



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ -  
IFCE  
IFCE CAMPUS FORTALEZA**

**COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE  
TELECOMUNICAÇÕES**

**Michael Douglas de Castro Sousa**

**Modelo numérico baseado em tensores para acopladores ópticos com múltiplos núcleos**

**FORTALEZA  
2024**

**Michael Douglas de Castro Sousa**

**Modelo numérico baseado em tensores para acopladores ópticos com múltiplos núcleos**

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Telecomunicações do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Telecomunicações.

Orientador: Prof. Dr. Danilo Sousa Rocha

Co-orientador: Prof. Dr. Glendo de Freitas Guimarães

FORTALEZA

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Instituto Federal do Ceará - IFCE  
Sistema de Bibliotecas - SIBI  
Ficha catalográfica elaborada pelo SIBI/IFCE, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

S725m    Sousa, Michael Douglas de Castro.  
          Modelos numéricos baseado em tensores para acopladores com múltiplos núcleos / Michael Douglas de Castro Sousa. - 2024.  
          70 f. : il. color.

          Dissertação (Mestrado) - Instituto Federal do Ceará, Mestrado em Engenharia de Telecomunicações, Campus Fortaleza, 2024.  
          Orientação: Prof. Dr. Danilo Sousa Rocha.  
          Coorientação: Prof. Dr. Glendo de Freitas Guimarães.

          1. Acopladores ópticos multinúcleos. 2. Modelagem de dispositivos ópticos. 3. Modelos tensoriais. I. Título.

CDD 621.382

---



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ  
Av. 13 de maio, 2081 - Bairro Benfica - CEP 60040-531 - Fortaleza - CE - [www.ifce.edu.br](http://www.ifce.edu.br)

## **FOLHA DE APROVAÇÃO**

Processo: 23256.004870/2024-37

Interessado: Michael Douglas de Castro Sousa

### **MICHAEL DOUGLAS DE CASTRO SOUSA**

Modelo numérico baseado em tensores para acopladores ópticos com múltiplos núcleos

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia de Telecomunicações (PPGET) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) *Campus* de Fortaleza, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Telecomunicações. Área de concentração: Sistemas de Telecomunicações

Aprovada em: 10/04/2024.

### **BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Dr. Danilo Sousa Rocha – orientador**

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE *Campus* Sobral

**Prof. Dr. Glendo de Freitas Guimarães**

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE

**Prof. Dr. Francisco Tadeu de Carvalho Belchior Magalhães**

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE



Documento assinado eletronicamente por **Danilo Sousa Rocha, Professor do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico**, em 20/04/2024, às 10:20, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Francisco Tadeu de Carvalho Belchior Magalhaes, Professor do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico**, em 20/04/2024, às 11:34, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Carlos Alexandre Rolim Fernandes, Usuário Externo**, em 24/04/2024, às 10:03, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Glendo de Freitas Guimaraes, Coordenador(a) do PPGET**, em 06/05/2024, às 15:32, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade do documento pode ser conferida no site [https://sei.ifce.edu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ifce.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0) informando o código verificador **6072832** e o código CRC **6771B1FA**.

## **DEDICATORIA**

À minha mãe, Cláudia Diônes.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao meu orientador e grande amigo Danilo Sousa Rocha por todo empenho e estímulo dado na criação desse trabalho.

“A luz é a energia que ilumina nossas mentes e descobre as grandes verdades.”

(Autor: Desconhecido.)

## RESUMO

Na ampla área da fotônica, os acopladores ópticos surgem como protagonistas essenciais. Esses dispositivos multifacetados não apenas abrem caminho para sensores de última geração, *splitters* inovadores, filtros de alta eficiência e interferômetros de precisão, mas também atuam como conectores fundamentais que unem diferentes funcionalidades em sistemas ópticos complexos. Eles constituem a espinha dorsal da transmissão e do processamento de informações em nosso mundo cada vez mais interconectado. No entanto, antes da implementação prática ou da prototipagem desses dispositivos ópticos, o processo de simulação computacional é de grande importância para compreender o comportamento dos sinais ópticos, além de economizar tempo e recursos. Nesse sentido, o método numérico baseado em tensores (arranjos matriciais com mais de duas dimensões) pode ser usado como alternativa, mostrando-se vantajoso diante de algumas dificuldades encontradas em outros métodos, como o tradicional método Runge-Kutta de 4ª ordem. O método proposto consiste em generalizar as tradicionais matrizes de transferência utilizadas na solução analítica de acopladores de dois núcleos, a fim de obter, por meio de tensores de transferência, uma modelagem simples e compacta de acopladores multinúcleos, explorando suas características multidimensionais. O método foi desenvolvido e testado para o caso de acopladores triplos em regime linear e não linear, nas configurações planar e triangular. Resultados das simulações numéricas demonstraram a eficácia do método em resolver a propagação da luz ao longo do acoplador, revelando superioridade em termos de conservação de energia e desempenho computacional quando comparado a métodos tradicionais para solução do mesmo problema.

**Palavras-chave:** Acopladores ópticos multinúcleos. Modelagem de dispositivos ópticos. Modelos tensoriais.

## ABSTRACT

In the broad field of photonics, optical couplers emerge as essential protagonists. Optical couplers are multifaceted devices that pave the way for cutting-edge sensors, innovative splitters, high-efficiency filters, and precision interferometers. They also serve as fundamental connectors that unite different functionalities in complex optical systems. They constitute the backbone of information transmission and processing in our increasingly interconnected world. However, before the practical implementation or prototyping of these optical devices, the process of computational simulation is of great importance to understand the behavior of optical signals and to save time and resources. In this regard, the numerical method based on tensors (arrays with more than two dimensions) can be used as an alternative, since it has several advantages over other methods, such as the traditional fourth order Runge-Kutta method. The proposed method consists of generalizing the traditional transfer matrices used in the analytical solution of two-core couplers to obtain, through transfer tensors, a simple and compact modeling of multi-core couplers, exploiting their multidimensional characteristics. The method was developed and tested for the case of triple couplers in linear and non-linear regime, in planar and triangular configurations. Results of numerical simulations demonstrated the effectiveness of the method in solving light propagation along the coupler, revealing superiority in terms of energy conservation and computational performance when compared to traditional methods for solving the same problem.

**Keywords:** Multi-core optical couplers. Modeling of optical devices. Tensor models.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

|                                                                                                                                                       |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 – Estrutura da Fibra Óptica . . . . .                                                                                                        | 19 |
| Figura 2 – Acoplador óptico duplo . . . . .                                                                                                           | 21 |
| Figura 3 – Comportamento do Sinal ao longo do acoplador duplo ( $P_{ot} = 1 \text{ mW}$ , $\kappa = 1 \text{ cm}^{-1}$ ) . . . . .                    | 23 |
| Figura 4 – Acoplador triplo planar . . . . .                                                                                                          | 24 |
| Figura 5 – Acoplador triplo triangular . . . . .                                                                                                      | 25 |
| Figura 6 – Acoplador óptico com $N$ núcleos . . . . .                                                                                                 | 26 |
| Figura 7 – Fluxograma RK4 . . . . .                                                                                                                   | 29 |
| Figura 8 – Propagação do Pulso com o Método Split-Step Fourier . . . . .                                                                              | 30 |
| Figura 9 – Exemplo de um tensor de terceira ordem com dimensão $3 \times 3 \times 3$ . . . . .                                                        | 34 |
| Figura 10 – Estrutura de um tensor: (i) colunas; (ii) linhas e (iii) tubos . . . . .                                                                  | 35 |
| Figura 11 – Ilustração do produto modo- $n$ utilizando em duas versões. . . . .                                                                       | 37 |
| Figura 12 – Acoplador triplo na configuração planar . . . . .                                                                                         | 38 |
| Figura 13 – Acoplador triplo na configuração triangular . . . . .                                                                                     | 40 |
| Figura 14 – Efeitos Não Lineares em Acopladores Triplos: Método Tensorial . . . . .                                                                   | 42 |
| Figura 15 – Transmissão de potência para o acoplador triplo planar: (a) com ativação no núcleo 1 (extremidade); (b) com ativação do núcleo 2. . . . . | 45 |
| Figura 16 – Transmissão de potência para o acoplador triplo triangular . . . . .                                                                      | 46 |
| Figura 17 – Transmissão de potência do acoplador triplo na configuração planar através dos métodos (a) tensorial, (b) RK4 e (c) matricial. . . . .    | 48 |
| Figura 18 – Transmissão de potência do acoplador triplo na configuração triangular através dos métodos (a) tensorial e (b) RK4. . . . .               | 49 |
| Figura 19 – Comparação entre os tempos de execução para os acopladores triplos (a) planar e (b) triangular. . . . .                                   | 50 |
| Figura 20 – Comparação entre os erros de conservação de energia para os acopladores triplos (a) planar e (b) triangular. . . . .                      | 50 |
| Figura 21 – Análise do Tempo de Execução Acoplador Triplo Planar sob efeito lineares e não lineares. . . . .                                          | 52 |
| Figura 22 – Análise NMSE do Acoplador Triplo Planar sob efeito lineares e não lineares . . . . .                                                      | 52 |
| Figura 23 – Análise do Tempo de Execução Acoplador Triplo Triangular sob efeito lineares e não lineares. . . . .                                      | 53 |
| Figura 24 – Análise NMSE do Acoplador Triplo Triangular sob efeito lineares e não lineares . . . . .                                                  | 53 |
| Figura 25 – Acoplador Triplo Triangular sob efeito não linear SPM . . . . .                                                                           | 54 |
| Figura 26 – Acoplador Triplo Triangular sob efeito não linear SPM e XPM . . . . .                                                                     | 55 |
| Figura 27 – Acoplador Triplo Triangular sob efeito não linear SPM . . . . .                                                                           | 55 |
| Figura 28 – Acoplador Triplo Triangular sob efeito não linear SPM e XPM . . . . .                                                                     | 56 |

## LISTA DE TABELAS

|                                                                                                             |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 1 – Resumo dos efeitos lineares e não lineares na propagação de sinais em fibras<br>ópticas. . . . . | 20 |
| Tabela 2 – Parâmetros Físicos dos Acopladores . . . . .                                                     | 44 |

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

|                |                                                                |
|----------------|----------------------------------------------------------------|
| <b>CW</b>      | Onda continua                                                  |
| <b>EDO</b>     | Equações diferenciais ordinárias                               |
| <b>EDP</b>     | Equações diferenciais parciais                                 |
| <b>ENLS</b>    | Equação não linear de Schrodinger                              |
| <b>FDTD</b>    | Método das diferenças finitas no domínio do tempo              |
| <b>FEM</b>     | Método dos Elementos Finitos                                   |
| <b>GA</b>      | Algoritmo Genético                                             |
| <b>GPON</b>    | <i>Gigabit-capable Passive Optical Network</i>                 |
| <b>GVD</b>     | Dispersão de velocidade de grupo                               |
| <b>IFCE</b>    | Instituto Federal de Ciência, Tecnologia e Educação do Ceará   |
| <b>MATLAB</b>  | <i>Matrix Laboratory</i> , linguagem e ambiente de programação |
| <b>NMSE</b>    | Média normalizada dos erros quadráticos                        |
| <b>NLDC</b>    | Acoplador Direcional Não-Linear Duplo Simétrico                |
| <b>NRZ</b>     | Não retorno a zero                                             |
| <b>OCDMA</b>   | Acesso Múltiplo por Divisão de Código Óptico                   |
| <b>OOK</b>     | <i>on-off keying</i>                                           |
| <b>OSNR</b>    | Relação Sinal Ruido Óptico                                     |
| <b>PAM</b>     | Modulação por amplitude de pulso                               |
| <b>PFC</b>     | Fibra de cristal fotônico                                      |
| <b>RK4</b>     | Runge Kutta de 4 <sup>a</sup> ordem                            |
| <b>SPM</b>     | Auto modulação de fase                                         |
| <b>SSFM</b>    | Método split-step Fourier                                      |
| <b>SSF</b>     | Do inglês <i>split-step Fourier</i>                            |
| <b>XGS-PON</b> | <i>Passive Optical Network 10 Gigabit-capable Synchronous</i>  |

|            |                                                  |
|------------|--------------------------------------------------|
| <b>XPM</b> | Modulação de fase cruzada                        |
| <b>WDM</b> | Multiplexação por divisão de comprimento de onda |
| <b>MZI</b> | Interferômetro Mach Zehnder                      |

## LISTA DE SÍMBOLOS

|               |                                          |
|---------------|------------------------------------------|
| $\alpha$      | Letra grega minúscula Alfa               |
| $\beta$       | Letra grega minúscula Beta               |
| $\gamma$      | Letra grega minúscula Gama               |
| $\kappa$      | Letra grega minúscula kappa              |
| $\lambda$     | Letra grega minúscula lambda             |
| $\omega$      | Letra grega minúscula ômega              |
| $\hat{L}$     | Operador de efeitos lineares             |
| $\hat{N}$     | Operador de efeitos não lineares         |
| $F$           | Denota a transformada de Fourier         |
| $F^{-1}$      | Denota a transformada inversa de Fourier |
| $i$           | Unidade imaginária de um número complexo |
| $e$           | Número de Euler                          |
| $\mathcal{X}$ | Tensor ou arranjo multi-dimensional      |
| $\mathbf{x}$  | Vetor                                    |
| $\mathbf{X}$  | Matriz                                   |
| $\in$         | Símbolo de pertence                      |

## SUMÁRIO

|                |                                                                                 |           |
|----------------|---------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b>       | <b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>                                                     | <b>16</b> |
| <b>1.1</b>     | <b>Objetivos Gerais . . . . .</b>                                               | <b>17</b> |
| <b>1.2</b>     | <b>Objetivos Específicos . . . . .</b>                                          | <b>18</b> |
| <b>1.3</b>     | <b>Estrutura da Dissertação . . . . .</b>                                       | <b>18</b> |
| <b>2</b>       | <b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA . . . . .</b>                                          | <b>19</b> |
| <b>2.1</b>     | <b>Fibras ópticas . . . . .</b>                                                 | <b>19</b> |
| <b>2.2</b>     | <b>Acopladores ópticos . . . . .</b>                                            | <b>21</b> |
| <b>2.2.1</b>   | <b>Acoplador óptico direcional de dois núcleos . . . . .</b>                    | <b>21</b> |
| <b>2.2.2</b>   | <b>Acopladores ópticos de três núcleos . . . . .</b>                            | <b>23</b> |
| <b>2.2.2.1</b> | <b>Acoplador óptico triplo planar . . . . .</b>                                 | <b>23</b> |
| <b>2.2.2.2</b> | <b>Acoplador óptico triplo triangular . . . . .</b>                             | <b>25</b> |
| <b>2.2.3</b>   | <b>Acopladores ópticos com <math>N</math> núcleos . . . . .</b>                 | <b>26</b> |
| <b>2.3</b>     | <b>Efeitos de propagação . . . . .</b>                                          | <b>26</b> |
| <b>2.3.1</b>   | <b>Automodulação de fase . . . . .</b>                                          | <b>27</b> |
| <b>2.3.2</b>   | <b>Modulação de fase cruzada . . . . .</b>                                      | <b>27</b> |
| <b>2.4</b>     | <b>Revisão sobre métodos numéricos . . . . .</b>                                | <b>27</b> |
| <b>2.4.1</b>   | <b>Runge-Kutta de 4ª ordem . . . . .</b>                                        | <b>28</b> |
| <b>2.4.2</b>   | <b>Split-step Fourier . . . . .</b>                                             | <b>29</b> |
| <b>2.4.3</b>   | <b>Split-step Fourier Simetrizado . . . . .</b>                                 | <b>31</b> |
| <b>3</b>       | <b>ESTADO DA ARTE . . . . .</b>                                                 | <b>32</b> |
| <b>3.1</b>     | <b>Estruturação da Pesquisa . . . . .</b>                                       | <b>32</b> |
| <b>3.2</b>     | <b>Estudos relevantes para a pesquisa . . . . .</b>                             | <b>32</b> |
| <b>4</b>       | <b>MÉTODO TENSORIAL PROPOSTO . . . . .</b>                                      | <b>34</b> |
| <b>4.1</b>     | <b>Introdução aos tensores: definições e notações . . . . .</b>                 | <b>34</b> |
| <b>4.2</b>     | <b>Principais Operações . . . . .</b>                                           | <b>35</b> |
| <b>4.2.1</b>   | <b>Produto modo-<math>n</math> . . . . .</b>                                    | <b>35</b> |
| <b>4.2.2</b>   | <b>Desdobramento (<i>Unfolding</i>) . . . . .</b>                               | <b>36</b> |
| <b>4.3</b>     | <b>Método tensorial para acopladores ópticos multinúcleos . . . . .</b>         | <b>37</b> |
| <b>4.3.1</b>   | <b>Método tensorial aplicado no acoplador triplo planar - regime linear . .</b> | <b>37</b> |
| <b>4.3.2</b>   | <b>Método tensorial aplicado no acoplador triplo triangular - regime linear</b> | <b>39</b> |
| <b>4.3.3</b>   | <b>Método tensorial aplicado em acopladores triplos em regime não linear</b>    | <b>41</b> |
| <b>5</b>       | <b>RESULTADOS E DISCUSSÕES . . . . .</b>                                        | <b>44</b> |
| <b>5.1</b>     | <b>Transmissão de potência para acopladores triplos - método tensorial . .</b>  | <b>45</b> |

|              |                                                                                                                                                                                |           |
|--------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>5.2</b>   | <b>Comparativo Computacional entre Diferentes Métodos - Acopladores triplos em Regime Linear . . . . .</b>                                                                     | <b>46</b> |
| <b>5.3</b>   | <b>Desempenho do Método Tensorial na Simulação de Efeitos Não-Lineares em Acopladores Triplos . . . . .</b>                                                                    | <b>51</b> |
| <b>5.3.1</b> | <b>Efeitos Não-Lineares no Acoplador Triplo Planar . . . . .</b>                                                                                                               | <b>51</b> |
| <b>5.3.2</b> | <b>Efeitos Não-Lineares no Acoplador Triplo Triangular . . . . .</b>                                                                                                           | <b>52</b> |
| <b>5.3.3</b> | <b>Análise da potência crítica . . . . .</b>                                                                                                                                   | <b>54</b> |
| <b>6</b>     | <b>CONCLUSÃO . . . . .</b>                                                                                                                                                     | <b>57</b> |
| <b>6.1</b>   | <b>Perspectivas futuras . . . . .</b>                                                                                                                                          | <b>57</b> |
|              | <b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>                                                                                                                                                   | <b>58</b> |
| <b>7</b>     | <b>APÊNDICES . . . . .</b>                                                                                                                                                     | <b>61</b> |
| <b>A</b>     | <b>EXEMPLO DE CÓDIGO EM MATLAB - SIMULAÇÃO USANDO O MÉTODO TENSORIAL DE UM ACOPLADOR TRIPLO NAS CONFIGURAÇÕES PLANAR E TRIANGULAR EM REGIMES LINEAR E NÃO-LINEAR . . . . .</b> | <b>62</b> |
| <b>B</b>     | <b>EXEMPLO DE CÓDIGO EM MATLAB - MÉTODO RK4 - ACOPLADOR TRIPLO PLANAR LINEAR . . . . .</b>                                                                                     | <b>65</b> |
| <b>C</b>     | <b>EXEMPLO DE CÓDIGO EM MATLAB - RK4 - ACOPLADOR TRIPLO TRIANGULAR LINEAR . . . . .</b>                                                                                        | <b>67</b> |

## 1 INTRODUÇÃO

A comunicação é uma necessidade intrínseca da sociedade moderna. Nas últimas décadas, temos testemunhado um crescimento exponencial na demanda por transmissão de informações e dados, impulsionado pelo avanço tecnológico e pela necessidade de conectividade global. Nesse contexto, os sistemas de comunicação desempenham um papel crucial, permitindo o fluxo eficiente e confiável de informações entre diferentes partes do mundo.

Dentre os sistemas de comunicação, destaca-se o recente crescimento na utilização de sistemas e dispositivos baseados em comunicação óptica/fotônica. A fotônica é uma área da ciência e tecnologia que envolve a manipulação e controle da luz (fótons) para transmitir e processar informações. Seu avanço tem sido fundamental para as últimas gerações dos sistemas de comunicação, como o 5G (CARVALHO; ABBADE, 2020), 6G, comunicações THz, sensoriamento e supercomputadores (AJIMA, 2022). A importância do avanço da fotônica e das comunicações ópticas é amplamente reconhecida. Na publicação de (FRAGA; JUNIOR, 2018), os autores conjecturam sobre uma perspectiva futura em que os computadores operarão utilizando luz como base. Segundo eles, as portas lógicas, construídas a partir de fibras de cristais fotônicos, desempenharão um papel fundamental nesse cenário. Essas tecnologias oferecem vantagens significativas em termos de capacidade de transmissão, velocidade e eficiência energética, atendendo às demandas crescentes por largura de banda e comunicação de alta velocidade. Dentro dos sistemas ópticos, diversos componentes e dispositivos desempenham papéis fundamentais. Entre eles, destacam-se os circuladores ópticos, responsáveis por direcionar a luz com base na sua direção de propagação. Os transceptores ópticos (*transceivers*), por sua vez, são dispositivos essenciais para a conversão de sinais eletro-ópticos. Já os *splitters* ópticos têm a função de realizar divisões de potência de sinais, e interferômetros desempenham papéis relevantes em sensores ópticos e funções lógicas. Muitos dos dispositivos mencionados fazem uso de acopladores ópticos como componentes básicos para seu funcionamento. Exemplos notáveis incluem os interferômetros de Mach-Zehnder e de Sagnac (SALES, 2017b).

Neste trabalho, iremos direcionar nossa atenção aos acopladores ópticos, reconhecendo sua importância e funcionalidades essenciais para o avanço dos sistemas de comunicação óptica. Acopladores ópticos ou *fiber couplers* são dispositivos ópticos formados pela fusão de núcleos de fibra óptica que permitem a transferência de sinal entre eles. Tais dispositivos, de acordo com (AGRAWAL, 2001), possuem aplicações importantes para comutação totalmente óptica.

Novos estudos apontam avanços na modelagem de acopladores compostos por múltiplos núcleos, a fim de se permitir a comutação ou combinação de diversos sinais simultaneamente. Trabalhos recentes apresentam perspectivas de utilização desses acopladores para desempenhar, por exemplo, funções lógicas (LI et al., 2015). Comercialmente, estes dispositivos estão disponíveis em diversas configurações, como por exemplo as de 1x2, 2x2, 1x4, 1x8, 1x16 etc, podendo ser otimizado para diversos comprimentos de ondas no intervalo do infravermelho (THORLABS, 2023). Além de poderem ser aplicados em experimentos científicos, os acopladores ópticos possuem aplicações em redes de telecomunicações como por exemplo na distribuição de potência de sinal em redes ópticas passivas como a GPON e XGS-PON (SHARIF et al., 2018).

Antes de serem prototipados e comercializados, um estudo sobre o comportamento da luz dentro do acoplador se faz extremamente necessário, bem como o entendimento de suas possíveis funcionalidades. Tais estudos consistem em modelar matematicamente a propagação da luz no interior do núcleo da fibra, considerando todos os efeitos relevantes sofridos por ela. A

propagação dos pulsos de luz no interior de uma fibra é modelado pela equação não-linear de Schrödinger (ENLS), uma equação diferencial parcial que, em geral, não possui solução analítica ou a possui somente em condições muito específicas (AGRAWAL, 2001). Por este motivo, estudar o comportamento da luz em acopladores significa simular tais dispositivos através de métodos que permitam solucionar numericamente a ENLS, calculando a propagação de um feixe luminoso ao longo da fibra óptica. Tradicionalmente, é comum utilizar métodos numéricos como por exemplo o *split-step* Fourier e o de Runge-Kutta de 4ª ordem, sendo que este último apresenta uma alta utilização na modelagem de acopladores e guias ópticos, de acordo com nossa pesquisa do estado da arte. Segundo (FRAGA; JUNIOR, 2018), é possível também utilizar os dois métodos simultaneamente para obter uma resposta computacional mais rápida. Contudo, tais métodos muitas vezes apresentam consideráveis erros de conservação de energia (KOMNINOS et al., 2011), além de notáveis tempos de execução para passos relativamente pequenos. Nesse contexto, uma nova abordagem baseada na álgebra tensorial tem se mostrado interessante para o estudo de dispositivos ópticos, incluindo os acopladores, como pode ser visto nos trabalhos desenvolvidos por (ROCHA et al., 2022) e (FERREIRA et al., 2021).

Tensores são objetos matemáticos descritos pela álgebra multilinear que permitem representar parâmetros, organizar dados ou descrever propriedades físicas em múltiplas dimensões. Eles podem ser vistos como uma generalização de vetores e matrizes para arranjos com dimensões maiores do que dois. A modelagem de sistemas baseada na álgebra tensorial tem se mostrado uma ferramenta bastante valiosa para representar e analisar o comportamento complexo de diferentes sistemas multivariados (que sofrem influência de múltiplos parâmetros), possibilitando a compreensão detalhada dos fenômenos envolvidos de forma global e compacta, sem perder as características multidimensionais das informações. Outros benefícios da utilização de métodos numéricos baseados em tensores reside na sua capacidade de realizar cálculos de efeitos não lineares de maneira simultânea, tal qual acontece na realidade física. Isso permite uma análise mais fiel e realista dos fenômenos não lineares em acopladores ópticos.

Neste trabalho, realizaremos simulações numéricas usando o método tensorial proposto em acopladores ópticos de três núcleos nas configurações planar e triangular. Vamos comparar sua performance computacional em termos de tempo de execução e conservação de energia com métodos numéricos convencionais, como o Runge-Kutta de 4ª ordem evidenciando os resultados satisfatórios do método tensorial. Além disso, aplicaremos efeitos não lineares, como SPM e XPM, usando o método tensorial nos acopladores para analisar mudanças em aspectos físicos, como a potência crítica.

Por fim, ao final desse estudo, destacaremos o potencial promissor do método tensorial evidenciando que ele pode servir como uma alternativa eficaz aos métodos convencionais, um método complementar ou até mesmo uma abordagem compacta e didática para simular, analisar e interpretar o comportamento e a funcionalidade de acopladores ópticos multinúcleos.

## 1.1 Objetivos Gerais

A proposta deste trabalho é desenvolver e apresentar um método numérico alternativo, fundamentado em tensores, para a resolução de acopladores ópticos com múltiplos núcleos. O intuito é facilitar a implementação do modelo matemático, a análise do desempenho e o estudo da funcionalidade desses acopladores, de maneira eficiente e compacta.

## 1.2 Objetivos Específicos

- Realizar um estudo sobre o funcionamento e as funcionalidades de dispositivos ópticos em sistemas de comunicação/sensoriamento óptico, em particular, os acopladores ópticos.
- Fazer um levantamento dos principais métodos numéricos encontrados na literatura que são utilizados para a solução/estudo de acopladores ópticos.
- Propor, como método alternativo, um modelo numérico baseado em álgebra tensorial para solucionar acopladores multinúcleos.
- Simular e analisar a propagação da luz em acopladores triplos nas configurações planar e triangular, sujeitos aos regimes linear e não linear.
- Comparar a eficácia e a performance computacional do método tensorial com outros métodos numéricos convencionais.

## 1.3 Estrutura da Dissertação

A estrutura dessa dissertação é organizada da seguinte forma: no Capítulo 2, introduziremos aspectos relacionados à fundamentação teórica da área de fotônica e das comunicações ópticas, destacando a importância dos acopladores, assim como as configurações que ele possa assumir e efeitos ópticos que influenciam a propagação da luz no interior das fibras. Além disso apresentaremos uma revisão sobre principais métodos numéricos utilizados no contexto da fotônica e que serão de interesse para este trabalho. No Capítulo 3, apresentaremos uma pesquisa estruturada nos principais bancos de dados da área de fotônica, abrangendo os últimos 20 anos de trabalhos relacionados a métodos numéricos aplicados na solução de acopladores ópticos. Destacaremos também as contribuições significativas que serviram como base teórica para esta dissertação. No Capítulo 4, apresentaremos aspectos gerais e fundamentais sobre tensores e algumas operações, bem como apresentaremos em detalhes o método tensorial proposto para solução de acopladores triplos em regime linear e não-linear. No Capítulo 5, apresentaremos os resultados obtidos através dos experimentos numéricos, assim como as possíveis direções futuras de pesquisa nessa área; no Capítulo 6, serão discutidas as principais conclusões obtidas em nossa pesquisa e perspectivas futuras.

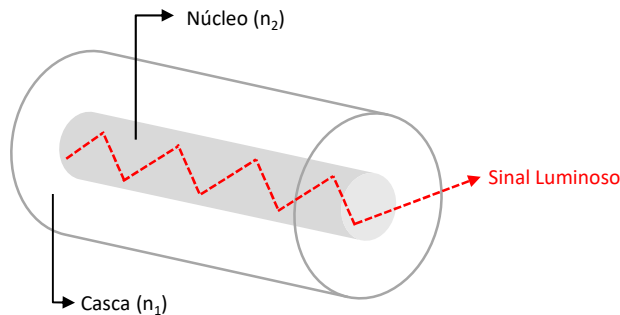
## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo apresentamos uma revisão que aborda conhecimentos básicos sobre sistemas e dispositivos ópticos necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Ao longo do capítulo trataremos sobre as principais características das fibras ópticas, bem como dispositivos em fibra, especialmente focando no funcionamento de acopladores ópticos em diferentes configurações. Detalharemos também alguns aspectos relacionados aos efeitos de propagação sofridos por um pulso luminoso ao se propagar no interior de uma fibra. Por fim, apresentaremos uma breve visão dos principais métodos numéricos utilizados na literatura para o estudo e solução da propagação da luz em dispositivos fotônicos.

### 2.1 Fibras ópticas

As fibras ópticas são um dos principais meios de transmissão em sistemas de comunicação atuais. Embora existam diversos tipos de fibras ópticas, as mais convencionais se baseiam em estruturas compostas por um núcleo revestido por uma casca que possui índice de refração inferior ( $n_2 > n_1$ ), permitindo assim o fenômeno de reflexão total e consequentemente a propagação do sinal luminoso. A Figura 1 ilustra o esquema de propagação da luz no interior de uma fibra.

Figura 1 – Estrutura da Fibra Óptica



Fonte: Autor

O pulso luminoso sofre, ao longo de sua propagação, diversos efeitos que o modulam e modificam de acordo com a natureza e propriedades da fibra. Segundo (AGRAWAL, 2001), é possível modelar matematicamente o comportamento da propagação de um pulso óptico em fibras ópticas através da ENLS, uma vez que seja considerado o caso particular onde a polarização do campo óptico é mantida em uma direção específica ao longo da fibra e se exclui fatores como a influência das vibrações moleculares. A ENLS para um pulso propagante em fibra pode assumir diversas formulações, a depender da quantidade e natureza de fenômenos relevantes durante a propagação, o que pode depender do material da fibra, do seu comprimento, do nível de potência óptica inserida na fibra, dentre outros fatores. Em sua formulação mais completa, um pulso de amplitude  $A$  se propagando ao longo do eixo  $z$  pode ser modelado pela seguinte ENLS:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} + \frac{\alpha}{2} A = i\gamma[|A|^2 A + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t} (|A|^2 A) - T_R A \frac{\partial}{\partial t} |A|^2] \quad (2.1)$$

onde:

- $\beta_1$  Coeficiente de dispersão de primeira ordem;
- $\beta_2$  é o coeficiente de dispersão de velocidade de grupo (GVD);
- $\beta_3$  representa a dispersão de terceira ordem;
- $\alpha$  é o coeficiente de absorção do meio;
- $\gamma$  é o coeficiente de não linearidade;
- $\omega_0$  é a frequência angular óptica;
- $T_R$  é o coeficiente de dispersão Raman.

Cada um dos termos da equação acima representa um efeito de propagação sofrido pelo pulso luminoso. A apresentação destes efeitos, bem como a explicação da equação termo a termo, é feita de maneira resumida na Tabela 1.

A Equação (2.1) não pode ser resolvida analiticamente, exceto em casos específicos, exigindo assim uma abordagem numérica para compreender e modelar os efeitos na fibra. Em abordagens mais simplificadas, onde alguns dos efeitos apresentados podem ser considerados desprezíveis, um ou mais termos da ENLS podem/devem ser negligenciados.

Tabela 1 – Resumo dos efeitos lineares e não lineares na propagação de sinais em fibras ópticas.

| EFEITO                     | TERMO NA EQUAÇÃO                                                 | ORIGEM FÍSICA                                                                                          | IMPLICAÇÕES                                                                                                   |
|----------------------------|------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Velocidade de Grupo        | $\beta_1 \frac{\partial A}{\partial t}$                          | Índice de refração dependente da frequência do campo aplicado.                                         | Deslocamento entre os canais                                                                                  |
| Dispersão de 2º ordem      | $\frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$          | Índice de refração dependente da frequência do campo aplicado.                                         | Alargamento temporal                                                                                          |
| Dispersão de 3º ordem      | $\frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3 A}{\partial t^3}$          | Índice de refração dependente da frequência do campo aplicado.                                         | Alargamento temporal assimétrico                                                                              |
| Atenuação                  | $\frac{\alpha}{2} A$                                             | Espalhamento de Rayleigh e de Mie, absorções, curvaturas, perda de potência, projetos de guia de onda. | Perda de potência                                                                                             |
| Efeito Kerr                | $i\gamma  A ^2 A$                                                | Índice de refração dependente da potência do campo aplicado: movimento anarmônico dos elétrons ligados | -Automodulação de fase<br>-Mistura de quatro ondas<br>-Instabilidade modulacional<br>-Geração de 3º harmônico |
| Auto-achatamento           | $\frac{2\gamma}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t} ( A ^2 A)$ | Velocidade de grupo dependente da intensidade                                                          | -Frente óptica de choque<br>-Decaimento de sólitons                                                           |
| Dispersão Raman intrapulso | $\gamma T_R A \frac{\partial}{\partial t}  A ^2$                 | Tempo de resposta finito à ação do campo aplicado                                                      | Decaimento de Sólitons                                                                                        |

A seguir será apresentado um dos dispositivos ópticos mais versáteis construídos a partir da junção dos núcleos de fibras ópticas: o acoplador óptico. Diferentes propriedades e configurações dos acopladores serão discutidas, além de apresentar possíveis soluções para alguns casos específicos.

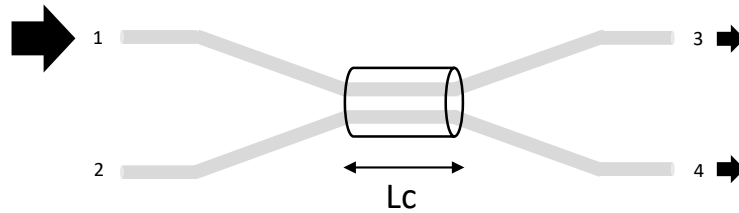
## 2.2 Acopladores ópticos

Os acopladores ópticos (ou acopladores ópticos direcionais) são componentes formados por junções de núcleos de fibras ópticas de modo a permitirem a transferência de luz ou energia entre os núcleos. Segundo (FRAGA; JUNIOR, 2018), tais dispositivos são frequentemente aplicados para atuar como divisores de feixe óptico e, devido ao seu comportamento não linear, podem ser usados como interruptores ou chaves ópticas. Além disso, eles podem ter diferentes classificações dependendo de sua estrutura, funcionalidade ou dependência do comprimento de onda. As seções a seguir trazem detalhes sobre alguns tipos de acopladores.

### 2.2.1 Acoplador óptico direcional de dois núcleos

Na sua configuração mais básica, o acoplador óptico é composto por duas fibras (resultando em duas entradas e duas saídas de sinais) de tal forma que haja a junção dos dois núcleos, permitindo assim a transferência de energia óptica entre eles. A Figura 2 ilustra um acoplador duplo onde os núcleos das fibras estão unidos ao longo de um comprimento  $L_c$  e as portas 1 e 2 são as entradas dos sinais e as 3 e 4 são as saídas.

Figura 2 – Acoplador óptico duplo



Fonte: Autor

Uma das aplicações práticas dos acopladores duplos são em sistemas ópticos onde se desejam distribuir a potência dos sinais de entradas em proporções iguais ou diferentes nas portas de saídas. Alguns fatores como a distância de aproximação dos núcleos  $d$  e o comprimento  $L_c$  no qual esses núcleos são aproximados determinarão a razão da divisão das potências. A dinâmica das potências dos sinais ao longo de um acoplador duplo é descrita a partir das equações de modo acoplado não-linear, obtidas através das combinações das ENLS's das respectivas fibras.

Uma formulação mais simplificada da ENLS será de especial interesse neste trabalho. Assumiremos, para fins de modelagem de um pulso propagante, que apenas os termos da equação relacionados ao efeito Kerr são relevantes. Desta forma, as ENLS's dos modos acoplados em regime não-linear podem ser deduzidas a partir da Equação (2.1) simplificada através da formulação a seguir (GILLES, 2018):

$$i \frac{dA_1}{dz} + \gamma(|A_1|^2 + 2|A_2|^2)A_1 + \kappa(A_2) = 0 \quad (2.2)$$

$$i \frac{dA_2}{dz} + \gamma(|A_2|^2 + 2|A_1|^2)A_2 + \kappa(A_1) = 0 \quad (2.3)$$

onde  $\kappa$  denota o coeficiente de acoplamento e  $A_1$  e  $A_2$  representam as amplitudes dos sinais nos respectivos núcleos. Note que as Equações (2.2) e (2.3) diferenciam da Equação (2.1) pela negligência de alguns efeitos de propagação e pela adição de termos que representam a influência de  $A_2$  em  $A_1$ , e vice-versa, representando o acoplamento e a interdependência entre os pulsos dos dois núcleos. Aqui vale salientar que tais simplificações na ENLS são justificáveis, pois estamos considerando que os acopladores ópticos, além de simétricos, possuem também comprimentos pequenos com baixas atenuações e dispersões quando se aplicam baixos níveis de potência. Entraremos em detalhe sobre os efeitos de propagação considerados nas Equações (2.2) e (2.3) na Seção 2.3.

O fator  $\gamma$  na ENLS representa a intensidade da não linearidade. Quanto maior o  $\gamma$ , mais significativo é o efeito não linear. Em contrapartida, um  $\gamma$  menor faz com que o acoplador óptico se aproxime mais da linearidade. Dessa forma, uma versão ainda mais simplória das equações apresentadas acima podem ser obtidas se considerarmos fibras com baixo coeficiente de não-linearidade. No caso particular de acopladores duplos simétricos (núcleos idênticos sobre todos os parâmetros) de pequenos comprimentos, e assumindo uma não-linearidade bastante pequena ( $\gamma \approx 0$ ), bem como baixos níveis de potência, poderemos simplificar as equações (2.2) e (2.3) em:

$$i \frac{dA_1}{dz} + \kappa(A_2) = 0 \quad (2.4)$$

$$i \frac{dA_2}{dz} + \kappa(A_1) = 0 \quad (2.5)$$

As equações acima representam a propagação de pulsos em um acoplador em regime linear e, diferentemente das equações (2.2) e (2.3), possui uma solução analítica. Resolvendo, portanto, o sistemas de equações diferenciais dado pelas equações (2.4) e (2.5), a solução do sistema pode ser representada na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} A_1(z + dz) \\ A_2(z + dz) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\kappa dz) & i \sin(\kappa dz) \\ i \sin(\kappa dz) & \cos(\kappa dz) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(z) \\ A_2(z) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

onde os termos  $A_1(z)$  e  $A_2(z)$  representam as amplitudes dos sinais de entrada nos núcleos 1 e 2 do acoplador óptico, respectivamente, enquanto  $A_1(z + dz)$  e  $A_2(z + dz)$  representam as amplitudes de saída desses sinais, a cada passo infinitesimal  $dz$ .

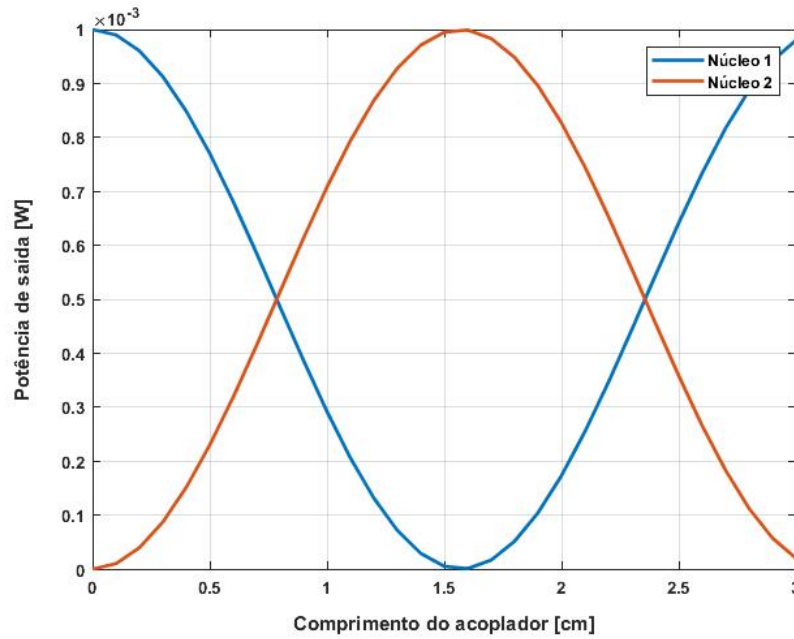
A matriz  $2 \times 2$  na equação (2.6) é conhecida como matriz de transferência e, através dela, é possível calcular de forma simplificada o comportamento dos sinais ópticos ao longo de um acoplador duplo direcional em regime linear.

A Figura 3 ilustra o comportamento do sinal óptico ao longo de um acoplador duplo simétrico. Inicialmente, uma potência de 1 mW foi inserida na porta 1 do acoplador, conforme representado na Figura 2. Ao longo do acoplador, o sinal é transferido de um núcleo para outro, resultando em um chaveamento do sinal. Isso indica que, dependendo do comprimento do acoplador óptico, a potência de saída nos núcleos 1 e 2 pode ter proporções diferentes ou iguais.

No exemplo apresentado, a uma distância de aproximadamente 0,78 cm, os sinais de saída nos núcleos 1 e 2 possuem proporções iguais, assemelhando-se a um *splitter* balanceado ou *splitter* 3 dB. Em contrapartida, a um comprimento de aproximadamente 1,57 cm, há um chaveamento total de energia do núcleo 1 para o núcleo 2.

Em regimes não-lineares, a solução das equações do acoplador se torna mais complexa e é frequentemente obtida através de métodos numéricos já mencionados anteriormente. Mais adiante, alguns desses principais métodos serão lembrados e discutidos.

Figura 3 – Comportamento do Sinal ao longo do acoplador duplo ( $P_{ot} = 1 \text{ mW}$ ,  $\kappa = 1 \text{ cm}^{-1}$ )



Fonte: Autor

### 2.2.2 Acopladores ópticos de três núcleos

Outras estruturas de acopladores ópticos direcionais que podem ser úteis no avanço dos sistemas de comunicação óptica podem ser obtidas através da fusão de mais duas fibras ao longo de um certo comprimento, isto é, através da junção de mais de 2 núcleos de fibra de tal forma a permitir a comutação do sinal óptico entre eles.

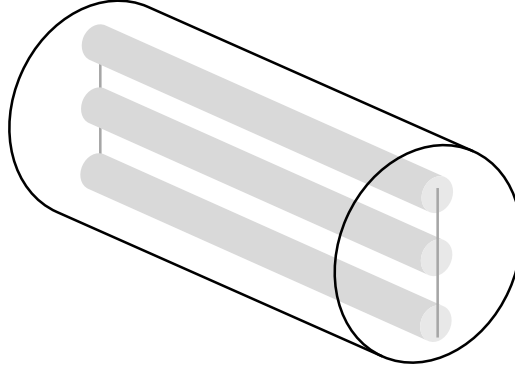
Neste sentido, segundo (FRAGA; JUNIOR, 2018), os acopladores de três núcleos, ou simplesmente acopladores triplos, possuem benefícios como: mais canais de entrada e saída, chaveamento mais ágeis, sensibilidade aos diferentes estados de entrada, maior flexibilidade que se adapta à geometria e disposição das fibras. A depender da disposição dos núcleos na região de acoplamento, diferentes configurações e funcionalidades são obtidas para esses acopladores. A seguir, apresentamos duas possíveis configurações para acopladores ópticos triplos, as quais assumem duas diferentes geometrias: planar e triangular.

#### 2.2.2.1 Acoplador óptico triplo planar

Os acopladores triplos de configuração planar são dispositivos compostos por três núcleos de fibra óptica posicionados lado a lado, isto é, dispostos em um mesmo plano geométrico. Uma das características principais desses acopladores é que os núcleos das fibras localizadas nas extremidades usam a fibra central como intermediário para a transferência de potência óptica. Desta forma, enquanto as fibras das extremidades interagem apenas com a fibra central, a fibra central interage simultaneamente com as fibras das extremidades. Essa interação mútua cria um ambiente único de transmissão óptica, com amplas possibilidades de aplicação e exploração em comunicações e tecnologias ópticas avançadas. A Figura 4 ilustra a disposição dos núcleos das fibras em um acoplador triplo planar.

A considerar as interações entre os núcleos vizinhos, é possível modelar dinâmica dos sinais ópticos neste tipo de acoplador através das ENLS dos modos acoplados, levando em consideração a propagação dos sinais nos três núcleos. Assim, tomando como referência as

Figura 4 – Acoplador triplo planar



Fonte: Autor

Equações (2.2) e (2.3), o sistema de equações para o acoplador triplo planar em regime não-linear poderá ser descrito da seguinte forma:

$$i \frac{dA_1}{dz} + \gamma(|A_1|^2 + 2|A_2|^2)A_1 + \kappa(A_2) = 0 \quad (2.7)$$

$$i \frac{dA_2}{dz} + \gamma(|A_2|^2 + 2|A_1|^2 + 2|A_3|^2)A_2 + \kappa(A_1 + A_3) = 0 \quad (2.8)$$

$$i \frac{dA_3}{dz} + \gamma(|A_3|^2 + 2|A_2|^2)A_3 + \kappa(A_2) = 0 \quad (2.9)$$

Segundo(MARTINS, 2018b), considerando o caso particular de acopladores de pequenas dimensões, simétricos (de núcleos iguais), onde a potência do sinal seja relativamente baixa e fases iniciais idênticas, as Equações (2.7), (2.8) e (2.9) se resumem a:

$$i \frac{dA_1}{dz} + \kappa(A_2) = 0 \quad (2.10)$$

$$i \frac{dA_2}{dz} + \kappa(A_1 + A_3) = 0 \quad (2.11)$$

$$i \frac{dA_3}{dz} + \kappa(A_2) = 0 \quad (2.12)$$

Resolvendo analiticamente o sistema de equações diferenciais acima, obteremos a seguinte matriz de transferência do acoplador triplo planar (MARTINS, 2018b):

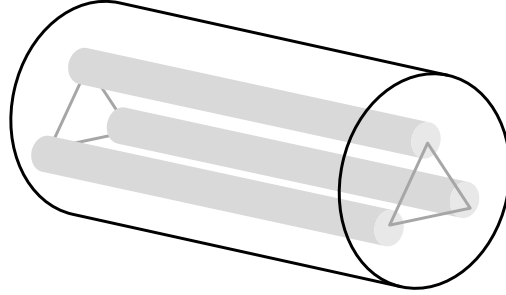
$$\begin{bmatrix} A_1(z + dz) \\ A_2(z + dz) \\ A_3(z + dz) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\cos(\sqrt{2} \kappa dz) + 1}{2} & \frac{i\sqrt{2} \sin(\sqrt{2} \kappa dz)}{2} & \frac{\cos(\sqrt{2} \kappa dz) - 1}{2} \\ \frac{i\sqrt{2} \sin(\sqrt{2} \kappa dz)}{2} & \cos(\sqrt{2} \kappa dz) & \frac{i\sqrt{2} \sin(\sqrt{2} \kappa dz)}{2} \\ \frac{\cos(\sqrt{2} \kappa dz) - 1}{2} & \frac{i\sqrt{2} \sin(\sqrt{2} \kappa dz)}{2} & \frac{\cos(\sqrt{2} \kappa dz) + 1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(z) \\ A_2(z) \\ A_3(z) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

onde os termos  $A_1(z)$ ,  $A_2(z)$  e  $A_3(z)$  representam as amplitudes dos sinais de entrada nos núcleos 1, 2 e 3 do acoplador óptico, respectivamente, enquanto  $A_1(z + dz)$ ,  $A_2(z + dz)$  e  $A_3(z + dz)$  representam as amplitudes de saída desses sinais.

### 2.2.2.2 Acoplador óptico triplo triangular

O acoplador triplo na configuração triangular é um dispositivo formado por três núcleos, permitindo a interação simultânea entre eles, em uma geometria simétrica aos três núcleos. Tais acopladores possuem vantagens como baixas perdas de inserção, alta uniformidade de divisão de potência, baixa dependência de polarização, tamanho compacto e design robusto, além de sua ampla aplicabilidade em diferentes áreas da óptica e telecomunicações. A Figura 5 ilustra a disposição dos núcleos em um acoplador triplo triangular.

Figura 5 – Acoplador triplo triangular



Fonte: Autor

Em contraponto ao acoplador triplo na configuração planar, a geometria apresentada na Figura 5 permite a interação mútua entre os três núcleos acoplador, ou seja, cada um dos núcleos interagem simultaneamente com os dois núcleos vizinhos. A dinâmica dos sinais ópticos neste tipo de acoplador também pode ser modelada através do caso particular das ENLS's de modos acoplados, com uma adaptação para representar a interação simétrica entre os núcleos. Dessa forma, o dispositivo poderá ser descrito como:

$$i \frac{dA_1}{dz} + \gamma(|A_1|^2 + 2|A_2|^2 + 2|A_3|^2)A_1 + \kappa(A_2 + A_3) = 0 \quad (2.14)$$

$$i \frac{dA_2}{dz} + \gamma(|A_2|^2 + 2|A_1|^2 + 2|A_3|^2)A_2 + \kappa(A_1 + A_3) = 0 \quad (2.15)$$

$$i \frac{dA_3}{dz} + \gamma(|A_3|^2 + 2|A_1|^2 + 2|A_2|^2)A_3 + \kappa(A_1 + A_2) = 0 \quad (2.16)$$

Considerando as mesmas condições das Equações (2.10), (2.11) e (2.12), o acoplador triplo triangular em regime linear pode ser modelado por:

$$i \frac{dA_1}{dz} + \kappa(A_2 + A_3) = 0 \quad (2.17)$$

$$i \frac{dA_2}{dz} + \kappa(A_1 + A_3) = 0 \quad (2.18)$$

$$i \frac{dA_3}{dz} + \kappa(A_1 + A_2) = 0 \quad (2.19)$$

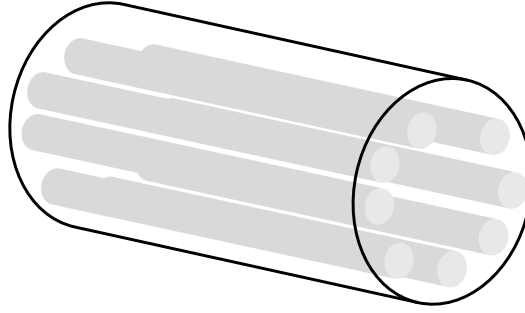
Uma pesquisa em literaturas relacionadas foi realizada em busca de uma solução analítica para este caso. No entanto, devido a complexidade da resolução do sistema de equações diferenciais acima, até o momento não foi possível obter uma solução analítica exata em termos de expressões simples, a exemplo dos casos anteriores. Por outro lado, a maioria dos estudos identificados durante a revisão do estado da arte, como exemplificado por (LOPES, 2012), (SOUSA; SOMBRA, 2013), (MENDES, 2014), (SALES, 2017b), (SANTOS, 2022), (FRAGA;

JUNIOR, 2018), entre outros, utilizam o método de Runge-Kutta de 4ª ordem para solucionar o sistema numericamente.

### 2.2.3 Acopladores ópticos com $N$ núcleos

Os acopladores ópticos multinúcleos, compostos por  $N$  núcleos, com  $N \geq 3$ , possuem vários núcleos de fibra óptica interconectados permitindo assim uma combinação ou distribuição de potências ópticas em distintas entradas e saídas. De maneira geral, podemos estender as equações não-lineares de Schrödinger dos modos acoplados (apresentadas para os casos dos acopladores duplos e triplos) para o caso de  $N$  núcleos. É importante notar que a geometria na qual os núcleos são dispostos irão influenciar diretamente na estrutura dessas equações e, conseqüentemente, na funcionalidade do acoplador. A Figura 6 ilustra um exemplo de acoplador multinúcleo com  $N$  núcleos dispostos em uma geometria cíclica.

Figura 6 – Acoplador óptico com  $N$  núcleos



Fonte: Autor

O processo para se modelar o comportamento das potências ópticas se torna cada vez mais complexo à medida que a quantidade de núcleos cresce e, portanto, soluções analíticas se tornam cada vez mais difíceis de serem obtidas. Em geral, utiliza-se métodos numéricos como Runge-Kutta de 4ª ordem e *split-step* Fourier para calcular uma solução aproximada. Contudo, tais métodos requerem simulações detalhadas e uma grande quantidade de dados para análise, o que pode tornar a interpretação dos resultados uma tarefa desafiadora. A seguir, apresentamos uma formulação genérica que modela acopladores ópticos multinúcleos com geometria semelhantes àquela ilustrada na Figura 6. A equação representa a propagação do pulso no  $n$ -ésimo núcleo, com  $n \in [1, N]$ , o qual interage com dois núcleos vizinhos:

$$i \frac{dA_n}{dz} + \gamma(|A_n|^2 + 2|A_{n+1}|^2 + 2|A_{n-1}|^2)A_n + \kappa(A_{n+1} + A_{n-1}) = 0 \quad (2.20)$$

### 2.3 Efeitos de propagação

Nesta seção apresentaremos em detalhes alguns efeitos de propagação sofridos pela luz transmitida através de fibras ópticas. Em particular, focaremos nos efeitos não-lineares considerados nas ENLS's de modos acoplados apresentadas na Seção 2.2. Iremos fundamentar aqui dois importantes efeitos originados da refração não-linear (efeito Kerr), a saber: a automodulação de fase (em inglês *self-phase modulation* - SPM) e a modulação de fase cruzada (em inglês *cross-phase modulation* - XPM). Apesar de existirem outros efeitos que influenciam na propagação da luz em fibra óptica, focaremos apenas nestes dois por serem de especial interesse deste estudo.

### **2.3.1 Automodulação de fase**

A automodulação de fase, ou simplesmente SPM, é um efeito que ocorre em fibras ópticas quando a potência do sinal óptico é suficientemente alta para gerar uma mudança de fase não-linear no próprio pulso óptico. Segundo (GILLES, 2018), o SPM surge da interação dos fótons entre os elétrons e núcleo do material, levando uma mudança local em suas propriedades, ou seja um mudança no índice de refração. Esse efeito é descrito pelo termo  $\gamma|A_n|^2$  na Equação 2.20. De maneira geral, o efeito SPM causa uma distorção no formato do pulso óptico, que se espalha ao longo da fibra à medida que o sinal é transmitido. Isso ocorre porque a mudança de fase não linear é proporcional à intensidade do sinal, o que significa que a distorção é mais forte em regiões onde o sinal é mais intenso.

O efeito SPM pode ter várias consequências negativas em sistemas de comunicação óptica, como a limitação da taxa de transmissão de dados, a redução da qualidade do sinal, a interferência em outros canais próximos, entre outros. Por outro lado, esse tipo de efeito não linear tem sido explorado pela comunidade científica a fim de se extrair vantagens a partir de sua influência na propagação do pulso, como por exemplo na criação de sensores ópticos e outros dispositivos baseados em funções lógicas.

### **2.3.2 Modulação de fase cruzada**

A modulação de fase cruzada, ou simplesmente XPM, é um fenômeno que, assim como o SPM, ocorre em sistemas de comunicação óptica em fibra quando a potência do sinal é elevada. Ele é causado pela interação entre dois ou mais sinais ópticos que compartilham a mesma fibra óptica. Essa interação resulta em uma mudança de fase no sinal, o que pode levar a uma distorção do sinal original.

O efeito XPM ocorre porque o índice de refração do material da fibra óptica varia com a intensidade do campo elétrico, isto é, ele também se origina do efeito Kerr. Como resultado, um sinal óptico forte pode modificar o índice de refração do material da fibra óptica, o que afeta a fase do sinal óptico transmitido simultaneamente na mesma fibra. Tal efeito pode ser mitigado por meio de técnicas de compensação de dispersão, que minimizam os efeitos da variação da fase induzida pelo efeito XPM. Além disso, também é possível reduzir a intensidade do sinal óptico, o que diminui a interação entre os sinais e, consequentemente, a distorção do sinal original. Segundo (AGRAWAL, 2001), os efeitos XPM são importantes em comunicações ópticas WDM, pois a fase de cada canal óptico é afetado pela potência óptica e padrão de bits dos demais. Bem como o efeito SPM, o XPM também tem sido explorado em aplicações onde a não-linearidade pode ser vista como um aspecto vantajoso a ser explorado em determinadas aplicações.

## **2.4 Revisão sobre métodos numéricos**

Métodos numéricos são técnicas utilizadas nas áreas de engenharia, física e muitas outras para resolver problemas matemáticos complexos, utilizando computadores e algoritmos computacionais para obter soluções exatas ou aproximadas para problemas práticos. De maneira geral, eles são usados quando a solução analítica exata para um problema não é possível ou é muito difícil de ser obtida, haja vista que algumas soluções necessitam de cálculos repetitivos e precisos.

Na área de fotônica, o estudo da propagação da luz em fibras e acopladores consiste em resolver numericamente equações diferenciais tais como as ENLS's apresentadas nas seções anteriores, sob diferentes condições. Neste contexto, como poderá ser percebido no capítulo

3, é bastante frequente a aplicação de métodos numéricos como o Runge-Kutta de 4ª ordem e *split-step* Fourier. A seguir, apresentaremos uma breve revisão sobre estes métodos.

#### 2.4.1 Runge-Kutta de 4ª ordem

O método de Runge-Kutta de 4ª ordem, ou simplesmente RK4, foi desenvolvido por Carl D. T. Runge e Martin W. Kutta por volta de 1895 (RUNGE, 1895). Trata-se de um método bastante apropriado para a resolução de equações diferenciais ordinárias (EDOs), equações diferenciais complexas ou sistemas de EDOs interconectadas devido sua boa precisão e estabilidade quando comparado com métodos de ordens mais baixas como por exemplo o Runge-Kutta de 3ª, 2ª e 1ª ordem (VALLE et al., 2012). Segundo (FRAGA, 2006) "ele conduz as soluções bastante precisas, para um passo de amplitude relativamente grande, apesar de se tratar de um método de passo único". O método RK4 se baseia na resolução de EDOs, porém realizando manipulações algébricas adequadas é possível utilizá-lo para resolver sistemas de equações diferenciais parciais (EDPs) provenientes da equação 2.1. Para uma descrição genérica do método, vamos assumir o seguinte formato para uma EDO:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)) \quad (2.21)$$

onde o valor inicial  $y(x_0)$  é conhecido. O método consiste em estimar o próximo valor de  $y$  ( $y_{n+1}$ ) através do cálculo das inclinações de 1ª, 2ª, 3ª e 4ª ordem ( $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  e  $K_4$ ) da curva associada à função  $f$  em torno do ponto  $(x_n, y_n)$ . As inclinações são calculadas através das expressões a seguir:

$$K_1 = hf(x_n, y_n) \quad (2.22)$$

$$K_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1}{2}\right) \quad (2.23)$$

$$K_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_2}{2}\right) \quad (2.24)$$

$$K_4 = hf(x_n + h, y_n + K_3) \quad (2.25)$$

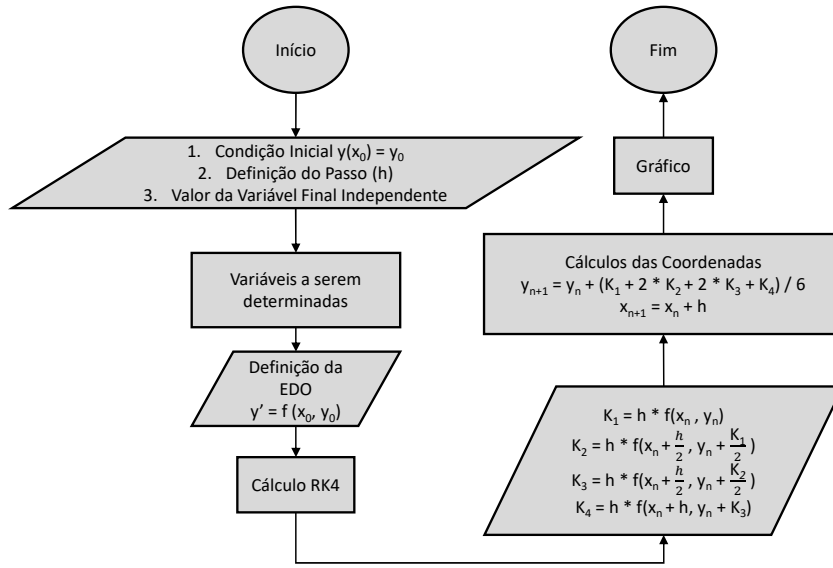
onde  $h$  representa o tamanho do passo e  $n$  o número de termos. Os valores obtidos nas expressões acima são substituídos na Equação 2.26 a fim de se obter uma estimativa do valor  $y_{n+1}$ :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \quad (2.26)$$

O termo  $\frac{1}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$  representa a média ponderada das quatro inclinações  $K$ . Esse processo vai se repetindo ciclicamente até finalizar o intervalo de análise. O fluxograma mostrado na Figura 7 resume, de forma genérica, os passos de implementação do método RK4.

Devido à ampla popularidade do método RK4 nos estudos relacionados ao comportamento da luz em dispositivos e fibras ópticas, exploraremos esse método como base de comparação e validação para o método que será proposto. Em nossa pesquisa de estado da arte, encontramos vários trabalhos que se utilizam desse método para modelagem de sinais ópticos. Contudo, o custo computacional e o erro de conservação de energia desse método costumam ser relativamente altos o que, dependendo do cenário, pode inviabilizar sua aplicação.

Figura 7 – Fluxograma RK4



Fonte: Autor

#### 2.4.2 Split-step Fourier

O método *split-step* Fourier (SSFM), também chamado de método de propagação de feixe, é um dos métodos numéricos de diferenças finitas (KOMNINOS et al., 2011) amplamente empregado para resolver problemas de propagação de pulsos em meios dispersivos não lineares (SALES, 2017a).

De acordo com (KOMNINOS et al., 2011), embora os efeitos dispersivos ou lineares (atenuação, dispersão, ganho etc) e não lineares (SPM, XPM etc) geralmente ocorram simultaneamente, ao considerarmos distâncias de propagação do sinal luminoso suficientemente pequenas, esses efeitos podem ser tratados de forma independente, dessa forma o método SSFM consiste no cálculo da solução em pequenos intervalos ou passos, abordando separadamente os efeitos dispersivos e não lineares. Nesse sentido, os efeitos dispersivos são computados no domínio da frequência, enquanto os efeitos não lineares são calculados no domínio do tempo (SALES, 2017a).

Para exemplificar esse método, iremos utilizar a Equação (2.1) na sua forma reduzida, utilizando apenas a dispersão cromática de segunda ordem:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2}A = i\gamma |A|^2 A \quad (2.27)$$

Com isso ela poderá ser reescrita em termos dos operadores de dispersão ou linearidade ( $\hat{L}$ ) e de não-linearidade ( $\hat{N}$ ), da seguinte forma:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = (\hat{L} + \hat{N})A \quad (2.28)$$

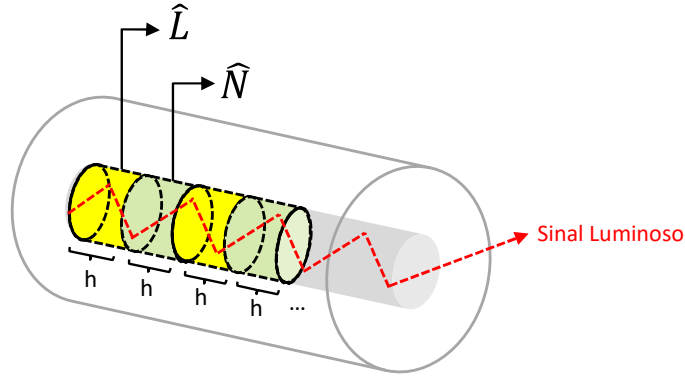
onde:

$$\hat{L} = -\frac{\alpha}{2} - \frac{i}{2}\beta_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (2.29)$$

$$\hat{N} = i\gamma |A|^2 \quad (2.30)$$

O método envolve o cálculo iterativo e alternado dos efeitos lineares ( $\hat{L}$ ) e não lineares ( $\hat{N}$ ) em cada distância ou passo ( $h$ ) suficientemente pequeno durante a propagação do pulso luminoso na fibra óptica, conforme ilustrado na Figura 8.

Figura 8 – Propagação do Pulso com o Método Split-Step Fourier



Fonte: Autor

Como o operador ( $\hat{L}$ ) é calculado no domínio da frequência e o operador ( $\hat{N}$ ) no domínio do tempo, a função da propagação do pulso assume a seguinte forma:

$$A(z + h, T) \approx e^{h\hat{L}} e^{h\hat{N}} A(z, T) = [F^{-1} \exp [h\hat{L}(i\omega)] F] e^{h\hat{N}} A(z, T) \quad (2.31)$$

onde:

- $F$  denota a transformada de Fourier;
- $F^{-1}$  é a transformada inversa de Fourier;
- $T$  é o tempo local, que é medido relativamente a velocidade de grupo;
- $\hat{L}(i\omega)$  é o operador de linearidade;
- $z$  é o eixo de propagação do sinal luminoso.

Segundo (RIEZNİK et al., 2005), o erro do (SSFM) é dado pelo fato dos efeitos de linearidade ( $\hat{L}$ ) e não linearidade ( $\hat{N}$ ) não comutarem, ou seja dependendo da ordem que é aplicado os resultados serão diferentes. Assim assumindo que as variações do operador ( $\hat{N}$ ) são irrelevantes para intervalos  $h$  pequenos, a Equação (2.28) pode ser expressa da seguinte forma:

$$A(z + h, T) \approx e^{h(\hat{L} + \hat{N})} A(z, T) \quad (2.32)$$

onde o  $T$  é obtido pela expressão em função da velocidade de grupo ( $v_g$ ):

$$T = t - \frac{z}{v_g} \quad (2.33)$$

Uma vez definido a Equação (2.32), o fluxo de cálculo para modelagem do sinal luminoso ao longo de uma fibra óptica de comprimento  $L$ , é obtido através das etapas abaixo:

- **Etapa 1:** Inicialmente, analisamos os efeitos não-lineares em conjunto com a função de propagação do pulso, pois ambos estão dentro do domínio temporal.
- **Etapa 2:** Em seguida, realizamos o cálculo da transformada de Fourier do resultado da Etapa 1, convertendo o pulso para o domínio da frequência, facilitando a análise dos efeitos lineares.
- **Etapa 3:** Procedemos à aplicação dos efeitos lineares ao resultado da Etapa 2, ainda no domínio da frequência.
- **Etapa 4:** Posteriormente, calculamos a transformada inversa de Fourier do resultado da Etapa 3, trazendo o pulso de volta para o domínio temporal. Em seguida, retornamos ao Passo 1 para repetir o processo.

Embora esse processo gere uma solução aproximada é particularmente adequado para lidar com a propagação de pulsos, onde a interação entre mecanismos lineares e não lineares dificulta a obtenção de soluções analíticas gerais, por isso ele serviu como inspiração para o método tensorial que iremos apresentar nesse trabalho.

#### 2.4.3 *Split-step Fourier Simetrizado*

Segundo (JÚNIOR et al., 2018), uma maneira de aumentar a precisão do método *Split-Step* Fourier é através de uma variação chamada *Split-Step* Fourier Simetrizado. Esse método é bastante similar ao SSFM, porém difere na aplicação dos operadores ( $\hat{N}$ ) e ( $\hat{L}$ ) ao longo da fibra (KOMNINOS et al., 2011).

Nesse método, o pulso é propagado até a metade do passo ( $h$ ) utilizando o operador ( $\hat{N}$ ). O resultado dessa análise é então utilizado como entrada para a propagação ao longo do passo completo ( $h$ ) com o operador ( $\hat{L}$ ). Por fim, o pulso é propagado pela outra metade do passo ( $h$ ) utilizando novamente o operador ( $\hat{N}$ ). A equação que determina o método *Split-step* Fourier Simetrizado é:

$$A(z + h, T) \approx e^{\frac{h}{2}\hat{N}} e^{h\hat{L}} e^{\frac{h}{2}\hat{N}} A(z, T) \quad (2.34)$$

### 3 ESTADO DA ARTE

#### 3.1 Estruturação da Pesquisa

Para o desenvolvimento dessa pesquisa de estado da arte realizamos uma pesquisa estruturada dos últimos 20 anos nos bancos de dados da Capes, IEEE Xplore e Google Scholar utilizando as seguintes palavras chaves: "Optical coupler", "optical devices", "Método numérico", "acoplador óptico", "Dispositivos ópticos baseados em tensores".

#### 3.2 Estudos relevantes para a pesquisa

Na dissertação de Irawan et al. (IRAWAN et al., 2011), foi conduzida uma análise da propagação de potência em acopladores triplos lineares na configuração planar, empregando o método matricial ou matriz de transferência. Essa investigação proporcionou uma compreensão mais sólida da aplicação do método matricial em acopladores triplos lineares nesse contexto.

Por sua vez, Marcus (LOPES, 2012) realizou simulações numéricas com o método RK4 para explorar a propagação de pulsos ultracurtos em acopladores de cristais fotônicos e sistemas de Acesso Múltiplo por Divisão de Código Óptico (OCDMA) que fazem uso de Fibras de Grade de Bragg (FBG). Essa pesquisa ampliou nossa compreensão da aplicação do método RK4 na modelagem de sinais ópticos.

Carlos (SOUSA; SOMBRA, 2013) apresentou uma análise numérica de portas lógicas ópticas baseadas no Acoplador Direcional Não-Linear Duplo Simétrico (NLDC), utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Isso revelou uma aplicação prática dos acopladores ópticos no contexto de processamento de sinal.

Em estudos conduzidos por Tadeu (MAGALHÃES, 2014), o método das diferenças finitas foi empregado para modelar a propagação de um pulso quasi-soliton em uma fibra padrão monomodo sujeita ao efeito não linear de Dispersão de Velocidade de Grupo (GVD). Essa pesquisa esclareceu como os efeitos não lineares podem ser incorporados em métodos iterativos.

João (CÂMARA, 2014) desenvolveu um acoplador de fibra óptica composto por dois e três núcleos, a partir de uma fibra com índice degrau, utilizando uma formulação vetorial baseada em elementos finitos e o Algoritmo Genético (GA). Esse trabalho forneceu insights valiosos sobre o processo de modelagem de acopladores de três núcleos.

Li (LI; YUAN, 2014) projetou portas lógicas do tipo OR e XOR por meio de acopladores ópticos duplos assimétricos operando com o efeito de Troca de Fase Cruzada (XPM). Isso ampliou nossa compreensão da aplicação do efeito XPM em acopladores ópticos.

Gardennya (MENDES, 2014) utilizou o método numérico de Runge-Kutta para investigar os efeitos da modulação do índice de refração não linear em acopladores de cristais fotônicos. Essa pesquisa contribuiu significativamente para a compreensão e otimização do desempenho de acopladores ópticos.

Na dissertação de Maria (NUNES, 2015), foi conduzido um estudo das propriedades de transmissão de canais acoplados por meio do método de Contorno de Paredes, introduzindo uma abordagem alternativa para a análise de acopladores ópticos.

Clenilson (SILVEIRA, 2015) modelou um sensor de índice de refração baseado em um interferômetro de Mach-Zehnder em fibra monomodo com afunilamento associado à curvatura,

utilizando o método de propagação de feixe com diferenças finitas (FD-BPM), demonstrando outra abordagem prática na modelagem de acopladores ópticos.

Nos estudos conduzidos por Li (LI et al., 2015), foram realizadas análises de portas lógicas totalmente ópticas baseadas na conversão de comprimento de onda em um acoplador direcional não linear, destacando aplicações práticas desses acopladores.

Chaves (SALES, 2017b) investigou o comportamento de propagação e chaveamento de pulsos ultracurtos em um interferômetro de Mach-Zehnder (MZI), empregando o método de Runge-Kutta de quarta ordem, destacando a aplicação prática do método RK4 no contexto de acopladores ópticos.

Na dissertação de Sabino (MARTINS, 2018a), foi conduzida uma análise comparativa entre um acoplador direcional de cristal fotônico dopado com érbio e outro não dopado, utilizando o Método dos Elementos Finitos (FEM), expondo outra abordagem prática na modelagem de acopladores ópticos.

No estudo de Gerônimo (SILVA; SISNANDO, 2019), foram modelados acopladores ópticos direcionais utilizando redes neurais, revelando a possibilidade de combinações entre redes neurais e métodos tensoriais para futuras investigações na modelagem de acopladores multinúcleos.

João (RODRIGUES et al., 2019) investigou a relação entre os parâmetros lógicos e físicos de um acoplador duplo simétrico de Fibra de Cristal Fotônico (PFC), utilizando redes neurais em conjunto com a matriz de transferência de potência, apresentando uma abordagem combinada.

Em estudos de Emily (FERREIRA et al., 2021), uma nova modelagem de sinais ópticos em acopladores ópticos triplos lineares nas configurações planares e triangulares foi proposta por meio do método tensorial. Isso serviu como base para comparações do método tensorial com outras abordagens numéricas nesta área.

No trabalho de Grazielli (SANTOS, 2022), foram descritos os fenômenos não lineares que ocorrem na propagação de um pulso óptico, incluindo o uso do método de Fourier em etapas divididas (SSFM) e Runge-Kutta. Isso proporcionou insights sobre como adaptar o método tensorial para lidar com efeitos não lineares.

No artigo de Bazakutsa (BAZAKUTSA; BOEV; NIKITIN, 2022), além de descrever a transferência de potência óptica entre fibras ópticas fundidas, uma equação para o coeficiente de acoplamento entre elas foi elucidada, auxiliando na compreensão dos coeficientes adequados para simulações.

Em seu estudo, Thangaraj (UTHAYAKUMAR; RAJA, 2022) discutiu configurações de fibras de cristal fotônico com dois núcleos simétricos e assimétricos e suas aplicações em sensores, destacando o potencial dessas fibras para aplicações devido à sua sensibilidade ao índice de refração.

Após essa análise abrangente do cenário atual de pesquisa, tornou-se evidente a notável carência de estudos comparativos abordando o método tensorial em relação a outras abordagens numéricas no contexto de acopladores ópticos multinúcleos. Portanto, esta pesquisa se dedica a preencher essa lacuna, contribuindo para uma compreensão mais aprofundada desse método no campo de acopladores ópticos.

## 4 MÉTODO TENSORIAL PROPOSTO

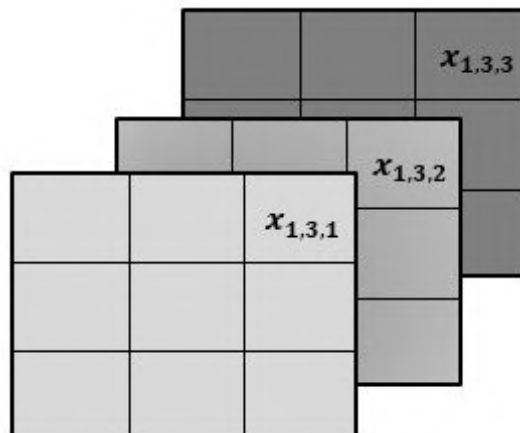
Neste capítulo iremos apresentar uma proposta de método numérico baseado em tensores para modelagem de acopladores ópticos multinúcleos (compostos por 3 ou mais fibras). O método proposto pretende, de maneira compacta e de implementação simples, representar as múltiplas interações entre núcleos vizinhos, se apresentando como uma alternativa aos métodos convencionais para estudo de dispositivos ópticos. Para tal, introduziremos alguns conceitos e notações relacionadas à álgebra tensorial, bem como apresentamos algumas operações básicas envolvendo tensores que serão utilizadas no método proposto. Nas seções finais do Capítulo, apresentamos em detalhe o método tensorial para solução de acopladores de 3 núcleos (nas configurações planar e triangular), bem como apresentamos uma generalização para um caso com  $N > 3$  núcleos.

### 4.1 Introdução aos tensores: definições e notações

Tensores (ou matrizes multidimensionais) são objetos matemáticos utilizados em álgebra linear e em diversas áreas da física e da engenharia, incluindo recentes aplicações pioneiras na área de fotônica. Em essência, um tensor é uma generalização dos vetores e matrizes para arranjos de ordem superior a 2, porém segundo (VASCONCELOS, 2015), devido ao tensor ter seu próprio espaço linear associado, nem sempre operações comuns a matrizes ou vetores podem ser estendidas para estruturas de organização de dados de ordens superiores. Dessa forma, nas seções a seguir, apresentaremos algumas definições e operações principais aplicadas à tensores e que serão importantes em nosso trabalho.

Para uma melhor compreensão, podemos interpretar um tensor como a concatenação de múltiplas matrizes ao longo de uma nova dimensão. Na Figura 9 temos um tensor de terceira ordem, composto por três fatias (camadas), cada uma sendo uma matriz  $3 \times 3$ , concatenadas ao longo do terceiro modo. Existem diversos benefícios em se utilizar tensores, como por exemplo representar de forma compacta sistemas complexos de equações lineares. Além disso, sua flexibilidade em manipular informações em múltiplas dimensões permitem implementações em rotinas computacionais de forma eficiente e facilitada.

Figura 9 – Exemplo de um tensor de terceira ordem com dimensão  $3 \times 3 \times 3$



Fonte: Autor

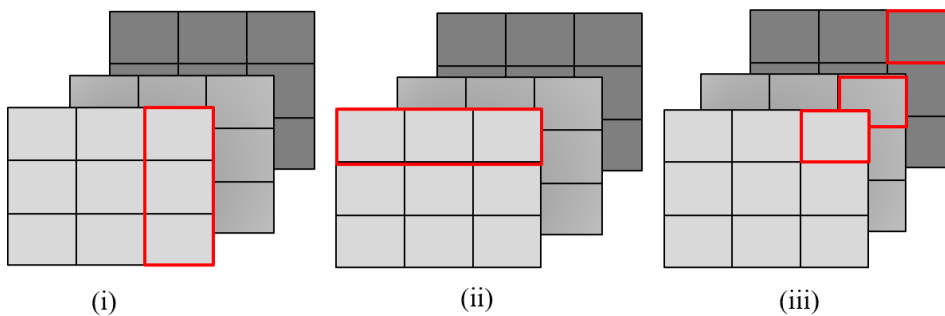
Nesse trabalho, convencionaremos as seguintes notações para representar os seguintes elementos da álgebra tensorial:

- Letras minúsculas ( $a, b, c, \dots$ ) representam escalares;
- Letras minúsculas em negrito ( $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$ ) representam vetores;
- Letras maiúsculas em negrito ( $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$ ) representam matrizes;
- Letras maiúsculas cursivas ( $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$ ) representam tensores (ordem maior que 2).

As entradas dos vetores, matrizes e tensores serão representados pela notação de índices, de acordo com a dimensão do arranjo e a posição do elemento dentro dele. Por exemplo, uma matriz  $\mathbf{A}$  com dimensão  $I \times J$  tem entradas representadas por  $a_{i,j}$ , enquanto um tensor  $\mathcal{A}$  de dimensão  $I \times J \times K$ , tem suas entradas denotadas por  $a_{i,j,k}$ , com  $i = 1, \dots, I$ ,  $j = 1, \dots, J$  e  $k = 1, \dots, K$ .

Em termos de estrutura, um tensor é formado por componentes denominados de "tiras", que basicamente são vetores resultantes da conservação dos índices de todas as dimensões com exceção de um deles. As tiras podem ser classificadas como colunas, linhas e tubos, ilustradas respectivamente da esquerda para a direita na Figura 10. Tomando como exemplo o tensor  $\mathcal{A}$  de terceira ordem mencionado acima, essas tiras serão respectivamente representadas por:  $\mathbf{a}_{:,j,k}$ ,  $\mathbf{a}_{i,:,k}$  e  $\mathbf{a}_{i,j,:}$ . Além disso, suas fatias podem ser subdivididas em qualquer posição espacial como por exemplo frontalmente ( $\mathbf{A}_{:,:,k}$ ), lateralmente ( $\mathbf{A}_{:,j,:}$ ) ou horizontalmente ( $\mathbf{A}_{i,:,:}$ ).

Figura 10 – Estrutura de um tensor: (i) colunas; (ii) linhas e (iii) tubos



Fonte: Autor

## 4.2 Principais Operações

Assim como na álgebra matricial, na álgebra tensorial (multilinear) existem diversas operações envolvendo tensores que podem ser vistas como generalizações das operações convencionais realizadas com vetores e matrizes. Contudo, nesse trabalho, iremos nos delimitar a apresentar apenas as operações principais para implementação do método proposto.

### 4.2.1 Produto modo- $n$

O produto modo- $n$  é uma generalização da multiplicação de matrizes para arranjos multidimensionais de ordem superior. Tal produto permite calcular ou representar transformações lineares que envolvam tensores. O produto modo- $n$  é usado para multiplicar um tensor por um vetor, por uma matriz ou por outro tensor, ao longo de uma determinada dimensão ( $n$ -ésimo modo) do tensor original. Isso resulta em um novo tensor de mesma ordem que o original, porém

com a  $n$ -ésima dimensão alterada. Matematicamente, o exemplo a seguir demonstra o cálculo para o produto modo-2 entre uma matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{J \times P}$  e um tensor  $\mathcal{T} \in \mathbb{C}^{I \times P \times K}$  gerando como resultado um outro tensor  $\mathcal{B} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$  que herdará como novas dimensões do modo-2 o primeiro índice da matriz  $\mathbf{A}$ :

$$b_{i,j,k} = \sum_{p=1}^P t_{i,p,k} a_{j,p} \quad (4.1)$$

Esta operação também pode ser representada na notação matricial/tensorial conforme a seguir:

$$\mathcal{B} = \mathcal{T} \times_2 \mathbf{A} \quad (4.2)$$

Note que esta operação consiste em realizar um produto interno entre as colunas da matriz  $\mathbf{A}$  com as colunas do tensor  $\mathcal{T}$ . perceba que essas colunas em termos de quantidade estão em concordância, ou seja possuem o mesmo valor. Por convenção, para realizarmos um produto modo-2 a quantidade de colunas da matriz  $\mathbf{A}$  precisaria concordar com a quantidade de colunas do tensor  $\mathcal{T}$ .

A partir da definição acima, podemos deduzir também o produto modo- $n$  entre um tensor e um vetor, como uma versão simplificada das Equações (4.1)-(4.2). Assumindo um vetor uma coluna  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{P \times 1}$ , o produto modo-2 entre  $\mathcal{T}$  e  $\mathbf{v}$  resulta em uma matriz  $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{I \times K}$  definida por:

$$c_{i,k} = \sum_{p=1}^P t_{i,p,k} v_p \iff \mathbf{C} = \mathcal{T} \times_2 \mathbf{v}^T \quad (4.3)$$

Note que o fato do número de colunas de um vetor ser igual 1 leva a operação acima a resultar em uma matriz, ao invés de um tensor, conforme obtido na expressão (4.2). A Equação (4.3) tem um interesse especial para este trabalho e será explorada mais adiante na modelagem de acopladores ópticos multinúcleo.

#### 4.2.2 Desdobramento (Unfolding)

Em determinadas situações ou operações, podemos converter tensores em representações matriciais por meio de um processo chamado "desdobramento" ou "*unfolding*". Este procedimento consiste em empilhar as fatias de um tensor (sejam elas frontais, laterais ou horizontais) ao longo das linhas ou colunas, de tal forma a obter uma matricização do tensor. O desdobramento de um tensor pode ocorrer de diferentes formas, a depender dos modos das fatias e do modo de empilhamento. Por exemplo, consideremos um tensor de terceira ordem  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$  onde podemos tomar as  $K$  fatias frontais  $\mathbf{A}_{:, :, k} \in \mathbb{C}^{I \times J}$ , com  $k = 1, \dots, K$ . Dois desdobramentos (alto e plano) podem ser definidos a partir do empilhamento dessas fatias ao longo das linhas (modo 1) ou das colunas (modo 2), respectivamente. Isto é, isso resulta em duas possíveis representações matriciais do tensor  $\mathcal{A}$  dadas por  $\mathbf{A}_{KI \times J} = [\mathbf{A}_{:, :, 1}^T \cdots \mathbf{A}_{:, :, k}^T \cdots \mathbf{A}_{:, :, K}^T]^T$  e  $\mathbf{A}_{I \times KJ} = [\mathbf{A}_{:, :, 1} \cdots \mathbf{A}_{:, :, k} \cdots \mathbf{A}_{:, :, K}]$ .

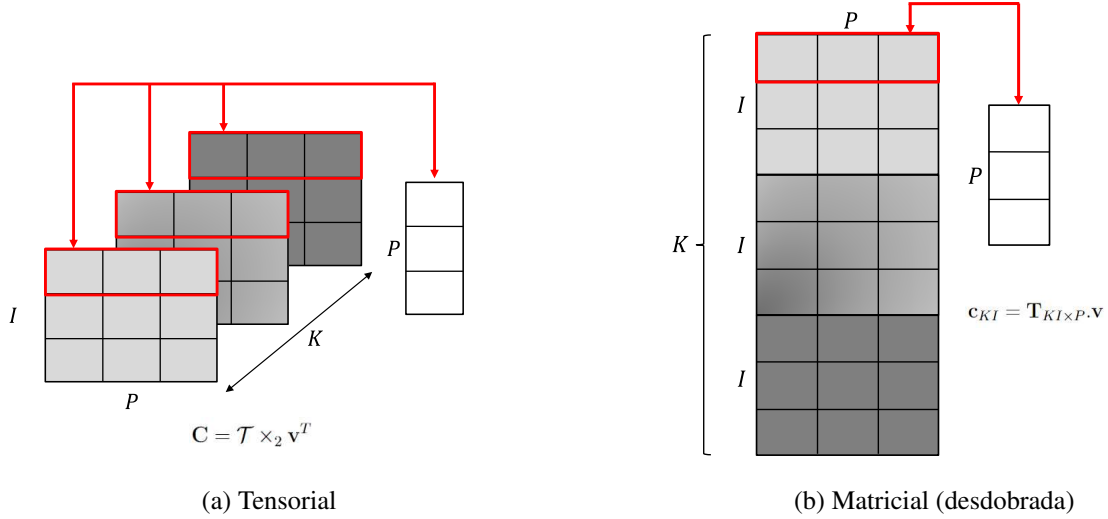
Em geral, aplicamos esse procedimento quando o tensor tem uma ordem alta e desejamos visualizá-lo em um formato mais simplório ou desejamos simplificar e resumir determinados cálculos em operações matriciais. O produto modo- $n$  definido na seção anterior, por exemplo, pode ser reescrito através uma operação matricial considerando o desdobramento do tensor envolvido.

Desta forma, assumindo a versão desdobrada  $\mathbf{T}_{KI \times P}$  do tensor  $\mathcal{T}$  na expressão (4.3), o produto modo-2 entre  $\mathcal{T}$  e  $\mathbf{v}$  pode ser reescrito como:

$$\mathbf{c}_{KI} = \mathbf{T}_{KI \times P} \cdot \mathbf{v} \quad (4.4)$$

onde  $c_{KI}$  é uma versão desdobrada da matriz  $C \in \mathbb{C}^{I \times K}$  resultante do produto modo-2. A Figura 11 ilustra em diagramas de blocos as operações definidas nas Equações (4.3) e (4.4).

Figura 11 – Ilustração do produto modo- $n$  utilizando em duas versões.



Fonte: Autor

### 4.3 Método tensorial para acopladores ópticos multinúcleos

Nesta seção apresentaremos em forma genérica o método tensorial proposto para a solução de acopladores ópticos multinúcleos em diferentes configurações. O método tensorial tem o intuito de modelar o comportamento dos sinais em acopladores com múltiplos núcleos (mais do que 2) tendo como base a matriz de transferência do acoplador duplo. Esse método é inspirado no método *split-step* Fourier (2.4.2), onde diferentes fenômenos de propagação são computados em etapas distintas do algoritmo. Assim, a ideia principal consiste em modelar as múltiplas interações entre os núcleos vizinhos, considerando-os dois a dois, de forma a explorar a solução matricial dada na Equação (2.6) para cada par de núcleos interagindo entre si. Com isso, um tensor de transferência é criado a partir da generalização da matriz de transferência definida anteriormente.

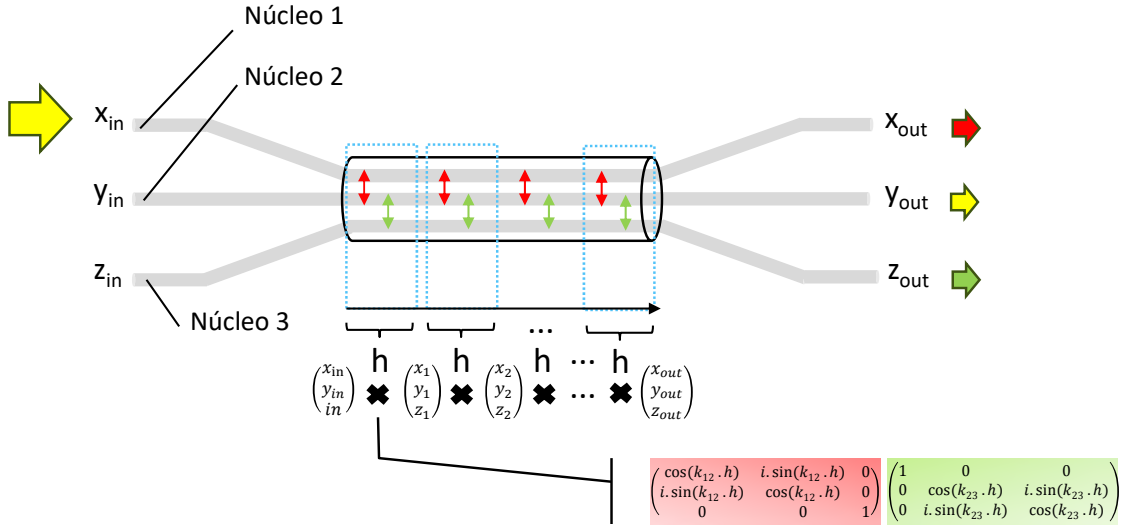
Para cada configuração de acoplador, são necessárias adaptações no tensor de transferência para torná-lo compatível com a dinâmica dos sinais correspondentes e possíveis interações a serem consideradas. Nas seções a seguir, serão apresentadas formulações desses tensores para os casos dos acopladores de três núcleos, nas configurações planar e triangular.

#### 4.3.1 Método tensorial aplicado no acoplador triplo planar - regime linear

Para modelar o tensor de transferência deste acoplador, é necessário analisar a dinâmica dos sinais entre os núcleos. Para isso, iremos dividir o comprimento de junção do núcleo do acoplador (região de acoplamento) em passos discretos ( $h$ ), conforme ilustrado na Figura 12. É importante notar que estamos utilizando o acoplador triplo triangular representados na Seção 2.2.2.1, onde existem as condições de idealidade e os núcleos periféricos interagem diretamente apenas com o núcleo central.

A cada passo, a interação direta entre os núcleos adjacentes pode ser representada em pares, sendo um dos elementos o núcleo central. Por esta interpretação, podemos considerar de forma aproximada que cada par de núcleos vizinhos se comporta como um acoplador duplo.

Figura 12 – Acoplador triplo na configuração planar



Fonte: Autor

Desta forma, podemos utilizar a matriz de transferência do acoplador duplo, Equação (2.6), para calcular a potência óptica instantânea dos três núcleos do acoplador, considerando-os dois a dois, calculando individualmente as interações de cada par de núcleos vizinhos.

No caso da configuração planar ilustrada na figura acima, é necessário calcular a interação entre o núcleo central e cada um dos núcleos periféricos. Portanto, cada passo  $h$  deve ser modelado por 2 matrizes de transferências, representando as interações entre os núcleos 1 e 2 e entre os núcleos 2 e 3. Para uma representação única e compacta destas duas interações, utilizaremos as matrizes de transferências de cada par para construir o tensor de transferência  $\mathcal{T}$ . Em outras palavras, o tensor  $\mathcal{T}$  deve representar todas as interações entre os núcleos adjacentes de uma dada configuração.

Assim, o tensor de transferência do acoplador triplo planar possui duas fatias, onde a primeira ( $\mathcal{T}_{\cdot,1}$ ), Equação (4.5), representa a interação entre os núcleos 1 e 2, enquanto a segunda ( $\mathcal{T}_{\cdot,2}$ ), Equação (4.6), representa a interação entre os núcleos 2 e 3:

$$\mathcal{T}_{\cdot,1} = \begin{pmatrix} \cos(k_{12} h) & i \sin(k_{12} h) & 0 \\ i \sin(k_{12} h) & \cos(k_{12} h) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

$$\mathcal{T}_{\cdot,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(k_{23} h) & i \sin(k_{23} h) \\ 0 & i \sin(k_{23} h) & \cos(k_{23} h) \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

As constantes de acoplamento  $k_{12}$  e  $k_{23}$  pertencem respectivamente as junções de núcleos 1-2 e 2-3, que no caso de serem fisicamente idênticos, tais constantes terão o mesmo valor. Note que os elementos de cada uma das matrizes de transferência foram realocados em fatias de dimensões  $3 \times 3$  para garantir a compatibilidade das dimensões dos arranjos, uma vez que o sinal de entrada do acoplador triplo é representado por um vetor coluna  $\mathbf{v} = [x_{in} \ y_{in} \ z_{in}]^T$  de dimensão  $3 \times 1$ . Além disso, os elementos dentro das fatias devem ser organizados de forma apropriada. Uma maneira de fazer isso é estabelecer uma analogia com os índices dos elementos

da fatia. Por exemplo,  $\mathcal{T}_{\cdot,1}$  representa a interação entre os núcleos 1 e 2, logo somente os elementos com os índices 1 e 2, ou seja,  $t_{1,1,1}$ ,  $t_{1,2,1}$ ,  $t_{2,1,1}$  e  $t_{2,2,1}$ , receberão as informações da matriz de transferência. Os demais elementos, com exceção de  $t_{3,3,1}$ , terão o valor 0, indicando a ausência de sinal. A razão matemática para o valor do elemento  $t_{3,3,1}$  ser 1 reside no fato de que a potência do núcleo 3 deve ser encaminhada integralmente para cálculo na fatia 2, pois a fatia 2 é responsável pelos cálculos de interação entre os núcleos 2 e 3. A construção da fatia  $\mathcal{T}_{\cdot,2}$  segue o mesmo raciocínio, considerando os elementos com os índices 2 e 3.

A potência instantânea em cada passo é, portanto, calculada através da multiplicação do tensor  $\mathcal{T}$  com o vetor  $\mathbf{v}$ , utilizando o produto modo-2 definido nas Equações (4.3)–(4.4). Assim, baseado na notação matricial desdobrada definida em (4.4), o resultado desta operação é dado a seguir:

$$\begin{pmatrix} x_{out}^{(12)} \\ y_{out}^{(12)} \\ z_{out}^{(12)} \\ \hline x_{out}^{(23)} \\ y_{out}^{(23)} \\ z_{out}^{(23)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(k_{12} h) & i \sin(k_{12} h) & 0 \\ i \sin(k_{12} h) & \cos(k_{12} h) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(k_{23} h) & i \sin(k_{23} h) \\ 0 & i \sin(k_{23} h) & \cos(k_{23} h) \end{pmatrix} \times_2 \begin{pmatrix} x_{in} \\ y_{in} \\ z_{in} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Note que o resultado da expressão acima é um vetor de dimensão  $6 \times 1$  que contém as saídas referentes ao primeiro par de núcleos adjacentes (núcleos 1-2) nos três primeiros elementos e ao segundo par de núcleos (núcleos 2-3) nos três últimos. Como estas interações ocorrem simultaneamente e ambas envolvem o núcleo central, uma média desses resultados deve ser computada para obtenção do sinal de saída  $\mathbf{v}' = [x_{out} \ y_{out} \ z_{out}]^T$  a cada passo, isto é:

$$\begin{pmatrix} x_{out} \\ y_{out} \\ z_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_{out}^{(12)} + x_{out}^{(23)}}{2} \\ \frac{y_{out}^{(12)} + y_{out}^{(23)}}{2} \\ \frac{z_{out}^{(12)} + z_{out}^{(23)}}{2} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

O sinal de saída do passo definido em (4.8) servirá como sinal de entrada no passo seguinte, até que o comportamento da potência do sinal entre os três núcleos seja computado ao longo de todo o comprimento do acoplador.

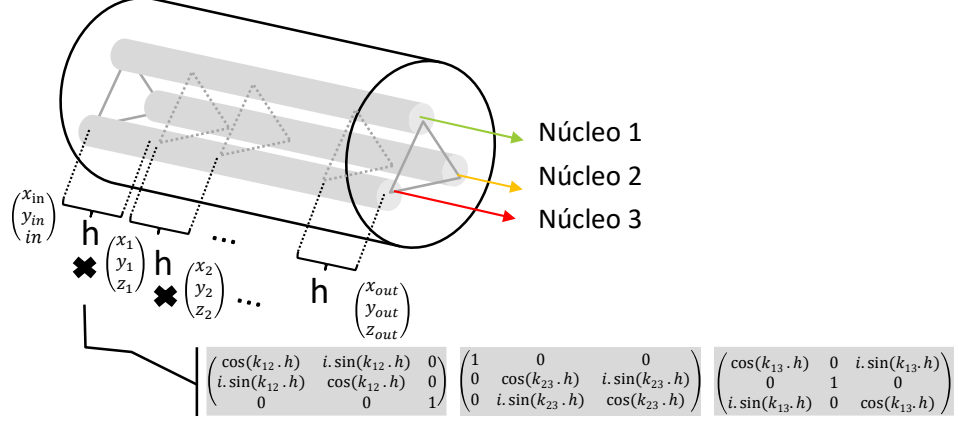
Um ponto importante a destacar é que o método tensorial simula de forma simultânea as interações entre todos os núcleos do acoplador, ao contrário de outros métodos convencionais que as calculam uma após a outra. Isso traz o benefício de não necessitar, nos casos de regime linear, da divisão simétrica dos passos.

#### 4.3.2 Método tensorial aplicado no acoplador triplo triangular - regime linear

As interações entre os núcleos de um acoplador triplo na configuração triangular são realizadas simultaneamente entre os três núcleos, de maneira simétrica entre eles. Para efeitos de simplificação, iremos adotar como exemplo o acoplador triplo triangular no caso particular onde os núcleos são pequenos, idênticos, sinais de potência baixa e de mesma fase inicial, similar ao apresentado na Seção 2.2.2.2. A aplicação do método tensorial é bastante similar ao apresentado na Seção 4.3.1, porém o tensor de transferência precisará ter uma terceira fatia referente a nova

interação existente (núcleos 1 e 3), além das fatias (4.5)–(4.6) já definidas. A Figura 13 ilustra o esquema do método tensorial para o acoplador triplo na configuração triangular.

Figura 13 – Acoplador triplo na configuração triangular



Fonte: Autor

A forma de preenchimento da terceira fatia segue a mesma analogia realizada no acoplador triplo planar, considerando a existência de interação entre os núcleos 1 e 3. Assim, apenas os elementos que contenham os índices 1 e 3, no caso  $t_{1,1,3}$ ,  $t_{1,3,3}$ ,  $t_{3,1,3}$  e  $t_{3,3,3}$ , receberão as informações da matriz de transferência, enquanto os demais elementos com exceção do  $t_{2,2,3}$  serão iguais a 0. Desta forma, a fatia  $\mathcal{T}_{:,3}$  é definida como:

$$\mathcal{T}_{:,3} = \begin{pmatrix} \cos(k_{13} h) & 0 & i \sin(k_{13} h) \\ 0 & 1 & 0 \\ i \sin(k_{13} h) & 0 & \cos(k_{13} h) \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

A potência instantânea em cada passo é calculada de maneira análoga à apresentada na seção anterior, rendendo o seguinte sinal de saída:

$$\begin{pmatrix} x_{out}^{(12)} \\ y_{out}^{(12)} \\ z_{out}^{(12)} \\ \hline x_{out}^{(23)} \\ y_{out}^{(23)} \\ z_{out}^{(23)} \\ \hline x_{out}^{(13)} \\ y_{out}^{(13)} \\ z_{out}^{(13)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(k_{12} h) & i \sin(k_{12} h) & 0 \\ i \sin(k_{12} h) & \cos(k_{12} h) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(k_{23} h) & i \sin(k_{23} h) \\ 0 & i \sin(k_{23} h) & \cos(k_{23} h) \\ \hline \cos(k_{13} h) & 0 & i \sin(k_{13} h) \\ 0 & 1 & 0 \\ i \sin(k_{13} h) & 0 & \cos(k_{13} h) \end{pmatrix} \times_2 \begin{pmatrix} x_{in} \\ y_{in} \\ z_{in} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

A expressão acima gera um vetor de dimensão  $9 \times 1$  com as saídas das interações entre os pares de núcleos 1-2 (primeiros 3 elementos); núcleos 2-3 (3 elementos centrais); núcleos 1-3 (últimos 3 elementos).

Como estas interações ocorrem simultaneamente e ambas envolvem o núcleo central, uma média desses resultados deve ser computada para obtenção do sinal de saída  $\mathbf{v}' = [x_{out} \ y_{out} \ z_{out}]^T$  a cada passo, isto é:

$$\begin{pmatrix} x_{out} \\ y_{out} \\ z_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_{out}^{(12)} + x_{out}^{(23)} + x_{out}^{(13)}}{3} \\ \frac{y_{out}^{(12)} + y_{out}^{(23)} + y_{out}^{(13)}}{3} \\ \frac{z_{out}^{(12)} + z_{out}^{(23)} + z_{out}^{(13)}}{3} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

#### 4.3.3 Método tensorial aplicado em acopladores triplos em regime não linear

A aplicação do método tensorial em acopladores ópticos triplos em regimes não lineares segue um processo semelhante ao regime linear, conforme descrito nas Seções 4.3.1 e 4.3.2. No entanto, no regime não linear, similarmente ao método *Split-Step* Fourier simetrizado (ver Seção 2.4.3), para garantir uma melhor precisão, o cálculo dos efeitos não-lineares é dividido simetricamente em duas etapas: uma antes e a outra depois do tensor de transferência.

Partindo da Equação (2.34), assumimos então que em cada etapa as amplitudes dos sinais são multiplicadas por um fator  $e^{\frac{h}{2}\hat{N}}$ , onde  $\hat{N} = i\gamma|A|^2$  denota o operador não-linear definido na Equação (2.30) para o caso de uma fibra sujeita ao efeito SPM. Desta forma, para acopladores triplos em regime não-linear (considerando os efeitos SPM e/ou XPM), definimos as seguintes matrizes diagonais a serem adicionadas ao método tensorial introduzido na subseção anterior:

- Caso deseje-se adicionar apenas o efeito não linear SPM, seja para a configuração triplo planar ou triangular, a matriz diagonal que representa esse efeito assume a seguinte forma:

$$diag(e^{\hat{N}\frac{h}{2}}) = \begin{pmatrix} e^{i\gamma|x_{in}|^2\frac{h}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\gamma|y_{in}|^2\frac{h}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\gamma|z_{in}|^2\frac{h}{2}} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

- Para adicionar os efeitos não-lineares SPM e XPM, por haver diferenças de interações entre os núcleos dos acopladores, então a matriz diagonal possuem formas diferentes, a saber:

$$diag(e^{\hat{N}\frac{h}{2}}) = \begin{pmatrix} e^{i\gamma(|x_{in}|^2+2|y_{in}|^2)\frac{h}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\gamma(|y_{in}|^2+2|x_{in}|^2+2|z_{in}|^2)\frac{h}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\gamma(|z_{in}|^2+2|y_{in}|^2)\frac{h}{2}} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

para o acoplador triplo planar, e:

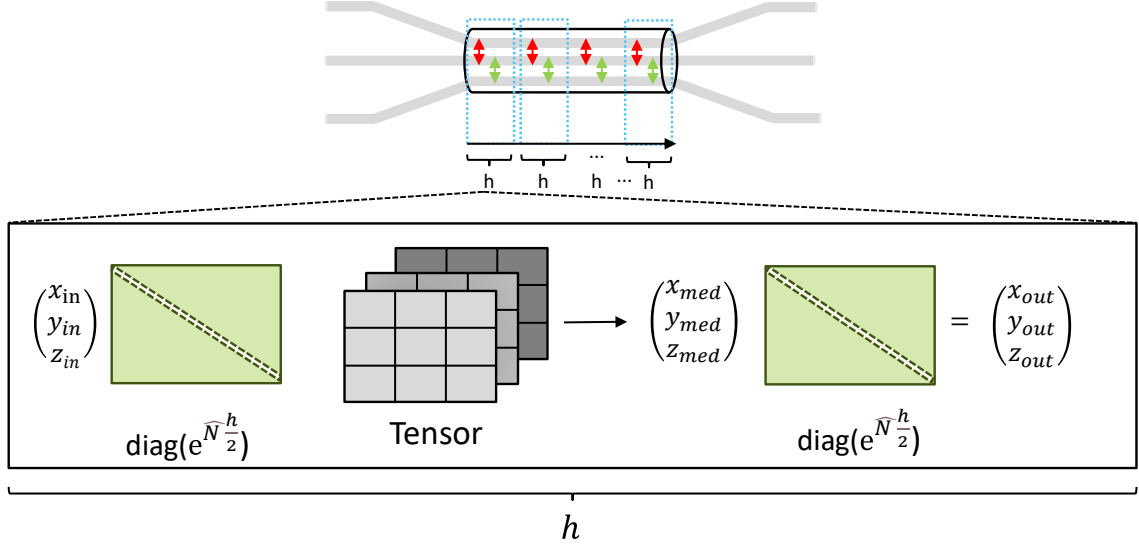
$$diag(e^{\hat{N}\frac{h}{2}}) = \begin{pmatrix} e^{i\gamma(|x_{in}|^2+2|y_{in}|^2+2|z_{in}|^2)\frac{h}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\gamma(|y_{in}|^2+2|x_{in}|^2+2|z_{in}|^2)\frac{h}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\gamma(|z_{in}|^2+2|x_{in}|^2+2|y_{in}|^2)\frac{h}{2}} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

para o acoplador triplo triangular.

O procedimento completo pode ser resumido da seguinte forma: primeiramente, multiplicamos o vetor de entrada por uma matriz diagonal que representa os efeitos não lineares a serem considerados (correspondendo à metade do passo  $h$ ). Em seguida, realizamos a operação de produto modo-2 com o tensor de transferência do acoplador triplo, resultando em um vetor. Esse vetor é então submetido a uma média de seus elementos, conforme apresentado nas Equações

(4.8) e (4.11), resultando em um vetor de dimensões  $3 \times 1$ . Esse novo vetor é multiplicado novamente pela matriz diagonal de efeitos não lineares (representando a outra metade do passo  $h$ ). O resultado final é um novo vetor de saída que retroalimenta o próximo passo, como ilustrado na Figura 14 e generalizado na Equação (4.15):

Figura 14 – Efeitos Não Lineares em Acopladores Triplos: Método Tensorial



Fonte: Autor

$$\begin{pmatrix} x_{out} \\ y_{out} \\ z_{out} \end{pmatrix} = diag(e^{\hat{N}\frac{h}{2}}) \cdot \overline{\mathcal{T} \times_2 diag(e^{\hat{N}\frac{h}{2}}) \begin{pmatrix} x_{in} \\ y_{in} \\ z_{in} \end{pmatrix}}_3 \quad (4.15)$$

Onde:

- $\overline{[\cdot]}_n$ : É o operador que representa a média dos elementos de um tensor ao longo do seu  $n$ -ésimo modo;
- $diag(\cdot)$ : É o operador que mapeia os elementos de um vetor em uma matriz diagonal quadrada.

Quando efeitos não lineares deixam de ser desprezíveis em acopladores ópticos, o comportamento do sinal pode ser consideravelmente diferente, a depender da potência do campo propagante no seu interior. Isso contrasta com o comportamento de acopladores lineares, podendo resultar, inclusive, em funcionalidades completamente diferentes dentro de uma rede óptica.

O método tensorial proposto, ao ser empregado para modelar o comportamento dos sinais, permite um estudo desses acopladores em diferentes cenários, além de ajudar na identificação da potência crítica (valor de potência a partir da qual o acoplador reduz a capacidade de transferência de energia entre os núcleos).

Em aplicações que envolvam comutações ópticas, a identificação dessa potência crítica é bastante importante, dessa forma, curvas de transmissão que representam a dinâmica das potências entre os núcleos, são de extrema importância para a compreensão e estudo de funcionalidades dos acopladores.

Por fim, podemos inferir que a aplicação do método tensorial não só proporciona uma modelagem computacional simples e compacta das interações entre núcleos dos acopladores ópticos e seus efeitos não lineares, como também permite o cálculo simultâneo dessas interações, aproximando-as mais da realidade física.

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo, apresentamos os resultados de alguns experimentos numéricos para o cálculo de potências ópticas dos acopladores obtidas através do método tensorial proposto. Foram simulados acopladores triplos nas configurações planar e triangular, conforme descrito na Seção 4.3. A título de validação e avaliação de performance do método proposto, apresentamos também um comparativo entre as simulações do método tensorial com outros métodos numéricos tradicionalmente utilizados para solução de tais dispositivos.

As simulações, de uma maneira geral, consistem nas seguintes etapas genéricas, que podem ser adaptadas para softwares computacionais de acordo com cada método utilizado:

1. Definição dos parâmetros físicos do acoplador, como comprimento e constante de acoplamento;
2. Determinação da potência óptica a ser inserida no acoplador e dos núcleos que receberão inicialmente o feixe luminoso;
3. Definição do tamanho do passo ( $h$ ) que o método numérico aplicará. Quanto menor o passo, maior a precisão do cálculo;
4. Execução da rotina computacional do método aplicado. Para cada configuração de acoplador, as devidas adaptações do método são necessárias;
5. Plotagem de gráficos e análise de resultados da dinâmica dos sinais ao longo do acoplador.

As simulações foram implementadas e executadas através da ferramenta MATLAB. A menos que sejam definidos de forma diferente mais adiante, os parâmetros físicos escolhidos para a realização das simulações são apresentados na Tabela 2. Para os resultados apresentados aqui, assumimos que o acoplador é pequeno o suficiente para que os efeitos dispersivos e de atenuação sejam negligenciáveis, e os pulsos propagantes possam ser modelados através das Equações (2.10)-(2.12) e (2.17)-(2.19), quando considerado o regime linear, e das Equações (2.7)-(2.9) e (2.14)-(2.16), quando considerado o regime não-linear. Os núcleos são considerados iguais, simétricos e são ativados, a priori, com baixa potência de sinal.

Tabela 2 – Parâmetros Físicos dos Acopladores

| Descrição                                            | Símbolo | Valor                |
|------------------------------------------------------|---------|----------------------|
| Potência de entrada                                  | $P_0$   | 1 mW                 |
| Constante de acoplamento                             | $k$     | $1 \text{ cm}^{-1}$  |
| Comprimento do acoplador (config. triplo planar)     | $L_c$   | $\pi/k\sqrt{2}$      |
| Comprimento do acoplador (config. triplo triangular) | $L_c$   | $\pi/3k$             |
| Passos                                               | $h$     | $10^{-5} \text{ cm}$ |

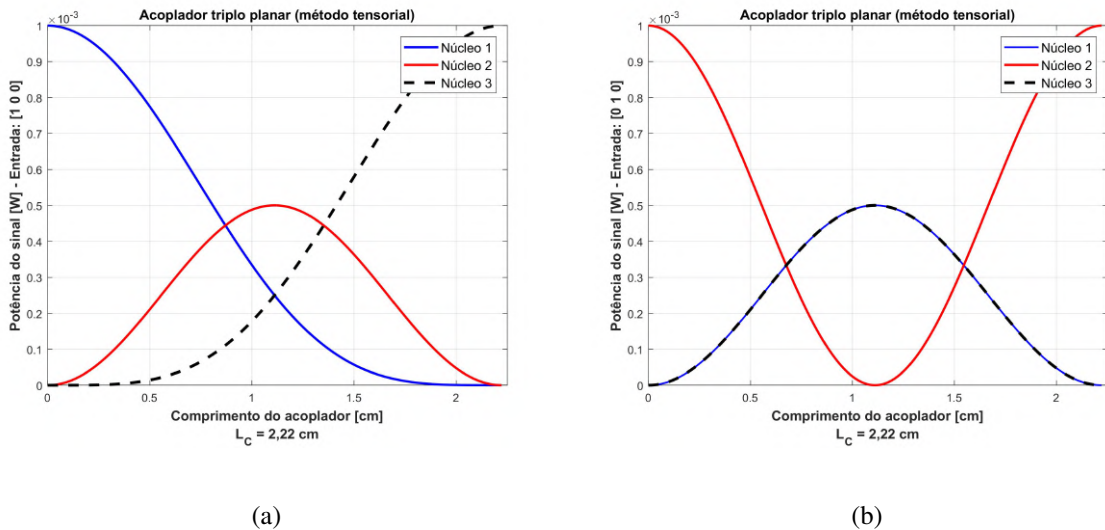
## 5.1 Transmissão de potência para acopladores triplos - método tensorial

Nesta seção, apresentamos os resultados das simulações dos acopladores ópticos triplos em duas configurações - planar e triangular - com base no método tensorial proposto, com o propósito de avaliar a sua efetividade. Este primeiro experimento consiste em analisar a energia transmitida em cada configuração do acoplador, observando a dinâmica de chaveamento das potências ópticas entre os núcleos ao longo da propagação. Para efeitos de simulação, sinais foram gerados a partir da modulação *on-off keying* (OOK), com potência  $P_0 = 1$  mW para representação de bits 1.

Para o caso do acoplador triplo planar, com o intuito de se avaliar a resposta do acoplador para sinais transmitidos a partir de cada uma das portas, foram consideradas como entradas os vetores  $\mathbf{v} = [1 \ 0 \ 0]^T$  e  $\mathbf{v} = [0 \ 1 \ 0]^T$ . Devido à simetria entre os núcleos das extremidades, as entradas  $\mathbf{v} = [1 \ 0 \ 0]^T$  e  $\mathbf{v} = [0 \ 0 \ 1]^T$  geram respostas equivalentes e, portanto, esta última foi omitida.

A Figura 15 mostra o gráfico da potência do sinal óptico *versus* comprimento do acoplador para um acoplador triplo planar. Na Figura 15 (a), o núcleo 1 é ativado com a potência de entrada  $P_0$ , sem sinais nos demais núcleos. É possível observar que, ao longo do acoplador, ocorre a transferência de energia a partir do núcleo 1, passando gradualmente pelo núcleo 2, até que a potência seja completamente chaveada para o núcleo 3. O resultado observado condiz com o comportamento esperado para este tipo de acoplador, uma vez que a disposição geométrica dos núcleos em torno do núcleo central favorece essa transferência gradual, refletindo a interação contínua entre este núcleo e os núcleos das extremidades. Já na Figura 15 (b), o núcleo ativado é o núcleo central (porta 2). Devido à simetria em relação aos núcleos das extremidades, é possível observar que a transferência de energia ocorre de maneira igual para os núcleos 1 e 3.

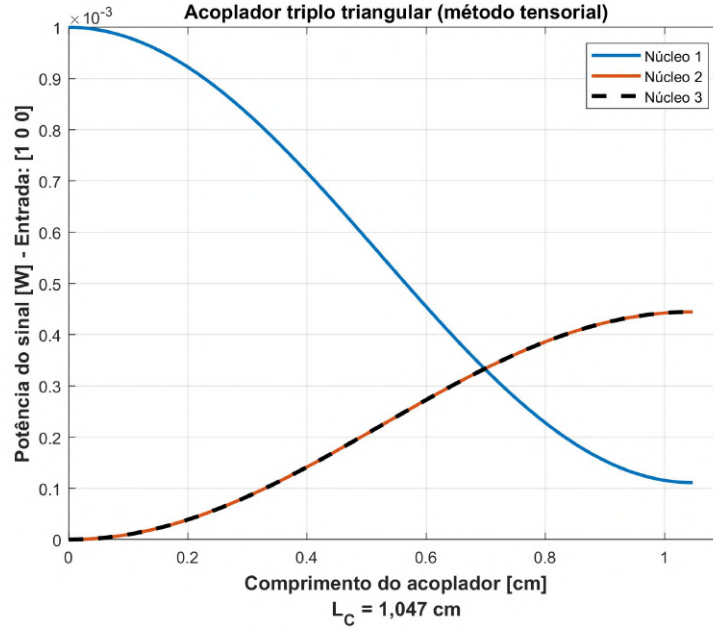
Figura 15 – Transmissão de potência para o acoplador triplo planar: (a) com ativação no núcleo 1 (extremidade); (b) com ativação do núcleo 2.



Fonte: Autor

A Figura 16 mostra o gráfico da potência do sinal óptico *versus* comprimento do acoplador para um acoplador triplo triangular. Para esta configuração, temos que todos núcleos possuem simetria em relação ao arranjo completo, uma vez que este obedece uma geometria cíclica. Assim, o comportamento esperado é o mesmo, independente da porta que está sendo ativada. Por esta razão, a figura mostra somente o resultado com a entrada  $\mathbf{v} = [1 \ 0 \ 0]^T$ . As demais entradas também foram testadas e omitidas aqui por mostrarem o mesmo resultado.

Figura 16 – Transmissão de potência para o acoplador triplo triangular



É possível observar que, dado a simetria, ocorre uma divisão da potência de entrada nos núcleos 2 e 3, porém, devido à contínua interação mútua entre os núcleos vizinhos nesta configuração, o chaveamento completo da potência óptica não ocorre, como no caso do acoplador planar.

Vale ressaltar aqui que os resultados apresentados acima são coerentes com o comportamento esperado para cada uma das configurações estudadas. A seguir, uma comparação com outros métodos será apresentada a fim de validar esse resultado, ratificando a efetividade do método proposto.

## 5.2 Comparativo Computacional entre Diferentes Métodos - Acopladores triplos em Regime Linear

Com o objetivo de avaliar a performance e eficiência computacional, nesta seção providenciamos uma comparação de resultados numéricos do método tensorial proposto com outros resultados obtidos através de métodos convencionais encontrados na literatura. Consideramos, para esta comparação, soluções de acopladores triplos simulados a partir do método numérico RK4, recapitulado na Seção 2.4.1. O código-fonte desenvolvido pelo autor para essa simulação pode ser consultado na seção de apêndices. Este método é bastante referenciado em artigos científicos da área, sendo um método comumente utilizado neste tipo de problema. Além disso, foram considerados resultados obtidos através de uma solução analítica (método matricial) introduzida no trabalho de (MARTINS, 2018b) e apresentada na Equação (2.13) para o caso da configuração planar. Este método representa a forma mais precisa do comportamento do sinal, pois ele é proveniente do cálculo analítico das ENLS. Cabe ressaltar aqui que, após diversas pesquisas em diferentes plataformas indexadas, não foram encontradas trabalhos que apresentem soluções analíticas para o caso da configuração triangular.

Para esta comparação, foram considerados alguns parâmetros relevantes, tais como:

1. Tamanho do passo ( $h$ ): intervalo infinitesimal de repetição do conjunto de instruções para

o qual a aproximação numérica se aplica;

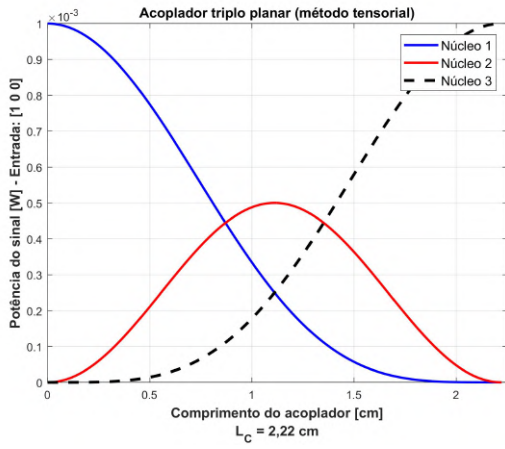
2. Tempo de execução: o tempo (em segundos) necessário para executar o algoritmo de cada método. Este parâmetro pode ser entendido como uma medida de eficiência computacional;
3. Erro de conservação de energia: este parâmetro avalia a precisão de um modelo de previsão, uma vez que a energia deve ser conservada ao longo da propagação.

Acredita-se que uma avaliação com base nos parâmetros acima proporcionem uma análise detalhada do desempenho dos métodos, possibilitando uma comparação de performances entre o método proposto e métodos convencionais encontrados na literatura, evidenciando assim a confiabilidade da abordagem tensorial.

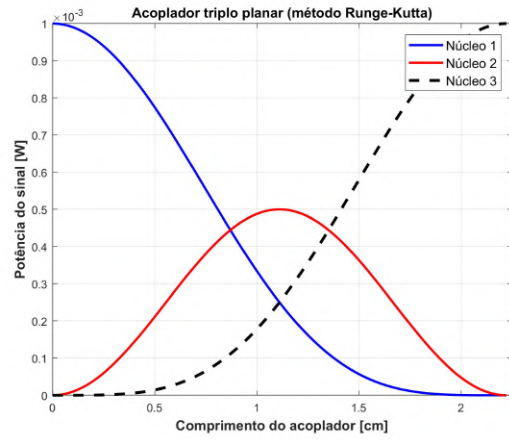
Para garantir a equivalência em termos de comportamento dos sinais entre métodos numéricos analisados, realizamos uma comparação gráfica da potência do sinal óptico ao longo do acoplador. Para as análises a seguir foi considerada como entrada o vetor  $\mathbf{v} = [1 \ 0 \ 0]^T$  (ativação apenas do núcleo 1).

A Figura 17 ilustra a transmissão de potência *versus* comprimento do acoplador para um acoplador triplo planar solucionado através dos três métodos em questão. É possível notar facilmente que os resultados obtidos através dos métodos analisados apresentaram o mesmo comportamento, ressaltando a efetividade do método proposto.

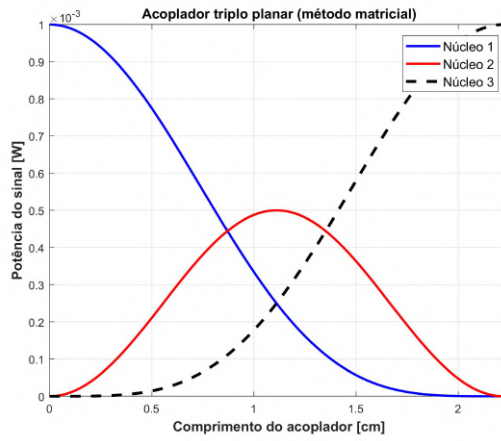
Figura 17 – Transmissão de potência do acoplador triplo na configuração planar através dos métodos (a) tensorial, (b) RK4 e (c) matricial.



(a)



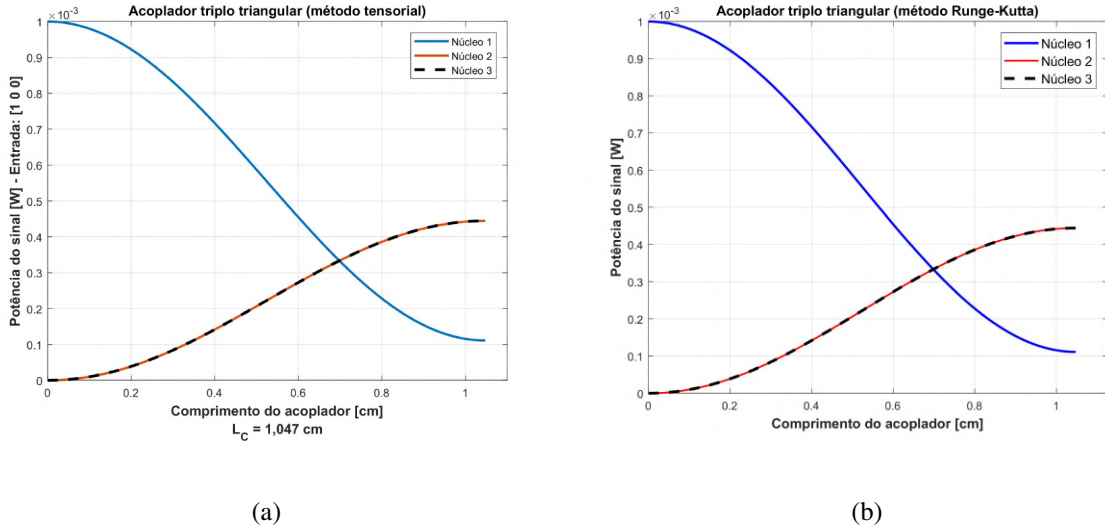
(b)



(c)

A Figura 18 ilustra a transmissão de potência *versus* comprimento do acoplador para um acoplador triplo triangular obtida através de diferentes métodos. Vale lembrar que, como não foram encontradas na literatura soluções analíticas para esta configuração, a comparação neste caso se restringirá apenas entre o método proposto e o método RK4. Para esta configuração também é possível observar uma equivalência entre os resultados obtidos pelos dois métodos. Estes resultados servem como uma validação do método proposto, uma vez que a modelagem do acoplador a partir da abordagem tensorial gera resultados semelhantes aos resultados obtidos por métodos convencionais encontrados na literatura.

Figura 18 – Transmissão de potência do acoplador triplo na configuração triangular através dos métodos (a) tensorial e (b) RK4.



Fonte: Autor

Uma avaliação de desempenho do método foi providenciada a partir da variação do tamanho do passo numérico aplicado a cada método. Quanto menor o passo, ou seja, quanto mais refinada for a aproximação numérica, maior será a precisão do cálculo e, portanto, maior deve ser o custo computacional (aqui avaliado em termos do tempo de execução). Logo, é esperado que o refinamento do passo resulte em uma redução no erro de conservação da energia à medida que é observado um aumento no tempo de execução. Para esta análise, foram considerados seis valores diferentes para o passo, a saber:  $h = 10^{-1}$  cm,  $h = 10^{-2}$  cm,  $h = 10^{-3}$  cm,  $h = 10^{-4}$  cm,  $h = 10^{-5}$  cm e  $h = 10^{-6}$  cm.

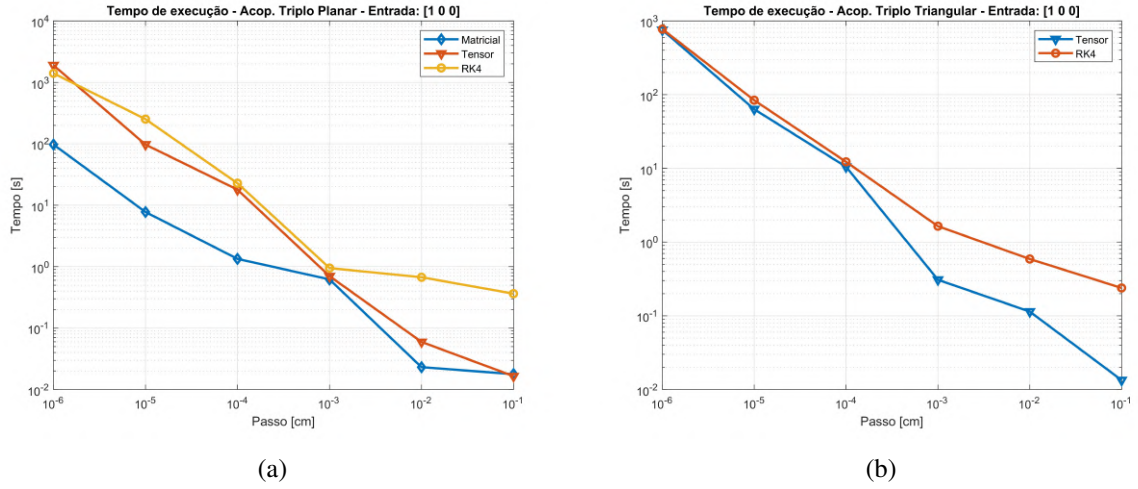
Para a avaliação da conservação de energia, utilizamos como métrica o erro quadrático médio normalizado (em inglês, *normalized mean squared error* - NMSE). Esta métrica avalia a precisão de um modelo de previsão, medindo a diferença média entre valores previstos e valores reais, normalizada em relação à escala dos valores reais. O NMSE da conservação da energia foi calculado da seguinte forma:

$$\text{NMSE} = 10 \log_{10} \left( \frac{1}{N_p} \sum_{n=1}^{N_p} \frac{P_0^2 - \left( |x_{out}^{(n)}|^2 + |y_{out}^{(n)}|^2 + |z_{out}^{(n)}|^2 \right)}{P_0^2} \right) \quad (5.1)$$

onde  $N_p = L_c/h$  representa o número de passos no qual o comprimento total do acoplador é subdividido e  $(x_{out}^{(n)}, y_{out}^{(n)}, z_{out}^{(n)})$  representam as amplitudes dos campos em cada núcleo ao fim do  $n$ -ésimo passo.

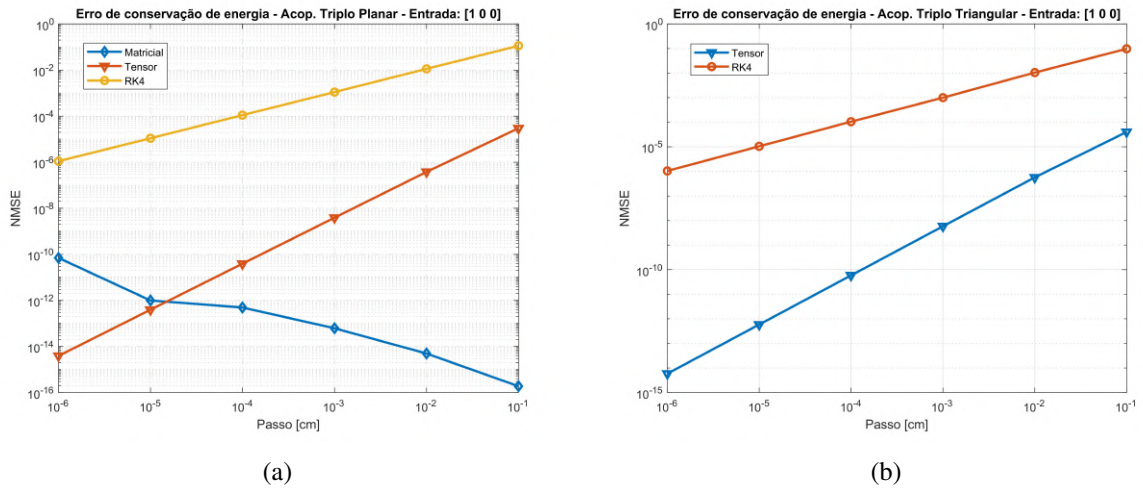
A Figura 19 mostra um comparativo entre o tempo de execução de cada método estudado em função do tamanho do passo para a solução das duas configurações do acoplador triplo. Observamos que, à medida que o passo é refinado, o tempo de execução de todos os métodos analisados aumenta, conforme esperado. O método que apresentou o menor tempo de execução foi o método matricial. Isto se deve ao fato deste método se basear em uma solução analítica das ENLS e, portanto, ter menos etapas de execução. Na comparação entre os dois métodos que consideram uma aproximação numérica, os tempos de execução dos métodos tensorial e RK4 se equiparam em ambas as configurações, demonstrando um desempenho equivalente entre os dois.

Figura 19 – Comparação entre os tempos de execução para os acopladores triplos (a) planar e (b) triangular.



Em relação a conservação de energia, a Figura 20 mostra o NMSE da conservação de energia para as duas configurações do acoplador triplo em função do tamanho do passo. Conforme esperado, à medida que o passo é refinado, observa-se uma tendência de diminuição do erro de conservação de energia, enfatizando assim uma maior precisão do método. Contudo, o método matricial apresentou um comportamento distinto, tendo a sua precisão reduzida (erro aumentado) à medida que o passo diminui. A razão para este comportamento ainda precisa ser avaliada mais profundamente. A partir da figura, observamos que para passos mais refinados, o método tensorial apresentou os menores níveis de erro em ambas as configurações.

Figura 20 – Comparação entre os erros de conservação de energia para os acopladores triplos (a) planar e (b) triangular.



No geral, observamos que o método matricial apresenta bons resultados em termos de tempo de execução e precisão na conservação de energia para tamanhos de passos mais grosseiros. No entanto, uma vez que este método requer uma solução analítica das ENLS, cada caso necessita de um estudo individual. Todavia, dependendo das condições consideradas na propagação da luz, é impossível se obter uma solução analítica para ENLS, ou seja, torna-se inviável trabalhar este tipo de solução para diferentes situações.

Por outro lado, os métodos tensorial e RK4 se mostram bem versáteis quanto a aplicação

em diferentes configurações, podendo ser adaptado de maneira adequada para obtenção de uma solução numérica aproximada para cada caso. Na comparação entre esses dois métodos, foi possível observar que o método tensorial apresentou uma maior precisão (menor erro na conservação de energia) ao mesmo nível de custo computacional apresentado pelo RK4.

### **5.3 Desempenho do Método Tensorial na Simulação de Efeitos Não-Lineares em Acopladores Triplos**

Nas seções anteriores, comparamos o método tensorial com outros métodos numéricos para acopladores ópticos triplos em regime linear. Agora, vamos aprofundar a análise do método tensorial em cenários não-lineares, investigando sua capacidade de conservar energia e manter a performance de execução em diferentes condições não-lineares, como por exemplo quando ocorrem efeitos como SPM e XPM combinados. É importante observar que esses efeitos se manifestam quando a potência óptica no interior das fibras que compõem os acopladores atinge níveis suficientemente altos. Esses níveis de energia podem variar de acoplador para acoplador, dependendo de sua estrutura, composição e não-linearidade presente nas fibras utilizadas. Portanto, as simulações a seguir utilizarão os mesmos parâmetros apresentados na Tabela 2, porém com uma varredura no parâmetro de potência a fim de avaliar o desencadeamento desses efeitos. Além disso, a título de padronização, a potência de entrada será inserida somente na porta 1 do acoplador, independente da configuração. Para efeitos de simulação, foi considerada em todos os casos um coeficiente de não-linearidade  $\gamma = 1 \cdot 10^{-3} \text{ (Wm)}^{-1}$ .

#### **5.3.1 Efeitos Não-Lineares no Acoplador Triplo Planar**

Para avaliar o desempenho do método tensorial em relação ao tempo de execução e à conservação de energia na presença de efeitos não lineares, conduzimos uma comparação em vários passos. Neste caso, comparamos o comportamento do acoplador triplo planar em regime linear e não linear, considerando o efeito SPM isolado e combinado com XPM. Para efeitos desta comparação, em todos os cenários avaliados, mantivemos a potência de entrada na porta 1 do acoplador óptico triplo planar fixada em 2.000 W.

O tempo de execução do acoplador triplo planar apresentado na Figura 21 diminui à medida que o passo do método aumenta, e os resultados para o regime linear e não linear, incluindo SPM e SPM + XPM, mostraram valores semelhantes quando o mesmo passo foi utilizado.

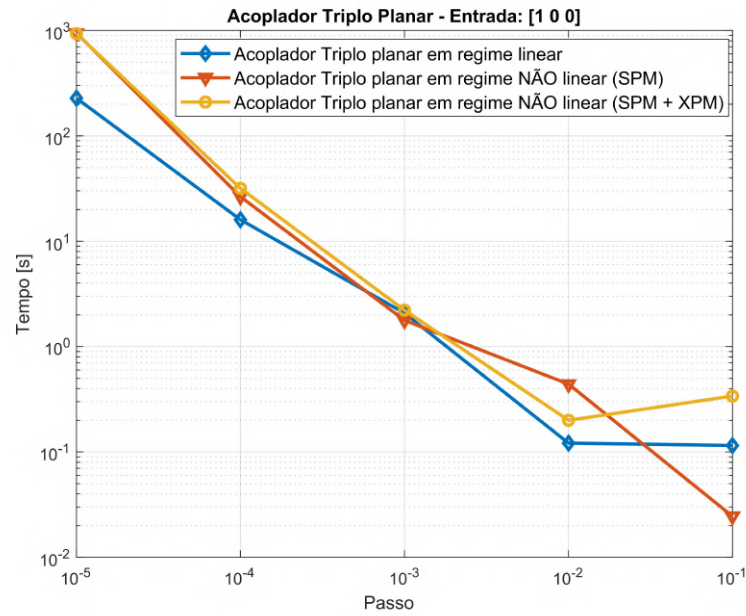


Figura 21 – Análise do Tempo de Execução Acoplador Triplo Planar sob efeito lineares e não lineares.

Já a Figura 22 revela que o erro de conservação de energia do método possui uma precisa equivalência independente do efeito aplicado quando calculado no mesmo passo.

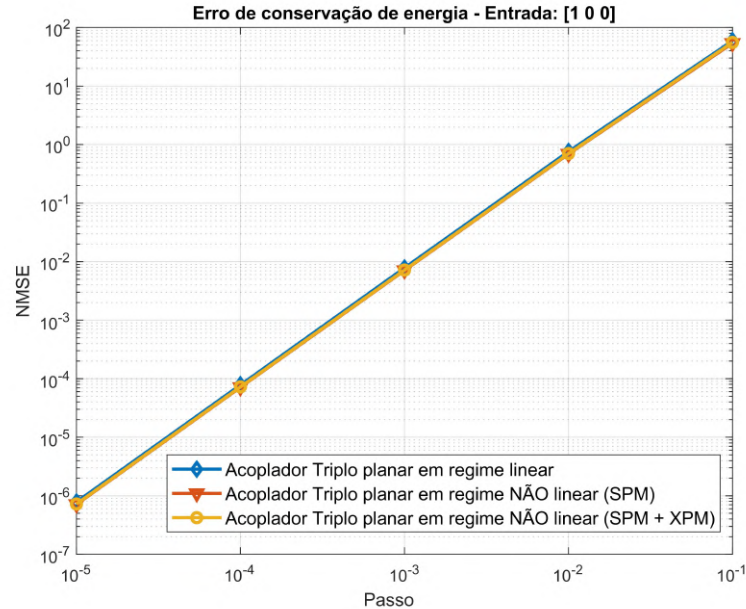


Figura 22 – Análise NMSE do Acoplador Triplo Planar sob efeito lineares e não lineares

Perceba que nas três situações o desempenho é bastante similar, tal fato reafirma a confiabilidade do método na modelagem de acopladores ópticos em regimes não lineares.

### 5.3.2 Efeitos Não-Lineares no Acoplador Triplo Triangular

Em relação ao tempo de execução do acoplador triplo triangular apresentado no gráfico 23 diminui à medida que o passo do método aumenta, e os resultados para o regime linear e não

linear, incluindo SPM e SPM + XPM, mostraram valores semelhantes quando o mesmo passo foi utilizado. Vale ressaltar que também a potência 2.000 W foi mantida na entrada na porta 1 do acoplador triplo triangular.

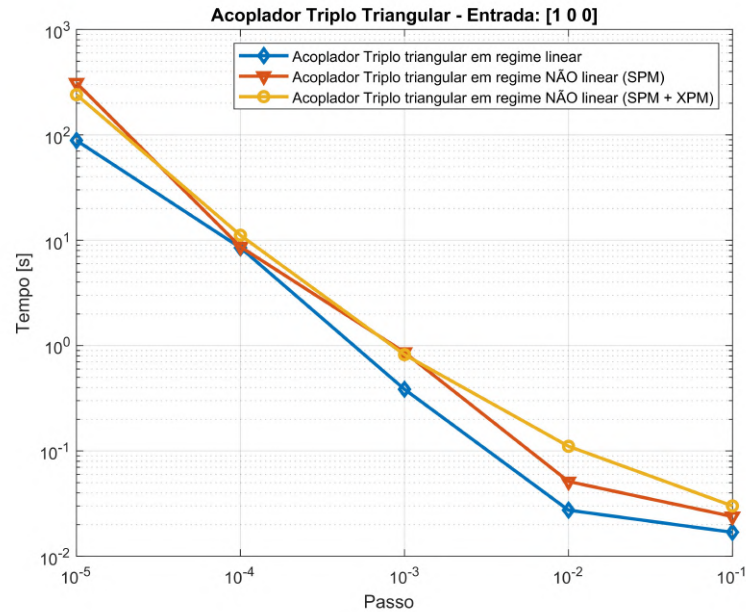


Figura 23 – Análise do Tempo de Execução Acoplador Triplo Triangular sob efeito lineares e não lineares.

Já em relação ao erro de conservação de energia (NMSE), segundo o resultado apresentado no gráfico 24, para passos iguais o resultados foram aproximadamente iguais em relação ao regime linear independentemente do efeito não linear aplicado.

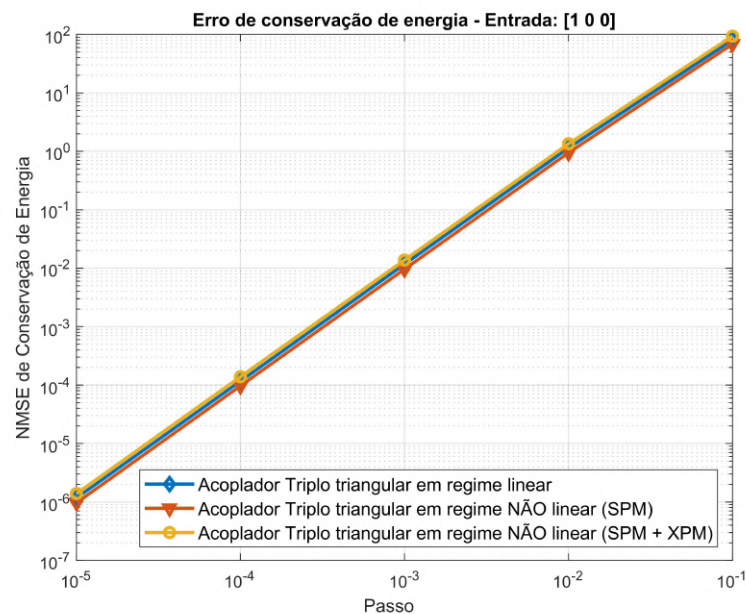


Figura 24 – Análise NMSE do Acoplador Triplo Triangular sob efeito lineares e não lineares

### 5.3.3 Análise da potência crítica

As simulações realizadas para os acopladores triplos em regime não-linear também permitiram obter a descrição do comportamento de cada acoplador (dinâmica das potências) à medida que se altera o nível de potência inserida no interior da fibra.

Aqui que cabe ressaltar que para baixos níveis de potência, os efeitos não-lineares podem chegar a ser desprezíveis e, portanto, o comportamento do acoplador é o mesmo em relação ao regime linear (Seção 5.1). Em contrapartida, se aumentamos a potência a níveis consideráveis (a depender da não-linearidade presente na fibra), o comportamento do acoplador muda completamente, podendo inclusive perder a sua capacidade/funcionalidade de comutar energia entre os núcleos.

Os gráficos a seguir, gerados a partir da aplicação do método tensorial, ilustram o comportamento dos acopladores ópticos triplos numa varredura de potência que foi desde 1 mW a 20 kW. Em cada gráfico é destacado o ponto de potência crítica, isto é, o valor de potência a partir do qual o acoplador perde a capacidade de chavear energia e, portanto, a maior parte da potência inserida fica confinada na própria porta que foi ativada.

A Figura 25 representa o comportamento das potências de saídas do acopladores ópticos em função da potência inserida nas portas de entrada. Nesse caso, o acoplador triplo planar está submetido apenas ao efeito não linear SPM.

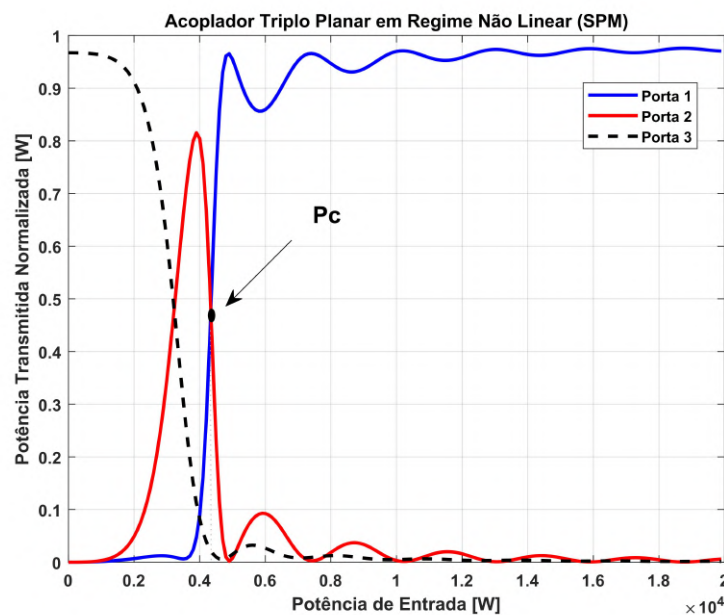


Figura 25 – Acoplador Triplo Triangular sob efeito não linear SPM

É possível perceber que no eixo das abscissas os intervalos de valores de 0 a aproximadamente 4300 W, a potência inserida na porta de entrada do núcleo 1 é comutada entre os outros núcleos. No entanto, a partir do ponto crítico ( $P_c$ ), essa potência tende a ficar restrita apenas a esse núcleo. Em outras palavras, a capacidade de comutação ou chaveamento do acoplador óptico é minimizada.

Quando inserimos outros efeitos não lineares como o XPM combinado com SPM, esse comportamento muda, e o ponto de potência crítica é alterado, nesse caso para cerca de 2.000 W, ficando abaixo do caso anterior que é aproximadamente 4.300 W.

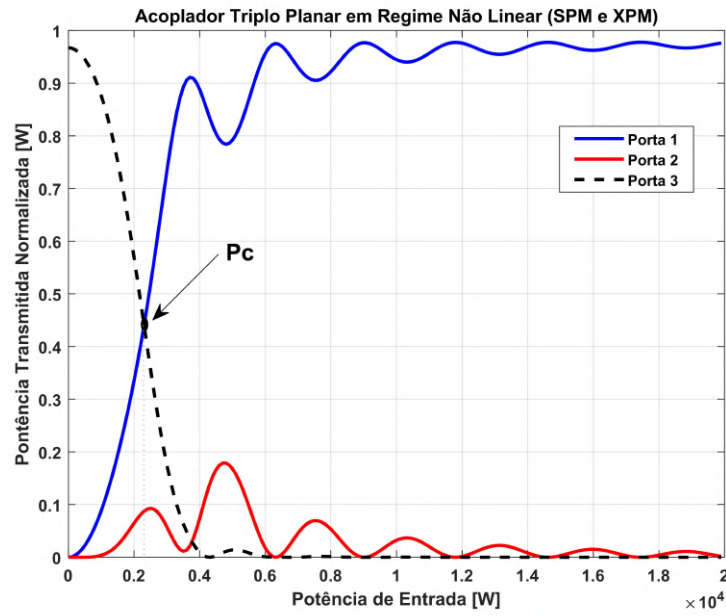


Figura 26 – Acoplador Triplo Triangular sob efeito não linear SPM e XPM

De forma similar ao acoplador triplo planar, é também possível identificar através do método tensorial a potência crítica do acoplador óptico triplo triangular em regime não linear. Nesse caso, ao aplicarmos somente o efeito SPM a curva de potências assume a forma representada na Figura 27.

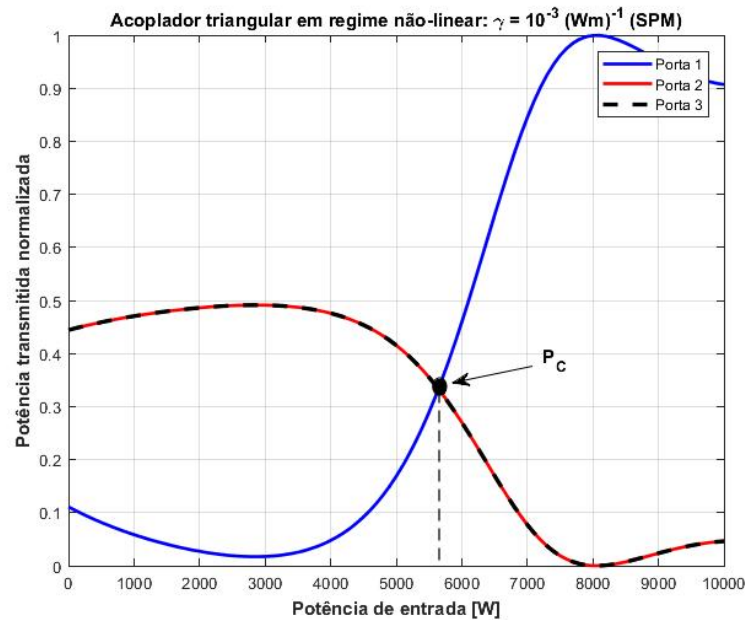


Figura 27 – Acoplador Triplo Triangular sob efeito não linear SPM

Neste cenário, a potência crítica ( $P_c$ ) situa-se entre 5.000 e 6.000 W. É relevante observar que os efeitos não lineares podem ocorrer mesmo abaixo dessa potência. Quando a potência ultrapassa esse limite, o sinal tende a ficar confinado no núcleo onde a potência é inserida.

Quando o acoplador triplo triangular está sob efeito não lineares SPM e XPM a potência crítica ( $P_c$ ) é deslocada para um valor menor por volta de 2.000 W como poderá ser observado

no gráfico da Figura 28.

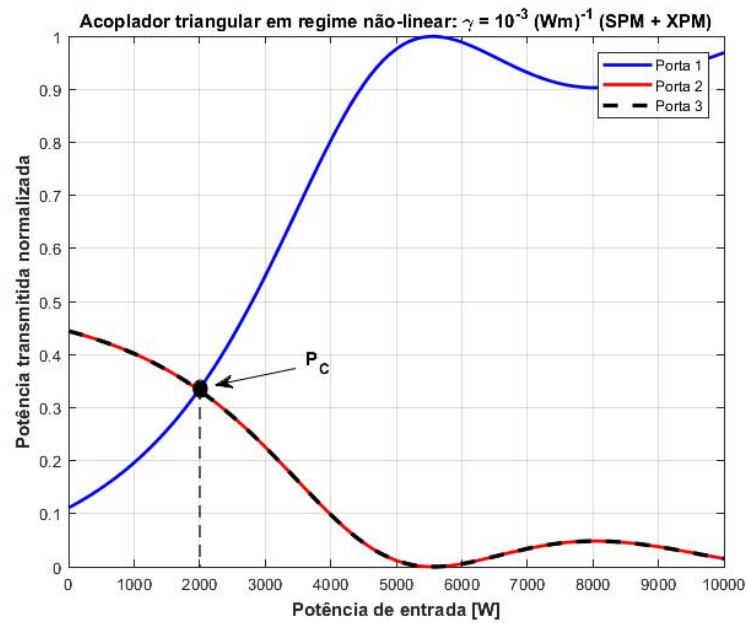


Figura 28 – Acoplador Triplo Triangular sob efeito não linear SPM e XPM

No estudo realizado por (CORREIA, 2015), ao utilizar o método RK4, observou-se que o efeito não linear XPM causa uma redução no limiar da potência crítica em acopladores ópticos. Esse padrão foi novamente constatado ao empregar o método tensorial, sugerindo sua viabilidade como alternativa ao método numérico RK4 para a aplicação e avaliação de efeitos não lineares, incluindo a mudança na potência crítica ao inserir diferentes efeitos não lineares.

## 6 CONCLUSÃO

Nesta dissertação, propomos um novo método numérico, baseado em tensores, para modelagem de acopladores ópticos multinúcleos. O método é uma alternativa viável aos métodos numéricos tradicionais, como o RK4 e o método matricial. Os resultados finais obtidos por meio de simulações numéricas de acopladores triplos, nas configurações planar e triangular, revelaram o desempenho satisfatório do método proposto em termos de tempo de execução e conservação de energia, em comparação com os métodos convencionais supracitados.

A análise do tempo de execução, realizada com o auxílio de funções específicas, apontou para uma notável eficiência do método matricial em comparação com o método tensorial e RK4, quando aplicado ao acoplador triplo na configuração triangular planar. Em contrapartida, o método tensorial e RK4 demonstraram desempenhos semelhantes, em termos de tempo de execução e são mais versáteis em termos de aplicação a diferentes configurações.

Na configuração triangular em regime linear, os resultados revelaram uma similaridade no tempo de execução entre os métodos RK4 e tensorial, entretanto, o método tensorial apresentou um erro de conservação de energia inferior em relação ao RK4. Isso enfatiza as vantagens do método proposto em comparação com os métodos convencionais.

Em relação à aplicação do método tensorial a acopladores triplos em regime não linear, considerando o efeito SPM isolado e a combinação dos efeitos SPM com XPM, os parâmetros de conservação de energia e o tempo de execução do algoritmo mostraram-se praticamente equivalentes ao regime linear para passos de mesmo valor.

Outro ponto relevante em relação ao uso do método baseado em tensores para o caso estudado, em comparação com métodos numéricos convencionais que realizam cálculos sequenciais, é a capacidade que o método proposto tem de realizar cálculos de forma simultânea. Essa característica ajuda a aproximar os resultados da maneira como ocorrem fisicamente.

Em resumo, as conclusões deste estudo destacam o potencial promissor do método tensorial, seja como uma alternativa eficaz à aplicação dos métodos convencionais, seja como um método complementar, ou mesmo uma forma compacta e didática de simular, analisar e interpretar o comportamento e a funcionalidade de acopladores ópticos multinúcleos. A obtenção de resultados satisfatórios nas simulações numéricas das configurações planar e triangular para o caso de acopladores triplos corrobora a viabilidade e eficiência do método tensorial proposto, indicando sua relevância e promissor impacto em aplicações futuras.

### 6.1 Perspectivas futuras

Futuros desdobramentos deste trabalho incluem a utilização do novo método tensorial para modelar acopladores ópticos com configurações mais complexas (maior quantidade de núcleos, diferentes arranjos e geometrias, diferentes propriedades físicas entre os núcleos, etc.). É de igual interesse avaliar a efetividade e eficácia do método ao se incorporar mais efeitos físicos que influenciam na propagação da luz, como os efeitos de atenuação, dispersão entre outros efeitos lineares e não-lineares. Uma avaliação aprofundada da robustez do método proposto em diferentes cenários é uma questão a ser considerada em futuras pesquisas. O estudo comparativo de desempenho computacional e acurácia entre o método proposto e outras abordagens tradicionais permanece em aberto e devem ser ainda discutidos exaustivamente, principalmente no que se refere à aplicação em regimes não-lineares.

## REFERÊNCIAS

- AGRAWAL, G. P. **Nonlinear Fiber Optics**. 3rd. ed. San Diego, USA: Academic Press, 2001.
- AJIMA, Y. Optical connection of top-level supercomputers: current status and future expectations. v. 12007, p. 11–19, 2022.
- BAZAKUTSA, P. V.; BOEV, M. A.; NIKITIN, A. I. Fused optical couplers: Power transfer between optical fibers. In: . [S.l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2022. ISBN 9781665414340.
- CARVALHO, M. S.; ABBADE, A. L. da R. **Descrição do backhaul para as redes 5G**. [S.l.], 2020.
- CORREIA, D. G. **Comutação não-linear de pulsos sóliton, gaussiano e super gaussiano em acopladores ópticos**. Dissertação (Dissertação de Mestrado), 2015.
- CÂMARA, J. M. **Análise de fibras ópticas baseadas em quase cristais fotônicos**. 2014.
- FERREIRA, E. L. et al. **Modelagem tensorial aplicada a acopladores ópticos triple-core planar e triangular**. 2021.
- FRAGA, W. B.; JUNIOR, A. G. C. **Fibras de cristais fotônico: Uma análise de operações lógicas em fibras multinúcleo**. [S.l.]: Novas edições acadêmicas, 2018.
- FRAGA, W. B. d. **Estudo do desempenho de acoplador direcional não linear duplo assimétrico de fibras ópticas operando portas lógicas**. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica)) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2006.
- GILLES, M. **Cross-phase modulation effects in normal dispersive fibers and their applications**. Tese (Doutorado) — Université Bourgogne Franche-Comté, 2018.
- IRAWAN, D. et al. Estimation of coupling power parameters of 1x3 directional fused fiber couplers. In: **Third International Conference on Computational Intelligence, Modelling & Simulation**. Malaysia: [s.n.], 2011.
- JÚNIOR, J. S. de N. et al. Ultrashort pulses propagation through different approaches of the split-step fourier method. **Journal of Mechatronics Engineering**, v. 1, n. 3, p. 2–11, 2018.
- KOMNINOS, P. G. et al. Análise da dinâmica do funcionamento de lasers de fibra dopada com érbio sob a óptica da equação de ginzburg-landau. Universidade Presbiteriana Mackenzie, 2011.
- LI, Q.; YUAN, H. All-optical logic gates based on cross-phase modulation in an asymmetric coupler. **Optics Communications**, v. 319, p. 90–94, 5 2014. ISSN 00304018.
- LI, Q. et al. All-optical logic gates based on wavelength conversion in a nonlinear directional coupler. **Optics Communications**, Elsevier, v. 354, p. 246–249, 6 2015. ISSN 00304018.
- LOPES, M. V. P.
- Acopladores de cristais fotônicos e acesso múltiplo por divisão de código óptico (OCDMA) com pulsos ultracurtos em fibras de Bragg**, 2012.

MAGALHÃES, F. T. de C. B. Simulação numérica da propagação de um pulso quasi-soliton sob a ação de gvd por meio do método das diferenças finitas no domínio do tempo. 2014.

MARTINS, E. S.

**Análise e desempenho de um acoplador baseado em cristal fotônico dopado com érbio,** 2018.

MARTINS, F. L. B. **Portas lógicas de duas e três entradas numa fibra de cristal fotônico de três núcleos.** Dissertação (Dissertação de Mestrado), 2018.

MENDES, A. G. L. S. O.

**Estudo do efeito da modulação do índice de refração não linear em acopladores de cristais fotônicos,** 2014.

NUNES, A. M. da S.

**Estudo das propriedades de transmissão de canais acoplados através do Método de Contorno de Paredes,** 2015.

RIEZNİK, A. A. et al. Uncertainty relation for the optimization of optical-fiber transmission systems simulations. **Opt. Express**, Optica Publishing Group, v. 13, n. 10, p. 3822–3834, May 2005. Disponível em: <<https://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-13-10-3822>>.

ROCHA, D. S. et al. Optical coupler network modeling and parameter estimation based on a generalized tucker train decomposition. **IEEE Access**, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., v. 10, p. 9906–9924, 2022. ISSN 21693536.

RODRIGUES, J. P. T. et al. Reconhecimento de portas lógicas em projeto de acopladores de fibra de cristal fotônico. **SBrT**, 2019.

RUNGE, C. Über die numerische auflösung von differentialgleichungen. **Mathematische Annalen**, v. 46, n. 2, p. 167–178, 1895.

SALES, J. C. Estudo dos interferômetros de mach-zehnder e de sagnac de fibras ópticas tradicionais e de cristal fotônico na geração de portas lógicas ópticas. 2017.

SALES, J. C.

**Estudo dos interferômetros de agra e de sagnac de fibras ópticas tradicionais e de cristal fotônico na geração de portas lógicas ópticas,** 2017.

SANTOS, G. R. D. **Efeitos não lineares na propagação do sinal óptico: estudos e simulações.** 2022.

SHARIF, K. M. et al. Demonstration of xgs-pon and gpon co-existing in the same passive optical network. In: **2018 IEEE 7th International Conference on Photonics (ICP)**. [S.l.: s.n.], 2018. p. 1–3.

SILVA, F. G. S.; SISNANDO, A. D. Design of photonic device using neural networks with deep learning view project. 2019. Disponível em: <<https://www.researchgate.net/publication/319990163>>.

SILVEIRA, C. R. da.

**Desenvolvimento de sensores baseados em fibra óptica afunilada para monitoramento ambiental,** 2015.

SOUSA, C. M. de; SOMBRA, S. B.

**Estudo numérico do acoplador duplo simétrico não linear de fibras de cristais fotônicos sob modulação ppm**, 2013. CARLOS MAURÍCIO DE SOUSA.

THORLABS. **Fused Fiber Optic Couplers / Splitters**. 2023. Acesso em: 27, 12, 2023. Disponível em: <[https://www.thorlabs.com/navigation.cfm?guide\\_id=2211](https://www.thorlabs.com/navigation.cfm?guide_id=2211)>.

UTHAYAKUMAR, T.; RAJA, R. V. J. **All-Optical Photonic Crystal Fiber Couplers**. [S.l.]: Elsevier, 2022.

VALLE, K. N. F. D. et al. **Métodos numéricos de Euler e Runge-Kutta**. Dissertação (Monografia (Graduação em Engenharia)) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2012.

VASCONCELOS, F. H. L. Análise do contexto e do resultados da aprendizagem da avaliação educacional em um curso de graduação em engenharia. 2015.

## **7 APÊNDICES**

## A EXEMPLO DE CÓDIGO EM MATLAB - SIMULAÇÃO USANDO O MÉTODO TENSORIAL DE UM ACOPLADOR TRIPLO NAS CONFIGURAÇÕES PLANAR E TRIANGULAR EM REGIMES LINEAR E NÃO-LINEAR

```
% MÉTODO NUMÉRICO BASEADO EM TENSORES PARA MODELAGEM DE ACOPLADORES ÓPTICOS
%
% Simulação de um acoplador triplo nas configurações planar e triangular
% em regimes linear e não-linear
%
% Efeitos considerados na propagação da luz
% Linear: acoplamento --> k;
% Não-linear: automodulação de fase (SPM) e modulação de fase cruzada (XPM) --> gamma
%
% Desenvolvedores:
% Michael Douglas de Castro Sousa - Aluno de mestrado PPGET/IFCE
% Danilo Sousa Rocha - Professor PPGET/IFCE

clear all
clc

%*****%
%                               PARÂMETROS DA SIMULAÇÃO
%*****%

h = 1e-5;                % Passo infinitesimal
k0 = 1;                  % Constante de acoplamento
gamma = 1e-3;            % Coeficiente de não-linearidade (Efeito Kerr)

%***** Definições do vetor de potência *****%

% Po = 2e3;                % Potência do sinal de entrada (fixa)
% Obs: comentar a linha acima em caso de varredura para diversos valores de
% potência (caso não-linear)

Po = [1:1e2:2e4];        % Vetor de potências a ser analisado (caso não-linear)
% Obs: comentar as linhas acima em caso de estudo com a potência fixa na
% entrada do acoplador

[~,Pmax] = size(Po);

%***** Definições do vetor comprimento *****%

% Comprimento de acoplamento - distância necessária para o chaveamento completo de energia
Lc = pi/(sqrt(2)*k0);    % Acoplador triplo planar
% Lc = pi/(3*k0);        % Acoplador triplo triangular
% Obs: comentar uma das linhas acima de acordo com a configuração a ser
% estudada

z = Lc;                  % Comprimento de propagação a ser analisado
Npassos = round(z/h);    % No. de passos (divisões) do método
zeta = linspace(0,z,Npassos); % Vetor comprimento

%***** Definições do tensor de transferência *****%

% Fator de correção do método tensorial
```

```

R = 2; % No. de interações (No. de pares de núcl. vizinhos: R=2 --> planar; R=3 --> triang.)
k0=R*k0; % Constante de acoplamento corrigida

% Definição das fatias do tensor de transferência
slice1 = [cos(k0*h) 1i*sin(k0*h) 0; 1i*sin(k0*h) cos(k0*h) 0; 0 0 1];
slice2 = [1 0 0; 0 cos(k0*h) 1i*sin(k0*h); 0 1i*sin(k0*h) cos(k0*h)];
% slice3 = [cos(k0*h) 0 1i*sin(k0*h); 0 1 0; 1i*sin(k0*h) 0 cos(k0*h)];

T = cat(1,slice1,slice2); % Tensor de transferência - acoplador planar
% T = cat(1,slice1,slice2,slice3); % Tensor de transferência - acoplador triangular
% Obs: comentar uma das linhas acima de acordo com a configuração a ser
% estudada

%% ***** Tensor split-step *****
% Acoplador triplo linear baseado no método tensorial proposto com
% inspiração no método split-step Fourier simetrizado

for p = 1:Pmax

    k=1;
    j=0;

    % Vetor de entrada - modulação OOK
    Ao = sqrt(Po(p));
    A(:,k,p) = Ao*[1 0 0].';

    while j < Npassos

        % ----- Definição dos vetores de não-linearidade -----%

        % Simulação de efeito não-linear: somente SPM (planar e triangular)
        % NL = 1i*gamma*(abs(A(:,k,p)).^2);

        % Simulação de efeito não-linear: somente SPM (planar)
        NL = 1i*gamma*[abs(A(1,k,p)).^2 + 2*abs(A(2,k,p)).^2;
            abs(A(2,k,p)).^2 + 2*abs(A(1,k,p)).^2 + 2*abs(A(3,k,p)).^2;
            abs(A(3,k,p)).^2 + 2*abs(A(2,k,p)).^2];

        % Simulação de efeito não-linear: SPM + XPM (triangular)
        % NL = 1i*gamma*[abs(A(1,k,p)).^2 + 2*abs(A(2,k,p)).^2 + 2*abs(A(3,k,p)).^2;
        % abs(A(2,k,p)).^2 + 2*abs(A(1,k,p)).^2 + 2*abs(A(3,k,p)).^2;
        % abs(A(3,k,p)).^2 + 2*abs(A(1,k,p)).^2 + 2*abs(A(2,k,p)).^2];

        % Obs: definir quais efeitos serão simulados e comentar as demais
        % linhas acima de acordo com a configuração a ser estudada

        % Tensor split-step simetrizado
        A(:,k+1,p) = exp(h/2*NL).*(A(:,k,p));

        % Simulação dos efeitos de acoplamento - tensor de transferência
        Y = T*A(:,k+1,p);
        A(:,k+1,p) = (Y(1:3,:) + Y(4:6,:))./2; % Acoplador planar
        % A(:,k+1,p) = (Y(1:3,:) + Y(4:6,:) + Y(7:9,:))./3; % Acoplador triangular
        % Obs: comentar uma das linhas acima de acordo com a configuração a ser estudada

        % Simulação de efeito não-linear: somente SPM (planar e triangular)
        % NL = 1i*gamma*(abs(A(:,k,p)).^2);

```

```

% Simulação de efeito não-linear: somente SPM (planar)
NL = 1i*gamma*[abs(A(1,k,p)).^2 + 2*abs(A(2,k,p)).^2;
              abs(A(2,k,p)).^2 + 2*abs(A(1,k,p)).^2 + 2*abs(A(3,k,p)).^2;
              abs(A(3,k,p)).^2 + 2*abs(A(2,k,p)).^2];

% Simulação de efeito não-linear: SPM + XPM (triangular)
% NL = 1i*gamma*[abs(A(1,k,p)).^2 + 2*abs(A(2,k,p)).^2 + 2*abs(A(3,k,p)).^2;
%              abs(A(2,k,p)).^2 + 2*abs(A(1,k,p)).^2 + 2*abs(A(3,k,p)).^2;
%              abs(A(3,k,p)).^2 + 2*abs(A(1,k,p)).^2 + 2*abs(A(2,k,p)).^2];

% Obs: definir quais efeitos serão simulados e comentar as demais
% linhas acima de acordo com a configuração a ser estudada

% Tensor split-step simetrizado
A(:,k+1,p) = exp(h/2*NL).*(A(:,k+1,p));

% Cálculo do erro na conservação de energia (NMSE)
erro_energia(p,k+1) = abs(Ao.^2 - sum(abs(A(:,k+1,p)).^2)).^2./Ao.^2;

j= j+1;
k= k+1;

z = j*h

end

% Vetor de saída
YY(:,p) = A(:,k-1,p);

% Cálculo do erro médio da conservação de energia para cada valor de
% potência
erro_medio(p) = mean(erro_energia(p,:),2);

end

% Comportamento do sinal de saída em função da potência de entrada (regime não-linear)
figure(1)
plot(Po,abs(YY(1,:)).^2./Po, 'b', Po,abs(YY(2,:)).^2./Po,'r', Po,abs(YY(3,:)).^2./Po, '--k')
xlabel('Potência de entrada [W]')
ylabel('Potência transmitida normalizada')
legend('Porta 1','Porta 2','Porta 3')
grid on

% Dinâmica das potências no interior do acoplador em função da distância de propagação
figure(2)
plot(zeta,abs(A(1,1:k-1)).^2, 'b', zeta,abs(A(2,1:k-1)).^2,'r', zeta,abs(A(3,1:k-1)).^2, '--k')
xlabel('Comprimento do acoplador [cm]')
ylabel('Potência do sinal [W]')
legend('Porta 1','Porta 2','Porta 3')
grid on

```

## B EXEMPLO DE CÓDIGO EM MATLAB - MÉTODO RK4 - ACOPLADOR TRIPLO PLANAR LINEAR

```
clear all
clc

% Simulação de um acoplador triplo na configuração planar - caso linear

% Desenvolvedores:
% Michael Douglas de Castro Sousa - Aluno de mestrado PPGET/IFCE
% Danilo Sousa Rocha - Professor PPGET/IFCE
%*****
h = 0.001; % Passo de cálculo

% *****
% COEFICIENTES DA FUNCAO:
% *****

k0 = 1; %k0 = 1; -> valor usado pelo autor | constante de acoplamento
Po = 1e-3; % Potência do sinal
% gama = 1000e-3;

Ao = sqrt(Po);
A1 = Ao;
A2 = 0;
A3 = 0;

A = [A1 A2 A3].';

%% ***** Definições do vetor comprimento *****

Lc = pi/(sqrt(2)*k0); % Comprimento do acoplador
z = Lc; % Comprimento de propagação
Npassos = round(z/h); % Número de Passos do Método
zeta = linspace(0,z,Npassos); % Zeta - Vetor Comprimento de Propagação

%% ***** Runge-Kutta (método 2) *****
% Acoplador triplo linear (configuração planar)
tic

k=1; % contadores do método RK
j=0; % contadores do método RK

while j < Npassos

    K1_A1(k,:) = (1i.*k0.*A2(k,:)) .*h;
    K1_A2(k,:) = (1i.*k0.*(A1(k,:) + A3(k,:))) .*h;
    K1_A3(k,:) = (1i.*k0.*A2(k,:)) .*h;

    YK2_A1(k,:) = A1(k,:) + (K1_A1(k,:) .*h/2);
    YK2_A2(k,:) = A2(k,:) + (K1_A2(k,:) .*h/2);
    YK2_A3_A3(k,:) = A3(k,:) + (K1_A3(k,:) .*h/2);

    K2_A1(k,:) = (1i.*k0.*YK2_A2(k,:)) .*h;
    K2_A2(k,:) = (1i.*k0.*(YK2_A1(k,:) + YK2_A3_A3(k,:))) .*h;
```

```

K2_A3(k,:) = (1i.*k0.*YK2_A2(k,:)) .*h;

YK3_A1(k,:) = A1(k,:) + (K2_A1(k,:) .*h/2);
YK3_A2(k,:) = A2(k,:) + (K2_A2(k,:) .*h/2);
YK3_A3_A3(k,:) = A3(k,:) + (K2_A3(k,:) .*h/2);

K3_A1(k,:) = (1i.*k0.*YK3_A2(k,:)) .*h;
K3_A2(k,:) = (1i.*k0.*(YK3_A1(k,:) + YK3_A3_A3(k,:))) .*h;
K3_A3(k,:) = (1i.*k0.*YK3_A2(k,:)) .*h;

YK4_A1(k,:) = A1(k,:) + (K3_A1(k,:) .*h);
YK4_A2(k,:) = A2(k,:) + (K3_A2(k,:) .*h);
YK4_A3_A3(k,:) = A3(k,:) + (K3_A3(k,:) .*h);

K4_A1(k,:) = (1i.*k0.*YK4_A2(k,:)) .*h;
K4_A2(k,:) = (1i.*k0.*(YK4_A1(k,:) + YK4_A3_A3(k,:))) .*h;
K4_A3(k,:) = (1i.*k0.*YK4_A2(k,:)) .*h;

%*****Próximo valor de A1 e A2 *****

A1(k+1,:) = A1(k,:) + ((K1_A1(k,:) + 2.*K2_A1(k,:) + 2.*K3_A1(k,:) + K4_A1(k,:)))/6;
A2(k+1,:) = A2(k,:) + ((K1_A2(k,:) + 2.*K2_A2(k,:) + 2.*K3_A2(k,:) + K4_A2(k,:)))/6;
A3(k+1,:) = A3(k,:) + ((K1_A3(k,:) + 2.*K2_A3(k,:) + 2.*K3_A3(k,:) + K4_A3(k,:)))/6;

A = [A1(k+1,:) A2(k+1,:) A3(k+1,:)].';

erro_energia(k+1) = abs(Ao.^2 - sum(abs(A).^2))./Ao.^2;

z = j*h

j= j+1;
k= k+1;

end
time = toc

erro_medio = mean(erro_energia)
figure(1)
plot(zeta,abs(A1(1:k-1,:)).^2, 'b', zeta,abs(A2(1:k-1,:)).^2,'r', zeta,abs(A3(1:k-1,:)).^2,
'--k')

```

## C EXEMPLO DE CÓDIGO EM MATLAB - RK4 - ACOPLADOR TRIPLO TRIANGULAR LINEAR

```
clear all
clc

% Simulação de um acoplador triplo na configuração triangular - caso linear
% Desenvolvedores:
% Michael Douglas de Castro Sousa - Aluno de mestrado PPGET/IFCE
% Danilo Sousa Rocha - Professor PPGET/IFCE

%*****

h = 0.001; % Passo de cálculo

% *****
% COEFICIENTES DA FUNCAO:
% *****

k0 = 1; %k0 = 1; -> valor usado pelo autor | constante de acoplamento
Po = 1e-3; % Potência do sinal
% gama = 1000e-3;

Ao = sqrt(Po);
A1 = Ao;
A2 = 0;
A3 = 0;

A = [A1 A2 A3].';

%% ***** Definições do vetor comprimento *****

Lc = pi/(3*k0); % Comprimento do acoplador
z = Lc; % Comprimento de propagação
Npassos = round(z/h); % Número de Passos do Método
zeta = linspace(0,z,Npassos); % Zeta - Vetor Comprimento de Propagação

%% ***** Runge-Kutta (método 2) *****
% Acoplador triplo linear (configuração triangular)
tic
k=1; % contadores do método RK
j=0; % contadores do método RK

while j < Npassos

    K1_A1(k,:) = (1i.*k0.*(A2(k,:) + A3(k,:))).*h;
    K1_A2(k,:) = (1i.*k0.*(A1(k,:) + A3(k,:))).*h;
    K1_A3(k,:) = (1i.*k0.*(A2(k,:) + A1(k,:))).*h;

    YK2_A1(k,:) = A1(k,:) + (K1_A1(k,:)).*h/2;
    YK2_A2(k,:) = A2(k,:) + (K1_A2(k,:)).*h/2;
    YK2_A3_A3(k,:) = A3(k,:) + (K1_A3(k,:)).*h/2;

    K2_A1(k,:) = (1i.*k0.*(YK2_A2(k,:) + YK2_A3_A3(k,:))).*h;
    K2_A2(k,:) = (1i.*k0.*(YK2_A1(k,:) + YK2_A3_A3(k,:))).*h;
```

```

K2_A3(k,:) = (1i.*k0.*(YK2_A2(k,:) + YK2_A1(k,:))).*h;

YK3_A1(k,:) = A1(k,:) + (K2_A1(k,:) .*h/2);
YK3_A2(k,:) = A2(k,:) + (K2_A2(k,:) .*h/2);
YK3_A3_A3(k,:) = A3(k,:) + (K2_A3(k,:) .*h/2);

K3_A1(k,:) = (1i.*k0.*(YK3_A2(k,:) + YK3_A3_A3(k,:))).*h;
K3_A2(k,:) = (1i.*k0.*(YK3_A1(k,:) + YK3_A3_A3(k,:))).*h;
K3_A3(k,:) = (1i.*k0.*(YK3_A1(k,:) + YK3_A2(k,:))).*h;

YK4_A1(k,:) = A1(k,:) + (K3_A1(k,:) .*h);
YK4_A2(k,:) = A2(k,:) + (K3_A2(k,:) .*h);
YK4_A3_A3(k,:) = A3(k,:) + (K3_A3(k,:) .*h);

K4_A1(k,:) = (1i.*k0.*(YK4_A2(k,:) + YK4_A3_A3(k,:))).*h;
K4_A2(k,:) = (1i.*k0.*(YK4_A1(k,:) + YK4_A3_A3(k,:))).*h;
K4_A3(k,:) = (1i.*k0.*(YK4_A2(k,:) + YK4_A1(k,:))).*h;

%*****Próximo valor de A1 e A2 *****

A1(k+1,:) = A1(k,:) + ((K1_A1(k,:) + 2.*K2_A1(k,:) + 2.*K3_A1(k,:) + K4_A1(k,:)))./6;
A2(k+1,:) = A2(k,:) + ((K1_A2(k,:) + 2.*K2_A2(k,:) + 2.*K3_A2(k,:) + K4_A2(k,:)))./6;
A3(k+1,:) = A3(k,:) + ((K1_A3(k,:) + 2.*K2_A3(k,:) + 2.*K3_A3(k,:) + K4_A3(k,:)))./6;

A = [A1(k+1,:) A2(k+1,:) A3(k+1,:)].';

erro_energia(k+1) = abs(Ao.^2 - sum(abs(A).^2))./Ao.^2;

z = j*h

j= j+1;
k= k+1;

end
time = toc

erro_medio = mean(erro_energia)

figure(1)
plot(zeta,abs(A1(1:k-1,:)).^2, 'b', zeta,abs(A2(1:k-1,:)).^2,'r', zeta,abs(A3(1:k-1,:)).^2,
'--k')

```