\frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right)^2 = \\ &= \frac{\alpha^{2n}(x) - \alpha^{n-r}(x)\beta^{n+r}(x) - \alpha^{n+r}(x)\beta^{n-r}(x) + \beta^{2n}(x)}{(\alpha(x) - \beta(x))^2} - \frac{\alpha^{2n}(x) - 2\alpha^n(x)\beta^n(x) + \beta^{2n}(x)}{(\alpha(x) - \beta(x))^2} = \\ &= \frac{\alpha^{2n}(x) - \alpha^{n-r}(x)\beta^{n+r}(x) - \alpha^{n+r}(x)\beta^{n-r}(x) + \beta^{2n}(x) - \alpha^{2n}(x) + 2\alpha^n(x)\beta^n(x) - \beta^{2n}(x)}{(\alpha(x) - \beta(x))^2} = \\ &= \frac{2(\alpha(x)\beta(x))^n - \alpha^{n-r}(x)\beta^{n+r}(x) - \alpha^{n+r}(x)\beta^{n-r}(x)}{(\alpha(x) - \beta(x))^2} = \\ &= \frac{2(-h(x))^n - \alpha^{n-r}(x)\beta^{n+r}(x) - \alpha^{n+r}(x)\beta^{n-r}(x)}{(\alpha(x) - \beta(x))^2} = \\ &= \frac{2(-h(x))^n - (-h(x))^n \alpha^{-r}(x)\beta^r(x) - (-h(x))^n \alpha^r(x)\beta^{-r}(x)}{(\alpha(x) - \beta(x))^2} = \\ &= (-h(x))^n \cdot \frac{2 - \alpha^{-r}(x)\beta^r(x) - \alpha^r(x)\beta^{-r}(x)}{(\alpha(x) - \beta(x))^2} = \\ &= (-1)^n \cdot (h(x))^n \cdot \frac{2\alpha^r(x)\beta^r(x) - \beta^r(x)\beta^r(x) - \alpha^r(x)\alpha^r(x)}{(\alpha(x)\beta(x))^r (\alpha(x) - \beta(x))^2} = (-1)^{n+1} \cdot (h(x))^n \frac{(\alpha^r(x) - \beta^r(x))^2}{(-h(x))^r (\alpha(x) - \beta(x))^2} = \\ &= (-1)^{n+1} \cdot (h(x))^n \frac{(\alpha^r(x) - \beta^r(x))^2}{(-1)^r \cdot (h(x))^r (\alpha(x) - \beta(x))^2} = (-1)^{n+1-r} \cdot (h(x))^{n-r} \cdot \left(\frac{\alpha^{2r}(x) - 2\alpha^r(x)\beta^r(x) + \beta^{2r}(x)}{(\alpha(x) - \beta(x))^2} \right) = \\ &= (-1)^{n+1-r} \cdot (h(x))^{n-r} \cdot \left(\frac{\alpha^r(x) - \beta^r(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right)^2 = (-1)^{n+1-r} (h(x))^{n-r} \cdot J_{h,r}^2(x) \quad \square \end{aligned}$$

Outra propriedade que podemos destacar é a identidade de d'Ocagne, ainda conforme Catarino e Morgado (2016) apresentamos o teorema abaixo.

Teorema 21: Suponha que n seja um número inteiro não-negativo e m qualquer número natural. Se $m > n$ então:

$$J_{h,m}(x)J_{h,n+1}(x) - J_{h,m+1}(x)J_{h,n}(x) = (-1)^n (h(x))^n J_{h,m-n}(x)$$

Demonstração: Segundo a fórmula de Binet, podemos escrever que

$$\begin{aligned} & J_{h,m}(x)J_{h,n+1}(x) - J_{h,m+1}(x)J_{h,n}(x) = \\ & = \left(\frac{\alpha^m(x) - \beta^m(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \cdot \frac{\alpha^{n+1}(x) - \beta^{n+1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right) - \left(\frac{\alpha^{m+1}(x) - \beta^{m+1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \cdot \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right) = \\ & = \frac{\alpha^{m+n+1}(x) - \alpha^m(x)\beta^{n+1}(x) - \beta^m(x)\alpha^{n+1}(x) + \beta^{m+n+1}(x)}{(\alpha(x) - \beta(x))^2} - \\ & \frac{\alpha^{m+n+1}(x) - \alpha^{m+1}(x)\beta^n(x) - \beta^{m+1}(x)\alpha^n(x) + \beta^{m+n+1}(x)}{(\alpha(x) - \beta(x))^2} = \\ & = \frac{\alpha^{m+1}(x)\beta^n(x) + \beta^{m+1}(x)\alpha^n(x) - \alpha^m(x)\beta(x)^{n+1} - \beta^m(x)\alpha^{n+1}(x)}{(\alpha(x) - \beta(x))^2} = \\ & = \frac{(\alpha(x) \cdot \beta(x))^n (\alpha^{m-n}(x)\alpha(x) + \beta^{m-n}(x)\beta(x) - \alpha^{m-n}(x)\beta(x) - \alpha(x)\beta^{m-n}(x))}{(\alpha(x) - \beta(x))^2} = \\ & = (-h(x))^n \cdot \frac{[\alpha^{m-n}(x)] \cdot [\alpha(x) - \beta(x)] - [\beta^{m-n}(x)] \cdot [\alpha(x) - \beta(x)]}{(\alpha(x) - \beta(x))^2} = \\ & = (-h(x))^n \cdot \frac{[\alpha(x) - \beta(x)] [\alpha^{m-n}(x) - \beta^{m-n}(x)]}{(\alpha(x) - \beta(x))^2} = \\ & = (-1)^n (h(x))^n \cdot \frac{\alpha^{m-n}(x) - \beta^{m-n}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} = (-1)^n (h(x))^n \cdot J_{h,m-n}(x) \quad \square \end{aligned}$$

3.7.2 Representações matriciais para $h(x)$ - Sequência polinomial de Jacobsthal

Passamos agora, a examinar algumas propriedades matriciais que são exploradas pelos autores. Diante disso, Catarino e Morgado (2016) propõem a seguinte matriz

$$B(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ h(x) & 1 \end{bmatrix}. \text{ Com origem na mesma podemos identificar alguns casos especiais:}$$

$$\begin{aligned} B^2(x) &= \begin{bmatrix} h(x) \cdot 1 & 1 \\ h(x) \cdot 1 & 1 + h(x) \end{bmatrix}; B^3(x) = \begin{bmatrix} h(x) \cdot 1 & h(x) + 1 \\ h(x) \cdot (1 + h(x)) & 1 + 2h(x) \end{bmatrix}; \\ B^4(x) &= \begin{bmatrix} h(x) \cdot (h(x) + 1) & 1 + 2h(x) \\ h(x) \cdot (2h(x) + 1) & h^2(x) + 3h(x) + 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tomando como apoio os casos anteriores, podemos enunciar o seguinte teorema

Teorema 22: Para $n \geq 1$ temos $B^n = \begin{bmatrix} h(x)J_{h,n-1}(x) & J_{h,n}(x) \\ h(x)J_{h,n}(x) & J_{h,n+1}(x) \end{bmatrix}$.

Demonstração: Utilizaremos o método da indução matemática para realizar a prova. Assim, para $n = 1$, $B^1(x) = \begin{bmatrix} h(x)J_{h,0}(x) & J_{h,1}(x) \\ h(x)J_{h,1}(x) & J_{h,2}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ h(x) & 1 \end{bmatrix}$ que verifica o teorema acima. Agora supomos a validade para n e vamos mostrar que também terá validade para $n+1$. Desse modo:

$$\begin{aligned} B^{n+1}(x) &= B(x)B^n(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ h(x) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h(x)J_{h,n-1}(x) & J_{h,n}(x) \\ h(x)J_{h,n}(x) & J_{h,n+1}(x) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} h(x)J_{h,n}(x) & J_{h,n+1}(x) \\ h^2(x)J_{h,n-1}(x) + h(x)J_{h,n}(x) & h(x)J_{h,n}(x) + J_{h,n+1}(x) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} h(x)J_{h,n}(x) & J_{h,n+1}(x) \\ h(x)(h(x)J_{h,n-1}(x) + J_{h,n}(x)) & h(x)J_{h,n}(x) + J_{h,n+1}(x) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} h(x)J_{h,n}(x) & J_{h,n+1}(x) \\ h(x)J_{h,n+1}(x) & J_{h,n+2}(x) \end{bmatrix} \quad \square \end{aligned}$$

De modo análogo ao que realizamos em seções anteriores, podemos estabelecer a identidade de Cassini por meio do determinante da matriz $B^n(x)$. Dessa forma, apresentamos o seguinte teorema.

Teorema 23: Para $n \in \mathbb{N}$, temos que $J_{h,n-1}(x)J_{h,n+1}(x) - J_{h,n}^2(x) = (-1)^n (h(x))^{n-1}$.

Demonstração: Sabendo que o determinante da matriz $B(x)$ é igual à $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ h(x) & 1 \end{vmatrix} = -h(x)$. Por

outro lado, temos que $\begin{vmatrix} h(x)J_{h,n-1}(x) & J_{h,n}(x) \\ h(x)J_{h,n}(x) & J_{h,n+1}(x) \end{vmatrix} = h(x)J_{h,n-1}(x) \cdot J_{h,n+1}(x) - h(x)J_{h,n}^2(x)$.

Além disso, podemos observar que $|B(x)|^n = |B^n(x)|$ o que nos leva a obter que:

$$\begin{aligned} h(x)J_{h,n-1}(x) \cdot J_{h,n+1}(x) - h(x)J_{h,n}^2(x) &= (-h(x))^n \\ h(x)[J_{h,n-1}(x) \cdot J_{h,n+1}(x) - J_{h,n}^2(x)] &= (-1)^n \cdot (h(x))^n \\ J_{h,n-1}(x) \cdot J_{h,n+1}(x) - J_{h,n}^2(x) &= (-1)^n \cdot (h(x))^{n-1} \quad \square \end{aligned}$$

Nas seções anteriores, apresentamos, um conjunto de teoremas e definições matemáticas que mostram um processo matemático e epistemológico evolutivo, relativo à

sequência clássica originalmente introduzida por Enerst Jacobsthal. Com o objetivo de proporcionar informações simplificadas, o quadro abaixo apresenta a descrição dos principais modelos de generalização da Sequência de Jacobsthal.

Quadro 2 – Descrição das definições decorrentes da Sequência de Jacobsthal

DEFINIÇÃO MATEMÁTICA	DESCRIÇÃO
$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, n \geq 2$ $J_0 = 0, J_1 = 1$	Sequência recursiva clássica (HORADAM, 1996)
$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$	Fórmula de Binet para sequência de Jacobsthal (HORADAM, 1996).
$J_{-n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \cdot J_n$	Modelo de extensão aos inteiros (GNANAM E ANITTA, 2016)
$J_n^s = \frac{s^n - (-1)^n}{s+1}, n \geq 0, s \geq 2$	Termo geral para a s- sequência de Jacobsthal (ANATASSOV, 2011)
$J_n^{s,t} = \frac{s^n - (-t)^n}{s+t}, n \geq 0, t, s \geq 2, s \neq -t$	Termo geral para a s,t - sequência de Jacobsthal (ANATASSOV, 2011)
$J_k = J_{k,n-1} + k \cdot J_{k,n-2}, n \geq 2$ $J_{k,0} = 0, J_{k,1} = 1$	Sequência recursiva para os k-números de Jacobsthal (FALCON,2014)
$J_{k,n} = k \cdot J_{k,n-1} + 2 \cdot J_{k,n-2}, n \geq 2$ $J_{k,0} = 0, J_{k,1} = 1$	k- sequência de Jacobsthal (JHALA, RATHORE E SISODIYA, 2014)
$J(x)_n = J(x)_{n-1} + 2x \cdot J(x)_{n-2}, n \geq 2$ $J(x)_0 = 0, J(x)_1 = 1$	Sequência dos Polinômios de Jacobsthal (HORADAM, 1997)
$J_{h,n+1}(x) = J_{h,n}(x) + h(x) \cdot J_{h,n-1}(x), n > 0$ $J_{h,0}(x) = 0, J_{h,1}(x) = 1$	h(x) – Sequência polinomial de Jacobsthal (CATARINO E MORGADO, 2016)

Fonte: elaborada pela autora.

3.8 Quatérnios de Jacobsthal

Um quatérnio é definido da seguinte forma: $q = q_0 1 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3$ que é dividido em duas partes nas quais a parte escalar (q_0, q_1, q_2, q_3) e uma parte vetorial $(1, e_1, e_2, e_3)$.

Segundo Liana e Wloch (2015) pode-se considerar a equação escrita na forma: $q = q_0 1 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ em que i, j, k são unidades imaginárias. O quatérnio é o conjunto gerado pela base canônica $1 = (1, 0, 0, 0)$, $i = (0, 1, 0, 0)$, $j = (0, 0, 1, 0)$ e $k = (0, 0, 0, 1)$. Em que são definidas as seguintes operações de multiplicação:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1; \quad ij = k = -ji; \quad jk = i = -kj; \quad ki = j = -ik$$

Um Quatérnio de Jacobsthal é dado pela equação $JQ_n = J_n + iJ_{n+1} + jJ_{n+2} + kJ_{n+3}$. Onde a parte escalar é composta por $(J_n, J_{n+1}, J_{n+2}, J_{n+3})$ com os números reais de Jacobsthal e a parte vetorial possui a base $(1, i, j, k)$.

Lema3: $J_{n+1} + J_n = 2^n$

Demonstração:

$$J_{n+1} + J_n = \frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1} + 2^n - (-1)^n}{3} = \frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1} + 2^n - (-1)^n}{3} = \frac{2^n \cdot 2 + 2^n}{3} = \frac{3 \cdot 2^n}{3} = 2^n$$

Teorema 24: Seja $n \geq 1$ números inteiros. Então

$$JQ_{n+1} + JQ_n = 2^n(1 + 2i + 4j + 8k)$$

Demonstração:

Pela definição de Quaternions de Jacobsthal, temos que:

$$\begin{aligned} JQ_{n+1} + JQ_n &= J_{n+1} + iJ_{n+2} + jJ_{n+3} + kJ_{n+4} + J_n + iJ_{n+1} + jJ_{n+2} + kJ_{n+3} \\ &= (J_n + J_{n+1}) + i(J_{n+1} + J_{n+2}) + j(J_{n+2} + J_{n+3}) + k(J_{n+3} + J_{n+4}) \end{aligned}$$

Com base no lema 1, obtemos que:

$$\begin{aligned} JQ_{n+1} + JQ_n &= 2^n + i \cdot 2^{n+1} + j \cdot 2^{n+2} + k \cdot 2^{n+3} \\ &= 2^n + i \cdot 2^n \cdot 2 + j \cdot 2^n \cdot 2^2 + k \cdot 2^n \cdot 2^3 \\ &= 2^n + 2i \cdot 2^n + 4j \cdot 2^n + 8k \cdot 2^n \\ &= 2^n(1 + 2i + 4j + 8k) \square \end{aligned}$$

Lema 4:

$$3(J_{n+1} - J_n) + 4(-1)^{n+1} = 2^n + 2(-1)^{n+1}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 3(J_{n+1} - J_n) + 4(-1)^{n+1} &= 3\left(\frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1} - 2^n + (-1)^n}{3}\right) + 4(-1)^{n+1} = \\
 &= 2^{n+1} - (-1)^{n+1} - 2^n + (-1)^n + 4(-1)^{n+1} = 2^n \cdot 2 - (-1)^{n+1} - 2^n + (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)^n = \\
 &= 2^n - (-1)^{n+1} + (-1)(-1)^{n+1} + 4(-1)^{n+1} = 2^n + 2(-1)^{n+1} \square
 \end{aligned}$$

Teorema 25: Seja n um número inteiro, $n \geq 1$. Temos

$$JQ_{n+1} - JQ_n = \frac{1}{3} \left[2^n(1 + 2i + 4j + 8k) + 2(-1)^n(1 - i + j - k) \right]$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 JQ_{n+1} - JQ_n &= J_{n+1} + iJ_{n+2} + jJ_{n+3} + kJ_{n+4} - J_n - iJ_{n+1} - jJ_{n+2} - kJ_{n+3} \\
 &= (J_{n+1} - J_n) + i(J_{n+2} - J_{n+1}) + j(J_{n+3} - J_{n+2}) + k(J_{n+4} - J_{n+3})
 \end{aligned}$$

Conforme o lema anterior, temos que:

$$\begin{aligned}
 3(J_{n+1} - J_n) + 4(-1)^{n+1} &= 2^n + 2(-1)^{n+1} \\
 3(J_{n+1} - J_n) &= 2^n - 2(-1)^n \\
 J_{n+1} - J_n &= \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cdot (-1)^n \right)
 \end{aligned}$$

Assim, com base na relação acima pode-se estabelecer que:

$$\begin{aligned}
 JQ_{n+1} - JQ_n &= \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cdot (-1)^n \right) + i \frac{1}{3} \left(2^{n+1} + 2 \cdot (-1)^{n+1} \right) + j \frac{1}{3} \left(2^{n+2} + 2 \cdot (-1)^{n+2} \right) + k \frac{1}{3} \left(2^{n+3} + 2 \cdot (-1)^{n+3} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cdot (-1)^n + 2^n \cdot 2i + 2i(-1)^{n+1} + j \cdot 2^n \cdot 2^2 + 2j(-1)^{n+2} + k \cdot 2^n \cdot 2^3 + 2k(-1)^{n+3} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left[2^n(1 + 2i + 4j + 8k) + 2 \cdot (-1)^n(1 - i + j - k) \right] \square
 \end{aligned}$$

Lema 5: Seja $n \geq 1$ e $r \geq 1$, inteiros. Temos que:

$$3(J_{n+r} + J_{n-r}) + 4(-1)^{n-r} = 2^{n-r}(2^{2r} + 1) + 2(-1)^{n-r}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 3(J_{n+r} + J_{n-r}) + 4(-1)^{n-r} &= 3\left(\frac{2^{n+r} - (-1)^{n+r} + 2^{n-r} - (-1)^{n-r}}{3}\right) + 4(-1)^{n-r} \\
 &= 2^n \cdot 2^r - (-1)^n \cdot (-1)^r + 2^n \cdot 2^{-r} - (-1)^n \cdot (-1)^{-r} + 4(-1)^{n-r} \\
 &= 2^n(2^r + 2^{-r}) - (-1)^n \left[(-1)^r + (-1)^{-r} \right] + 4(-1)^{n-r}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2^n \left[2^r + \frac{1}{2^r} \right] - (-1)^n \left[(-1)^r + \frac{1}{(-1)^r} \right] + 4(-1)^{n-r} \\
&= 2^n \left[\frac{2^{2r} + 1}{2^r} \right] - (-1)^n \left[\frac{(-1)^{2r} + 1}{(-1)^r} \right] + 4(-1)^{n-r} \\
&= 2^{n-r} (2^{2r} + 1) - (-1)^{n-r} [(-1)^{2r} + 1] + 4(-1)^{n-r}
\end{aligned}$$

Como $(-1)^{2r}$ é igual à 1 para todo $r \in \mathbb{Z}$ com $r \geq 1$, temos:

$$\begin{aligned}
3(J_{n+r} + J_{n-r}) + 4(-1)^{n-r} &= 2^{n-r} (2^{2r} + 1) + (-1)^{n-r} (-1 - 1) + 4(-1)^{n-r} \\
&= 2^{n-r} (2^{2r} + 1) + (-1)^{n-r} (4 - 2) \\
&= 2^{n-r} (2^{2r} + 1) + 2(-1)^{n-r} \square
\end{aligned}$$

Teorema 26: Se $n \geq 1, r \geq 1$, então

$$JQ_{n+r} + JQ_{n-r} = \frac{1}{3} \left[2^{n-r} (2^{2r} + 1)(1 + 2i + 4j + 8k) - 2(-1)^{n-r} (1 - i + j - k) \right]$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
JQ_{n+r} + JQ_{n-r} &= J_{n+r} + iJ_{n+r+1} + jJ_{n+r+2} + kJ_{n+r+3} + J_{n-r} + iJ_{n-r+1} + jJ_{n-r+2} + kJ_{n-r+3} \\
&= (J_{n+r} + J_{n-r}) + i(J_{n+r+1} + J_{n-r+1}) + j(J_{n+r+2} + J_{n-r+2}) + k(J_{n+r+3} + J_{n-r+3})
\end{aligned}$$

Com efeito, pelo lema anterior, temos que:

$$\begin{aligned}
JQ_{n+r} + JQ_{n-r} &= \frac{1}{3} \left\{ 2^{n-r} (2^{2r} + 1) - 2(-1)^{n-r} + i \left[2^{n-r+1} (2^{2r} + 1) - 2(-1)^{n-r+1} \right] + \right. \\
&\quad \left. + j \left[2^{n-r+2} (2^{2r} + 1) - 2(-1)^{n-r+2} \right] + k \left[2^{n-r+3} (2^{2r} + 1) - 2(-1)^{n-r+3} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{3} \left[2^{n-r} (2^{2r} + 1)(1 + 2i + 4j + 8k) - 2(-1)^{n-r} (1 - i + j - k) \right] \square
\end{aligned}$$

Lema 6: Seja $n \geq 1, r \geq 1$, então temos que $3(J_{n+r} - J_{n-r}) = 2^{n-r} (2^{2r} - 1)$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
3(J_{n+r} - J_{n-r}) &= 3 \left(\frac{2^{n+r} - (-1)^{n+r} - 2^{n-r} + (-1)^{n-r}}{3} \right) \\
&= 2^n 2^r - (-1)^n (-1)^r - 2^n 2^{-r} + (-1)^n (-1)^{-r} = 2^n (2^r - 2^{-r}) - (-1)^n [(-1)^r - (-1)^{-r}] \\
&= 2^n \left[2^r - \frac{1}{2^r} \right] - (-1)^n \left[(-1)^r - \frac{1}{(-1)^r} \right] = 2^n \left[\frac{2^{2r} - 1}{2^r} \right] - (-1)^n \left[\frac{(-1)^{2r} - 1}{(-1)^r} \right] \\
&= 2^{n-r} (2^{2r} - 1) - (-1)^{n-r} [(-1)^{2r} - 1]
\end{aligned}$$

Como $(-1)^{2r}$ é igual a 1 para todo $r \geq 1, r \in \mathbb{Z}$. Temos:

$$3(J_{n+r} - J_{n-r}) = 2^{n-r} (2^r - 1) - (-1)^{n-r} [1 - 1] = 2^{n-r} (2^r - 1) - (-1)^{n-r} \cdot 0 = 2^{n-r} (2^{2r} - 1) \square$$

Teorema 27: Sejam $n \geq 1, r \geq 1$. Temos que $JQ_{n+r} - JQ_{n-r} = \frac{1}{3} \cdot 2^{n-r} (2^{2r} - 1)(1 + 2i + 4j + 8k)$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
JQ_{n+r} - JQ_{n-r} &= J_{n+r} + iJ_{n+r+1} + jJ_{n+r+2} + kJ_{n+r+3} - J_{n-r} - iJ_{n-r+1} - jJ_{n-r+2} - kJ_{n-r+3} \\
&= (J_{n+r} - J_{n-r}) + i(J_{n+r+1} - J_{n-r+1}) + j(J_{n+r+2} - J_{n-r+2}) + k(J_{n+r+3} - J_{n-r+3}) \\
&= \frac{1}{3} [2^{n-r}(2^{2r} - 1) + i(2^{n-r+1}(2^{2r} - 1)) + j(2^{n-r+2}(2^{2r} - 1)) + k(2^{n-r+3}(2^{2r} - 1))] \\
&= \frac{1}{3} (2^{2r} - 1) \cdot 2^{n-r} (1 + 2i + 4j + 8k) \square
\end{aligned}$$

O teorema 27 estabelece uma relação entre um quaternio e sua norma. Assim, a norma de um quaternio é definida da seguinte forma:

$$N(JQ_n) = J_n^2 + J_{n+1}^2 + J_{n+2}^2 + J_{n+3}^2$$

Teorema 28: Sendo $N(JQ_n)$ a norma de JQ_n , então $N(JQ_n) = \frac{1}{9} [85 \cdot 2^{2n} + 10 \cdot 2^{2n}(-1)^n + 4]$

Demonstração:

Usamos a definição da norma de um quaternio e obtemos que $N(JQ_n) = \sum_{s=0}^3 J_{n+s}^2$.

Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
N(JQ_n) &= J_n^2 + J_{n+1}^2 + J_{n+2}^2 + J_{n+3}^2 \\
&= \left(\frac{2^n - (-1)^n}{3} \right)^2 + \left(\frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3} \right)^2 + \left(\frac{2^{n+2} - (-1)^{n+2}}{3} \right)^2 + \left(\frac{2^{n+3} - (-1)^{n+3}}{3} \right)^2 \\
&= \frac{1}{9} \left[2^{2n} - 2 \cdot 2^n \cdot (-1)^n + (-1)^{2n} + 2^{2n+2} - 2 \cdot 2^{n+1} \cdot (-1)^{n+1} + (-1)^{2n+2} \right. \\
&\quad \left. + 2^{2n+4} - 2 \cdot 2^{n+2} \cdot (-1)^{n+2} + (-1)^{2n+4} + 2^{2n+6} - 2 \cdot 2^{n+3} \cdot (-1)^{n+3} + (-1)^{2n+6} \right] \\
&= \frac{1}{9} \left[2^{2n} (1 + 2^2 + 2^4 + 2^6) + 2^n (-1)^n (-2 + 4 - 8 + 16) + (-1)^{2n} + (-1)^{2n+2} + (-1)^{2n+4} + (-1)^{2n+6} \right] \\
&= \frac{1}{9} [85 \cdot 2^{2n} + 10 \cdot 2^n (-1)^n + 4] \square
\end{aligned}$$

Não obstante, Szynal-Liana e Iwona Wloch (2015) apresentam uma representação matricial que inclui os quaternios de Jacobsthal. A seguir, apresentamos um teorema que expõe a matriz proposta pelos autores.

Teorema 29: Seja $n \geq 1$ um número inteiro, vale que:

$$\begin{bmatrix} JQ_n & JQ_{n-1} \\ JQ_{n+1} & JQ_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} JQ_1 & JQ_0 \\ JQ_2 & JQ_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{n-1}$$

Demonstração: Como método de prova, utilizaremos o Princípio de Indução Matemática.

Dessa forma, para $n = 1$ o resultado é evidente. Assim, vamos supor a validade para $n = k$ e mostrar a veracidade da hipótese para $n = k + 1$. Desse modo, temos:

$$\begin{bmatrix} JQ_k & JQ_{k-1} \\ JQ_{k+1} & JQ_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} JQ_1 & JQ_0 \\ JQ_2 & JQ_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{k-1}$$

Nesse sentido, devemos provar que:

$$\begin{bmatrix} JQ_{k+1} & JQ_k \\ JQ_{k+2} & JQ_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} JQ_1 & JQ_0 \\ JQ_2 & JQ_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^k$$

Utilizando nossa hipótese de indução, temos:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} JQ_1 & JQ_0 \\ JQ_2 & JQ_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{k-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} JQ_k & JQ_{k-1} \\ JQ_{k+1} & JQ_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} JQ_k + 2 \cdot JQ_{k-1} & JQ_k \\ JQ_{k+1} + 2 \cdot JQ_k & JQ_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} JQ_{k+1} & JQ_k \\ JQ_{k+2} & JQ_{k+1} \end{bmatrix} \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 30: Seja $n \geq 1$ um número inteiro, temos:

$$JQ_n^2 - JQ_{n+1} \cdot JQ_{n-1} = (JQ_1^2 - JQ_2 \cdot JQ_0) \cdot (-2)^{n-1}$$

Demonstração: Vale observar que:

$$\begin{vmatrix} JQ_n & JQ_{n-1} \\ JQ_{n+1} & JQ_n \end{vmatrix} = JQ_n^2 - JQ_{n-1} \cdot JQ_{n+1}$$

Por outro lado temos que:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} JQ_1 & JQ_0 \\ JQ_2 & JQ_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}^{n-1} = (JQ_1^2 - JQ_0 \cdot JQ_2) \cdot (1 \cdot 0 - 2 \cdot 1)^{n-1} \\ & = (JQ_1^2 - JQ_0 \cdot JQ_2) \cdot (-2)^{n-1} \end{aligned}$$

Por fim, apoiados no teorema 27, podemos concluir que:

$$JQ_n^2 - JQ_{n+1} \cdot JQ_{n-1} = (JQ_1^2 - JQ_2 \cdot JQ_0) \cdot (-2)^{n-1} \quad \square$$

Ainda no que concerne aos quatérnios de Jacobsthal, vamos explorar algumas propriedades relativas ao seu conjugado que foram propostas por Aydin e Yuce (2017). Nesse sentido, apresentamos a seguinte definição:

Definição 9: O conjugado do quatérnio de Jacobsthal JQ_n é denotado por $\overline{JQ_n}$ e é dado por:

$$\overline{JQ_n} = J_n - i \cdot J_{n+1} - j \cdot J_{n+2} - k \cdot J_{n+3}$$

Além disso, o seguinte teorema fornece algumas propriedades relativas a esse assunto

Teorema 31: Para $n \geq 1$ temos as seguintes relações

- (i) $JQ_n + \overline{JQ_n} = 2J_n$
- (ii) $JQ_n^2 = 2J_n JQ_n - JQ_n \cdot \overline{JQ_n}$
- (iii) $JQ_{n+1} + 2JQ_n = JQ_{n+2}$
- (iv) $JQ_n - iJQ_{n+1} - jJQ_{n+2} - kJQ_{n+3} = J_n + J_{n+2} + J_{n+4} + J_{n+6}$

Demonstração:

(i) Podemos observar que:

$$\begin{aligned} JQ_n - \overline{JQ_n} &= J_n + iJ_{n+1} + jJ_{n+2} + kJ_{n+3} + J_n - iJ_{n+1} - jJ_{n+2} - kJ_{n+3} \\ &= 2J_n \quad \square \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} JQ_n^2 &= (J_n + iJ_{n+1} + jJ_{n+2} + kJ_{n+3}) \cdot (J_n + iJ_{n+1} + jJ_{n+2} + kJ_{n+3}) \\ &= J_n^2 + iJ_n J_{n+1} + jJ_n J_{n+2} + kJ_n J_{n+3} + iJ_{n+1} J_n - J_{n+1}^2 + kJ_{n+1} J_{n+2} - jJ_{n+1} J_{n+3} + \\ &\quad + jJ_n J_{n+2} - kJ_{n+2} J_{n+1} - J_{n+2}^2 + iJ_{n+2} J_{n+3} + kJ_{n+3} J_n + jJ_{n+3} J_{n+1} - iJ_{n+3} J_{n+2} - J_{n+3}^2 \\ &= J_n^2 - J_{n+1}^2 - J_{n+2}^2 - J_{n+3}^2 + 2J_n (iJ_{n+1} + jJ_{n+2} + kJ_{n+3}) \\ &= 2J_n (J_n + iJ_{n+1} + jJ_{n+2} + kJ_{n+3}) - (J_n^2 - J_{n+1}^2 - J_{n+2}^2 - J_{n+3}^2) \\ &= 2J_n \cdot JQ_n - JQ_n \overline{JQ_n} \quad \square \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} JQ_{n+1} + 2JQ_n &= (J_{n+1} + iJ_{n+2} + jJ_{n+3} + kJ_{n+4}) + 2(J_n + iJ_{n+1} + jJ_{n+2} + kJ_{n+3}) \\ &= (J_{n+1} + 2J_n) + i(J_{n+2} + 2J_{n+1}) + j(J_{n+3} + 2J_{n+2}) + k(J_{n+4} + 2J_{n+3}) \\ &= J_{n+2} + iJ_{n+3} + jJ_{n+4} + kJ_{n+5} \\ &= JQ_{n+2} \quad \square \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} JQ_n - iJQ_{n+1} - jJQ_{n+2} - kJQ_{n+3} &= (J_n + iJ_{n+1} + jJ_{n+2} + kJ_{n+3}) \\ &\quad - i(J_{n+1} + iJ_{n+2} + jJ_{n+3} + kJ_{n+4}) \\ &\quad - j(J_{n+2} + iJ_{n+3} + jJ_{n+4} + kJ_{n+5}) \\ &\quad - k(J_{n+3} + iJ_{n+4} + jJ_{n+5} + kJ_{n+6}) \\ &= J_n + J_{n+2} + J_{n+4} + J_{n+6} \quad \square \end{aligned}$$

3.9 Octônios de Jacobsthal

Conforme Santos (2016), os octônios representam uma extensão não-associativa dos quaternions. Assim, constituem uma álgebra de dimensão oito, sobre $\mathbb{R}$ com a seguinte base:

$$\{e_0=1, e_1=i, e_2=j, e_3=k, e_4=e, e_5=ie, e_6=je, e_7=ke\}$$

Segundo Çimen & Ipek (2017), o produto octoniônico é representado conforme a figura abaixo:

Figura 7 - Produto octoniônico

$\times$	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1

Fonte: Çimen & Ipek (2017)

Nesse sentido, Çimen & Ipek (2017) apresentam a seguinte definição para os octônios de Jacobsthal.

Definição 10: Definimos os números octônios de Jacobsthal pela seguinte relação de recorrência

$$\begin{aligned} \hat{J}_n = \sum_{s=0}^7 J_{n+s} e_s = & J_n e_0 + J_{n+1} e_1 + J_{n+2} e_2 + J_{n+3} e_3 + \\ & + J_{n+4} e_4 + J_{n+5} e_5 + J_{n+6} e_6 + J_{n+7} e_7 \end{aligned}$$

Definição 11: O conjugado do octônio de Jacobsthal $\hat{J}_n$ é denotado por $\overline{\hat{J}_n}$ e é dado por:

$$\overline{\hat{J}_n} = J_n e_0 - J_{n+1} e_1 - J_{n+2} e_2 - J_{n+3} e_3 - J_{n+4} e_4 - J_{n+5} e_5 - J_{n+6} e_6 - J_{n+7} e_7$$

Definição 12: A norma $N(\hat{J}_n)$ é definida por:

$$N(\hat{J}_n) = \hat{J}_n \cdot \overline{\hat{J}_n} = J_n^2 + J_{n+1}^2 + J_{n+2}^2 + J_{n+3}^2 + J_{n+4}^2 + J_{n+5}^2 + J_{n+6}^2 + J_{n+7}^2$$

Em contrapartida, com algumas operações elementares, podemos estabelecer a seguinte relação de recorrência para os octônios e assim temos:

$$\begin{aligned} \hat{J}_n + 2\hat{J}_{n-1} &= \sum_{s=0}^7 J_{n+s} e_s + 2 \sum_{s=0}^7 J_{n-1+s} e_s \\ &= \sum_{s=0}^7 (J_{n+s} + 2J_{n-1+s}) e_s \\ &= \sum_{s=0}^7 J_{n+1+s} e_s \\ &= \hat{J}_{n+1} \end{aligned}$$

Considerando a sequência clássica de Jacobsthal, temos que a equação característica é dada por $x^2 - x - 2 = 0$, cujas raízes são dadas por $\alpha = 2$ e $\beta = -1$. Çimen & Ipek (2017), escrevem $\alpha^* = \sum_{s=0}^7 2^s e_s$ e $\beta^* = \sum_{s=0}^7 (-1)^s e_s$ e, ainda:

$$\begin{aligned} \hat{J}_n &= \sum_{s=0}^7 J_{n+s} e_s \\ &= \sum_{s=0}^7 \frac{1}{3} (2^{n+s} - (-1)^{n+s}) e_s \\ &= \frac{1}{3} (\alpha^* \cdot \alpha^n - \beta^* \beta^n) \end{aligned}$$

A expressão acima caracteriza a fórmula de Binet para os octônios de Jacobsthal. Nessa perspectiva, o teorema abaixo apresentado por expõe algumas propriedades que envolvem a relação de recorrência para os octônios de Jacobsthal, bem como a sua norma.

Teorema 31: Para $n \geq 1$, $r \geq 1$, temos as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} (i): \hat{J}_{n+1} + \hat{J}_n &= \alpha^* \alpha^n \\ (ii): \hat{J}_{n+1} - \hat{J}_n &= \frac{1}{3} (\alpha^* \alpha^n + \alpha \beta^* \beta^n) \\ (iii): \hat{J}_{n+r} + \hat{J}_{n-r} &= \frac{1}{3} (\alpha^* \alpha^{n-r} (\alpha^{2r} + 1) + \beta^* \alpha \beta^{n-r+1}) \\ (iv): \hat{J}_{n+r} - \hat{J}_{n-r} &= \frac{1}{3} [\alpha^* (\alpha^{n+r} - \alpha^{n-r})] \end{aligned}$$

$$(v): N(\hat{J}_n) = \frac{1}{9} [21845 \cdot 2^{2n} + 170 \cdot 2^n \beta^n + 8]$$

Demonstração:

(i): Considerando a definição 10, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \hat{J}_{n+1} + \hat{J}_n &= (J_{n+1} + J_n)e_0 + (J_{n+2} + J_{n+1})e_1 + (J_{n+3} + J_{n+2})e_2 + \\ &+ (J_{n+4} + J_{n+3})e_3 + (J_{n+5} + J_{n+4})e_4 + (J_{n+6} + J_{n+5})e_5 \\ &+ (J_{n+7} + J_{n+6})e_6 + (J_{n+8} + J_{n+7})e_7. \end{aligned}$$

Utilizando a identidade $J_{n+1} + J_n = 2^n$ na equação anterior, podemos obter que:

$$\begin{aligned} \hat{J}_{n+1} + \hat{J}_n &= 2^n e_0 + 2^{n+1} e_1 + 2^{n+2} e_2 + 2^{n+3} e_3 + 2^{n+4} e_4 + 2^{n+5} e_5 + 2^{n+6} e_6 + 2^{n+7} e_7 \\ &= 2^n (e_0 + 2^1 e_1 + 2^2 e_2 + 2^3 e_3 + 2^4 e_4 + 2^5 e_5 + 2^6 e_6 + 2^7 e_7) \\ &= 2^n \sum_{s=0}^7 2^s e_s \\ &= 2^n \cdot \alpha^* \quad \square \end{aligned}$$

(ii) Podemos escrever que:

$$\begin{aligned} \hat{J}_{n+1} - \hat{J}_n &= (J_{n+1} - J_n)e_0 + (J_{n+2} - J_{n+1})e_1 + (J_{n+3} - J_{n+2})e_2 + \\ &+ (J_{n+4} - J_{n+3})e_3 + (J_{n+5} - J_{n+4})e_4 + (J_{n+6} - J_{n+5})e_5 \\ &+ (J_{n+7} - J_{n+6})e_6 + (J_{n+8} - J_{n+7})e_7. \end{aligned}$$

Utilizando a identidade $J_{n+1} - J_n = \frac{2^n + 2 \cdot (-1)^n}{3}$ na equação anterior, podemos obter que:

$$\begin{aligned} \hat{J}_{n+1} - \hat{J}_n &= \frac{1}{3} \left[(2^n + 2 \cdot (-1)^n) e_0 + (2^{n+1} + 2 \cdot (-1)^{n+1}) e_1 + (2^{n+2} + 2 \cdot (-1)^{n+2}) e_2 + \right. \\ &\quad \left. + \dots + (2^{n+7} + 2 \cdot (-1)^{n+7}) e_7 \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[2^n e_0 + 2 \cdot (-1)^n e_0 + 2^{n+1} e_1 + 2 \cdot (-1)^{n+1} e_1 + 2^{n+2} e_2 + 2 \cdot (-1)^{n+2} e_2 + \right. \\ &\quad \left. + \dots + 2^{n+7} e_7 + 2 \cdot (-1)^{n+7} e_7 \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[2^n (e_0 + 2e_1 + 2^2 e_2 + \dots + 2^7 e_7) + 2 \cdot (-1)^n (e_0 + (-1)e_1 + (-1)^2 e_2 + \dots + (-1)^7 e_7) \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[2^n \cdot \sum_{s=0}^7 2^s e_s + 2 \cdot (-1)^n \cdot \sum_{s=0}^7 (-1)^s e_s \right] \\ &= \frac{1}{3} [\alpha^n \alpha^* + \alpha \cdot \beta^n \cdot \beta^*] \quad \square \end{aligned}$$

(iii) Temos que

$$\begin{aligned}\hat{J}_{n+r} + \hat{J}_{n-r} &= (J_{n+r} + J_{n-r})e_0 + (J_{n+r+1} + J_{n-r+1})e_1 + (J_{n+r+2} + J_{n-r+2})e_2 + \\ &\quad + \dots + (J_{n+r+7} + J_{n-r+7})e_7\end{aligned}$$

Utilizando a identidade $J_{n+r} + J_{n-r} = \frac{1}{3}[2^{n-r}(2^{2r} + 1) - 2(-1)^{n-r}]$ na equação anterior, podemos

obter que:

$$\begin{aligned}\hat{J}_{n+r} + \hat{J}_{n-r} &= \frac{1}{3} \left\{ [2^{n-r}(2^{2r} + 1) - 2 \cdot (-1)^{n-r}]e_0 + [2^{n-r+1}(2^{2r} + 1) - 2 \cdot (-1)^{n-r+1}]e_1 + \right. \\ &\quad \left. + [2^{n-r+2}(2^{2r} + 1) - 2 \cdot (-1)^{n-r+2}]e_2 + \dots + [2^{n-r+7}(2^{2r} + 1) - 2 \cdot (-1)^{n-r+7}]e_7 \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ 2^{n-r}(2^{2r} + 1)e_0 - 2 \cdot (-1)^{n-r}e_0 + 2^{n-r+1}(2^{2r} + 1)e_1 - 2 \cdot (-1)^{n-r+1}e_1 + \right. \\ &\quad \left. + 2^{n-r+2}(2^{2r} + 1)e_2 - 2 \cdot (-1)^{n-r+2}e_2 + \dots + 2^{n-r+7}(2^{2r} + 1)e_7 - 2 \cdot (-1)^{n-r+7}e_7 \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ (2^{2r} + 1) \cdot 2^{n-r} \cdot (e_0 + 2e_1 + 2^2e_2 + \dots + 2^7e_7) + \right. \\ &\quad \left. - 2 \cdot (-1)^{n-r} (e_0 + (-1)e_1 + (-1)^2e_2 + \dots + (-1)^7e_7) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ (2^{2r} + 1)2^{n-r} \cdot \sum_{s=0}^7 2^s e_s + 2 \cdot (-1)^{n-r+1} \cdot \sum_{s=0}^7 (-1)^s e_s \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ (\alpha^{2r} + 1)\alpha^{n-r} \cdot \alpha^* + \alpha \cdot \beta^{n-r+1} \cdot \beta^* \right\} \square\end{aligned}$$

(iv): Observando que:

$$\begin{aligned}\hat{J}_{n+r} - \hat{J}_{n-r} &= (J_{n+r} - J_{n-r})e_0 + (J_{n+r+1} - J_{n-r+1})e_1 + (J_{n+r+2} - J_{n-r+2})e_2 + \\ &\quad + \dots + (J_{n+r+7} - J_{n-r+7})e_7\end{aligned}$$

Utilizando a identidade $J_{n+r} - J_{n-r} = \frac{1}{3}[2^{n-r}(2^{2r} - 1)]$ na equação anterior, podemos obter que:

$$\begin{aligned}\hat{J}_{n+r} - \hat{J}_{n-r} &= \frac{1}{3} \left[2^{n-r}(2^{2r} - 1)e_0 + 2^{n-r+1}(2^{2r} - 1)e_1 + 2^{n-r+2}(2^{2r} - 1)e_2 + \right. \\ &\quad \left. + \dots + 2^{n-r+7}(2^{2r} - 1)e_7 \right] \\ &= \frac{1}{3} [2^{n-r}(2^{2r} - 1)(e_0 + 2e_1 + 2^2e_2 + \dots + 2^7e_7)] \\ &= \frac{1}{3} \left[2^{n-r}(2^{2r} - 1) \cdot \sum_{s=0}^7 2^s e_s \right] \\ &= \frac{1}{3} [2^{n-r}(2^{2r} - 1)\alpha^*] \\ &= \frac{1}{3} [(2^{n+r} - 2^{n-r})\alpha^*] \\ &= \frac{1}{3} [(\alpha^{n+r} - \alpha^{n-r})\alpha^*] \square\end{aligned}$$

(v) Recorrendo a definição de norma de um octônio de Jacobsthal, temos que:

$$\begin{aligned}
N(\hat{J}_n) &= J_n^2 + J_{n+1}^2 + J_{n+2}^2 + J_{n+3}^2 + J_{n+4}^2 + J_{n+5}^2 + J_{n+6}^2 + J_{n+7}^2 \\
&= \left(\frac{2^n - (-1)^n}{3} \right)^2 + \left(\frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3} \right)^2 + \left(\frac{2^{n+2} - (-1)^{n+2}}{3} \right)^2 + \left(\frac{2^{n+3} - (-1)^{n+3}}{3} \right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{2^{n+4} - (-1)^{n+4}}{3} \right)^2 + \left(\frac{2^{n+5} - (-1)^{n+5}}{3} \right)^2 + \left(\frac{2^{n+6} - (-1)^{n+6}}{3} \right)^2 + \left(\frac{2^{n+7} - (-1)^{n+7}}{3} \right)^2 \\
&= \frac{1}{9} \left[\begin{aligned} &2^{2n} - 2 \cdot 2^n \cdot (-1)^n + (-1)^{2n} + 2^{2n+2} - 2 \cdot 2^{n+1} \cdot (-1)^{n+1} + (-1)^{2n+2} + \\ &2^{2n+4} - 2 \cdot 2^{n+2} \cdot (-1)^{n+2} + (-1)^{2n+4} + 2^{2n+6} - 2 \cdot 2^{n+3} \cdot (-1)^{n+3} + (-1)^{2n+6} + \\ &2^{2n+8} - 2 \cdot 2^{n+4} \cdot (-1)^{n+4} + (-1)^{2n+8} + 2^{2n+10} - 2 \cdot 2^{n+5} \cdot (-1)^{n+5} + (-1)^{2n+10} + \\ &2^{2n+12} - 2 \cdot 2^{n+6} \cdot (-1)^{n+6} + (-1)^{2n+12} + 2^{2n+14} - 2 \cdot 2^{n+7} \cdot (-1)^{n+7} + (-1)^{2n+14} \end{aligned} \right] \\
&= \frac{1}{9} \left[\begin{aligned} &2^{2n} (1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + 2^{10} + 2^{12} + 2^{14}) + \\ &2^n \cdot (-1)^n (-2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - 128 + 256) + (-1)^{2n} + (-1)^{2n+2} \\ &+ (-1)^{2n+4} + (-1)^{2n+6} + (-1)^{2n+8} + (-1)^{2n+10} + (-1)^{2n+12} + (-1)^{2n+14} \end{aligned} \right] \\
&= \frac{1}{9} [2^{2n} (21.845) + 2^n \beta^n (170) + 8] \square
\end{aligned}$$

Teorema 32 (Identidade de Cassini): Para todos inteiros não negativos n e r com $r \leq n$, temos que:

$$\hat{J}_{n+1} \hat{J}_{n-1} - \hat{J}_n^2 = \frac{(-2)^n}{3} \left(\alpha^* \beta^* + \frac{1}{2} \beta^* \alpha^* \right)$$

Demonstração:

Podemos observar, que:

$$\begin{aligned}
\hat{J}_{n+1} \hat{J}_{n-1} - \hat{J}_n^2 &= \left(\frac{\alpha^* \alpha^{n+1} - \beta^* \beta^{n+1}}{3} \right) \cdot \left(\frac{\alpha^* \alpha^{n-1} - \beta^* \beta^{n-1}}{3} \right) - \left(\frac{\alpha^* \alpha^n - \beta^* \beta^n}{3} \right)^2 \\
&= \frac{1}{9} \left[(\alpha^*)^2 \cdot \alpha^{2n} - \alpha^* \alpha^{n+1} \beta^* \beta^{n-1} - \beta^* \beta^{n+1} \alpha^* \alpha^{n-1} + (\beta^*)^2 \beta^{2n} \right] \\
&= \frac{1}{9} \left[- \left[(\alpha^*)^2 \cdot \alpha^{2n} - 2\alpha^* \alpha^n \beta^* \beta^n + (\beta^*)^2 \beta^{2n} \right] \right] \\
&= \frac{1}{9} \left[2\alpha^* \alpha^n \beta^* \beta^n - \alpha^* \alpha^{n+1} \beta^* \beta^{n-1} - \beta^* \beta^{n+1} \alpha^* \alpha^{n-1} \right] \\
&= \frac{\alpha^n \beta^n \alpha^* \beta^*}{3} \cdot \frac{[2 - (\alpha \beta^{-1}) - (\beta \alpha^{-1})]}{3} \\
&= \frac{(\alpha \beta)^n \alpha^* \beta^*}{3} \cdot \frac{[2 - (2 \cdot (-1)^{-1}) - ((-1) \cdot 2^{-1})]}{3} \\
&= \frac{(-2)^n \alpha^* \beta^*}{3} \cdot \frac{\left[2 + 2 + \frac{1}{2} \right]}{3} = \frac{(-2)^n \alpha^* \beta^*}{3} \cdot \frac{\left[\frac{9}{2} \right]}{3} \\
&= \frac{(-2)^n \alpha^* \beta^*}{3} \cdot \frac{9}{6} = \frac{(-2)^n \alpha^* \beta^*}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{(-2)^n \alpha^* \beta^*}{3} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{(-2)^n}{3} \left[\alpha^* \beta^* + \frac{1}{2} \beta^* \alpha^* \right] \square$$

Teorema 33 (Identidade de Catalan): Para todos inteiros não negativos n e r com $r \leq n$, temos que:

$$\hat{J}_{n+r} \hat{J}_{n-r} - \hat{J}_n^2 = \frac{(-2)^n}{9} \left[\alpha^* \beta^* (1 - (-2)^r) + \beta^* \alpha^* (1 - (-2)^{-r}) \right]$$

Demonstração:

Com efeito, temos:

$$\begin{aligned} \hat{J}_{n+r} \hat{J}_{n-r} - \hat{J}_n^2 &= \left(\frac{\alpha^* \alpha^{n+r} - \beta^* \beta^{n+r}}{3} \right) \cdot \left(\frac{\alpha^* \alpha^{n-r} - \beta^* \beta^{n-r}}{3} \right) - \left(\frac{\alpha^* \alpha^n - \beta^* \beta^n}{3} \right)^2 \\ &= \frac{1}{9} \left[(\alpha^*)^2 \cdot \alpha^{2n} - \alpha^* \alpha^{n+r} \beta^* \beta^{n-r} - \beta^* \beta^{n+r} \alpha^* \alpha^{n-r} + (\beta^*)^2 \beta^{2n} \right. \\ &\quad \left. - [(\alpha^*)^2 \cdot \alpha^{2n} - 2\alpha^* \alpha^n \beta^* \beta^n + (\beta^*)^2 \beta^{2n}] \right] \\ &= \frac{1}{9} \left[2\alpha^* \alpha^n \beta^* \beta^n - \alpha^* \alpha^{n+r} \beta^* \beta^{n-r} - \beta^* \beta^{n+r} \alpha^* \alpha^{n-r} \right] \\ &= \frac{\alpha^n \beta^n \alpha^* \beta^*}{9} \cdot [2 - (\alpha^r \beta^{-r}) - (\beta^r \alpha^{-r})] \\ &= \frac{(-2)^n \alpha^* \beta^*}{9} \left[2 - \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^r - \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^r \right] = \frac{(-2)^n \alpha^* \beta^*}{9} \left[2 - \left(\frac{2}{-1} \right)^r - \left(\frac{-1}{2} \right)^r \right] \\ &= \frac{(-2)^n \alpha^* \beta^*}{9} [1 + 1 - (-2)^r - (-2)^{-r}] \\ &= \frac{(-2)^n}{9} [\alpha^* \beta^* (1 - (-2)^r) + \beta^* \alpha^* (1 - (-2)^{-r})] \square \end{aligned}$$

A seção a seguir, continua a versar sobre o crescimento dimensional. Nesse sentido, após a discussão dos quatérnios e dos octônios de Jacobsthal, apresentaremos uma álgebra de 16 dimensões que é denominada Sedênio.

3.10 Sedênios de Jacobsthal

De acordo com Çimen & Ipek (2017), a álgebra dos sedênios é uma álgebra de 16 dimensões. A seguir, veremos algumas definições e propriedades mais relevantes para esses números.

Definição 13: Definimos os sedênios de Jacobsthal pela seguinte relação de recorrência:

$$SJ_n = \sum_{s=0}^{15} J_{n+s} e_s$$

Na figura abaixo, podemos observar como ocorre o produto entre esses números.

Figura 8 – Produto sedeniônico

.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	-0	3	-2	5	-4	-7	6	9	-8	-11	10	-13	12	15	-14
2	2	-3	-0	1	6	7	-4	-5	10	11	-8	-9	-14	-15	12	13
3	3	2	-1	-0	7	-6	5	-4	11	-10	9	-8	-15	14	-13	12
4	4	-5	-6	-7	-0	1	2	3	12	13	14	15	-8	-9	-10	-11
5	5	4	-7	6	-1	-0	-3	2	13	-12	15	-14	9	-8	11	-10
6	6	7	4	-5	-2	3	-0	-1	14	-15	-12	13	10	-11	-8	9
7	7	-6	5	4	-3	-2	1	-0	15	14	-13	-12	11	10	-9	-8
8	8	-9	-10	-11	-12	-13	-14	-15	-0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	8	-11	10	-13	12	15	-14	-1	-0	-3	2	-5	4	7	-6
10	10	11	8	-9	-14	-15	12	13	-2	3	-0	-1	-6	-7	4	5
11	11	-10	9	8	-15	14	-13	12	-3	-2	1	-0	-7	6	-5	4
12	12	13	14	15	8	-9	-10	-11	-4	5	6	7	-0	-1	-2	-3
13	13	-12	15	-14	9	8	11	-10	-5	-4	7	-6	1	-0	3	-2
14	14	-15	-12	13	10	-11	8	9	-6	-7	-4	5	2	-3	-0	1
15	15	14	-13	-12	11	10	-9	8	-7	6	-5	-4	3	2	-1	-0

Fonte: Çimen & Ipek (2017)

Definição 14: O conjugado do sedênio de Jacobsthal SJ_n é denotado por $\overline{SJ_n}$ e é dado por:

$$\overline{SJ_n} = J_n e_0 - J_{n+1} e_1 - J_{n+2} e_2 - J_{n+3} e_3 - \dots - J_{n+15} e_{15}$$

Definição: 15 A norma $N(SJ_n)$ do sedênio de Jacobsthal, é dada por:

$$SJ_n \overline{SJ_n} = J_n^2 + J_{n+1}^2 + \dots + J_{n+15}^2$$

Por outro lado, sabendo que a fórmula de Binet para a clássica SJ corresponde à $J_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)$, Çimen & Ipek (2017) indicam a seguinte fórmula de Binet para os

sedênios de Jacobsthal, tal qual: $SJ_n = \frac{2^n}{3} A - \frac{(-1)^n}{3} B$. Com $A = \sum_{s=0}^{15} 2^s e_s$ e $B = \sum_{s=0}^{15} (-1)^s e_s$.

O teorema a seguir, apresenta algumas identidades que podem ser obtidas por meio das definições anteriores.

Teorema 34: Para $n \geq 1$, temos as seguintes identidades:

$$(i): SJ_{n+1} = SJ_n + 2SJ_{n+1}$$

$$(ii): SJ_n + \overline{SJ_n} = 2J_n e_0$$

Demonstração:

(i): Considerando que:

$$\begin{aligned}
SJ_n + 2SJ_{n-1} &= \sum_{s=0}^{15} J_{n+s} e_s + 2 \sum_{s=0}^{15} J_{n-1+s} e_s \\
&= \sum_{s=0}^{15} (J_{n+s} + 2J_{n-1+s}) e_s \\
&= \sum_{s=0}^{15} J_{n+1+s} e_s = SJ_{n+1} \square
\end{aligned}$$

(ii) Para a demonstração do item (ii), recorremos a definição de conjugado do sedênio de Jacobsthal:

$$\begin{aligned}
SJ_n + \overline{SJ_n} &= (J_n e_0 + J_{n+1} e_1 + J_{n+2} e_2 + \dots + J_{n+15} e_{15}) + \\
&\quad + (J_n e_0 - J_{n+1} e_1 - J_{n+2} e_2 - \dots - J_{n+15} e_{15}) \\
&= 2J_n e_0 \square
\end{aligned}$$

Teorema 35: Para $n \geq 1, r \geq 1$, temos as seguintes identidades:

$$\begin{aligned}
(i): SJ_{n+1} + SJ_n &= 2^n (e_0 + 2e_1 + 2^2 e_2 + 2^3 e_3 + \dots + 2^{15} e_{15}) \\
(ii): SJ_{n+1} - SJ_n &= \frac{1}{3} \left[2^n (e_0 + 2e_1 + 2^2 e_2 + \dots + 2^{15} e_{15}) + \right. \\
&\quad \left. + 2(-1)^n (e_0 - e_1 + e_2 - \dots - e_{15}) \right] \\
(iii): SJ_{n+r} + SJ_{n-r} &= \frac{2^{n-r} (2^{2r} + 1)}{3} (e_0 + 2e_1 + 2^2 e_2 + \dots + 2^{15} e_{15}) \\
&\quad + \frac{2(-1)^{n-r+1}}{3} (e_0 - e_1 + e_2 - \dots - e_{15}) \\
(iv): SJ_{n+r} - SJ_{n-r} &= \left(\frac{2^{n+r} - 2^{n-r}}{3} \right) (e_0 + 2e_1 + 2^2 e_2 + \dots + 2^{15} e_{15})
\end{aligned}$$

Demonstração:

(i): Sabendo que:

$$SJ_{n+1} + SJ_n = (J_{n+1} + J_n) e_0 + (J_{n+2} + J_{n+1}) e_1 + \dots + (J_{n+16} + J_{n+15}) e_{15}$$

Utilizando a identidade $J_{n+1} + J_n = 2^n$, temos:

$$\begin{aligned}
SJ_{n+1} + SJ_n &= 2^n e_0 + 2^{n+1} e_1 + 2^{n+2} e_2 + \dots + 2^{n+15} e_{15} \\
&= 2^n (e_0 + 2e_1 + 2^2 e_2 + \dots + 2^{15} e_{15}) \square
\end{aligned}$$

(ii) Considerando que

$$SJ_{n+1} - SJ_n = (J_{n+1} - J_n) e_0 + (J_{n+2} - J_{n+1}) e_1 + \dots + (J_{n+16} - J_{n+15}) e_{15}$$

Com base em $J_{n+1} - J_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}$, podemos escrever que:

$$\begin{aligned}
SJ_{n+1} - SJ_n &= \frac{1}{3} \left[(2^n + 2 \cdot (-1)^n e_0) + (2^{n+1} + 2 \cdot (-1)^{n+1} e_1) + \right. \\
&\quad \left. (2^{n+2} + 2 \cdot (-1)^{n+2} e_2) + \cdots + (2^{n+15} + 2 \cdot (-1)^{n+15} e_{15}) \right] \\
&= \frac{1}{3} \left[2^n e_0 + 2 \cdot (-1)^n e_0 + 2^{n+1} e_1 + 2 \cdot (-1)^{n+1} e_1 + \right. \\
&\quad \left. 2^{n+2} e_2 + 2 \cdot (-1)^{n+2} e_2 + \cdots + 2^{n+15} e_{15} + 2 \cdot (-1)^{n+15} e_{15} \right] \\
&= \frac{1}{3} \left[2^n (e_0 + 2e_1 + 2^2 e_2 + \cdots + 2^{15} e_{15}) + \right. \\
&\quad \left. 2 \cdot (-1)^n (e_0 - e_1 + e_2 - \cdots - e_{15}) \right] \square
\end{aligned}$$

(iii): De fato, temos:

$$\begin{aligned}
SJ_{n+r} + SJ_{n-r} &= (J_{n+r} + J_{n-r})e_0 + (J_{n+r+1} + J_{n-r+1})e_1 + \\
&\quad + (J_{n+r+2} + J_{n-r+2})e_2 + \cdots + (J_{n+r+15} + J_{n-r+15})e_{15}
\end{aligned}$$

Considerando que $J_{n+r} + J_{n-r} = \frac{1}{3} [2^{n-r} (2^r + 1) - 2 \cdot (-1)^{n-r}]$. Obtemos:

$$\begin{aligned}
SJ_{n+r} + SJ_{n-r} &= \frac{1}{3} \left\{ \left[2^{n-r} (2^{2r} - 1) - 2(-1)^{n-r} \right] e_0 + \left[2^{n-r+1} (2^{2r} - 1) - 2(-1)^{n-r+1} \right] e_1 + \right. \\
&\quad \left. + \left[2^{n-r+2} (2^{2r} - 1) - 2(-1)^{n-r+2} \right] e_2 + \cdots + \left[2^{n-r+15} (2^{2r} - 1) - 2(-1)^{n-r+15} \right] e_{15} \right\} \\
&= \frac{1}{3} \left\{ 2^{n-r} (2^{2r} - 1) e_0 - 2(-1)^{n-r} e_0 + 2^{n-r+1} (2^{2r} - 1) e_1 - 2(-1)^{n-r+1} e_1 + \right. \\
&\quad \left. + 2^{n-r+2} (2^{2r} - 1) e_2 - 2(-1)^{n-r+2} e_2 + \cdots + 2^{n-r+15} (2^{2r} - 1) e_{15} - 2(-1)^{n-r+15} e_{15} \right\} \\
&= \frac{1}{3} \left[2^{n-r} (2^{2r} + 1) \cdot (e_0 + 2e_1 + 2^2 e_2 + \cdots + 2^{15} e_{15}) + \right. \\
&\quad \left. - 2 \cdot (-1)^{n-r} \cdot (e_0 - e_1 + e_2 - \cdots - e_{15}) \right] \\
&= \frac{2^{n-r} (2^{2r} + 1)}{3} \cdot (e_0 + 2e_1 + 2^2 e_2 + \cdots + 2^{15} e_{15}) + \\
&\quad + \frac{2 \cdot (-1)^{n-r+1}}{3} \cdot (e_0 - e_1 + e_2 - \cdots - e_{15}) \square
\end{aligned}$$

(iv): Tendo em vista que:

$$\begin{aligned}
SJ_{n+r} - SJ_{n-r} &= (J_{n+r} - J_{n-r})e_0 + (J_{n+r+1} - J_{n-r+1})e_1 + \\
&\quad + (J_{n+r+2} - J_{n-r+2})e_2 + \cdots + (J_{n+r+15} - J_{n-r+15})e_{15}
\end{aligned}$$

Conforme a identidade $J_{n+r} - J_{n-r} = \frac{1}{3} 2^{n-r} (2^{2r} - 1)$ é possível escrever:

$$\begin{aligned}
SJ_{n+r} - SJ_{n-r} &= \frac{1}{3} \left[2^{n-r} (2^{2r} - 1) e_0 + 2^{n-r+1} (2^{2r} - 1) e_1 + \right. \\
&\quad \left. + 2^{n-r+2} (2^{2r} - 1) e_2 + \cdots + 2^{n-r+15} (2^{2r} - 1) e_{15} \right] \\
&= \frac{1}{3} \left[2^{n-r} (2^{2r} - 1) \cdot (e_0 + 2e_1 + 2^2 e_2 + \cdots + 2^{15} e_{15}) \right] \\
&= \frac{2^{n-r} (2^{2r} - 1)}{3} (e_0 + 2e_1 + 2^2 e_2 + \cdots + 2^{15} e_{15}) \square
\end{aligned}$$

Os teoremas a seguir, fornecem algumas identidades costumeiramente utilizadas ao longo do estudo sobre sequências recursivas. Tais quais: identidade de Cassini, Catalan e D'Ocagne.

Teorema 36 (Identidade de Cassini): Para os sedênios de Jacobsthal vale a seguinte

$$\text{identidade: } SJ_{n+1} \cdot SJ_{n-1} - SJ_n^2 = \frac{2^n(-1)^n}{3} \left[AB + \frac{BA}{2} \right]$$

Demonstração: Utilizando a fórmula de Binet para os sedênios de Jacobsthal, temos:

$$\begin{aligned} SJ_{n+1} \cdot SJ_{n-1} - SJ_n^2 &= \left(\frac{2^{n+1}}{3} A - \frac{(-1)^{n+1}}{3} B \right) \cdot \left(\frac{2^{n-1}}{3} A - \frac{(-1)^{n-1}}{3} B \right) + \\ &\quad + \left(\frac{2^n}{3} A - \frac{(-1)^n}{3} B \right)^2 \\ &= \frac{1}{9} \left[2^{2n} A^2 - 2^{n+1} A(-1)^{n-1} B - (-1)^{n+1} B \cdot 2^{n-1} A + (-1)^{2n} B^2 + \right. \\ &\quad \left. - (2^{2n} A^2 - 2 \cdot 2^n A(-1)^n B + (-1)^{2n} B^2) \right] \\ &= \frac{1}{9} \left[2 \cdot 2^n A(-1)^n B - 2^{n+1} A(-1)^{n-1} B - (-1)^{n+1} B \cdot 2^{n-1} A \right] \\ &= \left(\frac{2^n(-1)^n}{3} \right) \cdot \left(\frac{2AB - 2A \cdot (-1)B - \frac{(-1)}{2} BA}{3} \right) \\ &= \left(\frac{2^n(-1)^n}{3} \right) \cdot \left(\frac{4AB + \frac{BA}{2}}{3} \right) = \left(\frac{2^n(-1)^n}{3} \right) \cdot \left(\frac{9AB}{2} \right) \\ &= \left(\frac{2^n(-1)^n}{3} \right) \cdot \left(\frac{9AB}{6} \right) = \left(\frac{2^n(-1)^n}{3} \right) \cdot \left(\frac{3AB}{2} \right) = \\ &= \left(\frac{2^n(-1)^n}{3} \right) \cdot \left[AB + \frac{BA}{2} \right] \square \end{aligned}$$

Teorema 37 (Identidade de Catalan): Para os inteiros não negativos n e r com $r \leq n$, temos

$$\text{que: } SJ_{n-r} \cdot SJ_{n+r} - SJ_n^2 = \frac{2^n(-1)^n}{9} (2^r - (-1)^r) [AB(2)^{-r} - BA(-1)^{-r}]$$

Demonstração: Temos que:

$$\begin{aligned}
SJ_{n-r} \cdot SJ_{n+r} - SJ_n^2 &= \left(\frac{2^{n-r}}{3} A - \frac{(-1)^{n-r}}{3} B \right) \cdot \left(\frac{2^{n+r}}{3} A - \frac{(-1)^{n+r}}{3} B \right) + \\
&\quad + \left(\frac{2^n}{3} A - \frac{(-1)^n}{3} B \right)^2 \\
&= \frac{1}{9} \left[2^{2n} A^2 - 2^{n-r} A (-1)^{n+r} B - (-1)^{n-r} B \cdot 2^{n+r} A + (-1)^{2n} B^2 + \right. \\
&\quad \left. - (2^{2n} A^2 - 2 \cdot 2^n A (-1)^n B + (-1)^{2n} B^2) \right] \\
&= \frac{1}{9} \left[2 \cdot 2^n A (-1)^n B - 2^{n-r} A (-1)^{n+r} B - (-1)^{n-r} B \cdot 2^{n+r} A \right] \\
&= \frac{2^n \cdot (-1)^n}{9} \left[2AB - 2^{-r} A (-1)^{n+r} B - (-1)^{n-r} B \cdot 2^{n+r} A \right] \\
&= \frac{2^n \cdot (-1)^n}{9} \left[AB + BA - 2^{-r} A (-1)^r B - (-1)^{-r} B \cdot 2^r A \right] \\
&= \frac{2^n \cdot (-1)^n}{9} (2^r - (-1)^r) \left[AB(2)^{-r} - BA(-1)^{-r} \right] \square
\end{aligned}$$

Teorema 38 (Identidade de d'Ocgane): Suponha que n seja um número inteiro não negativo e m um número natural qualquer. Se $m > n$, temos que :

$$SJ_m \cdot SJ_{n+1} - SJ_{m+1} SJ_n = \frac{1}{3} \left[2^m (-1)^n AB - 2^n (-1)^m BA \right]$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
SJ_m \cdot SJ_{n+1} - SJ_{m+1} SJ_n &= \left(\frac{2^m}{3} A - \frac{(-1)^m}{3} B \right) \cdot \left(\frac{2^{n+1}}{3} A - \frac{(-1)^{n+1}}{3} B \right) \\
&\quad - \left(\frac{2^{m+1}}{3} A - \frac{(-1)^{m+1}}{3} B \right) \left(\frac{2^n}{3} A - \frac{(-1)^n}{3} B \right) \\
&= \frac{1}{9} \left[2^{m+n+1} A^2 - 2^m A (-1)^{n+1} B - (-1)^m B \cdot 2^{n+1} A + (-1)^{m+n+1} B^2 + \right. \\
&\quad \left. - (2^{m+n+1} A^2 - 2^{m+1} A (-1)^n B - (-1)^{m+1} B \cdot 2^n A + (-1)^{m+n+1} B^2) \right] \\
&= \frac{1}{9} \left[2^{m+1} A \cdot (-1)^n B + (-1)^{m+1} B \cdot 2^n A - 2^m A \cdot (-1)^{n+1} B - (-1)^m B \cdot 2^{n+1} A \right] \\
&= \frac{1}{9} \left\{ \left[2^m A \cdot (-1)^n B (2 - (-1)) \right] - \left[(-1)^m B \cdot 2^n A (-(-1) + 2) \right] \right\} \\
&= \frac{3 \cdot 2^m \cdot (-1)^n AB - 3 \cdot 2^n \cdot (-1)^m \cdot BA}{9} \\
&= \frac{3 \left[2^m \cdot (-1)^n AB - 2^n \cdot (-1)^m \cdot BA \right]}{9} \\
&= \frac{1}{3} \left[2^{2m} \cdot (-1)^n AB - 2^n \cdot (-1)^m \cdot BA \right] \square
\end{aligned}$$

Teorema 39: Seja $N(SJ_n)$ a norma do sedênio de Jacobsthal, vale que:

$$N(SJ_n) = \frac{1}{9} [1431655765(2^{2n}) + (2^n)(-1)^n 43690 + 16]$$

Demonstração: Considerando a definição de norma do sedênio de Jacobsthal

$$\begin{aligned} N(SJ_n) &= J_n^2 + J_{n+1}^2 + J_{n+2}^2 + \dots + J_{n+15}^2 \\ &= \left(\frac{2^n - (-1)^n}{3} \right)^2 + \left(\frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3} \right)^2 + \left(\frac{2^{n+2} - (-1)^{n+2}}{3} \right)^2 + \\ &\quad + \dots + \left(\frac{2^{n+15} - (-1)^{n+15}}{3} \right)^2 \\ &= \frac{1}{9} \left[2^{2n} \left(1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + 2^{10} + 2^{12} + 2^{14} + 2^{16} + 2^{18} + \right) + \right. \\ &\quad \left. 2^{2n} \cdot (-1)^n \left(\begin{array}{l} -2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - 128 + 256 - 512 + 1024 + \\ -2048 + 4096 - 8192 + 16384 - 32768 + 65536 \end{array} \right) \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{2n} + (-1)^{2n+2} + (-1)^{2n+4} + \dots + (-1)^{2n+30} \right] \\ &= \frac{1}{9} [2^{2n}(1431655765) + 2^n(-1)43690 + 16] \square \end{aligned}$$

Na seção a seguir, apresentamos os números gaussianos de Jacobsthal e suas principais propriedades, bem como um modelo de generalização para a mesma que envolve a sequência dos polinômios de Jacobsthal.

3.11 Números Gaussianos de Jacobsthal

De modo semelhante ao que alguns autores realizaram para os números gaussianos de Fibonacci (BERZSENYI, 1997; HARMAN, 1981), propomos a seguinte discussão dos números Gaussianos de Jacobsthal, bem como alguns teoremas e propriedades relativas a esse tópico.

Assim, consideremos a definição proposta por Asci e Gurel (2013), que veremos a seguir:

Definição 16: Os Gaussianos de Jacobsthal são definidos pela seguinte relação de recorrência

$$GJ_{n+1} = GJ_n + 2GJ_{n-1} \text{ com } n \geq 1, \text{ cujas as condições iniciais são } GJ_0 = \frac{i}{2} \text{ e } GJ_1 = 1.$$

Da definição acima podemos estabelecer alguns casos particulares, tais quais:

$$GJ_2 = 1 + i$$

$$GJ_3 = 3 + i$$

$$GJ_4 = 5 + 3i$$

$$GJ_5 = 11 + 5i$$

Com base nisso, suponhamos que $GJ_n = J_n + J_{n-1}i$. Vamos mostrar a validade para o seu sucessor GJ_{n+1} . Desse modo, conforme a definição 16, temos:

$$\begin{aligned} GJ_{n+1} &= GJ_n + 2GJ_{n-1} = (J_n + J_{n-1}i) + 2(J_{n-1} + J_{n-2}i) \\ &= (J_n + 2J_{n-1}) + (J_{n-1} + 2J_{n-2})i = J_{n+1} + J_n i \end{aligned}$$

Ademais, vejamos um modelo que possibilita uma generalização da definição anterior, introduzindo os polinômios de uma variável real.

3.11.1 Polinômios Gaussianos de Jacobsthal

Desse modo, Asci e Gurel (2013) definem os polinômios gaussianos de Jacobsthal da seguinte forma.

Definição 17: Os polinômios gaussianos de Jacobsthal são definidos pela seguinte relação de recorrência $GJ_{n+1}(x) = GJ_n(x) + 2xGJ_{n-1}(x)$, com $n \geq 1$ e com as condições iniciais

$$GJ_0(x) = \frac{i}{2} \text{ e } GJ_1(x) = 1.$$

Assim, podemos observar alguns termos iniciais da sequência, como:

$$GJ_2(x) = 1 + xi$$

$$GJ_3(x) = 2x + 1 + xi$$

$$GJ_4(x) = 4x + 1 + (2x + 1)xi$$

$$GJ_5(x) = 4x^2 + 6x + 1 + (4x + 1)i$$

A equação característica associada à essa sequência é $t^2 - t - 2x = 0$, cujas raízes são dadas por:

$$\alpha(x) = \frac{1 + \sqrt{8x + 1}}{2} \text{ e } \beta(x) = \frac{1 - \sqrt{8x + 1}}{2}. \text{ De } \alpha(x) \text{ e } \beta(x) \text{ podemos estabelecer algumas}$$

relações, tais quais: $\alpha(x) + \beta(x) = 1$ e $\alpha(x) \cdot \beta(x) = -2x$

A seguir, vamos determinar a fórmula de Binet para a sequência dos polinômios gaussianos de Jacobsthal. Nesse sentido, vejamos o seguinte teorema.

Teorema 40: Para $n \geq 0$, temos que:

$$GJ_n(x) = \frac{\alpha(x)^n - \beta(x)^n}{\alpha(x) - \beta(x)} + i \cdot x \frac{\alpha(x)^{n-1} - \beta(x)^{n-1}}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

Demonstração: Faremos a prova desse teorema por indução matemática. Assim, temos:

Para $n=1$, obtemos:

$$\begin{aligned} GJ_1(x) &= \frac{\alpha(x)^1 - \beta(x)^1}{\alpha(x) - \beta(x)} + i \cdot x \frac{\alpha(x)^0 - \beta(x)^0}{\alpha(x) - \beta(x)} \\ &= 1 = GJ_1(x) \end{aligned}$$

Agora, suponhamos a validade da hipótese para $n=1, 2, 3, \dots, k$ e vamos mostrar a veracidade para seu sucessor $n=k+1$. Nesse sentido, vamos recordar a recorrência abaixo:

$$\begin{aligned} GJ_{k+1}(x) &= GJ_k(x) + 2xGJ_{k-1}(x) \\ &= \frac{\alpha(x)^k - \beta(x)^k}{\alpha(x) - \beta(x)} + ix \frac{\alpha(x)^{k-1} - \beta(x)^{k-1}}{\alpha(x) - \beta(x)} + \\ &\quad + \frac{2x\alpha(x)^{k-1} - 2x\beta(x)^{k-1}}{\alpha(x) - \beta(x)} + 2x \cdot ix \frac{\alpha(x)^{k-2} - \beta(x)^{k-2}}{\alpha(x) - \beta(x)} \\ &= \frac{\alpha(x)^k + 2x\alpha(x)^{k-1} - \beta(x)^k - 2x\beta(x)^{k-1}}{\alpha(x) - \beta(x)} + ix \left[\frac{\alpha(x)^{k-1} - \beta(x)^{k-1}}{\alpha(x) - \beta(x)} + 2x \frac{\alpha(x)^{k-2} - \beta(x)^{k-2}}{\alpha(x) - \beta(x)} \right] \\ &= \frac{\alpha(x)^{k-1}(\alpha(x) + 2x) - \beta(x)^{k-1}(\beta(x) + 2x)}{\alpha(x) - \beta(x)} + ix \left[\frac{\alpha(x)^{k-1} - \beta(x)^{k-1} + 2x\alpha(x)^{k-2} - 2x\beta(x)^{k-2}}{\alpha(x) - \beta(x)} \right] \\ &\stackrel{\alpha(x)^2 = \alpha(x) + 2x}{=} \stackrel{\beta(x)^2 = \beta(x) + 2x}{=} \frac{\alpha(x)^{k-1}(\alpha(x)^2) - \beta(x)^{k-1}(\beta(x)^2)}{\alpha(x) - \beta(x)} + ix \left[\frac{\alpha(x)^{k-2}(\alpha(x) + 2x) - \beta(x)^{k-2}(\beta(x) + 2x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right] \\ &= \frac{\alpha(x)^{k+1} - \beta(x)^{k+1}}{\alpha(x) - \beta(x)} + ix \left[\frac{\alpha(x)^{k-2}(\alpha(x)^2) - \beta(x)^{k-2}(\beta(x)^2)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right] \\ &= \left(\frac{\alpha(x)^{k+1} - \beta(x)^{k+1}}{\alpha(x) - \beta(x)} \right) + ix \left(\frac{\alpha(x)^k - \beta(x)^k}{\alpha(x) - \beta(x)} \right) \square \end{aligned}$$

Ainda no que diz respeito à sequência dos polinômios gaussianos de Jacobsthal, o teorema que será enunciado a seguir é voltado para uma abordagem matricial que permite determinar qualquer termo dessa sequência, por meio de um determinante especial. Vejamos:

Teorema 41: Seja a matriz $D_n(x)$ tridiagonal $n \times n$ dada por:

$$D_n(x) = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & \cdots & 0 \\ -x & 1 & 2x & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2x \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, n \geq 1$$

Com $D_0(x) = \frac{i}{2}$. Então $\det D_n(x) = GJ_n(x), n \geq 1$.

Demonstração: Ver Ascii e Gurel (2013, p.29)

Doravante, apresentamos as matrizes 2×2 $Q(x)$ e P dadas por: $Q(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e

$P = \begin{bmatrix} 1+ix & 1 \\ 1 & \frac{i}{2} \end{bmatrix}$. Nesse escopo, temos o seguinte teorema:

Teorema 42: Para $n \geq 1$, temos: $Q^n(x) \cdot P = \begin{bmatrix} GJ_{n+2}(x) & GJ_{n+1}(x) \\ GJ_{n+1}(x) & GJ_n(x) \end{bmatrix}$. Em que $GJ_n(x)$ é o n -

ésimo polinômio gaussiano de Jacobsthal.

Demonstração: Vamos provar o teorema por Indução Matemática. Assim, temos:

Vejamos para $n = 1$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1+ix & 1 \\ 1 & \frac{i}{2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2x+1+ix & 1+ix \\ 1+ix & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} GJ_3(x) & GJ_2(x) \\ GJ_2(x) & GJ_1(x) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Assumimos a validade do teorema para $n = k$. Vamos mostrar que também é verdadeira para $n = k + 1$. Nesse sentido, obtemos:

$$\begin{aligned} Q^{k+1}(x) \cdot P &= \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} \cdot \begin{bmatrix} 1+ix & 1 \\ 1 & \frac{i}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k \cdot \begin{bmatrix} 1+ix & 1 \\ 1 & \frac{i}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} GJ_{k+2}(x) & GJ_{k+1}(x) \\ GJ_{k+1}(x) & GJ_k(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} GJ_{k+3}(x) & GJ_{k+2}(x) \\ GJ_{k+2}(x) & GJ_{k+1}(x) \end{bmatrix} \square \end{aligned}$$

De maneira semelhante ao que realizamos anteriormente. Podemos estabelecer uma extensão da identidade de Cassini para a sequência em questão, que envolve o conceito e propriedades fundamentais dos determinantes.

Teorema 43: Para $n \geq 1$, temos

$$GJ_{n-1}(x)GJ_{n+1}(x) - GJ_n^2(x) = (-1)^n 2^{n-2} x^{n-1} (2 + x - i)$$

Demonstração: Para suceder a demonstração do teorema acima, empregamos algumas propriedades de matrizes e determinantes.

Primeiramente, observamos o determinante das seguintes matrizes

$$\det Q^{n-1}(x) = \begin{vmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^{n-1} = (-2x)^{n-1}$$

$$\det P = \begin{vmatrix} 1+ix & 1 \\ 1 & \frac{i}{2} \end{vmatrix} = \frac{i}{2} - \frac{x}{2} - 1 = -\frac{1}{2}(2 + x - i)$$

Por outro lado, do Teorema 42, temos que: $Q^{n-1}(x)P = \begin{bmatrix} GJ_{n+1}(x) & GJ_n(x) \\ GJ_n(x) & GJ_{n-1}(x) \end{bmatrix}$

O que nos leva a obter que:

$$\begin{aligned} GJ_{n+1}(x)GJ_{n-1}(x) - GJ_n^2(x) &= \det(Q^{n-1}(x) \cdot P) \\ &= \det Q^{n-1}(x) \cdot \det P \\ &= (-2x)^{n-1} \cdot \frac{-1}{2}(2 + x - i) \\ &= (-1)^{n-1} (2x)^{n-1} \frac{-1}{2}(2 + x - i) \\ &= (-1)^n 2^{n-2} x^{n-1} (2 + x - i) \square \end{aligned}$$

Se observarmos quando $x = 1$ a identidade de Cassini seria do tipo

$$GJ_{n-1}GJ_{n+1} - GJ_n^2 = (3-i)(-1)^n 2^{n-2}$$

Teorema 44: A soma dos polinômios gaussianos de Jacobsthal é dada por:

$$\sum_{k=0}^n GJ_k(x) = \frac{1}{2x} [GJ_{n+2}(x) - 1]$$

Demonstração:

Da relação $GJ_{n+1}(x) = GJ_n(x) + 2xGJ_{n-1}(x)$ podemos obter que:

$$GJ_{n-1}(x) = \frac{1}{2x} (GJ_{n+1}(x) - GJ_n(x))$$

Observando a recorrência para alguns valores de n , temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} GJ_0(x) = \frac{1}{2x}(GJ_2(x) - GJ_1(x)) \\ GJ_1(x) = \frac{1}{2x}(GJ_3(x) - GJ_2(x)) \\ GJ_2(x) = \frac{1}{2x}(GJ_4(x) - GJ_3(x)) \\ \vdots \\ GJ_{n-1}(x) = \frac{1}{2x}(GJ_{n+1}(x) - GJ_n(x)) \\ GJ_n(x) = \frac{1}{2x}(GJ_{n+2}(x) - GJ_{n+1}(x)) \end{array} \right.$$

Assim, obtemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n GJ_k(x) &= \frac{1}{2x}(GJ_{n+2}(x) - GJ_1(x)) \\ &= \frac{1}{2x}(GJ_{n+2}(x) - 1) \square \end{aligned}$$

Ademais, o interesse desta seção, foi direcionado para a discussão de definições e teoremas que trazem como enfoque o modelo unidimensional, bem como os polinômios gaussianos de Jacobsthal. Todavia, seguidamente, vamos nos dedicar à concepção de um modelo bidimensional para a referida sequência e estabelecer algumas propriedades e teoremas relativos a esse tópico.

3.12 Relações Recorrentes e Crescimento Dimensional

As relações bidimensionais foram introduzidas na literatura especializada por Harman (1981), que apresentou relações recorrentes com duas variáveis para o modelo de Fibonacci. Posteriormente, Oliveira, Alves & Paiva (2017) realizaram uma expansão dessas propriedades, bem como descobrimento de algumas identidades sobre esse tópico. Não obstante, os autores constataram que os números complexos de Fibonacci podem se estender a dimensões superiores. Nesse sentido, foram propostas as relações recorrentes tridimensionais e suas respectivas identidades. Finalmente, Oliveira (2018) propõe as relações recorrentes n-dimensionais para o modelo de Fibonacci, além de apresentar o seu termo geral e algumas identidades.

Nesse sentido, apoiados nos trabalhos de Harman (1981); Oliveira, Alves & Paiva (2017) e Oliveira (2018), objetivamos explorar o crescimento dimensional para a Sequência

de Jacobsthal e apresentaremos as relações recorrentes bidimensionais, tridimensionais e n -dimensionais.

3.12.1 Relações Recorrentes Bi-dimensionais

A seguir, serão apresentadas algumas propriedades advindas de um modelo com duas variáveis que se configura como uma relação recorrente bidimensional. Nesse sentido, consideramos os números da forma $G(n, m)$ definidos como conjunto dos inteiros gaussianos, tais quais $(n, m) = n + im$ com $n \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{Z}$. Dessa forma, buscou-se estabelecer um modelo que considera a inserção de unidades imaginárias no aumento dimensional. Para esse fim, realizou-se uma analogia direta com a clássica sequência de Jacobsthal, a fim de motivar uma representação para os números de Jacobsthal da forma $G(n, m)$. Para iniciar as discussões, apresenta-se

Definição 18: Considerando os valores iniciais $G(0, 0) = 0, G(1, 0) = 1, G(0, 1) = i$ e $G(1, 1) = 1 + i$, podemos escrever os números da forma $G(n, m)$ utilizando as seguintes relações de recorrências:

$$\begin{aligned} G(n+1, m) &= G(n, m) + 2G(n-1, m) \\ G(n, m+1) &= G(n, m) + 2G(n, m-1) \end{aligned}$$

Com fins a demonstrar o teorema que inclui a principal identidade a ser mostrada, nos atemos apresentar o lema a seguir que nos auxilia na generalização de $G(n, m)$.

Lema 7: Considerando a definição anterior, vale que:

- (i): $G(n, 0) = J_n$
- (ii): $G(0, m) = J_m \cdot i$
- (iii): $G(n, 1) = J_n + J_{n+1} \cdot i$
- (iv): $G(1, m) = J_{m+1} + J_m \cdot i$

Demonstração:

Utiliza-se o segundo princípio de indução finita sobre n . Desse modo, supomos que o resultado é válido para todos os naturais menores ou iguais à n e vamos mostrar que também é válido para $n+1$. Assim, fixa-se $m=0$ e consideram-se os valores iniciais $G(0, 0) = 0$ e

$G(1,0)=1$, previamente estabelecidos, bem como a relação de recorrência $G(n+1,m)=G(n,m)+2G(n-1,m)$ Desse modo, temos:

$$\begin{aligned}
 G(n+1,0) &= G(n,0) + 2G(n-1,0) \\
 G(2,0) &= G(1,0) + 2G(0,0) = 1 = J_2 \\
 G(3,0) &= G(2,0) + 2G(1,0) = 1 + 2 = 3 = J_3 \\
 G(4,0) &= G(3,0) + 2G(2,0) = 3 + 2 = 5 = J_4 \\
 &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 G(n-1,0) &= G(n-2,0) + 2G(n-3,0) = J_{n-1} \\
 G(n,0) &= G(n-1,0) + 2G(n-2,0) = J_n \\
 G(n+1,0) &= G(n,0) + 2G(n-1,0) = J_n + 2J_{n-1} = J_{n+1} \quad \square
 \end{aligned}$$

Dessa forma, o percurso demonstrativo realizado acima evidencia a validade da propriedade $G(n,0) = J_n$. Nesse momento, de modo semelhante, propõe-se uma demonstração para $G(0,m) = J_m \cdot i$. Assim, considera-se $n=0$ e a relação $G(n,m+1) = G(n,m) + 2G(n,m-1)$ e as condições iniciais $G(0,0)=0, G(1,0)=1$ e $G(0,1)=i$. Nesse sentido, supomos que o resultado é válido para todos os naturais menores ou iguais à m e vamos mostrar que também é válido para $m+1$.

$$\begin{aligned}
 G(n,m+1) &= G(0,m) + 2G(0,m-1) \\
 G(0,2) &= G(0,1) + 2G(0,0) = i = J_2 \cdot i \\
 G(0,3) &= G(0,2) + 2G(0,1) = 3i = J_3 \cdot i \\
 G(0,4) &= G(0,3) + 2G(0,2) = 5i = J_4 \cdot i \\
 &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 G(0,m-1) &= G(0,m-2) + 2G(0,m-3) = J_{m-1} \cdot i \\
 G(0,m) &= G(0,m-1) + 2G(0,m-2) = J_m \cdot i \\
 G(0,m+1) &= G(0,m) + 2G(0,m-1) = J_m \cdot i + 2J_{m-1} \cdot i = J_{m+1} \cdot i \quad \square
 \end{aligned}$$

Dando prosseguimento, com base na recorrência $G(n+1,m) = G(n,m) + 2G(n-1,m)$ e nos valores iniciais $G(0,0)=0, G(1,0)=1, G(0,1)=1$ e $G(1,1)=1+i$. Desse modo, toma-se $m=1$. Supomos que o resultado é válido para todos os naturais menores ou iguais à n . Vamos mostrar que também é válido para $n+1$

$$\begin{aligned}
 G(n+1,1) &= G(n,1) + 2G(n-1,1) \\
 G(2,1) &= G(1,1) + 2G(0,1) = 1(1+i) + 2i = J_2 \cdot G(1,1) + 2J_1 \cdot G(0,1) \\
 G(3,1) &= G(2,1) + 2G(1,1) = 3(1+i) + 2i = J_3 \cdot G(1,1) + 2J_2 \cdot G(0,1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(4,1) &= G(3,1) + 2G(2,1) = 5(1+i) + 6i = J_4 \cdot G(1,1) + 2J_3 \cdot G(0,1) \\
&\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
G(n-1,1) &= G(n-2,1) + 2G(n-3,1) = J_{n-1} \cdot G(1,1) + 2J_{n-2} \cdot G(0,1) \\
G(n,1) &= G(n-1,1) + 2G(n-2,1) = J_n \cdot G(1,1) + 2J_{n-1} \cdot G(0,1) = J_n + J_{n+1} \cdot i \\
G(n+1,1) &= G(n,1) + 2G(n-1,1) = J_n \cdot G(1,1) + 2J_{n-1} \cdot G(0,1) + 2J_{n-1}G(1,1) + 4J_{n-2} \cdot G(0,1) \\
&= G(1,1)[J_n + 2J_{n-1}] + 2G(0,1)[J_{n-1} + 2J_{n-2}] \\
&= G(1,1)J_{n+1} + 2G(0,1)J_n \\
&= J_{n+1} + (J_{n+1} + 2J_n)i \\
&= J_{n+1} + J_{n+2} \cdot i \quad \square
\end{aligned}$$

Finalizando, pretende-se mostrar que $G(1, m) = J_{m+1} + J_m \cdot i$. Nesse sentido, considere-se a relação de recorrência $G(n, m+1) = G(n, m) + 2G(n, m-1)$. Assim, com base nas condições iniciais $G(0, 0) = 0, G(1, 0) = 1, G(0, 1) = i$ e $G(1, 1) = 1 + i$. Averigua-se a recorrência para $n = 1$ e supomos a validade do resultado para todos os naturais menores ou iguais à m e vamos mostrar que também é válido para $m+1$.

$$\begin{aligned}
G(1, m+1) &= G(1, m) + 2G(1, m-1) \\
G(1, 2) &= G(1, 1) + 2G(1, 0) = 3 + i = J_3 + J_2 \cdot i \\
G(1, 3) &= G(1, 2) + 2G(1, 1) = 5 + 3i = J_4 + J_3 \cdot i \\
G(1, 4) &= G(1, 3) + 2G(1, 2) = 11 + 5i = J_5 + J_4 \cdot i \\
&\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
G(1, m-1) &= G(1, m-2) + 2G(1, m-3) = J_m + J_{m-1} \cdot i \\
G(1, m) &= G(1, m-1) + 2G(1, m-2) = J_{m+1} + J_m \cdot i \\
G(1, m+1) &= G(1, m) + 2G(1, m-1) = J_{m+1} + J_m \cdot i + 2[J_m + J_{m-1} \cdot i] \\
&= J_{m+1} + 2J_m + [J_m + 2J_{m-1}] \cdot i \\
&= J_{m+2} + J_{m+1} \cdot i \quad \square
\end{aligned}$$

Destarte, observa-se que a relação de recorrência, a definição 18 e o lema 7, configuram-se como subsídios para uma análise do comportamento da recorrência $G(n+1, m) = G(n, m) + 2G(n-1, m)$ quando se fixa m natural e faz-se variar o valor de $n = 1, 2, 3, \dots$. Nesse sentido, têm-se o seguinte teorema.

Teorema 45: Para dois inteiros n, m , os números da forma $G(n, m)$ podem ser escritos como

$$G(n, m) = J_n J_{m+1} + J_{n+1} J_m \cdot i$$

Demonstração:

Novamente, recorre-se ao Princípio de Indução Matemática como alternativa de prova para o teorema em questão. Nesse sentido, pode-se escrever que:

$$\begin{aligned}
G(n+1, m) &= G(n, m) + 2G(n-1, m) \\
G(2, m) &= G(1, m) + 2G(0, m) = J_{m+1} + J_m \cdot i + 2J_m \cdot i = J_2 J_{m+1} + J_3 J_m \cdot i \\
G(3, m) &= G(n, 2) + 2G(n, 1) = J_{m+1} + 3J_m \cdot i + 2J_{m+1} + 2J_m \cdot i = J_3 J_{m+1} + J_4 J_m \cdot i \\
G(4, m) &= G(n, 3) + 2G(n, 2) = 3J_{m+1} + 5J_m \cdot i + 2J_{m+1} + 6J_m \cdot i = J_4 J_{m+1} + J_5 J_m \cdot i \\
&\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
G(n-1, m) &= G(n-2, m) + 2G(n-3, m) = J_{n-1} J_{m+1} + J_n J_m \cdot i \\
G(n, m) &= G(n-1, m) + 2G(n-2, m) = J_n J_{m+1} + J_{n+1} J_m \cdot i \\
G(n+1, m) &= G(n, m) + 2G(n-1, m) = [J_n J_{m+1} + J_{n+1} J_m \cdot i] + 2[J_{n-1} J_{m+1} + J_n J_m \cdot i] \\
&= J_{m+1} (J_n + 2J_{n-1}) + J_m (J_{n+1} + 2J_n) i \\
&= J_{m+1} J_{n+1} + J_m J_{n+2} \cdot i \quad \square
\end{aligned}$$

Isto posto, o teorema acima especifica mais uma generalização da Sequência de Jacobsthal. Nesse escopo, serão demonstradas algumas identidades bidimensionais para os números de Jacobsthal do tipo $G(n, m)$.

Identidade 1: A soma de seis termos consecutivos é dada por

$$\sum_{k=0}^5 G(n+k, m) = 7[G(n, m) + G(n+3, m)]$$

Demonstração: Sabendo que

$$\begin{aligned}
G(n, m) &= J_n J_{m+1} + J_{n+1} J_m \cdot k \\
G(n+1, m) &= J_{n+1} J_{m+1} + J_{n+2} J_m \cdot k \\
G(n+2, m) &= J_{n+2} J_{m+1} + J_{n+3} J_m \cdot k \\
G(n+3, m) &= J_{n+3} J_{m+1} + J_{n+4} J_m \cdot k \\
G(n+4, m) &= J_{n+4} J_{m+1} + J_{n+5} J_m \cdot k \\
G(n+5, m) &= J_{n+5} J_{m+1} + J_{n+6} J_m \cdot k
\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^5 J_{n+k} &= J_n + J_{n+1} + J_{n+2} + J_{n+3} + J_{n+4} + J_{n+5} \\
&= J_n + J_{n+1} + J_{n+2} + J_{n+3} + J_{n+3} + 2J_{n+2} + J_{n+3} + 2J_{n+2} + 2J_{n+3} \\
&= J_n + J_{n+1} + J_{n+1} + 2J_n + 5J_{n+3} + 2J_{n+2} + 2J_{n+2} \\
&= 3J_n + 2J_{n+1} + J_{n+2} + 5J_{n+3} + J_{n+2} + 2J_{n+2} \\
&= 3J_n + 6J_{n+3} + J_{n+2} + 2J_{n+2} \\
&= 3J_n + 6J_{n+3} + J_{n+2} + 2(J_{n+1} + 2J_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 3J_n + 6J_{n+3} + J_{n+2} + 2J_{n+1} + 4J_n \\
&= 7J_n + 7J_{n+3}
\end{aligned}$$

Em continuidade, têm-se:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^6 J_{n+k} &= J_{n+1} + J_{n+2} + J_{n+3} + J_{n+4} + J_{n+5} + J_{n+6} \\
&= J_{n+1} + J_{n+2} + J_{n+3} + J_{n+4} + J_{n+4} + 2J_{n+3} + J_{n+5} + 2J_{n+4} \\
&= J_{n+1} + J_{n+2} + J_{n+3} + 4J_{n+4} + 2J_{n+3} + J_{n+4} + 2J_{n+3} \\
&= J_{n+1} + J_{n+2} + J_{n+2} + 2J_{n+1} + 5J_{n+4} + J_{n+3} + 3J_{n+3} \\
&= 3J_{n+1} + 6J_{n+4} + 3J_{n+3} \\
&= 3J_{n+1} + 6J_{n+4} + J_{n+3} + 2(J_{n+2} + 2J_{n+1}) \\
&= 3J_{n+1} + 6J_{n+4} + J_{n+3} + 2J_{n+2} + 4J_{n+1} \\
&= 7J_{n+1} + 7J_{n+4}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^5 G(n+k, m) &= G(n, m) + G(n+1, m) + G(n+2, m) + G(n+3, m) + G(n+4, m) + G(n+5, m) \\
&= (J_n + J_{n+1} + J_{n+2} + J_{n+3} + J_{n+4} + J_{n+5})J_{m+1} + (J_{n+1} + J_{n+2} + J_{n+3} + J_{n+4} + J_{n+5} + J_{n+6})J_m \cdot k \\
&= \left(\sum_{k=0}^5 J_{n+k} \right) J_{m+1} + \left(\sum_{k=0}^6 J_{n+k} \right) \cdot J_m \cdot k \\
&= 7(J_n + J_{n+3})J_{m+1} + 7(J_{n+1} + J_{n+4})J_m \cdot k \\
&= 7[J_{m+1}J_n + J_{m+1}J_{n+3} + J_{n+1}J_m \cdot k + J_{n+4}J_m \cdot k] \\
&= 7[J_{m+1}J_n + J_{n+1}J_m \cdot k + J_{m+1}J_{n+3} + J_{n+4} + J_m \cdot k] \\
&= 7[G(n, m) + G(n+3, m)] \square
\end{aligned}$$

Identidade 2: A soma dos n primeiros números $G(n, m)$ é dada por

$$\sum_{k=0}^n G(k, m) = \frac{1}{2} [(J_{n+2} - 1)J_{m+1} + (J_{n+3} - 1)J_m \cdot k]$$

Demonstração: Observando a relação $G(n+1, m) = G(n, m) + 2G(n-1, m)$, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} G(2, m) = G(1, m) + 2G(0, m) \\ G(3, m) = G(2, m) + 2G(1, m) \\ G(4, m) = G(3, m) + 2G(2, m) \\ G(5, m) = G(4, m) + 2G(3, m) \\ \vdots \\ G(n-2, m) = G(n-3, m) + 2G(n-4, m) \\ G(n-1, m) = G(n-2, m) + 2G(n-3, m) \\ G(n, m) = G(n-1, m) + 2G(n-2, m) \\ G(n+1, m) = G(n, m) + 2G(n-1, m) \\ G(n+2, m) = G(n+1, m) + 2G(n, m) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} G(2, m) - G(1, m) = 2G(0, m) \\ G(3, m) - G(2, m) = 2G(1, m) \\ G(4, m) - G(3, m) = 2G(2, m) \\ G(5, m) - G(4, m) = 2G(3, m) \\ \vdots \\ G(n-2, m) - G(n-3, m) = 2G(n-4, m) \\ G(n-1, m) - G(n-2, m) = 2G(n-3, m) \\ G(n, m) - G(n-1, m) = 2G(n-2, m) \\ G(n+1, m) - G(n, m) = 2G(n-1, m) \\ G(n+2, m) - G(n+1, m) = 2G(n, m) \end{array} \right.$$

Desse modo, tem-se que:

$$G(n+2, m) - G(1, m) = 2 \sum_{k=0}^n G(k, m) \quad \text{ou} \quad \sum_{k=0}^n G(k, m) = \frac{1}{2} (G(n+2, m) - G(1, m))$$

Assim, obtém-se:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n G(k, m) &= \frac{1}{2} (G(n+2, m) - G(1, m)) \\ &= \frac{1}{2} (J_{n+2} J_{m+1} + J_{n+3} J_m \cdot k - J_{m+1} - J_m \cdot k) \\ &= \frac{1}{2} [(J_{n+2} - 1) J_{m+1} + (J_{n+3} - 1) J_m \cdot k] \end{aligned}$$

Teorema 46: Para os números inteiros com índices quaisquer, vale a seguinte propriedade

$$G(-n, -m) = \frac{(-1)^{m+n+3}}{2^{m+n+1}} G(n, m)$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} G(-n, -m) &= J_{-(m+1)} \cdot J_{-n} + J_{-(n+1)} J_{-m} i \\ &= \frac{(-1)^{m+2}}{2^{m+1}} \cdot J_{m+1} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \cdot J_n + \frac{(-1)^{n+2}}{2^{n+1}} \cdot J_{n+1} \cdot \frac{(-1)^{m+1}}{2^m} \cdot J_m \cdot i \\ &= \frac{(-1)^{m+n+3}}{2^{m+n+1}} \cdot J_{m+1} \cdot J_n + \frac{(-1)^{n+m+3}}{2^{n+m+1}} \cdot J_{n+1} \cdot J_m \cdot i \\ &= \frac{(-1)^{n+m+3}}{2^{n+m+1}} (J_{m+1} J_n + J_{n+1} J_m \cdot i) \\ &= \frac{(-1)^{n+m+3}}{2^{m+n+1}} G(n, m) \square \end{aligned}$$

Teorema 47: Para os números inteiros com índices quaisquer, têm-se que:

$$G(n+2, m+2) = G(n+1, m+1) + 2G(n, m+1) + 2[G(n+1, m) + 2G(n, m)]$$

Demonstração:

Sabendo que $G(n+2, m) = G(n+1, m) + 2G(n, m)$ e $G(n, m+2) = G(n, m+1) + 2G(n, m)$. Então tem-se que $G(n+2, m+2) = G(n+2, m+1) + 2G(n+2, m)$. Aplicando a relação de recorrência têm-se:

$$\begin{aligned} G(n+2, m+2) &= G(n+2, m+1) + 2G(n+2, m) \\ &= G(n+1, m+1) + 2G(n, m+1) + 2G(n+2, m) \\ &= G(n+1, m+1) + 2G(n, m+1) + 2[G(n+1, m) + 2G(n, m)] \square \end{aligned}$$

Ademais, observa-se o corolário apresentado por (Oliveira, Alves & Paiva, 2017) que fornece uma fórmula de Binet variante para os números do tipo $G(n, m)$. Nesse sentido,

realiza-se uma adaptação do mesmo, mas neste caso, considera-se a representação desses números para a Sequência de Jacobsthal. Dessa forma, enuncia-se o seguinte corolário.

Corolário 2: Os números de Jacobsthal do tipo $G(n, m)$ são descritos pela seguinte fórmula variante de Binet

$$\begin{cases} \text{(I)} G(n, m) = \frac{\alpha^{n+m+1} \cdot G(1, 1) - \alpha^n \beta^m G(\beta, \alpha) - \alpha^m \beta^n G(\alpha, \beta)}{(\alpha - \beta)^2} \\ \text{(II)} G(-n, -m) = \frac{(-1)^{n+m+3}}{2^{m+n+1}} \cdot \frac{\alpha^{n+m+1} \cdot G(1, 1) - \alpha^n \beta^m G(\beta, \alpha) - \alpha^m \beta^n G(\alpha, \beta)}{(\alpha - \beta)^2} \end{cases}$$

Demonstração:

Sabendo que $G(n, m) = J_n J_{m+1} + J_{n+1} J_m \cdot i$ e aplicando a fórmula de Binet tem-se que:

$$\begin{aligned} G(n, m) &= J_n J_{m+1} + J_{n+1} J_m \cdot i \\ &= \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) \cdot \left(\frac{\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}}{\alpha - \beta} \right) + \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \right) \cdot \left(\frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} \right) i \\ &= \frac{\alpha^{n+m+1} - \alpha^n \beta^{m+1} - \alpha^{m+1} \beta^n + \beta^{n+m+1}}{(\alpha - \beta)^2} + \frac{\alpha^{n+m+1} i - \alpha^{n+1} \beta^m i - \beta^{n+1} \alpha^m i - \beta^{n+m+1}}{(\alpha - \beta)^2} \\ &= \frac{\alpha^{n+m+1} (1+i) - \alpha^n \beta^m (\beta + \alpha i) - \alpha^m \beta^n (\alpha + \beta i)}{(\alpha - \beta)^2} \\ &= \frac{\alpha^{n+m+1} \cdot G(1, 1) - \alpha^n \beta^m \cdot G(\beta, \alpha) - \alpha^m \beta^n G(\alpha, \beta)}{(\alpha - \beta)^2} \square \end{aligned}$$

No segundo item, considera-se o teorema 37 de modo a observar que

$$G(-n, -m) = \frac{(-1)^{n+m+3}}{2^{m+n+1}} G(n, m), \text{ que nos leva a obter a segunda parte do teorema.}$$

Dando continuidade à discussão, propõe-se uma extensão no que tange ao aumento dimensional. Nesse sentido, dedica-se a explorar as relações recorrentes tridimensionais.

3.12.2 Relações Recorrentes Tridimensionais e Identidades

De maneira análoga ao que foi realizado para o caso das relações bidimensionais, propõe-se a seguinte definição, bem como o lema 8 que configuram-se como suportes para os teoremas que serão vistos adiante.

Definição 19: Tomando os seguintes valores iniciais definidos como $G(0, 0, 0) = 0$,

$G(1, 0, 0) = 1, G(0, 1, 0) = i, G(0, 0, 1) = j, G(0, 1, 1) = i + j, G(1, 0, 1) = 1 + j, G(1, 1, 0) = 1 + i$ e $G(1, 1, 1) = 1 + i + j$ devem satisfazer as seguintes relações tridimensionais:

$$G(n+1, m, p) = G(n, m, p) + 2G(n-1, m, p)$$

$$G(n, m+1, p) = G(n, m, p) + 2G(n, m-1, p)$$

$$G(n, m, p+1) = G(n, m, p) + 2G(n, m, p-1)$$

Lema 8: Conforme a definição anterior, vale que:

$$(i) \quad G(n, 0, 0) = J_n$$

$$(ii) \quad G(n, 1, 1) = J_n + J_{n+1} \cdot i + J_{n+1} \cdot j$$

$$(iii) \quad G(n, 1, 0) = J_n + J_{n+1} \cdot i$$

$$(iv) \quad G(n, 0, 1) = J_n + J_{n+1} \cdot j$$

Demonstração: Para demonstrar a propriedade (i), recorre-se aos valores iniciais $G(0, 0, 0) = 0 = J_0$ e $G(1, 0, 0) = 1 = J_1$ e tomamos como base a primeira relação recursiva, tal qual $G(n+1, m, p) = G(n, m, p) + 2G(n-1, m, p)$. Dessa forma, analisa-se a recorrência para $m = p = 0$ e supomos que o resultado é valido para todos os naturais menores ou iguais à n . Vamos mostrar que também é valido para $n+1$. Temos:

$$G(n+1, 0, 0) = G(n, 0, 0) + 2G(n-1, 0, 0)$$

$$G(2, 0, 0) = G(1, 0, 0) + 2G(0, 0, 0) = 1 = J_2$$

$$G(3, 0, 0) = G(2, 0, 0) + 2G(1, 0, 0) = 1 + 2 = 3 = J_3$$

$$G(4, 0, 0) = G(3, 0, 0) + 2G(2, 0, 0) = 3 + 2 = 5 = J_4$$

$$G(5, 0, 0) = G(4, 0, 0) + 2G(3, 0, 0) = 5 + 6 = 11 = J_5$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$G(n, 0, 0) = G(n-1, 0, 0) + 2G(n-2, 0, 0) = J_n$$

$$G(n+1, 0, 0) = G(n, 0, 0) + 2G(n-1, 0, 0) = J_{n+1}$$

$$G(n+2, 0, 0) = G(n+1, 0, 0) + 2G(n, 0, 0) = J_{n+1} + 2J_n = J_{n+2} \quad \square$$

Prosseguindo, para a propriedade (ii), utilizam-se os valores iniciais $G(0, 1, 1) = i + j$ e $G(1, 1, 1) = 1 + i + j$ e relação $G(n+1, m, p) = G(n, m, p) + 2G(n-1, m, p)$. Dessa forma, considera-se $m = p = 1$ e supõe-se que o resultado é valido para todos os naturais menores ou iguais à n . Vamos mostrar que também é valido para $n+1$. Nesse sentido, observa-se que:

$$\begin{aligned}
G(n+1,1,1) &= G(n,1,1) + 2G(n-1,1,1) \\
G(2,1,1) &= G(1,1,1) + 2G(0,1,1) = 1 + 3i + 3j = J_2 + J_3i + J_3j \\
G(3,1,1) &= G(2,1,1) + 2G(1,1,1) = 3 + 5i + 5j = J_3 + J_4i + J_4j \\
G(4,1,1) &= G(3,1,1) + 2G(2,1,1) = 5 + 11i + 11j = J_4 + J_5i + J_5j \\
G(n+2,1,1) &= G(n+1,1,1) + 2G(n,1,1) = J_{n+1} + J_{n+2}i + J_{n+2}j + 2(J_n + J_{n+1}i + J_{n+1}j) \\
&= J_{n+1} + 2J_n + (J_{n+2} + 2J_{n+1})i + (J_{n+2} + 2J_{n+1})j \\
&= J_{n+2} + J_{n+3}i + J_{n+3}j \quad \square
\end{aligned}$$

Dando continuidade, para a propriedade 3 recorre-se novamente as condições iniciais $G(1,1,0) = 1 + i$ e $G(0,1,0) = i$ e $G(n+1, m, p) = G(n, m, p) + 2G(n-1, m, p)$. Nesse sentido, supomos que o resultado é válido para todos os naturais menores ou iguais à n e vamos mostrar que também é válido para $n+1$. Assim, fixa-se $m=1$ e $p=0$. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
G(n+1,1,0) &= G(n,1,0) + 2G(n-1,1,0) \\
G(2,1,0) &= G(1,1,0) + 2G(0,1,0) = 1 + i + 2i = 1 + 3i = J_2 + J_3i \\
G(3,1,0) &= G(2,1,0) + 2G(1,1,0) = 1 + 3i + 2 + 2i = 3 + 5i = J_3 + J_4i \\
G(4,1,0) &= G(3,1,0) + 2G(2,1,0) = 3 + 5i + 2 + 6i = 5 + 11i = J_4 + J_5i \\
G(5,1,0) &= G(4,1,0) + 2G(3,1,0) = 5 + 11i + 6 + 10i = 11 + 21i = J_5 + J_6i \\
&\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
G(n,1,0) &= G(n-1,1,0) + 2G(n-2,1,0) = J_n + J_{n+1}i \\
G(n+1,1,0) &= G(n,1,0) + 2G(n-1,1,0) = J_{n+1} + J_{n+2}i \\
G(n+2,1,0) &= G(n+1,1,0) + 2G(n,1,0) = J_{n+1} + J_{n+2}i + 2(J_n + J_{n+1}i) \\
&= J_{n+1} + 2J_n + (J_{n+2} + 2J_{n+1})i \\
&= J_{n+2} + J_{n+3}i \quad \square
\end{aligned}$$

Por fim, para a demonstração de (iv) observa-se as condições iniciais $G(1,0,1) = 1 + j$ e $G(0,0,1) = j$ e considera-se $G(n+1, m, p) = G(n, m, p) + 2G(n-1, m, p)$. Destarte, faz-se $m=0$ e $p=1$ e supomos que o resultado é válido para todos os naturais menores ou iguais à n . Vamos mostrar que também é válido para $n+1$. Destarte, constatamos que:

$$\begin{aligned}
G(n+1,0,1) &= G(n,0,1) + 2G(n-1,0,1) \\
G(2,0,1) &= G(1,0,1) + 2G(0,0,1) = 1 + j + 2j = 1 + 3j = J_2 + J_3j \\
G(3,0,1) &= G(2,0,1) + 2G(1,0,1) = 1 + 3j + 2 + 2j = 3 + 5j = J_3 + J_4j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(4,0,1) &= G(3,0,1) + 2G(2,0,1) = 3 + 5j + 2 + 6j = 5 + 11j = J_4 + J_5j \\
G(5,0,1) &= G(4,0,1) + 2G(3,0,1) = 5 + 11j + 6 + 10j = 11 + 21j = J_5 + J_6j \\
&\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
G(n,0,1) &= G(n-1,0,1) + 2G(n-2,0,1) = J_n + J_{n+1}j \\
G(n+1,0,1) &= G(n,0,1) + 2G(n-1,0,1) = J_{n+1} + J_{n+2}j \\
G(n+2,0,1) &= G(n+1,0,1) + 2G(n,0,1) = J_{n+1} + J_{n+2}j + 2(J_n + J_{n+1}j) \\
&= J_{n+1} + 2J_n + (J_{n+2} + 2J_{n+1})j \\
&= J_{n+2} + J_{n+3}j \quad \square
\end{aligned}$$

De modo semelhante, utilizando o segundo princípio indutivo sobre m pode-se obter as seguintes propriedades $G(0, m, 0) = J_m i$, $G(0, m, 1) = J_m i + J_{m+1} j$, $G(1, m, 0) = J_{m+1} + J_m i$ e $G(1, m, 1) = J_{m+1} + J_m i + J_{m+1} j$.

Não obstante, por indução sobre p é possível obter as propriedades $G(0, 0, p) = J_p j$, $G(0, 1, p) = J_{p+1} i + J_p j$, $G(1, 0, p) = J_{p+1} + J_p j$, $G(1, 1, p) = J_{p+1} + J_{p+1} i + J_p j$.

Lema 9: Valem as seguintes propriedades

- (i) $G(0, m, 0) = J_m \cdot i$
- (ii) $G(0, m, 1) = J_m i + J_{m+1} j$
- (iii) $G(1, m, 0) = J_{m+1} + J_m \cdot i$
- (iv) $G(1, m, 1) = J_{m+1} + J_m \cdot i + J_{m+1} \cdot j$

Demonstração: Para a demonstração do item (i), considera-se a relação de recorrência

$G(n, m+1, p) = G(n, m, p) + 2G(n, m-1, p)$. Nesse sentido, consideramos os valores iniciais $G(0, 0, 0) = 0$ e $G(0, 1, 0) = i$. Assim, aplica-se o segundo princípio de indução sobre m . Desse modo, supomos que o resultado é válido para todos os naturais menores ou iguais à m e vamos

mostrar que também é válido para $m+1$. Assim, fixando $n=p=0$ obtemos que:

$$\begin{aligned}
 G(0, m+1, 0) &= G(0, m, 0) + 2G(0, m-1, 0) \\
 G(0, 2, 0) &= G(0, 1, 0) + 2G(0, 0, 0) = i + 1 \cdot i = J_2 i \\
 G(0, 3, 0) &= G(0, 2, 0) + 2G(0, 1, 0) = i + 2i = 3i = J_3 i \\
 G(0, 4, 0) &= G(0, 3, 0) + 2G(0, 1, 0) = 3i + 2i = 5i = J_4 i \\
 G(0, 5, 0) &= G(0, 4, 0) + 2G(0, 3, 0) = 5i + 6i = 11i = J_5 i \\
 &\vdots \\
 G(0, m, 0) &= G(0, m-1, 0) + 2G(0, m-2, 0) = J_m i \\
 G(0, m+1, 0) &= G(0, m, 0) + 2G(0, m-1, 0) = J_{m+1} i \\
 G(0, m+2, 0) &= G(0, m+1, 0) + 2G(0, m, 0) = J_{m+1} i + 2J_m i \\
 &= (J_{m+1} + 2J_m) i \\
 &= J_{m+2} i
 \end{aligned}$$

Dando continuidade, para a propriedade (ii), empregam-se as condições $G(0,0,1)=j$ e $G(0,1,1)=i+j$ e a relação de recorrência $G(n, m+1, p) = G(n, m, p) + 2G(n, m-1, p)$. Destarte, utiliza-se o segundo Princípio de Indução Matemática. Dessa forma, supomos que o resultado é válido para todos os naturais menores ou iguais à m e vamos mostrar que também é válido para $m+1$. Assim, estabelecendo $n=0$ e $p=1$. Temos que:

$$\begin{aligned}
 G(0, m+1, 1) &= G(0, m, 1) + 2G(0, m-1, 1) \\
 G(0, 2, 1) &= G(0, 1, 1) + 2G(0, 0, 1) = i + j + 2j = i + 3j = J_2 i + J_3 j \\
 G(0, 3, 1) &= G(0, 2, 1) + 2G(0, 1, 1) = i + 3j + 2i + 2j = 3i + 5j = J_3 i + J_4 j \\
 G(0, 4, 1) &= G(0, 3, 1) + 2G(0, 2, 1) = 3i + 5j + 2i + 6j = 5i + 11j = J_4 i + J_5 j \\
 G(0, 5, 1) &= G(0, 4, 1) + 2G(0, 3, 1) = 5i + 11j + 6i + 10j = 11i + 21j = J_5 i + J_6 j \\
 &\vdots \\
 G(0, m, 1) &= G(0, m-1, 1) + 2G(0, m-2, 1) = J_m i + J_{m+1} j \\
 G(0, m+1, 1) &= G(0, m, 1) + 2G(0, m-1, 1) = J_{m+1} i + J_{m+2} j \\
 G(0, m+2, 1) &= G(0, m+1, 1) + 2G(0, m, 1) = J_{m+1} i + J_{m+2} j + 2(J_m i + J_{m+1} j) \\
 &= (J_{m+1} + 2J_m) i + (J_{m+2} + 2J_{m+1}) j \\
 &= J_{m+2} i + J_{m+3} j
 \end{aligned}$$

Prosseguindo, para o item (iii), utilizamos os valores $G(1,0,0)=1$ e $G(1,1,0)=1+i$ e observando a relação $G(n, m+1, p) = G(n, m, p) + 2G(n, m-1, p)$. Com base no segundo Princípio de Indução Matemática, supomos que o resultado é válido para todos os naturais menores ou iguais à m e vamos mostrar que também é válido para $m+1$. Fazendo $n=1$ e $p=0$, temos:

$$\begin{aligned}
G(1, m+1, 0) &= G(1, m, 0) + 2G(1, m-1, 0) \\
G(1, 2, 0) &= G(1, 1, 0) + 2G(1, 0, 0) = 1 + i + 2 = J_3 + J_2 i \\
G(1, 3, 0) &= G(1, 2, 0) + 2G(1, 1, 0) = 3 + i + 2 + 2i = 5 + 3i = J_4 + J_3 i \\
G(1, 4, 0) &= G(1, 3, 0) + 2G(1, 2, 0) = 5 + 3i + 6 + 2i = 11 + 5i = J_5 + J_4 i \\
G(1, 5, 0) &= G(1, 4, 0) + 2G(1, 3, 0) = 11 + 5i + 10 + 6i = 21 + 11i = J_6 + J_5 i \\
&\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
G(1, m, 0) &= G(1, m-1, 0) + 2G(1, m-2, 0) = J_{m+1} + J_m i \\
G(1, m+1, 0) &= G(1, m, 0) + 2G(1, m-1, 0) = J_{m+2} + J_{m+1} i \\
G(1, m+2, 0) &= G(1, m+1, 0) + 2G(1, m, 0) = J_{m+2} + J_{m+1} i + 2(J_{m+1} + J_m i) \\
&= J_{m+2} + 2J_{m+1} i + (J_{m+1} + 2J_m) i \\
&= J_{m+3} + J_{m+2} i
\end{aligned}$$

Por fim, a última propriedade consideramos as condições iniciais $G(1, 0, 1) = 1 + j$ e $G(1, 1, 1) = 1 + i + j$ e $G(n, m+1, p) = G(n, m, p) + 2G(n, m-1, p)$. Nesse sentido, supomos que o resultado é válido para todos os naturais menores ou iguais à m e vamos mostrar que também é válido para $m+1$. Assim, estabelecendo $n = p = 1$, temos:

$$\begin{aligned}
G(1, m+1, 1) &= G(1, m, 1) + 2G(1, m-1, 1) \\
G(1, 2, 1) &= G(1, 1, 1) + 2G(1, 0, 1) = 3 + i + 3j = J_3 + J_2 i + J_3 j \\
G(1, 3, 1) &= G(1, 2, 1) + 2G(1, 1, 1) = 5 + 3i + 5j = J_4 + J_3 i + J_4 j \\
G(1, 4, 1) &= G(1, 3, 1) + 2G(1, 2, 1) = 11 + 5i + 11j = J_5 + J_4 i + J_5 j \\
G(1, 5, 1) &= G(1, 4, 1) + 2G(1, 3, 1) = 21 + 11i + 21j = J_6 + J_5 i + J_6 j \\
&\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
G(1, m, 1) &= G(1, m-1, 1) + 2G(1, m-2, 1) = J_{m+1} + J_m i + J_{m+1} j \\
G(1, m+1, 1) &= G(1, m, 1) + 2G(1, m-1, 1) = J_{m+2} + J_{m+1} i + J_{m+2} j \\
G(1, m+2, 1) &= G(1, m+1, 1) + 2G(1, m, 1) = J_{m+2} + 2J_{m+1} i + (J_{m+1} + 2J_m) i + (J_{m+2} + 2J_{m+1}) j \\
&= J_{m+3} + J_{m+2} i + J_{m+3} j \quad \square
\end{aligned}$$

Lema 10: Valem as seguintes propriedades

- (i) $G(0, 0, p) = J_p \cdot j$
- (ii) $G(0, 1, p) = J_{p+1} \cdot i + J_p \cdot j$
- (iii) $G(1, 0, p) = J_{p+1} + J_p \cdot j$
- (iv) $G(1, 1, p) = J_{p+1} + J_{p+1} \cdot i + J_p \cdot j$

Demonstração: Para procedermos a demonstração do item (i), consideramos a relação de recorrência $G(n, m, p+1) = G(n, m, p) + 2G(n, m, p-1)$ e as condições iniciais $G(0, 0, 0) = 0$ e $G(0, 0, 1) = j$. Prosseguindo, aplicamos o princípio de indução finita e supomos que o

resultado é valido para todos os naturais menores ou iguais à p e vamos mostrar que também é valido para $p+1$. Fixamos $n = m = 0$. Nesse sentido, obtemos:

$$\begin{aligned}
 G(0,0,p+1) &= G(0,0,p) + 2G(0,0,p-1) \\
 G(0,0,2) &= G(0,0,1) + 2G(0,0,0) = j = J_2 \cdot j \\
 G(0,0,3) &= G(0,0,2) + 2G(0,0,1) = 3j = J_3 j \\
 G(0,0,4) &= G(0,0,3) + 2G(0,0,2) = 5j = J_4 j \\
 G(0,0,5) &= G(0,0,4) + 2G(0,0,3) = 11j = J_5 j \\
 &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 G(0,0,p) &= G(0,0,p-1) + 2G(0,0,p-2) = J_p j \\
 G(0,0,p+1) &= G(0,0,p) + 2G(0,0,p-1) = J_{p+1} j \\
 G(0,0,p+2) &= G(0,0,p+1) + 2G(0,0,p) = J_{p+1} j + 2J_p j \\
 &= J_{p+2} j
 \end{aligned}$$

Dando continuidade, para o item (ii), utilizamos as condições $G(0,1,0) = i$ e $G(0,1,1) = i + j$ e a recorrência $G(n,m,p+1) = G(n,m,p) + 2G(n,m,p-1)$ e com base no segundo princípio de indução sobre p e supomos que o resultado é valido para todos os naturais menores ou iguais à p . Assim, vamos mostrar que também é valido para $p+1$. De fato, tomando $n = 0$ e $m = 1$, temos:

$$\begin{aligned}
 G(0,1,p+1) &= G(0,1,p) + 2G(0,1,p-1) \\
 G(0,1,2) &= G(0,1,1) + 2G(0,1,0) = 3i + j = J_3 i + J_1 j \\
 G(0,1,3) &= G(0,1,2) + 2G(0,1,1) = 5i + 3j = J_4 i + J_3 j \\
 G(0,1,4) &= G(0,1,3) + 2G(0,1,2) = 11i + 5j = J_5 i + J_4 j \\
 G(0,1,5) &= G(0,1,4) + 2G(0,1,3) = 21i + 11j = J_6 i + J_5 j \\
 &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 G(0,1,p) &= G(0,1,p-1) + 2G(0,1,p-2) = J_{p+1} i + J_p j \\
 G(0,1,p+1) &= G(0,1,p) + 2G(0,1,p-1) = J_{p+2} i + J_{p+1} j \\
 G(0,1,p+2) &= G(0,1,p+1) + 2G(0,1,p) = J_{p+2} i + J_{p+1} j + 2(J_{p+1} i + J_p j) \\
 &= (J_{p+2} + 2J_{p+1})i + (J_{p+1} + 2J_p)j \\
 &= J_{p+3} i + J_{p+2} j
 \end{aligned}$$

Para o item (iii), tomamos os valores iniciais $G(1,0,0) = 1$ e $G(1,0,1) = 1 + j$ e com referência na recorrência $G(n,m,p+1) = G(n,m,p) + 2G(n,m,p-1)$. Nesse sentido,

baseando-se no segundo princípio de indução sobre p e supomos que o resultado é valido para todos os naturais menores ou iguais à p . Assim, vamos mostrar que também é valido para $p+1$. Avaliando a recorrência para $n = 1$ e $m = 0$, temos:

$$\begin{aligned}
 G(1, 0, p+1) &= G(1, 0, p) + 2G(1, 0, p-1) \\
 G(1, 0, 2) &= G(1, 0, 1) + 2G(1, 0, 0) = 3 + j = J_3 + J_2 j \\
 G(1, 0, 3) &= G(1, 0, 2) + 2G(1, 0, 1) = 5 + 3j = J_4 + J_3 j \\
 G(1, 0, 4) &= G(1, 0, 3) + 2G(1, 0, 2) = 11 + 5j = J_5 + J_4 j \\
 G(1, 0, 5) &= G(1, 0, 4) + 2G(1, 0, 3) = 21 + 11j = J_6 + J_5 j \\
 &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 G(1, 0, p) &= G(1, 0, p-1) + 2G(1, 0, p-2) = J_{p+1} + J_p j \\
 G(1, 0, p+1) &= G(1, 0, p) + 2G(1, 0, p-1) = J_{p+2} + J_{p+1} j \\
 G(1, 0, p+2) &= G(1, 0, p+1) + 2G(1, 0, p) = J_{p+2} + J_{p+1} j + 2(J_{p+1} + J_p j) \\
 &= J_{p+2} + 2J_{p+1} + (J_{p+1} + 2J_p) j \\
 &= J_{p+3} + J_{p+2} j
 \end{aligned}$$

Para procedermos a prova do item (iv), observamos as condições iniciais $G(1, 1, 0) = 1 + i$ e $G(1, 1, 1) = 1 + i + j$ e a recorrência $G(n, m, p+1) = G(n, m, p) + 2G(n, m, p-1)$. Assim, com base no segundo princípio de indução sobre p , supomos que o resultado é valido para todos os naturais menores ou iguais à p . Assim, vamos mostrar que também é valido para $p+1$. Analisando a recorrência para $n = m = 1$, temos:

$$\begin{aligned}
 G(1, 1, p+1) &= G(1, 1, p) + 2G(1, 1, p-1) \\
 G(1, 1, 2) &= G(1, 1, 1) + 2G(1, 1, 0) = 3 + 3i + j = J_3 + J_3 i + J_2 j \\
 G(1, 1, 3) &= G(1, 1, 2) + 2G(1, 1, 1) = 5 + 5i + 3j = J_4 + J_4 i + J_3 j \\
 G(1, 1, 4) &= G(1, 1, 3) + 2G(1, 1, 2) = 11 + 11i + 5j = J_5 + J_5 i + J_4 j \\
 G(1, 1, 5) &= G(1, 1, 4) + 2G(1, 1, 3) = 21 + 21i + 11j = J_6 + J_6 i + J_5 j \\
 &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 G(1, 1, p) &= G(1, 1, p-1) + 2G(1, 1, p-2) = J_{p+1} + J_{p+1} i + J_p j \\
 G(1, 1, p+1) &= G(1, 1, p) + 2G(1, 1, p-1) = J_{p+2} + J_{p+2} i + J_{p+1} j \\
 G(1, 1, p+2) &= G(1, 1, p+1) + 2G(1, 1, p) = J_{p+2} + J_{p+2} i + J_{p+1} j + 2(J_{p+1} + J_{p+1} i + J_p j) \\
 &= J_{p+2} + 2J_{p+1} + (J_{p+2} + 2J_{p+1}) i + (J_{p+1} + 2J_p) j \\
 &= J_{p+3} + J_{p+3} i + J_{p+2} j
 \end{aligned}$$

Teorema 48: Os números da forma $G(0, m, p)$ são descritos por

$$G(0, m, p) = (J_m \cdot J_{p+1}) \cdot i + (J_{m+1} \cdot J_p) j$$

para todo $m, p \in \mathbb{N}$

Demonstração: A demonstração será realizada por meio do Princípio de indução sobre m . Nesse sentido, supomos que o resultado é válido para todos os naturais menores ou iguais à m . Assim, vamos mostrar que também é válido para $m + 1$. fixando o valor de p , temos que:

Para $m = 0$, observamos que:

$$\begin{aligned} G(0, 0, p) &= (J_0 \cdot J_{p+1}) \cdot i + (J_1 \cdot J_p) j \\ &= J_p \cdot j \end{aligned}$$

Conforme o lema 4, percebemos que a propriedade é verdadeira. Agora vamos supor a validade do teorema para todos os naturais menores ou iguais à m . Assim, vamos mostrar que também é válido para $m + 1$.

$$\begin{aligned} G(0, 1, p) &= (J_1 \cdot J_{p+1}) i + (J_2 \cdot J_p) j \\ G(0, 2, p) &= (J_2 \cdot J_{p+1}) i + (J_3 \cdot J_p) j \\ G(0, 3, p) &= (J_3 \cdot J_{p+1}) i + (J_4 \cdot J_p) j \\ &\vdots \\ G(0, k, p) &= (J_k \cdot J_{p+1}) i + (J_{k+1} J_p) j \\ G(0, k + 1, p) &= (J_{k+1} \cdot J_{p+1}) i + (J_{k+2} J_p) j \end{aligned}$$

Vamos mostrar a veracidade do teorema para $m = k + 2$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} G(0, k + 2, p) &= G(0, k + 1, p) + 2G(0, k, p) \\ &= \left[(J_{k+1} \cdot J_{p+1}) i + (J_{k+2} \cdot J_p) j \right] + 2 \left[(J_k \cdot J_{p+1}) i + (J_{k+1} \cdot J_p) j \right] \\ &= (J_{k+1} + 2J_k) J_{p+1} \cdot i + (J_{k+2} + 2J_{k+1}) J_p \cdot j \\ &= (J_{k+2} \cdot J_{p+1}) i + (J_{k+3} \cdot J_p) j \end{aligned}$$

Daí segue o resultado.

Teorema 49: Para quaisquer $n, m, p \in \mathbb{N}$, os números do tipo $G(n, m, p)$ podem ser descritos por:

$$G(n, m, p) = J_n \cdot J_{m+1} \cdot J_{p+1} + (J_{n+1} \cdot J_m \cdot J_{p+1})i + (J_{n+1} \cdot J_{m+1} \cdot J_p)j$$

Demonstração: A demonstração será feita por indução sobre n . Nesse sentido, fixando naturais quaisquer n e p , temos que:

$$\begin{aligned} G(0, m, p) &= J_0 \cdot J_{m+1} \cdot J_{p+1} + (J_1 \cdot J_m \cdot J_{p+1})i + (J_1 \cdot J_{m+1} \cdot J_p)j \\ &= (J_m \cdot J_{p+1})i + (J_{m+1} \cdot J_p)j \end{aligned}$$

A equação acima transcrita, conforme o teorema 48 é verdadeira. Outrossim, vamos supor a validade do teorema para $n = 1, 2, \dots, k+1$. Nesse sentido, temos que:

$$\begin{aligned} G(1, m, p) &= J_1 \cdot J_{m+1} \cdot J_{p+1} + (J_2 \cdot J_m \cdot J_{p+1})i + (J_2 \cdot J_{m+1} \cdot J_p)j \\ G(2, m, p) &= J_2 \cdot J_{m+1} \cdot J_{p+1} + (J_3 \cdot J_m \cdot J_{p+1})i + (J_3 \cdot J_{m+1} \cdot J_p)j \\ G(3, m, p) &= J_3 \cdot J_{m+1} \cdot J_{p+1} + (J_4 \cdot J_m \cdot J_{p+1})i + (J_4 \cdot J_{m+1} \cdot J_p)j \\ &\vdots \\ G(k, m, p) &= J_k \cdot J_{m+1} \cdot J_{p+1} + (J_{k+1} \cdot J_m \cdot J_{p+1})i + (J_{k+1} \cdot J_{m+1} \cdot J_p)j \\ G(k+1, m, p) &= J_{k+1} \cdot J_{m+1} \cdot J_{p+1} + (J_{k+2} \cdot J_m \cdot J_{p+1})i + (J_{k+2} \cdot J_{m+1} \cdot J_p)j \end{aligned}$$

Doravante, vamos mostrar a validade para $n = k+2$. Observamos que:

$$\begin{aligned} G(k+2, m, p) &= G(k+1, m, p) + 2G(k, m, p) \\ &= \left[J_{k+1} \cdot J_{m+1} \cdot J_{p+1} + (J_{k+2} \cdot J_m \cdot J_{p+1})i + (J_{k+2} \cdot J_{m+1} \cdot J_p)j \right] + \\ &\quad + 2 \left[J_k \cdot J_{m+1} \cdot J_{p+1} + (J_{k+1} \cdot J_m \cdot J_{p+1})i + (J_{k+1} \cdot J_{m+1} \cdot J_p)j \right] \\ &= (J_{k+1} + 2J_k) J_{m+1} \cdot J_{p+1} + (J_{k+2} + 2J_{k+1}) J_m \cdot J_{p+1} i \\ &\quad + (J_{k+2} + 2J_{k+1}) J_{m+1} \cdot J_p j \\ &= J_{k+2} \cdot J_{m+1} \cdot J_{p+1} + (J_{k+3} \cdot J_m \cdot J_{p+1})i + (J_{k+3} \cdot J_{m+1} \cdot J_p)j \end{aligned}$$

O que prova o resultado.

Identidade 3: A soma de seis termos consecutivos é dada por:

$$\sum_{\ell=0}^5 G(n+\ell, m, p) = 7[G(n, m, p) + G(n+3, m, p)]$$

Demonstração:

Sabendo que:

$$\begin{aligned}
G(n, m, p) &= J_n \cdot J_{m+1} \cdot J_{p+1} + (J_{n+1} \cdot J_m \cdot J_{p+1})i + (J_{n+1} \cdot J_{m+1} \cdot J_p)j \\
G(n+1, m, p) &= J_{n+1} \cdot J_{m+1} \cdot J_{p+1} + (J_{n+2} \cdot J_m \cdot J_{p+1})i + (J_{n+2} \cdot J_{m+1} \cdot J_p)j \\
G(n+2, m, p) &= J_{n+2} \cdot J_{m+1} \cdot J_{p+1} + (J_{n+3} \cdot J_m \cdot J_{p+1})i + (J_{n+3} \cdot J_{m+1} \cdot J_p)j \\
G(n+3, m, p) &= J_{n+3} \cdot J_{m+1} \cdot J_{p+1} + (J_{n+4} \cdot J_m \cdot J_{p+1})i + (J_{n+4} \cdot J_{m+1} \cdot J_p)j \\
G(n+4, m, p) &= J_{n+4} \cdot J_{m+1} \cdot J_{p+1} + (J_{n+5} \cdot J_m \cdot J_{p+1})i + (J_{n+5} \cdot J_{m+1} \cdot J_p)j \\
G(n+5, m, p) &= J_{n+5} \cdot J_{m+1} \cdot J_{p+1} + (J_{n+6} \cdot J_m \cdot J_{p+1})i + (J_{n+6} \cdot J_{m+1} \cdot J_p)j
\end{aligned}$$

Por outro lado, conforme foi estabelecido na identidade 1, temos que: $\sum_{\ell=0}^5 J_{n+\ell} = 7J_n + 7J_{n+3}$ e

$$\sum_{\ell=0}^6 J_{n+\ell} = 7J_{n+1} + 7J_{n+4}. \text{ Assim,}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^5 G(n+\ell, m, p) &= G(n, m, p) + G(n+1, m, p) + G(n+2, m, p) + G(n+3, m, p) + \\
&\quad + G(n+4, m, p) + G(n+5, m, p) \\
&= (J_n + J_{n+1} + J_{n+2} + J_{n+3} + J_{n+4} + J_{n+5})J_{m+1} \cdot J_{p+1} + \\
&\quad + (J_{n+1} + J_{n+2} + J_{n+3} + J_{n+4} + J_{n+5} + J_{n+6})J_m \cdot J_{p+1}i \\
&\quad + (J_{n+1} + J_{n+2} + J_{n+3} + J_{n+4} + J_{n+5} + J_{n+6})J_{m+1} \cdot J_p \cdot j \\
&= \left(\sum_{\ell=0}^5 J_{n+\ell} \right) J_{m+1} \cdot J_{p+1} + \left(\sum_{\ell=0}^6 J_{n+\ell} \right) \cdot J_m \cdot J_{p+1} \cdot i + \left(\sum_{\ell=0}^6 J_{n+\ell} \right) J_{m+1} \cdot J_p \cdot j \\
&= 7(J_n + J_{n+3})J_{m+1} \cdot J_{p+1} + 7(J_{n+1} + J_{n+4})J_m \cdot J_{p+1} \cdot i + 7(J_{n+1} + J_{n+4})J_{m+1} \cdot J_p \cdot j \\
&= 7 \left[\begin{aligned} &J_n \cdot J_{m+1} \cdot J_{p+1} + J_{n+3} \cdot J_{m+1} \cdot J_{p+1} + J_{n+1} \cdot J_m \cdot J_{p+1} \cdot i + J_{n+4} \cdot J_m \cdot J_{p+1} \cdot i \\ &+ J_{n+1} \cdot J_{m+1} \cdot J_p \cdot j + J_{n+4} \cdot J_{m+1} \cdot J_p \cdot j \end{aligned} \right] \\
&= 7 \left[\begin{aligned} &J_n \cdot J_{m+1} \cdot J_{p+1} + (J_{n+1} \cdot J_m \cdot J_{p+1}) \cdot i + (J_{n+1} \cdot J_{m+1} \cdot J_p) \cdot j + J_{n+3} \cdot J_{m+1} \cdot J_{p+1} + \\ &(J_{n+4} \cdot J_m \cdot J_{p+1}) \cdot i + (J_{n+4} \cdot J_{m+1} \cdot J_p) \cdot j \end{aligned} \right] \\
&= 7[G(n, m, p) + G(n+3, m, p)]
\end{aligned}$$

Identidade 4: A soma dos n primeiros números $G(n, m, p)$ é dada por

$$\sum_{\ell=0}^n G(\ell, m, p) = \frac{1}{2} \left[(J_{n+2} - 1)J_{m+1} \cdot J_{p+1} + (J_{n+3} - 1)J_m \cdot J_{p+1} \cdot i + (J_{n+3} - 1)J_{m+1} \cdot J_p \cdot j \right]$$

Demonstração: Considerando a relação $G(n+1, m, p) = G(n, m, p) + 2G(n-1, m, p)$

$$\left\{ \begin{array}{l} G(2, m, p) = G(1, m, p) + 2G(0, m, p) \\ G(3, m, p) = G(2, m, p) + 2G(1, m, p) \\ G(4, m, p) = G(3, m, p) + 2G(2, m, p) \\ G(5, m, p) = G(4, m, p) + 2G(3, m, p) \\ \vdots \\ G(n-2, m, p) = G(n-3, m, p) + 2G(n-4, m, p) \\ G(n-1, m, p) = G(n-2, m, p) + 2G(n-3, m, p) \\ G(n, m, p) = G(n-1, m, p) + 2G(n-2, m, p) \\ G(n+1, m, p) = G(n, m, p) + 2G(n-1, m, p) \\ G(n+2, m, p) = G(n+1, m, p) + 2G(n, m, p) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} G(2, m, p) - G(1, m, p) = 2G(0, m, p) \\ G(3, m, p) - G(2, m, p) = 2G(1, m, p) \\ G(4, m, p) - G(3, m, p) = 2G(2, m, p) \\ G(5, m, p) - G(4, m, p) = 2G(3, m, p) \\ \vdots \\ G(n-2, m, p) - G(n-3, m, p) = 2G(n-4, m, p) \\ G(n-1, m, p) - G(n-2, m, p) = 2G(n-3, m, p) \\ G(n, m, p) - G(n-1, m, p) = 2G(n-2, m, p) \\ G(n+1, m, p) - G(n, m, p) = 2G(n-1, m, p) \\ G(n+2, m, p) - G(n+1, m, p) = 2G(n, m, p) \end{array} \right.$$

Dessa forma, temos que:

$$G(n+2, m, p) - G(1, m, p) = 2 \sum_{\ell=0}^n G(\ell, m, p). \text{ Assim, temos que:}$$

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^n G(\ell, m, p) &= \frac{1}{2} (G(n+2, m, p) - G(1, m, p)) \\ &= \frac{1}{2} \left[\begin{array}{l} J_{n+2} \cdot J_{m+1} \cdot J_{p+1} + (J_{n+3} \cdot J_m \cdot J_{p+1})i + (J_{n+3} \cdot J_{m+1} \cdot J_p)j - \\ J_1 \cdot J_{m+1} \cdot J_{p+1} - (J_2 \cdot J_m \cdot J_{p+1})i - (J_2 \cdot J_{m+1} \cdot J_p)j \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(J_{n+2} - J_1) J_{m+1} \cdot J_{p+1} + (J_{n+3} - 1) J_m \cdot J_{p+1} \cdot i + (J_{n+3} - 1) J_{m+1} \cdot J_p \cdot j \right] \end{aligned}$$

A seguir, apresentamos algumas definições e teoremas voltados para uma abordagem n-dimensional em que será explorado o aumento do número de variáveis, bem como suas unidades imaginárias.

3.12.3 Relações Recorrentes n-dimensionais e identidades

Conforme Oliveira (2018), algumas relações recorrentes n-dimensionais apresentam uma expressão generalizada para números hipercomplexos na forma $G(n, n_2, n_3, \dots, n_n)$ com n variáveis. Com base nisso, buscamos a compreensão da generalização e de algumas propriedades n-dimensionais relativas ao modelo de Jacobsthal. Nesse sentido, apoiados no trabalho da referida autora, apresentamos a seguinte definição.

Definição 20: Considerando $G(n, n_2, n_3, n_4, \dots, n_n)$ um número hipercomplexo com n variáveis para $n \geq 2$, temos que além da unidade imaginária i , o conjunto de componentes

imaginárias, tais quais $(\mu_1 = j, \mu_2 = k, \dots, \mu_{n-2})$. Nesse sentido, definimos as seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned} G(1, 0, 1, \dots, 1) &= 1 + \mu_1 + \dots + \mu_{n-2} \\ G(1, 1, 0, 1, \dots, 1) &= 1 + i + \mu_2 + \dots + \mu_{n-2} \\ &\vdots \\ G(1, 1, 1, \dots, 1, 0) &= 1 + i + \mu_1 + \dots + \mu_{n-3} \end{aligned}$$

Nesse sentido, os números da forma $G(n, n_2, n_3, \dots, n_n)$ devem satisfazer as relações n-dimensionais de recorrência:

$$\begin{aligned} G(0, 0, 0, \dots, 0) &= 0 \\ G(1, 0, 0, \dots, 0) &= 1 \\ G(0, 1, 0, \dots, 0) &= i \\ G(0, 0, 1, \dots, 0) &= j \\ G(0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0) &= \mu_2 \\ G(0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0) &= \mu_3 \\ &\vdots \\ G(0, 0, 0, \dots, 0, 1) &= \mu_{n-2} \\ G(1, 1, 1, \dots, 1) &= 1 + i + \mu_1 + \dots + \mu_{n-2} \\ G(0, 1, 1, \dots, 1) &= i + \mu_1 + \dots + \mu_{n-2} \\ G(n+1, n_2, \dots, n_n) &= G(n, n_2, \dots, n_n) + 2G(n-1, n_2, \dots, n_n) \\ G(n, n_2+1, \dots, n_n) &= G(n, n_2, \dots, n_n) + 2G(n, n_2-1, \dots, n_n) \\ G(n, n_2, n_3+1, \dots, n_n) &= G(n, n_2, n_3, \dots, n_n) + 2G(n, n_2, n_3-1, \dots, n_n) \\ &\vdots \\ G(n, n_2, n_3, \dots, n_n+1) &= G(n, n_2, n_3, \dots, n_n) + 2G(n, n_2, n_3, \dots, n_n-1) \end{aligned}$$

Teorema 50: Os números do tipo $G(n, n_2, n_3, \dots, n_n)$ tais que $n, n_2, n_3, \dots, n_n \in \mathbb{N}$ são descritos por:

$$\begin{aligned} G(n, n_2, \dots, n_n) &= \left(J_{n_1} J_{n_2+1} J_{n_3+1} \cdot \dots \cdot J_{n_n+1} \right) + \left(J_{n_1+1} J_{n_2} J_{n_3+1} \cdot \dots \cdot J_{n_n+1} \right) i + \\ &+ \left(J_{n_1+1} J_{n_2+1} J_{n_3} \cdot \dots \cdot J_{n_n+1} \right) \mu_1 + \dots + \left(J_{n_1+1} J_{n_2+1} J_{n_3+1} \cdot \dots \cdot J_{n_n} \right) \mu_{n-2} \end{aligned}$$

Demonstração: Com base nas relações validadas anteriormente $GJ_n = J_n + J_{n+1}i$, $G(n, m) = J_n J_{m+1} + J_{n+1} J_m i$ e $G(n, m, p) = J_n J_{m+1} J_{p+1} + J_{n+1} J_m J_{p+1} i + J_{n+1} J_{m+1} J_p j$. Assim, por meio de um processo indutivo, podemos observar que:

$$\begin{aligned}
GJ_n &= J_n + J_{n+1}i \\
G(n, m) &= J_n J_{m+1} + J_{n+1} J_m i \\
G(n, m, p) &= J_n J_{m+1} J_{p+1} + J_{n+1} J_m J_{p+1} i + J_{n+1} J_{m+1} J_p j \\
G(n, m, p, q) &= J_n J_{m+1} J_{p+1} J_{q+1} + J_{n+1} J_m J_{p+1} J_{q+1} i + J_{n+1} J_{m+1} J_p J_{q+1} j + J_{n+1} J_{m+1} J_{p+1} J_q k \\
&\vdots \\
G(n_1, n_2, \dots, n_n) &= \left(J_{n_1} J_{n_2+1} J_{n_3+1} \cdot \dots \cdot J_{n_n+1} \right) + \left(J_{n_1+1} J_{n_2} J_{n_3+1} \cdot \dots \cdot J_{n_n+1} \right) i + \\
&+ \left(J_{n_1+1} J_{n_2+1} J_{n_3} \cdot \dots \cdot J_{n_n+1} \right) \mu_1 + \dots + \left(J_{n_1+1} J_{n_2+1} J_{n_3+1} \cdot \dots \cdot J_{n_n} \right) \mu_{n-2}
\end{aligned}$$

Identidade 5: A soma de seis números $G(n, n_2, n_3, \dots, n_n)$ consecutivos é expressa por:

$$\sum_{\ell=0}^5 G(n+\ell, n_2, n_3, \dots, n_n) = 7[G(n, n_2, n_3, \dots, n_n) + G(n+3, n_2, n_3, \dots, n_n)]$$

Demonstração: Utilizando o raciocínio indutivo, temos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=0}^5 G(n+\ell, m) &= 7[G(n, m) + G(n+3, m)] \\
\sum_{\ell=0}^5 G(n+\ell, m, p) &= 7[G(n, m, p) + G(n+3, m, p)] \\
\sum_{\ell=0}^5 G(n+\ell, m, p, q) &= 7[G(n, m, p, q) + G(n+3, m, p, q)] \\
&\vdots \\
\sum_{\ell=0}^5 G(n+\ell, n_2, n_3, \dots, n_n) &= 7[G(n, n_2, n_3, \dots, n_n) + G(n+3, n_2, n_3, \dots, n_n)]
\end{aligned}$$

Assim, conforme as demonstrações realizadas anteriormente, temos que:

$$\begin{aligned}
G(n, n_2, \dots, n_n) &= \left(J_{n_1} J_{n_2+1} J_{n_3+1} \cdot \dots \cdot J_{n_n+1} \right) + \left(J_{n_1+1} J_{n_2} J_{n_3+1} \cdot \dots \cdot J_{n_n+1} \right) i + \\
&+ \left(J_{n_1+1} J_{n_2+1} J_{n_3} \cdot \dots \cdot J_{n_n+1} \right) \mu_1 + \dots + \left(J_{n_1+1} J_{n_2+1} J_{n_3+1} \cdot \dots \cdot J_{n_n} \right) \mu_{n-2} \\
G(n+1, n_2, \dots, n_n) &= \left(J_{n_1+1} J_{n_2+1} J_{n_3+1} \cdot \dots \cdot J_{n_n+1} \right) + \left(J_{n_1+2} J_{n_2} J_{n_3+1} \cdot \dots \cdot J_{n_n+1} \right) i + \\
&+ \left(J_{n_1+2} J_{n_2+1} J_{n_3} \cdot \dots \cdot J_{n_n+1} \right) \mu_1 + \dots + \left(J_{n_1+2} J_{n_2+1} J_{n_3+1} \cdot \dots \cdot J_{n_n} \right) \mu_{n-2} \\
G(n+2, n_2, \dots, n_n) &= \left(J_{n_1+2} J_{n_2+1} J_{n_3+1} \cdot \dots \cdot J_{n_n+1} \right) + \left(J_{n_1+3} J_{n_2} J_{n_3+1} \cdot \dots \cdot J_{n_n+1} \right) i + \\
&+ \left(J_{n_1+3} J_{n_2+1} J_{n_3} \cdot \dots \cdot J_{n_n+1} \right) \mu_1 + \dots + \left(J_{n_1+3} J_{n_2+1} J_{n_3+1} \cdot \dots \cdot J_{n_n} \right) \mu_{n-2} \\
&\vdots \\
G(n+5, n_2, \dots, n_n) &= \left(J_{n_1+5} J_{n_2+1} J_{n_3+1} \cdot \dots \cdot J_{n_n+1} \right) + \left(J_{n_1+6} J_{n_2} J_{n_3+1} \cdot \dots \cdot J_{n_n+1} \right) i + \\
&+ \left(J_{n_1+6} J_{n_2+1} J_{n_3} \cdot \dots \cdot J_{n_n+1} \right) \mu_1 + \dots + \left(J_{n_1+6} J_{n_2+1} J_{n_3+1} \cdot \dots \cdot J_{n_n} \right) \mu_{n-2}
\end{aligned}$$

Daí, temos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=0}^5 G(n+\ell, n_2, n_3, \dots, n_n) &= G(n, n_2, n_3, \dots, n_n) + G(n+1, n_2, n_3, \dots, n_n) + \\
&\quad + G(n+2, n_2, n_3, \dots, n_n) + \dots + G(n+5, n_2, n_3, \dots, n_n) \\
&= (J_{n_1} + J_{n_1+1} + J_{n_1+2} + \dots + J_{n_1+5}) (J_{n_2+1} J_{n_3+1} \dots J_{n_n+1}) + \\
&\quad + (J_{n_1+1} + J_{n_1+2} + J_{n_1+3} + \dots + J_{n_1+6}) \left[(J_{n_2} J_{n_3+1} \dots J_{n_n+1}) i + (J_{n_2+1} J_{n_3} \dots J_{n_n+1}) \mu_1 + \dots + \right. \\
&\quad \left. + (J_{n_2+1} J_{n_3+1} \dots J_{n_n}) \mu_{n-2} \right] \\
&= \sum_{\ell=0}^5 J_{n_1+\ell} (J_{n_2+1} J_{n_3+1} \dots J_{n_n+1}) + \sum_{\ell=1}^6 J_{n_1+\ell} \left[(J_{n_2} J_{n_3+1} \dots J_{n_n+1}) i + (J_{n_2+1} J_{n_3} \dots J_{n_n+1}) \mu_1 + \right. \\
&\quad \left. + \dots + (J_{n_2+1} J_{n_3+1} \dots J_{n_n}) \mu_{n-2} \right] \\
&= 7 (J_{n_1} + J_{n_1+3}) (J_{n_2+1} J_{n_3+1} \dots J_{n_n+1}) + 7 (J_{n_1+1} + J_{n_1+4}) \left[(J_{n_2} J_{n_3+1} \dots J_{n_n+1}) i + (J_{n_2+1} J_{n_3} \dots J_{n_n+1}) \mu_1 + \right. \\
&\quad \left. + \dots + (J_{n_2+1} J_{n_3+1} \dots J_{n_n}) \mu_{n-2} \right] \\
&= 7 \left[(J_{n_1} + J_{n_1+3}) (J_{n_2+1} J_{n_3+1} \dots J_{n_n+1}) + (J_{n_1+1} + J_{n_1+4}) \left[(J_{n_2} J_{n_3+1} \dots J_{n_n+1}) i + (J_{n_2+1} J_{n_3} \dots J_{n_n+1}) \mu_1 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \dots + (J_{n_2+1} J_{n_3+1} \dots J_{n_n}) \mu_{n-2} \right] \right] \\
&= 7 [G(n, n_2, n_3, \dots, n_n) + G(n+3, n_2, n_3, \dots, n_n)]
\end{aligned}$$

Identidade 6: A soma dos n primeiros números do tipo $G(n, n_2, n_3, \dots, n_n)$ é dada por:

$$\sum_{\ell=0}^n G(\ell, n_2, n_3, \dots, n_n) = \frac{1}{2} \left[(J_{n_1+2} - 1) (J_{n_1} J_{n_2+1} J_{n_3+1} \dots J_{n_n+1}) + \right. \\
\left. (J_{n_1+3} - 1) \left((J_{n_1+1} J_{n_2} J_{n_3+1} \dots J_{n_n+1}) i + J_{n_1+1} J_{n_2+1} J_{n_3} \dots J_{n_n+1} \mu_1 + \right. \right. \\
\left. \left. + J_{n_1+1} J_{n_2+1} J_{n_3+1} \dots J_{n_n} \mu_{n-2} \right) \right]$$

Demonstração: Utilizando o raciocínio indutivo temos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=0}^n G(\ell, m) &= \frac{1}{2} [(J_{n+2} - 1) J_{m+1} + (J_{n+3} - 1) J_m \cdot i] \\
\sum_{\ell=0}^n G(\ell, m, p) &= \frac{1}{2} \left[(J_{n+2} - 1) J_{m+1} \cdot J_{p+1} \cdot J_{q+1} + (J_{n+3} - 1) \left(\frac{J_m \cdot J_{p+1} \cdot J_{q+1} \cdot i + J_{m+1} \cdot J_p \cdot J_{q+1} \cdot j}{J_{m+1} J_{p+1} J_q k} \right) \right] \\
\sum_{\ell=0}^n G(\ell, m, p, q) &= \frac{1}{2} [(J_{n+2} - 1) J_{m+1} \cdot J_{p+1} + (J_{n+3} - 1) (J_m \cdot J_{p+1} \cdot i + J_{m+1} \cdot J_p \cdot j)] \\
&\vdots \\
\sum_{\ell=0}^n G(\ell, n_2, n_3, \dots, n_n) &= \frac{1}{2} \left[(J_{n_1+2} - 1) (J_{n_1} J_{n_2+1} J_{n_3+1} \dots J_{n_n+1}) + \right. \\
&\quad \left. (J_{n_1+3} - 1) \left((J_{n_1+1} J_{n_2} J_{n_3+1} \dots J_{n_n+1}) i + J_{n_1+1} J_{n_2+1} J_{n_3} \dots J_{n_n+1} \mu_1 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + J_{n_1+1} J_{n_2+1} J_{n_3+1} \dots J_{n_n} \mu_{n-2} \right) \right]
\end{aligned}$$

De maneira análoga ao que realizamos anteriormente, vamos considerar a relação de recorrência $G(n+1, n_2, \dots, n_n) = G(n, n_2, \dots, n_n) + 2G(n-1, n_2, \dots, n_n)$. Daí segue que:

$$\left\{ \begin{array}{l} G(2, n_2, \dots, n_n) = G(1, n_2, \dots, n_n) + 2G(0, n_2, \dots, n_n) \\ G(3, n_2, \dots, n_n) = G(2, n_2, \dots, n_n) + 2G(1, n_2, \dots, n_n) \\ G(4, n_2, \dots, n_n) = G(3, n_2, \dots, n_n) + 2G(2, n_2, \dots, n_n) \\ \vdots \\ G(n-2, n_2, \dots, n_n) = G(n-3, n_2, \dots, n_n) + 2G(n-4, n_2, \dots, n_n) \\ G(n-1, n_2, \dots, n_n) = G(n-2, n_2, \dots, n_n) + 2G(n-3, n_2, \dots, n_n) \\ G(n, n_2, \dots, n_n) = G(n-1, n_2, \dots, n_n) + 2G(n-2, n_2, \dots, n_n) \\ G(n+1, n_2, \dots, n_n) = G(n, n_2, \dots, n_n) + 2G(n-1, n_2, \dots, n_n) \\ G(n+2, n_2, \dots, n_n) = G(n+1, n_2, \dots, n_n) + 2G(n, n_2, \dots, n_n) \end{array} \right.$$

O que nos leva a obter que

$$\left\{ \begin{array}{l} G(2, n_2, \dots, n_n) - G(1, n_2, \dots, n_n) = 2G(0, n_2, \dots, n_n) \\ G(3, n_2, \dots, n_n) - G(2, n_2, \dots, n_n) = 2G(1, n_2, \dots, n_n) \\ G(4, n_2, \dots, n_n) - G(3, n_2, \dots, n_n) = 2G(2, n_2, \dots, n_n) \\ \vdots \\ G(n-2, n_2, \dots, n_n) - G(n-3, n_2, \dots, n_n) = 2G(n-4, n_2, \dots, n_n) \\ G(n-1, n_2, \dots, n_n) - G(n-2, n_2, \dots, n_n) = 2G(n-3, n_2, \dots, n_n) \\ G(n, n_2, \dots, n_n) - G(n-1, n_2, \dots, n_n) = 2G(n-2, n_2, \dots, n_n) \\ G(n+1, n_2, \dots, n_n) - G(n, n_2, \dots, n_n) = 2G(n-1, n_2, \dots, n_n) \\ G(n+2, n_2, \dots, n_n) - G(n+1, n_2, \dots, n_n) = 2G(n, n_2, \dots, n_n) \end{array} \right.$$

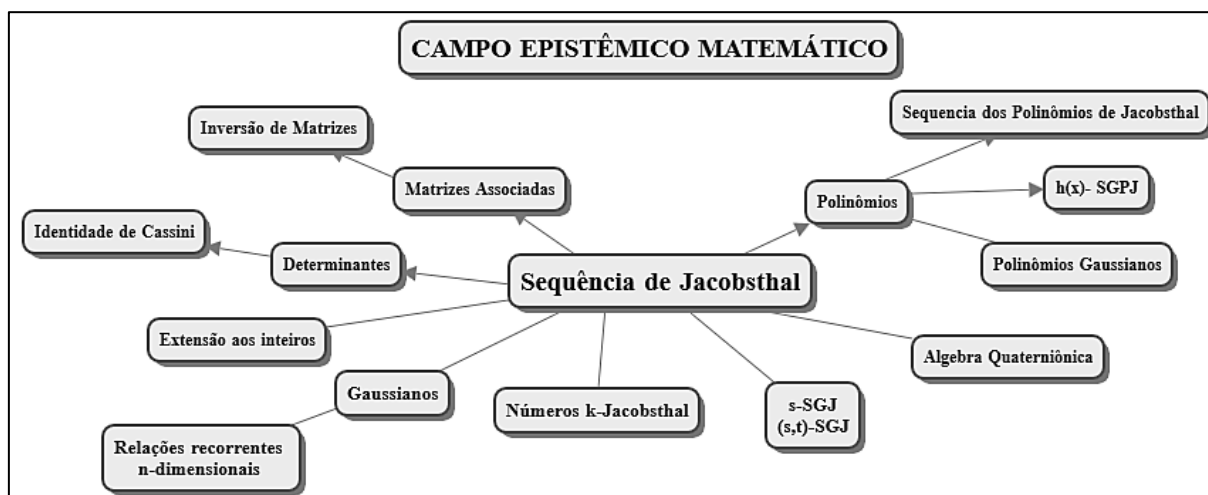
Destarte, realizando as operações convenientes, obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^n G(\ell, n_2, n_3, \dots, n_n) &= \frac{1}{2} [G(n+2, n_2, n_3, \dots, n_n) - G(1, n_2, n_3, \dots, n_n)] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left[\begin{aligned} &\left(J_{n_1+2} J_{n_2+1} J_{n_3+1} \dots J_{n_n+1} \right) + \left(J_{n_1+3} J_{n_2} J_{n_3+1} \dots J_{n_n+1} \right) i + \\ &+ \left(J_{n_1+3} J_{n_2+1} J_{n_3} \dots J_{n_n+1} \right) \mu_1 + \dots + \left(J_{n_1+3} J_{n_2+1} J_{n_3+1} \dots J_{n_n} \right) \mu_{n-2} \end{aligned} \right] - \left[\begin{aligned} &\left(J_1 J_{n_2+1} J_{n_3+1} \dots J_{n_n+1} \right) + \left(J_2 J_{n_2} J_{n_3+1} \dots J_{n_n+1} \right) i + \\ &+ \left(J_2 J_{n_2+1} J_{n_3} \dots J_{n_n+1} \right) \mu_1 + \dots + \left(J_2 J_{n_2+1} J_{n_3+1} \dots J_{n_n} \right) \mu_{n-2} \end{aligned} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} &\left(J_{n_1+2} - 1 \right) \left(J_{n_1} J_{n_2+1} J_{n_3+1} \dots J_{n_n+1} \right) + \\ &\left(J_{n_1+3} - 1 \right) \left(J_{n_1+1} J_{n_2} J_{n_3+1} \dots J_{n_n+1} i + J_{n_1+1} J_{n_2+1} J_{n_3} \dots J_{n_n+1} \mu_1 + \right. \\ &\quad \left. + J_{n_1+1} J_{n_2+1} J_{n_3+1} \dots J_{n_n} \mu_{n-2} \right) \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

Destarte, neste capítulo foram discutidos as principais definições, teoremas e propriedades referentes aos processos de generalizações da SJ, enfatizando a fórmula de Binet, modelos de representações matriciais, modelo de extensão aos inteiros, bem como a determinação das identidades de Cassini, Catalan e d’Ocagne. Além do mais, foram contempladas algumas definições e propriedades relativas à álgebra dos quatérnios e ainda

uma abrangência sobre os números gaussianos e as relações recorrentes n -dimensionais. Tais elementos funcionam como aporte teórico necessário para concepção das situações didáticas que serão descritas no próximo capítulo. A figura 6 apresenta uma descrição do campo epistêmico matemático.

Figura 9 - Descrição do campo epistêmico matemático



Fonte: Elaborada pela autora.

Nesse sentido, a figura 6 apresenta a sequência de Jacobsthal e suas relações com os diversos conteúdos matemáticos. Além disso, observamos os seus principais modelos de extensão e generalização que confirma o caráter de evolução ininterrupta do seu processo matemático e evolutivo. No capítulo seguinte, serão expostas as análises *a priori* da Engenharia Didática, bem como o processo de concepção das situações didáticas e a descrição dos momentos em que foi realizada a experimentação da pesquisa.

4 UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO DO MODELO GENERALIZADO DE JACOBSTHAL NUM CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

4.1 Análises *a priori* das situações didáticas

Essa etapa é marcada pela construção dos princípios desejados pela aplicação da sequência didática. Nessa perspectiva, as variáveis da pesquisa necessitam estar bem definidas para que possam garantir o alcance dos objetivos esperados pela experimentação. A esse respeito, Artigue (1996) destaca dois tipos de variáveis: *as macrodidáticas* ou *globais* e *as microdidáticas* ou *locais*, conforme mencionadas anteriormente.

Destarte, na análise *a priori* devemos: descrever as escolhas das variáveis locais, relacionando-as sempre que possível com as globais; elaborar e desenvolver situações didáticas; investigar a importância da situação para o aluno e prever os comportamentos prováveis, mostrando de que modo a análise realizada pode controlar essas ações.

Assumimos posição em conformidade com PAIS (2015, p.102), quando afirma que: “Uma sequência didática é formada por certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática”. Desse modo, reconhecendo o potencial de sequências didáticas e tendo em vista o que propomos, apresentaremos, com base nas fases de ação, formulação, validação e institucionalização preconizadas pela Teoria das Situações Didáticas, situações-problemas que foram pensadas para abordagem em sala de aula.

Destarte, na seção subsequente apresentaremos a discussão das atividades selecionadas para a experimentação. Assim, propomos uma abordagem da sequência generalizada de Jacobsthal pautadas nas fases da TSD, buscando prever os possíveis comportamentos dos professores em formação inicial diante das situações indicadas.

4.2 Concepção e descrição das situações didáticas

A seguir, apresentamos um conjunto de situações didáticas que foram organizadas a partir de todo o aporte matemático realizado no capítulo 3, com fins a promover a identificação e exploração de algumas propriedades e teoremas relativas à SJ. Pretendemos identificar as fases de ação, formulação, validação e institucionalização em cada uma das sequências de ensino.

De acordo com a teoria das sequências recursivas a cada sequência recursiva linear de segunda ordem, podemos associar uma equação do segundo grau denominada equação característica do tipo:

$$r^2 + pr + q = 0$$

No caso da sequência de Jacobsthal, a equação característica é dada por $x^2 - x - 2 = 0$ cujas raízes são $\alpha = 2$ e $\beta = -1$. Nesse sentido, na primeira situação didática, solicitamos a determinação das potências do tipo α^n e β^n . Diante disso, apresentamos a situação 1, discutida com base na TSD.

Situação Didática 1 – A equação $x^2 - x - 2 = 0$ é denominada equação característica que está associada à sequência de Jacobsthal. Nesse sentido, é possível determinar os valores de α^n e β^n ? Em caso afirmativo, deduzir uma expressão utilizando os termos da sequência de Jacobsthal para a determinação desses valores.

A seguir, delinearemos as etapas propostas pela TSD para a situação anterior. Desse modo, iniciamos com a dialética da ação.

Situação de ação: De acordo com Gálvez (1996) as situações de ação são aquelas nas quais se gera uma interação entre alunos e meio físico. Dessa forma, de modo preliminar o estudante poderá observar alguns valores a medida que toma $n = 1, 2, 3, \dots$ obtendo alguns valores tais quais: $\alpha^1 = 2$; $\alpha^2 = 4$; $\alpha^3 = 8$ e assim por diante, de modo semelhante também poderá constatar alguns valores para a outra raiz da equação e obter $\beta^1 = -1$; $\beta^2 = 1$; $\beta^3 = -1, \dots$. Essa compreensão poderá facilitar conjecturas que serão levantadas posteriormente.

Situação de Formulação: A situação de formulação é marcada pelas interações existentes em determinada atividade proposta. Tal situação é caracterizada pela troca de saberes entre alunos. Essa transferência de informações pode ser expressa, por meio de mensagens escritas ou orais. Além disso, a linguagem utilizada pelo aluno nessa fase pode ser a linguagem natural ou mesmo matemática. (ALMOULOUD, 2007). Assim, alguns casos particulares podem ser motivados, por exemplo:

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= \alpha + 2 = \alpha \cdot J_2 + 2 \cdot J_1 \\ \alpha^3 &= \alpha \cdot \alpha^2 = \alpha(\alpha + 2) = \alpha^2 + 2\alpha = 3\alpha + 2 = J_3 + 2 \cdot J_2 \\ \alpha^4 &= \alpha^3 \cdot \alpha = (3\alpha + 2) \cdot \alpha = 3\alpha^2 + 2\alpha = 5\alpha + 6 = J_4 + 2 \cdot J_3\end{aligned}$$

Com base nos casos anteriores, podemos conjecturar que $\alpha^n = \alpha J_n + 2 \cdot J_{n-1}$ e de modo análogo pressupomos que $\beta^n = \beta \cdot J_n + 2 \cdot J_{n-1}$.

Situação de validação: Nessa etapa, “são pedidas verificações e, portanto, explicações sobre as teorias utilizadas e também dos meios que subjazem nos processos demonstrativos.” (D’AMORE, 2005, p.83). Dessa forma, na fase de validação o aluno tenta convencer um ou mais interlocutores da asserção de suas afirmações. Para isso, devem ser elaboradas provas para demonstrá-las.

Assim, partindo da formulação produzida na fase anterior, espera-se que o aluno possa articular uma demonstração para $\alpha^n = \alpha J_n + 2 \cdot J_{n-1}$ e para $\beta^{n+1} = \beta \cdot J_{n+1} + 2 \cdot J_n$. Isso pode ser feito por meio do princípio da indução matemática, ou seja, será feita a determinação para o expoente $n + 1$ o que resultará em $\alpha^{n+1} = \alpha J_{n+1} + 2 \cdot J_n$.

Situação de Institucionalização: Por fim, a mediação do professor será finalizada com a apresentação das principais propriedades formais que asseguram a consistência das operações e manipulações realizadas nas fases anteriores (ALVES, 2016). Com a recapitulação do que foi estabelecido nas fases anteriores, o professor poderá estabelecer a fórmula de Binet que permite uma forma explícita para obtenção dos termos da sequência de Jacobsthal.

Dando continuidade, consideremos a fórmula de Binet dada por $J_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ que foi concebida originalmente pelo matemático Jacques-Phillipe-Marie Binet (1786-1856). Dessa forma, a próxima proposta de atividade busca estabelecer a descrição das propriedades relativas à Sequência de Jacobsthal estendida ao campo dos inteiros. Assim, a fórmula de Binet poderá ser utilizada como componente de prova ou demonstração. Com base nisso, apresentamos a situação abaixo.

Sequência Didática 2 – Considerando a sequência de Jacobsthal definida pela lei de recorrência $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$, podemos estabelecer uma relação para J_{-n} ?

Situação de ação: Segundo Pais (2015, p.34): “uma situação de ação é aquela em que o aluno realiza procedimentos mais imediatos para resolução de um problema, resultando na produção de um conhecimento de natureza mais experimental e intuitiva do que teórica”. Dessa forma, com base na relação de recorrência estabelecida para a sequência de Jacobsthal os alunos poderão determinar alguns casos particulares substituindo valores como $n = \dots -3, -2, -1, 0, 1$ e poderá perceber que são obtidos os termos da sequência de Jacobsthal estendida à índices inteiros.

Situação de formulação: Nesse estágio, temos como objetivo a comunicação de informação entre os estudantes. Nesse sentido, os mesmos devem modificar sua linguagem

habitual e adequá-la às informações que devem comunicar. (GÁLVEZ, 1996). Nessa perspectiva, observamos alguns valores tais quais $J_{-1} = \frac{1}{2}$; $J_{-2} = -\frac{1}{4}$; $J_{-3} = \frac{3}{8}$; $J_{-4} = -\frac{5}{16}$.

Assim, podemos supor que $J_{-n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \cdot J_n$.

Situação de validação: Nessa fase, o aprendiz tenta convencer um ou vários interlocutores da legitimidade das asserções que são feitas. Assim, conforme Pais (2015), esse tipo de situação relaciona-se ao plano argumentativo racional e preocupa-se com a questão da veracidade do conhecimento. Assim, com base nas formulações realizadas na fase anterior, o aluno poderá utilizar a fórmula de Binet para determinar um modelo fechado para obtenção dos termos dessa sequência.

$$\begin{aligned} J_{-n} &= \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{3} = \frac{\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n}}{3} = \frac{\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n}}{3} = \frac{1}{3\alpha^n} - \frac{1}{3\beta^n} = \frac{\beta^n - \alpha^n}{3\alpha^n\beta^n} = \frac{(\beta^n - \alpha^n)}{3(\alpha\beta)^n} = \frac{(-1)(\alpha^n - \beta^n)}{3(-2)^n} = \\ &= \frac{(-1)}{(-2)^n} \cdot \frac{(\alpha^n - \beta^n)}{3} = \frac{(-1)}{(-1)^n \cdot (2)^n} \cdot \frac{((2)^n - (-1)^n)}{3} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2)^n} \cdot J_n \end{aligned}$$

Situação de Institucionalização: No último estágio espera-se que o aprendiz ou grupo de aprendizes adote o significado de um saber que foi elaborado por ele mesmo ao longo das fases anteriores. Segundo Almouloud (2007, p.40), nessa situação “o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber”. Dessa forma, o professor retorna as discussões feitas nas etapas anteriores, evidenciando a possibilidade de obtenção da fórmula de Binet, também no campo dos inteiros.

Prosseguindo, a próxima situação busca a articulação de outros conceitos matemáticos à sequência de Jacobsthal. Dessa forma, buscamos relacionar os conceitos de matrizes e determinantes e a determinação de suas propriedades. Assim, consideremos a matriz proposta por Koken e Bozkurt (2008) dada por $F^n = \begin{bmatrix} J_{n+1} & 2 \cdot J_n \\ J_n & 2 \cdot J_{n-1} \end{bmatrix}$. Nesse sentido, vamos obter uma propriedade relativa ao determinante dessa matriz.

Situação Didática 3 – Considerando a matriz F^n obter uma relação utilizando o seu determinante.

Situação de ação: Assumimos posição conforme Brousseau (1997) quando afirma que a situação de ação constitui o processo pelo qual o estudante elabora estratégias, isto é “ensina-se a si mesmo” um método de resolver seu problema. Assim o aluno organiza suas

estratégias e constrói a representação da situação que serve de guia para tomada de decisões. Dessa forma, os estudantes poderão analisar alguns casos particulares e calcular o determinante das matrizes $F, F^2, F^3, \dots$ analisando os valores.

Situação de formulação: Esses tipos de situações “favorecem a aquisição de modelos e linguagem explícitas; se têm uma dimensão social explícita, fala-se então de situação de comunicação.” (D’AMORE, 2005). Assim, com base nos casos particulares anteriores, a generalização deverá ser evidenciada. Dessa forma, temos observado:

$$\det(F) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 = (-2)^1; \det(F^2) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 = (-2)^2; \det(F^3) = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -8 = (-2)^3$$

Assim, podemos conjecturar que $\det F^n = (-2)^n$.

Situação de validação: “É a etapa na qual o aprendiz deve mostrar a validade do modelo por ele criado, submetendo a mensagem matemática (modelo da situação) ao julgamento de um interlocutor.” (ALMOULOU, 2007, p.39). Dessa forma, com suporte nas informações elaboradas nas fases anteriores, podemos levantar inferências a fim de obter a relação desejada. Diante disso, o estudante será capaz de calcular o determinante da matriz F^n e comparar com a conjectura estabelecida na dialética da formulação e obter a relação $J_{n-1}J_{n+1} - J_n^2 = (-1)^{n-1} \cdot 2^{n-1}$

Situação de institucionalização: Nesse estágio, as informações levantadas nas fases anteriores possibilitam a caracterização e generalização dos resultados. Assim, o professor finalizará sua mediação com a indicação das principais propriedades atinentes à sequência de Jacobsthal. Dessa forma, “depois da institucionalização feita pelo professor, o saber torna-se oficial e os alunos devem incorporá-los em seus esquemas mentais, tornando-o assim disponível para utilização na resolução de problemas matemáticos.” (ALMOULOU, 2007, p.40).

A situação que iremos propor a seguir, possui como objetivo a identificação e caracterização das matrizes do tipo F^{-1}, F^{-2}, F^{-3} . Nessa atividade, os alunos deverão constatar que tais matrizes tratam-se das inversas das matrizes $F, F^2, F^3, \dots$. Nesse sentido, apresentamos a seguinte situação.

Situação Didática 4 – Com origem na matriz F^n é possível determinar as matrizes do tipo F^{-n} ? O que essas matrizes representam? Podemos estabelecer uma demonstração para F^{-n} ?

A seguir, serão descritos as fases da TSD buscando indicar o comportamento desejável para um grupo de estudantes em cada estágio.

Situação de ação: A fase atual é marcada pela interação de um aluno ou grupo de alunos com o ambiente de aprendizagem. Além disso, é o momento da tomada de decisões e organizações de estratégias para resolução do problema matemático. Preliminarmente, podemos comparar as simbologias F^n e F^{-n} buscando compreender que esta última matriz é a representação notacional para uma matriz inversa.

Situação de formulação: Esse momento é marcado pela comunicação entre os alunos. Dessa forma, os mesmos devem fazer uma adaptação da sua linguagem usual a fim de transmitir uma informação aos demais. Assim, a troca de mensagens entre os estudantes será importante para a determinação de alguns casos particulares, tais quais:

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_0 & 2J_{-1} \\ J_{-1} & 2J_{-2} \end{bmatrix}; F^{-2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{-1} & 2J_{-2} \\ J_{-2} & 2J_{-3} \end{bmatrix}; F^{-3} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{8} & -\frac{5}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{-2} & 2J_{-3} \\ J_{-3} & 2J_{-4} \end{bmatrix}.$$

Assim, os aprendizes podem observar que as matrizes F^{-1}, F^{-2}, F^{-3} são respectivamente, as inversas das matrizes F, F^2, F^3 . Assim, a conjectura a seguir poderá ser desenvolvida

$$F^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \cdot J_{n-1} & 2 \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2^2} \cdot J_n \\ \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \cdot J_n & 2 \cdot \frac{(-1)^{n+2}}{2^{n+1}} \cdot J_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{-(n-1)} & 2J_{-n} \\ J_{-n} & 2J_{-(n+1)} \end{bmatrix}$$

Situação de validação: À medida que na fase anterior a finalidade é a troca de informação entre os discentes, a etapa de validação busca provar o que foi tomado como hipótese anteriormente. Dessa forma, as produções realizadas nas fases anteriores são empregadas nessa fase com escopo de “validar as hipóteses que foram formuladas” (ALMOULOU, 2007, p.40). Assim, a utilização do princípio da indução matemática, bem como propriedades matriciais serão imprescindíveis para a obtenção do resultado desejado. Dessa forma, usando a hipótese de indução e verificando para $n+1$ nos assegura a prova desejada. Nesse sentido, o aluno deverá propor que $F^{n+1} = \begin{bmatrix} J_{-n} & 2J_{-(n+1)} \\ J_{-(n+1)} & 2J_{-(n+2)} \end{bmatrix}$.

Situação de Institucionalização: Segundo Brousseau (1996) na institucionalização reconhece-se o valor de um procedimento que se converterá em um recurso de referência.

Desse modo, essa fase deverá proporcionar ao docente uma argumentação que viabiliza a representação de matrizes inversas bem como sua formulação e generalização.

Por fim, a próxima situação que será abordada é voltada para compreensão do processo matemático evolutivo da sequência de Jacobsthal ao longo de décadas. Nesse sentido, nossa próxima atividade apresenta um modelo de generalização dessa sequência que foi introduzido por Anatasov (2011). Na definição 1, o autor apresenta a descrição da SGJ (Sequência Generalizada de Jacobsthal) na qual define a s-sequência de Jacobsthal pela

seguinte relação $J_n^s = \frac{s^n - (-1)^n}{s + 1}, n \geq 0$.

Isto posto, na Situação 5, desejamos que um grupo de alunos possa estabelecer um modelo de extensão aos inteiros para s-sequência de Jacobsthal. Com isso, enunciamos a próxima situação.

Situação Didática 5 – É possível encontrar os valores $J_{-1}^s, J_{-2}^s, J_{-3}^s \dots$? Podemos apresentar um modelo de generalização para os mesmos?

Situação de ação: Nesse momento, a organização das estratégias torna-se relevante para a solução do problema em questão. Diante disso, os aprendizes podem estabelecer algumas semelhanças entre os elementos da sequência. Além disso, poderá constatar que para

$s = 2$ obtemos o valor de $J_{-n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \cdot J_n$.

Situação de formulação: A dialética da formulação consiste em estabelecer progressivamente uma linguagem que seja compreensível a todos (BROUSSEAU, 1997). Assim, os alunos poderão trocar informações e com isso indicar alguns casos particulares, tais

quais: $J_{-1}^s = \frac{1}{s} = \frac{(-1)^2}{s} \cdot J_1^s; J_{-2}^s = \frac{1-s}{s^2} = \frac{(-1)^3}{s^2} \cdot J_2^s; J_{-3}^s = \frac{s^2-s+1}{s^3} = \frac{(-1)^4}{s^4} \cdot J_3^s$. Com base

nisso, é possível prever que $J_{-n}^s = \frac{(-1)^{n+1}}{s^n} \cdot J_n^s$

Situação de validação: Recordamos que nessa fase faz-se necessário a utilização de algum mecanismo de prova para validar o que foi conjecturado na fase anterior. Sendo assim, os estudantes devem apresentar uma demonstração para J_{-n}^s que pode ser feita por meio de uma manipulação algébrica ou ainda utilizando a definição 1.

Situação de Institucionalização: Etapa na qual a intenção do professor, diante do problema proposto, é revelada. Dessa forma, “nos momentos finais de sua mediação, o professor deve explicitar e indicar as principais propriedades formais que asseguram a

consistência das operações e manipulações executadas nas fases anteriores (ALVES, 2016, p.77)

A situação didática 6 aborda mais um modelo de generalização da SJ com a inserção da variável real x . Nesse intuito, consideramos a sequência dos Polinômios de Jacobsthal que foi introduzida na literatura especializada por Horadam (1997) que apresenta a seguinte relação de recorrência $J(x)_n = J(x)_{n-1} + 2x \cdot J(x)_{n-2}$, $n \geq 2$, cujas condições iniciais são tais que $J(x)_0 = 0$ e $J(x)_1 = 1$. Com base nessas informações, a seguinte situação didática foi proposta para os estudantes.

Situação Didática 6 – A partir da relação de recorrência apresentada e considerando sua equação característica associada $\lambda^2 - \lambda - 2x = 0$, estabelecer a fórmula de Binet para a Sequência dos Polinômios de Jacobsthal.

Situação de Ação: Na fase inicial da TSD, o estudante de posse do problema, deve recorrer aos seus conhecimentos prévios na tentativa de traçar uma estratégia de resolução para o problema proposto. Assim, o estudante poderá propor alguns casos particulares de modo a conhecer a sequência em questão e posteriormente elaborar hipóteses. Assim, podem constatar que $J(x)_2 = 1$; $J(x)_3 = 1 + 2x$; e $J(x)_4 = 1 + 4x$.

Situação de Formulação: Nessa etapa, os estudantes poderão trocar informações e a partir disso realizar o cálculo das raízes da equação característica que posteriormente serão utilizadas para o estabelecimento da fórmula de Binet. Nesse sentido, a partir do cálculo do

discriminante delta, devem encontrar as raízes $\alpha(x) = \frac{1 + \sqrt{1 + 8x}}{2}$ e $\beta(x) = \frac{1 - \sqrt{1 + 8x}}{2}$.

Situação de validação: A validação do teorema, ocorrerá pelo emprego da teoria das sequências recursivas, tendo em vista que a solução mais geral pode ser dada por: $J(x)_n = a_1 \cdot \alpha^n(x) + a_2 \cdot \beta^n(x)$. Assim, por meio de um sistema de equações, os seguintes

valores serão encontrados $a_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + 8x}}$ e $a_2 = -\frac{1}{\sqrt{1 + 8x}}$. Daí, obtemos que:

$$J(x)_n = \frac{1}{\sqrt{1 + 8x}} \cdot \alpha^n - \frac{1}{\sqrt{1 + 8x}} \cdot \beta^n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{1 + 8x}} = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{1 + 8x}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{1 + 8x}}{2}\right)^n}{\sqrt{1 + 8x}}$$

Situação de Institucionalização: Segundo Alves (2016) a institucionalização é o momento da mediação do professor, em que este deve explicitar e indicar as propriedades formais construídas a partir das discussões realizadas nas etapas anteriores. Nesse sentido, o

professor deve apresentar a formalização do teorema em questão e além disso, evidenciá-lo como um modelo de extensão da fórmula de Binet.

Dando prosseguimento, os alunos foram apresentados à uma nova sequência nominada $h(x)$ - Sequência Polinomial Generalizada de Jacobsthal ($h(x)$ -SPGJ) que foi introduzida na literatura especializada por Catarino e Morgado (2016) e possui a seguinte relação de recorrência $J_{h,n}(x) = J_{h,n-1}(x) + h(x)J_{h,n-2}(x), n \geq 2$, com as condições iniciais $J_{h,0}(x) = 0$ e $J_{h,1}(x) = 1$. De porte das informações salientadas, expomos a próxima situação didática.

Situação Didática 7- É possível estabelecer alguma semelhança entre a sequência $h(x)$ - Sequência Polinomial Generalizada de Jacobsthal e a Sequencia dos Polinômios de Jacobsthal ? O que essa sequência representa?

Situação de Ação: Após o contato inicial com a referida sequência e dispondo de alguns conhecimentos prévios sobre sequências recursivas, os estudantes podem obter alguns casos específicos, com intuito de encontrar pontos afins entre as duas sequências e comparar o conjunto numérico formado por ambas.

Situação de Formulação: Essa etapa é propícia para a interação e troca de informação entre os participantes da pesquisa e o meio no qual estão inseridos. Além disso, a linguagem usual deve dar espaço à formalização. Com base nas estratégias planejadas na fase anterior, os estudantes podem determinar os seguintes resultados $J_{h,2}(x) = 1; J_{h,3}(x) = 1 + h(x);$ e $J_{h,4} = 1 + 2h(x)$.

Situação de Validação: Nessa fase, os estudantes poderão prosseguir na verificação das hipóteses e observações realizadas anteriormente. Nesse caso, a validação será realizada por meio de uma discussão que será sucedida de uma argumentação a respeito da $h(x)$ -SPGJ como forma de generalização da SPJ. Ademais, é possível que os estudantes observem que quando $h(x) = 2x$, constatamos a sequência Polinomial de Jacobsthal evidenciada por Horadam (1997).

Situação de Institucionalização: Conforme Alves (2018, p. 36) “as informações coligidas do grupo de estudantes e organizadas e encaminhadas pelo professor, devem conduzir o grupo na busca pela generalização dos resultados”. Desse modo, a situação didática em questão permite uma compreensão do processo histórico e matemático-evolutivo da Sequência de Jacobsthal e seu modelo de generalização por meio da $h(x)$ -SPGJ.

Por fim, conclui-se a seção com a última situação didática. Nesse sentido, os estudantes foram apresentados a matriz proposta por Catarino e Morgado (2016) que é dada

por $B(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ h(x) & 1 \end{bmatrix}$. Desse modo, com origem na matriz anterior, consideramos a situação didática VII.

Situação Didática 8- Considerando a matriz proposta por Catarino e Morgado (2016), é possível estabelecer a matriz do tipo $B^n(x)$? Em caso afirmativo apresente uma demonstração para $B^n(x)$.

Situação de Ação: De posse do problema, o estudante proporá estratégias que conduzirão a resolução do problema. Nesse sentido, alguns casos particulares podem ser concebidos pela turma, tais quais:

$$B^2(x) = \begin{bmatrix} h(x) \cdot 1 & 1 \\ h(x) \cdot 1 & 1 + h(x) \end{bmatrix}; B^3(x) = \begin{bmatrix} h(x) \cdot 1 & h(x) + 1 \\ h(x) \cdot (1 + h(x)) & 1 + 2h(x) \end{bmatrix};$$

$$B^4(x) = \begin{bmatrix} h(x) \cdot (h(x) + 1) & 1 + 2h(x) \\ h(x) \cdot (2h(x) + 1) & h^2(x) + 3h(x) + 1 \end{bmatrix}$$

Situação de Formulação: Com base nos resultados obtidos anteriormente e com a interação entre os estudantes, o resultado seguinte poderá ser conjecturado, tal qual:

$$B^n = \begin{bmatrix} h(x) \cdot J_{h,n-1}(x) & J_{h,n}(x) \\ h(x) \cdot J_{h,n}(x) & J_{h,n+1}(x) \end{bmatrix}$$

Situação de Validação: Com origem nas hipóteses levantadas na fase de formulação, e com fins a comprová-las, os estudantes poderão utilizar o Princípio de Indução Matemática como alternativa de prova do teorema. Note que para $n = 1$ o resultado é imediato. Assim, supõe-se a validade do teorema para $n = k$ e prova-se a veracidade para o seu sucessor $k + 1$.

$$\begin{aligned} B^{k+1}(x) &= B(x)B^k(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ h(x) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h(x)J_{h,k-1}(x) & J_{h,k}(x) \\ h(x)J_{h,k}(x) & J_{h,k+1}(x) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} h(x)J_{h,k}(x) & J_{h,k+1}(x) \\ h^2(x)J_{h,k-1}(x) + h(x)J_{h,k}(x) & h(x)J_{h,k}(x) + J_{h,k+1}(x) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} h(x)J_{h,k}(x) & J_{h,k+1}(x) \\ h(x)(h(x)J_{h,k-1}(x) + J_{h,k}(x)) & h(x)J_{h,k}(x) + J_{h,k+1}(x) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} h(x)J_{h,k}(x) & J_{h,k+1}(x) \\ h(x)J_{h,k+1}(x) & J_{h,k+2}(x) \end{bmatrix} \square \end{aligned}$$

Situação de Institucionalização: Finalizando a mediação, o professor deve formalizar as principais propriedades que comprovam a veracidade e consistência das hipóteses levantadas nas fases precedentes. Nessa ocasião, o professor deve fomentar na turma a percepção de que a determinação do termo geral, bem como a abordagem matricial que foi iniciada com a clássica sequência de Jacobsthal, pode ser generalizada para a $h(x)$ -SPGJ, caracterizando uma evolução contínua no que diz respeito ao seu processo matemático.

Ademais, nessa seção nos propomos a descrever as atividades selecionadas para a experimentação apoiados nos pressupostos da TSD. Assim, objetivamos a exploração de alguns teoremas e propriedades concernentes a SGJ. Isto posto, na seção subsequente serão evidenciados os protocolos da pesquisa realizados na fase de experimentação. Dessa forma, explicitaremos o campo e os sujeitos da pesquisa, bem como a condução das atividades realizadas nessa etapa.

4.3 Experimentação

A etapa de experimentação tem como objetivo pôr em prática todo o instrumental elaborado na fase anterior. Nesse sentido, tomamos como público alvo 12 estudantes regularmente matriculados na disciplina de História da Matemática do 3º semestre do curso de Licenciatura em matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) – Campus Fortaleza.

A aplicação ocorreu durante oito aulas, com duração de duas horas. No primeiro encontro, foi realizada a exposição dos objetivos propostos e a metodologia de trabalho adotada. A seguir, foi apresentada a relação de recorrência, determinação de alguns casos particulares e obtenção da fórmula de Binet. Além disso, foi discutida a situação didática 1. No segundo momento de aplicação, foi trabalhada a segunda situação didática e apresentada as matrizes associadas à SJ.

Continuando, o terceiro e quarto encontros, foram dedicados para as discussões das situações didáticas 3 e 4, respectivamente. Na quinta aula, apresentou-se a definição de s-sequência de Jacobsthal, bem como a obtenção de alguns termos da sequência, discussão de algumas propriedades e a resolução da situação didática 5. Na sexta aula, foi introduzida a definição de SPJ e algumas propriedades preliminares e, em seguida, sucedeu-se com a aplicação da situação didática 6. No sétimo encontro, definiu-se a $h(x)$ -SPG e motivou-se a identificação de alguns casos específicos que proporcionaram elementos substanciais para o

desenvolvimento da situação didática 7. No oitavo encontro, trabalhou-se a definição de matriz associada a $h(x)$ -SPG e a discussão da situação didática 8.

As atividades propostas tinham como enfoque as fases de ação, formulação, validação e institucionalização propostas pelas TSD. A organização das estratégias de resolução foi realizada em grupo e as conclusões obtidas em cada situação problema foram registradas no papel ou expostas no quadro.

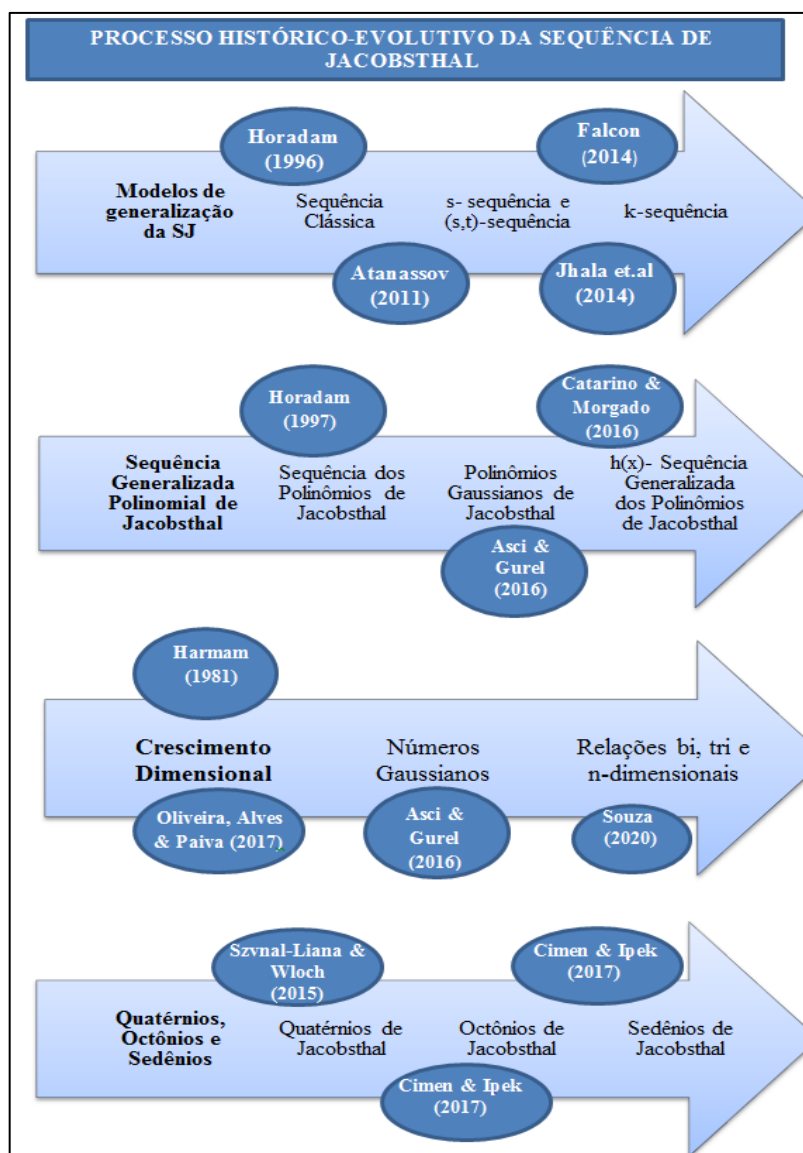
Como procedimentos de coleta de dados foram considerados: as observações realizadas durante a aplicação, a produção escrita dos estudantes, bem como registros de áudio e vídeo. Na seção seguinte, apresentamos a análise de alguns dados coletados durante a pesquisa, evidenciando os elementos mais relevantes das produções dos discentes.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

A etapa de *análise a posteriori* proposta pela Engenharia didática, tem como objetivo a descrição do conjunto de dados recolhidos durante a etapa de experimentação, bem com as principais observações realizadas no decurso das seções de ensino.

Ademais, apresentamos as descrições relativas à aplicação de cada uma das sequências didáticas, buscando evidenciar as produções dos estudantes e observando as fases de ação, formulação, validação e institucionalização da TSD. Não obstante, vale salientar que um dos objetivos primordiais da pesquisa foi investigar modelos de generalizações da SJ conforme ilustra a esquematização realizada na figura a seguir:

Figura 10 - Processo histórico-evolutivo da SJ



Fonte: Elaborada pela autora.

5.1 Análise *a posteriori* e Validação interna

Com fins a organizar a aplicação das situações didáticas, as atividades foram apresentadas aos alunos por meio de situações- problemas que eram compostas por questões que tinham como finalidade estimular os estudantes à esforçar-se para resolvê-las. Nesse sentido, foi dado enfoque a formulação de conceitos, demonstração de teoremas e propriedades e oportunizar uma compreensão sobre os modelos de representações matriciais e formas de generalização da SJ.

As situações didáticas viabilizam a compreensão dos modelos de extensão e representação dessa sequência. Inicialmente, os estudantes foram apresentados sobre a relação de recorrência, a equação característica associada à essa sequência e sobre representações matriciais que envolvem os termos da sequência de Jacobsthal.

Posteriormente, a Sequência dos Polinômios de Jacobsthal foi introduzida e, além disso, a $h(x)$ - Sequência dos Polinômios Generalizadas de Jacobsthal. Dessa forma, nos momentos em que foi realizada a validação das hipóteses, em especial nas situações que envolviam a discussão e demonstração de teoremas e propriedades, a estratégia de prova corriqueiramente utilizada foi o Princípio da Indução Matemática. Ademais, algumas manipulações algébricas, bem como definições e propriedades matriciais foram substanciais, considerando a importância da verificação formal para atestar a veracidade das hipóteses levantadas pelos aprendizes. Assim, foi possível estabelecer um modelo de extensão aos inteiros para SJ, bem como a compreensão das matrizes inversas associadas à essa sequência e além disso, compreender a s-SGJ e a $h(x)$ - SPGJ como um modelo de generalização da SJ.

Nesse sentido, a experimentação foi iniciada com a exposição dos objetivos propostos, bem como a entrega da lista de exercícios aos estudantes. Na ocasião, a turma foi orientada a realizar troca de informações e traçar um plano de estratégias para resolução do problema proposto. As interações, discussões e produções realizadas pelos aprendizes foram registradas por meio de imagens e gravações de áudio e vídeo. A seguir, serão apresentados os dados coletados na fase de experimentação.

Dessa forma, a situação didática 1, tem como objetivo estabelecer uma fórmula que possa relacionar os termos da sequência de Jacobsthal. Dessa forma, a fase de ação visa a identificação das potências do tipo $\alpha^2, \alpha^3, \dots$ e $\beta^2, \beta^3, \dots$ conforme descreve o aluno 1 na figura 11 e o aluno 3 na figura 12.

Figura 11 – Determinação das potências do tipo α^n e β^n (aluno 1, fase de ação)

$\alpha = 2$	$\beta = -1$
$\alpha^2 = 4$	$\beta^2 = (-1)^2 = 1$
$\alpha^3 = 8$	$\beta^3 = (-1)^3 = -1$

Fonte: elaborada pela autora.

Figura 12 - Relação entre as potências do tipo α^n com os termos da SJ (aluno 3, fase de formulação)

$$\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$$

$$\alpha^2 = \alpha + 2$$

$$\alpha^2 = 4 \quad \alpha = \alpha^2 - 2$$

$$\alpha^3 = \alpha^2 + 2\alpha \Rightarrow \alpha^3 = \alpha + 2 + 2\alpha$$

$$\alpha^3 = 8 \quad \alpha^3 = 3\alpha + 2$$

$$\alpha^4 = \alpha^3 + 2\alpha^2$$

$$\alpha^4 = 8 + 8 = 16$$

$$\alpha^4 = \alpha^3 + 2\alpha^2 = 3\alpha + 2 + 2\alpha + 4 = 5\alpha + 6$$

$$\alpha^n = J_n \alpha + 2J_{n-1}$$

0, 1, 1, 3, 5, 11, 21
1 2 3 4
 $J_n = 2J_{n-1}$

Fonte: elaborada pela autora.

A fase de formulação possibilitou aos alunos a proposição de conjecturas de alguns casos particulares que podem levar a uma possível identificação da expressão desejada.

Assim, na figura acima, o aluno 3 expôs o seu raciocínio para estabelecer a relação $\alpha^n = \alpha J_n + 2J_{n-1}$.

Por outro lado, ainda no que diz respeito a fase de formulação, na figura 13 vamos observar o raciocínio utilizado pelo aluno 4 para estabelecer a relação $\beta^n = \beta J_n + 2J_{n-1}$. De modo análogo ao que foi realizado pelo aluno 3 na figura 12 o estudante obtém a expressão desejada por meio da identificação de algumas potências de β .

Figura 13 - Relação entre as potências do tipo β^n com os termos da SJ (aluno 4, fase de formulação)

$$\beta^2 = 2J_1 - J_2$$

$$\beta^3 = 2J_2 - J_3 = 2 - 3 = -1$$

$$\beta^4 = 2J_3 - J_4 = 6 - 5 = 1$$

$$\beta^n = 2J_{n-1} - J_n$$

Fonte: elaborada pela autora.

Não obstante, o aluno 3 desenvolve uma lógica na qual os valores do expoente 'n' são substituídos e o estudante observa como a relação vai se comportando. Isso foi feito na tentativa de formular uma conjectura para a relação envolvendo a segunda raiz da equação característica. Logo abaixo, ressaltamos os argumentos utilizados pelo estudante:

Figura 14 - Potências do tipo β^n e relações com os termos da SJ (aluno 3, fase de formulação)

$$\begin{array}{ll} \beta = -1 & \beta^4 = 3\beta^2 + 2\beta \\ \beta^2 - \beta - 2 = 0 & = 3\beta + 6 + 2\beta \\ \beta^2 = \beta + 2 & \beta^4 = 5\beta + 6 \\ \beta^3 = \beta^2 + 2\beta & \beta^n = J_n \cdot \beta + 2\beta_{n-1} \\ \beta^3 = \beta + 2 + 2\beta & \\ \beta^3 = 3\beta + 2 & \end{array}$$

Fonte: elaborada pela autora.

Após as deduções levantadas, na fase de validação foi utilizado o Princípio da Indução Matemática em que os estudantes supõem a validade da propriedade para $n = k$ e devem mostrar a sua exatidão. Nas figuras abaixo, são mostrados os procedimentos adotados pelos alunos 1 e 3. Ao observarmos as figuras 15 e 16 concluímos que os estudantes conseguem realizar a prova do teorema empregando o referido método.

Figura 15 – Demonstração da relação $\alpha^n = \alpha J_n + 2J_{n-1}$ (aluno 1, fase de validação)

Queremos provar que:

$$\alpha^n = \alpha \cdot J_n + 2J_{n-1}$$

Supondo que vale para k
devemos mostrar que vale para $k+1$

$$\alpha^{k+1} = \alpha \cdot J_{k+1} + 2J_k$$

$$\alpha^k \cdot \alpha = \alpha^{k+1} =$$

$$\Rightarrow (\alpha J_k + 2J_{k-1}) \cdot \alpha =$$

$$= \alpha^2 \cdot J_k + 2\alpha J_{k-1}$$

$$= (\alpha + 2) \cdot J_k + 2\alpha J_{k-1}$$

$$= J_k \alpha + 2J_k + 2\alpha J_{k-1}$$

$$= \alpha \cdot (J_k + 2J_{k-1}) + 2J_k$$

$$= \alpha J_{k+1} + 2J_k \quad \square$$

Fonte: elaborada pela autora.

Nesse sentido, o aluno 3 argumenta suas concepções explicando o processo percorrido na fase de validação para realizar a prova do teorema com a utilização do método da indução

Temos que $\alpha = 2$ e $\beta = -1$. Aí eu substituí α na equação característica aí fica que $\alpha^2 = \alpha + 2$. Aí α^3 , se eu multiplicar α dos dois lados eu vou ter que $\alpha^3 = \alpha^2 + 2\alpha$ certo? só que $\alpha^2 = \alpha + 2$ então seria $\alpha^3 = 3\alpha + 2$ se eu multiplicar por α novamente eu vou ter que $\alpha^4 = 3\alpha^2 + 2\alpha$ mas como $\alpha^2 = \alpha + 2$, então $\alpha^4 = 5\alpha + 6$ tá? [...] Então se observar estão aparecendo os termos então eu posso dizer que $\alpha^n = \alpha J_n + 2J_{n-1}$. [...] Então eu vou mostrar por indução [...]

Figura 16 – Demonstração da relação $\beta^n = \beta J_n + 2J_{n-1}$ (aluno 3, fase de validação)

Vale para $n=1$
Vale para $n=k$, $\beta^k = J_k \cdot \beta + 2J_{k-1}$
Veremos se vale para $n=k+1$ $\Rightarrow \beta^{k+1} = J_{k+1} \cdot \beta + 2J_k$

$$\beta^{k+1} = \beta^k \cdot \beta$$

$$= (J_k \cdot \beta + 2J_{k-1}) \cdot \beta = \beta^2 J_k + 2\beta J_{k-1}$$

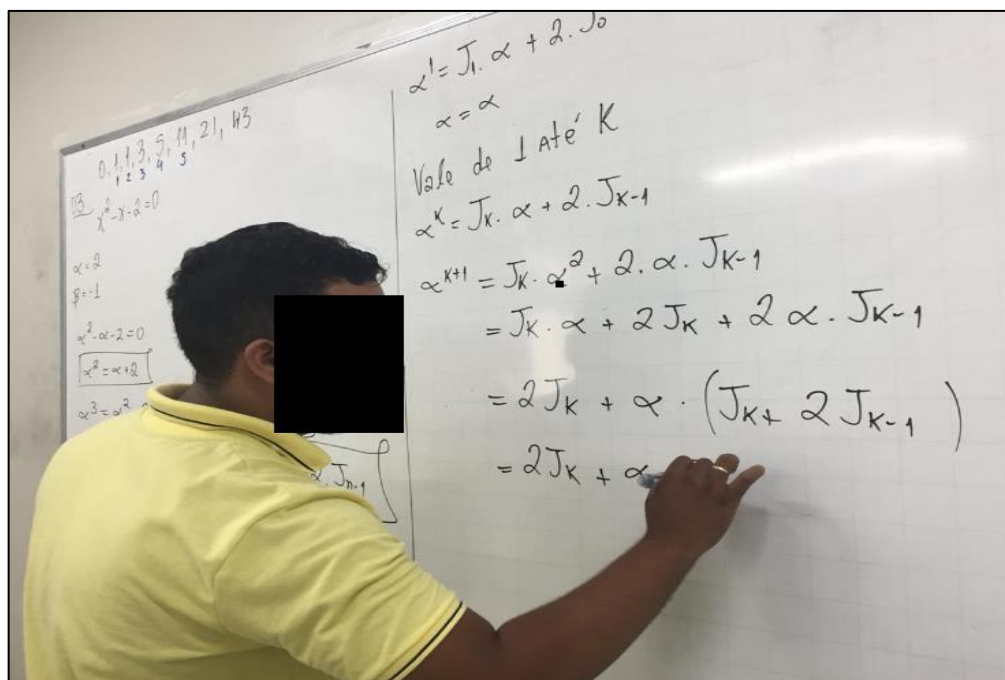
$$= J_k \beta + 2J_k + 2\beta J_{k-1}$$

$$= \beta (J_k + 2J_{k-1}) + 2J_k$$

$$= J_{k+1} \beta + 2J_k$$

Fonte: elaborada pela autora.

Figura 17 - Exposição da demonstração para potências do tipo α^n e β^n



Fonte: elaborada pela autora.

Dando continuidade, a segunda situação didática buscava questionar se era possível determinar valores do tipo $J_{-1}, J_{-2}, J_{-3} \dots$ e posteriormente apresentar uma fórmula de extensão aos inteiros. Assim, registramos as situações de ação e formulação na figura 18, destacando o raciocínio empregado pelo aluno 2 para a obtenção dos termos dessa sequência.

Figura 18 – Determinação dos termos da SJ como modelo de extensão aos inteiros (aluno 2, fase de ação)

$$\begin{aligned}
 J_1 &= J_0 + 2J_{-1} \Rightarrow J_1 = 1, J_0 = 0 \Rightarrow J_{-1} = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2} \\
 J_0 &= J_{-1} + 2J_{-2} \Rightarrow J_0 = 0, J_{-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow J_{-2} = \frac{0 - \frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4} \\
 J_{-1} &= J_{-2} + 2J_{-3} \Rightarrow J_{-1} = \frac{1}{2}, J_{-2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow J_{-3} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{2} = \frac{3}{8}
 \end{aligned}$$

Fonte: elaborada pela autora.

Por outro lado, o aluno 3 utilizou a relação de recorrência da sequência de Jacobsthal e com a substituição de alguns valores de 'n' negativos, obteve alguns termos para a SJ estendida aos números inteiros. Na figura 19, constatamos as operações realizadas pelo estudante, que tinham como finalidade obter alguns valores para J_{-n} .

Figura 19 – Indicação dos termos da SJ como modelo de extensão aos inteiros (aluno 3, fase de ação)

$J_n = J_{n-1} + 2 \cdot J_{n-2}$
 Fazendo $n=2$
 $J_2 = J_1 + 2 \cdot J_0$
 $\therefore J_0 = 0$
 $n=1$
 $J_1 = J_0 + 2 \cdot J_{-1}$
 $1 = 0 + 2J_{-1} \rightarrow J_{-1} = \frac{1}{2}$
 $n=0$
 $J_0 = J_{-1} + 2 \cdot J_{-2}$
 $0 = \frac{1}{2} + 2 \cdot J_{-2}$
 $J_{-2} = -\frac{1}{4}$
 $n=-1$
 $J_{-1} = J_{-2} + 2J_{-3}$
 $\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} + 2J_{-3}$
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2J_{-3}$
 $\frac{2+1}{4} = 2J_{-3}$
 $J_{-3} = \frac{3}{8}$
 $n=-2$
 $J_{-2} = J_{-3} + 2J_{-4}$
 $-\frac{1}{4} = \frac{3}{8} + 2J_{-4}$
 $\frac{-2-3}{8} = 2J_{-4}$
 $\frac{-5}{8} = 2J_{-4}$
 $J_{-4} = -\frac{5}{16}$

Fonte: elaborada pela autora.

Além disso, expomos na figura 20 a argumentação lógica realizada pelo aluno 5 para conjecturar uma expressão para J_{-n} .

Figura 20 - Conjectura da fórmula de Binet estendida aos inteiros (aluno 5, fase de ação e formulação)

$J_1 = J_{1-1} + 2J_{1-2}$
 $J_1 = J_0 + 2J_{-1}$
 $1 = 0 + 2J_{-1}$
 $J_{-1} = \frac{1}{2}$
 $J_0 = J_{0-1} + 2J_{0-2}$
 $J_0 = J_{-1} + 2J_{-2}$
 $0 = \frac{1}{2} + 2J_{-2}$
 $J_{-2} = -\frac{1}{4}$
 $J_{-1} = J_{-2} + 2J_{-3}$
 $\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} + 2J_{-3}$
 $2J_{-3} = \frac{3}{4}$
 $J_{-3} = \frac{3}{8}$
 $J_{-n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \cdot J_n$

Fonte: elaborada pela autora.

Não obstante, ainda no que diz respeito à fase de formulação, o aluno 6 realiza operações com a utilização da fórmula de Binet e levanta hipóteses no intuito de conjecturar

uma fórmula fechada para os termos da Sequência de Jacobsthal estendida aos conjunto dos números inteiros.

Figura 21 – Estabelecimento de hipóteses para a fórmula de Binet estendida aos inteiros (aluno 6, fase de ação e formulação)

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$$

$$J_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \Rightarrow J_0 = \frac{\alpha^0 - \beta^0}{\alpha - \beta} = \frac{1 - 1}{\alpha - \beta} = 0$$

$$J_{-1} = \frac{\alpha^{-1} - \beta^{-1}}{\alpha - \beta} = \frac{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}{\alpha - \beta} = \frac{\frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta}}{\alpha - \beta} = \frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta(\alpha - \beta)} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{2}$$

$$J_{-2} = \frac{\alpha^{-2} - \beta^{-2}}{\alpha - \beta} = \frac{\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}}{\alpha - \beta} = \frac{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha^2\beta^2}}{\alpha - \beta} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha^2\beta^2(\alpha - \beta)} = \frac{(\beta - \alpha)(\beta + \alpha)}{\alpha^2\beta^2(\alpha - \beta)} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha^2\beta^2} = \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$J_{-3} = \frac{\alpha^{-3} - \beta^{-3}}{\alpha - \beta} = \frac{\frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\beta^3}}{\alpha - \beta} = \frac{\frac{\beta^3 - \alpha^3}{\alpha^3\beta^3}}{\alpha - \beta} = \frac{\beta^3 - \alpha^3}{\alpha^3\beta^3(\alpha - \beta)} = \frac{(\beta - \alpha)(\beta^2 + \beta\alpha + \alpha^2)}{\alpha^3\beta^3(\alpha - \beta)} = \frac{\beta^2 + \beta\alpha + \alpha^2}{\alpha^3\beta^3} = \frac{9}{8} = \frac{3}{8}$$

É notável que

$$J_{-n} = (-1)^{n+1} \frac{J_n}{\alpha^n}$$

$$J_{-n} = \beta^{n+1} \frac{J_n}{\alpha^n}$$

Fonte: elaborada pela autora.

Por fim, a etapa de validação foi realizada por meio do emprego da fórmula de Binet. Assim, a fala abaixo expressa os caminhos utilizados pelo estudante para realizar a demonstração solicitada.

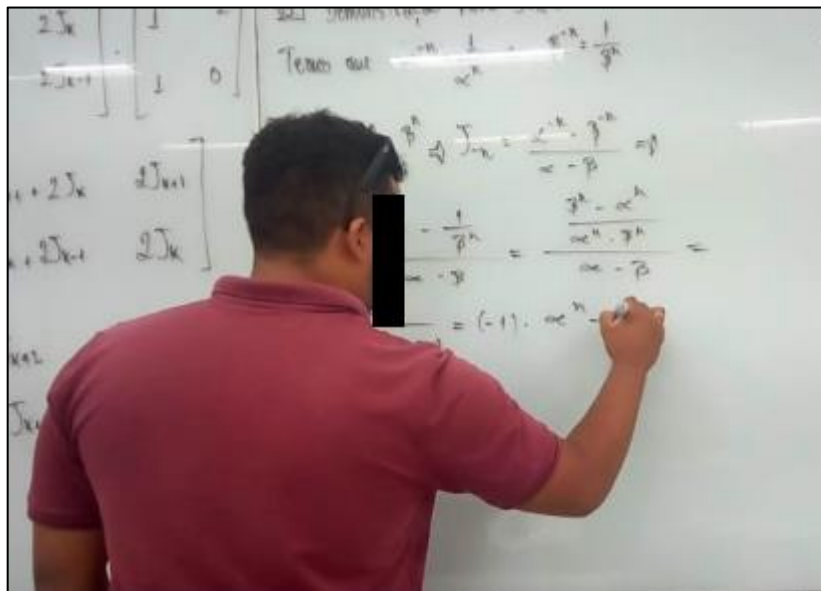
Aluno 3: Temos que $\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}$ e β^{-n} como também é o inverso né? a gente sabe que é

$\frac{1}{\beta^n}$. A gente sabe que o $J_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ que é a formula de Binet para Jacobsthal. No

lugar do n vamos colocar $-n$ e observar o que vamos obter [...]

A seguir, o discente realiza sua explicação no quadro, no intuito de verificar a propriedade de extensão aos inteiros.

Figura 22 – Verificação da propriedade de extensão aos inteiros para a SJ
(aluno 3, fase de validação)



Fonte: elaborada pela autora.

Figura 23 – Demonstração de $J_{-n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \cdot J_n$ (aluno 3, fase de validação)

$$\begin{aligned}
 &\text{Temos que } \alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n} \text{ e } \beta^{-n} = \frac{1}{\beta^n} \\
 &J_n = \frac{\alpha^n \cdot \beta^n}{\alpha - \beta} \Rightarrow J_{-n} = \frac{\alpha^{-n} \cdot \beta^{-n}}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\alpha - \beta} \\
 &\Rightarrow J_n = \frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n} = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\alpha^n \cdot \beta^n} = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\alpha^n \cdot \beta^n \cdot (\alpha - \beta)} \\
 &= \frac{\beta^n - \alpha^n}{\alpha^n \cdot \beta^n \cdot (\alpha - \beta)} = \frac{(-1) \cdot (\alpha^n - \beta^n)}{\alpha^n \cdot \beta^n \cdot (\alpha - \beta)} \\
 &= \frac{(-1) \cdot J_n}{\alpha^n \cdot \beta^n} = \frac{\beta \cdot J_n}{\alpha^n \cdot \beta^n} = \frac{\beta^n \cdot \beta \cdot J_n}{\alpha^n} = \frac{\beta^{n+1} \cdot J_n}{\alpha^n} \\
 &= \frac{\beta^{n+1} \cdot J_n}{\alpha^n} \quad \left| : \frac{(-1)^{n+1} \cdot J_n}{2^n} \right|
 \end{aligned}$$

Fonte: elaborada pela autora.

Na figura acima, os alunos puderam validar a formulação levantada na fase anterior. Suas hipóteses foram argumentadas a partir do desenvolvimento da fórmula de Binet para os índices inteiros.

Prosseguindo, a situação didática 3 solicitava que os estudantes pudessem estabelecer uma relação por meio do determinante da matriz $F^n = \begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{bmatrix}$. A relação que será obtida é a extensão da identidade de Cassini para a SGJ, que nesse caso é dada por $J_{n-1}J_{n+1} - J_n^2 = (-1)^{n-1} \cdot 2^{n-1}$. Dessa forma, temos as compreensões dos estudantes manifestadas nas situações de ação e formulação foram registradas nas figuras 24 e 25 que são apresentadas a seguir.

Figura 24 – Cálculo do determinante das matrizes F, F^2, F^3 e F^4 e conjectura da expressão $\det F^n = (-2)^n$ (aluno 2, fases de ação e formulação)

Handwritten calculations on a piece of paper:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det F = -2$$

$$F^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det F^2 = 4$$

$$F^3 = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det F^3 = -8$$

$$F^4 = \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \det F^4 = 16$$

Com os valores do determinante das matrizes, temos que:

$$\det F^n = 2^n \cdot (-1)^n$$

Fonte: elaborada pela autora.

Figura 25 – Caracterização do determinante das matrizes F, F^2, F^3 e F^4 $\det F^n = (-2)^n$ (aluno 2, fase de ação)

A student is writing on a whiteboard. The whiteboard contains the following text:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, F^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, F^3 = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, F^4 = \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \dots$$

$$\det F = -2$$

$$\det F^2 = 4$$

$$\det F^3 = -8$$

$$\det F^4 = 16$$

$$2^n \cdot (-1)^n$$

Fonte: elaborada pela autora.

No excerto abaixo o aluno 2 utiliza a linguagem para reforçar as ideias empregadas anteriormente, sua fala evidencia a compreensão extraída diante das decisões tomadas.

Aluno 2: A relação entre os determinantes das matrizes é obtida quando eleva 2 ao expoente da matriz, sendo negativo quando n for ímpar, e positivo quando n for par (n=expoente da matriz). O determinante pode ser obtido pela soma dos elementos da primeira ou da segunda coluna, sendo positivo se o expoente da matriz for par, e negativo se o expoente for ímpar.

Do depoimento anterior, o estudante dá ênfase a uma outra forma de calcular o determinante da matriz F^n observando possíveis relações entre as colunas da matriz. Dessa forma, foi ponderado outra possibilidade para calcular tais valores.

Por outro lado, a figura 26 apresenta o raciocínio empregado pelo aluno 3 nas fases de ação e formulação.

Figura 26 – Indicação do determinante das matrizes F, F^2, F^3 e F^4 e conjectura da expressão $\det F^n = (-2)^n$ (aluno 3, fases de ação e formulação)

The image shows handwritten mathematical work on a grid background. The first line calculates the determinants of four matrices: $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -2$; $F^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 4$; $F^3 = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = -8$; and $F^4 = \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = -16$. The second line shows the conjectured formula: $\det(F_n) = (2)^n \cdot (-1)^n = (-2)^n$. The third line shows the formula simplified to $= (\alpha \cdot \beta)^n$.

Fonte: elaborada pela autora.

Não obstante, o estudante apresenta suas concepções e reforça o pensamento empregado anteriormente. Constatamos isso em sua fala:

Aluno 3: Eles são potências de 2, em que o expoente é o índice da matriz. O determinante é o produto entre α e β elevado à n .

Em contrapartida, o aluno 1 apresenta suas concepções à respeito da indicação dos determinante das matrizes $F, F^2, F^3, \dots$. Dessa forma, o estudante argumenta que:

Aluno 1: são potência de 2 elevado ao índice da matriz vezes -1 elevado também ao índice da matriz. O determinante é o produto de α e β elevado ao índice n .

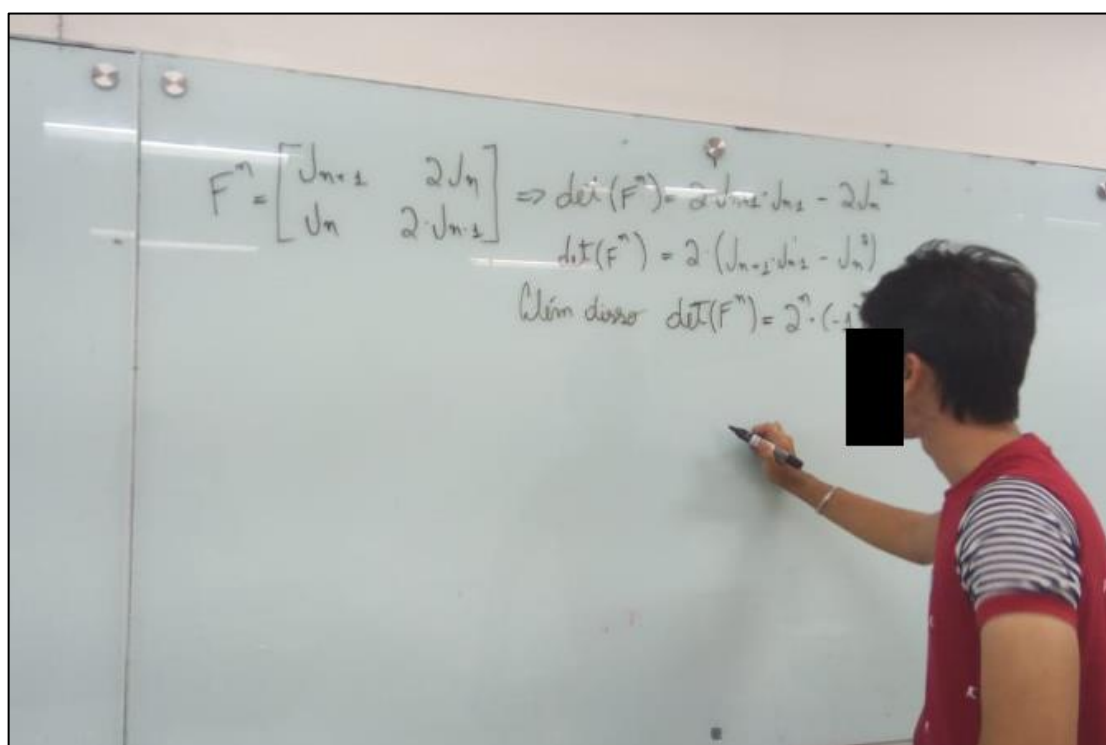
Para validar suas hipóteses o aluno 6 efetua demonstração da propriedade por meio da comparação entre as duas formas encontradas para calcular o determinante da matriz F^n . Em

sua exposição no quadro o estudante explica quais caminhos foram utilizados para a realização da prova conforme seu depoimento a seguir:

Aluno 6: [...] Se a gente tirar o “det” dessa matriz 2x2 a gente vai saber que o $\det F^n = 2J_{n-1} \cdot J_{n+1} - 2J_n^2$ e aí a gente pode colocar o 2 em evidência e vai ficar dessa forma $\det F^n = 2(J_{n-1} \cdot J_{n+1} - J_n^2)$. Só que baseado na relação que o aluno 2 fez que é aquela que $\det F^n = 2^n \cdot (-1)^n$, a gente pode igualar essas duas formas do determinante e ficamos com essa relação $J_{n-1} \cdot J_{n+1} - J_n^2 = 2^{n-1} \cdot (-1)^n$.

Abaixo, o aluno 6 realiza sua exposição no quadro, na finalidade de promover uma demonstração para a propriedade.

Figura 27 – Exposição da identidade de Cassini (aluno 6, fase de validação)



Fonte: elaborada pela autora.

Não obstante, na figura 28, observamos detalhadamente o raciocínio empregado pelo estudante para a validação de suas hipóteses.

Figura 28 – Demonstração da identidade de Cassinipara a SJ (aluno 6, fase de validação)

$$F^n = \begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\det(F^n) = 2J_{n+1} \cdot J_{n-1} - 2J_n^2$$

$$\det(F^n) = 2 \cdot (J_{n+1} \cdot J_{n-1} - J_n^2)$$

Além disso $\det(F^n) = 2^n \cdot (-1)^n$

Logo: $2 \cdot (J_{n+1} \cdot J_{n-1} - J_n^2) = 2^n \cdot (-1)^n$

$$J_{n+1} \cdot J_{n-1} - J_n^2 = 2^{n-1} \cdot (-1)^n$$

Fonte: elaborada pela autora.

Figura 29 – Demonstração da identidade de Cassinipara a SJ (aluno 6, fase de validação)

$$\det F^n = J_{n+1} \cdot 2J_{n-1} - 2J_n^2$$

$$(-2)^n = 2 \cdot (J_{n+1} \cdot J_{n-1} - J_n^2)$$

$$\frac{(-2)^n}{2} = J_{n+1} \cdot J_{n-1} - J_n^2$$

$$(-2)^{n-1} = J_{n+1} \cdot J_{n-1} - J_n^2$$

Fonte: elaborada pela autora.

Dando continuidade, a situação didática 4 solicitou que os estudantes estabelecessem as matrizes do tipo F^{-n} . Desse modo, a turma deve observar que as matrizes do tipo $F^{-1}, F^{-2}, F^{-3}, \dots$ são, respectivamente as inversas das matrizes $F, F^2, F^3, \dots$. Assim, na fase de ação, os alunos foram estimulados a estabelecerem alguns casos particulares no intuito de promover uma espécie de generalização que serão validadas posteriormente pelos mesmos.

Na figura 30, o aluno 5 realiza a substituição de alguns valores de $n \in \mathbb{Z}$ na matriz F^n no intuito de encontrar as matrizes $F^{-1}, F^{-2}, \dots$.

Figura 30 – Caracterização das matrizes do tipo $F^{-1}, F^{-2}, \dots$ (aluno 5, fase de ação)

$$F^n = \begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$F^0 = \begin{bmatrix} J_1 & 2J_0 \\ J_0 & 2J_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \cdot 0 \\ 0 & 2 \cdot \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} J_0 & 2J_{-1} \\ J_{-1} & 2J_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$F^{-2} = \begin{bmatrix} J_{-1} & 2J_{-2} \\ J_{-2} & 2J_{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 2 \cdot \frac{3}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Fonte: elaborada pela autora.

A respeito das matrizes estabelecidas acima, a pesquisadora questionou os estudantes sobre o que essas matrizes representam. Nesse sentido, os alunos analisaram as matrizes e constaram que tratam-se de matrizes inversas. Dessa forma, os mesmos argumentam que:

Aluno 1: Representam a matriz inversa de F^n , ou seja, F^{-1} é igual a matriz inversa de F .

Por outro lado, o aluno 6 é assertivo em sua análise quando pontua que a matriz F^0 representa a matriz identidade, F^{-1} é a inversa de F e F^{-2} é a inversa de F^2 , conforme é mostrado na figura 31:

Figura 31 – Indicação das matrizes do tipo $F^0, F^{-1}, F^{-2}, \dots$ (aluno 6, fase de ação)

$$F^0 = \begin{bmatrix} J_{1-1} & 2J_0 \\ J_0 & 2J_{-1} \end{bmatrix} \Rightarrow F^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det F^0 = 1 \Rightarrow \text{identidade}$$

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} J_0 & 2J_{-1} \\ J_{-1} & 2J_{-2} \end{bmatrix} \Rightarrow F^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \det F^{-1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow F^{-1} \text{ é a inversa de } F^1$$

$$F^{-2} = \begin{bmatrix} J_{-1} & 2J_{-2} \\ J_{-2} & 2J_{-3} \end{bmatrix} \Rightarrow F^{-2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow \det F^{-2} = \frac{1}{4} \Rightarrow F^{-2} \text{ é a inversa de } F^2$$

Fonte: elaborada pela autora.

Sob outra perspectiva o aluno 2, utiliza a definição de matriz inversa e executa algumas operações entre as linhas de uma matriz para realizar o cálculo da inversa F^{-1} . Na figura 32 é apresentado o desenvolvimento dos procedimentos efetuados pelo estudante na fase de ação.

Figura 32 – Caracterização da inversa da matriz do tipo F (aluno 2, fase de ação)

Deja $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $F^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

Fazendo:
a inversa
de F^{-1}

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \rightarrow -\frac{1}{2} L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array} \right]$$

Logo, F^{-1} é a inversa da matriz F .

Fonte: elaborada pela autora.

A partir dos casos particulares apontados na etapa de ação, na fase de formulação os estudantes tem a incumbência de desenvolver suposições e prognósticos a respeito das matrizes do tipo F^{-n} . Assim, o aluno 1 apresenta uma generalização das matrizes citadas com base nas inversas estabelecidas anteriormente, observamos isso na figura 33.

Figura 33 – Caracterização da inversa da matriz do tipo F^{-n} (aluno 1, fase de formulação)

$$F^n = \begin{pmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$F^0 = \begin{pmatrix} J_1 & 2J_0 \\ J_0 & 2J_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F^1 = \begin{pmatrix} J_0 & 2J_{-1} \\ J_{-1} & 2J_{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$F^{-2} = \begin{pmatrix} J_{-1} & 2J_{-2} \\ J_{-2} & 2J_{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/4 & 3/8 \end{pmatrix}$$

Supondo que:

$$F^{-n} = \begin{pmatrix} J_{-n+1} & 2J_{-n} \\ J_{-n} & 2J_{-n-1} \end{pmatrix}$$

Fonte: elaborada pela autora.

Figura 34 – Dedução da inversa da matriz do tipo F^{-n} (aluno 3, fase de formulação)

$$F_n = \begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{bmatrix}; F_0 = \begin{bmatrix} J_1 & 2J_0 \\ J_0 & 2J_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_{-1} = \begin{bmatrix} J_0 & 2J_{-1} \\ J_{-1} & 2J_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}; F_{-2} = \begin{bmatrix} J_{-1} & 2J_{-2} \\ J_{-2} & 2J_{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/4 & 3/8 \end{bmatrix}$$

$$F_{-3} = \begin{bmatrix} J_{-2} & 2J_{-3} \\ J_{-3} & 2J_{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 & 1/8 \\ 1/8 & -1/8 \end{bmatrix}$$

$$F_{-n} = \begin{bmatrix} J_{-(n-1)} & 2J_{-n} \\ J_{-n} & 2J_{-(n+1)} \end{bmatrix} \quad F^{-n} \text{ é a matriz inversa de } F^n$$

Fonte: elaborada pela autora.

Dos protocolos estabelecidos anteriormente, os alunos devem apresentar a veracidade das hipóteses construídas anteriormente. Desse modo, novamente os estudantes recorrem ao Princípio da Indução Matemática como estratégia de prova para caracterização da matriz

$F^{-n} = \begin{bmatrix} J_{-(n-1)} & 2J_{-n} \\ J_{-n} & 2J_{-(n+1)} \end{bmatrix}$. Nesse sentido, na figura 35 vislumbramos o aluno realizando os

passos do referido método com interesse em estabelecer a matriz designada acima.

Figura 35 – Demonstração de uma fórmula fechada para cálculo de inversas do tipo F^{-n} (aluno 6, fase de validação)

Supondo que $F^{-n} = \begin{bmatrix} J_{-n+1} & 2J_{-n} \\ J_{-n} & 2J_{-n-1} \end{bmatrix}$, vamos mostrar que essa fórmula vale para F^{-n-1} .

Então vamos fazer $F^{-n} \cdot F^{-1} = \begin{bmatrix} J_{-n+1} & 2J_{-n} \\ J_{-n} & 2J_{-n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_0 & 2J_{-1} \\ J_{-1} & 2J_{-2} \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} J_{-n+1} \cdot J_0 + J_{-1} \cdot 2J_{-n} & J_{-n+1} \cdot 2J_{-1} + 2J_{-n} \cdot 2J_{-2} \\ J_{-n} \cdot J_0 + J_{-1} \cdot 2J_{-n-1} & J_{-n} \cdot 2J_{-1} + 2J_{-n-1} \cdot 2J_{-2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} J_{-n} & 2J_{-n-1} \\ J_{-n-1} & 2J_{-n-2} \end{bmatrix} \text{ Isso é exatamente o } F^{-n-1} \text{ que teríamos usando a fórmula.}$$

Fonte: elaborada pela autora.

Além disso, o aluno 3 apresenta uma outra estratégia para validar o teorema. Nesse sentido, o discente recorre à definição de matriz inversa com o intuito de encontrar os termos que compõem tal matriz.

Figura 36 - Verificação de matrizes do tipo F^{-n} (aluno 3, fase de validação)

Uma demonstração: F^{-n}

$F^{-n} = \begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{bmatrix}$ Inversa de F^n

$F^{-n} = \begin{bmatrix} J_{-(n+1)} & 2J_{-n} \\ J_{-n} & 2J_{-(n+1)} \end{bmatrix}$

$F^n \cdot F^{-n} = I$

$\begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore a \cdot J_{n+1} + c \cdot 2J_n = 1$

① $b \cdot J_{n+1} + d \cdot 2J_n = 0$

② $a \cdot J_n + c \cdot 2J_{n-1} = 0$

$b \cdot J_n + d \cdot 2J_{n-1} = 1$

Obs: A

A^{-1} = matriz inversa de A.

Fonte: elaborada pela autora.

Figura 37 – Demonstração para cálculo de inversas do tipo F^{-n} por meio da definição (aluno 3, fase de validação)

realiza a operação de multiplicação de matrizes no propósito de encontrar os valores de a, b, c e d . Com a realização da multiplicação, são estabelecidas quatro relações e a partir das mesmas é possível encontrar os termos da matriz. Na fala a seguir, o estudante defende a veracidade de suas hipóteses quando explica o procedimento que realizou para a obtenção da matriz F^{-n} .

Aluno 3: [...] Se a gente observar, por exemplo, quando a gente tem uma matriz A então A^{-1} significa a matriz inversa de A . Então F^{-n} seria a inversa de F^n . Eu aprendi em elementar 2 que se eu pegar a matriz F^n vezes a sua inversa teremos a matriz identidade. Vou chamar $F^n = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. [...] Agora vamos fazer a multiplicação.

Na figura 39, o aluno obteve os elementos a e c . Abaixo, ilustramos as operações realizadas na conclusão de sua demonstração.

Figura 39 – Conclusão da demonstração para cálculo de inversas do tipo F^{-n} por meio da definição (aluno 3, fase de validação)

$$\begin{aligned}
 b J_{n+1} + d 2 J_n &= 0 \Rightarrow J_{n+1} = -2 J_n \\
 b J_n + d 2 J_{n+1} &= 1 \\
 \frac{-d 2 J_n^2 + d 2 J_{n+1}}{J_{n+1}} &= 1 \\
 2d \left(\frac{J_{n+1} \cdot J_{n+1} - J_n^2}{J_{n+1}} \right) &= 1 \\
 d &= \frac{1}{2} \cdot \frac{J_{n+1}}{2^{n+1} \cdot (-1)^n} \\
 &= \frac{J_{n+1}}{2^n \cdot (-1)^n} \\
 d &= \frac{2 J_{n+1}}{2^{n+1} \cdot (-1)^n} = 2 \cdot J_{-(n+1)} \\
 b &= -\frac{d 2 J_n}{J_{n+1}} \\
 b &= (-1) \cdot \frac{2 J_{n+1} \cdot 2 J_n}{2^{n+1} \cdot (-1)^n} \\
 &= (-1) \cdot \frac{2 J_{n+1} \cdot 2 J_n^2}{2^{n+1} \cdot (-1)^n} = 2 \\
 &= 2 \cdot \frac{(-1)^{n+1} \cdot J_n}{2^n} \\
 &= 2 \cdot J_{-n}
 \end{aligned}$$

$$F^{-n} = \begin{bmatrix} J_{-(n-1)} & 2 J_n \\ J_n & 2 J_{-(n+1)} \end{bmatrix}$$

Fonte: elaborada pela autora.

Sobre a demonstração apresentada pelo estudante, observamos que apesar de ter utilizado um método extensivo para a validação de suas conjecturas, o raciocínio empregado expõe uma forma diferente de demonstrar um mesmo teorema. Assim, percebemos a importância de fomentar nos discentes o interesse em estabelecer definições e demonstrações para possibilitar a compreensão da SJ e seus modelos de representação e generalização.

Na situação didática 5, foi apresentada a seguinte definição de Anatassov (2011) para a s - sequência de Jacobsthal dada por $J_n^s = \frac{s^n - (-1)^n}{s+1}$, $s \geq 2$. Nesse sentido, foi solicitado que os estudantes identificassem as possíveis semelhanças entre s -SGJ e com a SJ. Além disso, foi requerido que os discentes apresentassem um modelo de generalização para valores do tipo $J_{-1}^s, J_{-2}^s, J_{-3}^s, \dots, J_n^s$. Vale ressaltar que a mediação do pesquisador será significativa para a assimilação e incorporação com o conjunto de simbologias provenientes da definição

Dando continuidade, a pesquisadora indagou à turma a respeito das possíveis aproximações entre a fórmula de Binet estabelecida para a sequência J_n e a definição proposta por Anatassov para J_n^s . Assim, os estudantes realizaram uma análise da nova sequência e foram unânimes em seus depoimentos quando afirmaram que para $s = 2$ obtemos a clássica sequência de Jacobsthal. Abaixo seguem as falas dos pesquisados.

Aluno 2: Observando a definição de Anatassov para a sequência de Jacobsthal e relacionando com a fórmula de Binet para Jacobsthal, concluímos que ambas são iguais para $s = 2$

Aluno 1: Dada a sequência s - de Jacobsthal, notemos que quando substituirmos $s=2$, temos a sequência de Binet para Jacobsthal

Aluno 3: A sequência de Jacobsthal e a s -sequência de Jacobsthal tem uma relação, quando $s=2$, temos exatamente a fórmula de Binet para Jacobsthal.

Aluno 6: É perceptível que essa s -sequência é igual a fórmula de Binet de Jacobsthal no caso $s=2$.

Aluno 4: Podemos notar que essa nova sequência é similar a fórmula de Binet de Jacobsthal no caso de $s=2$.

Isto posto, a partir da definição da s -SGJ, os estudantes observaram que para o caso particular em que $s=2$ podemos determinar que $J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$ como termo geral da

sequência numérica de Jacobsthal. Prosseguindo, na fase de ação, alguns casos particulares foram estabelecidos, conforme mostra a figura 40.

Figura 40 – Indicação dos termos da s-SGJ como modelo de extensão aos inteiros (aluno 1, fase de ação)

$$\begin{aligned}
 J_{-1}^s &= \frac{s^{-1} - (-1)^{-1}}{s+1} = \frac{\frac{1}{s} + 1}{s+1} = \frac{\frac{s+1}{s}}{s+1} = \frac{1}{s} = s^{-1} \\
 J_{-2}^s &= \frac{s^{-2} - (-1)^{-2}}{s+1} = \frac{\frac{1}{s^2} - 1}{s+1} = \frac{1-s^2}{(s+1) \cdot s^2} = \\
 J_{-3}^s &= \frac{s^{-3} - (-1)^{-3}}{s+1} = \frac{\frac{1}{s^3} - (-1)^{-3}}{s+1}
 \end{aligned}$$

Fonte: elaborada pela autora.

Figura 41 – Indicação dos termos da s-SGJ como modelo de extensão aos inteiros (aluno 5, fase de ação)

$$\begin{aligned}
 J_{-1} &= \frac{n^{-1} - (-1)^{-1}}{n+1} = \frac{\frac{1}{n} + 1}{n+1} = \frac{\frac{1+n}{n}}{n+1} = n^{-1} = \frac{1}{n} \\
 J_{-2} &= \frac{n^{-2} - (-1)^{-2}}{n+1} = \frac{\frac{1}{n^2} - 1}{n+1} = \frac{1-n^2}{n^2(n+1)} = \frac{1-n^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1-n}{n^2} \\
 J_{-3} &= \frac{n^{-3} - (-1)^{-3}}{n+1} = \frac{\frac{1}{n^3} + 1}{n+1} = \frac{\frac{1+n^3}{n^3}}{n+1} = \frac{1+n^3}{n^3(n+1)} = \frac{1+n^3}{n^3} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1+n^3}{n^3(n+1)}
 \end{aligned}$$

Fonte: elaborada pela autora.

Dando continuidade, o momento de formulação, explicitado nas Figuras 42 e 43, possibilitou os discentes apresentarem a possível identificação dos termos da s-SGJ como modelo de extensão aos inteiros. Assim, os educandos manifestam a apropriação de um sistema notacional que proporciona o levantamento de conjecturas nas quais apresentam uma generalização para a referida sequência com base nas observações realizadas na etapa de ação.

Figura 42 – Caracterização de uma generalização para os termos da s-SGJ como modelo de extensão aos inteiros (aluno 3, fase de formulação)

$$J_n^s = \frac{s^n - (-1)^n}{s+1}$$

$$J_{-1}^s = \frac{s^{-1} - (-1)^{-1}}{s+1} = \frac{\frac{1}{s} + 1}{s+1}$$

$$J_{-2}^s = \frac{s^{-2} - (-1)^{-2}}{s+1} = \frac{\frac{1}{s^2} - 1}{s+1}$$

$$J_{-3}^s = \frac{s^{-3} - (-1)^{-3}}{s+1} = \frac{\frac{1}{s^3} + 1}{s+1}$$

$$J_{-n}^s = \frac{\frac{1}{s^n} - (-1)^{-n}}{s+1}$$

$$J_{-n}^s = \left(\frac{1}{s^n} - \frac{1}{(-1)^n} \right) \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{(-1)^n - s^n}{(s+1) \cdot s^n \cdot (-1)^n}$$

Fonte: elaborada pela autora.

Não obstante, o aluno 2 apresenta suas hipóteses para a fase de formulação e observa as aproximações existentes entre J_{-n}^s e entre a extensão aos índices negativos da clássica sequência de Jacobsthal J_{-n} . Abaixo, podemos verificar as operações efetuadas pelo discente.

Figura 43 – Caracterização de uma generalização para os termos da s-SGJ como modelo de extensão aos inteiros (aluno 2, fase de formulação)

$$J_{-1}^s = \frac{s^{-1} - (-1)^{-1}}{s+1} \Rightarrow \frac{\frac{1}{s} + 1}{s+1} \Rightarrow \frac{s+1}{s} \cdot \frac{1}{s+1} = s^{-1}$$

$$J_{-2}^s = \frac{s^{-2} - (-1)^{-2}}{s+1} \Rightarrow \frac{\frac{1}{s^2} + 1}{s+1} \Rightarrow \frac{s^2+1}{s^2} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{1-s}{s^2}$$

$$J_{-3}^s = \frac{s^{-3} - (-1)^{-3}}{s+1} \Rightarrow \frac{\frac{1}{s^3} - 1}{s+1}$$

$$J_{-n}^s = \frac{s^n \cdot (-1)^{n+1}}{s^n} \text{ é semelhante a } J_{-n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \cdot J_n, \text{ quando } s=2$$

Fonte: elaborada pela autora.

Dos protocolos produzidos com base nas interações dialéticas dos discentes realizadas na fase anterior, com as informações e conjecturas empregadas, a fase de validação é marcada

pela verificação e apresentação da exatidão das relações determinadas previamente. Nesse sentido, o aluno 1 utiliza a fórmula de Binet e algumas manipulações como estratégia de prova, conforme veremos na figura 44.

Figura 44 – Demonstração da s-SGJ como modelo de extensão aos inteiros (aluno 1, fase de validação)

$$\begin{aligned}
 J_{-n}^s &= \frac{\frac{1}{s^n} - \frac{1}{(-1)^n}}{s+1} = \frac{\frac{(-1)^n - s^n}{(-s)^n}}{s+1} = \frac{(-1)^n - s^n}{(-s)^n \cdot (s+1)} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} J_{-n} = \frac{(-1)^{n+1}}{s^n} \cdot J_n \\ J_n^s = \frac{s^n - (-1)^n}{s+1} \end{array} \right. \\
 J_{-n}^s &= \frac{(-1)^n - s^n}{(-s)^n \cdot (s+1)} \cdot \frac{(-1)}{(-1)} = \frac{s^n - (-1)^n}{(-1)^{n+1} \cdot s^n \cdot (s+1)} = \frac{J_n^s}{(-1)^{n+1} \cdot s^n} \Rightarrow \\
 J_{-n}^s &= \frac{(-1)^{n+1}}{s^n} \cdot J_n^s, \text{ esta fórmula é semelhante} \\
 &\text{a relação de Binet para } \text{extensão dos inteiros.} \\
 &\text{quando } s=2.
 \end{aligned}$$

Fonte: elaborada pela autora.

De maneira alternativa, o aluno 3 e o aluno 2 desenvolvem seu raciocínio utilizando algumas manipulações algébricas diferentes das que foram estabelecidas na figura anterior. Observamos que ambas nos conduzem à mesma expressão para determinação de um modelo de extensão aos inteiros para a s-SGJ. Nas figuras 45 e 46 podemos constatar esse fato.

Figura 45 – Demonstração da s-SGJ extensão aos inteiros (aluno 3, fase de validação)

Sabendo $J_{-n}^s = \frac{(-1)^n - s^n}{(-s)^n \cdot (s+1)}$, se multiplicarmos por (-1) no numerador e denominador da fração, temos:

$$\begin{aligned}
 J_{-n}^s &= \frac{(-1)^n - s^n}{(-s)^n \cdot (s+1)} \cdot \frac{(-1)}{(-1)} = J_{-n}^s = \frac{s^n - (-1)^n}{s^n \cdot (-1)^{n+1} \cdot (s+1)} \Rightarrow J_{-n}^s = \frac{J_n^s}{s^n \cdot (-1)^{n+1}} \Rightarrow \\
 \Rightarrow J_{-n}^s &= \frac{(-1)^{n+1}}{s^n} \cdot J_n^s \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Quando } s=2, \text{ temos a fórmula de binet} \\ \text{para a extensão dos inteiros de} \\ \text{Jawbsthaf.} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Fonte: elaborada pela autora.

Figura 46 – Demonstração da s-SGJ como modelo de extensão aos inteiros (aluno 2, fase de validação)

$J_{-1}^s = s^{-1}$, $J_{-2}^s = \frac{1-s}{s^2}$; analogamente, termos que: $J_{-n}^s = \frac{(-1)^n \cdot s^n}{(-s)^n \cdot (s+1)}$
 Multiplicando por -1 o numerador e os denominados:
 $J_{-n}^s = \frac{(-1)^n \cdot s^n}{(-s)^n \cdot (s+1)} \cdot \frac{(-1)}{(-1)} \Rightarrow J_{-n}^s = \frac{s^n - (-1)^n}{(-1)^{n+1} \cdot s^n \cdot (s+1)}$
 $J_{-n}^s = \frac{J_n^s \cdot (-1)^{n+1}}{s^n}$, que é semelhante a fórmula de Binet para extensões dos inteiros, quando $s = 2$.
 $J_{-n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \cdot J_n \Leftrightarrow J_{-n}^s = \frac{J_n^s \cdot (-1)^{n+1}}{s^n}$

Fonte: elaborada pela autora.

Das figuras 44, 45 e 46 observamos que os três estudantes conseguiram identificar as semelhanças entre a SJ e a s-SGJ, percebendo assim que a segunda a partir da inserção da variável 's' configura-se como um modelo de generalização da clássica sequência de Jacobsthal. Dessa forma, ao analisar esse padrão os estudantes concluem as aproximações entre os dois modelos de extensão aos inteiros.

Dando prosseguimento, foi apresentada aos estudantes a Sequência dos Polinômios de Jacobsthal que configura-se como um modelo de generalização da clássica sequência. Nesse sentido, consideramos os polinômios da forma $\{J_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ que foram propostos por Horadam (1997) e são definidos pela seguinte relação de recorrência $J(x)_n = J(x)_{n-1} + 2x \cdot J(x)_{n-2}, n \geq 2$

Com a apresentação da definição, alguns questionamentos foram levantados como forma de instigar a percepção por parte dos estudantes sobre o processo matemático-evolutivo da sequência de Jacobsthal.

Nesse sentido, foi questionado à turma sobre as diferenças e possíveis relações que podem ser estabelecidas entre a sequência clássica e a dos polinômios de Jacobsthal. Os depoimentos abaixo expressam as concepções dos estudantes sobre o assunto:

Aluno 7: A diferença entre $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$ e $J(x)_n = J(x)_{n-1} + 2x \cdot J(x)_{n-2}$ é a presença da variável x e o resultado é um polinômio.

Aluno 11: A sequência inicial e a sequência polinomial se comportam da mesma forma, inclusive pelos termos iniciais e se diferenciam com o acréscimo do valor x . Assim, para a sequência polinomial, os termos seguintes gerados são polinômios.

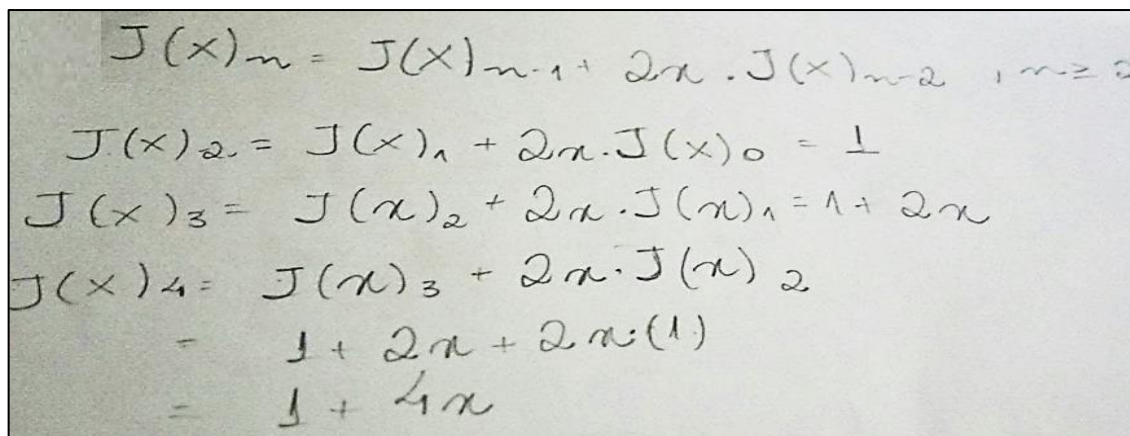
Aluno 8: podemos perceber que a diferença entre as duas relações de recorrência $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$ e $J(x)_n = J(x)_{n-1} + 2x \cdot J(x)_{n-2}$, é a presença da variável x onde o resultado é um polinômio.

Aluno 7: a diferença do primeiro para o segundo é a variável que a gente não sabe que é esse x aqui, então ele seria como se fosse o resultado de um polinômio[...]. O que a gente pode perceber é que a partir do segundo a gente já vai ter um polinômio na variável x .

Dando continuidade, a seguinte situação problema 6 solicitava que os estudantes pudessem estabelecer a fórmula de Binnet para a sequência dos polinômios de Jacobsthal. Dessa forma, os estudantes poderão considerar a equação característica $\lambda^2 - \lambda - 2x = 0$ e a partir de suas raízes indicarem um percurso de demonstração para a fórmula em questão.

Iniciando o plano de estratégias, na fase de ação os estudantes mobilizaram seus conhecimentos prévios para o estabelecimento de alguns casos particulares, conforme observamos na figura 47.

Figura 47 – Determinação de alguns termos SPJ (Aluno 12, fase de ação)



$$J(x)_n = J(x)_{n-1} + 2x \cdot J(x)_{n-2}, \quad n \geq 2$$

$$J(x)_2 = J(x)_1 + 2x \cdot J(x)_0 = 1$$

$$J(x)_3 = J(x)_2 + 2x \cdot J(x)_1 = 1 + 2x$$

$$J(x)_4 = J(x)_3 + 2x \cdot J(x)_2$$

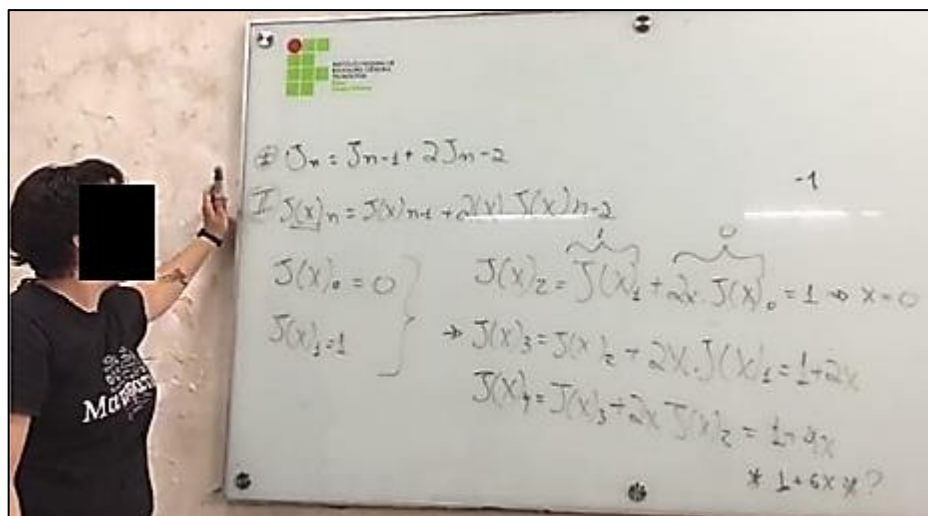
$$= 1 + 2x + 2x \cdot (1)$$

$$= 1 + 4x$$

Fonte: elaborada pela autora.

Não obstante, o Aluno 10 esboça no quadro branco alguns valores para a sequência por meio da substituição de alguns valores naturais de 'n'. Na figura 48, observamos o raciocínio empregado pela estudante.

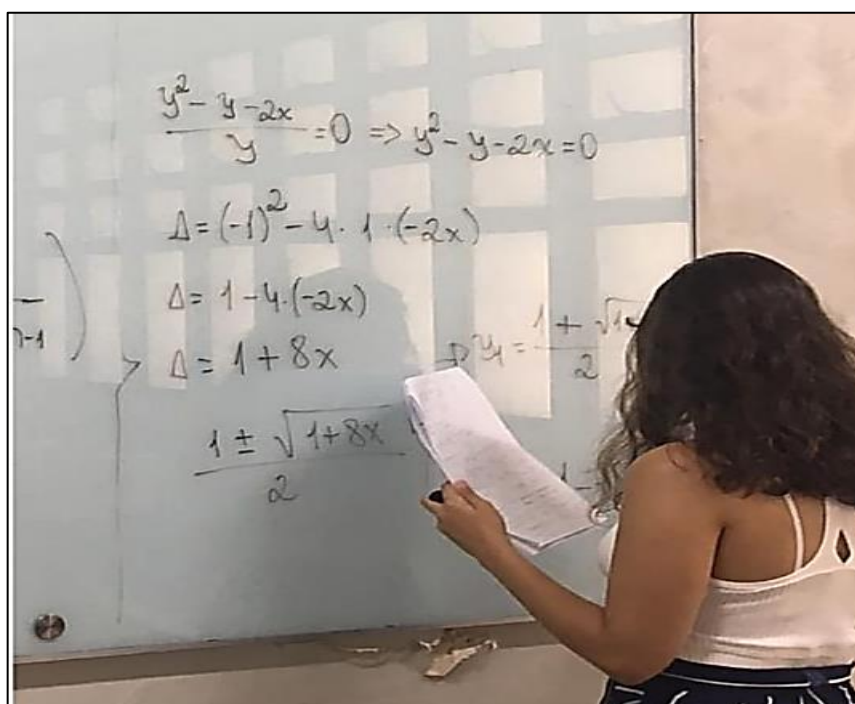
Figura 48 - Identificação de termos da SPJ (aluno 10, fase de ação)



Fonte: elaborada pela autora.

Na fase de formulação, os estudantes realizaram o cálculo das raízes da equação do segundo grau. Isso foi feito no intuito de encontrar os valores de α e β para um posterior estabelecimento da fórmula de Binet para a SPJ. Desse modo, o aluno 8, realizou no quadro branco o cálculo do discriminante Δ e posteriormente utilizou a fórmula de Bháskara para encontrar os valores das raízes da equação do 2º grau.

Figura 49 – Determinação das raízes da equação característica (Aluno 8, fase de formulação)



Fonte: elaborada pela autora.

Por outro lado, o aluno 4 expõe o seu raciocínio no interesse de encontrar os valores de $\alpha(x) = \frac{1+\sqrt{1+8x}}{2}$ e $\beta(x) = \frac{1-\sqrt{1+8x}}{2}$. Na figura 46, constatamos que o estudante obteve tais valores.

Figura 50 – estabelecimento das raízes $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ (Aluno 9, fase de formulação)

Equação Característica

$$y^2 - y - 2x = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2x)$$

$$\Delta = 1 + 8x$$

$$y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1 + 8x}}{2 \cdot 1}$$

$$y' = \frac{1 + \sqrt{1 + 8x}}{2} \quad \text{ou} \quad y'' = \frac{1 - \sqrt{1 + 8x}}{2}$$

Fonte: elaborada pela autora.

A validação do teorema se deu com o emprego da teoria das equações homogêneas de onde pode-se extrair que a solução mais geral pode ser expressa por $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$. Nesse sentido, realizando uma adaptação para a sequência dos polinômios de Jacobsthal pode-se escrever que $J_n(x) = a_1 \cdot \alpha^n(x) + a_2 \cdot \beta^n(x)$. Assim, o aluno 11 organiza um sistema linear com os termos iniciais da sequência e em seguida realiza a demonstração da fórmula de Binet para SPJ.

Figura 51 – Demonstração da fórmula de Binet para SPJ (Aluno 11, fase de validação)

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{1+8x}}{2} ; \beta = \frac{1 - \sqrt{1+8x}}{2}$$

$$T(x)_n = a_1 \cdot \alpha^n + a_2 \cdot \beta^n \quad \begin{cases} T(x)_0 = a_1 \cdot \alpha^0 + a_2 \cdot \beta^0 \Rightarrow a_1 + a_2 = 0 \text{ (I)} \\ T(x)_1 = a_1 \cdot \alpha + a_2 \cdot \beta \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow T(x)_1 = \frac{1 + \sqrt{1+8x}}{2} a_1 + \frac{1 - \sqrt{1+8x}}{2} a_2 = 1 \text{ (II)}$$

Em (I):

$$a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = -a_1 \Rightarrow -a_1 = a_2$$

Substituindo em (II):

$$\frac{1 + \sqrt{1+8x}}{2} a_1 - \left(\frac{1 - \sqrt{1+8x}}{2} \right) a_1 = 1$$

$$a_1 \left(\frac{1 + \sqrt{1+8x}}{2} - \frac{1 - \sqrt{1+8x}}{2} \right) = 1$$

Fonte: elaborada pela autora.

Figura 52 – Continuação da demonstração (Aluno 11, fase de validação)

$$a_1 \left(\frac{2\sqrt{1+8x}}{2} \right) = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{\sqrt{1+8x}}$$

Como $a_2 = -a_1$

$$a_2 = -\frac{1}{\sqrt{1+8x}}$$

Assim, $T(x)_n = \frac{1}{\sqrt{1+8x}} \cdot \alpha^n - \frac{1}{\sqrt{1+8x}} \cdot \beta^n$

$$T(x)_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{1+8x}} = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{1+8x}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{1+8x}}{2} \right)^n}{\sqrt{1+8x}}$$

Fonte: elaborada pela autora.

Além disso na figura 53, divisamos o aluno 12 realizando a etapa de validação da pesquisa com base nas relações e hipóteses estabelecidas nas fases anteriores.

Figura 53 – Demonstração da fórmula de Binet para a SPJ (Aluno 12, fase de validação)

Como $a_2 = -a_1$, temos:

$$\left(\frac{1+\sqrt{1+8a}}{2}\right)a_1 - \left(\frac{1-\sqrt{1+8a}}{2}\right)a_1 = 1$$

$$a_1 \left[\left(\frac{1+\sqrt{1+8a}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{1+8a}}{2}\right) \right] = 1$$

$$a_1 \left[\frac{\sqrt{1+8a} + \sqrt{1+8a}}{2} \right] = 1$$

$$a_1 \left[\frac{2\sqrt{1+8a}}{2} \right] = 1$$

$a_1 = \frac{1}{\sqrt{1+8a}}$

Como $a_2 = -a_1$

Temos que

Assim, J

Fonte: elaborada pela autora.

Destarte, a fala abaixo expressa os argumentos utilizados pela estudante para a obtenção da fórmula em questão.

Aluno 12: Nos encontramos as raízes e essas raízes eu vou chamar de α e β aí vou substituir para encontrar os valores de a_1 e a_2 . [...] Como meu valor de $a_1 = -a_2$ aí vou substituir e vou encontrar o valor de a_1 e depois o valor de a_2 e aí vou colocar o a_1 em evidência.

A situação didática 7, propõe a introdução da $h(x)$ - Sequência Polinomial Generalizada de Jacobsthal . Nesse sentido, questionou-se aos participantes da pesquisa se era possível estabelecer semelhanças entre a $h(x)$ -SPGJ e a SPJ.

Nas fases de ação e formulação foram estabelecidos alguns casos particulares que concorrem para a verificação da SPJ como um caso particular dessa nova sequência. Assim, temos na figura 54 as operações realizadas pelo aluno 8.

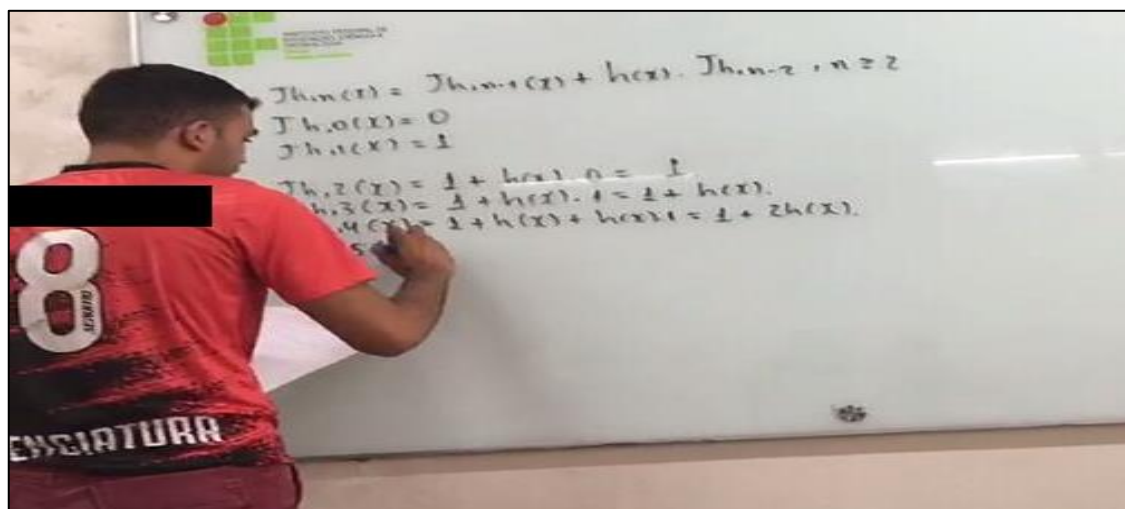
Figura 54 – Estabelecimento de alguns valores da $h(x)$ – SPGJ (Aluno 8, fases de ação e formulação)

$$\begin{aligned}
 J_{h,n}(x) &= J_{h,n-1}(x) + h(x) \cdot J_{h,n-2}, \quad n \geq 2 \\
 J_{h,0}(x) &= 0 \\
 J_{h,1}(x) &= 1 \\
 J_{h,2}(x) &= 1 + h(x) \cdot 0 = 1 \\
 J_{h,3}(x) &= 1 + h(x) \cdot 1 = 1 + h(x) \\
 J_{h,4}(x) &= 1 + h(x) + h(x) \cdot 1 = 1 + 2h(x) \\
 J_{h,5}(x) &= 1 + 2h(x) + h(x) \cdot (1 + h(x)) = 1 + 2h(x) + h(x) + [h(x)]^2 \\
 &= 1 + 3h(x) + [h(x)]^2
 \end{aligned}$$

Fonte: elaborada pela autora.

De maneira análoga, o Aluno 11, realiza algumas substituições de valores de $n \in \mathbb{N}$ na perspectiva de encontrar valores para a $h(x)$ – SPGJ.

Figura 55 – Caracterização de alguns valores da $h(x)$ - SPGJ (Aluno 11, fases de ação e formulação)



Fonte: elaborada pela autora.

A fase de validação deu-se através da argumentação realizada pelos estudantes que manifestam uma compreensão da $h(x)$ -SPGJ como uma espécie de generalização para SPJ. Nesse sentido, os pesquisados perceberam que as duas sequências tratam-se da mesma,

quando realizamos a substituição do polinômio $h(x)$ por $2x$ e assim obtemos a sequência proposta por Horadam. Os depoimentos a seguir atestam esse fato:

Aluno 12: Então fazendo uma relação entre os termos, na sequência dos polinômios de Jacobsthal temos que a diferença entre essa sequência para a anterior é que aqui nós temos um polinômio $h(x)$.

Aluno 11: É possível estabelecer uma relação entre as duas sequências pois, podemos observar que o $h(x)$ representa um polinômio, e se igualarmos as duas sequências, encontramos uma relação de $h(x) = 2x$.

Por fim, os alunos foram apresentados a uma matriz proposta por Catarino e Morgado (2016), tal qual $B(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ h(x) & 1 \end{bmatrix}$. Nessa perspectiva, foi solicitada uma demonstração para as matrizes do tipo $B^n(x)$. Dessa forma, nas fases de ação e formulação os alunos utilizaram algumas operações elementares entre matrizes na finalidade de estabelecer alguns casos particulares que possibilitarão a identificação de conjecturas que serão validadas futuramente. Abaixo, apresentamos o raciocínio empregado pelo Aluno 12 para determinar as matrizes do tipo $B^2(x), B^3(x), \dots$

Figura 56 – Caracterização das matrizes do tipo $B^2(x), B^3(x), \dots$ (Aluno 12, fases de ação e formulação)

Handwritten mathematical derivations for matrices $B^1(x), B^2(x), B^3(x), B^4(x)$ and the general form $B^n(x)$:

$$B^1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ h(x) & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^2(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ h(x) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ h(x) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) & 1 \\ h(x) & h(x)+1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} h(x) \cdot 1 & 1 \\ h(x) \cdot 1 & h(x)+1 \end{bmatrix}$$

$$B^3(x) = \begin{bmatrix} h(x) & 1 \\ h(x) & h(x)+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ h(x) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) & h(x)+1 \\ h(x) & 2h(x)+1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} h(x) \cdot 1 & h(x)+1 \\ h(x) \cdot [h(x)+1] & 2h(x)+1 \end{bmatrix}$$

$$B^4(x) = \begin{bmatrix} [h(x)]^2 + h(x) & 2h(x)+1 \\ 2h(x) + h(x) & h(x)^2 + 3h(x)+1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} h(x) \cdot [h(x)+1] & 2h(x)+1 \\ h(x) \cdot [2h(x)+1] & h(x)^2 + 3h(x)+1 \end{bmatrix}$$

$$B^n(x) = \begin{bmatrix} h(x) \cdot J_{n-1}(x) & J_{n-1}(x) \\ h(x) \cdot J_{n-1}(x) & J_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

Fonte: elaborada pela autora.

Sobre a formulação realizada, o aluno 11 foi questionado sobre como ele tinha chegado à uma conjectura para a matriz $B^n(x)$. A sua fala deixa explícito o raciocínio empregado pelo mesmo para a formulação de sua hipótese:

Aluno11: Quando eu olhei a partir da matriz $B^3(x)$ quando eu tava olhando pra ela percebi que quando coloca em evidência da pra ver que continua aparecendo alguns termos da sequência, sempre nessa última coluna aparecia já os termos da sequência, na primeira coluna não aparecia exatamente porque tinha que colocar o $h(x)$ em evidência depois que eu fui fazendo percebi que colocava o $h(x)$ em evidência e aparecia os termos aí eu fui associando o 'n' do coeficiente da matriz para os elementos dessa sequência e aí teríamos $B^n(x)$.

Na figura 57, observamos o momento de formulação realizado pelo estudante.

Figura 57 – Estabelecimento das matrizes do tipo $B^2(x), B^3(x), \dots$ (Aluno 11, fases de ação e formulação)

$$B^1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ h(x) & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^2(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ h(x) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ h(x) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) & 1 \\ h(x)^2 & h(x)+1 \end{bmatrix}$$

$$B^3(x) = \begin{bmatrix} h(x) & 1 \\ h(x) & h(x)+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ h(x) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x)^2 & h(x)+1 \\ h(x)^2+h(x) & h(x)^2+3h(x)+1 \end{bmatrix}$$

$$B^4(x) = \begin{bmatrix} h(x)^2+h(x) & 2h(x)+1 \\ 2h(x)^2+h(x) & h(x)^2+3h(x)+1 \end{bmatrix}$$

Fonte: elaborada pela autora.

Para validar as conjecturas estabelecidas no decorrer das etapas anteriores, os estudantes recorreram ao princípio da indução como estratégia de prova do teorema em questão. Nesse sentido, observamos a argumentação lógica empregada pelo aluno para provar a veracidade do seu modelo. Assim, sua fala expressa o percurso construído para chegar ao resultado.

Aluno 11 :Para essa matriz ser verdadeira a gente tem que fazer a prova por indução. Primeira coisa, a gente vai fazer para $n=k$ [...] e a gente precisa a gora também fazer para $n=k+1$. Só que a matriz $B^{k+1}(x)$ é a mesma coisa que $B(x) \cdot B^k(x)$ [...]

Por fim, apresentamos as operações realizadas ao longo da fase de validação pelo educando.

Figura 58 – Demonstração para $B(x)^n$ (Aluno 11, fase de validação)

Handwritten mathematical work for Figure 58:

Recursion relations for $J_{h,m}(x)$:

$$J_{h,m}(x) = J_{h,n-1}(x) + h(x) \cdot J_{h,n-2}(x)$$

$$J_{h,n+1}(x) = J_{h,n}(x) + h(x) \cdot J_{h,n-1}(x)$$

$$J_{h,n+2}(x) = J_{h,n+1}(x) + h(x) \cdot J_{h,n}(x)$$

Definition of $B^n(x)$ as a 2×2 matrix:

$$B^n(x) = \begin{bmatrix} h(x) \cdot J_{h,n-1}(x) & J_{h,n}(x) \\ h(x) \cdot J_{h,n}(x) & J_{h,n+1}(x) \end{bmatrix}$$

For $n=k$, the matrix $B^k(x)$ is:

$$B^k(x) = \begin{bmatrix} h(x) \cdot J_{h,k-1}(x) & J_{h,k}(x) \\ h(x) \cdot J_{h,k}(x) & J_{h,k+1}(x) \end{bmatrix}$$

Calculation of $B^k(x) \cdot B^1(x)$ to find $B^{k+1}(x)$:

$$B^k(x) \cdot B^1(x) = \begin{bmatrix} h(x) \cdot J_{h,k-1}(x) & J_{h,k}(x) \\ h(x) \cdot J_{h,k}(x) & J_{h,k+1}(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ h(x) & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^k(x) \cdot B^1(x) = \begin{bmatrix} h(x) \cdot J_{h,k}(x) & h(x) \cdot J_{h,k-1}(x) + J_{h,k}(x) \\ h(x) \cdot J_{h,k+1}(x) & h(x) \cdot J_{h,k}(x) + J_{h,k+1}(x) \end{bmatrix}$$

Thus, $B^{k+1}(x) = \begin{bmatrix} h(x) \cdot J_{h,k}(x) & J_{h,k+1}(x) \\ h(x) \cdot J_{h,k+1}(x) & J_{h,k+2}(x) \end{bmatrix}$

Fonte: elaborada pela autora.

Figura 59 – Finalização da Demonstração pra $B^n(x)$ (Aluo 11, fase de validação)

Handwritten mathematical work for Figure 59:

$$B^k(x) \cdot B^1(x) = \begin{bmatrix} h(x) \cdot J_{h,k}(x) & J_{h,k+1}(x) \\ h(x) \cdot J_{h,k+1}(x) & J_{h,k+2}(x) \end{bmatrix}$$

Fonte: elaborada pela autora.

No quadro 3, realizou-se um delineamento dos momentos de resolução das situações didáticas que apresentamos a seguir:

Quadro 3 - Categorização das etapas de resolução das situações didáticas pautadas na TSD

Situação Didática 1	
Objetivo	Estabelecer uma relação para e para e usando os números de Jacobsthal.
Ação	Obtenção das potências do tipo $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \dots$ e $\beta^1, \beta^2, \beta^3, \dots$
Formulação	Estabelecimento das conjecturas $\alpha^n = \alpha J_n + 2 J_{n-1}$ e $\beta^n = \beta J_n + 2 J_{n-1}$.
Validação	Utilização do princípio da indução para demonstração das propriedades

	anteriores.
Institucionalização	Formalização de uma fórmula fechada para obtenção de potências do tipo α^n e β^n .
Situação Didática 2	
Objetivo	Conceber uma demonstração para J_{-n} como modelo de extensão aos inteiros.
Ação	Compreensão do sistema notacional e comparação entre J_n e J_{-n}
Formulação	Determinação de alguns casos particulares e caracterização da conjectura $J_{-n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \cdot J_n.$
Validação	Utilização da fórmula de Binet para a demonstração da relação $J_{-n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \cdot J_n$
Institucionalização	Generalização e formalização do modelo de extensão aos inteiros para a SJ.
Situação Didática 3	
Objetivo	Estabelecer a identidade de Cassini para sequência de Jacobsthal.
Ação	Caracterização dos determinantes das matrizes $F, F^2, F^3, \dots$
Formulação	Identificação e descrição da relação $\det F^n = (-2)^n$
Validação	Demonstração da identidade de Cassini por meio do cálculo do determinante da matriz F^n
Institucionalização	Formalização da extensão da identidade de Cassini para a SJ.
SITUAÇÃO DIDÁTICA 4	
Objetivo	Compreender matriz inversa e apresentar uma demonstração para F^{-n}
Ação	Compreensão de F^{-n} como a inversa da matriz F^n .
Formulação	Identificação de alguns casos particulares tais quais as matrizes $F^{-1}, F^{-2}, F^{-3}, \dots$
Validação	Demonstração por indução para $F^{-n} = \begin{bmatrix} J_{-(n-1)} & 2J_{-n} \\ J_{-n} & 2J_{-(n+1)} \end{bmatrix}$
Institucionalização	Formalização e generalização de F^{-n} como a n-ésima potência da inversa da matriz F .
Situação Didática 5	
Objetivo	Apresentar um modelo de extensão aos inteiros o para s- sequência de Jacobsthal
Ação	Identificação de semelhanças entre a SJ e s-SGJ
Formulação	Identificação de alguns casos particulares e caracterização da conjectura $J_{-n}^s = \frac{(-1)^{n+1}}{s^n} \cdot J_n^s.$
Validação	Utilização da fórmula de Binet para demonstração de $J_{-n}^s = \frac{(-1)^{n+1}}{s^n} \cdot J_n^s$
Institucionalização	Generalização da s- SGJ como modelo de extensão aos inteiros.
Situação Didática 6	
Objetivo	Estabelecer a fórmula de Binet para a Sequência dos polinômios de Jacobsthal.
Ação	Determinação de alguns casos particulares da SPJ
Formulação	Indicação das raízes da equação característica $\lambda^2 - \lambda - 2\lambda = 0$
Validação	Demonstração com base na teoria das sequências recursivas da fórmula de

	Binet para SPJ, tal qual $J(x)_n = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\sqrt{1+8x}}$
Institucionalização	Formalização e generalização da fórmula de Binet para SPJ
Situação Didática 7	
Objetivo	Compreender a $h(x)$ -SPGJ como modelo de generalização da SPJ
Ação	Identificação do sistema notacional e comparação entre $J(x)_n$ e $J(x)_{h,n}$
Formulação	Estabelecimento de alguns casos particulares da $h(x)$ -SPGJ
Validação	Argumentação sobre a $h(x)$ -SPGJ como forma de generalização da SPJ
Institucionalização	Formalização da $h(x)$ -SPGJ como modelo de generalização da SJ
Situação didática 8	
Objetivo	Estabelecer e propor uma demonstração para a matriz $B^n(x)$
Ação	Indicação de casos particulares do tipo $B^2(x), B^3(x)$ e $B^4(x)$
Formulação	Conjectura e escrita da matriz $B^n = \begin{bmatrix} h(x) \cdot J_{h,n-1}(x) & J_{h,n}(x) \\ h(x) \cdot J_{h,n}(x) & J_{h,n+1}(x) \end{bmatrix}$
Validação	Demonstração por indução para $B^n = \begin{bmatrix} h(x) \cdot J_{h,n-1}(x) & J_{h,n}(x) \\ h(x) \cdot J_{h,n}(x) & J_{h,n+1}(x) \end{bmatrix}$
Institucionalização	Formalização e generalização da $h(x)$ -sequência e discussão sobre o seu processo matemático-evolutivo.

Fonte: elaborada pela autora.

Os dados apurados durante as etapas anteriores serviram para consolidar as escolhas feitas sobre o estatuto final do saber na fase de institucionalização que se deu por meio da formalização e generalização de teoremas e propriedades, bem como o estabelecimento de uma concepção de matemático-evolutiva da Sequência Generalizada de Jacobsthal.

Nesse sentido, o quadro 3, apresenta a institucionalização realizada pelo professor no decurso das situações didáticas. À vista disso, na primeira situação didática, os estudantes propuseram valores para as potências do tipo α^n e β^n . Com isso, foi possível estabelecer a formalização de uma propriedade para obtenção de potências com essa característica. Continuando, na segunda situação didática, os alunos estabeleceram alguns termos da SJ e sua extensão aos inteiros. Ademais, por meio da fórmula de Binet, apresentou-se uma demonstração para mesma, o que concorreu para a generalização e formalização do modelo de extensão aos inteiros para a SJ. Na terceira situação didática, foi caracterizado o determinante das matrizes $F, F^2, F^3, \dots$ e demonstrada a identidade de Cassini. Isso permitiu expressar um modelo de extensão dessa identidade para a SJ.

Prosseguindo a institucionalização, na quarta situação didática, foi realizada a compreensão das matrizes inversas. Além disso, a demonstração por indução propiciou a formalização e generalização de F^{-n} como a n -ésima potência inversa da matriz F . Seguidamente, na quinta situação didática, os estudantes indicaram as relações entre os

termos da SJ e da s-SGJ e sua extensão aos inteiros. Isso ocasionou uma generalização da s-SGJ como modelo de extensão aos inteiros. Nesse enfoque, na sexta situação didática, ocorreu a determinação de alguns termos da SPJ e a identificação das raízes da equação característica associada a relação recursiva. Desse modo, pôde-se caracterizar uma extensão da fórmula de Binet para a SPJ.

Na penúltima situação didática, ocorreu uma percepção do sistema notação e comparação entre a SPJ e $h(x)$ -SPGJ. O que viabilizou a compreensão da $h(x)$ -SPGJ como modelo de generalização da SPJ. Finalizando, a situação didática oito, possibilitou a indicação de matrizes associadas a $h(x)$ -SPGJ e, propiciou o entendimento sobre o seu processo matemático – evolutivo.

Por outro lado, no âmbito dos interesses do professor-pesquisador com os dados produzidos pela classe, segundo os pressupostos da Engenharia Didática é prevista uma etapa de validação que é classificada em dois tipos: validação interna e validação externa.

Segundo Laborde (1997, p.105) a validação interna envolve “uma descrição genérica da classe ou das condutas e tipos de produção majoritária na classe, estudo de sua evolução e verificação de sua adequação no que concerne ao esperado dos estudantes”. Não obstante, Laborde (1997) assegura que a validação externa baseia-se na comparação dos estudantes antes e depois da aplicação da sequência, por meio de entrevistas ou questionários e ainda na comparação com as produções de estudantes externos ao tipo de experimentos e sequência estruturada.

Nessa perspectiva, salientamos que nessa pesquisa a validação foi realizada internamente, tendo em vista que são analisados apenas as produções e o desempenho dos estudantes que foram observados em sala, não havendo comparação com produções externas a esta aplicação.

Assim, os dados coligidos no decurso desta pesquisa possibilitam o entendimento de que os objetivos propostos foram atingidos. Com isso, ocorre a validação interna que se inicia com as análises preliminares, em que se realizou um estudo bibliográfico sobre o processo matemático de gênese, evolução e generalização das principais propriedades atinentes à Sequência de Jacobsthal. Isso permite caracterizar que o primeiro objetivo, que diz respeito ao seu processo epistemológico e histórico-evolutivo, foi alcançado. Por outro lado, na etapa de concepção e análise a priori, a validação ocorre por meio das elaborações das situações didáticas e planejamento dos momentos de aplicação, que atuam como suporte para etapa de

experimentação. Diante disso, pode-se deduzir que o segundo objetivo da pesquisa foi satisfeito.

No que diz respeito ao terceiro objetivo, verifica-se a validação por intermédio da situação didática, sobretudo, na etapa de institucionalização da Teoria das Situações Didáticas. Além disso, as declarações dos estudantes atestam que o objetivo geral cumpriu-se, possibilitando aos pesquisados a compreensão da História da Matemática por meio da sequência de Jacobsthal e seus modelos de extensão e generalização. Assim, os professores em formação inicial têm a oportunidade de desenvolver um entendimento sobre o processo matemático-evolutivo da SJ, por meio da formulação de teoremas e demonstração. Seguem os depoimentos abaixo.

Aluno 5: “As aulas de história da matemática me mostraram como sequências são desafiadoras e instigantes. Trabalhar suas definições e demonstrações aumentou minha capacidade de perceber como essas sequências se comportam a fim de entender melhor suas semelhanças ou particularidades. Em especial, o estudo da sequência de Jacobsthal me trouxe uma visão melhor sobre outras sequências, pelo seu comportamento.”

Aluno 6: “As aulas foram de grande ajuda na minha formação como professor de matemática. A experiência de fazer parte da construção de um objeto matemático é bem única e, além disso, por poder participar ativamente do processo[...]. Dado o fato de que costumamos apenas observar as demonstrações sendo feitas e, algumas vezes, tentando replicá-las, tentar criar elas “a partir do zero” reforçou a nossa consciência em relação ao trabalho do pesquisador, até mesmo nos inspirando nesse caminho [...].”

Aluno 3: “Achei as aulas ótimas, mostrou-me uma nova perspectiva da história da matemática, através das sequências. Foi muito interessante. Achei muito bom esse fato das definições e demonstrações pelo fato de podermos ver padrões e chegarmos a conclusões definitivas e prova-las por meios matemáticos [...].”

Aluno 2: “Ao fazer a matrícula na disciplina de História da Matemática, pensei que a disciplina seria mais voltada para a história em si, e me surpreendi por ter sido da forma que foi, ou seja, aprofundada em demonstrações matemáticas, abordando assuntos que pouco foram vistos no decorrer do curso, e que para mim foram de suma importância [...]. Eu particularmente não conhecia a sequência de Jacobsthal, e foi interessante conhecer mais e ter a oportunidade de explorar suas propriedades e características a partir de alguns elementos.”

Diante do exposto, constatamos que as situações didáticas realizadas no âmbito da sala de aula suscitaram em alguns estudantes, uma concepção da HM e sua relação com a epistemologia dos conceitos matemáticos. Não obstante, as atividades que oportunizaram a formulação de definições e teoremas, possibilitou o desenvolvimento de um raciocínio inferencial e motivaram a compreensão da SJ, seus modelos de generalização e seu processo de evolução matemática.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, evidenciamos uma preocupação distinguida e particularizada a respeito do desenvolvimento histórico da Sequência Generalizada de Jacobsthal. Além disso, objetivamos uma discussão sobre o seu ensino, desenvolvimento epistemológico por meio da fórmula de Binet e seus modelos de extensão.

Nesse escopo, abordamos um conteúdo matemático cujas discussões são pautadas num contexto de matemática pura, que em sua maioria se mostra isento de qualquer interesse pedagógico. Assim, não é comum a discussão de seus conceitos e propriedades em um curso de formação de professores de matemática. Desse modo, realizamos uma transposição didática em que foram selecionados alguns teoremas e propriedades da sequência clássica, bem como a Sequência Polinomial e seus modelos de extensão. Dessa forma, o estudo envolveu a participação de um grupo de estudantes regularmente matriculados na disciplina de HM. A escolha da disciplina justifica-se por possibilitar a discussão de definições e propriedades matemáticas e por viabilizar a compreensão sobre o estado atual e evolutivo do objeto matemático.

Nessa perspectiva, observamos que alguns compêndios de HM tendem a evidenciar alguns conceitos de maneira sucinta e trivial, o que pode ocasionar um entendimento raso e deslocado, sobretudo no que concerne ao seu processo evolutivo. Além do mais, percebemos que algumas descobertas recentes sobre o processo matemático e evolutivo, são negligenciadas nos livros especializados. Nessa pesquisa, isso se torna evidente quando se investiga sobre os modelos de extensão da SJ e sobre seu crescimento dimensional, comprovado nas relações e identidades n -dimensionais.

Em contrapartida, considerando o seu enquadramento na corrente francófona de investigação nominada de Didática da Matemática, apoiamos nosso itinerário de estudos na metodologia de pesquisa conhecida como Engenharia Didática. Destacamos a etapa de experimentação, com base na Teoria das Situações Didáticas, que se configura como uma

teoria específica e intimamente relacionada aos conceitos matemáticos. Assim, o emprego da ED busca a obtenção, acúmulo, constatação e determinação de conhecimentos técnicos, didáticos e metodológicos sobre uma prática controlada de transmissão e transposição didática, relativamente a determinado conteúdo matemático (ALVES, 2017).

Assim, a fase de análises preliminares da ED possibilitou a demarcação de aspectos de ordem epistemológica, didática e cognitiva. Além do mais, essa etapa permitiu um estudo bibliográfico que evidenciou um conjunto de modelos de extensão e propriedades matemáticas que permitiu uma análise do seu desenvolvimento matemático, histórico e evolutivo. Dessa coleção de modelos, distinguem-se alguns resultados tais quais: a sequência estendida no campo dos inteiros, propriedades e generalidades matriciais e as relações recorrentes n -dimensionais, que revelam seu contínuo processo de desenvolvimento matemático. Tais fatos oportunizaram a obtenção do primeiro objetivo específico.

Prosseguindo, a fase de análises *a priori* viabilizou a análise de variáveis didáticas para a elaboração de situações de ensino, que propõem apresentar propostas de problemas que podem ser replicadas em sala que possam permitir ao estudante o desenvolvimento do seu raciocínio inferencial, por meio da formulação e identificação de definições, teoremas e propriedades atinentes à SJ. Isso evidencia que o segundo objetivo específico foi atingido.

Ademais, as análises *a posteriori* e a validação interna da pesquisa permitiu constatar que o último objetivo da pesquisa foi atingido, tendo em vista que foi fomentada a discussão e formulação de definições e teoremas atinentes à SJ. Além disso, as etapas de validação e institucionalização favorecem a incorporação e elaboração de conhecimento por parte dos estudantes. Além disso, vale destacar que estratégia de prova amplamente utilizada foi o Princípio de Indução Matemática e nessa ocasião alguns estudantes manifestaram uma compreensão rasa ou até mesmo equivocada, o que necessitou de algumas intervenções por parte do pesquisador ao longo das sequências didáticas.

Outrossim, as fases de estruturação e organização da pesquisa, tais quais: discussão do processo evolutivo do objeto matemático, concepção das situações didáticas, experimentação e análise e validação dos resultados, ocasionou alguns progressos no sentido de: expandir a discussão matemática dos modelos de generalização da SJ; enaltecer a função das definições e demonstrações matemáticas no contexto da HM, para a compreensão de sua evolução e propor aos professores em formação inicial a compreensão não estática do modelo de Jacobsthal.

Por fim, esperamos que o percurso metodológico abordado neste trabalho funcione como referência para organizar e sistematizar futuras pesquisas no âmbito do ensino de matemática, fundamentadas nos aspectos da Engenharia Didática em complementaridade com a Teoria das Situações Didáticas.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Paraná: Universidade Federal do Paraná, 2007.

ALMOULOUD, Saddo Ag; DE QUEIROZ, Cileda; COUTINHO, Silva. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPED. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 3, n. 1, p. 62-77, 2008.

ALMOULOUD, Saddo Ag; SILVA, Maria José Ferreira da. Engenharia didática: evolução e diversidade. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 07, n. 2, p.22-52, nov. 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p22>. Acesso em: 29 jul.2017.

ALVES, Francisco Regis Vieira. Engenharia Didática de Formação (EDF): sobre o ensino dos Números (Generalizados) de Catalan (NGC) DidacticalEngineering. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, [s.l.], v. 20, n. 2, p.47-83, out. 2018a.

ALVES, Francisco Regis Vieira; CATARINO, Paula. Engenharia Didática de 2.^a geração com o tema: $h(x)$ -polinômios de Jacobsthal. **Ensino de Ciências e Tecnologia em Revista**, v. 7, n. 1, p. 21-46, 2018b.

ALVES, Francisco Regis Vieira. Engenharia Didática para a s-Sequência Generalizada de Jacobsthal e a (s,t)-Sequência Generalizada de Jacobsthal: análises preliminares e a priori. **Revista Unión**, São Paulo, v. 12, n. 41, p.83-106, dez. 2017.

ALVES, Francisco Regis Vieira. Engenharia Didática para a generalização da sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura. **Revista de Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo. v.18, n.1, p.61-93, 2016.

ARTIGUE, M. (1988): “**Ingénierie Didactique**”. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9.3, 281-308.

ARTIGUE, Michelle. Ingeniería Didáctica. In: ARTIGUE, Michelle. **Ingeniería didáctica em Educacion Matemática**. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, 1995b. p. 33-61.

Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigue1995Ingenieria.pdf>. Acesso em: 10 abr. 2018.

ASCI, Mustafa; GUREL, Esref. Gaussian Jacobsthal and Gaussian Jacobsthal Lucas polynomials. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics**, v. 19, n. 1, p. 25-36, 2013.

ATANASSOV, Krassimir T. Short remarks on Jacobsthal numbers. Part2. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics**, v. 17, n. 2, 37 – 39, 2011.

AYDIN, Fügen Torunbalcı; YÜCE, Salim. A new approach to Jacobsthal quaternions. **Filomat**, v. 31, n. 18, 2017.

BERZSENYI, G. Gaussian Fibonacci numbers. **The Fibonacci Quarterly**, v. 15, n. 3, p. 233–236, 1977.

BROUSSEAU, Guy. **Theory of didactical situations in mathematics**: didactique des mathématiques (1970-1990). [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 1997.

BROUSSEAU, Guy. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (Org). **Didática da Matemática**: Reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. Cap. 4, p. 54-78.

BROUSSEAU, Guy. Les Obstacles ‘epist’emologicques et les problems en mathematiques. In: RENCONTRE ORGANISÉE PAR LA COMMISSION INTERNATIONALE POUR L’ETUDE ET L’, 28., 1976. Louvain-la-neuve, **Anais...** Louvain-la-neuve, 1976. p.101-117.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. **Zetetike**, v. 13, n. 1, p. 87-120, 2005.

CATARINO, Paula; MORGADO, Maria Luisa. On Generalized Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas polynomials. **Analele Universitatii**, [s.l.], v. 24, n. 3, p.61-78, nov. 2016. Disponível em: https://pdfs.semanticscholar.org/b5f7/42bc4bb715a82467bb1eb3976c674a19904d.pdf?_ga=2.251677449.1845979340.1503046417-1924977525.1502537199. Acesso em: 15 dez. 2018.

ÇIMEN, Cennet Bolat; IPEK, Ahmet. On jacobsthal and jacobsthal–lucas octonions. **Mediterranean Journal of Mathematics**, v. 14, n. 2, p. 37, 2017.

ÇIMEN, Cennet Bolat; IPEK, Ahmet. On Jacobsthal and the Jacobsthal-Lucas sedenions and several identities involving these numbers. **Mathematica Aeterna**, v. 7, n. 4, p. 447-454, 2017.

D’AMORE, Bruno. Epistemologia, Didática da Matemática e Práticas de Ensino. **Boletim de Educação Matemática**, São Paulo, v. 20, n. 28, p.1-22, mar. 2007. Disponível em: [http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/635 Epistemologia Didattica.pdf](http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/635%20Epistemologia%20Didattica.pdf). Acesso em: 18 jul. 2018.

D’ AMORE, Bruno. **Epistemologia e Didática da Matemática**. São Paulo: Escrituras, 2005

FALCON, Sergio. On the k-Jacobsthal numbers. **American Review Of Mathematics And Statistics**, Las Palmas, v. 2, n. 1, p.67-77, mar. 2014.

FALCÓN, Sergio; PLAZA, Ángel. On the Fibonacci k-numbers. **Chaos, Solitons & Fractals**, [s.l.], v. 32, n. 5, p.1615-1624, jun. 2007.

FREITAS, J.L.M. Teoria das Situações Didáticas. In: MACHADO, S.D.A.(Org.). **Educação Matemática: (uma nova) introdução**. 1reimpr. São Paulo. EDUC.2010. p.77-111.

GÁLVEZ, Grecia. A Didática da Matemática. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (Org.). **Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. Cap. 2, p. 26-35.

GNANAM, A.; ANITHA, B. Negative Jacobsthal Numbers. **International Journal of Science, Engineering and Technology Research**, v. 5, n. 3, p. 663 – 665, 2016.

HARMAN, C. J. Complex Fibonacci numbers. **The Fibonacci Quarterly**, v. 19, n. 1, p. 82–86, 1981.

HORADAM, AsdFassd. Jacobsthal representation numbers. **The Fibonacci Quarterly**. Austrália, p. 40-55, fev. 1996.

HORADAM, AsdFassd. Jacobsthal Representation Polynomials. **The Fibonacci Quarterly**, [s.l.], v. 35, n. 2, p.137-148, maio 1997.

JHALA, Deepika; RATHORE, G.p.s.; SISODIYA, Kiran. On Some Identities for k-Jacobsthal Numbers. **Int. Journal Of Math. Analysis**, [s.l.], v. 7, n. 12, p.551-556, jul. 2013..

JHALA, Deepika; RATHORE, G.p.s.; SISODIYA, Kiran. Some Properties of k-Jacobsthal Numbers with Arithmetic Indexes. **Turkish Journal Of Analysis And Number Theory**, [s.l.], v. 2, n. 4, p.119-124, jul. 2014.

KOKEN, Fikri; BOZKURT, Durmus. On the Jacobsthal numbers by matrix methods. **International Journal of Contemporary Mathematics**, v.3, n. 13, 605-614, 2008. Disponível em: <http://www.m-hikari.com/ijcms-password2008/13-16-2008/kokenIJCMS13-16-2008.pdf>. Acesso em: 05 maio 2018.

KOSHY. T. **Fibonacci and Lucas Numbers And Applications**. New York: John Willey and Sons, 2011.

LAPARRA, Marceline; MARGOLINAS, Claire. Milieu, connaissance, savoir. Des concepts pour l'analyse de situations d'enseignement. **Pratiques. Linguistique, littérature, didactique**, n. 145-146, p. 141-160, 2010.

LIMA, Elon Lages et al. **A matemática do ensino médio**. [S.l.]: SBM, 2006. (Coleção do Professor de Matemática).

MARTINEZ, Fabio E. Brochero et al. **Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro**. Rio de Janeiro: Impa, 2013.

MARTINEZ, Lorenzo J.; SALAS, Alvaro H. Convergence of Quotients of Consecutive Terms of a Generalized Secondary Fibonacci Sequence. In: MARTINEZ, Lorenzo J.; SALAS, Alvaro H. **International Mathematical Forum**. [S.l.:s.n.], 2011. p. 1955-1964.

MENEZES, M. B; LESSA, M. M. L; MENEZES, A. P. A. B. **A Emergência de Fenômenos Didáticos em Sala de Aula**: a Negociação de uma Seqüência Didática em Álgebra Inicial. 2006. Disponível em: www.rc.unesp.br/igce/matematica/bolema/.pdf. Acesso em: 01 ago. 2017.

NASSERALA, Alessandro Mendonça. **Elaboração de Situações Didáticas com amparo na Sequência Fedathi**: O caso da Integral Imprópria. 2014. Disponível em <http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/10669/1/2014disamnasserala.pdf>. Acesso em 27 jul.2017.

OLIVEIRA, R. R.; ALVES, F. R. V.; PAIVA, R. E. B. Identidades bi e tridimensionais para os números de Fibonacci na forma complexa. **Revista eletrônica paulista de matemática**, v. 11, p. 91-106, 2017.

OLIVEIRA, Rannelly Rodrigues de. **Engenharia Didática sobre o modelo de complexificação da Sequência Generalizada de Fibonacci**: Relações recorrentes N-dimensionais e representações polinomiais e matriciais. 2018. 222 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2018.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. 3. ed. Belo Horizonte: Autentica, 2015.

POMMER, Wagner Marcelo. **A Engenharia Didática em sala de aula**: elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares. 2013. Disponível em: <http://stoa.usp.br/wmpommer/files/3915/20692/Livro+Ema+Didática+2013.pdf>. Acesso em: 01 Ago.2018.

POMMER, Wagner Marcelo. Brousseau e a ideia de Situação Didática. In: SEMINÁRIOS DE ENSINO DE MATEMÁTICA, 2., 2008. São Paulo, **Anais...** São Paulo: FEUSP, 2008. Disponível em: <http://www.nilsonjosemachado.net/sema20080902.pdf>. Acesso em: 01 ago. 2018.

SZYNAL-LIANA, Anetta; WŁOCH, Iwona. A note on Jacobsthal quaternions. **Advances in Applied Clifford Algebras**, v. 26, n. 1, p. 441-447, 2016.