



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO
CEARÁ –*Campus* FORTALEZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA – PGECM**

CARLA PATRÍCIA SOUZA RODRIGUES PINHEIRO

**ENGENHARIA DIDÁTICA: UM PROCESSO DE ENSINO DAS SEQUÊNCIAS
RECURSIVAS LINEARES POR MEIO DO SOFTWARE GEOGEBRA**

**FORTALEZA – CE
2023**

CARLA PATRÍCIA SOUZA RODRIGUES PINHEIRO

**ENGENHARIA DIDÁTICA: UM PROCESSO DE ENSINO DAS SEQUÊNCIAS
RECURSIVAS LINEARES POR MEIO DO SOFTWARE GEOGEBRA**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Linha de Pesquisa: Ensino de Matemática

Orientador: Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Coorientador: Dr. Daniel Brandão Menezes

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECM)

Fortaleza – CE

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal do Ceará - IFCE
Sistema de Bibliotecas - SIBI

Ficha catalográfica elaborada pelo SIBI/IFCE, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

P654e Pinheiro, Carla Patricia Souza Rodrigues.
ENGENHARIA DIDÁTICA: UM PROCESSO DE ENSINO DAS SEQUÊNCIAS RECURSIVAS
LINEARES POR MEIO DO SOFTWARE GEOGEBRA / Carla Patricia Souza Rodrigues Pinheiro. - 2023.
253 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado) - Instituto Federal do Ceará, Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática,
Campus Fortaleza, 2023.

Orientação: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.

Coorientação: Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes.

1. Sequências recursivas lineares. 2. GeoGebra. 3. Teoria das Situações Didáticas. 4. Engenharia
Didática. 5. Ensino. I. Título.

CDD 510.07



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ
Av. 13 de maio, 2081, - Bairro Benfica - CEP 60040-531 - Fortaleza - CE - www.ifce.edu.br

ATA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO **MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIA MATEMÁTICA** **(PGECM)**

Aos 19 dias do mês de dezembro do ano de 2022, às 13h, na sala de aula 203 do Bloco Didático, realizou-se a Defesa de dissertação, intitulada "**ENGENHARIA DIDÁTICA: UM PROCESSO DE ENSINO DAS SEQUÊNCIAS RECURSIVAS LINEARES POR MEIO SOFTWARE GEOGEBRA**", de autoria da candidata **CARLA PATRICIA SOUZA RODRIGUES PINHEIRO**, aluna do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PGCEM/IFCE, em nível de Mestrado. A Comissão Examinadora esteve constituída pelos professores: **Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves**, Presidente (orientador) – (IFCE/PGECM), **Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes**, (coorientador) – (UVA), **Prof.^a Dra. Maria José Araújo Souza** – (UVA), **Profa. Dra. Francisca Cláudia Fernandes Fontenele** - (UVA) e o **Prof. Dr. Francisco José de Lima** (IFCE - Campus Cedro). Concluídos os trabalhos de apresentação e arguição, a candidata foi **APROVADA** pela Comissão Examinadora. Foi concedido um prazo de **90(noventa) dias**, para a candidata efetuar as correções sugeridas pela Comissão Examinadora e apresentar o trabalho em sua redação definitiva, sob pena de não expedição do Diploma. E, para constar, foi lavrada a presente ata, que vai assinada pelos membros da Comissão.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves, Presidente (orientador) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes (coorientador) – Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA) **Prof.^a Dra. Maria José Araújo Souza** - Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA) **Profa. Dra. Francisca Cláudia Fernandes Fontenele** - Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA)

Prof. Dr. Francisco José de Lima - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE - Campus Cedro)

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: ENGENHARIA DIDÁTICA: UM PROCESSO DE ENSINO DAS SEQUÊNCIAS RECURSIVAS LINEARES POR MEIO SOFTWARE GEOGEBRA

LOCAL: Sala 203 Bloco Didático - IFCE Campus Fortaleza

HORA DE INÍCIO: 13h

Em sessão pública, após exposição de cerca de **50 minutos**, a candidata foi arguida oralmente pelos membros da banca tendo como resultado:

(X) APROVADA, devendo a candidata entregar a versão final no prazo máximo de 90 dias. () APROVADA com louvor.

() APROVAÇÃO CONDICIONAL, devendo o candidato satisfazer, no prazo máximo de 90 dias, às exigências listadas na Folha de Modificações de Dissertação de Mestrado anexa à presente ata.

() REPROVADA.

Na forma regulamentar foi lavrada a presente ata que é abaixo assinada pelos membros da banca, na ordem acima determinada, e pela candidata.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves (orientador)

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes (coorientador)

Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA)

Prof.^a Dra. Maria José Araújo Souza

Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA)

Profa. Dra. Francisca Cláudia Fernandes Fontenele

Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA)

Prof. Dr. Francisco José de Lima

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE - Campus Cedro)

Candidata: **CARLA PATRICIA SOUZA RODRIGUES PINHEIRO**



Documento assinado eletronicamente por **Daniel Brandão Menezes**, Usuário Externo, em 27/12/2022, às 00:32, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Maria José Araújo Souza**, Usuário Externo, em 27/12/2022, às 17:23, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Francisco Jose de Lima**, Professor(a) de Ensino Básico, Técnico e Tecnológico, em 27/12/2022, às 19:23, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Francisca Cláudia Fernandes Fontenele**, Usuário Externo, em 28/12/2022, às 08:47, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Francisco Regis Vieira Alves**, Professor do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico, em 24/01/2023, às 07:20, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade do documento pode ser conferida no site https://sei.ifce.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0 informando o código verificador **4448594** e o código CRC **50472DA8**.

“Ninguém pode voltar atrás e fazer um novo começo, mas é possível começar de novo e fazer um novo fim.”

Chico Xavier

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pelo dom da vida, pois tudo que conquistei e sou são dádivas que vem de ti, Senhor.

Agradeço aos meus pais, Kerginaldo e Regina Lúcia, por me apoiarem e estarem sempre ao meu lado durante a minha caminhada. Obrigada por todos os ensinamentos.

Agradeço ao meu esposo e filhos, Fabrício, Fabrício Júnior e Mariah, por me dares forças todos os dias para lutar e sou grata por todo o amor, apoio e suporte, sem vocês, nada teria sentido. Ao meu irmão Kerginaldo Neto e sua esposa Rafaela Jales pelo suporte técnico, nos momentos de aflições.

Ao meu orientador, Dr. Francisco Régis Vieira Alves, por ter acreditado no meu potencial e por orientar-me na turma de 2021. Agradeço pela confiança, pelo incentivo à pesquisa; e sempre guiando-me e compartilhando seus conhecimentos que foram de grande importância para realização deste trabalho.

Ao meu coorientador, Dr. Daniel Brandão Menezes, pela coorientação e contribuições significativas, as quais engrandeceram a pesquisa - sempre solícito e atencioso.

À professora Dr. Alessandra Senes Marins e a professora Dr. Jucileide Braga Castro, que contribuíram para o meu percurso na os percursos da escrita científica, minha gratidão.

Aos meus amigos e amigas, Karilene Sena, Beatriz Forte, Lucas Militão, Alexander Arley, Letícia do Vale, Renata Passos, Aline Oliveira, Nirly Holanda e Alice Sousa da Silva, por sempre apoiarem meus sonhos, pela compreensão quanto a minha ausência e por se mostrarem presentes, apesar da distância; e até mesmo quando pensei em desistir. Vocês foram essenciais nessa jornada.

Aos amigos do mestrado, Arnaldo Dias, Joelma Alves e Narla Mororó, pelos momentos de união, descontração, apoio e toda torcida. Em especial, agradeço à Renata Teófilo, por ter sido minha maior companheira de artigos, por toda ajuda, atenção e carinho.

Aos professores da minha banca de defesa à Prof.^a Dra. Maria José Araújo Souza e Prof.^a Dra. Francisca Cláudia Fernandes Fontenele, Prof. Dr. Francisco José de Lima, por aceitarem o convite, pela disponibilidade em lerem esta pesquisa, bem como nas contribuições realizadas para aperfeiçoá-la.

À Coordenação e professores do programa de pós-graduação- PGECM, que sempre contribuíram para a construção do conhecimento.

A todos, minha sincera gratidão eterna.

“A teoria das séries recorrentes é uma inesgotável mina que contém todas as propriedades dos números”

Édouard Lucas

RESUMO

Esta pesquisa, apresenta uma investigação acerca das sequências de Fibonacci, Lucas, Pell, Oresme, Mersenne, Jacobsthal, Narayana, Padovan, Perrin e Leonardo, por ter características em comum como: aritmética, recorrente e linear, dentre outras. Este trabalho tem como objetivo analisar as contribuições da Teoria das Situações didáticas para o ensino das aplicações de visualização bidimensional e/ou tridimensional das sequências recursivas lineares, mediante a Engenharia Didática por meio do *software* GeoGebra com os estudantes da licenciatura em Matemática, permitindo uma transposição didática do conteúdo matemático. Essas visualizações foram apresentadas por meio de situações didáticas, proporcionando uma concordância com o conhecimento científico e as habilidades dos estudantes, para que as suas identidades fossem organizadas e discutidas, abordando-as tanto o contexto histórico da sua evolução quanto o matemático que se refere à recorrência e à linearidade, também foram abordados os estudos das identidades utilizando o *software* GeoGebra como recurso didático. Estas situações foram idealizadas por uma teoria de ensino intitulada; Teoria das Situações Didáticas, na qual Guy Brousseau (1976) afirma que essa teoria norteia um dado conteúdo em situações bem definidas que permitam uma análise do desenvolvimento do estudante, por meio de fases que são: situação de ação, formulação, validação e institucionalização, sendo desenvolvidas com estudantes da graduação do curso de licenciatura em matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) – campus Fortaleza, na disciplina de História da Matemática. A pesquisa tem como metodologia a Engenharia Didática, na qual Michèle Artigue (1995) compara o trabalho do professor com o de um engenheiro, permitindo planejamento, pesquisa e análise de um conteúdo em fases bem estruturadas, que são: análise preliminar, análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori*. Por fim, foi feita uma análise das situações didáticas, nos permitindo revelar o que os estudantes desenvolveram, sendo elementos necessários para descrever as relações referentes as sequências recursivas lineares por intermédio das visualizações do GeoGebra, cumprindo, assim, os objetivos da pesquisa, sendo apresentada de maneira eficaz, os métodos utilizados nesta pesquisa.

Palavras-chave: Sequências recursivas lineares. GeoGebra. Teoria das Situações Didáticas. Engenharia Didática. Ensino.

ABSTRACT

This research presents an investigation about the sequences of Fibonacci, Lucas, Pell, Oresme, Mersenne, Jacobsthal, Narayana, Padovan, Perrin and Leonardo, for having characteristics in common such as: arithmetic, recurrent and linear, among others. This work aims to analyze the contributions of the Theory of Didactic Situations for the teaching of applications of two-dimensional and/or three-dimensional visualization of linear recursive sequences, through Didactic Engineering through the GeoGebra software with students of the degree in Mathematics, allowing a transposition didactics of mathematical content. These visualizations were presented through didactic situations, providing an agreement with the scientific knowledge and the students' abilities, so that their identities were organized and discussed, approaching them both the historical context of their evolution and the mathematical one that refers to the recurrence and linearity, studies of identities using the GeoGebra software as a didactic resource were also addressed. These situations were idealized by a teaching theory entitled; Theory of Didactic Situations, in which Guy Brousseau (1976) states that this theory guides a given content in well-defined situations that allow an analysis of the student's development, through phases that are: situation of action, formulation, validation and institutionalization, being developed with undergraduate students of the Mathematics degree course at the Federal Institute of Education, Science and Technology of Ceará (IFCE) – Fortaleza campus, in the discipline of History of Mathematics. The research has Didactic Engineering as its methodology, in which Michèle Artigue (1995) compares the teacher's work with that of an engineer, allowing planning, research and analysis of content in well-structured phases, which are: preliminary analysis, a priori analysis, experimentation and a posteriori analysis. Finally, an analysis of the didactic situations was carried out, allowing us to reveal what the students developed, being necessary elements to describe the relations referring to the linear recursive sequences through the GeoGebra visualizations, thus fulfilling the research objectives, being presented effectively, the methods used in this research.

Keywords: Linear recursive sequences. GeoGebra. Didactic Situation Theory. Didactic Engineering. Teaching.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1- Triângulo didático.....	39
Figura 2- Leonardo Pisano (Fibonacci).....	48
Figura 3- François Édouard Anatole Lucas.....	54
Figura 4-- John Pell	60
Figura 5- Nicole Oresme	67
Figura 6- Representação de Oresme	68
Figura 7- Manuscritos de Oresme (1ª parte).....	69
Figura 8- Manuscritos de Oresme (2ª parte).....	69
Figura 9- Formas de Oresme	70
Figura 10– Marin Mersenne	71
Figura 11– Ernst Erich Jacobsthal.....	74
Figura 12– Narayana Pandita	78
Figura 13- Gérard Cordonnier	80
Figura 14- Números de Fibonacci com trapézio	87
Figura 15– A soma dos n primeiros termos.....	88
Figura 16– Prova visual das primeiras identidades	88
Figura 17- Prova visual da identidade 1	89
Figura 18- Prova visual da identidade 2	89
Figura 19- Prova visual da identidade de Cassini.....	90
Figura 20- Prova visual do Teorema 11	91
Figura 21- Prova visual da identidade 36	92
Figura 22- Prova visual da identidade 37	93
Figura 23- Prova visual do Teorema 12	94
Figura 24- Prova visual da identidade 4	95
Figura 25- Prova visual do Teorema 14	96
Figura 26- Prova visual do Teorema 15	97
Figura 27- Prova visual da identidade 38	98
Figura 28- Visualização lateral da identidade 38	98
Figura 29- Prova visual da identidade 39.	99
Figura 30– Visualização superior da identidade 39.....	100
Figura 31- Prova visual do Teorema 16	101
Figura 32- Prova visual do Teorema de Cassini.....	102

Figura 33- Prova visual da identidade 43	103
Figura 34- Prova visual da identidade 44	104
Figura 35- Prova visual da identidade 45	105
Figura 36- Prova visual da identidade 46	106
Figura 37- Prova visual da identidade 47.	107
Figura 38- Prova visual da identidade 48	108
Figura 39- Prova visual da identidade 49	109
Figura 40- Prova visual da identidade 50	110
Figura 41- Prova visual da identidade 51.	111
Figura 42- Representação de um tabuleiro 1 x n.	112
Figura 43- Representação de um tabuleiro 2 x n	113
Figura 44- Representação de um tabuleiro 3 x n.	115
Figura 45- Caminho 3x3	117
Figura 46- Caminho 3x2 (1ª parte)	118
Figura 47 - Caminho 3x2 (2ª parte)	118
Figura 48- Caminho 3x2 (3ª parte)	119
Figura 49- Caminho 3x1	119
Figura 50- Representação dos números de Padovan	120
Figura 51- Os nove primeiros termos da sequência de Padovan	121
Figura 52- Prova visual do Teorema 21	122
Figura 53- Prova visual do Teorema 22.	123
Figura 54- Prova visual do Teorema 23	124
Figura 55- Prova visual do Teorema 24 (1ª parte).....	125
Figura 56- Prova visual do Teorema 24 (2ª parte).....	126
Figura 57- Prova visual do Teorema 25	127
Figura 58- Prova visual do Teorema 26	128
Figura 59- Prova visual da Identidade 53.....	129
Figura 60- Prova visual da Identidade 54.....	130
Figura 61- Prova visual da Identidade 55.....	130
Figura 62- Prova visual do Teorema 27	131
Figura 63- Prova visual do Teorema 28	132
Figura 64- Prova visual do Identidade 5.....	133
Figura 65- Prova visual do Identidade 57.....	134
Figura 66- Prova visual do Identidade 58.....	134

Figura 67- Prova visual do Identidade 59.....	136
Figura 68 Prova visual do Teorema 30.....	136
Figura 69- Os onze primeiros números de Padovan.....	138
Figura 70- Prova visual da proposição 4.	138
Figura 71- Prova visual do Teorema 31	139
Figura 72- Prova visual do Teorema 32	140
Figura 73- Os doze primeiros termos dos números de Padovan.	142
Figura 74- Prova visual do corolário 9.	143
Figura 75- Prova visual do Teorema 33	144
Figura 76- Prova visual do Teorema 34.	145
Figura 77- Prova visual do Teorema 35.	146
Figura 78- Prova visual do Teorema 36	147
Figura 79- Prova visual do Teorema 37	148
Figura 80- Prova visual do Teorema 38	149
Figura 81– Construção do cubo.....	153
Figura 82– Construção do segundo prisma	154
Figura 83– Construção do terceiro prisma	155
Figura 84– Identidade dos números de Fibonacci	155
Figura 85– Construção de um quadrado.....	158
Figura 86– Termos iniciais da sequência de Lucas	158
Figura 87– Oito primeiros termos da sequência de Lucas.....	159
Figura 88– Representação da identidade de Lucas em uma visualização 3D	160
Figura 89– Termos iniciais da identidade de Candido	161
Figura 90- Generalização da identidade de Candido.....	162
Figura 91– Termo da identidade representada por cubo maior	163
Figura 92 – Outros termos da identidade representadas por cubos menores.....	163
Figura 93– Identidade de Pell (1ª parte)	164
Figura 94-Identidade de Pell (2ª parte).....	165
Figura 95- Ladrilhos $3 \times n$ da sequência de Jacobsthal	166
Figura 96– ladrilhos $2 \times n$ da sequência de Jacobsthal.....	167
Figura 97- Visualização 3D para sequência de Jacobsthal.....	168
Figura 98– Representação 3×1	169
Figura 99– Representação 3×2	169
Figura 100– Representação 3×3	170

Figura 101- Representação geométrica dos números de Padovan	171
Figura 102– Representação geométrica da identidade	172
Figura 103 - Representação geométrica de dois termos consecutivos de Padovan.....	173
Figura 104- Representação geométrica da sequência de Perrin	174
Figura 105– Operações entre áreas de retângulos (1ª parte)	175
Figura 106– Operações entre áreas de retângulos (2ª parte)	176
Figura 107– Operações entre áreas de retângulos (3ª parte)	177
Figura 108- Somatório dos números de Oresme	179
Figura 109– Operações entre áreas (1ª parte).....	180
Figura 110– Operações entre áreas (2ª parte).....	181
Figura 111- Apresentação dos números de Fibonacci.....	187
Figura 112- Fase da ação com estudante E1.....	188
Figura 113- Representação da identidade de Fibonacci em uma visualização 3D.....	189
Figura 114- Fase da formulação do estudante E2.....	190
Figura 115-Validação do estudante E3 (1ª parte).....	191
Figura 116-Validação do estudante E3 (2ª parte).....	191
Figura 117-Validação do estudante E4.....	191
Figura 118- Fase da ação do estudante E1	193
Figura 119- Fase da formulação do estudante E1 (1ª parte).....	194
Figura 120- Fase da formulação do estudante E1 (2ª parte).....	195
Figura 121- Representação da identidade de Lucas em uma visualização 3D.....	195
Figura 122- Fase da formulação do estudante E2.....	196
Figura 123- Generalização da identidade de Lucas.....	197
Figura 124- Sequência de Pell.....	198
Figura 125- Identidade de Candidos.....	198
Figura 126- Fase da formulação do estudante E3.....	199
Figura 127- Fase da Formulação do estudante E1. (1ª parte).....	199
Figura 128- Fase da Formulação do estudante E1 (2ª parte).....	200
Figura 129- Fase da validação do estudante E3	200
Figura 130- Identidade de Pell em uma visualização 3D. (1ª parte)	201
Figura 131- Fase da formulação do estudante E3.....	201
Figura 132- Identidade de Pell em uma visualização 3D (2ª parte).	202
Figura 133- Fase da formulação do estudante E3.....	202
Figura 134- Fase da validação do estudante E3	203

Figura 135- Fase da formulação do estudante E2.....	204
Figura 136- Fase da ação do estudante E3	206
Figura 137- Fase da formulação do estudante E1.....	207
Figura 138- Representação 3x6 incompleta	207
Figura 139- Fase da validação do estudante E3	208
Figura 140-Representação 3x6 completa	208
Figura 141 -Representação 3x7	209
Figura 142– Fase da ação do estudante E3.....	210
Figura 143- Fase da Formulação do estudante E4.....	211
Figura 144- Fase da Formulação do estudante E1.....	211
Figura 145- Fase da validação do estudante E1 (1ª parte).....	212
Figura 146- Fase da validação do estudante E1 (2ª parte).....	212
Figura 147- Fase de institucionalização	213
Figura 148- Fase da ação do estudante E3	214
Figura 149– Razão entre os termos da sequência de Perrin	215
Figura 150- Fase da formulação do estudante E3.....	216
Figura 151- Fase da validação do estudante E3	217
Figura 152- fase da ação do estudante E3	218
Figura 153- Fase da formulação do estudante E2.....	219
Figura 154- Fase da formulação do estudante E3.....	219
Figura 155- Fase da validação do estudante E1	220
figura 156- Fase da validação do estudante E3	221
Figura 157- Fase da ação do estudante E1	222
Figura 158- Fase da ação do estudante E4	223
Figura 159- Fase da formulação do estudante E3.....	224
Figura 160- Fase de validação do estudante E1	225
Figura 161- Fase da validação do estudante E3	226

LISTA DE TABELAS

Tabela 1-Termos iniciais da sequência de Lucas	55
Tabela 2– Valores para t_n para $n \geq 0$	64
Tabela 3 – Valores para $N_{n,k}$	116

LISTA DE SIGLAS

DM Didática da Matemática

ED Engenharia Didática

HM História da Matemática

IFCE Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará

TCLE Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

TSD Teoria das Situações Didáticas

LISTA DE SÍMBOLOS

F – Números de Fibonacci

L – Números de Lucas

P – Números de Pell

O – Números de Oresme

M – Números de Mersenne

J – Números de Jacobsthal

N – Números de Narayana

$\mathbb{N}$ - Números Naturais

Pa - Números de Padovan

Pe – Números de Perrin

Le – Números de Leonardo

$\mathbb{Z}$ – Números inteiros

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	23
1.1 OBJETIVOS DA PESQUISA	27
1.1.1 Objetivo Geral.....	28
1.1.2 Objetivos específicos	28
2 REFERENCIAL METODOLOGICO E TEÓRICO.....	30
2.1 ENGENHARIA DIDÁTICA.....	30
2.1.1 Análises preliminares.....	32
2.1.2 Análise a priori e concepção	33
2.1.3 Experimentação.....	35
2.1.4 Contrato Didático e Transposição Didática	35
2.1.5 Análise a posteriori e Validação	38
2.2 TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS (TSD).....	39
2.3 VISUALIZAÇÕES NO GEOGEBRA.....	43
3 CAMPO EPISTÊMICO - MATEMÁTICO: SEQUÊNCIAS RECURSIVAS LINEARES E SUAS REPRESENTAÇÕES	46
3.1 SEQUÊNCIAS RECURSIVAS LINEARES E SUAS REPRESENTAÇÕES	46
3.1.1 Sequência recursivas	46
3.1.2 Forma geral.....	47
3.2 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI.....	47
3.3 SEQUÊNCIA DE LUCAS	54
3.4 SEQUÊNCIA DE PELL	60
3.5 SEQUÊNCIA DE ORESME.....	67
3.6 SEQUÊNCIA DE MERSENNE.....	71
3.7 SEQUÊNCIA DE JACOBSTHAL	74
3.8 SEQUÊNCIA DE NARAYANA	78
3.9 SEQUÊNCIA DE PADOVAN.....	80
3.10 SEQUÊNCIA DE PERRIN.....	83
3.11 SEQUÊNCIA DE LEONARDO	85
3.12 RELAÇÃO DAS SEQUÊNCIAS DE RECORRÊNCIA COM O USO DO GEOGEBRA.....	87
3.12.1 Visualizações das identidades de Fibonacci na forma geométrica	87
3.12.2 Visualizações das identidades de Lucas na forma geométrica .	100
3.12.3 Visualizações das identidades de Pell na forma geométrica.....	105
3.12.4 Visualizações das identidades de Oresme na forma geométrica	109

3.12.5	<i>Visualizações das identidades de Mersenne na forma geométrica</i>	110
3.12.6	<i>Visualizações das identidades de Jacobsthal na forma geométrica</i>	111
3.12.7	<i>Visualizações das identidades de Narayana na forma geométrica</i>	116
3.12.8	<i>Visualizações das identidades de Padovan na forma geométrica</i>	120
3.12.9	<i>Visualizações das identidades de Perrin na forma geométrica</i>	145
3.12.10	<i>Visualizações das identidades de Leonardo na forma geométrica</i>	148
4	UMA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA: O ESTUDO DAS SEQUÊNCIAS RECURSIVAS LINEARES NO CURSO DE LICENCIATURA.....	150
4.1.	CONCEPÇÕES DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS	150
4.2.	ANÁLISE A PRIORI DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS	152
4.2.1	<i>Situação didática 1: encontrar a identidade relacionada aos números de Fibonacci.....</i>	<i>152</i>
4.2.2	<i>Situação didática 2: Identificar a semelhança entre a sequência de Lucas e a de Fibonacci por meio das identidades.....</i>	<i>157</i>
4.2.3	<i>Situação didática 3: associar as representações geométricas aos números de Pell</i>	<i>161</i>
4.2.4	<i>Situação didática 4: visualização em 3D por meio das identidades de Jacobsthal</i>	<i>166</i>
4.2.5	<i>Situação didática 5: representar geometricamente a identidade de Narayana</i>	<i>168</i>
4.2.6	<i>Situação didática 6: encontrar a relação entre os números de Padovan com triângulos equiláteros</i>	<i>170</i>
4.2.7	<i>Situação didática 7: encontrar a relação entre os números de Perrin com os números de Padovan.....</i>	<i>173</i>
4.2.8	<i>Situação didática 8: encontrar uma identidade de Mersenne por meio de uma visualização bidimensional</i>	<i>175</i>
4.2.9	<i>Situação didática 9: encontrar a identidade de Oresme por meio de uma visualização bidimensional.....</i>	<i>178</i>
4.2.10	<i>Situação didática 10: encontrar a identidade de Leonardo por meio de uma visualização bidimensional</i>	<i>179</i>
4.3	EXPERIMENTAÇÃO	182
5	DISCUSSÃO DOS DADOS	186
5.1	ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO	186

<i>5.1.1 Validação da Situação didática 1</i>	187
<i>5.1.2 Validação da situação didática 2</i>	192
<i>5.1.3 Validação da situação didática 3</i>	197
<i>5.1.4 Validação da situação didática 4</i>	203
<i>5.1.5 Validação da situação didática 5</i>	205
<i>5.1.6 Validação da situação didática 6</i>	209
<i>5.1.7 Validação da situação didática 7</i>	213
<i>5.1.8 Validação da situação didática 8</i>	216
<i>5.1.9 Validação da situação didática 9</i>	218
<i>5.1.10 Validação da situação didática 10</i>	222
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	228
REFERÊNCIAS	231
APÊNDICE	239
APÊNDICE A –RELAÇÃO ENTRE A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E AS DEMAIS	240
APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	241
ANEXOS	245
ANEXO A – MATRIZ CURRICULAR DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DO INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ (IFCE)	246
ANEXO B – EMENTA DA DISCIPLINA DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA	248
ANEXO C – PARECER DO COMITÊ DE ÉTICA DA PESQUISA ...	250

1 INTRODUÇÃO

Inúmeros elementos, como a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade para o ensino da Matemática, são considerados objetos de diversos estudos que compõem a Didática da Matemática. Assim, muitos caminhos são traçados pelos pesquisadores com o propósito de promover o ensino da Matemática, porém em 1970 destaca-se a Didática da Matemática, que tem origem francesa, devido ao marco histórico sobre a reforma da Matemática Moderna (ALMOULOU, 2018). Posto isso, Alves (2016), reforça que diante desse contexto, existe uma ideia de mudanças no modelo de ensino francês, causando um movimento realizado por estudiosos que trabalhavam dentro das universidades.

Segundo Almouloud (2018), também afirma que é essencial a criação de mecanismo para o ensino da Matemática com o amparo das teorias de aprendizagens, pois a Matemática requer um saber científico, por isso, fez-se necessário um estudo sobre esses mecanismos. Diante da premissa, surgiu um debate sobre a Didática da Matemática, no qual a principal preocupação deixou de ser a aprendizagem, e trouxe outros recursos considerados indispensáveis na educação como: currículo, formação de professores, materiais didáticos entre outros.

Nesse sentido, ainda existe uma necessidade de aperfeiçoar essas ideias e de criar mecanismos para o aprimoramento do ensino de Matemática, pois sempre acontecerão debates e estudos com a finalidade de acrescentar elementos que possam oferecer subsídios para possíveis estudos em torno do ensino.

Nessa perspectiva, os assuntos matemáticos foram utilizados nesse trabalho, como subsídio para desenvolver uma prática de ensino, sendo amparado pelos pressupostos da Didática da Matemática Francesa, bem como a História da Matemática (HM), junto com outros conteúdos específicos, como o estudo de sequências, utilização de *software* para ajudar na compreensão e visualização no desenvolvimento dos cálculos propostos.

O estudo das sequências numéricas, na HM, trouxe várias possibilidades para serem desenvolvidas no ensino de Matemática, devido a uma série de descobertas, como as propriedades bidimensionais e tridimensionais das sequências recursivas lineares, unidos à trajetória de seus descobridores dentro da Matemática. Dessa forma, esses estudos admitiram a aplicação de situações didáticas no ensino, trazendo uma abordagem cognitiva, epistemológica e didática em torno do assunto.

Nessa perspectiva, o estudo amparou-se nos pressupostos da vertente francesa de investigação sobre a DM, em que elaboramos uma proposta de Engenharia Didática (ED) de primeira geração, de Artigue (1995) para o ensino das sequências recursivas lineares, que consiste em associar a apresentação das sequências recorrentes em uma visualização geométrica nas formas bidimensionais e tridimensionais. E ainda, sendo utilizado a Teoria das Situações Didáticas (TSD), de Brousseau (1976), como apoio a análise de seções de ensino.

Por isso, foi apresentado o percurso inicial traçado para se realizar esta pesquisa, pois foram realizadas análises prévias fundamentadas na ED, em seguida, a problemática e a justificativa da pesquisa que foram discutidas. E, finalmente, a questão norteadora e os objetivos gerais e específicos definidos.

De acordo com Almouloud e Silva (2012), as análises prévias desta pesquisa foram realizadas com base na ED. Assim, esse processo foi organizado em duas etapas. Na primeira, foi realizada uma revisão bibliográfica sobre a metodologia de pesquisa, a teoria de ensino e as sequências recursivas lineares com suas definições, e por conseguinte, as identidades nas formas geométricas, utilizando o *software* GeoGebra. Na outra etapa, foi feita uma descrição da abordagem didática e cognitiva das visualizações das identidades das sequências de Fibonacci, Lucas, Pell, Oresme, Mersenne, Jacobsthal, Narayana, Padovan, Perrin e Leonardo em sala de aula e suas aplicações, relacionando-as ao contexto em que foi aplicado e desenvolvida a pesquisa.

À priori, realizou-se a construção do referencial teórico referente ao objeto matemático, ED e TSD, para serem estudados posteriormente, com o objetivo de definir a problemática da pesquisa e, assim, pautar os seus objetivos.

Dessarte, em relação a ED, dentre os materiais que foram consultados, destacaram-se os livros de Artigue (1995) e Pais (2015), como fontes principais em relação a esse assunto, pois são os vanguardistas desse tema, bem como os artigos de Alves e Dias (2018) que trouxeram um estudo sobre as duas primeiras fases da ED. As dissertações de Oliveira (2018) e Vieira (2020) abordam todas as fases da ED, empregadas para o ensino de Fibonacci e Padovan, respectivamente. Os artigos de Almouloud e Silva (2012), que define a evolução da noção de ED. Também foram analisados os trabalhos de Vieira e Alves (2020) e Alves (2016). Assim, realizada essa revisão sobre a ED, iniciou-se o estudo sobre a TSD.

A pesquisa estabeleceu continuidade ao estudo sobre a ED para entender melhor a fase da experimentação, em que se explorou a TSD. Dessa forma, foram consultadas algumas obras que abordam essa teoria. Destacam-se como principais preceptores Brousseau (1997),

Brousseau (1986) e Almouloud (2007), cujos trabalhos abordam as fases da TSD, assim como a dissertação de Oliveira (2018), Vieira (2020) e Barros (2021), por serem literaturas brasileiras facilitaram a compreensão, além disso contribuíram para investigação da elaboração de situações didáticas. Assim, foi iniciado o estudo em torno dos conceitos matemáticos.

No primeiro momento, foram pesquisadas definições, relações e propriedades matemáticas inerentes à gênese e ao processo histórico-evolutivo para poder entender e descrever as sequências de Fibonacci, Lucas, Pell, Oresme, Mersenne, Jacobsthal, Narayana, Padovan, Perrin e Leonardo, e como essas são sequências recorrentes, lineares e aritméticas, precisavam ser descritas de formas gerais, bem como suas propriedades. Foram consultadas as dissertações de Silva (2017), Oliveira (2018), Vieira (2020), Manguiera (2022), que tratam sobre essas sequências recorrentes.

Para compreender a geometria contida nas sequências recursivas lineares, foi fundamental um estudo minucioso sobre os artigos Oliveira e Alves (2019), Barik (2013) e Vieira e Alves (2020), pois esses autores já realizaram pesquisas para a generalização dessas sequências, bem como sobre a prova visual das identidades dessas sequências, para isso foram consultadas várias obras e artigos, em destaque o livro de Nelsen (2015), Alsina e Nelsen (2006), e o artigo de Edgar e Nacin (2021) que abordaram as provas visuais das identidades de Fibonacci, Lucas e Padovan de figuras geométricas bidimensionais. Já o artigo Nagy, Cowell e Beiu (2019) e a dissertação de Vieira (2020), mostraram os estudos sobre a visualização tridimensional sobre as sequências de Fibonacci e de Padovan.

Por fim, para construções das figuras geométricas dessas sequências utilizou-se o *software* GeoGebra como recurso didático. Assim, foram analisados alguns artigos e dissertação para embasar o estudo e a escolha desse *software* que relatou a importância de ferramentas computacionais atreladas ao ensino. Pode-se destacar o artigo de Ribeiro e Souza (2016) e a dissertação de Germano (2016). Logo, descreveram-se como abordar as sequências de Fibonacci, Lucas, Pell, Oresme, Mersenne, Jacobsthal, Narayana, Padovan, Perrin e Leonardo em sala de aula e suas aplicações.

Dessa forma, foi realizado um estudo na Matriz Curricular do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Ceará (IFCE), *campus* Fortaleza, (ver Anexo A), pois foi o local onde houve a aplicação da pesquisa, com o intuito de investigar qual a disciplina que poderia ser desenvolvida as situações didáticas propostas desse assunto.

Sendo esse curso foi escolhido por oferecer formação inicial para professores de Matemática e após a análise da grade curricular dele, no qual, constatou-se que a ementa da disciplina de História da Matemática (ver Anexo B) é obrigatória na matriz curricular e abrange os seguintes assuntos: o conceito de número e os sistemas de numeração; o processo histórico-evolutivo da Aritmética, Álgebra e Geometria; a biografia dos matemáticos que contribuíram significativamente para esse processo e a HM no Brasil.

Dessarte, foi escolhida a disciplina da HM, tendo em vista que nela, além de abordar o contexto histórico sobre vários conteúdos matemáticos, também explora o avanço histórico da aritmética e da geometria - fatores importantes para o estudo dessas sequências recursivas lineares. Isso torna-se base para a compreensão do desenvolvimento dimensional, sendo essencial nas demonstrações para diversas explicações previstas.

A maioria dos livros da HM traz uma abordagem sobre a sequência de Fibonacci pela sua relação com o número de ouro e suas visualizações na natureza. Todavia, as demais sequências recursivas lineares são pouco exploradas, acarretando uma escassez de trabalhos acadêmicos em torno dessas sequências.

Nesse sentido, os livros de HM não trazem uma evolução histórica das sequências recursivas lineares, porém ao longo dos anos surgiu um crescimento de descobertas dessas sequências de tal forma que as construções de figuras geométricas em relação as identidades são ainda bem escassas (VIEIRA; ALVES, 2020). Essas descrições permitiram fazer uma ligação da problemática e a justificativa da pesquisa, fazendo as apresentações devidas.

A problemática desta pesquisa partiu do fato de que os livros de HM, disponibilizados na biblioteca da instituição, apresentam poucas discussões sobre as identidades matemáticas e as relações vindas apenas da sequência de Fibonacci, uma vez que é a sequência recorrente mais conhecida, conseqüentemente, não exploram as definições e propriedades das outras sequências existentes e suas representações geométricas. E ainda, não existem muitas discussões sobre as visualizações bidimensionais, tampouco as tridimensionais dessas sequências, sendo discutida, a priori, na literatura da Matemática Pura, não havendo uma preocupação pedagógica, assim, não compondo a matriz curricular do curso de Licenciatura em Matemática.

Em suma, foram encontrados durante a revisão bibliográfica, elencadas anteriormente, sobre as sequências de Fibonacci, Lucas, Pell, Oresme, Mersenne, Jacobsthal, Narayana, Padovan, Perrin e Leonardo, relações que encaminham para elementos de forma cognitiva e didática. Dessa maneira, pretendeu-se apresentar algumas opções de situações

didáticas com aspectos matemáticos e históricos durante as aulas da disciplina da HM que, por sua vez, são essenciais para o ensino de Matemática.

Desse modo, abordou-se os aspectos epistêmico- matemático através das relações entre as sequências, seguindo os padrões de semelhança e construindo as figuras geométricas. Já no aspecto didático, destacou-se que as sequências podem ser aplicadas em qualquer nível de ensino, trazendo situações que podem ser utilizadas e adaptadas, oportunizando caminhos pedagógicos para os professores de Matemática.

Dessa forma, teve como justificativa da pesquisa transformar essas sequências recorrentes lineares, em um tópico a ser ensinado no curso de Licenciatura de Matemática. Segundo Alves (2016a) ressalta que desde a década de 1980 especialistas, pesquisadores, educadores matemáticos tentam compreender os "fenômenos "relacionados com o ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos que através de teorias de ensino relacionadas com a transposição didática. Nesse contexto, destacou-se a ED à para fundamentar esta atividade investigativa, buscando a complementaridade na TSD.

Com isso, pode-se nortear a pesquisa através do seguinte questionamento: *como a Teoria das Situações pode proporcionar um modelo de construção para o ensino das sequências recursivas lineares, que permitam uma transposição do conteúdo matemático, por meio da Engenharia Didática?*

Para responder ao questionamento, construíram-se alguns objetivos que permitiram o desenvolvimento da pesquisa. Assim, à medida que as intenções foram sendo resolvidas, as situações didáticas voltadas para o ensino foram elaboradas com propósito de melhorar a compreensão do assunto proposto. Baseado nessas informações, pretendeu-se unir os dois aspectos, cognitivo e didático, para trabalhar a transposição didática das sequências recursivas lineares, estimulando os estudantes a buscarem soluções por meio do raciocínio lógico-dedutivo, utilizando as fases da TSD.

Neste trabalho apresenta-se uma abordagem didática matemática aos professores de Matemática em formação inicial, oferecendo-lhes subsídios necessários para que ocorra uma melhoria nas práticas em sala de aula. Os objetivos gerais e específicos desta pesquisa destinaram-se a relacionar os elementos de ordem epistemológica, cognitiva e didática com base nos pressupostos da ED. Com isso, na próxima subseção será apresentado o objetivo geral desta pesquisa.

1.1 Objetivos da pesquisa

Na ED os objetivos dessa pesquisa devem ter um confronto entre as fases de análise *a priori* e *a posteriori*, de tal forma que as observações dos objetivos definidos *a priori* sejam reproduzidos com regularidade dos fenômenos didáticos identificados (ALMOULOU; COUTINHO, 2008).

O presente trabalho pretendeu descrever seus objetivos com base nas fases da ED, com o propósito de analisar as fases que antecedem e decorrem a aplicação da pesquisa, comparando os resultados para compreensão das estimativas estabelecidas pela metodologia pesquisa e a teoria de ensino. Assim, foram estabelecidos o seguinte objetivo geral e específicos.

1.1.1 Objetivo Geral

Analisar as contribuições da Teoria das Situações didáticas para o ensino das aplicações de visualização bidimensional e/ou tridimensional das sequências recursivas lineares, mediante a Engenharia Didática por meio do *software* GeoGebra com os estudantes da licenciatura em Matemática.

1.1.2 Objetivos específicos

1. Realizar um estudo histórico, teórico e metodológico de ensino sobre as sequências recursivas lineares;
2. Investigar as relações de recorrência, forma geral e suas identidades das sequências recursivas lineares;
3. Relacionar, em situações didáticas, as identidades das sequências recursivas lineares na forma geométrica com a sua visualização por meio do *software* GeoGebra.

Diante desses objetivos, a pesquisa foi desenvolvida para que seus resultados fossem comparados e avaliados, e que o trabalho adentrasse às propostas da ED e da TSD, sendo apresentado mais adiante com o referencial teórico numa perspectiva das teorias estudadas com uma abordagem sobre as sequências recursivas lineares.

A pesquisa foi dividida em sete seções que trouxeram um delineamento para sua concepção, como descritos a seguir.

Na seção 1 estão contidos a introdução, análises prévias, revisão bibliográfica, abordagem didática das sequências recorrentes, problemática, justificativa da pesquisa, objetivos gerais e específicos.

Na seção 2 foi realizado o estudo sobre o referencial teórico e metodológico da pesquisa, na qual, na primeira subseção explorou-se a Engenharia Didática. Na segunda subseção apontaram-se a Teoria das Situações Didáticas, Contrato Didático e Transposição Didática. Na terceira subseção explicou-se a importância da visualização utilizando o GeoGebra.

As análises preliminares encontram-se na seção 3, na qual trouxe na primeira subseção o conceito de sequências recursivas e lineares, nas subseções seguintes, o campo matemático sobre o estudo das identidades das sequências de Fibonacci, Lucas, Pell, Oresme, Mersenne, Jacobsthal, Narayana, Padovan, Perrin, Leonardo e suas representações, bem como a relação das sequências de recorrência com o uso do *software* GeoGebra.

A seção 4 foi destinada para análise *a priori* e experimentação, apresentando a concepção das situações didáticas desenvolvidas neste trabalho, bem como foi feita uma descrição do *locus* e dos sujeitos da pesquisa, além dos procedimentos para a coleta de dados.

A Análise *a posteriori* e validação do estudo, foram realizadas na seção 5, na qual ocorreu a análise das situações didáticas vivenciadas durante os encontros presenciais, buscando confrontar os resultados obtidos com a análise *a priori*.

Destarte, na seção 6 foram as considerações finais, discorrendo uma síntese da pesquisa, os dados mais relevantes do seu desenvolvimento, uma prospecção para pesquisas futuras na área e as referências.

Por fim, esta pesquisa teve um grande significado, pois durante a graduação essas sequências não foram exploradas, bem como o GeoGebra. Dessa forma, foi um desafio a ser superado, especialmente o fato de trabalhar essas identidades com o aporte do *software*. O estudo trouxe muitos conhecimentos como as identidades propostas, bem como as dialéticas da TSD, enriquecendo as práticas de ensino que podem ser aplicadas em qualquer nível escolar dentro de suas respectivas adaptações.

2 REFERENCIAL METODOLOGICO E TEÓRICO

Os estudos sobre a DM tiveram desenvolvimento na França no início da década de 1970, em uma conjectura histórica, em que estava transcorrendo a reforma da Matemática Moderna, bem como outros fatos marcantes como a criação do IREM (*Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques*), o Instituto de Pesquisa sobre o Ensino da Matemática (ALMOULOU, 2018), foram essenciais para estabelecer um campo de conhecimento de estudos sobre a DM.

Nesse momento, a preocupação foi investigar os impasses encontrados no ensino de Matemática em razão das condições próprias atreladas ao saber matemático (ALMOULOU, 2007). Artigue (1995), relata que nesse processo os aspectos epistemológicos, didáticos e cognitivos são sempre levados em consideração.

De acordo com Pais (2015) o estudo da DM está relacionado às noções de conceitos, ou seja, compreende-se problemas que são indicados na construção epistemológicas dos conceitos matemáticos e didáticos, quando são vistos no plano pedagógicos. Ademais:

A didática da Matemática é uma das tendências da grande área da educação matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica (PAIS, 2015, p. 11).

Assim, nas próximas seções, apresenta-se à ED, como metodologia de pesquisa, com correlação à TSD, a teoria de ensino, com contribuição dos conceitos essenciais dentro da DM, trazendo algumas informações históricas e a importância do ensino. Com o intuito de compreender como esse processo pode se modificar ou ter intervenção nas práticas planejadas pelo professor dentro da sala de aula.

2.1 Engenharia Didática

Inicia-se essa seção com um relato histórico sobre o surgimento da ED nos anos de 1980 no contexto da DM. Pais (2015) explica que a ED se refere ao trabalho de um pesquisador, comparando-se ao trabalho de um engenheiro quanto aos pontos de concepção, elaboração e execução de um projeto. Esse percurso assemelha-se a um pesquisador atuante na área da didática, pois precisa de um modelo teórico para execução do seu projeto.

A ED é uma metodologia que tem uma proposta de experimentação, com o foco em situações de ensino, destaque na sala de aula, na qual são realizadas situações didáticas que

puderam ser observadas e analisadas durante o processo de ensino e de aprendizagem (ARTIGUE,1995). Dessa maneira, essa metodologia permite que o professor, ao mesmo tempo, pesquisador, tenha suas produções utilizadas “em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado objeto matemático e, em particular, a elaboração de gênesis artificiais para um dado conceito” (ALMOULOUD,2007, p.171).

Alves (2016b, p.70) defende que a pesquisa, fundamentada na ED, pode estar dividida em duas categorias: a micro engenharia - estuda especificamente a complexidade de eventos associados em sala de aula, e a macro engenharia - investiga as dificuldades de ordem metodológica indispensável ao processo de ensino e de aprendizagem. Assim, percebeu-se que a Engenharia Didática foi criada para atender duas questões:

a) das relações entre pesquisa e ação no sistema de ensino; b) do lugar reservado para as realizações didáticas entre as metodologias de pesquisa. É uma expressão com duplo sentido. Designa produções para o ensino, derivadas de resultados de pesquisa, e também designa uma específica metodologia de pesquisa baseada em experiências de sala de aula. Nessa linha, prática de ensino é articulada com prática de investigação. A teoria da Engenharia Didática pode ser vista como referencial para o desenvolvimento de produtos para o ensino, gerados na junção do conhecimento prático com o conhecimento teórico. (CARNEIRO, 2005, p. 3)

Segundo Pais (2015, p.101) a ED é dividida em quatro fases: análises preliminares, concepção e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e validação. Ressalta-se que essa pesquisa teve uma perspectiva de experimentação na TSD, com o propósito de instigar o raciocínio intuitivo dos estudantes levando a uma conclusão durante a construção de conceitos e relações matemáticas.

Durante a fase da análise *a priori*, existe a possibilidade de antecipar o comportamento dos estudantes durante a situação didática, ou seja, na experimentação (POMMER,2013).

Sabe-se que as pesquisas têm a fase da experimentação. Pommer (2013) orienta que as questões aplicadas em sala de aula devem ser situações-problema e oriente o processo de aprendizagem, permitindo que o professor estimule os estudantes a encontrar estratégias de soluções tendo como base seus conhecimentos prévios.

Para que isso aconteça, é necessário escolher variáveis didáticas pertinentes, que conduza o aluno durante a elaboração das possíveis estratégias de solução. Dessa forma, a análise *a posteriori* é feita a comparação entre os objetivos determinados e a prática dos estudantes em relação à situação de ensino com o intuito de validar as hipóteses didáticas definidas.

Conforme Artigue (1995) essa metodologia organizou o caminho da pesquisa centrada no ensino de Matemática, em que se pretendeu estudar a articulação entre teoria e

a prática sem diminuir seus significados. A seguir, foram analisados os aspectos de ordem epistemológica, didática e cognitiva, com o propósito de compreender a relação entre as etapas da ED.

2.1.1 Análises preliminares

Nas análises preliminares foi realizado um levantamento bibliográfico sobre as sequências recursivas lineares e uma “análise epistemológica do ensino atual e seus efeitos, das concepções dos alunos, dificuldades e obstáculos e análise do campo das restrições e exigências no qual vai se situar a efetiva realização didática” (ALMOULOU; SILVA, 2012, p.26).

Esta pesquisa encontra-se essa análise, sendo muito importante para se compreender melhor suas escolhas didáticas realizadas na análise *a priori*. Dessa forma, é importante realizar uma descrição epistemológica, didática e cognitiva ao objeto de pesquisa, baseando-se em um referencial teórico. Por isso, ressalta-se:

Nesta análise preliminar é feita uma revisão bibliográfica envolvendo as condições e contextos presentes nos vários níveis de produção didática e no ambiente onde ocorrerá a pesquisa, assim como uma análise geral quanto aos aspectos histórico-epistemológicos dos assuntos do ensino a serem trabalhados e dos efeitos por eles provocados, da concepção, das dificuldades e obstáculos encontrados pelos alunos dentro deste contexto de ensino (POMMER, 2013, p. 23).

Com efeito, esses obstáculos são definidos partindo de uma antecipação e idealização do processo, em que os estudantes têm dificuldades em realizar a atender o propósito na resolução da situação-problema (OLIVEIRA, 2018). Em consequência, esses obstáculos, de forma epistemológica apresentam uma importância em uma pesquisa voltada para o ensino de Matemática.

Diante do exposto, é necessário compreender a epistemologia como uma teoria de conhecimento, que engloba um estudo sobre a composição dos conhecimentos científicos, considerando sua causa histórica, sua organização mental para cada sujeito, bem como o comportamento nas demais fases durante a construção do saber científico (ALMOULOU, 2007, p.149).

Os conhecimentos matemáticos são estudados epistemologicamente com o intuito de compreender o contexto histórico, priorizando os conceitos matemáticos. Segundo Almouloud (2007) essa análise epistemológica, apoia-se no desenvolvimento histórico do conceito.

Assim, permite identificar as diferentes concepções sobre um determinado objeto, como também permite agrupá-las em classes pertinentes para que se possa fazer uma análise didática. Esse tipo de análise pode auxiliar o pesquisador em didática da matemática a entender melhor as relações entre os objetos matemáticos e controlar as variáveis didáticas relacionadas com o processo de ensino e aprendizagem de tais objetos (ALMOULOU, 2007, p. 156).

No contexto da DM, a “análise epistemológica tem o propósito de investigar a origem do desenvolvimento da Matemática, enquanto conhecimento científico, permitindo perceber a existência da diferença entre o saber científico e o saber que se pretende ensinar” (OLIVEIRA, 2018, p.25). Já no aspecto didático, foram analisadas as condições de desenvolvimento do ensino. Logo, segundo Almouloud (2014), esse processo tem que ser levado em consideração, pois podem influenciar no conhecimento repassado do professor para o estudante.

Diante da premissa, deve-se levar em consideração o entendimento do estudante, ou seja, os conhecimentos prévios, pois esses vão determinar o caminho que o aluno irá percorrer para desenvolver o conteúdo (ALMOULOU, 2014). Isso foi essencial para que o tema fosse bem definido, lembrando que esses aspectos preexistentes, podem ser considerados como dificuldades dos estudantes em relação as sequências recursivas lineares, que devem ser identificadas também como aspectos cognitivos.

As análises preliminares na pesquisa foram realizadas através de um levantamento bibliográfico na seção 3, sobre o contexto histórico dos vanguardistas das sequências recursivas lineares, bem como um estudo teórico sobre as suas respectivas identidades. Dessa maneira, concluiu-se essa fase de investigação sobre o conteúdo estudado dando continuidade à análise das fases posteriores da ED. A seguir, explorou-se a fase da análise *a priori* e concepção.

2.1.2 Análise *a priori* e concepção

Nessa fase, o professor busca o planejamento sobre o conteúdo definido na fase anterior. Nesse momento, foram decididas quais as variáveis que compuseram o sistema de ensino e que são pertinentes numa situação didática. Artigue (1998) define como as variáveis macro didáticas ou globais - essa faz parte da organização geral da ED e as variáveis micro didáticas ou locais - relativas à organização de uma fase específica da engenharia.

Esses dois tipos de variáveis podem ser de ordem geral ou dependente do conteúdo matemático estudado e suas análises serão realizadas em três dimensões: a dimensão epistemológica (associada às características do saber), a dimensão cognitiva (associada às dimensões cognitivas dos alunos sujeitos da

aprendizagem) e dimensão didática (associada às características do sistema de ensino, no qual os sujeitos estão inseridos). O objetivo de uma análise *a priori* é determinar como as escolhas efetuadas (as variáveis que queremos assumir como pertinentes) permitem controlar os comportamentos dos alunos e explicar seu sentido (ALMOULOU & COUTINHO, 2008, p. 67).

Logo, o propósito de uma análise, *a priori*, é buscar recurso para estabelecer as possíveis escolhas definidas futuramente, ou seja, quais as variáveis que serão escolhidas, de tal forma, que possam ser manipuladas para escolher o resultado, fazendo a explicação dos mesmos. Dessa maneira, os autores expõem o que se recomenda na análise *a priori*:

1) Descrever as escolhas das variáveis locais e as características da situação didática desenvolvida. 2) Analisar a importância dessa situação para o aluno e, em particular, em função das possibilidades de ações e escolhas para construção de estratégias, tomadas de decisões, controle e validação que o aluno terá. As ações do aluno são vistas no funcionamento quase isolado do professor, que, sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagem; 3) Prever comportamentos possíveis e tentar mostrar como a análise feita permite controlar seu sentido, assegurando que os comportamentos esperados, se e quando eles intervêm, resultam do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem (ALMOULOU & COUTINHO, 2008, p. 67).

Nessa perspectiva, para que esse controle se realizasse de fato, foi preciso basear-se nas suposições que foram validadas posteriormente (ARTIGUE, 1998). Essas hipóteses constatarem-se na última fase da ED, ou seja, a análise *a priori* foi confrontada e validada pela análise *a posteriori*.

Essa fase, por sua vez, incluiu uma parte descritiva e preditiva, ambas focadas em característica de uma situação didática (ARTIGUE, 1998). Assim, uma situação didática é aquela que produz ao aluno um discernimento de padrões que serão utilizados para resolver uma situação didática (BARROS, 2021).

Ademais, nessa fase o professor já deve ter compreendido a necessidade de transformar o conhecimento científico em um conteúdo a ser ensinado, elaborando hipóteses e situação-problema a serem definidas. Segundo Almouloud (2007) em questões objetivas ou subjetivas, na qual a sua função é implícita, e durante o processo, essa função tornou-se explícita de conceitos matemáticos.

Essas situações-problema devem permitir ao aluno investigar e distinguir caminhos para resolver problemas, adquirir novos conhecimentos/saberes e estratégias de resolução. Essas situações-problema devem auxiliar o aluno na construção de conhecimentos e saberes, e no desenvolvimento de habilidades, como, por exemplo, saber ler, interpretar e utilizar representação matemática em demonstrações de propriedades e teoremas etc. (ALMOULOU, 2016, p.113).

Dessa maneira, Artigue (1988) relata que essa fase é de controle dentro ED, permitindo esboçar as necessidades dos estudantes de acordo com as situações criadas previamente, levando em consideração ao público-alvo dessa pesquisa. Nesse trabalho, a análise, *a priori*, foi realizada a concepção das situações didática por meio do *software* GeoGebra, com o amparo da TSD. A seguir, a aplicação foi estabelecida na fase da experimentação - terceira fase da ED, descrita na próxima seção.

2.1.3 Experimentação

Essa fase visou a aplicação da situação-problema com a perspectiva da TSD para que ocorresse a situação didática. Assim, para que isso acontecesse, estabeleceu-se um contrato didático, ou seja, o ato de estimular o estudante a participar do processo de ensino, resolvendo a situação-problema proposta de acordo com os objetivos da pesquisa.

Dessa forma, é importante destacar que durante a coleta, pode-se utilizar diversos instrumentos, tais como: registros fotográficos, gravações de áudios e vídeos, relatórios de aulas, produções dos estudantes, entre outros recursos. Assim:

Durante a experimentação, coletamos e organizamos um *corpus* de pesquisa variado, composto por produção dos alunos, registro de perguntas, dúvidas e erros constatados durante o acompanhamento de suas ações e diários de classe dos ministrantes. A análise desse material é essencial para a etapa da validação (CARNEIRO, 2005, p. 105).

Diante das premissas da DM, o estudante precisa assumir um compromisso de se envolver ativamente com conhecimento durante as fases da TSD (ALMOULOU,2007). Por outro lado, o professor tem a função de institucionalizar o saber, pois “ele deve determinar a forma e o conteúdo do saber para o qual ele quer dá um estatuto oficial, levando em conta os efeitos da transposição didática” (OLIVEIRA,2018, p.36). Desse modo, na próxima seção, foram estudadas as noções de contrato didático e transposição didática.

2.1.4 Contrato Didático e Transposição Didática

Nesse tópico, abordou-se os temas propostos com o intuito de complementar os aspectos epistemológico, metodológico e cognitivo, mencionados anteriormente numa visão da DM.

A respeito do contrato didático, deve-se conhecer como uma “uma relação que determina – explicitamente em pequena parte, mas sobretudo implicitamente – aquilo que cada parceiro, professor e aluno, têm a responsabilidade de gerir e pelo qual será, de uma

maneira ou de outra, responsável perante o outro” (BROUSSEAU, 1986 *apud* ALMOULOU, 2007, p. 89).

Assim, o contrato didático tem a função de estabelecer as atribuições do professor e o estudante, a fim de efetivar as relações entre docente, o aluno e o conhecimento (PAIS,2015). Ademais, nesse contrato existem poucas regras evidentes, enquanto “as implícitas são elaboradas a partir de natureza intrínseca da Matemática, como formalismo, abstração e rigor, além de considerar as diferenças habituais de concepções dos professores de Matemática” (OLIVEIRA, 2018, p.38).

Ao tratar-se de um desenvolvimento de uma prática pedagógica, é necessário definir as prioridades na estruturação no processo de ensino. Pode-se dizer que uma dessas prioridades é a escolha dos conteúdos. Esses conteúdos, ou seja, o saber ensinado, nasce através do saber científico. Com isso, o professor, que é o facilitador da aprendizagem, tem a autonomia de escolher esses conjuntos de assunto a ser ensinado, e, com isso, julgar o que é relevante para a formação dos estudantes, tornando-se responsável pela transposição didática.

Logo, a noção de transposição didática foi desenvolvida por Chevallard com o objetivo de “distinguir os diferentes saberes envolvidos no processo de ensino e aprendizagem” (ALMOULOU, 2007, p. 112). Nesse processo, segundo Alves (2016), o professor tem que personalizar e refazer a contextualização do saber científico.

Para determinar o processo de transposição didática, tem-se um grupo de pessoas que faz a seleção de conteúdo a ser ensinados como: cientistas, professores, especialistas, autores de livros, outros agentes da educação etc. Segundo Pais (2015), esses profissionais não se resumem somente à seleção dos conteúdos a serem ensinados, mas desempenham uma respeitável intervenção na organização dos métodos e objetivos que guiam o processo de ensino. Esses agentes são supervisores a fim de evitar possíveis distorções sobre um objeto estudado (CHEVALLARD,1991). Dessa forma, conserva-se os saberes, sem causar modificações ao sentido original do objeto de estudo.

Diante disso, Resende (2015) afirma que é importante ter requisitos para uma transposição didática, como: desincretização - o ato de organizar a teoria em áreas, isto é, separar os saberes; despersonalização - a desassociação do saber ao seu autor; programabilidade - o ato de estabelecer uma programação de acordo com uma sequência didática de forma racional e progressiva e publicidade do saber, ou seja, descrição clara do saber que deverá ser ensinado.

Assim, em uma perspectiva didática, a transposição didática tem como finalidade analisar epistemologicamente os objetos do saber (ALMOULOU,2007). Dessa forma, esses objetos são identificados como paramatemáticos e matemáticos.

Os objetos paramatemáticos foram utilizados para estudar outros objetos matemáticos, pois possuem propriedades para resolver questões matemáticas. Já os objetos matemáticos também analisaram outros materiais matemáticos, porém explorou a si mesmo. Logo:

A transformação do conteúdo de saber em uma versão didática desse objeto de saber, mais apropriadamente, é chamado de *transposición didáctica stricto sensu*. Mas, o estudo científico do processo de transposição didática (que é uma dimensão fundamental da Didática da Matemática) implica tendo em conta a transposição didática *sensu lato*, representada pelo esquema: objeto de saber - objeto para ensinar – objeto- de ensino. O primeiro elo que marca a passagem do implícito para o explícito, da prática à teoria, do pré-construído para construído (Chevallard,1998, p.45).

Segundo Pais (2015, p.17), a transposição didática “é um caso especial da translação de saberes, a fim de contribuir para o processo evolutivo e histórico do conhecimento científico.” Ademais, a transposição analisada em uma visão do plano pedagógico estuda a flexibilidade do cognitivo em torno do desenvolvimento do conhecimento, “restrita ao plano de elaborações subjetivas, pois é nesse nível que ocorre o núcleo do fenômeno. A conveniência em destacar essa dimensão da transposição está associada à necessária aplicação de conhecimentos anteriores para a aprendizagem de um novo conceito” (PAIS, 2015, p. 18).

Por fim, Abar (2020) afirma que no contexto da transposição didática, a inserção das tecnologias digitais, que podem auxiliar nas estratégias de ensino, tendo como propósito de fazer a ligação entre o saber velho com o saber novo, tornando um conceito mais compreensível.

Portanto, isso traz à característica desse trabalho, o ato de introduzir o *software* GeoGebra no contexto do ensino, apresentando-se não só como um complemento da transposição didática, mas também como um processo próprio de transposição didática, compondo visivelmente a dimensão desse recurso desde o início.

Conclui-se que a fase da experimentação é quando se aplica o conteúdo e as situações-problemas desenvolvidos nas fases anteriores, “corrigindo-o se necessário, quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade, o que implica em um retorno à análise *a priori*” (ALMOULOU & COUTINHO, 2008, p. 68). Falar nesse retorno à fase *a priori*, deve-se ao fato que o professor não constatou um possível

obstáculo ou se os conhecimentos prévios dos estudantes não estiveram de acordo com a proposta a ser desenvolvidas.

Dessa forma, houve uma necessidade de abordar uma teoria de ensino para estruturar as fases da ED, nesse caso utilizou-se o aparato de coleta de dados a partir da TSD. Ressaltou-se que a qualidade da coleta está diretamente ligada a análise *a posteriori*, pois foi feito uma comparação entre os dados pretendidos e os que foram obtidos. Portanto, a próxima seção traz uma exploração da fase de análise *a posteriori*, consequente a isso, descreve-se a teoria de ensino que foi utilizada.

2.1.5 Análise *a posteriori* e Validação

Nessa fase, Santos (2017) afirma que se caracteriza através da organização do *corpus da pesquisa*, com o intuito de uma avaliação posteriormente, fazendo o confronto da análise *a priori*. Assim, a partir da realização desta fase é possível observar a eficiência da metodologia proposta, possibilitando questionamentos para futuras pesquisas.

As investigações que recorrem à experimentação em sala de aula, muitas vezes, incluem uma avaliação externa de grupos experimentais ou grupos de testemunho diferentes, para verificar sua validade. Na Engenharia Didática, a validação é essencialmente interna, fundada no confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori* (CARNEIRO, 2005, p, 105).

Dessa forma, Carneiro (2005) ressalta que toda a coleta de dados realizada durante a fase da experimentação deve ser analisada e confrontada com as hipóteses da análise *a priori*, considerando que ocorra alguma alteração durante a análise *a posteriori*. Para essa validação, a ED adota dois tipos: interna e externa.

A validação externa teve como objetivo avaliar o desempenho do estudante durante a realização da situação didática, esse processo foi realizado através da comparação entre as produções iniciais e finais, desenvolvidas pelo aluno, através de aplicação e análise de questionários e/ou entrevistas.

Segundo Laborde (1997), nessa validação acontece o confronto entre a sequência didática e as produções dos alunos internos, bem como a dos alunos externos a esse cenário didático. Dessa forma, Alves (2018b) reforça que essa validação externa se realiza através da equiparação das produções externas a outros estudantes que não participam dessa mesma situação didática, o que não foi praticado nessa pesquisa.

Na validação interna, foi realizada uma descrição global dos estudantes, presenciando o comportamento, apreciação e desenvolvimento cognitivo durante a execução

da situação didática. Dessa maneira, fez-se um acompanhamento individualizado dos alunos. Nessa perspectiva, selecionou-se situações específicas, que foram avaliadas, tendo contribuído consideravelmente para a validação da pesquisa (LABORDE,1997).

Nessa pesquisa os resultados da análise *a posteriori* foram confrontados com as situações pré-determinadas pela análise *a priori*, através da análise dos conteúdos e com a validação interna que ocorreu durante a execução das situações didáticas.

De acordo com as definições apresentadas em cada fase da ED, percebeu-se que o desenvolvimento da experimentação de uma pesquisa, deve-se basear em uma coleta de dados e uma teoria de ensino. No tópico seguinte, apresentou-se a teoria de ensino escolhida para essa pesquisa.

2.2 Teoria das Situações Didáticas (TSD)

Essa teoria de ensino se define como um conjunto de situações que são desenvolvidas com intenções didáticas e, quando aplicadas no contexto escolar, tem como objetivo observar o comportamento dos estudantes (OLIVEIRA, 2018). Dessa forma, Almouloud (2007) afirma que o propósito de estudo dessa teoria não é o cognitivo, mas a situação didática elaborada com o intuito de identificar as correlações estabelecidas entre o professor-aluno-saber.

Figura 1- Triângulo didático



Fonte: Almouloud (2007, p.32)

A partir da observação dos vértices do triângulo, pode-se identificar as relações existentes entre saber-professor, professor-aluno e professor-saber. Vale ressaltar que o

papel do meio (*milieu*) como principal elemento durante as interações professor-aluno-saber, permitindo a evolução do conhecimento dos estudantes. Segundo Brousseau (2000), essa teoria:

Trata-se de construir um modelo de situações usadas para introduzir ou ensinar noções matemáticas (e criticá-las), além de imaginar outras mais apropriadas. Ao colocar os problemas desta maneira, é possível analisá-los, de modo particular o seu cálculo, juntamente com os argumentos da organização lógico-matemática do conhecimento, argumentos econômicos e ergonômicos. Mas também, é possível considerar outras restrições, em particular, aquelas que podem aparecer como conclusões de obras da psicologia ou sociologia, com a condição de torná-los funcionais, ou seja, de especificar como eles intervêm efetivamente (BROUSSEAU, 2000, p. 11, tradução nossa).

A TSD de Guy Brousseau tem elementos fundamentais no ensino, pois esses são importantes tanto para o professor com o estudante, no processo de ensino e de aprendizagem, visto que se relacionam por um meio conhecido como *milieu*.

O *milieu* é um conjunto adidático que não tem intenção didática, entretanto, como consequência retroativa à ação do indivíduo, existe a possibilidade de participar ativamente do processo de ensino e de aprendizagem (ALMOULOU, 2007).

Assim, Almouloud (2007, p.37) afirma que existem três tipos de dialética: “trocas diretas para uma ação ou uma tomada de decisão, trocas de informações numa linguagem codificada, trocas dos argumentos”, essas são criadas a partir das situações que estuda o comportamento pelo qual se associa ao saber em jogo com o *milieu*.

Desse modo, a TSD tem um objetivo de analisar as particularidades que influenciam o processo de ensino e de aprendizagem, além de amparar o professor durante a elaboração, realização e o estudo das sequências didáticas. Pais (2015, p.65-66) afirma

Uma situação didática é formada pelas múltiplas relações pedagógicas estabelecidas entre o professor, os alunos e o saber, com a finalidade de desenvolver atividades voltadas para o ensino e para a aprendizagem de um conteúdo específico. Esses três elementos componentes de uma situação didática (professor, aluno, saber) constituem a parte necessária para caracterizar o espaço vivo de uma sala de aula. [...] Por outro lado, esses três elementos não são suficientes para abarcar toda a complexidade do fenômeno cognitivo, daí a vinculação que fazemos entre tais situações e outros elementos do sistema didático: objetivos, métodos, posições teóricas, recursos didáticos, entre outros. Um dos desafios da didática é que cada um desses elementos recebe influências diretas da especificidade do conteúdo em questão.

Segundo Brousseau (2008, p.10) uma situação é “um modelo de interação de um sujeito com um meio determinado, reunindo as circunstâncias nas quais uma pessoa se encontra e as relações que a unem ao *milieu*. O *milieu* seria subsistema autônomo, antagônico ao sujeito”.

É importante, destacar que as variáveis didáticas podem ser de dois tipos: situações didáticas e adidáticas, sendo necessárias definições de ambas, pois o *milieu*, abrange variáveis didáticas selecionadas, responsáveis por proporcionar estratégias de ensino e aprendizagem, está posto em uma situação didática (ALMOULOU,2007).

A situação didática está relacionada com a verificação do estudo da situação adidática, tendo em vista que essas não são controladas diretamente no plano pedagógico, contudo, isso não exclui a importância na aprendizagem (PAIS,2015). Segundo Oliveira (2018, p.33), “a didática da matemática reforça as condições de estudar situações–problema potencialmente ricas em situações adidáticas”.

Desse modo, a situação didática traz a relação entre o professor e o aluno com as questões propostas analisadas como um jogo (ALMOULOU,2007). Nesse contexto, a fase da devolução é representada de tal forma que se apresenta a situação-problema ao estudante, com o intuito de incentivar a participação ativa desenvolvendo a autonomia no processo de aprendizagem.

Na situação adidática, a proposta pedagógica está de forma nítida, mas não é revelada. Segundo Almouloud (2007, p.33), “a situação adidática [...] é uma situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar a este, condições favoráveis para a apropriação do novo saber que deseja ensinar”.

Com efeito, a TSD é composta por quatro fases com o objetivo de investigar o processo de ensino e de aprendizagem. Diante disso, em cada etapa o saber possui uma função pedagógica distinta, levando o estudante a interagir diferentemente com o saber. “Nessas fases interligadas, podem se observar tempos dominantes de ação, de formulação, de validação e de institucionalização” (ALMOULOU, 2007, p. 36). Por conseguinte, foram estudadas as características de cada etapa.

A fase da ação é a primeira, que tem como objetivo envolver o estudante no processo de aprendizagem. Nessa perspectiva, o aluno tem o livre arbítrio para interagir sem a necessidade de seguir regras, ou seja, o estudante pode pensar sobre a ação e fazer as modificações. Brousseau (2002) define como:

A sequência de ‘situações de ação’ constitui o processo pelo qual o aluno elabora estratégias, ou seja, ‘ensina a si mesmo’ um método de resolver seu problema. Essa sucessão de interações entre o aluno e o meio, constitui a dialética da ação. Usamos a palavra ‘dialética’ em vez da palavra ‘interação’ porque, por um lado, o aluno é capaz de antecipar os resultados de suas escolhas e, por outro lado, suas estratégias são, de certa forma, proposições validadas ou invalidadas pela experimentação em uma espécie de diálogo com a situação (BROUSSEAU, 2002, p.9, tradução nossa).

Nessa etapa, o professor não faz intervenções. No caso do *milieu*, reverte a ação do sujeito. “Assim, o aluno pode melhorar ou abandonar seu modelo para criar um outro: a situação provoca assim uma aprendizagem por adaptação” (ALMOULoud, 2007, p. 37).

Dessa forma, a fase da ação admite que o estudante possa realizar procedimentos sem interrupções, de acordo com seus conhecimentos prévios com o propósito de solucionar a situação problema proposta (PAIS, 2015). Portanto, o estudante nesse momento faz uso dos conhecimentos intuitivo e experimental, mesmo que esses conhecimentos estejam interligados à alguma teoria.

Questões de ação ou decisão matemática são aqueles em que o único critério é a adequação da decisão - a elaboração deste sistema de decisão pode permanecer totalmente implícita na justificação dos mesmos. Não há restrições sobre isso ou formulação ou validação. Essa é a dialética mais geral, outros casos são apenas particulares. Isso levou à construção no assunto de regularidades de esquemas, modelos de ação, mais frequentemente inconscientes ou implícitas (BROUSSEAU, 1976, p. 110).

Nesse prisma, continuando com a exploração das fases, teve-se a formulação. Na fase da formulação também ocorre a apresentação de um raciocínio teórico realizado pelo estudante, formulando argumentos para as soluções, que, porventura, mais tarde foram validados ou contestados. Assim, esse raciocínio aparece como “um procedimento experimental e, para isso, torna-se necessário aplicar informações anteriores” (PAIS, 2015, p. 72).

Nesse momento os estudantes apresentaram explicações de suas soluções formais orais ou escritas, a partir do ponto de vista conhecido ou trazendo novas abordagens. Nessa etapa, também ocorreu uma linguagem usual para a transmissão na troca de informações. Nessa ocasião, o professor apareceu para participar do diálogo.

Diante disso, na terceira fase, a validação, o que se espera que os estudantes saibam argumentar e justificar suas soluções numa linguagem mais formal, e que dependendo do contexto, faça uso de provas e demonstrações. Desse modo, Almouloud (2007, p.39) destaca que “[...]a teoria funciona, nos debates científicos e nas discussões entre alunos, como *milieu* de estabelecer provas ou refutá-las”. Por essa razão, a linguagem torna-se mais formal, ou seja, teórica (científica). Por isso:

Um problema de validação é mais um problema de comparação, de avaliação e de rejeição de evidências e da investigação da demonstração. [...] Para uma abordagem de validação, o pensamento deve basear-se em formulações anteriores. A linguagem desenvolvida, na dialética da formulação, é menos específica do que a da validação. A comunicação desempenha um papel importante em parte independente das questões de validade (BROUSSEAU, 1976, p. 110).

A validação da TSD, segundo Almouloud (2007), tem a finalidade de validar as asserções que foram formuladas no momento das etapas da ação e formulação. Por fim, analisa-se a fase da institucionalização, o professor participa ativamente com o propósito de identificar, sistematizar e reconhecer o saber construído a partir da situação-problema por meio da formalização e a generalização. Dessa maneira, Pais (2015) explica que nesse momento ocorre a passagem do conhecimento individual para uma visão histórica e cultural do saber. Tem-se ainda que:

A evolução nas discussões e utilizações dessa teoria foi enriquecida com as noções de contrato e institucionalização, entre outras. As situações de institucionalização foram então definidas como aquelas em que o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber. [...] Depois da institucionalização, feita pelo professor, o saber torna-se oficial e os alunos devem incorporá-lo a seus esquemas mentais, tornando-o assim disponível para utilização na resolução de problemas matemáticos (ALMOULOU, 2007, p. 40).

Concluiu-se que a TSD tem um papel fundamental para concepção e proposição de uma situação-problema, que faz parte da realização de uma sequência didática. Para tanto, necessitou-se de uma abordagem matemática, que estabeleceu seu início na conjectura da ED, conhecendo suas origens e continuando até a perspectiva da situação de ensino. Depois utilizou-se a teoria de ensino (TSD) para a coleta de dados adquirida na fase da experimentação, e, por fim, validados de acordo a ED. No tópico a seguir, explorou-se o *software* GeoGebra, que auxiliou nas resoluções das situações-problemas encontradas nessa pesquisa.

2.3 Visualizações no GeoGebra

Nesse tópico, explicou-se o uso da tecnologia no ensino das sequências recursivas lineares. A pesquisa utilizou computadores e/ou smartphones para utilização do GeoGebra.

No Brasil, existem documentos oficiais que respaldam e propõem o uso da tecnologia no ensino da Matemática. Dessa maneira, a Base Nacional Curricular Comum (BNCC) afirma que ao utilizar os recursos tecnológicos os estudantes podem

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018, p.523).

De acordo com a BNCC (BRASIL,2018), o uso das tecnologias é considerado útil para o processo de ensino e de aprendizagem, trazendo elementos como o computador e/ou *smartphones*, que podem ser utilizados de acordo com a proposta didática pensada pelo

professor. Assim, esses equipamentos podem ser manuseados em sala de aula a fim de desenvolver uma prática pedagógica mais dinâmica e de fácil compreensão.

Dessa maneira, propôs-se a utilização do *software* GeoGebra para o estudo das sequências com o intuito de facilitar a visualização de forma geométrica, fazendo a relação dos elementos da álgebra de uma forma mais dinâmica.

Segundo Ribeiro e Souza (2016), o *software* GeoGebra é uma ferramenta dinâmica, que propõe ao processo de ensino e de aprendizagem uma interação a partir do controle das ações desenvolvidas durante o processo de estudo de uma maneira gradual de acordo com a necessidade do estudante.

Efetivamente, essa ferramenta tende dinamizar a geometria, podendo manipular os objetos através da tela do computador ou de aparelhos celulares. Além disso, “incentiva a continuidade da busca pela compreensão do objeto de estudo, pois o próprio *software* auxilia na percepção visual e dinâmica das ações, que são manipuláveis com certo grau de permissividade” (RIBEIRO; SOUZA, 2016, p.3).

A escolha de um *software* pelo professor deve ser feita a partir dos objetivos que almejam conseguir, além de suas ideias, com a proposta de verificar melhor a forma de executar a situação didática (GERMANO, 2016).

Certamente, pretendeu-se contribuir para facilitação da visualização e interpretação geométrica das identidades das sequências recursivas lineares. Mas, para isso, deve-se conhecer melhor a gênese do GeoGebra

Criado por Markus Hohenwarter, o GeoGebra é um *software* gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário). O GeoGebra reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si (GERMANO, 2016, p.32).

O *software* GeoGebra, foi desenvolvido para auxiliar os professores e alunos no ensino de Matemática. Assim, essa ferramenta pode ser manipulada através de uma *interface*, na qual observa-se os comandos de forma algébrica e geométrica, por meio de uma visualização bidimensional (2D) em outra perspectiva, tridimensional (3D).

Logo, o motivo de utilizar o GeoGebra foi devido ser um *software* livre e de fácil manipulação, sendo disponibilizado em diversos idiomas, tendo recursos que possibilitam a estimulação da construção do conhecimento do estudante. Por isso, surgiu a ideia de utilizar o GeoGebra; como ferramenta para construção da situação didática com o intuito de

melhorar a percepção do estudante durante as demonstrações de forma visual das identidades e das sequências recursivas lineares.

As visualizações das identidades das sequências recursivas lineares foram necessárias para esta pesquisa, porque, por meio desse recurso tecnológico foi possível observar que as propriedades fossem vislumbradas em detalhes, antes estudadas somente na forma algébrica, agora podendo, também serem visualizadas de modo geométrico, tornando indispensável a utilização do GeoGebra nas soluções das situações didáticas.

A criação das situações didáticas foi amparada nas dialéticas da TSD e organizada pela ED, que teve como objetivo ajudar o estudante e o professor nas representações geométricas das identidades das sequências recursivas lineares. Dessa forma, o docente teve como construir um percurso a ser percorrido pelo discente, verificando as prováveis soluções e entraves encontrados durante esse método, tornando o uso do *software* como uma ferramenta educacional essencial para a aplicação dessas situações-problemas numa perspectiva bi e tridimensional dessas propriedades.

Na seção seguinte foi abordada a definição de sequências recursivas lineares para amparar o estudo das sequências de Fibonacci, Lucas, Pell, Oresme, Mersenne, Jacobsthal, Narayana, Padovan, Perrin e Leonardo e suas representações.

3 CAMPO EPISTÊMICO - MATEMÁTICO: SEQUÊNCIAS RECURSIVAS LINEARES E SUAS REPRESENTAÇÕES

Antes de iniciar o estudo, as fórmulas que definem as sequências de Fibonacci, Lucas, Pell, Oresme, Mersenne, Jacobsthal, Narayana, Padovan, Perrin e Leonardo, é importante explicar o conceito de sequências numéricas recorrentes, para depois explorar a recorrência das sequências propostas, com a fórmula geral e suas identidades.

3.1 Sequências recursivas lineares e suas representações

Nesse tópico abordou-se as definições necessárias para os temas propostos com respectivos exemplos.

3.1.1 Sequência recursivas

Para começar o estudo, considere $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, ou seja, o zero não pertence a esse conjunto dos números naturais.

Definição 1. Uma sequência é uma função cujo domínio é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Utilizamos a notação $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ para definir a sequência, ou seja, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Assim, $1 \rightarrow x_1, 2 \rightarrow x_2, \dots, n \rightarrow x_n$ caracteriza a função onde cada número natural n corresponde a um número real x_n .

Assim, Matos (2001) afirma que a sequência nada mais é do que uma lista ordenada infinita de n números reais.

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

Em que x_1 é o primeiro termo e x_n é o n -ésimo termo. Tratando-se de uma ordem infinita, cada termo x_n tem um sucessor x_{n+1} , na qual essa sequência pode ser caracterizada por seu termo geral. Diversas sequências são denominadas como recursivas, ou seja, possuem uma Lei de recorrência, para isso seguem as definições de acordo com Lima (2006) e Pinto (2017).

Definição 2. A Lei de Recorrência determina uma regra que permite calcular qualquer termo x_{n+1} , a partir do termo x_n anterior, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 3. Para que uma sequência seja completamente definida por uma relação de recorrência, é necessário que sejam informados também os primeiros termos a partir dos quais os demais serão obtidos.

Percebeu-se, por meio dessas definições, que para obter-se uma sequência de recorrência deve-se ter, pelo menos, o primeiro termo. Diante dessas observações, essas

seqüências, podem ser classificadas quanto à ordem, linearidade e homogeneidade. Assim, segundo Barros (2021, p.49) segue a definição de cada tipo.

Definição 4. a ordem de uma equação de recorrência é a diferença entre o maior e o menor dos índices dos termos de sua seqüência.

Exemplo1. A equação $x_n = \frac{x_{n-4}}{x_{n-5}}$ com $n \geq 6$, representa uma recorrência de ordem 5, ou seja, a diferença entre $n - (n - 5) = 5$.

Definição 5. Uma recorrência é denominada homogênea quando cada termo depende exclusivamente dos anteriores. Dessa maneira, uma recorrência é classificada como não-homogênea quando cada termo depende dos termos anteriores e está em função de um termo independente.

Exemplo2. $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n$ é uma equação de recorrência homogênea.

Exemplo3. $x_{n+1} = 3x_n + 1$ é uma equação de recorrência não-homogênea.

Definição 6. Uma seqüência (x_n) possui uma equação de recorrência linear de ordem k escrita da forma:

$$x_{n+k} = f_1(n)x_{n+k-1} + f_2(n)x_{n+k-2} + \dots + f_k(n)x_n + f_{k+1}(n),$$

No qual, $f_i(n)$ é uma função n com $i \in \mathbb{N}$ e $1 \leq i \leq k + 1$, e $f_k \neq 0$.

Exemplo 4. $x_{n+3} = nx_{n+2} + 2x_n$ é uma recorrência linear.

Exemplo5. $x_{n+2} = \frac{x_{n+1}}{x_n}$ é uma recorrência não-linear.

Por fim, as seqüências apresentadas nesse trabalho, foram lineares, homogêneas e aritméticas, variando somente a ordem.

3.1.2 Forma geral

Resolver uma equação de recorrência é encontrar uma fórmula fechada, ou seja, forma geral. Assim, permite encontrar qualquer termo sem precisar do conhecimento dos termos anteriores. Pode-se citar como exemplo $x(n) = 3n$, isto é, $n \in \mathbb{N}$, a seqüência será $X = (3, 6, 9, 12, \dots)$, observou-se que, para calcular qualquer termo, não precisa a construção da seqüência, no caso $x(50) = 3 \cdot 50 = 150$.

Por fim, nos próximos tópicos, explorou-se as seqüências de Fibonacci, Lucas, Pell, Oresme, Mersenne, Jacobsthal, Narayana, Padovan. Perrin e Leonardo com suas respectivas identidades.

3.2 Seqüência de Fibonacci

Figura 2- Leonardo Pisano (Fibonacci).



Fonte: Eves (2004, p. 293).

Inúmeros são os trabalhos encontrados na literatura referente a emblemática sequência de Fibonacci. Essa sequência recebeu esse nome devido a relação com o seu criador, um italiano matemático chamado Leonardo de Pisa, que “nasceu aproximadamente em 1175 e faleceu em 1250” (DUNLAP, 2003, p.35).

Segundo Dunlap (2003), o termo Fibonacci é abreviação de filho de Bonaccio, seu pai. Fibonacci agregou conhecimentos nos campos da Álgebra e Aritmética, com suas viagens que realizou no território europeu (POSAMENTIER & LEHMANN, 2007, p.22). Porém, mesmo apresentando diversos trabalhos nessas áreas da Matemática, Leonardo de Pisa se eternizou através do problema que descreveu a reprodução dos coelhos imortais (WELLS, 2005, p.101). O problema proposto foi:

Um homem coloca um par de coelhos em um cercado, a fim de que estes se reproduzam. Quantos pares de coelhos existirão neste cercado, ao final de um ano, sabendo que a natureza desses coelhos é tal qual que a cada mês, cada par reproduz outro par, que se torna produtivo do segundo mês em diante? (BOYER, 2006, p.174). Com a resolução do problema citado acima, encontra-se a seguinte sequência:

$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots)$

A sequência apresentada indica que quando se pensa no número de casais de coelhos de um determinado mês, basta somar o número de casais de coelhos do mês anterior com o número de casais ante anterior. Segundo Alves e Catarino (2017), tem-se estabelecida a lei de recorrência conhecida como sequência de Fibonacci, definida como:

Definição 7. $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ para $n \geq 1$. Sendo $F_1 = 1, F_2 = 1$.

Diante disso, considerando a sequência numérica como x_n , o termo geral é dado pela razão entre os dois termos consecutivos, ou seja, $x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$, que também é conhecida com a razão áurea. Ademais, a definição dessa razão é: “uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para a maior parte, a maior parte está para a menor parte” (RAMOS,2013, p.32).

Desse modo, seja um segmento $\overline{AB}$, considerando que $\overline{AC} = x$ e $\overline{CB} = 1$, então $\overline{AB} = x + 1$, na qual, $\overline{AB} > \overline{AC} > \overline{CB}$, assim:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \Rightarrow \frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$$

Logo, pode-se ver que as raízes da equação $x^2 + x - 1 = 0$ são $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. A raiz $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803 \dots = \Phi$

Definição 8. a Razão Áurea ou o número de ouro, é representada por uma constante irracional tal que,

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

A sequência de Fibonacci está relacionada as definições e identidades sobre o retângulo, triângulo e espiral de Razão Áurea. Assim, Alves e Catarino (2017), relatam que a sequência de Fibonacci pode ser representada por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, no qual o $n = 0,1,2,3\dots$, é uma relação de recorrência de segunda ordem, inicialmente pleiteado pelo matemático francês François Édouard Anatole Lucas (1842-1891), que elaborou algumas identidades de Fibonacci exploradas por Koshy (2001).

Também pode ser reescrita como: $F_{n+1} = F_{n+2} - F_n$. Em particular:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2, \\ F_2 &= F_3 - F_1 \\ F_3 &= F_4 - F_2 \\ F_4 &= F_5 - F_3 \\ &\vdots \\ F_{2n-1} &= F_{2n} - F_{2n-2} \\ F_{2n} &= F_{2n+1} - F_{2n-1} \\ F_{2n+1} &= F_{2n+2} - F_{2n} \end{aligned}$$

Assim, o próximo passo é mostrar as identidades relacionados aos números dessa sequência.

Identidade 1. A soma dos números de Fibonacci, até a ordem $2n$, de índice ímpar pode ser descrita por (OLIVEIRA, ALVES & PAIVA, 2017)

$$\sum_{l=1}^n F_{2l-1} = F_{2n}$$

Prova. A apresentação dos números de Fibonacci, considerando apenas os termos de índice ímpar.

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n F_{2l-1} &= F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} \\ &= F_2 + (F_4 - F_2) + (F_6 - F_4) + \cdots + (F_{2n} - F_{2n-2}) \\ &= F_{2n} \end{aligned}$$

Identidade 2. A soma dos números de Fibonacci, até a ordem $2n$, de índice par e não nulo pode ser descrita por (OLIVEIRA, ALVES & PAIVA, 2017)

$$\sum_{l=1}^n F_{2l} = F_{2n+1} - 1$$

Prova. A apresentação dos números de Fibonacci, considerando apenas os termos de índice par e não nulo, considerando $F_1=1$.

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n F_{2l} &= F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} \\ &= (F_3 - F_1) + (F_5 - F_3) + \cdots + (F_{2n+1} - F_{2n-1}) \\ &= F_{2n+1} - F_1 \\ &= F_{2n+1} - 1. \end{aligned}$$

Identidade 3. A soma dos n primeiros números de Fibonacci, até a ordem n , de índice maior que zero pode ser descrito por (OLIVEIRA, ALVES & PAIVA, 2017)

$$\sum_{l=1}^n F_l = F_{n+2} - 1.$$

Prova. Como resultado,

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n F_l &= F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_{n-1} + F_n \\ &= F_2 + (F_3 - F_1) + (F_4 - F_2) + (F_5 - F_3) + (F_6 - F_4) + \cdots + (F_n - F_{n-2}) + (F_{n+1} - F_{n-1}) \\ &= F_{n+1} + F_n - F_1 \\ &= F_{n+2} - 1. \end{aligned}$$

Identidade 4. A soma dos n primeiros quadrados números de Fibonacci, até a ordem n , de índice maior que zero pode ser descrito por (OLIVEIRA, ALVES & PAIVA, 2017)

$$\sum_{l=1}^n (F_l)^2 = F_n \cdot F_{n+1}$$

Prova. Como resultado,

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n F_l^2 &= F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 \\ &= F_1 \cdot F_2 + F_2 \cdot (F_3 - F_1) + F_3 \cdot (F_4 - F_2) + F_4 \cdot (F_5 - F_3) + \dots + F_n \cdot (F_{n+1} - F_{n-1}) \\ &= F_1 \cdot F_2 + F_2 \cdot F_3 - F_2 \cdot F_1 + F_3 \cdot F_4 - F_3 \cdot F_2 + F_4 \cdot F_5 - F_4 \cdot F_3 + \dots + F_n \cdot F_{n+1} - F_n \cdot F_{n-1} \\ &= F_n \cdot F_{n+1}. \end{aligned}$$

Identidade 5 (Cassini). Para todo $n \in \mathbb{N}$

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Prova. Será feita por indução matemática. Como $F_0=0$, $F_1=1$, $F_2=1$, vê-se se é válida para $n=1$. Supondo que a fórmula é válida para n , então

$$\begin{aligned} F_n \cdot F_{n+2} - F_{n+1}^2 &= F_n \cdot F_{n+2} - F_{n+1}(F_{n-1} + F_n) \\ &= F_n \cdot (F_{n+2} - F_{n+1}) - F_{n-1} \cdot F_{n+1} \\ &= F_n^2 - F_{n-1} \cdot F_{n+1} \\ &= (-1) \cdot (F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F_n^2) \\ &= (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Assim, a identidade 5 vale para n e para $n + 1$, isso completa a prova.

Teorema 1 (Observação de Kepler). A razão entre os termos sucessivos da sequência de Fibonacci converge para $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803 \dots$, também conhecida como a razão áurea. Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi.$$

Prova. Suponha que o limite acima exista e seja igual a L . Dividindo ambos os lados pela lei de recorrência $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ por f_n , obtém-se

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}}.$$

Sabendo que n tende ao infinito, nessa fórmula e necessariamente tem-se $\frac{F_{n+1}}{F_n} \rightarrow L$ e $\frac{F_n}{F_{n-1}} \rightarrow L$, logo verifica-se que

$$L = 1 + \frac{1}{L} \text{ ou } L^2 - L - 1 = 0.$$

Por fim, como o limite aplicado será positivo, pode-se concluir que $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, sendo a única raiz positiva da equação quadrática explorada anteriormente.

Outra maneira de demonstrar o limite exposto anteriormente é observar que ao dividir ambos os lados da identidade de Cassini por $F_{n-1} \cdot F_n$, têm-se

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{F_{n-1}F_n},$$

Essa expressão mostra com facilidade a verificação da sequência definida por $x_n := \frac{F_{n+1}}{F_n}$ é uma sequência contrativa, ou seja, uma sequência de Cauchy, já que $d(x_{n+1}, x_n) > \frac{1}{2}d(x_n, x_{n-1})$. Logo, pode-se afirmar que x_n é uma sequência convergente.

De outra forma, pode-se provar a existência de limite, utilizando a expressão anterior para estabelecer uma igualdade entre as somas parciais de uma série telescópica e uma série alternada. Para que isso aconteça basta somar a fórmula de $n=2$ até N , obtém-se

$$\frac{F_{N+1}}{F_N} - \frac{f_2}{f_1} = \sum_{n=2}^N \frac{(-1)^n}{F_{n-1}F_n}.$$

Assim, faz-se N tender ao infinito, nessa última igualdade e observa-se que a série da direita é convergente pelo teste de Leibniz para séries alternadas, bem como o limite citado no início dessa secção, obtido à esquerda pode-se afirmar que é convergente.

Portanto, é importante ressaltar que as condições anteriores também estabelecem uma fórmula que chama atenção para Φ a soma alternada do inverso dos produtos de números consecutivos de Fibonacci. Veja

$$\Phi = 1 + \sum_{n=2}^N \frac{(-1)^n}{F_{n-1}F_n}.$$

Teorema 2 (Fórmula de Binet). Seja Φ a razão áurea, ou seja, o número real positivo tal que $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$. Então, para $n \geq 0$ inteiros,

$$f_n = \frac{\Phi^n - (-\Phi)^{-n}}{\Phi + \Phi^{-1}}$$

Prova. Estabelece a igualdade entre as duas sequências anteriores.

$$x_n := \frac{\Phi^n - (-\Phi)^{-n}}{\Phi + \Phi^{-1}}$$

Usa-se $x_0 = 0, x_1 = 1$, para mostrar que a relação $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ é válida para $n \geq 1$ ou de outra forma, pode-se representar $x_{n+1} - x_n - x_{n-1} = 0$. Dessa maneira, eliminando os denominadores,

$$\phi^{n+1} - (-\phi)^{-n-1} - \phi^n - (-\phi)^{-n} - \phi^{n-1} - (-\phi)^{-n+1} =$$

$$\phi^{n-1}(\phi^2 - \phi - 1) + (-\phi)^{-n-1}((-\phi)^2 + (-\phi) - 1) = 0.$$

Logo, como as sequências possuem os mesmos valores iniciais e seguem a mesma relação de recorrência, pode-se afirmar que são coincidentes para $n \geq 0$. Pensando em estender de forma natural para os números F_n para qualquer n inteiro. (ASTROLINO E SILVA, 2017). A sequência pode ser escrita dessa forma

$$F_{n-1} = F_{n+1} + F_n$$

Consequentemente, dados quaisquer dois números de Fibonacci consecutivos, utilizando a expressão anterior, pode-se encontrar o próximo número de Fibonacci imediatamente anterior. Explicando assim o motivo de utilizar o $F_0 = 0$, uma vez que

$$F_0 = F_2 - F_1 = 0.$$

Dando continuidade, pode-se concluir que

$$F_{-1} = F_1 - F_0 = 1$$

$$F_{-2} = F_0 - F_{-1} = -1$$

$$F_{-3} = F_{-1} - F_{-2} = 2$$

$$F_{-4} = F_{-2} - F_{-3} = 3$$

$\vdots$

Observando os valores para $F_{-1}, F_{-2}, F_{-3}, F_{-4}, \dots$, que fazem com que essa sequência faça sentido, pois respeitam a lei de recorrência original. Assim, tem-se a sequência dos números de Fibonacci estendida para todo número que pertence ao conjunto dos números inteiros.

Logo, pode-se afirmar que a sequência admite valores positivos e negativos que podem ser representados por módulo, ou seja, $|F_n| = |F_{-n}|$.

Teorema 3. Para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$F_n = (-1)^{n+1} F_{-n}$$

Prova. Para $n = 0, n = 1$ a proposição é verificada através de uma suposição que a expressão é válida para n e $n + 1$, ou seja,

$$F_{n+1} = (-1)^{n+2}F_{-n-1}$$

$$F_n = (-1)^{n+1}F_{-n}$$

Somando ambas,

$$F_{n+2} = (-1)^{n+1}(F_{-n} - F_{-n-1}) = (-1)^{n+3}F_{-n-2}$$

Agora, faz-se a subtração entre as mesmas

$$F_{n-1} = (-1)^{n+2}(F_{-n} - F_{-n-1}) = (-1)^n F_{-n+1}$$

Assim, se a fórmula é válida para n e $n + 1$, também será válida para $n + 2$ e $n - 1$, ou seja, para todos os números inteiros. Pode-se também ser reescrita como

$$F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n$$

Por consequência, sempre que provada para todo $n \in \mathbb{Z}$, alguma identidade sobre os números de Fibonacci, faz-se a substituição $n := -n$, para construir uma nova identidade igualmente verdadeira. Assim, na próxima seção foi analisada a sequência de Lucas.

3.3 Sequência de Lucas

Figura 3- François Édouard Anatole Lucas



Fonte: Silva (2017, p.21)

François Édouard Anatole Lucas, nasceu em 1842 e faleceu 1891, teve uma boa reputação como professor de Matemática por entreter e instigar os estudantes com desafios matemáticos (SILVA, 2017).

Diante da docência, rendeu 180 publicações de artigos sobre diversos campos da Matemática, em vários jornais mundiais da Matemática. Foi o criador do jogo denominado a Torre de Hanói, e outros quebra-cabeças. Pelo seu grande apreço pela Teoria dos Números,

foi nessa área que produziu suas maiores contribuições. Segundo Astrolino e Silva (2017, p.22) em 1876, estudou a sequência de Fibonacci e suas generalizações, que hoje são chamadas de sequência de Lucas.

Nesse mesmo ano demonstrou a recíproca do pequeno teorema de Fermat e contribuiu nos estudos de números primos, em que encontrou manualmente o maior número primo, que é indicado por Eves (1969) com o valor numérico igual a $2^{127}-1 = 170141183460460469231687303715884104727$.

Baseado nas relações com a sequência de Fibonacci, Lucas criou sua própria sequência por recorrência (1, 3, 4,7,11,18, 29...), que é pouco explorada na disciplina da HM, diferindo da primeira apenas pelos valores iniciais — segundo Honsberger (1985, p.111) é definida por

Definição 9. $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, n > 2$.

Contudo, com base nas relações já demonstradas na sequência de Fibonacci, obtém-se: $F_2 = F_1 + F_0$; isso implica, $F_0 = F_2 - F_1 = 0$. Em termos operacionais, necessita-se do termo L_0 ; assim, toma-se, $L_2 = L_1 + L_0$; isso implica, $L_0 = L_2 - L_1 = 2$. Honsberger (1985, p. 111) observa que “a sequência de Lucas é sempre correspondentemente maior do que a sequência de Fibonacci, com exceção para L_1 e F_1 ”.

Outra relação curiosa percebida no diagrama mostra que $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$. Essa sequência tem uma lei de recorrência aritmética, em que os dois termos iniciais são $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$. Dessa forma, para se calcular o próximo termo deve-se somar os dois termos anteriores. Logo, encontra-se $L_2 = L_0 + L_1 = 2 + 1 = 3$, como terceiro termo. Para calcular o próximo termo, utiliza-se o mesmo raciocínio, assim $L_3 = L_1 + L_2 = 1 + 3 = 4$, sendo esta sequência organizada como na Tabela 1:

Tabela 1-Termos iniciais da sequência de Lucas

N	0	1	2	3	4	5	6	7	...
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	...

Fonte: Elaborado pelo autor

A partir do exposto na Tabela 1, pode-se inferir que a sequência de Lucas é representada por $(p, q, p + q, p + 2q, 2p + 3q, 3p + 5q, \dots)$ (HOGGAT; VENNER, 1969). Assim, de modo análogo, pode-se estender esta generalização para a Sequência de Fibonacci.

Teorema4. Seja x_n é o termo utilizado para a sequência generalizada de Fibonacci.

Então,

$$x_n = x_2 F_{n-1} + x_1 F_{n-2}$$

Prova. Será realizada pela indução matemática. Como $F_0 = 0$ e $F_{-1} = F_1 = 1, n = 1$ e $n = 2$. Supondo que a identidade seja válida para n e $n + 1$, ou seja,

$$x_{n+1} = x_2 F_n + x_1 F_{n-1}$$

$$x_n = x_2 F_{n-1} + x_1 F_{n-2}$$

Somando ambas as equações

$$x_{n+2} = x_2 F_{n+1} + x_1 F_n$$

Subtraindo as mesmas equações

$$x_{n-1} = x_2 F_{n-2} + x_1 F_{n-3}$$

Logo, vale para n e $n + 1$, vale também para $n - 1$ e $n + 2$, o que estabelece uma validade para todos os números inteiros. É importante destacar que esse teorema é um caso particular do próximo teorema que é mais geral.

Teorema5. Sejam x_n, y_n, z_n três sequências quaisquer generalizadas por Fibonacci. Supondo que a e $b \in \mathbb{R}$ de modo que

$$x_n = ay_n + bz_n$$

Seja válida para dois valores consecutivos de n , então a equação vale para $n \in \mathbb{Z}$.

Usando $n = 1$ e $n = 2$ para esse teorema pode-se verificar que x_n é o termo geral de uma sequência generalizada de Fibonacci, logo:

$$x_n = x_1 F_n + (x_2 - x_1) F_{n-1}$$

$$x_n = \left(\frac{3x_1 - x_2}{2} \right) F_n + \left(\frac{x_2 - x_1}{2} \right) L_n$$

Proposição1. Considere a sequência de Lucas dada por: $L_{n+2} = L_{n+1} + F_n, \forall n \geq 1$, como $L_0 = 0, L_1 = 1$. Verifica-se as seguintes identidades.

Identidade 6. $\sum_{k=0}^n L_k = L_{n+2} - 1$.

Prova. Como resultado,

$$\sum_{k=0}^n L_k = L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_{n-1} + L_n$$

$$= L_2 + (L_3 - L_1) + (L_4 - L_2) + (L_5 - L_3) + (L_6 - L_4) + \cdots + (L_n - L_{n-2}) + (L_{n+1} - L_{n-1})$$

$$\begin{aligned}
&= L_{n+1} + L_n - L_1 \\
&= L_{n+2} - 1.
\end{aligned}$$

Identidade 7. $\sum_{k=0}^n L_{2k} = L_{2n+1} + 1$

Prova. Indução Finita sobre n . Para $n = 1, L_0 = 2 = L_1 + 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} L_{2k} &= \sum_{k=0}^n L_{2k} + (L_{2(n+1)}) \\
&= (L_{2n+1} + 1 + L_{2n+2}) \\
&= L_{2n+3} + 1 \\
&= L_{2(n+1)+1} + 1.
\end{aligned}$$

Identidade 8. $\sum_{k=0}^n L_{2k+1} = L_{2n+2} - 2$

Prova. Indução Finita sobre n . Para $n = 1, L_1 = 1 = L_2 - 2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} L_{2k+1} &= \sum_{k=0}^n L_{2k+1} + (L_{2(n+1)+1}) \\
&= (L_{2n+2} - 2 + L_{2n+3}) \\
&= L_{2n+4} - 2 \\
&= L_{2(n+1)+2} - 2.
\end{aligned}$$

Identidade 9. $\sum_{k=0}^n L_k^2 = L_n L_{n+1} - 2$

Prova. Indução Finita sobre n . Para $n = 1, L_1^2 = 1 = L_1 L_2 - 2 = 1 \cdot 3 - 2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} L_k^2 &= \sum_{k=0}^n L_k^2 + L_{n+1}^2 \\
&= L_n L_{n+1} - 2 + L_{n+1}^2 \\
&= L_{n+1} (L_n + L_{n+1}) - 2 \\
&= F_{n+1} + F_{n+2} - 2.
\end{aligned}$$

Proposição 2. Dadas as sequências de Fibonacci e de Lucas definidas como $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \geq 1$, com $F_1 = F_2 = 1$ e $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \forall n \geq 1$, com $L_1 = 1, L_2 = 3$. Tem-se as seguintes identidades.

Identidade 10. $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$, $\forall n \geq 1$;

Prova. Por Indução Finita sobre n. Para $n=1$, $L_1 = 1 = F_2 + F_0$.

Supondo que todo $k < n$, então

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= L_n + L_{n-1} \\ &= F_{n+1} + F_{n-1} + F_n + F_{n-2} \\ &= F_{n+1} + F_n + F_{n-1} + F_{n-2} \\ &= F_{n+2} + F_n. \end{aligned}$$

Identidade 11. $L_n = F_{n+2} + F_{n-2}$, $\forall n \geq 2$;

Prova. Por Indução Finita sobre n.

Observa-se que

$$F_{n+2} = F_{n-1} + F_n$$

E

$$F_{n-2} = F_n - F_{n-1}$$

Assim,

$$\begin{aligned} F_{n+2} + F_{n-2} &= F_{n+1} + F_n - (F_n - F_{n-1}) \\ &= F_{n+1} + F_{n-1} \\ &= L_n \end{aligned}$$

Identidade 12. $F_{2n} = F_n L_n$, $\forall n \geq 0$;

Prova. Usando a Identidade 11 e a proposição 2.

$$\begin{aligned} F_n L_n &= F_n (F_{n+1} + F_{n-1}) \\ &= F_n F_{n+1} + F_n F_{n-1} \\ &= F_{n+n} = F_{2n} \end{aligned}$$

Identidade 13. $5F_n = L_{n+1} + L_n$;

Prova.

$$\begin{aligned}
L_{n+1} + L_n &= F_{n+2} + F_n + F_n + F_{n-2} \\
&= F_{n+1} + F_n + 2F_n + F_{n-2} \\
&= F_n + F_{n-1} + 3F_n + F_{n-2} \\
&= 4F_n + F_n \\
&= 5F_n.
\end{aligned}$$

Identidade 14. $L_n^2 = 5F_n^2 + 4(-1)^n$.

Prova. Usando a Identidade 12, têm-se que

$$\begin{aligned}
L_n^2 &= F_{n+1}^2 + F_n F_{n-1} + F_{n-1}^2 \\
&= (F_n - F_{n-1})^2 + 4F_{n+1} F_{n-1} \\
&= F_n^2 + 4(F_n^2 + (-1)^n) \\
&= 5F_n^2 + 4(-1)^n.
\end{aligned}$$

Identidade 15. de Cassini para L_n

Assim como existe uma Identidade de Cassini para os números de Fibonacci, também existe para os números de Lucas. Veja a seguir a demonstração, utilizando de forma semelhante ideia na Identidade de Cassini para F_n .

Teorema 6. Para todo $n \in \mathbb{Z}$

$$L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = -5(-1)^n$$

Prova. Será feita pela Indução Matemática. Como $L_{-1}L_1 - L_0^2 = -5$ tem-se que $n=0$, logo a equação torna-se verdadeira. Assim, considere o sistema linear, composto por duas equações com duas incógnitas, cujas soluções são triviais dadas por $x_0 = y_0 = 1$.

$$\begin{cases} xL_{n+1} + yL_n = L_{n+2} \\ xL_n + yL_{n-1} = L_{n+1} \end{cases}$$

Vê-se que para encontrar as soluções do sistema linear citado anteriormente, utiliza-se a regra de Cramer, pode-se calcular o valor para y_0 como uma divisão de determinantes.

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} L_{n+1} & L_{n+2} \\ L_n & L_{n+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{vmatrix}} = 1$$

Isto é,

$$L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = (-1)(L_nL_{n+2} - L_{n+1}^2)$$

Por fim, observa-se que a prova pode ser lida nos dois sentidos, tanto da direita para esquerda, como da esquerda para a direita. Assim, mostra-se que a equação vale para n , $n+1$ e $n-1$. Logo, a equação vale para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Sabe-se que existem outras identidades similares a de Cassini para F_n e L_n , como

$$F_{n+1}L_n - L_{n+1}F_n = 2(-1)^n$$

Prova. Se $F_{m+n} + (-1)^n F_{m-n} = F_m L_n$, aplicando $m := n + k$, $m-n := n + k$ e $m := n$, tem-se

$$\begin{aligned} F_{n+k}L_n &= F_{2n+k} + (-1)^n F_k \\ F_n L_{n+k} &= F_{2n+k} + (-1)^{n+k} F_{-k} \end{aligned}$$

Subtraindo as duas equações e lembrando que $F_n = (-1)^{n+k} F_{-k}$,

$$F_{n+k}L_n - F_n L_{n+k} = 2(-1)^n F_k$$

Por fim, utilizando $k = 1$, tem-se $F_{n+1}L_n - L_{n+1}F_n = 2(-1)^n$.

No próximo tópico estudamos a história de Pell e a relação entre as identidades da sequência de Pell.

3.4 Sequência de Pell

Figura 4-- John Pell



Fonte: Mota (2019, p.17)

De acordo com Noronha e Alves (2018) a história de John Pell (1611-1685), foi resumida por um matemático inglês que estudou a Álgebra com destaque à teoria das equações. Foi um estudioso bastante reservado, com poucas publicações, devido a sua pouca condição financeira na época, isso fez com que gerasse dúvidas acerca de suas legítimas contribuições, mesmo sendo respeitado na comunidade acadêmica por suas correspondências junto a outros matemáticos.

Após sua morte, Leonard Euler fez a relação baseada em uma equação diofantina específica $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ com x e y para todos os inteiros, ficou conhecida como Equação de Pell, devido seus estudos junto ao seu aluno suíço Johann Heinrich Rahn, mais conhecido como Rhonius, que publicaram a expressão $ax^2 + 1 = y^2$.

Essa equação já tinha sido estudada e apresentada por Fermat para a comunidade acadêmica, porém associada às contribuições com seu aluno sobre essa equação e os estudos sobre teoria dos números. Ficou conhecida como a Equação de Pell.

A sequência de Pell foi apresentada por Aydin e Köklü (2017) com recursividade

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, n \geq 3, \text{ com } P_0 = 0, P_1 = 1 \text{ e } P_2 = 2.$$

Note que partindo dessa recorrência observa-se que é possível determinar os n primeiros termos dessa sequência, como:

$$P_1 = 1$$

$$P_2 = 2$$

$$P_3 = 2P_2 + P_1 = 2(2) + 1 = 5$$

$$P_4 = 2P_3 + P_2 = 2(5) + 2 = 12$$

$$P_5 = 2P_4 + P_3 = 2(12) + 5 = 29$$

$$P_6 = 2P_5 + P_4 = 2(29) + 12 = 70$$

$$P_7 = 2P_6 + P_5 = 2(70) + 29 = 169$$

$$\vdots$$

E assim sucessivamente, formando a sequência de Pell:

$$(1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, \dots, P_n, \dots)$$

Verificando as operações dos termos dessa sequência, é possível obter o n ésimo termo a partir do conhecimento dos dois termos imediatamente anteriores. Desta maneira, se faz necessário a construção de uma equação de recorrência para satisfazer essa necessidade. Pode-se reescrever tal expressão recursiva modificando os índices dos termos de forma conveniente, ficando:

Definição 10. $P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n, n \geq 1$

Considerando como sendo uma equação de recorrência linear de segunda ordem, e tomando sua equação característica, como:

$$r^2 + 2r = 1$$

ou ainda

$$r^2 + 2r - 1 = 0$$

cujas soluções dessa equação são:

$$r = 1 \pm \sqrt{2}$$

Fazendo com que a solução geral da Definição 10 possa ser escrita como:

$$P_n = A(1 + \sqrt{2})^n + B(1 - \sqrt{2})^n$$

E para calcular os valores de A e B, utilizamos $P_1 = 1$ e $P_2 = 2$, formando um sistema linear

$$\begin{cases} P_1 = A(1 + \sqrt{2})^1 + B(1 - \sqrt{2})^1 = 1 \\ P_2 = A(1 + \sqrt{2})^2 + B(1 - \sqrt{2})^2 = 2 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, utilizando o método da substituição, isolamos o A na primeira equação:

$$\begin{aligned} A(1 + \sqrt{2})^1 + B(1 - \sqrt{2})^1 &= 1 \\ A(1 + \sqrt{2}) + B(1 - \sqrt{2}) &= 1 \\ A(1 + \sqrt{2}) &= 1 - B(1 - \sqrt{2}) \\ A &= \frac{1 - B(1 - \sqrt{2})}{1 + \sqrt{2}} \end{aligned}$$

Racionalizando,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 - B(1 - \sqrt{2})}{1 + \sqrt{2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \\ &= \frac{1(1 - 2\sqrt{2}) - B(1 - 2\sqrt{2} + 2)}{1 - 2} \\ &= \frac{(1 - 2\sqrt{2}) - B(3 - 2\sqrt{2})}{-1} \end{aligned}$$

Logo, $A = 2\sqrt{2} - 1 + B(3 - 2\sqrt{2})$.

Isolando o A na segunda equação, temos:

$$A(1 + \sqrt{2})^2 + B(1 - \sqrt{2})^2 = 2$$

$$A(1 + 2\sqrt{2} + 2) + B(1 - 2\sqrt{2} + 2) = 2$$

$$A(3 + 2\sqrt{2}) + B(3 - 2\sqrt{2}) = 2$$

$$A = \frac{2 - B(3 - 2\sqrt{2})}{3 + 2\sqrt{2}}$$

Seguindo os passos da primeira equação, teremos:

$$A = 6 - 4\sqrt{2} - B(17 - 12\sqrt{2}).$$

Agora, igualando os valores para A, temos:

$$2\sqrt{2} - 1 + B(3 - 2\sqrt{2}) = 6 - 4\sqrt{2} - B(17 - 12\sqrt{2})$$

$$B(3 - 2\sqrt{2}) + B(17 - 12\sqrt{2}) = 6 - 4\sqrt{2} - \sqrt{2} + 1$$

$$3B - 2B\sqrt{2} + 17B - 12B\sqrt{2} = 7 - 5\sqrt{2}$$

$$20B - 14B\sqrt{2} = 7 - 5\sqrt{2}$$

$$B = \frac{7 - 5\sqrt{2}}{20 - 14\sqrt{2}}$$

Racionalizando,

$$B = \frac{7 - 5\sqrt{2}}{20 - 14\sqrt{2}} \cdot \frac{20 + 14\sqrt{2}}{20 + 14\sqrt{2}}$$

$$B = \frac{140 + 98\sqrt{2} - 100\sqrt{2} - 140}{400 - 392}$$

$$B = \frac{-2\sqrt{2}}{8}$$

$$B = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Substituindo o valor de B, na primeira equação temos:

$$A = 2\sqrt{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (3 - 2\sqrt{2})$$

$$A = 2\sqrt{2} - 1 - \frac{3\sqrt{2}}{4} + 1$$

$$A = 2\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$A = \frac{4\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{4}$$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Usando os resultados de A e B encontrados anteriormente, aplicamos na equação

$$P_n = A(1 + \sqrt{2})^n + B(1 - \sqrt{2})^n$$

Teremos:

$$P_n = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{2})^n - \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - \sqrt{2})^n$$

À vista disso, pode-se encontrar qualquer termo da sequência de Pell de acordo com o valor escolhido para n . Segundo Bicknell (1975), a equação de recorrência de Pell pode ser representada por:

$$P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

Sendo $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ e $\beta = 1 - \sqrt{2}$. Substituindo esses valores na equação anterior.

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{1 + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2}} \\ &= \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Koshy (2014) e Alves (2016) denominam que essa representação como a versão na fórmula de Binet. Da mesma maneira que na sequência de Fibonacci faz relação com a razão áurea, conforme a definição 8, explorou-se a propriedade similar para sequência de Pell, isto é, $t_n = \frac{P_{n+1}}{P_n}$.

Teorema 7. Toda sequência monótona limitada é convergente.

Examinando a convergência da sequência $t_n = \frac{P_{n+1}}{P_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Na tabela 2, mostraram-se os dez primeiros termos de t_n , para $n \geq 1$.

Tabela 2– Valores para t_n para $n \geq 0$

n	t_n	N	t_n
1	2	6	2.41428571428572
2	2,5	7	2.41420118343196
3	2,4	8	2.41421568627451
4	2.41666666666667	9	2.41421319796955
5	2.41379310344828	10	2.41421362489487

Fonte: Elaborada pelo autor

Observe que não temos t_0 , pois $t_0 = \frac{P_1}{P_0} = \frac{1}{0}$, logo não existe. Sabemos que $\sqrt{2} \cong 1,414213562 \dots$, os valores calculados para t_n nos permitem conjecturar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 1 + \sqrt{2}$$

Logo, o número $1 + \sqrt{2}$ é chamado de número de prata. Boyer (2006), Santos (2017), Oliveira (2018) lembram do número de ouro, ou razão áurea, como uma proporção conhecida desde a antiguidade, dotada de propriedades matemáticas e estéticas incomuns, encontrada também na natureza. “O número de prata, possui propriedades similares e faz parte, juntamente com o número de ouro de um conjunto numérico especial chamado de números metálicos” (NORONHA, 2020, p.84).

A sequência de Pell também pode ser estudada através de representações algébricas, funções geradoras ou recorrências polinomiais. A representação algébrica, nos forneceu também conexões entre a sequência de Pell, que é definida via recorrências lineares, o que induz muitas propriedades. Diante dessas demonstrações, realizou-se o estudo das identidades de Pell.

Identidade 16. $\sum_{k=0}^n P_k = \frac{P_{n+1} - P_{n-1}}{2}$

Prova. Como resultado,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n P_k &= P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_{n-1} \\ &= \frac{P_2 - P_0 + P_3 - P_1 + P_4 - P_3 + \dots + P_n - P_{n-2}}{2} \\ &= \frac{-P_0 - P_1 + (P_2 - P_2) + (P_3 - P_3) + (P_4 - P_4) + \dots + (P_{n-2} - P_{n-2}) + P_{n+1} + P_n}{2} \\ &= \frac{-P_0 - P_1 + P_{n+1} + P_n}{2} \\ &= \frac{P_{n+1} + P_n - 1}{2} \end{aligned}$$

Identidade 17. $\sum_{k=0}^n P_{2k-1} = \frac{P_{2n} - 1}{2}$

Prova. Como resultado,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n P_k &= P_1 + P_3 + P_5 + \cdots + P_{2n-1} \\
&= \frac{P_1 + P_4 - P_2 + P_6 - P_4 + \cdots + P_{2n} - P_{2n-2}}{2} \\
&= \frac{P_1 - P_2 + (P_4 - P_4) + (P_6 - P_6) + (P_8 - P_8) + \cdots + (P_{2n-2} - P_{2n-2}) + P_{2n}}{2} \\
&= \frac{P_1 - P_2 + P_{2n}}{2} \\
&= \frac{P_{2n} - 1}{2}
\end{aligned}$$

Identidade 18. $\sum_{k=0}^n P_{2k} = \frac{P_{2n+1} - 1}{2}$

Prova. Como resultado,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n P_k &= P_2 + P_4 + P_6 + \cdots + P_{2n-2} \\
&= \frac{P_2 - P_0 + P_3 - P_1 + P_4 - P_3 + \cdots + P_n - P_{n-2}}{2} - \frac{P_1 + P_4 - P_2 + P_6 - P_4 + \cdots + P_{2n} - P_{2n-2}}{2} \\
&= \frac{-P_1 + P_{2n+1} + P_{2n}}{2} = \frac{P_{2n+1} - 1}{2}
\end{aligned}$$

Identidade 19. $\sum_{k=0}^n P_k^2 = \frac{P_{n+1}P_n}{2}$

Prova: Como $P_i^2 = \frac{P_i P_{i+1} - P_{i-1} P_i}{2}$, para $1 \leq i \leq n$, temos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n P_k^2 &= P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + \cdots + P_n^2 \\
&= \frac{P_1 P_2 + (P_2 P_3 - P_1 P_2) + (P_3 P_4 - P_2 P_3) + \cdots + (P_{n-1} P_n - P_{n-2} P_{n-1})}{2} \\
&= \frac{(P_1 P_2 - P_1 P_2) + (P_2 P_3 - P_2 P_3) + \cdots + (P_{n-2} P_{n-1} - P_{n-2} P_{n-1}) + P_{n-1} P_n}{2} \\
&= \frac{P_{n-1} P_n}{2}
\end{aligned}$$

No próximo tópico estudamos a história de Oresme e a relação entre as identidades da sequência de Oresme.

3.5 Sequência de Oresme

Figura 5- Nicole Oresme



Fonte: Mendonça e Borges Neto (2016, p.50)

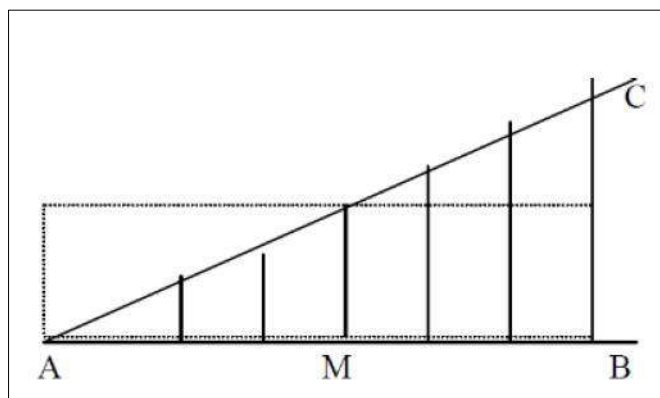
Nicole Oresme foi o filósofo mais importante do século XIV, buscava na filosofia de Aristóteles um suporte para a sistematização da filosofia cristã. Nasceu na Normandia, cerca de 1320. Segundo Mendonça e Borges Neto (2016), junto a um dos mais famosos filósofos, Jean Buridan, estudou artes na Universidade de Paris, no qual obteve o título de mestre, em seguida estudou Teologia no Colégio de Navarra da Universidade de Paris. Anos depois, assumiu o posto de bispo na cidade de Lisieux.

Clagett, (1964); Babb (2005) relatam que Oresme teve outras formações, como economista, físico, psicólogo, astrônomo. Durante o século XIV, existiram poucas produções científicas devido aos efeitos da Peste Negra, que por sua vez ocasionou perdas científicas, culturais, religiosas e artísticas. Porém algumas produções matemáticas tiveram andamento.

Mendonça e Borges Neto (2016), relatam que em 1369, Oresme traduziu do latim para o francês as obras de Aristóteles como Ética, Política, Sobre os céus e Economia, a pedido do rei da França Carlos V.

Eves (2004), Babb (2005), defendem que Oresme criou a Geometria Analítica antes de Descartes, por terem apresentado de forma gráfica as leis que comparavam a latitude e longitude, à medida que a longitude fosse sofrendo pequenas modificações.

Figura 6- Representação de Oresme



Fonte: Clagett, (1964)

Essa representação na Figura 6, por meio de símbolos, era essencial para a elaboração de conceitos matemáticos. No momento em que Oresme pensou e escreveu, a noção de função não era definida e nem utilizada na matemática (MENDONÇA; BORGES NETO, 2016). Bem como, suas escrituras de curvatura, ficaram limitadas pois não tinham uma simbologia mais avançada. Isso, se confirma quando Berlinghoff e Gouvêa (2010, p. 174) afirmam que

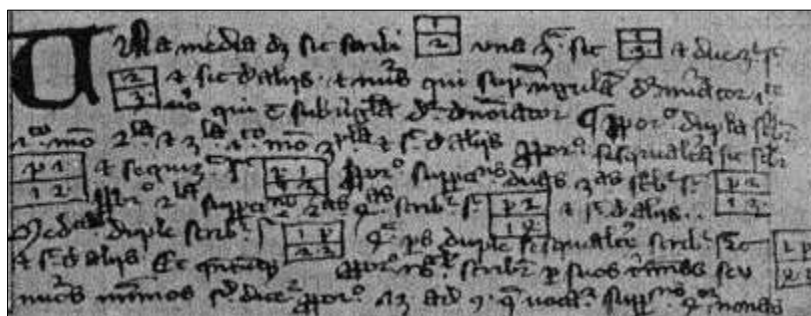
[...] a evolução de um eficiente simbolismo algébrico levou muito tempo. Não estava ainda feita no século XIV, quando Nicole Oresme descreveu um modo de representar de modo gráfico a relação entre uma variável independente e uma dependente. Pelo fim do século XIV, François Viète tentou destilar a essência da análise geométrica dos gregos antigos representando quantidades com letras e relações com equações.

Embora essa ausência de símbolos não permitisse uma escrita mais elaborada, Youschkevitch (1976); Eves (1997); Struik (1992), relatam que um século depois, esses manuscritos sobre Matemática serviram para diversas publicações, influenciando muitos matemáticos do Renascimento, inclusive Descartes.

Os principais trabalhos de Oresme são referentes a pontos por coordenadas, expoente fracionários e soma de séries infinitas, baseados Thomas Bradwardine (1290? -1349), filósofo, teólogo e matemático do Período Medieval, cuja obra, intitulada *Tractatus de propotionibus* (Tratado de proporções), escrita em 1328 (BOYER, 2012).

As obras escritas por Oresme com contribuições matemáticas formam escritas durante a década de 1351 a 1361. A obra *Algorismus Proportionum* foi um tratado que apresenta regras com manipulação de expoentes, bem como problemas com Geometria e Física. Esse trabalho tenta representar a multiplicação de razões, envolvendo tanto expoentes inteiros ou fracionários, fazendo uma explicação de proporções racionais e irracionais (BOYER, 1943; CLAGETT, 1964; GRANT, 1965).

Figura 7- Manuscritos de Oresme (1ª parte)

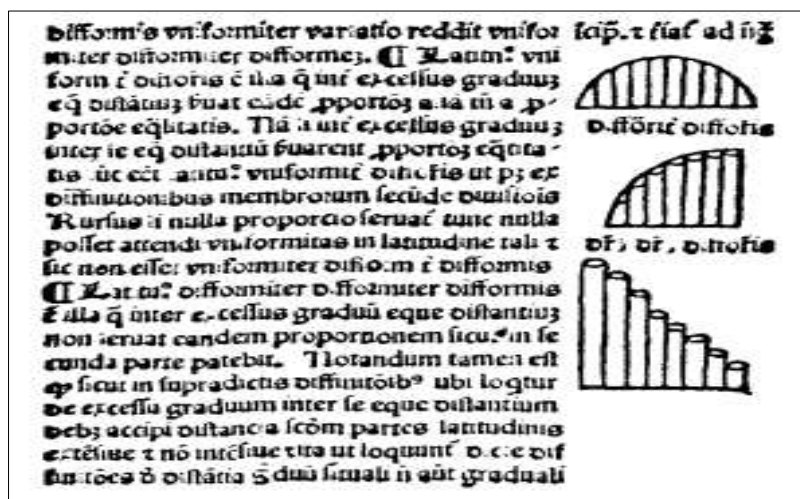


Fonte: CAJORI (1928, p. 92)

Na Figura 7, demonstra em latim as expressões $\frac{p}{1} \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} \frac{p}{2}$; $\frac{1}{4} \frac{p}{2} \frac{1}{2}$. Já na obra *Questiones super geometriam Euclidis*, a tradução mais explorada foi a de L.L. Busard, edição de 1961, com dois manuscritos de Oresme. Esse trabalho é composto por vinte e uma questões divididas em três grupos. No primeiro grupo, aborda problemas que envolvem o infinito e incomensurabilidade. No segundo grupo, apresenta a representação gráfica de qualidades e velocidades. E por fim, no terceiro, trata dos conceitos sobre ângulos.

Na obra *De configurationibus qualitatum et motuum*, Oresme tem como objetivo principal expressar a qualidade em quantidade por meio de figura geométrica. Nesse manuscrito é explorados os movimentos uniformes e os não uniformes, por segmentos desenhados de maneira vertical para o que se referia a velocidade. E segmentos perpendiculares para representar o tempo (YOUSCHKEVITCH, 1976). Como mostra a Figura 8.

Figura 8- Manuscritos de Oresme (2ª parte)

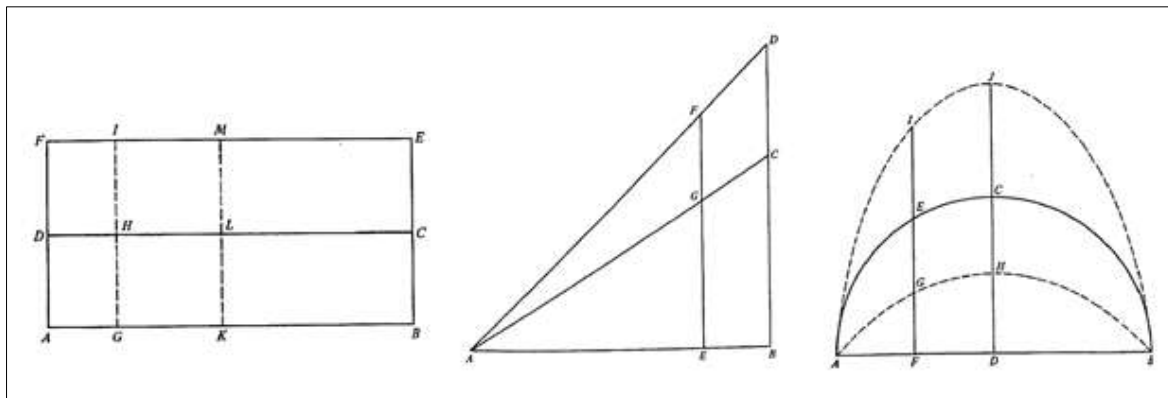


Fonte: Mendonça e Borges Neto (2016, p.55)

O estudo sobre a qualidade surge com uma teoria que pode explicar os fenômenos físicos, pois Oresme inicia também uma espécie de classificação para qualidades lineares, esse trabalho se restringe aos tipos principais (YOUSCHKEVITCH, 1976; SERRANO E

SUCEAVĂ,2015). De acordo com a Figura 9, Oresme estabelece uma relação entre duas variáveis, como definição praticável, sendo também representada geometricamente por meio de gráficos.

Figura 9- Formas de Oresme



Fonte: Clagett, (1964).

Na Figura 9 mostra os tipos de qualidades. No retângulo faz uma representação para o movimento uniforme. O movimento uniformemente acelerado foi apresentado por triângulos retângulos de mesma base, nesse caso se considerar as alturas, terão a mesma razão.

As curvas são em alguns dos casos semicírculos que mostram o movimento com aceleração variável. Em todos os casos, a altitude será proporcional à intensidade da qualidade, bem como a área das curvas, parte mensurável, unindo os pontos finais da latitude.

Horadam (1974) afirma que na metade do século XIV, Oresme encontrou a soma para os seguintes números racionais $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \frac{5}{32}, \frac{6}{64}, \dots, \frac{n}{2^n}$, porém nunca publicou nenhum desses resultados.

Já Stillwell (1989, p.119), relata que a descoberta do comportamento de convergência da série indicada pela soma infinita $\sum_{i=0}^{\infty} O_i = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \frac{6}{64} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots = 2$, foi devido a Oresme. Hoje conhecemos essa soma como integral imprópria (NICODEMI,2010). Vejamos agora a definição para sequência de Oresme.

Definição 11. Os números de Oresme podem ser descritos por

$$O_{n+2} = O_{n+1} - \frac{1}{4}O_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Sabendo que $O_0 = 0, O_1 = \frac{1}{2}, n \geq 0$.

Horadam (1974, p. 268) fornece algumas identidades lineares com os números de Oresme.

Identidade 20: $O_{n+2} - \frac{3}{4}O_n + \frac{1}{4}O_{n-1} = 0;$

Identidade 21: $O_{n+2} - \frac{3}{4}O_{n+1} + \frac{1}{16}O_{n-1} = 0;$

Identidade 22: $\sum_{j=0}^{n-1} O_j = 4(\frac{1}{2} - O_{n+1});$

Identidade 23: $\sum_{j=0}^{\infty} O_j = 2;$

Identidade 24: $\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j O_j = \frac{4}{9} [-\frac{1}{2} + (-1)^n (O_{n+1} - 2O_n)];$

Após essas identidades, como pesquisas mais recentes, Cook (2004) mostra novas identidades envolvendo tais números.

Identidade 25: $\sum_{i=0}^{n-1} O_{2i} = \frac{4}{9} [2 + (O_{2n-1} - 5O_{2n})];$

Identidade 26: $\sum_{i=0}^{n-1} O_{2i+1} = \frac{1}{9} [10 + (5O_{2n-1} - 16O_{2n})].$

Logo, no próximo tópico estudou-se o contexto histórico e a relação entre as identidades da sequência de Mersenne.

3.6 Sequência de Mersenne

Figura 10– Marin Mersenne



Fonte: Manguiera (2022, p.68)

Marin Mersenne (1588-1648) foi matemático, teórico musical, padre, teólogo e filósofo. Mersenne fez um trabalho original em acústica e com os números primos. Atualmente, seu nome está relacionado aos números primos chamados de primos de Mersenne.

Mersenne nasceu em 1588, em uma cidade chamada Oizée, seus pais eram modestos, mas se esforçaram para cuidar de sua educação, enviando-o para uma escola de jesuítas, a mesma escola que Descarte frequentava alguns anos antes (SHIRALI,2013). Esperava-se que ele se juntasse à igreja, mas sua vontade de estudar teve um papel decisivo na formação

de seu futuro. Em um caminho à Paris, para estudos em filosofia e teologia, hospedou-se num convento da Ordem dos Mínimos, esse contato o tocou profundamente.

Mersenne completou seus estudos em Sorbonne em 1611 e prontamente voltou à Ordem dos Mínimos em Paris. Essa Ordem, tinha se estabelecido dois séculos anteriores, consideravam-se como a menor da região, daí o seu nome de “minims”. Nesse momento, Mersenne recebeu um lugar para estudo junto a uma bolsa.

Em 1614, Mersenne ensinou filosofia e teologia nesses mosteiros. Por volta desse ano, o matemático descobriu e explorou a curva conhecida como cicloide. Foi nesse período, que seu trabalho começou a ganhar forma, mantendo vínculos com outros estudiosos e trocando ideias com eles. Mersenne hospedou-se no mosteiro Place du Royale em Paris da segunda metade desta década até o fim de sua vida, uma permanência de mais de trinta anos, apoiada na maior parte pela Igreja.

Uma transformação aconteceu na vida de Mersenne em 1620. Seus escritos iniciais foram sobre temas religiosos e teriam sido considerados como “pró- Aristóteles e anti – Galileu”. No início da década de 1630, Shirali (2013) afirma que, Mersenne estava convencido que suas ideias deveriam ser propagadas. Nesse momento, ele também já tinha decidido que dedicaria seu tempo às ciências e à Matemática, na qual começou a manter contatos com outros cientistas e matemáticos como Descartes, Fermat, Pascal entre outros.

Em meados do século XVIII, Euler provou que todo número perfeito par surge de um primo de $2^n - 1$. Mersenne passou muito tempo pesquisando os primos desse tipo e em sua honra a esses primos da forma são agora chamados primos de Mersenne. Para resumir, escrevemos $M_n = 2^n - 1$; então M_n é chamado de número de Mersenne. Isto é fácil de demonstrar.

Prova: Se n é composto, então assim é M_n . De fato, se a é um fator próprio de n , então M_a é um fator próprio de M_n .

Se x, a e b são inteiros positivos, com $x > 1$ e $b > 1$, então $x^a - 1$ é um divisor próprio de $x^{ab} - 1$.

Expressando isso em forma contra positiva, obtivemos o seguinte resultado simples:

Se M_n é primo, então n é primo. Infelizmente, a recíproca desta afirmação é falsa; isto não é verdade que M_p é primo para todo primo p . Aqui estão os primeiros dez primos p para os quais M_p é primo: 2,3,5,7,13,17,19,31,61,89.

Segundo Catarino, Campos e Vasco (2016), essa identidade é chamada de Fórmula de Binet para a sequência de Mersenne e vem do fato de que a sequência de Mersenne números também pode ser definida recursivamente por:

$$M_{n+1} = 2M_n + 1$$

Para $M_0 = 0$ e $M_1 = 1$. Como essa sequência recorrente não é homogênea, substituindo n por $n + 1$ temos uma nova representação

$$M_{n+2} = 2M_{n+1} + 1$$

Subtraindo essas duas equações temos:

$$M_{n+2} - M_{n+1} = 2M_{n+1} + 1 - 2M_n - 1$$

$$M_{n+2} = M_{n+1} + 2M_{n+1} - 2M_n$$

$$M_{n+2} = 3M_{n+1} - 2M_n$$

Essa equação é outra forma para a relação de recorrência da sequência de Mersenne, com condições iniciais para $M_0 = 0$ e $M_1 = 1$. Sabe-se que a equação característica é representada por uma equação quadrática $x^2 - 3x + 2 = 0$, na qual suas raízes são 2 e 1. Dessa maneira, temos que a raiz de valor 2, representa a relação de convergência entre os termos vizinhos da sequência de Mersenne.

Catarino, Campos e Vasco (2016, p. 39) fornecem algumas identidades com os números de Mersenne.

Identidade 27: (Identidade de Catalan) Para todo $n \geq r$ temos

$$M_{n-r}M_{n+r} - M_n^2 = 2^{n+1} - 2^{n-r} - 2^{n+r}$$

Prova: Usando a fórmula de Binet, obtemos facilmente

$$\begin{aligned} M_{n-r}M_{n+r} - M_n^2 &= (2^{n-r} - 1)(2^{n+r} - 1) - (2^n - 1)^2 \\ &= 2^{2n} - 2^{n-r} - 2^{n+r} + 1 - 2^{2n} + 2^{n+1} - 1 \\ &= 2^{n+1} - 2^{n-r} - 2^{n+r} \end{aligned}$$

Observe que para $r = 1$ na identidade de Catalan obtida, tivemos a identidade de Cassini para esta sequência. De fato, a equação de Catalan, para $r = 1$, produz

$$M_{n-1}M_{n+1} - M_n^2 = 2^{n+1} - 2^{n-1} - 2^{n+1}$$

E obtemos o seguinte resultado

Identidade 28: (Identidade de Cassini)

$$M_{n-1}M_{n+1} - M_n^2 = -2^{n-1}$$

Novamente usando a fórmula de Binet, obtemos outra propriedade do Mersenne

sequência que é indicada na proposição a seguir

Proposição 3. Se M_n é o n -ésimo termo da sequência de Mersenne, então temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{M_{n-1}} = r_1$$

Prova:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{M_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n - 1)}{(2^{n-1} - 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - \frac{1}{2^n})}{(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n})}$$

Desde $|\frac{1}{2}| < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{2})^n = 0$. Em seguida usamos esse fato na proposição 3, obtendo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{M_{n-1}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = r_1$$

Além disso, podemos facilmente mostrar o seguinte resultado usando ferramentas básicas de cálculo de limites e proposição 3.

Corolário 1. Se M_n é o n -ésimo termo da sequência de Mersenne, então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{n-1}}{M_n} = \frac{1}{r_1}$$

Por conseguinte, no próximo tópico estudou-se a história de Jacobsthal e a relação entre as identidades da sequência de Jacobsthal.

3.7 Sequência de Jacobsthal

Figura 11– Ernst Erich Jacobsthal



Fonte: Siegmund-Schultze (2009).

Os pais de Ernst Erich Jacobsthal eram Martin Jacobsthal e Ida Rosenstern. Martin Jacobsthal era médico, como seu pai. Ernst tinha um irmão mais velho, Paul, nascido em 1880, que mais tarde se tornou um eminente arqueólogo.

Ernst Jacobsthal nasceu em 16 de outubro de 1882 em Berlim, estudou matemática na Universidade de Berlim, no qual foi ensinado por Georg Frobenius, Hermann Schwarz e Issai Schur. Frobenius e Schur supervisionaram seus estudos de doutorado e ele obteve seu doutorado em 1906 após apresentar sua tese *Anwendung einer Formel aus der Theorie der quadratischen Reste*. Esse trabalho que agora é um clássico e que é frequentemente referido na maioria dos principais livros de teoria dos números.

Na tese Jacobsthal, entre outras coisas, prova muito bonita de que todo número primo pode ser escrito como a soma de dois números quadrados. Ele também mostrou que é possível encontrar uma solução $p = x^2 + y^2$, nos quais x e y podem ser expressos com somas simples sobre símbolos de Legendre.

Em 1909, Jacobsthal tornou-se professor na escola secundária Kaiser Wilhelms (realgymnasium) em Berlim. Além disso, foi assistente do professor E Lampe na Faculdade de Tecnologia de Berlim e, em 1913, tornou-se professor particular sênior no mesmo local.

Em 1918 recebeu o título de Professor e, em 1922, tornou-se professor *Ausserordentlicher* na Faculdade de Tecnologia de Berlim. Para nós, parece estranho que ele fosse professor e professor de licença ao mesmo tempo. Quando Jacobsthal foi associado à Faculdade de Tecnologia, não foi para ensinar matemática a futuros engenheiros. Na Alemanha, como em muitos outros países após a Primeira Guerra Mundial, havia escassez de professores no Ensino Médio.

Para formar mais professores de matemática, a ciência foi introduzida em várias faculdades técnicas, incluindo a de Berlim. Assim, o objetivo da associação de Jacobsthal com o College foi, principalmente, dar aulas de matemática para futuros professores no Ensino Médio.

Em 1918, Jacobsthal casou-se com Anne-Marie, nascida Coste. Com esse casamento, iniciou-se uma longa e rica parceria em que ela o ajudava em seu trabalho organizando tudo, na medida do possível, para que ele pudesse se concentrar tranquilamente em sua pesquisa. Ela também datilografou a maioria de seus manuscritos.

Quando Hitler tomou o poder na Alemanha, a semente foi lançada para o jogo do destino que mais tarde trouxe Jacobsthal para a Noruega. Ele nasceu em uma minoria que era indesejada no Terceiro Reich.

Já em 29 de março de 1934, Jacobsthal recebeu uma carta do Ministério Preussiano da Ciência, sendo demitido de sua cátedra. A única atividade que ainda estava aberta para ele era retornar ao cargo de professor na escola secundária do Kaiser Wilhelm. No entanto, ficou claro que essa posição também seria tirada dele em pouco tempo. Jacobsthal, foi um

pesquisador de vida e alma, e que provavelmente não estava muito interessado em ensinar nas séries iniciais, percebeu que a única coisa sensata a fazer era renunciar do cargo de professor.

Na primavera de 1939, as condições na Alemanha levaram Jacobsthal a decidir que era melhor deixar o Terceiro Reich enquanto ainda era possível. Seu único irmão, Paul, que era um conhecido arqueólogo, já havia saído da Alemanha e se tornado professor em Oxford.

No verão de 1939, Jacobsthal deixou Berlim para se juntar ao irmão na Inglaterra. No caminho ele parou na Noruega, onde quis visitar seu amigo Max Dehn, que esteve atuando como substituto do professor Viggo Brun em Trondheim. Durante a estada de Jacobsthal em Trondheim, estourou a Segunda Guerra Mundial e uma viagem à Inglaterra já não era uma tarefa fácil. Jacobsthal ficou em Trondheim durante o outono e se sentiu confortável no ambiente matemático de lá.

Na primavera de 1940, Jacobsthal planejou continuar sua jornada, mas um pé ferido o fez ficar em Trondheim até 9 de abril, quando eclodiu a guerra na Noruega. A ocupação da Noruega deve ter sido um choque para Jacobsthal e sua esposa, que havia ficado em Berlim. O melhor que o professor Jacobsthal podia esperar agora era que a guerra fosse curta e tivesse um desfecho que lhe possibilitasse voltar para a Alemanha.

Jacobsthal ficou em Trondheim até janeiro de 1943. Então, a situação na Noruega também obrigou a sua fuga, se quisesse salvar sua vida. O matemático tcheco Paul Kuhn, que veio a Trondheim para trabalhar com o professor Brun, estava na mesma situação.

Quando a libertação chegou, Jacobsthal quis retornar à Trondheim para seus amigos e para o ambiente matemático de lá. Ele conseguiu ter um cargo pessoal estabelecido no Instituto Norueguês de Tecnologia (Norges Tekniske Hogskole). Desta vez Jacobsthal chegou à Trondheim com sua esposa e, pouco depois, ambos se tornaram cidadãos noruegueses.

Quando a Freie Universität em Berlim Ocidental foi fundada após a guerra, Jacobsthal foi logo convidado para ser um palestrante convidado durante o período de verão. Ele aceitou esse convite. A nova Alemanha, como a conheceu em Berlim Ocidental, tornou-se uma alegria para ele e tirou o medo dos tempos nazistas.

Nos anos seguintes, ele lecionou lá todos os verões até o verão de 1957. Naquele ano, ele adoeceu durante a estadia em Berlim. Seu coração começou a falhar. Jacobsthal foi um bom embaixador da nova universidade em Berlim e obteve muitos bons contatos para ela. Por suas grandes realizações para a Freie Universität, ele foi homenageado em seu 70º aniversário ao se tornar o primeiro cidadão honorário da universidade.

Devido à deterioração da saúde, Jacobsthal foi impedido de dar mais palestras após o outono de 1957. Também tornou difícil para ele continuar morando na Noruega. O inverno foi longo, e ele sentiu necessidade de um clima mais quente. Assim, no outono de 1958, Jacobsthal e sua esposa se mudaram para Überlingen, que ficou até o seu falecimento.

O professor Jacobsthal era um matemático muito significativo e versátil. Ele escreveu artigos em campos tão diversos como álgebra, análise, teoria das funções e teoria dos números. Ele também foi um pesquisador muito produtivo e escreveu mais de 70 artigos científicos no total. Segundo Selberg (1965) afirma que Jacobsthal é o matemático que mais publicou dissertações em nossa comunidade. Seu tempo em Trondheim foi muito produtivo.

Jacobsthal tornou-se membro da nossa comunidade em 1946 e da Academia Norueguesa de Ciências (Norske Videnskapsakademi) em Oslo a partir de 1950. No dia 6 de fevereiro de 1965, Ernst Jacobsthal faleceu aos 82 anos. Selberg (1965) relata o discurso memorial foi proferido por Jacobsthal na reunião do Det Kongelige Norske Videnskabers Selskabs Forhandlinger, e que Ernst teve uma estranha habilidade de se relacionar com qualquer pessoa com quem entrasse em contato.

Seus interesses variavam de um espectro tão grande, de problemas matemáticos difíceis até os pequenos altos e baixos da vida cotidiana, que ele podia atingir a mente de todos. Na verdade, ele era tão humanamente simples e natural, que você tinha que gostar dele (SELBERG, 1965, p.70). Anos depois, continuou sendo estudada a sequência que leva o nome de Jacobsthal.

Segundo Falcon e Plaza (2007) a sequência de k-Fibonacci já havia sido definida para todo número real positivo k, de acordo com a lei de recorrência $F_{k,n+1} = k \cdot F_{k,n} + F_{k,n-1}$, para $n \geq 1$. Sendo as condições iniciais como: $F_{k,0} = 0$ e $F_{k,1} = 1$. Se para valor de $k = 1$, obtêm-se a sequência clássica de Fibonacci $F_n = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$. Da mesma forma, se o valor de $k = 2$, escreve-se a sequência de Pell $P_n = \{0, 1, 2, 5, 12, 70, 169, \dots\}$.

Assim, da mesma forma, apresenta-se uma definição para a sequência de k-Jacobsthal com a relação de recorrência $J_{k,n+1} = J_{k,n-1} + k \cdot J_{k,n-2}$, para $n \geq 2$. Sendo as condições iniciais como: $J_{k,0} = 0$ e $J_{k,1} = 1$. É importante destacar, que se utilizar $k = 1$ e $k = 2$, obtêm-se respectivamente a sequência usual de Fibonacci e a sequência de Jacobsthal que está representada por $J_n = \{0, 1, 1, 3, 5, 11, \dots\}$. Logo, apresentam-se as identidades relativas à sequência de k-Jacobsthal.

Identidade 29 (Identidade de Binet):

Com a base na relação de recorrência de Jacobsthal definida anteriormente, temos:

$$\frac{J_{k,n}}{J_{k,n-1}} = k + 2 \frac{1}{\frac{J_{k,n-1}}{J_{k,n-2}}}$$

Considerando a razão $t_n = \frac{J_{k,n}}{J_{k,n-1}}$, obtemos :

$$t_n = k + 2 \cdot \frac{1}{\frac{J_{k,n-1}}{J_{k,n-2}}} = k + 2 \cdot \frac{1}{t_{n-1}}$$

Segundo Martínez e Salas (2011), se assumimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_{k,n}}{J_{k,n-1}} = r$ existe.

Podemos determinar uma equação quadrática $r^2 - k \cdot r - 2 = 0$, no qual as raízes são $r_1 = \frac{k + \sqrt{k^2 + 8}}{2}$ e $r_2 = \frac{k - \sqrt{k^2 + 8}}{2}$.

Baseado nessas informações, temos que $J_{k,n} = a_1 \cdot r_1^n + a_2 \cdot r_2^n$, para $n = 0$ e $n = 1$, podemos formar o seguinte sistema $\begin{cases} J_{k,0} = a_1 \cdot r_1^0 + a_2 \cdot r_2^0 = 0 \\ J_{k,1} = a_1 \cdot r_1^1 + a_2 \cdot r_2^1 = 1 \end{cases}$ isso implica dizer que:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 \cdot r_1 + a_2 \cdot r_2 = 1 \end{cases}, \text{ logo afirmamos que } a_1 = -a_2, \text{ se substituimos na segunda}$$

equação do sistema teremos $a_1 \cdot r_1 + a_2 \cdot r_2 = 1 \Leftrightarrow a_1(r_1 - r_2) = a_1(\sqrt{k^2 + 8}) = 1$.

Desse modo, obtemos $a_1 = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 8}} = -a_2$. Assim, $J_{k,n} = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 8}} \cdot \left[\left(\frac{k + \sqrt{k^2 + 8}}{2} \right)^n - \left(\frac{k - \sqrt{k^2 + 8}}{2} \right)^n \right]$.

Utilizando essa identidade de Binet, podemos estabelecer uma forma fechada para os termos da sequência de k-Jacobsthal. No próximo tópico estudou-se a história e a relação entre as identidades da sequência de Narayana.

3.8 Sequência de Narayana

Figura 12– Narayana Pandita



Fonte: <https://www.mathsone.com/blog-details/blog/89-Narayana-Pandit>

Essa sequência foi denominada devido ao seu vanguardista Narayana Pandita (1340-1400). Segundo Puttaswamy, (2012) Narayana foi um importante indiano matemático, autor da obra Ganita Kaumudi, Tratado de aritmética mais significativo depois dos de Bhaskara II.

Esse Tratado matemático chamado de o “luar da Matemática”, foi finalizado em 1356. Narayana foi um dos primeiros autores a introduzir quadrados mágico na aritmética indiana, sendo o tratamento de permutações, combinações e quadrados mágicos são muito amplos (PLOFKER, 2009). Essa introdução pioneira dos quadrados mágicos na Matemática é confirmada por

A estrutura de Ganitakaumudi é em grande parte baseada na Lilavati, mas também contém algumas investigações mais extensas de vários tópicos, incluindo permutações e combinações (a "rede de números"), acompanhada por uma longa seção em quadrados mágicos. O primeiro dos seguintes trechos mostra algumas das regras combinatórias de Narayana, em particular o diagrama chamado "Meru parcial" (chamado para o Monte Meru na mitologia hindu) para classificar permutações. A última parte é a introdução de Narayana à matemática dos quadrados mágicos. Os versos numerados de Ganitakaumudi são complementados por um comentário em prosa, que pode ou não ser pelo próprio Narayana". (KATZ, 2007, p. 498)

No século XIV, Narayana propôs um problema: Uma vaca dá à luz a um bezerro todos os anos. O bezerro, por sua vez, dá à luz a outro bezerro quando tem três anos de idade. Qual o número de bezerros produzidos por uma vaca em 20 anos?

Esse problema originou a sequência de Narayana que pode ser representada por $(0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, \dots)$. Partindo dessa informação pode-se definir a sequência de recorrência.

Definição 12: $N_r = N_{r-1} + N_{r-3}$, $r \geq 3$, para termos iniciais $N_0 = 0, N_1 = N_2 = 1$.

Partindo da definição 12, segundo Stanley (2015) relata que os números de Narayana foram descobertos pelo britânico inglês Alexander MacMahon (1854-1929) e redescobertos por Tadepalli Venkata Narayana (1930-1987). Os números de Narayana têm uma relação próxima aos números Euclidianos por meio da interpretação combinatória, bem como com os números de Catalan (PERTERSEN 2015).

Com base na lei de recorrência para os números de Narayana temos algumas identidades, segundo Cerda-Morales (2018) essa sequência é de terceira ordem que pode ser definida $N_r = p_a N_{r-a} + q_a N_{r-2a} + N_{r-3a}$, no qual os valores para p_a e $q_a \in \mathbb{Z}$.

Lema 1. $N_r = N_{r-2} + 2N_{r-4} + N_{r-6}$, $N_r = 4N_{r-3} - 3N_{r-6} + N_{r-9}$ e $N_r = 5N_{r-4} - 2N_{r-8} + N_{r-12}$ para qualquer $r \in \mathbb{Z}$.

Prova. Para $r = 6$, temos $N_6 = 4 = 2 + 2 \cdot 2 + 0 = N_4 + 2N_2 + N_0$. Assumindo que $N_t = N_{t-2} + 2N_{t-4} + N_{t-6}$, para todo $t < r$. Pode-se afirmar que

$$\begin{aligned} N_r &= N_{r-1} + N_{r-3} = (N_{r-3} + 2N_{r-5} + N_{r-7}) + (N_{r-5} + 2N_{r-7} + N_{r-9}) \\ &= (N_{r-3} + N_{r-5}) + 2(N_{r-5} + N_{r-7}) + (N_{r-7} + N_{r-9}) \\ &= N_{r-2} + 2N_{r-4} + N_{r-6} \end{aligned}$$

De maneira análoga, temos:

Para $r = 9$, temos $N_9 = 13 = 4 \cdot 4 - 3 \cdot 1 + 0 = 4N_3 - 3N_6 + N_0$. Assumindo que $N_t = 4N_{t-3} - 3N_{t-6} + N_{t-9}$, para todo $t < r$. Pode-se afirmar que

$$\begin{aligned} N_r &= N_{r-1} + N_{r-3} = (4N_{r-4} - 3N_{r-7} + N_{r-10}) + (4N_{r-6} - 3N_{r-9} + N_{r-12}) \\ &= 4(N_{r-4} + N_{r-6}) - 3(N_{r-7} + N_{r-9}) + (N_{r-10} + N_{r-12}) \\ &= 4N_3 - 3N_6 + N_0. \end{aligned}$$

Da mesma forma temos:

Para $r = 12$, temos $N_{12} = 41 = 5 \cdot 9 - 2 \cdot 2 + 0 = 5N_8 - 2N_4 + N_0$. Assumindo que $N_t = 5N_{t-4} - 2N_{t-8} + N_{t-12}$, para todo $t < r$. Pode-se afirmar que

$$\begin{aligned} N_r &= N_{r-1} + N_{r-3} = (5N_{r-5} - 2N_{r-9} + N_{r-13}) + (5N_{r-7} - 2N_{r-11} + N_{r-15}) \\ &= 5(N_{r-5} + N_{r-7}) - 2(N_{r-9} + N_{r-11}) + (N_{r-13} + N_{r-15}) \\ &= 5N_8 - 2N_4 + N_0. \end{aligned}$$

No próximo tópico estudou-se a história e relação entre as identidades da sequência de Padovan.

3.9 Sequência de Padovan

Figura 13- Gérard Cordonnier



Fonte: Internacional (2021)

Concebida pelo italiano Richard Padovan (1935-?), a sequência de Padovan foi denominada ao descobrimento ao arquiteto Hans van Der Laan (VOET 2012), sendo posteriormente analisada juntamente pelo matemático Gérard Cordonnier (1907-1977), o

qual colaborou para o conhecimento desses números (VOET, 2012). Essa sequência é considerada como um “primo” da sequência de Fibonacci (ALSINA; NELSEN, 2015).

Vieira e Alves (2019) afirmam que a sequência de Padovan é recorrente e linear, ou seja, são necessários termos anteriores para calcular o próximo termo, no qual os termos iniciais são representados por $Pa_0 = Pa_1 = Pa_2 = 1$. Logo, a sequência será definida como:

Definição 13. $Pa_n = Pa_{n-2} + Pa_{n-3}, n \geq 3$.

Segundo Marohnic e Strmecki (2012) a razão entre os seus termos vizinhos P_{n+1}/P_n , essa relação consiste em um resultado conhecido com o número plástico ou constante plástica, no qual o valor aproximado é $\psi = 1.324718 \dots$ as formas de calcular a razão áurea e a constante plástica têm as mesmas definições (MAROHNIC; STRMECKI, 2012, p.1).

Dessa maneira, baseado em trabalhos como Cereceda (2015), Miller (1971) e Hare, Prodinger e Shallit (2014), que exploram a extensão da sequência de Fibonacci, consideravam os elementos a partir das somas de dois, três ou quatro termos anteriores, “é possível estender os números de Padovan considerando um número maior de termos para estimar o próximo” (VIEIRA; ALVES, 2019, p.2).

Assim, a sequência de Padovan é caracterizada como uma sequência de terceira ordem, pois sua relação de recorrência com dois termos anteriores acontece a partir de um salto. De acordo com a Definição 13, forma-se a sequência de Padovan (1,1,1,2,2,3, 4, ...). Portanto, fazendo algumas manipulações algébricas nessa recorrência, tem-se:

$$Pa_{n+1} = Pa_{n-1} + Pa_{n-2}$$

Logo,

$$Pa_{n-2} = Pa_{n+1} - Pa_{n-1}$$

Dessa forma, permite-se escrever os números de Padovan na seguinte forma:

$$Pa_1 = Pa_4 - Pa_2$$

$$Pa_2 = Pa_5 - Pa_3$$

$$Pa_3 = Pa_6 - Pa_4$$

$$Pa_4 = Pa_7 - Pa_5$$

$\vdots$

$$Pa_{2n-1} = Pa_{2n+2} - Pa_{2n}$$

$$Pa_{2n} = Pa_{2n+3} - Pa_{2n+1}$$

$$Pa_{2n+1} = Pa_{2n+4} - Pa_{2n+2}$$

Com base nessas relações acima, inicia-se o estudo das identidades unidimensionais para o número de Padovan, indicado por Pa_n , sendo $n \in \mathbb{N}$.

Identidade 30. A soma dos n primeiros termos de índice ímpar é dada por (VIEIRA,2020)

$$\sum_{i=1}^n Pa_{2i-1} = Pa_{2n+2} - 1$$

Prova. Considerando somente os termos com índice ímpar, obtêm-se:

$$\sum_{i=1}^n Pa_{2i-1} = Pa_1 + Pa_3 + Pa_5 + \dots + Pa_{2n-1}$$

$$= (Pa_4 - Pa_2) + (Pa_6 - Pa_4) + (Pa_8 - Pa_6) \dots + (Pa_{2n+2} - Pa_{2n})$$

$$= Pa_{2n+2} - Pa_2 = Pa_{2n+2} - 1.$$

Identidade 31. A soma dos n primeiros termos de índice par é dada por (VIEIRA,2020)

$$\sum_{i=1}^n Pa_{2i} = Pa_{2n+3} - 2$$

Prova. Considerando somente os termos com índice par, obtêm-se:

$$\sum_{i=1}^n Pa_{2i} = Pa_2 + Pa_4 + Pa_6 + \dots + Pa_{2n-1}$$

$$= (Pa_5 - Pa_3) + (Pa_7 - Pa_5) + (Pa_9 - Pa_7) \dots + (Pa_{2n+3} - Pa_{2n+1})$$

$$= Pa_{2n+3} - Pa_3 = Pa_{2n+3} - 2.$$

Identidade 32. A soma dos n primeiros termos é dada por (VIEIRA,2020)

$$\sum_{i=1}^n Pa_i = Pa_{n+5} - 3$$

Prova. Considerando os termos da sequência, tem-se:

$$\sum_{i=1}^n Pa_i = Pa_1 + Pa_2 + Pa_3 + \cdots + Pa_n$$

$$\begin{aligned} &= (Pa_4 - Pa_2) + (Pa_5 - Pa_3) + (Pa_6 - Pa_4) + \cdots + (Pa_{n+3} - Pa_{n+1}) \\ &= (-Pa_2 - Pa_3) + (Pa_4 - Pa_4) + (Pa_5 - Pa_5) + \cdots + (Pa_{n+1} - Pa_{n+1}) + (Pa_{n+2} - Pa_{n+3}) \\ &= Pa_{n+2} + Pa_{n+3} - Pa_2 - Pa_3 \\ &= Pa_{n+5} - 1 - 2 \\ &= Pa_{n+5} - 3. \end{aligned}$$

Identidade 33. A soma de quaisquer três termos consecutivos é dada por (VIEIRA,2020).

$$Pa_n + Pa_{n+1} + Pa_{n+2} = Pa_{n+5}.$$

Prova. Aplicando a definição 13, temos que

$$Pa_n + Pa_{n+1} + Pa_{n+2} = Pa_{n+3} + Pa_{n+2} = Pa_{n+5}.$$

Identidade 34. A soma de quaisquer sete termos consecutivos é dada por (VIEIRA,2020).

$$\sum_{i=0}^6 Pa_{n+i} = 2Pa_{n+8}$$

Prova. Aplicando a definição 13, tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^6 Pa_{n+i} &= Pa_n + Pa_{n+1} + Pa_{n+2} + Pa_{n+3} + Pa_{n+4} + Pa_{n+5} + Pa_{n+6} \\ &= Pa_{n+3} + Pa_{n+2} + Pa_{n+3} + Pa_{n+4} + Pa_{n+5} + Pa_{n+6} \\ &= Pa_{n+5} + Pa_{n+6} + Pa_{n+5} + Pa_{n+6} \\ &= Pa_{n+8} + Pa_{n+8} \\ &= 2Pa_{n+8}. \end{aligned}$$

No próximo tópico estudou-se a história e relação entre as identidades da sequência de Perrin.

3.10 Sequência de Perrin

Olivier Raoul Perrin nasceu em 2 de dezembro de 1841, no qual vários membros de sua família se destacaram nas artes e nas ciências. Após brilhantes estudos clássicos, coroado com um prêmio honorário no Concours général des lycées de Paris, ingressou na Ecole

Polytechnique em 1859 e se formou em terceiro lugar, em 1861, como estudante de engenharia nas minas.

Sua vida era simples e de um bom servidor da pátria, que colocava seu dever profissional acima de tudo. Além disso, Raoul Perrin foi modesto e reservado; era uma daquelas pessoas que não sabiam se afirmar e que não se entregavam à primeira.

Quando se penetrou em sua intimidade, não se pode deixar de amá-lo por sua retidão e bondade, estimá-lo por sua consciência, admirá-lo por sua maravilhosa inteligência e pelo perfeito equilíbrio de suas faculdades. Ele era capaz de enfrentar qualquer situação e ter êxito em tudo.

Seu poder de assimilação foi realmente surpreendente; seu julgamento era sensato e perspicaz; suas opiniões estiveram sempre estampadas no bom senso, essa rara qualidade. No tempo de lazer que lhe restava de seus deveres administrativos, e mais tarde, quando se aposentou, Perrin ocupou com trabalhos científicos e mostrou sua predileção pela Matemática.

Várias de suas memórias, que revelam uma grande profundidade de espírito, foram objeto de comunicações altamente apreciadas na Academia de Ciências ou outras sociedades eruditas e lhe renderam distinções lisonjeiras. Foi assim que a Sociedade Matemática da França o elevou à presidência em 1908 e a Sociedade Filomática de Paris lhe concedeu a mesma honra em 1909.

Devido suas contribuições na área da Matemática seu nome foi atribuído à sequência de Perrin, essa que, por sua vez tem grande importância na teoria dos grafos, que é usada para determinar as coordenadas de localização de táxis nas cidades de maneira confidencial (SUGUMARAN; RAJESH, 2017). Essa sequência é definida pela lei de recorrência.

Definição 14. $Pe_n = Pe_{n-2} + Pe_{n-3}, n \geq 3$.

Para $Pe_0 = 3, Pe_1 = 0$ e $Pe_2 = 2$, segundo Manguera (2022), esta sequência se diferencia da sequência de Padovan, vista no tópico anterior, somente em relação aos seus termos iniciais. Outras informações que são idênticas a sequência de Padovan é a equação característica e a convergência entre os termos vizinhos, que é representada pelo número plástico, ou também conhecido como número radiante, cujo o valor aproximado é 1,324718.

Com base nessas informações, pode-se afirmar que as identidades de Perrin são consideradas idênticas as identidades de Padovan, tendo em vista que a lei de recorrência é a mesma para ambas.

Porém, Manguera (2022, p.65) mostra que as matrizes de Perrin estão relacionadas também a matrizes de Leonardo, no qual “foi multiplicado um vetor com os valores iniciais de sua respectiva sequência, temos então a construção da forma matricial da sequência de Perrin”.

$$\text{Para } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (Pe_3 \quad Pe_2 \quad Pe_1), \text{ logo}$$

$$P^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n = (Pe_{n+2} \quad Pe_{n+1} \quad Pe_n), n \geq 1.$$

No próximo tópico estudou-se a relação entre as identidades da sequência de Leonardo.

3.11 Sequência de Leonardo

A sequência de Leonardo acredita-se que foi estudada por Leonardo Fibonacci (ALVES et.al, 2020). Porém não existe nenhum trabalho na literatura que comprove tal afirmação, devido à escassez de pesquisa referente a esses números de Leonardo.

Com base nos trabalhos de Shannon (2019), Catarino e Borges (2019), Vieira, Catarino e Alves (2019), Alp e Koçer (2021) e Manguera (2022) apresentamos a definição da lei de recorrência para tal sequência.

Definição 15. $Le_n = Le_{n-1} + Le_{n-2} + 1, n \geq 2$.

Sendo considerados os termos iniciais $Le_0 = Le_1 = 1$, comparando com a sequência de Fibonacci, observamos que foi acrescentado o valor 1 à lei de recorrência. Ademais, os termos deixam de ser 0 e 1 e passam a ser 1 e 1. Manguera (2022) afirma que as identidades de Leonardo são análogas às propriedades de Fibonacci, portanto encontra-se uma relação direta também a sequência de Lucas.

Segundo Catarino e Borges (2019) a relação com os números de Fibonacci pode ocasionar outras leis de recorrências definidas por:

Definição 16. $Le_n = 2F_{n+1} - 1, n \geq 0$.

Definição 17. $Le_n = 2Le_{n-1} - Le_{n-3}, n \geq 3$.

Para as definições 16 e 17 mantêm-se os valores iniciais já definidos anteriormente. Com base nessas definições, Manguera (2022) afirma que a equação característica é representada por $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$, isso é, uma sequência de terceira ordem, nas quais suas raízes são uma igual a 1, e as outras duas correspondem às raízes da equação característica de Fibonacci.

Não podemos deixar de destacar, que os números de Leonardo também possuem a convergência entre os termos vizinhos relacionados ao número de ouro que é aproximadamente 1,61.

Logo, com base nessas leis de recorrência Alp e Koçer (2021) mostram algumas identidades de Leonardo.

Identidade 35 (Fórmula de Binet)

Utilizando a demonstração do Teorema 2, temos:

$$Le_n = \frac{2\alpha^{n+1} - 2\beta^{n+1} - \alpha + \beta}{\alpha - \beta}$$

Para α e β raízes da equação característica de Fibonacci, que por sua vez também são raízes da equação características de Leonardo.

Teorema 8. Para $n \geq 1$, essas identidades são admitidas como verdadeiras

$$Le_{n-1} + Le_{n+1} = 2L_{n+1} - 2,$$

$$Le_{n-1} + 2F_n = Le_{n+1},$$

$$Le_n + F_n + L_n = 2Le_n + 1,$$

$$Le_{n+1}^2 + Le_n^2 = 2(Le_{2n+2} - Le_{n+2} + 1)$$

Sendo Le_n, F_n, L_n os enésimos números de Leonardo, Fibonacci e Lucas respectivamente. Para demonstrar esse teorema usamos a definição 16.

Prova.

$$\begin{aligned} Le_{n+1}^2 + Le_n^2 &= (2F_{n+2} - 1)^2 + (2F_{n+1} - 1)^2 \\ &= 4F_{2n+3} - 4F_{n+3} + 2 \\ &= 2(Le_{2n+2} - Le_{n+2} + 1). \end{aligned}$$

Teorema9. $Le_{n+1}F_{n+1} - Le_nF_n = Le_nF_{n+1} + F_n$, para $n > 0$.

Prova. Utilizando a identidade 33, temos:

$$\begin{aligned} &Le_{n+1}F_{n+1} - Le_nF_n = \\ &= \left(\frac{2\alpha^{n+2} - 2\beta^{n+2} - \alpha + \beta}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}\right) - \left(\frac{2\alpha^{n+1} - 2\beta^{n+1} - \alpha + \beta}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right) \\ &= \frac{2L_{2n+2} + 4(-1)^n - L_n - L_{n-2}}{5} \end{aligned}$$

Da mesma forma, podemos ter outras identidades. No próximo tópico estudou-se a relação entre as identidades das sequências de Fibonacci, Lucas, Pell, Oresme, Mersenne, Jacobsthal, Narayana, Padovan, Perrin e Leonardo com o uso do GeoGebra.

3.12 Relação das seqüências de recorrência com o uso do GeoGebra

Nessa seção, apresentou-se algumas identidades na forma geométrica para as seqüências de Fibonacci, Lucas, Pell, Oresme, Mersenne, Jacobsthal, Narayana, Padovan, Perrin e Leonardo com o aporte do *software* GeoGebra em uma visualização 2D e 3D.

3.12.1 Visualizações das identidades de Fibonacci na forma geométrica

Segundo Nelsen (2018) existem muitas identidades encantadoras relacionadas aos números de Fibonacci. Assim, ilustração referem-se às somas de números de Fibonacci, de início a soma dos n primeiros termos, a soma dos n primeiros termos de índices ímpares, e a soma dos n primeiros termos de índices pares, já mencionada anteriormente.

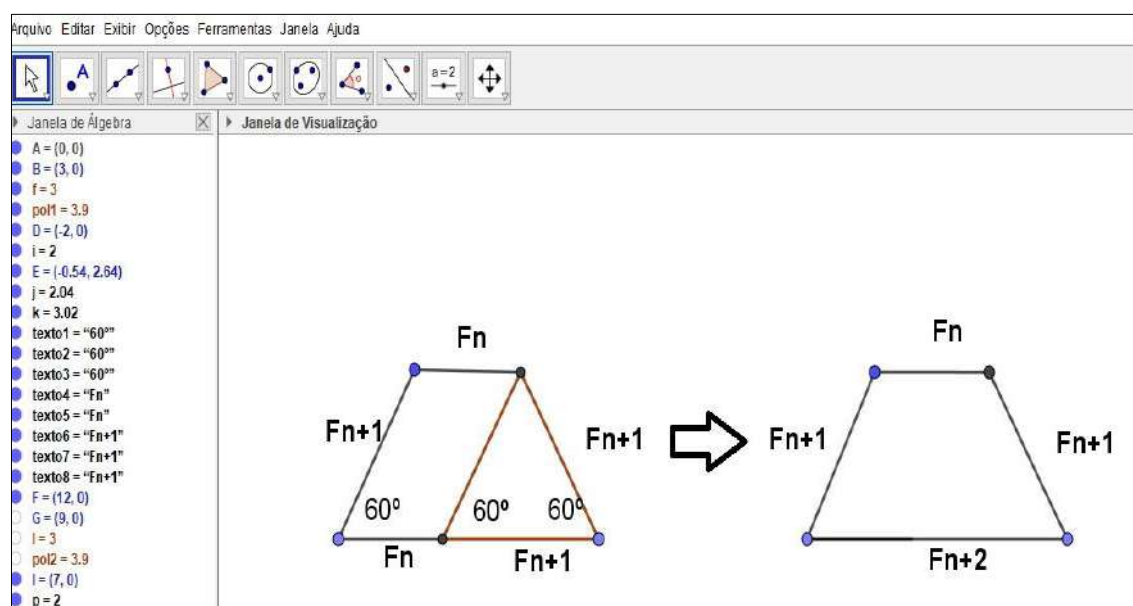
Identidade 1. $\sum_{k=1}^n F_{2k-1} = F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$;

Identidade 2. $\sum_{k=1}^n F_{2k} = F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$;

Identidade 3. $\sum_{k=1}^n F_k = F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$.

Para ilustrar essas identidades utilizam-se trapézio, paralelogramos e triângulo, relacionando-os aos comprimentos laterais e bases dessas figuras com os números de Fibonacci, conforme a Figura 14.

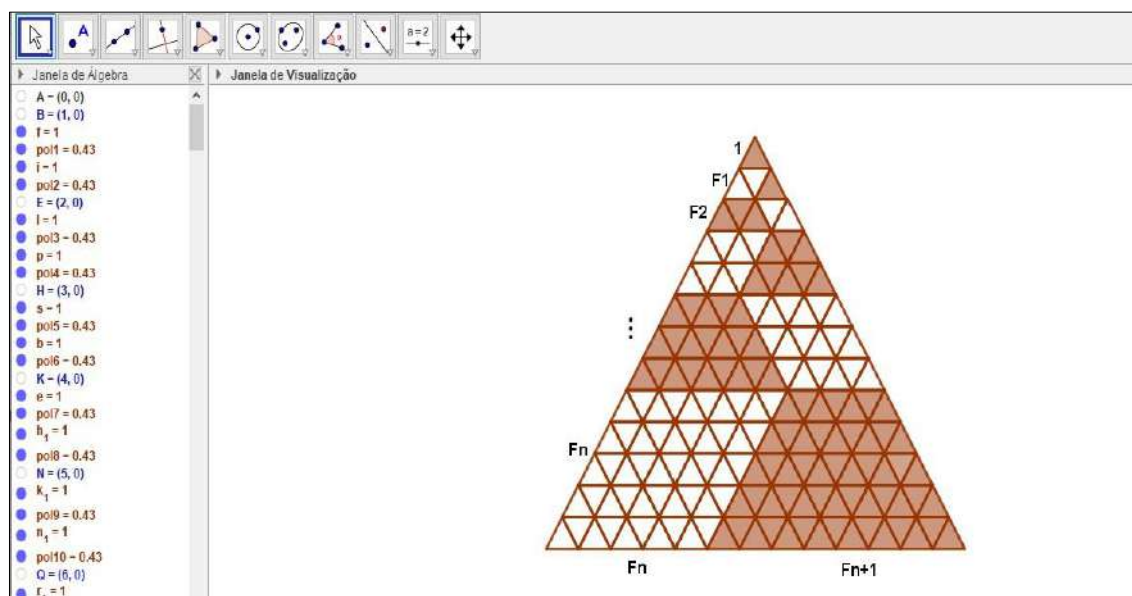
Figura 14- Números de Fibonacci com trapézio



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Observa-se que os lados do paralelogramo são os números consecutivos de Fibonacci, já no topo, os lados inclinados e base do trapézio são três números consecutivos dessa seqüência.

Figura 15– A soma dos n primeiros termos

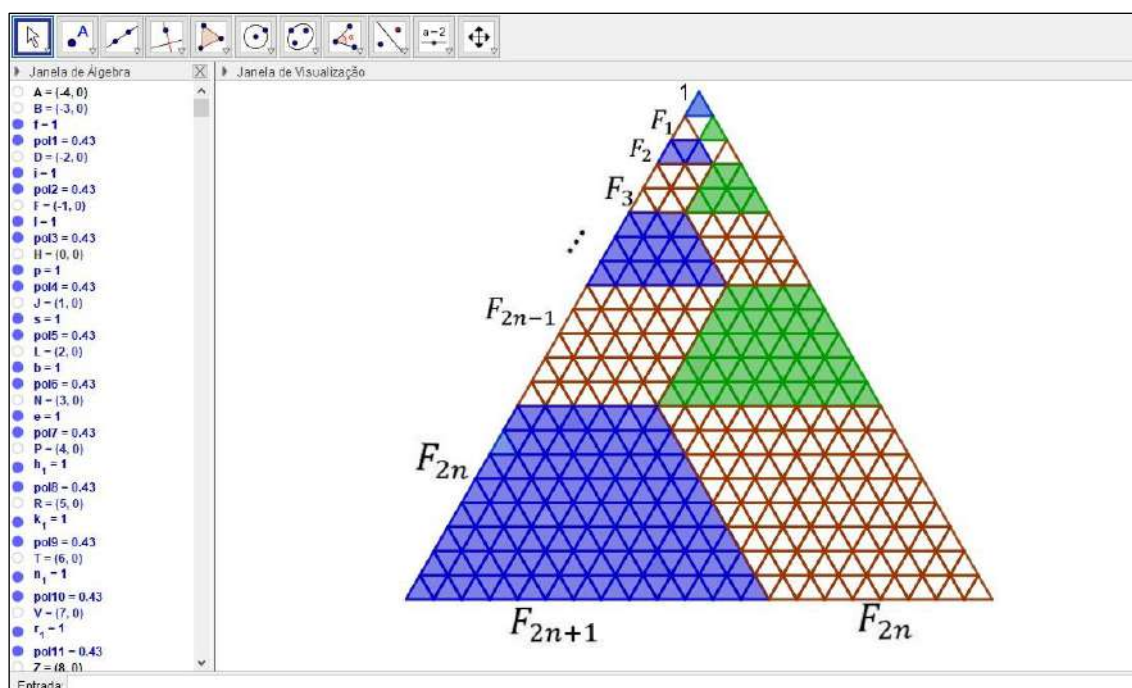


Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Na Figura 15, observa-se um triângulo equilátero, subdividido por triângulos menores de comprimento e laterais 1. O comprimento lateral do triângulo maior e a base correspondem a identidade 1, mostrada anteriormente.

Com base na Figura 15, modifica-se as cores para criar-se uma nova imagem, representando a prova visual de forma geral para as identidades 1 e 2, como mostra a Figura 16.

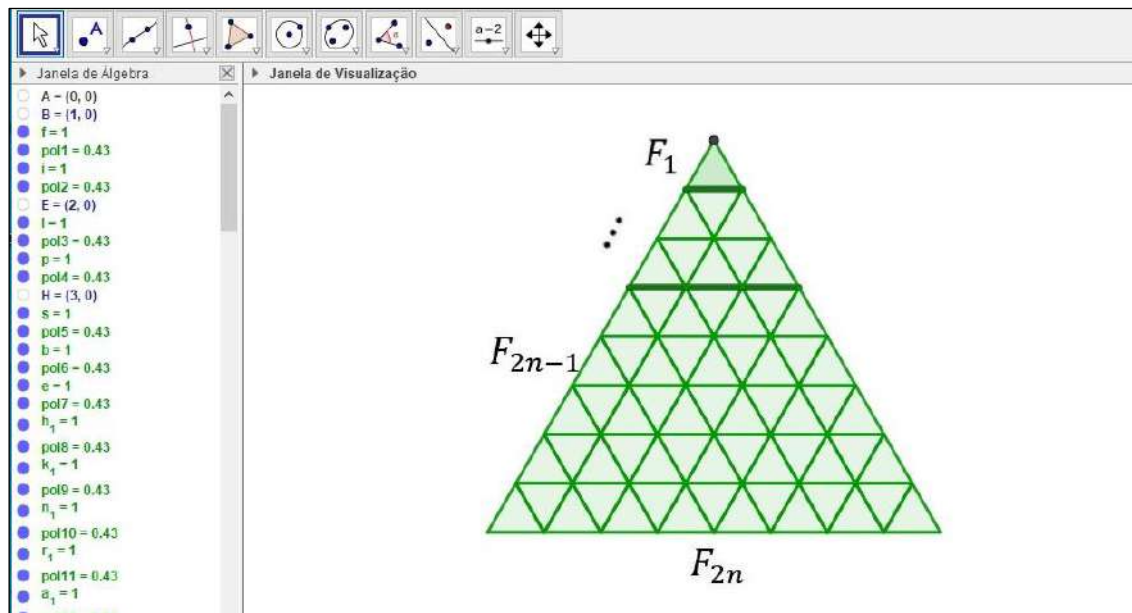
Figura 16– Prova visual das primeiras identidades



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Logo, reúne-se as imagens de cor verde desse triângulo equilátero da Figura 16, formando um novo, cujo comprimento do lado esquerdo e da base corresponde a identidade 1, conforme a Figura 17.

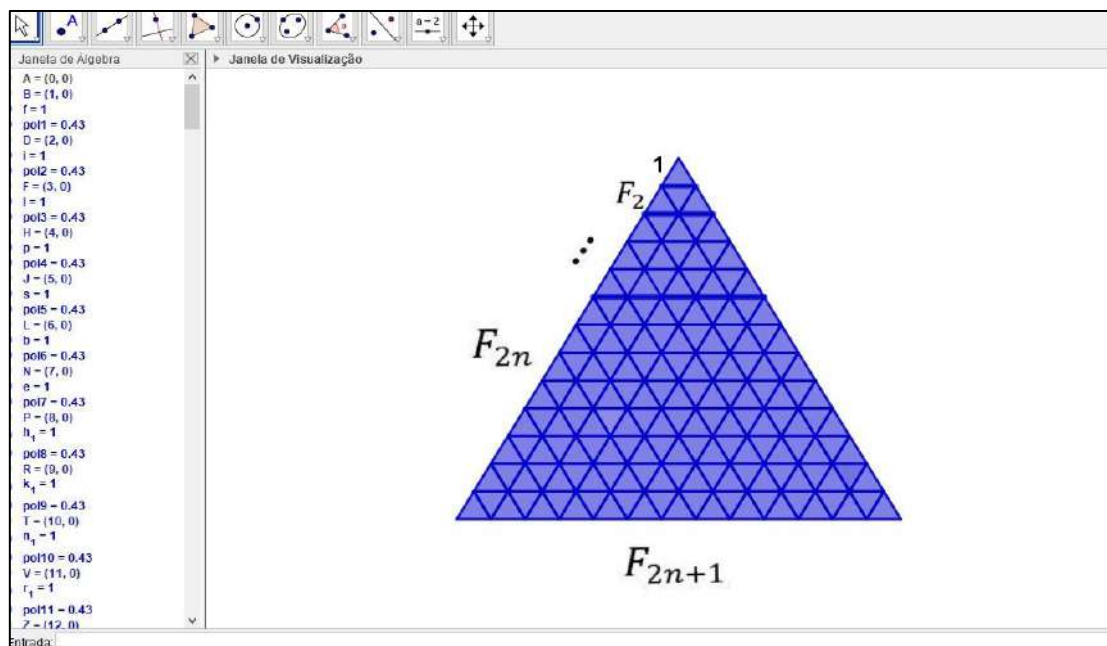
Figura 17- Prova visual da identidade 1



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Da mesma maneira, reúne-se as imagens de cores azuis do triângulo equilátero da Figura 16, construindo um novo triângulo, cujo comprimento do lado direito e da base corresponde a identidade 2, conforme a Figura 18.

Figura 18- Prova visual da identidade 2



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Portanto, prova-se de forma visual as três identidades, por meio do *software* GeoGebra, mencionadas no início dessa seção.

Agora, mostram-se algumas identidades envolvendo os números de Fibonacci, usando quadrados e retângulos. Nessa comprovação, esclarece-se que os números subsequentes de Fibonacci são primos.

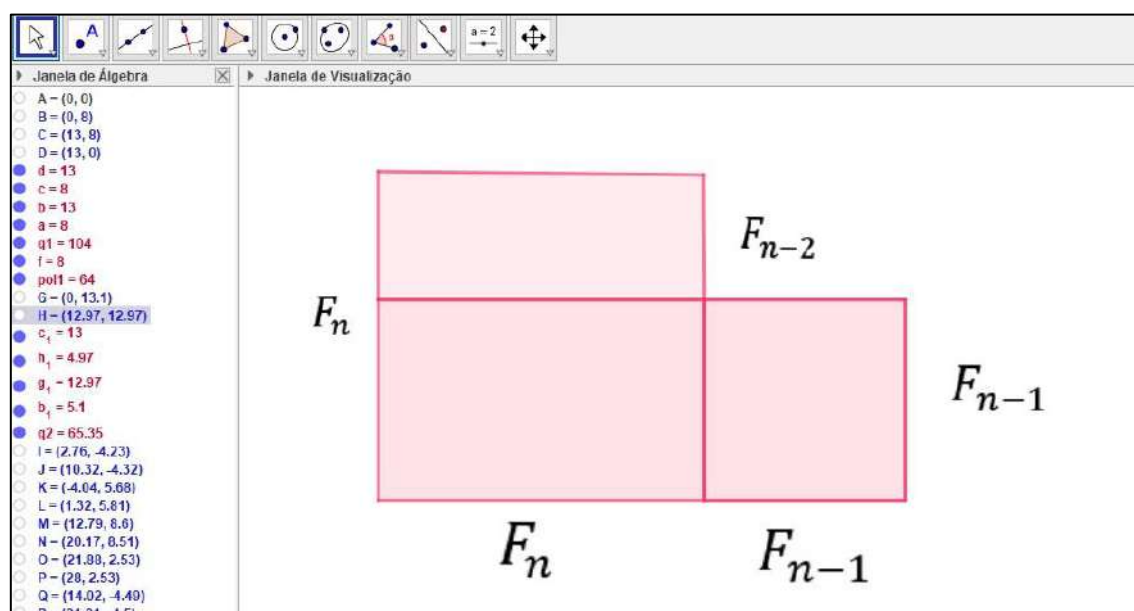
Sabendo que a identidade de Fibonacci resulta na comparação do quadrado de um número de Fibonacci, ao produto dos seus termos anteriores da sequência.

Exemplo6. $2.5 - 3^2=1$, $3.8 - 5^2 = -1$, $5.13 - 8^2 = 1$.

Dessa forma, leva-se o nome da identidade com o nome do matemático e astrônomo italiano Giovanni Domenico Cassini (1675-1712) que descobriu em 1680.

Teorema10 – Identidade 5 de Cassini $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n \forall n \geq 2$.

Figura 19- Prova visual da identidade de Cassini



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Prova: De acordo com a Figura 19, observa-se:

$$\begin{aligned}
 F_n \cdot F_{n+2} - F_{n+1}^2 &= F_n \cdot F_{n+2} - F_{n+1}(F_{n-1} + F_n) \\
 &= F_n \cdot (F_{n+2} - F_{n+1}) - F_{n-1} \cdot F_{n+1} \\
 &= F_n^2 - F_{n-1} \cdot F_{n+1} \\
 &= (-1) \cdot (F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F_n^2) \\
 &= (-1)^{n+1}.
 \end{aligned}$$

Corolário2. Dois números de Fibonacci consecutivos são primos quando

$$MDC(F_n, F_{n-1}) = 1$$

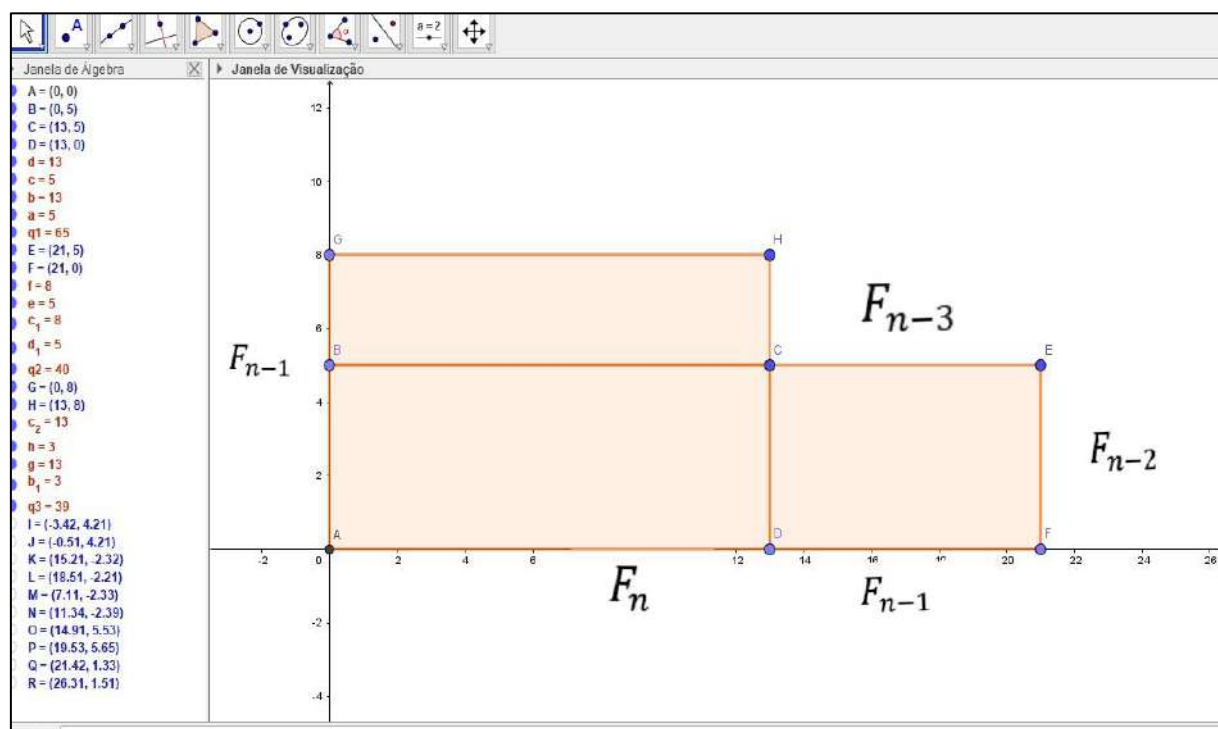
Prova. Suponha que um número p divida F_n e F_{n+1} . Logo, usando a identidade de Cassini, p divide $(-1)^n$, que é impossível. Logo, $MDC(F_n, F_{n-1}) = 1$.

Um resultado semelhante a identidade de Cassini se mantém por quatro números de Fibonacci, quando se compara o produto de dois números extremos aos dois números internos.

Exemplo7. $2.8 - 3.5 = 1$, $3.13 - 5.8 = -1$, $5.21 - 8.13 = 1$

Teorema11. $F_{n-2}F_{n+1} - F_{n-1}F_n = (-1)^{n-1} \forall n \geq 3$.

Figura 20- Prova visual do Teorema 11



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Prova. Calculando a área da região da Figura 20, de duas maneiras tem-se:

$$F_{n-2}F_{n+1} + F_{n-3}F_n = F_{n-1}F_n + F_{n-2}F_{n-1}$$

Equivalente

a

$$F_{n-2}F_{n+1} - F_{n-1}F_n = -(F_{n-3}F_n - F_{n-2}F_{n-1})$$

De acordo com a prova identidade 5 de Cassini, os termos da sequência têm a mesma magnitude e alterna o sinal. Para o valor de $n = 3$ resulta $F_1F_4 - F_2F_3 = 1$, para $F_{n-2}F_{n+1} - F_{n-1}F_n$ é +1 quando n for ímpar e -1 quando n for par.

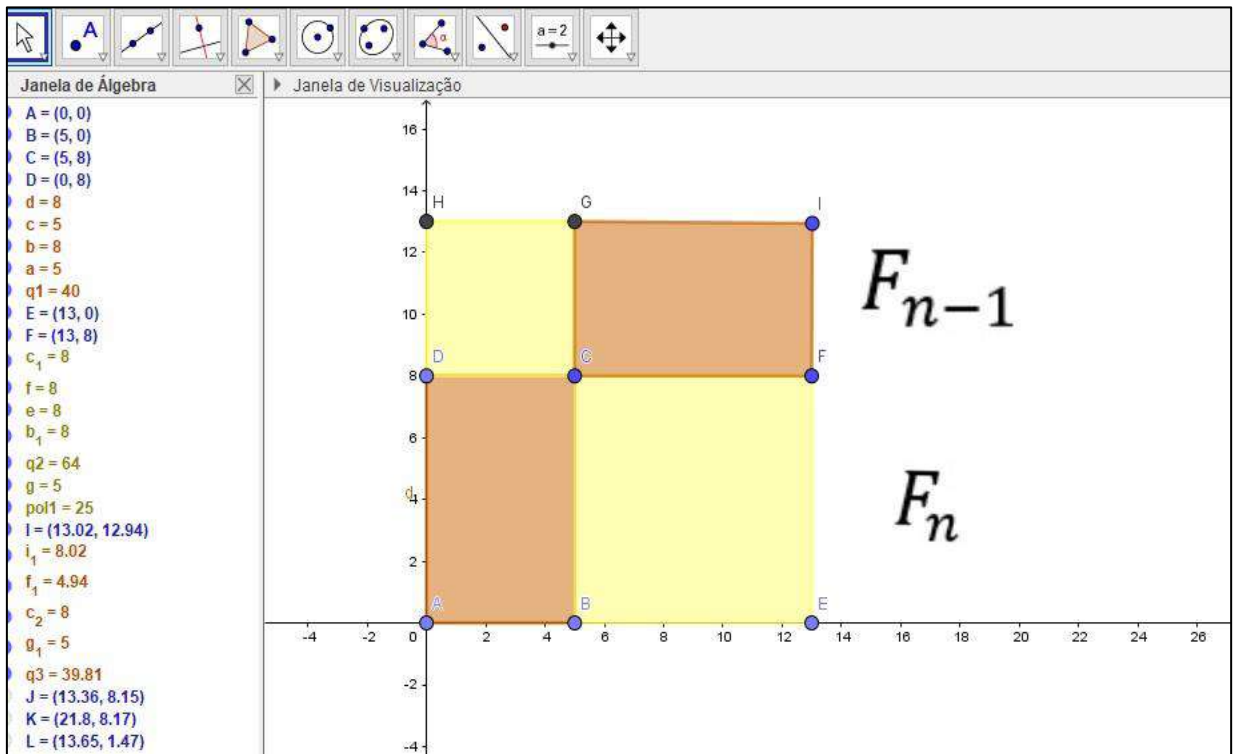
Corolário3. Quando se têm pares de números de Fibonacci para $n \neq 2$, são primos

$$\text{MDC}(F_{n-1}, F_{n+1}) = 1, \text{ para } n \geq 2.$$

Prova. Substituindo n por $n + 1$ no Teorema 11, $F_{n-1}F_{n+2} - F_nF_{n+1} = (-1)^n \forall n \geq 2$. Se um primo p divide ambos F_{n-1} e F_{n+1} , então p divide $(-1)^n$, o que é impossível. Portanto, $\text{MDC}(F_{n-1}, F_{n+1}) = 1$.

Assim, mostram-se algumas identidades para o quadrado do número de Fibonacci. A seguir, usam-se duas maneiras diferentes de dividir um quadrado com área F_{n+1}^2 .

Figura 21- Prova visual da identidade 36



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Segundo Ollerton (2008), a Figura 21 ilustra as identidades a seguir para o quadrado de Fibonacci.

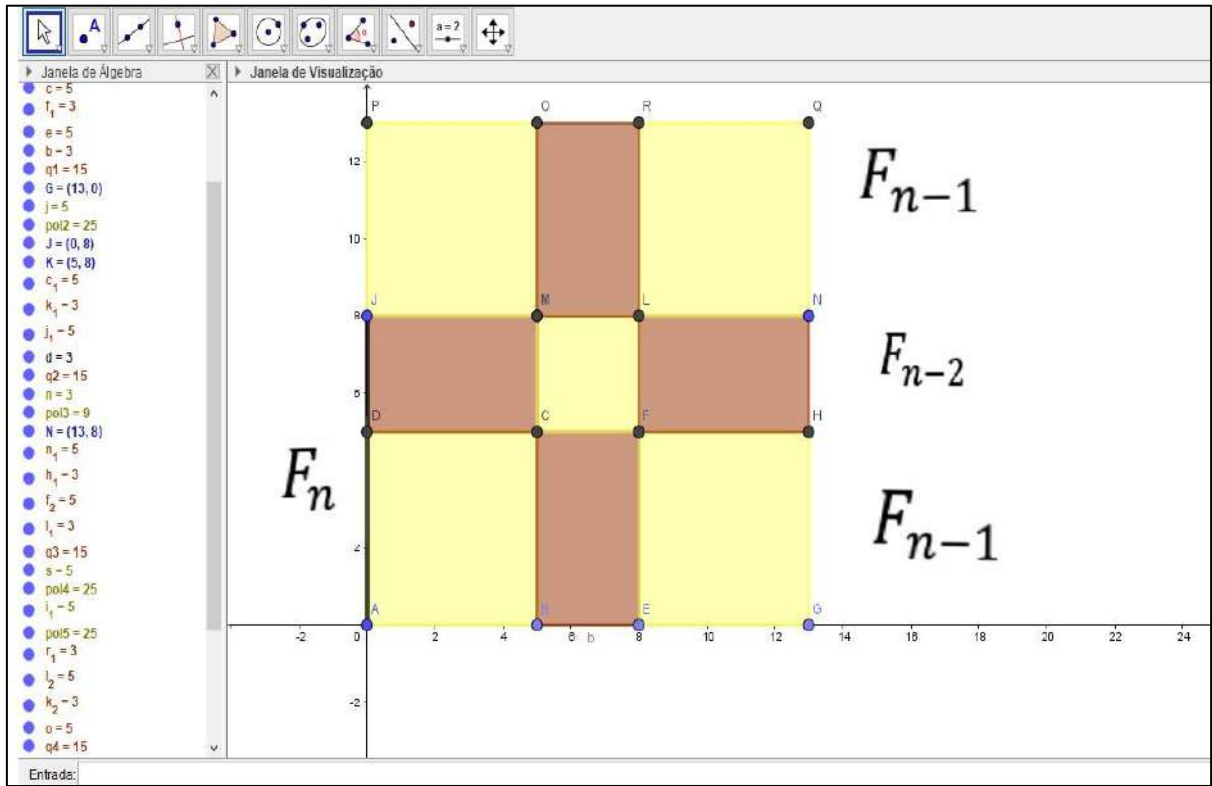
$$\begin{aligned} F_{n+1}^2 &= 2F_{n+1}F_n - F_n^2 + F_{n-1}^2 \\ &= 2F_{n+1}F_n + F_n^2 - F_{n-1}^2 \\ &= F_n^2 + F_{n-1}^2 + 2F_nF_{n-1} \end{aligned}$$

Logo, $F_{n+1}^2 = F_n^2 + F_{n-1}^2 + 2F_nF_{n-1}$ corresponde a identidade 36.

$$\begin{aligned} F_{n+1}^2 &= F_{n+1}F_{n-1} + F_nF_{n-1} - F_n^2 \\ &= F_{n+1}F_n + F_nF_{n-1} - F_{n-1}^2. \end{aligned}$$

Da mesma forma, $F_{n+1}^2 = F_{n+1}F_n + F_nF_{n-1} - F_{n-1}^2$, corresponde a identidade 37.

Figura 22- Prova visual da identidade 37



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Segundo Brousseau (1972), a Figura 22 ilustra a identidade a seguir:

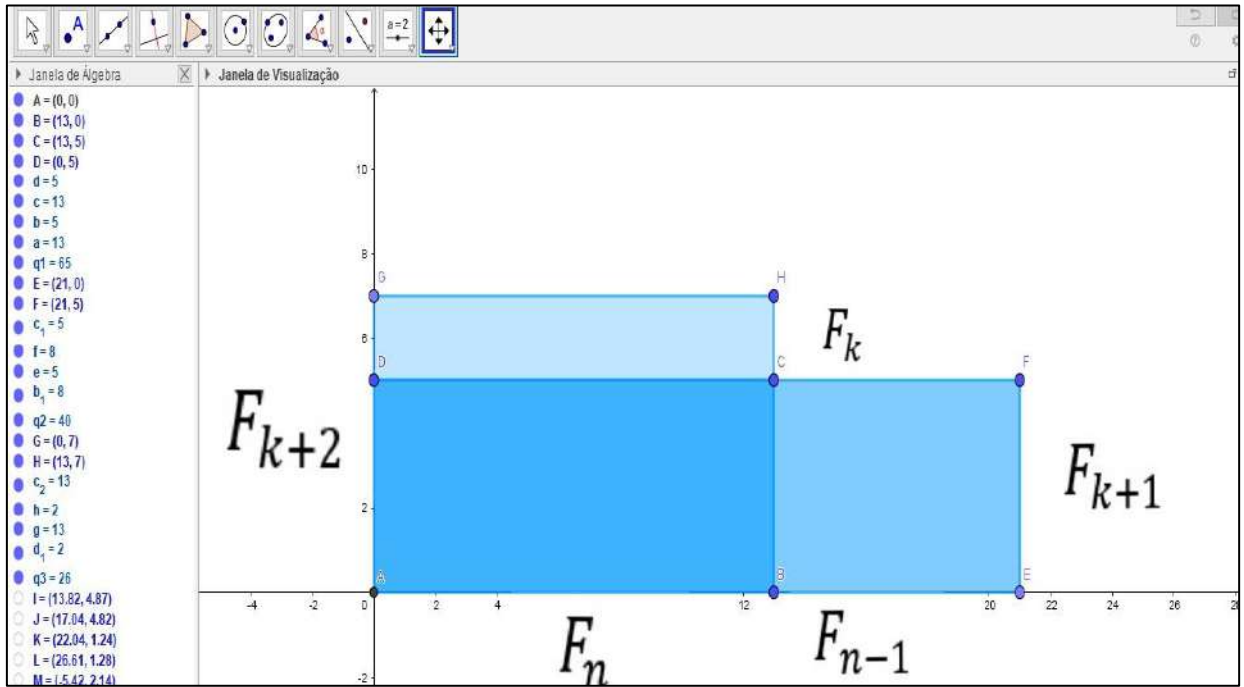
$$\begin{aligned}
 F_{n+1}^2 &= 4F_nF_{n-1} + F_{n-2}^2 \\
 &= 2F_n^2 + 2F_{n-1}^2 - F_{n-2}^2 \\
 &= 4F_{n-1}^2 + 4F_{n-1}F_{n-2} + F_{n-2}^2 \\
 &= 4F_n^2 - 4F_{n-1}F_{n-2} - 3F_{n-2}^2
 \end{aligned}$$

Dessa maneira, figuras semelhantes produzem muitas outras identidades.

Teorema 12. Para todos os inteiros positivos n e k .

$$F_{n+1}F_{k+1} + F_nF_k = F_{n+k+1}$$

Figura 23- Prova visual do Teorema 12



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Dessa forma, observa-se a área da região da Figura 23, para apresentar a seguinte identidade:

$$\begin{aligned}
 F_{n+1}F_{k+1} + F_nF_k &= F_nF_{k+2} + F_{n-1}F_{k+1} \\
 &= F_{n-1}F_{k+3} + F_{n-2}F_{k+2} \\
 &= F_{n-2}F_{k+4} + F_{n-3}F_{k+3} \\
 &\vdots \\
 &= F_2F_{n+k} + F_1F_{n+k-1} = F_{n+k+1}
 \end{aligned}$$

Observe que o lado direito da Figura 14, n foi substituído por $n - 1$ e k por $k + 1$, em comparação ao lado esquerdo repetindo até que n diminua para 2. Conclui-se que $F_1 = F_2 = 1$ e $F_{n+1}F_{k+1} + F_nF_k = F_{n+k+1}$.

Corolário4. Cada número de Fibonacci é a soma ou a diferença de quadrados de dois números de Fibonacci menores, ou seja, para n positivo $F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$ e $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$.

Prova. Sendo $k = n$ no Teorema 12 $F_{n+1}F_{k+1} + F_nF_k = F_{n+k+1}$, tem-se $F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$, relaciona-se com a Figura 20, que equivale a $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{n+1}F_n + F_nF_{n-1}$, para $k = n - 1$, usando novamente o Teorema 12, $F_{n+1}F_{k+1} + F_nF_{n-1} = F_{2n}$, de modo que $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$.

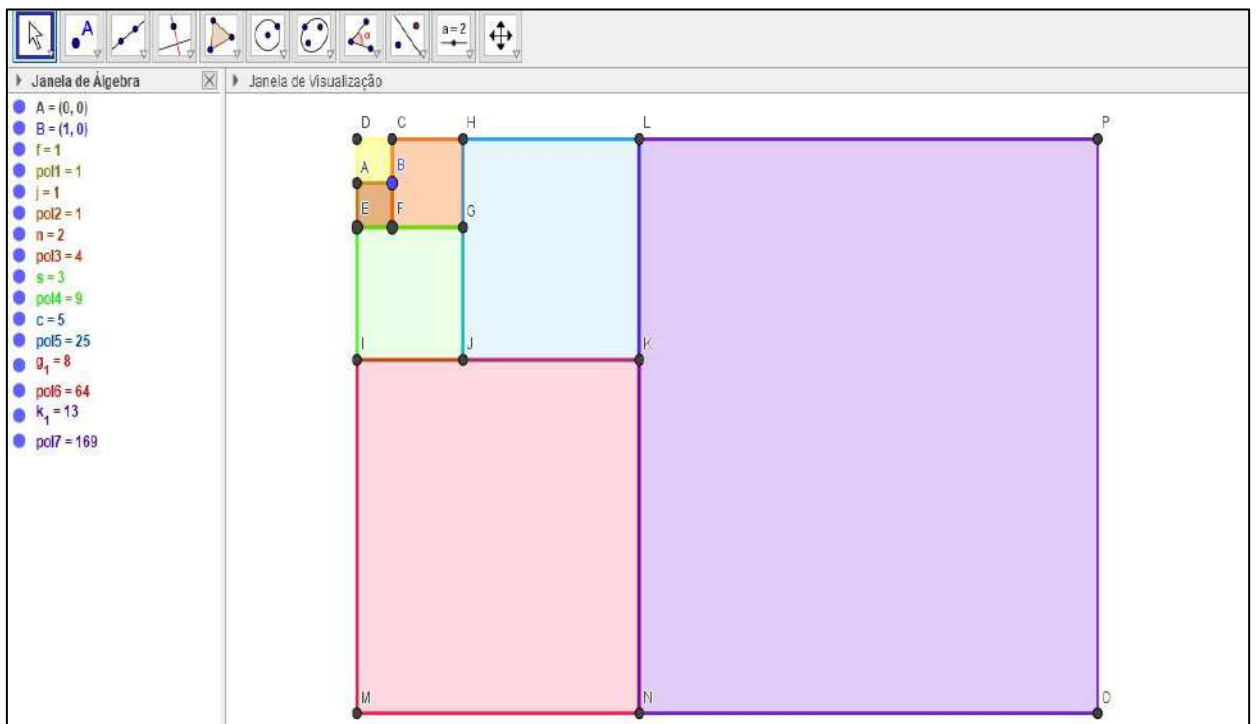
Corolário5. Se n divide m , então F_n divide F_m .

Prova. Para $k = n - 1$ no Teorema12 implica $F_{n+1}F_n + F_nF_{n-1} = F_{2n}$, de modo que a F_n divide F_{2n} . Para $k = 2n - 1$ novamente no Teorema 12, na $F_{n+1}F_{2n} + F_nF_{2n-1} = F_{3n}$, assim F_n divide F_{3n} . Continuar desta maneira mostra que F_n divide F_{kn} para qualquer número inteiro positivo k .

Teorema13. (Identidade 4) $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$.

Prova. Segundo Brousseau (1972), segue a Figura 24

Figura 24- Prova visual da identidade 4



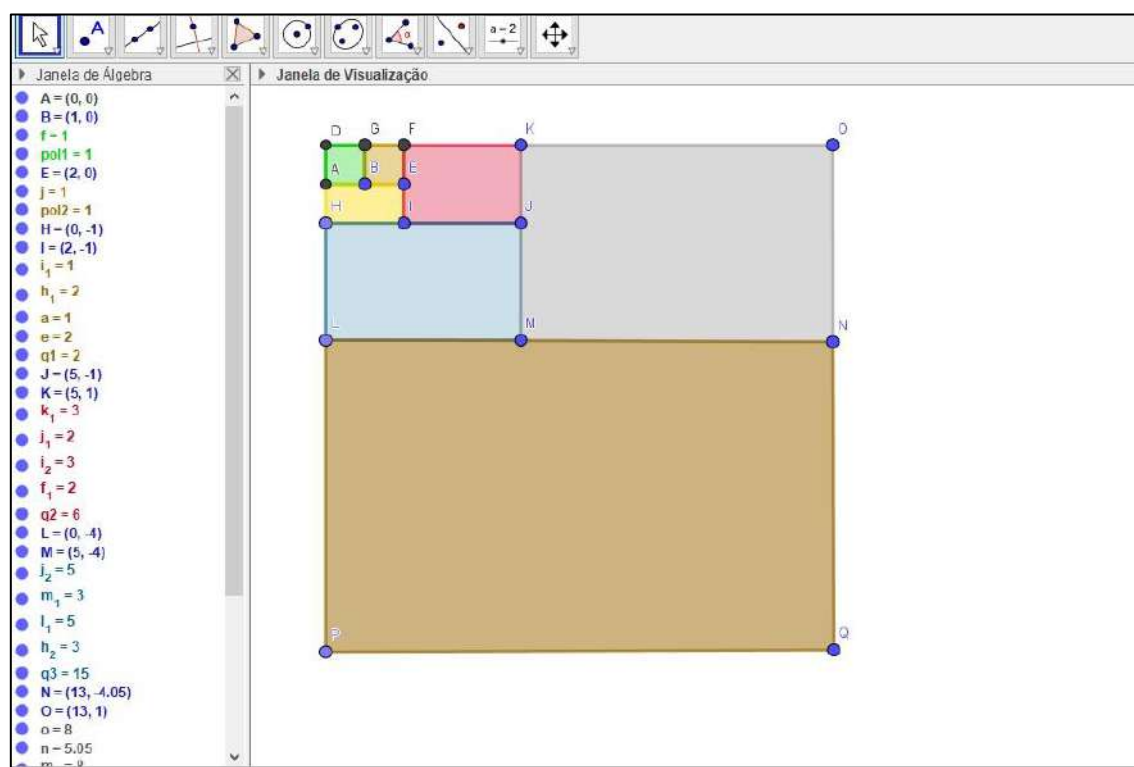
Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Assim, soma dos retângulos de Fibonacci. Se substituir os quadrados de Fibonacci por retângulos, obtêm-se mais duas identidades.

Teorema14. $F_1 F_2 + F_2 F_3 + \cdots + F_{2n-2} F_{2n-1} = F_{2n-1}^2 - 1$

Prova. Sendo $n = 4$ têm-se

Figura 25- Prova visual do Teorema 14



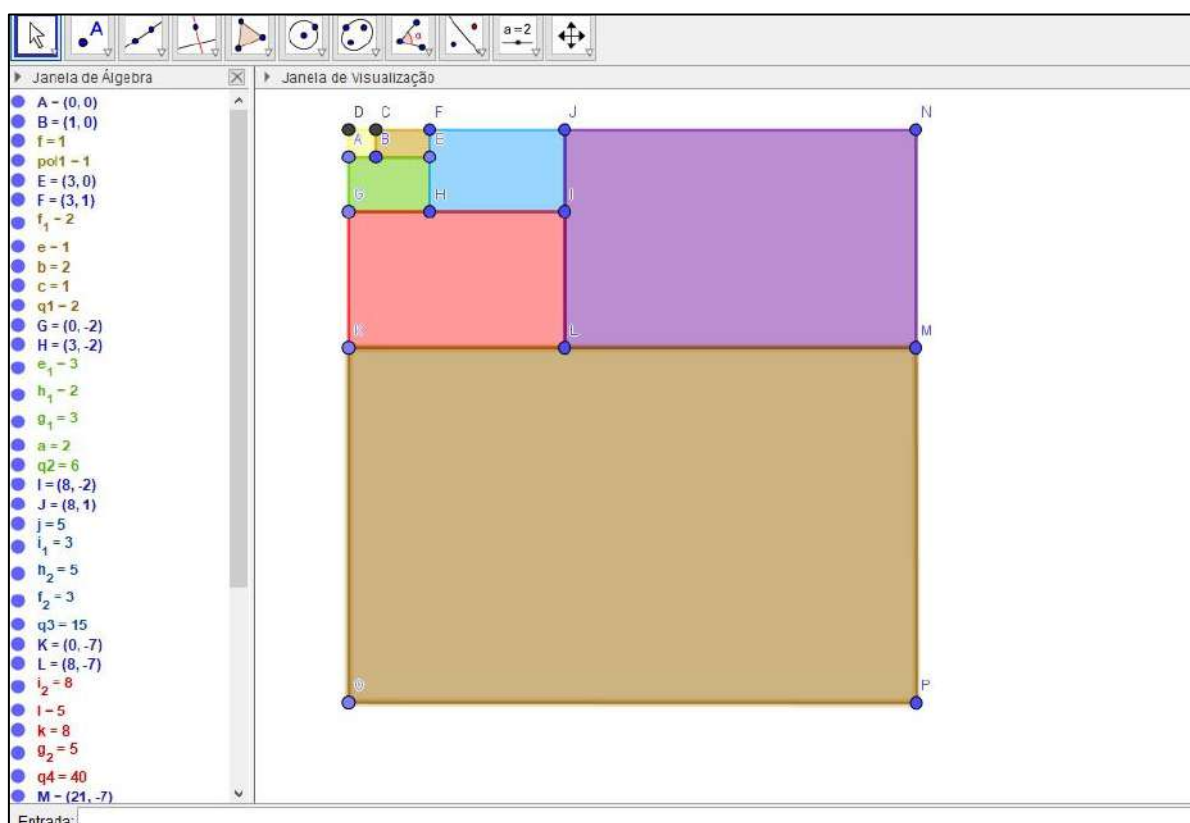
Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Observa-se a prova visual da identidade proposta, com o mesmo pensamento pode-se demonstrar também o outro Teorema15 a seguir.

Teorema 15. $F_1F_2 + F_2F_3 + \dots + F_{2n-1}F_{2n} = F_{2n}^2$

Prova. Sendo $n = 4$ têm-se

Figura 26- Prova visual do Teorema 15



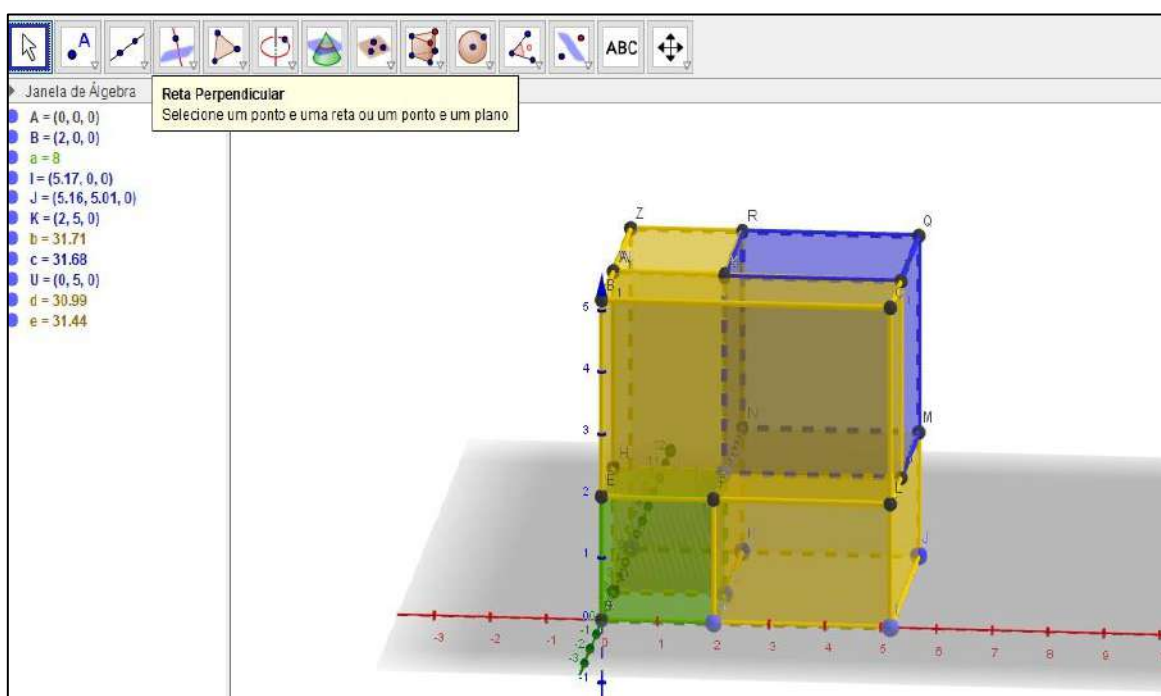
Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Com o mesmo pensamento o Teorema 12, pode-se fazer a prova visual da identidade para uma visualização tridimensional.

Identidade 38. $F_{n+1}^3 = F_n^3 + F_{n-1}^3 + 3F_{n-1}F_nF_{n+1}$ (CARLITZ, 1967; HILMAN (PADILHA), 1970).

Prova. Para $n \geq 1$

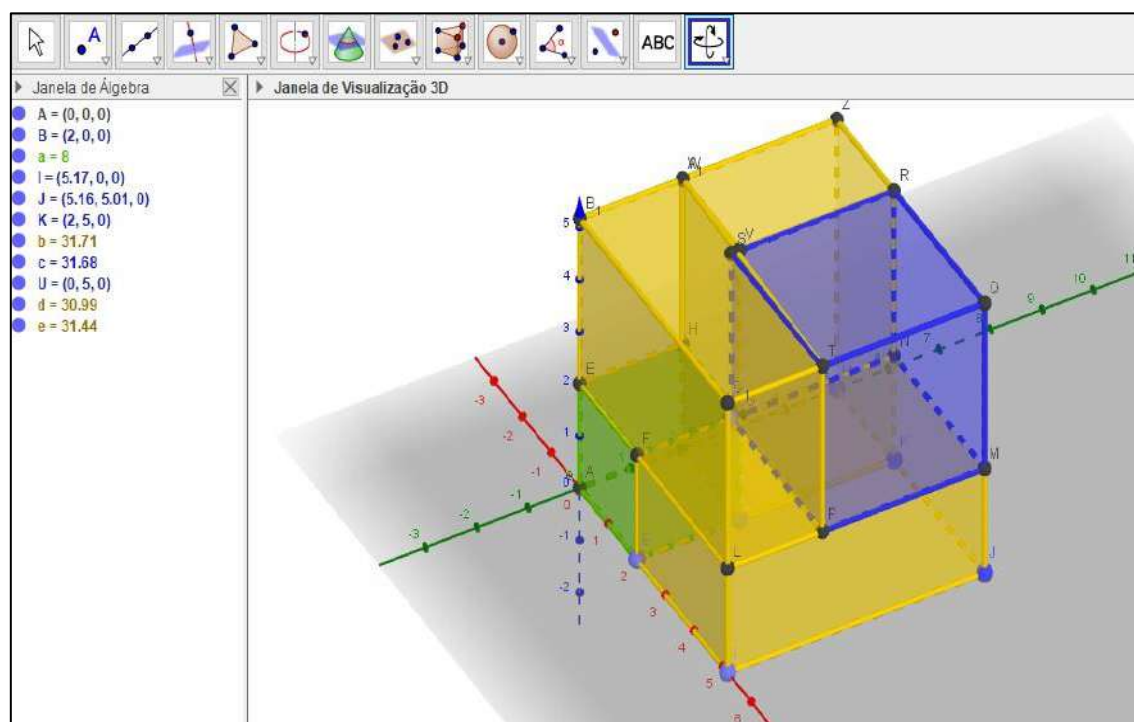
Figura 27- Prova visual da identidade 38



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

A Figura 27 é composta por dois cubos que correspondem aos termos F_n^3 e F_{n-1}^3 , bem como mais três prismas que correspondem aos termos F_{n-1} , F_n , F_{n+1} , que estão relacionados aos números de Fibonacci.

Figura 28- Visualização lateral da identidade 38



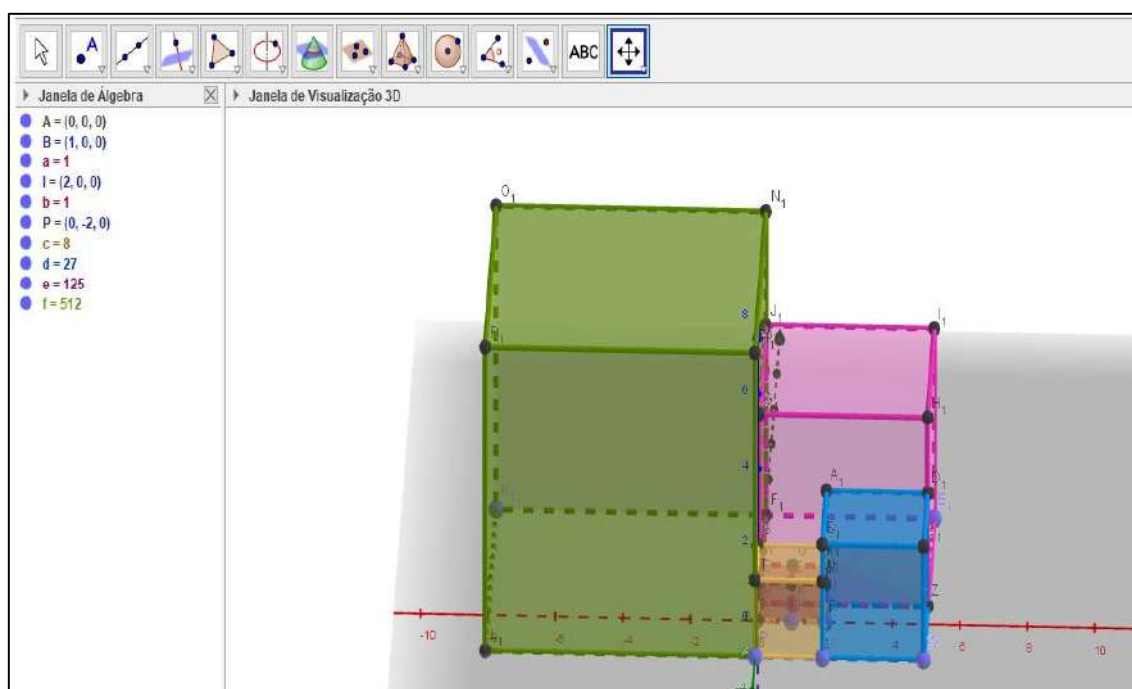
Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Observa-se que os prismas coloridos de amarelos estão representando as mesmas medidas, enquanto os cubos das cores azul e verde apresentam outras medidas para suas arestas. Dessa forma, apresenta-se outra identidade que explora a construção em uma visualização 3D.

Identidade 39. $8F_n^3 = 3F_n F_{n-2}^2 + 3F_{2n}F_{n-2} + F_{3n}$

Prova. Para $n \geq 3$ (BENJAMIN, EUSTIS & PLOTT,2008).

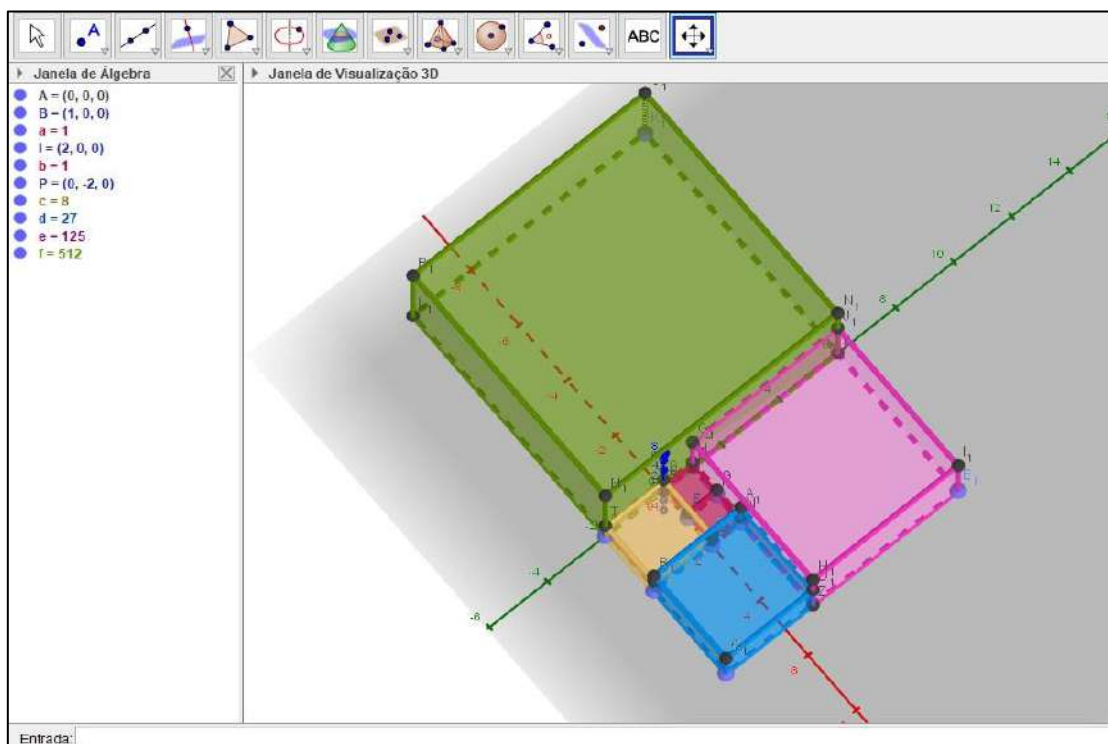
Figura 29- Prova visual da identidade 39.



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Mostra-se a prova visual da identidade 39 através do somatório dos cubos, levando em consideração que cada termo da sequência de Fibonacci corresponde a um cubo de cor diferente. Na Figura 30, observa-se a construção em uma visualização superior, identificando cada número de Fibonacci.

Figura 30– Visualização superior da identidade 39



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Concluiu-se essa seção as provas visuais por meio do *software* GeoGebra de identidade dos números de Fibonacci. Na próxima seção abordou-se as provas visuais das identidades de Lucas.

3.12.2 Visualizações das identidades de Lucas na forma geométrica

Segundo Nelsen (2018), a sequência de Lucas está relacionada intimamente ligada à sequência de Fibonacci, logo recorre-se a algumas demonstrações para realizar as provas das identidades de Lucas.

Identidade 40. De forma análoga à demonstração a identidade 3, têm-se:

$$\sum_{k=1}^n L_k = L_1 + L_2 + \dots + L_n = L_{n+2} - 3;$$

Nelsen (2018), afirma que a prova visual usando trapézios de Fibonacci, como na Figura 14, é um pouco pesado para essa identidade. Mas converter essa soma em uma série telescópica soma é bem-sucedida:

$$\sum_{k=1}^n L_k = \sum_{k=1}^n L_{k+2} - L_{k+1} = L_1 + L_2 + \dots + L_n = L_{n+2} - 3.$$

Para as identidades 1 e 2, utiliza-se o mesmo raciocínio utilizado nas identidades 22 e 23 para prova visual.

Identidade 41. $\sum_{k=1}^n L_{2k-1} = L_1 + L_3 + \dots + L_{2n-1} = L_{2n} - 2;$

Identidade 42. $\sum_{k=1}^n L_{2k} = L_2 + L_4 + \dots + L_{2n} = L_{2n+1} - 1.$

Existem muitas identidades adoráveis envolvendo os números de Fibonacci e os números de Lucas. Aqui está um exemplo.

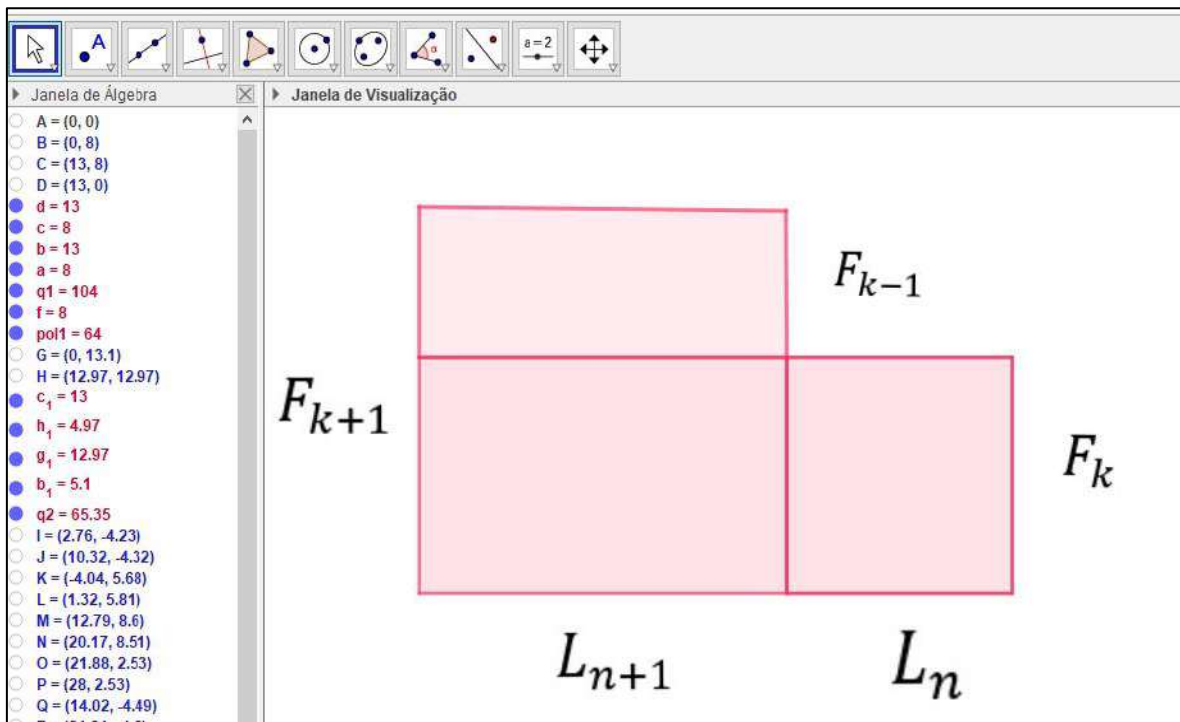
Teorema16. Para todo inteiro positivo n e k .

$$F_{k+1}L_{n+1} + F_nL_n = L_{k+n+1}$$

Prova. Para provar pretende-se analisar a área da Figura 31.

$$F_{k+1}L_{n+1} + F_kL_n = F_kL_{n+2} + F_{k-1}L_{n+1}$$

Figura 31- Prova visual do Teorema 16



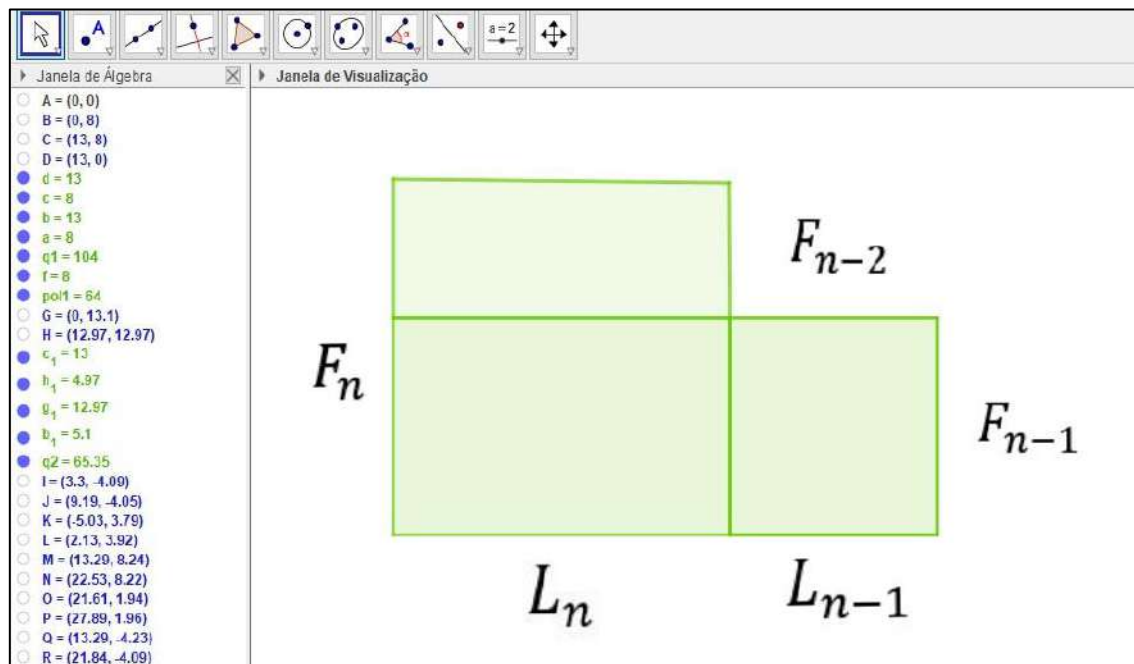
Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Observe que no lado direito, k foi substituído por $k - 1$ e n foi substituído por $n + 1$, em comparação com o lado esquerdo. Iterando a Figura 30, até que k diminua para 2 produz:

$$\begin{aligned} F_{k+1}L_{n+1} + F_kL_n &= F_kL_{n+2} + F_{k-1}L_{n+1} \\ &= F_{k-1}L_{n+3} + F_{k-2}L_{n+2} \\ &= F_{k-2}L_{n+4} + F_{k-3}L_{n+3} \\ &\vdots \\ &= F_2L_{n+k} + F_1L_{n+k-1} = L_{k+n+1} \end{aligned}$$

Logo, conclui-se que $F_1 = F_2 = 1$ e $F_{k+1}L_{n+1} + F_nL_n = L_{k+n+1}$.

Figura 32- Prova visual do Teorema de Cassini



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Segundo Nelsen (2018), afirma que a imagem na Figura 32, faz uma releitura da Figura 31, pode ser usada para provar o seguinte teorema, uma identidade tipo Cassini para produtos de Números de Fibonacci e Lucas.

Teorema17. $F_{n-1}L_{n+1} - F_nL_n = (-1)^n$ para $n \geq 2$.

Comparando os Teoremas da Identidade de Cassini para números de Fibonacci e para os números de Lucas.

Prova: Avaliando a área da Figura 31, têm-se:

$$F_{n-1}L_{n+1} + F_{n-2}L_n = F_nL_{n+2} + F_{n-1}L_{n+1},$$

que equivale a $F_{n-1}L_{n+1} - F_nL_n = -(F_{n-2}L_n - F_{n-1}L_{n-1})$. Assim, avalia-se somente o caso para $n = 2$, pois tem a mesma magnitude e alternância de sinal $F_1L_3 - F_2L_2 = 1$ para $F_{n-1}L_{n+1} - F_nL_n$ é +1 quando n for par, -1 quando n for ímpar, logo:

$$F_{n-1}L_{n+1} - F_nL_n = (-1)^n$$

Com essa identidade do Teorema 17 pode-se facilmente provar a seguinte propriedade dos números de Lucas, análoga ao Corolário 2 utilizado para os números de Fibonacci.

Corolário 6. Dois números de Lucas consecutivos são primos quando

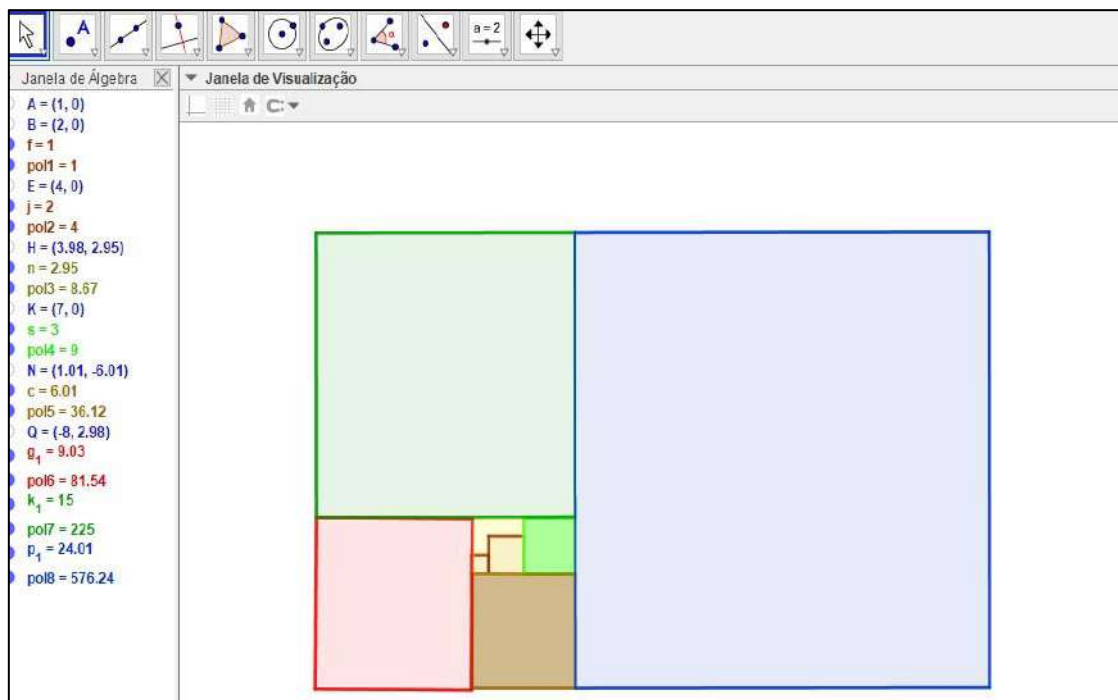
$$MDC(L_n, L_{n-1}) = 1 \quad n \geq 1$$

Prova: Suponha que um número p divida L_n e L_{n+1} . Imediatamente, levando em consideração a identidade de Cassini, p divide $(-1)^n$, que é impossível. Logo, $MDC(L_n, L_{n-1}) = 1$.

Identidade 43. $L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + \dots + L_n^2 = L_n L_{n+1} - 2, \forall n \geq 1$ (Identidade 9).

Prova. Para provar pretende-se analisar a área da Figura 33.

Figura 33- Prova visual da identidade 43



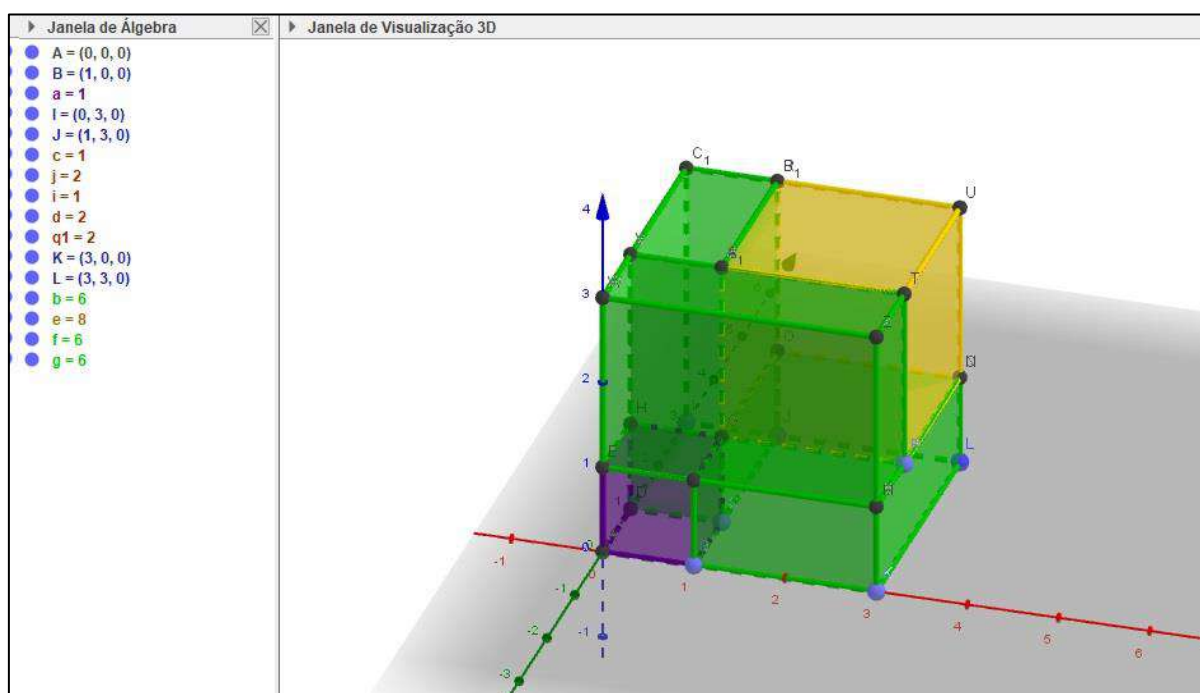
Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Observa-se que a área do termo $L_0 = 2$, aparece na Figura 33, sobreposta a área do termo $L_1 = 3$, justificando a subtração no termo da identidade após a igualdade.

Identidade 44. $L_{n+1}^3 = L_n^3 + L_{n-1}^3 + 3L_{n-1}L_nL_{n+1}$ (CARLITZ, 1967).

Prova. De forma análoga a Figura 27, demonstra-se a identidade por meio da Figura 34.

Figura 34- Prova visual da identidade 44



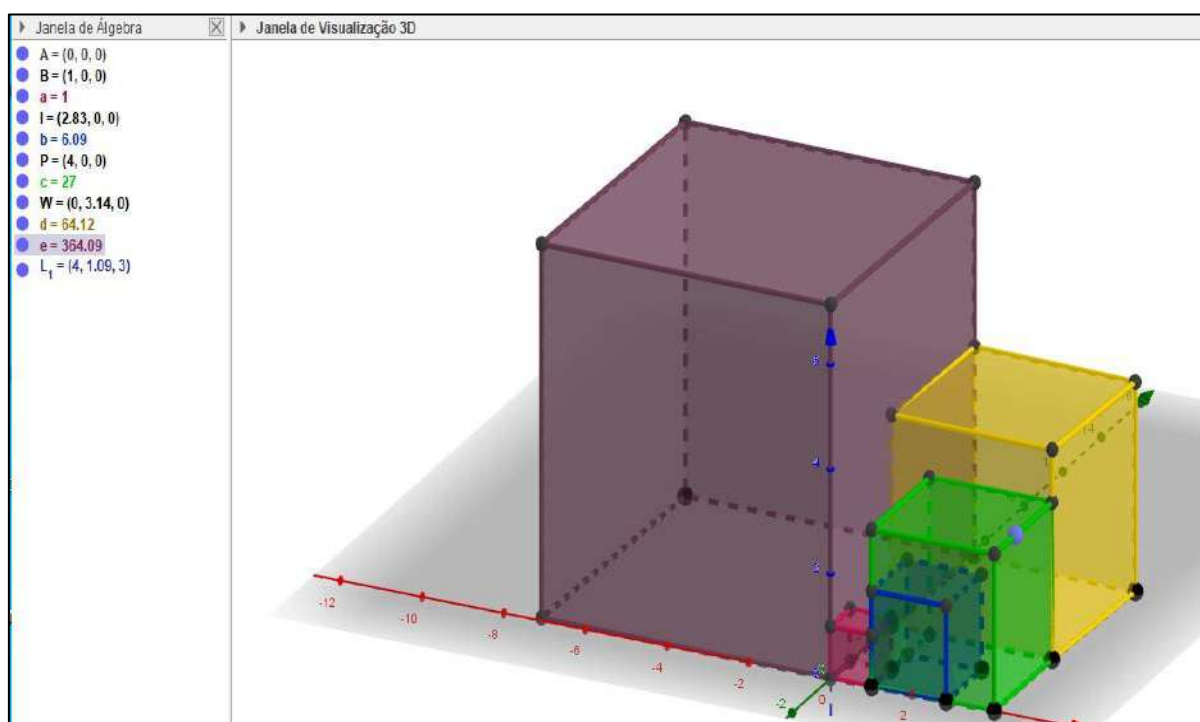
Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Observa-se a Figura 34, que os prismas de cores verdes são os produtos dos números consecutivos de Lucas, enquanto o cubo roxo e cubo amarelo são as figuras que correspondem aos outros dois termos da identidade.

Identidade 45. $L_{n+1}^3 + L_n^3 = L_{n-1}^3 + 5L_{3n}, \forall n \geq 1$.

Prova. Para demonstrar essa identidade, faz-se por meio da Figura 35.

Figura 35– Prova visual da identidade 45



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Assim, concluiu-se dessa seção que relatou as provas visuais por meio do *software* GeoGebra de identidade dos números de Lucas. Na próxima seção abordou-se as provas visuais das identidades de Pell.

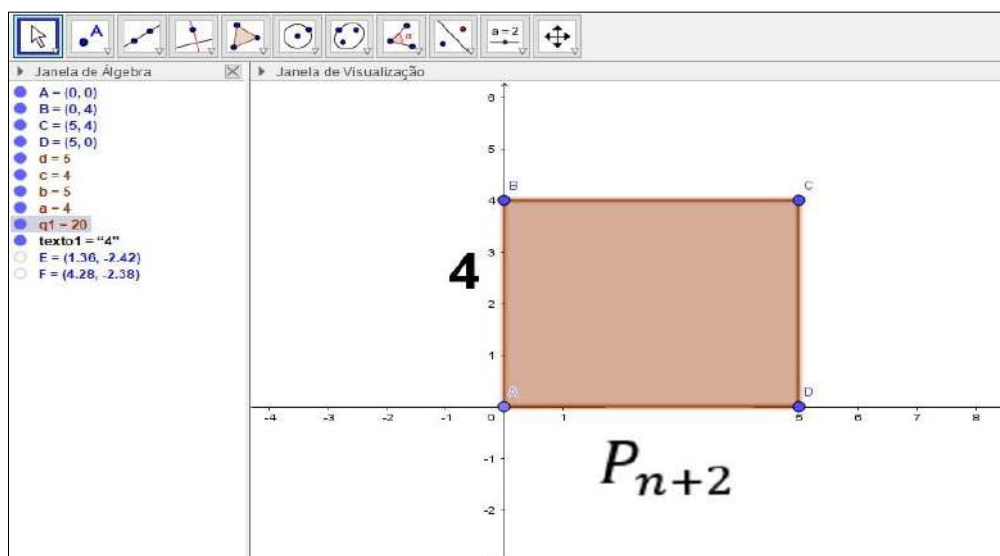
3.12.3 Visualizações das identidades de Pell na forma geométrica

Existem muitas propriedades adoráveis envolvendo os números de Pell, mas nesse tópico foram abordadas algumas identidades que podem ser representadas em uma forma geométrica. Aqui está um exemplo.

Identidade 46. $P_{n+3} + P_{n+2} + P_{n+1} + P_n = 4P_{n+2}$ para $n \geq 1$.

Prova. Para demonstrar essa identidade, faz-se por meio da Figura 36.

Figura 36– Prova visual da identidade 46



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

A Figura 36 representa o somatório de quatro termos consecutivos da sequência de Pell, de acordo com a condição de existência, logo esse resultado sempre ocasionará a área de um retângulo cujo os lados são quatro unidades e P_{n+2} . Para demonstrar essa afirmação temos:

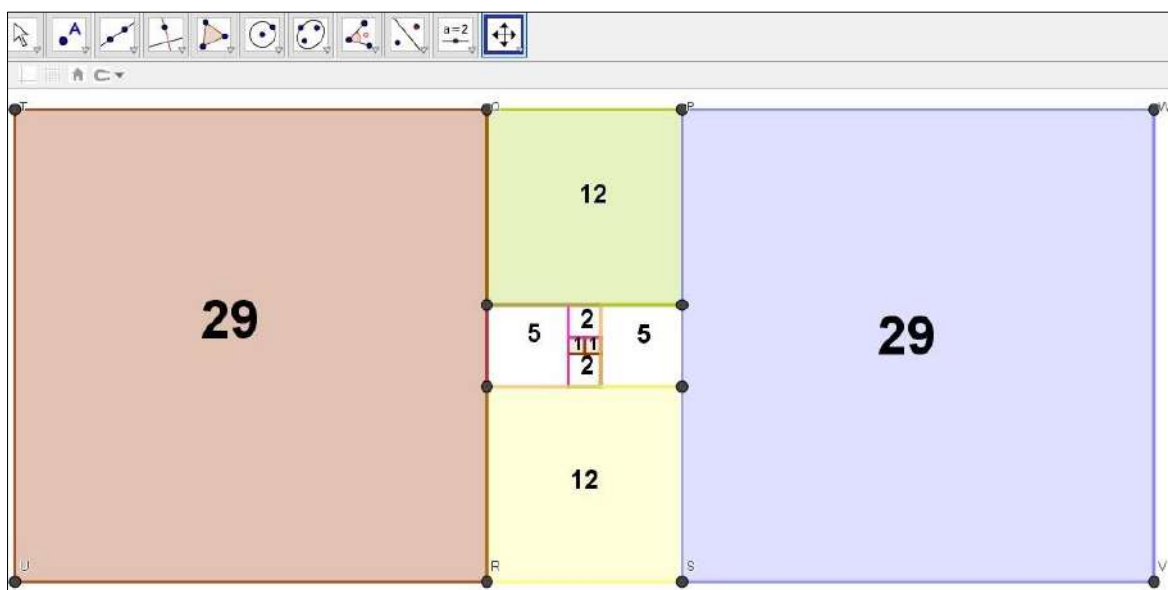
$$P_{n+3} + P_{n+2} + P_{n+1} + P_n = P_{n+2} + 3P_{n+2} = 4P_{n+2}.$$

Identidade 47(Identidade 19). $\sum_{k=0}^n P_k^2 = \frac{P_{n-1}P_n}{2}$

A identidade está relacionada diretamente ao número de prata $1 + \sqrt{2}$, assim como a identidade de Fibonacci está associada ao número de ouro. Logo para representar geometricamente essa propriedade utiliza-se a construção de um retângulo de prata utilizando como medidas dos lados de cada quadrado os números de Pell, conforme a Figura 37.

Prova: Para demonstrar essa identidade, faz-se por meio da Figura 37.

Figura 37– Prova visual da identidade 47.



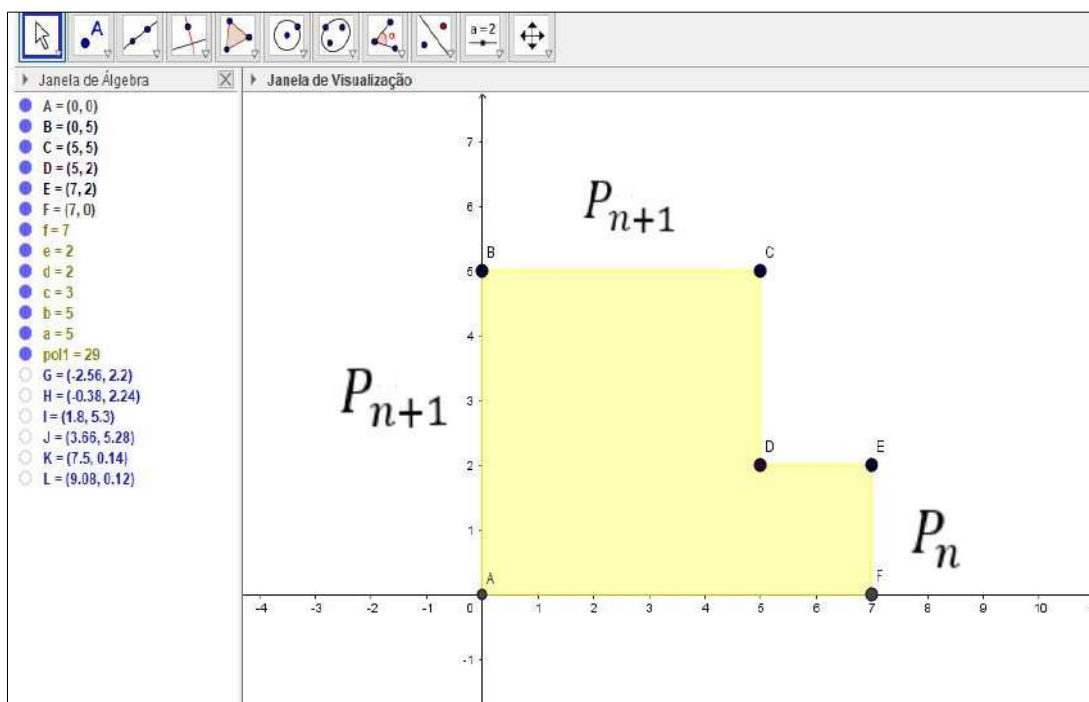
Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

A Figura 37, observa-se que cada quadrado é construído de forma duplicada, fazendo uma relação com a lei de recorrência utilizada para a construção da sequência de Pell. Essa imagem também serve para representar a espiral de prata, ou seja, os números de Pell estão diretamente ligados a razão de prata, isso traz uma demonstração por meio da visualização geométrica para essa identidade.

Identidade 48. $P_{n+1}^2 + P_n^2 = P_{2n+1}$, para $n \geq 1$.

Prova: Para demonstrar essa identidade, faz-se por meio da Figura 38.

Figura 38– Prova visual da identidade 48



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

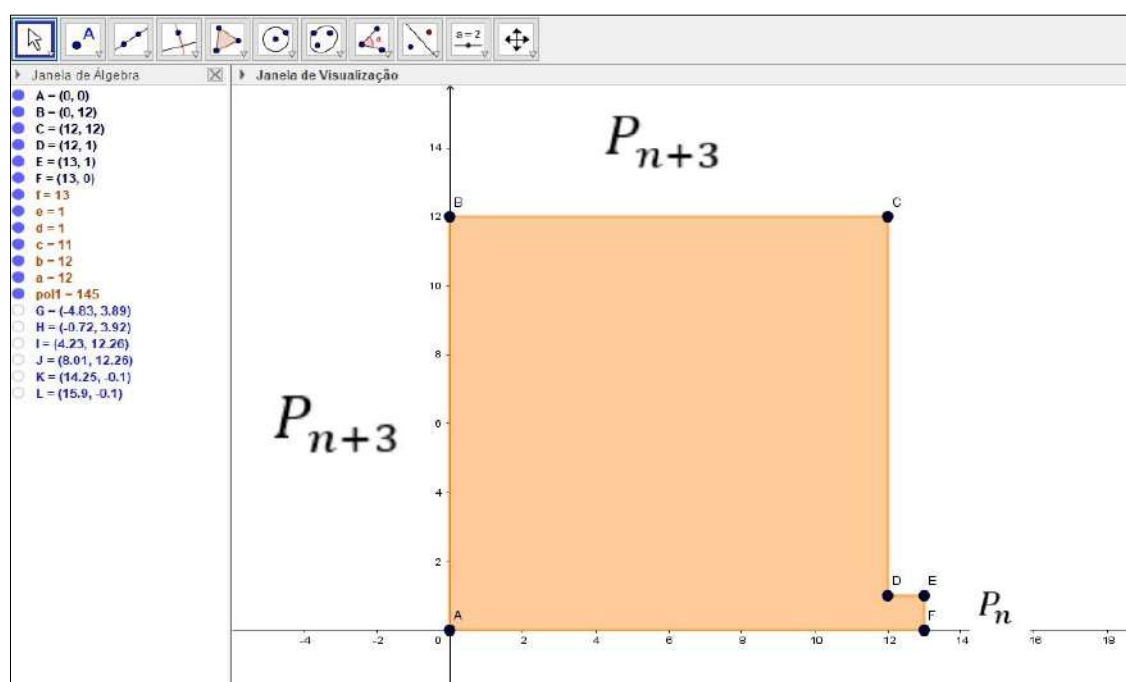
Na Figura 38 está representada a união de dois quadrados cujos lados são dois números de Pell consecutivos respectivamente, esse polígono corresponde a área de valor igual à soma dos índices anteriores que corresponde a um termo da sequência de Pell.

Exemplo 8. $P_3^2 + P_2^2 = 5^2 + 2^2 = 29 = P_5$.

Identidade 49. $P_{n+3}^2 + P_n^2 = 5P_{2n+3}$, para $n \geq 1$.

Prova: Para demonstrar essa identidade, faz-se por meio da Figura 49.

Figura 39– Prova visual da identidade 49



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

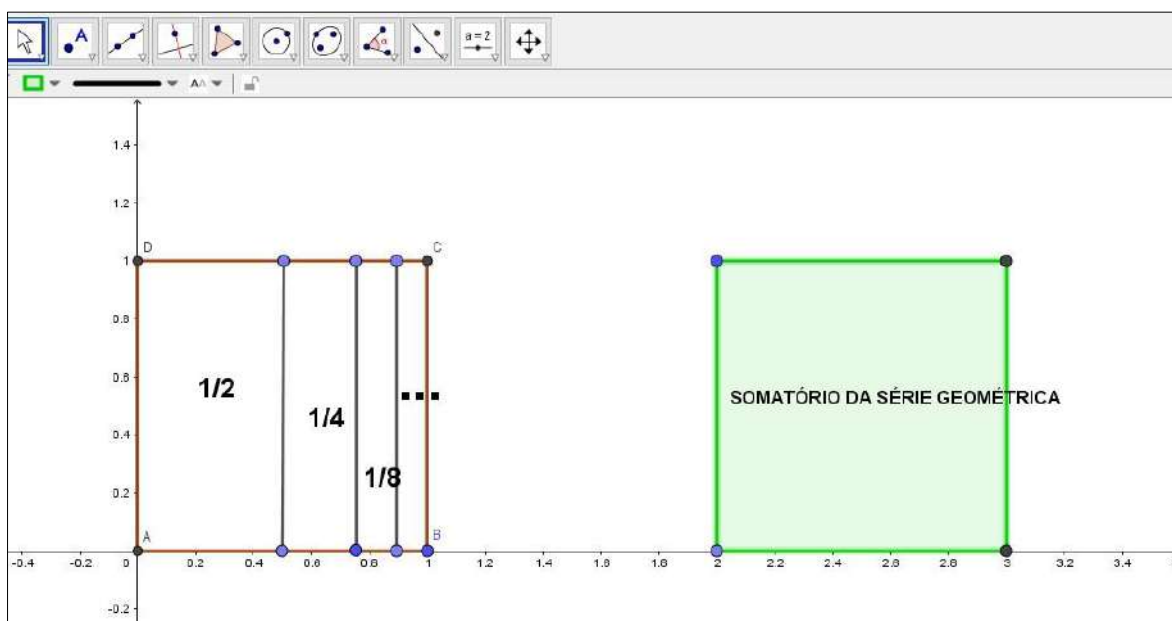
Para provar a identidade 49, a soma de dois quadrados correspondente a dois termos da sequência de Pell, será igual ao cinco vezes a outro termo também dessa sequência para todos os valores positivos. Assim, no próximo tópico aborda-se a construção da identidade de Oresme.

3.12.4 Visualizações das identidades de Oresme na forma geométrica

Oresme obteve as somas de várias séries geométricas através de uma abordagem geométrica, que ele apresentou. Em uma aula de história de cálculo, seu método pode ser aplicado para somar a série geométrica com razão comum $1/2$ e termo inicial 1, como segue: Seja G a série geométrica com razão comum $1/2$ e termo inicial 1. Oresme argumentou geometricamente para provar que $G = 2$.

Na Figura 40, o quadrado ABCD e o quadrado EFGH têm lados de comprimento 1 e, portanto, área 1.

Figura 40- Prova visual da identidade 50



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Na Figura 40, o quadrado ABCD foi subdividido pela metade sucessiva em uma sequência infinita de retângulos com as respectivas áreas. A soma das áreas dos retângulos do quadrado ABCD da esquerda para a direita resulta

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots = 1$$

Essa série caracteriza a identidade 50, uma de muitas contribuições realizadas por Oresme. Stillwell (1989). Observou-se que esta construção de Oresme pode ser o primeiro exemplo de uma figura que é infinito em extensão, mas tem conteúdo finito, um fenômeno posteriormente investigado por Torricelli ao estudar um sólido hiperbólico de revolução. Barão (1969), Edwards (1979) e Katz (1998) temos boas discussões sobre o resumo desta série de Oresme.

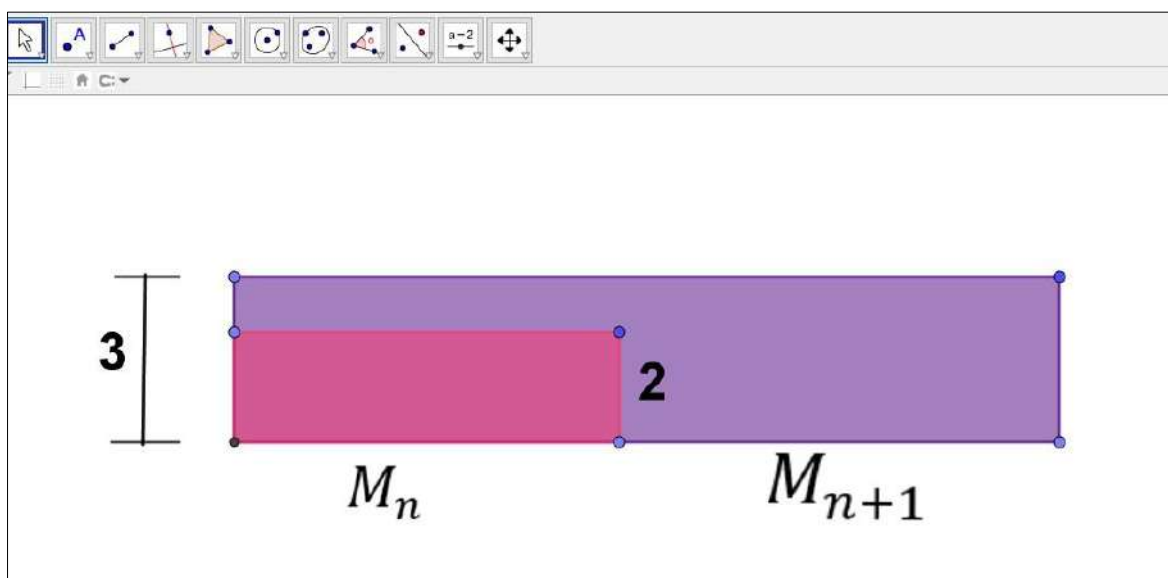
3.12.5 Visualizações das identidades de Mersenne na forma geométrica

Assim como Oresme, Mersenne realizou muitas contribuições para a História da Matemática, os números de Mersenne ainda hoje são essenciais para novas descobertas em diversas áreas voltadas às tecnologias. Nesse tópico apresentamos a identidade 51, que pode ser representada geometricamente.

Identidade 51. $M_{n+2} = 3M_{n+1} - 2M_n$ para $n \geq 1$

Prova: Para demonstrar essa identidade, faz-se por meio da Figura 41.

Figura 41– Prova visual da identidade 51.



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Na Figura 41, observa-se que sempre a área do retângulo maior será o triplo de M_{n+1} , que é um número de Mersenne. Bem como, o segundo retângulo sempre será o dobro do número M_n . Assim, para apresentar a área que pode ser associada ao número M_{n+2} a imagem preenchida com a cor roxa, ou seja, esse polígono representa o resultado da diferença entre as duas áreas propostas, provando geometricamente essa identidade.

3.12.6 Visualizações das identidades de Jacobsthal na forma geométrica

Nesse tópico apresentamos três definições importantes para a sequência de Jacobsthal com a relação de recorrência para a construção geométrica das identidades propostas segundo Kohsy (2019).

Definição 18: $J_n = J_{n-1} + 2.J_{n-2}$, para $n \geq 2$, $J_0 = 0$ e $J_1 = 1$.

Definição 19: $J_{k,n} = k.J_{k,n-1} + 2.J_{k,n-2}$, para $n \geq 2$.

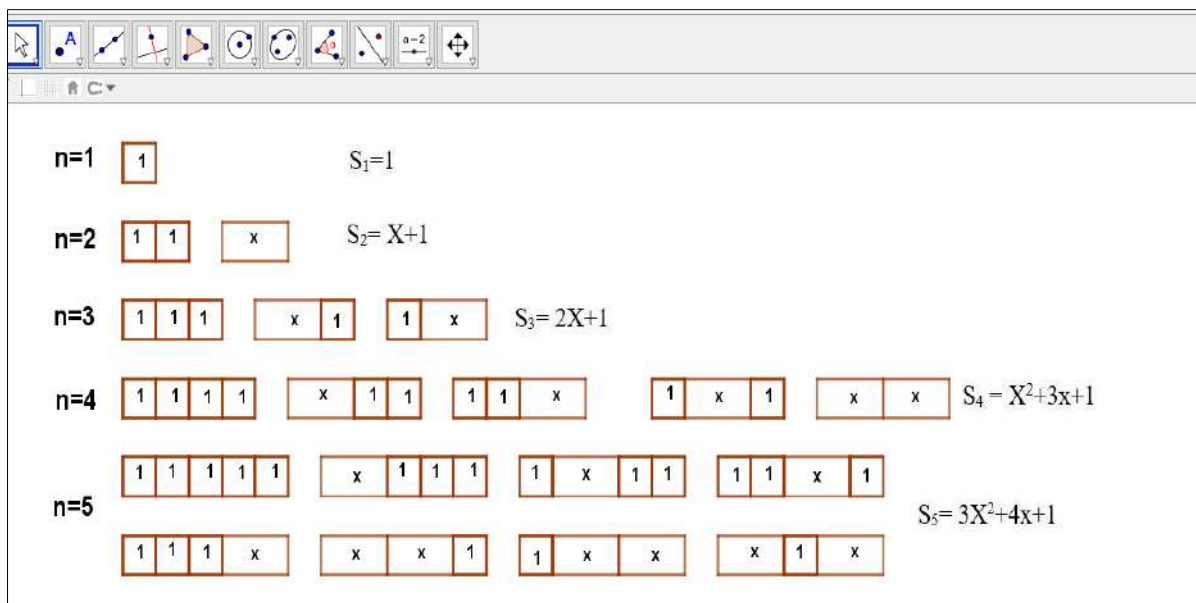
Sendo as condições iniciais para definição 19, $J_{k,0} = 0$ e $J_{k,1} = 1$, denominando a sequência de k-Jacobsthal. É importante destacar, que se utilizar $k = 1$ e $k = 2$, obtém-se respectivamente a sequência usual de Fibonacci e a sequência de Jacobsthal que está representada por $\{J_n\} = \{0, 1, 1, 3, 5, 11, \dots\}$.

Definição 20: $J_n(x) = J_{n-1}(x) + x.J_{n-2}(x)$ para valores iniciais $J_0(x) = 0$ e $J_1(x) = 1$.

Na definição 20, temos a sequência polinomial de Jacobsthal. Assim, a partir dessas definições Koshy (2019) faz uma associação da sequência de Jacobsthal com um tabuleiro, de forma preliminar, a um ladrilho unidimensional do tipo $1 \times n$, com as seguintes

representações: um quadrado 1×1 tem peso 1, retângulo 1×2 , denominado dominó, tem peso x , como mostra a Figura 42.

Figura 42– Representação de um tabuleiro $1 \times n$.



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Na Figura 42, relacionamos os ladrilhos com a sequência de Jacobsthal, sendo associado o peso denominado S_n , para cada tabuleiro. Segundo Koshy (2019) suponha que S_n denota a soma dos pesos do tabuleiro de comprimento n . Agora estabelecemos que $S_n = J_{n+1}(x)$.

Primeiro, observe que $S_0 = 1 = J_1(x)$ e $S_1 = 1 = J_2(x)$. Considere um ladrilho de comprimento arbitrário n , no qual $n \geq 2$. Suponha que ele termine em um quadrado; a soma dos pesos de tais tabuleiros é $S_{n-1} \cdot 1 = S_{n-1}$. Por outro lado, suponha que termine em um dominó; a soma dos pesos de tais tabuleiros é $S_{n-2} \cdot x = S_{n-2}$. Consequentemente, $S_n = S_{n-1} + x \cdot S_{n-2}$, a recorrência de Jacobsthal.

Em virtude das condições iniciais, isso implica que $S_n = J_{n+1}(x)$, como desejado. Assim, temos o seguinte resultado os ladrilhamentos descritos por peças previamente definidas com os seguintes pesos: $S_1 = 1, S_2 = x + 1, S_3 = 2x + 1, S_4 = x^2 + 3x + 1, S_5 = 3x^2 + 4x + 1$, conforme a Figura 42. Dessa forma, apresentamos o Teorema 18.

Teorema 18. Suponha que o peso de um quadrado seja 1 e o de um dominó seja x . Então a soma dos pesos dos tabuleiros de comprimento n é $J_{n+1}(x)$, no qual $n \geq 0$.

Prova: Como $J_{n+1}(1) = F_{n+1}$, no qual F corresponde aos números de Fibonacci, existem exatamente F_{n+1} ladrilhos de comprimento n . Usando o conceito anterior, podemos mostrar que

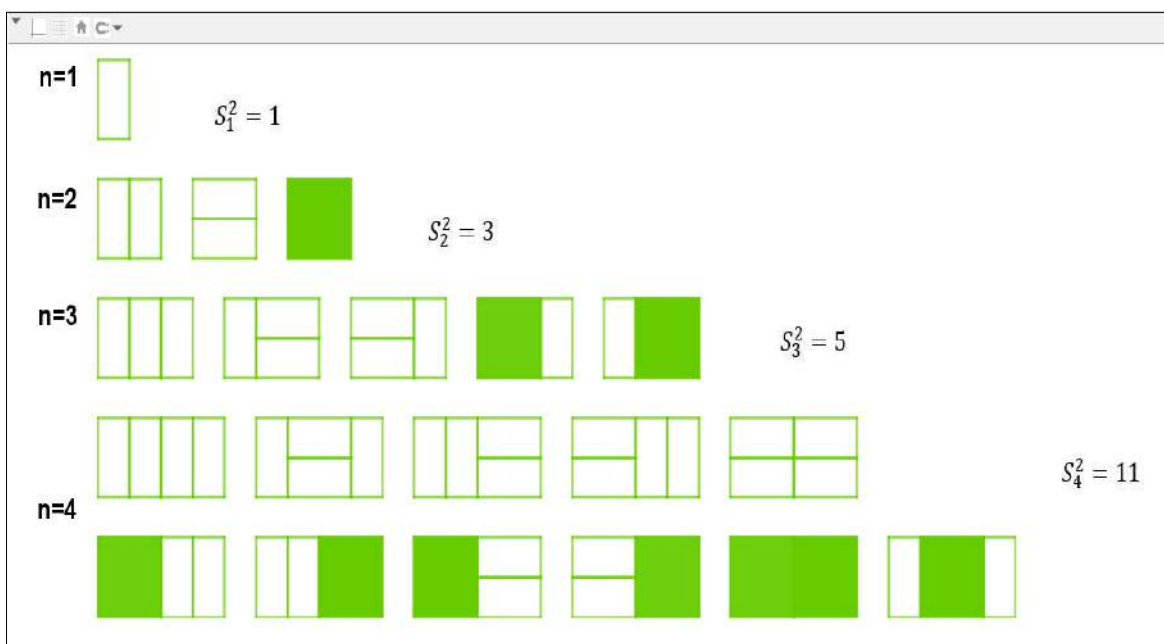
$$J_{m+n+1}(x) = J_{m+1}(x) \cdot J_{n+1}(x) + x \cdot J_m(x) \cdot J_n(x)$$

Finalizando o Teorema 18, cabe mostrar uma forma de extensão da Sequência de Jacobsthal, para o caso particular da variável $x = 1$, podemos determinar, por intermédio das representações dos ladrilhamentos contidos na Figura 42, os termos correspondentes presentes na Sequência de Jacobsthal, que conhecemos por 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, etc.

De modo geral, quando comparamos a Definição 20, percebemos que os termos determinados na Figura 42. correspondem os termos que podemos escrever, por intermédio da relação de recorrência $J_n(x) = J_{n-1}(x) + x \cdot J_{n-2}(x)$ para valores iniciais $J_0(x) = 0$ e $J_1(x) = 1$.

Agora, de forma preliminar, vamos considerar um tabuleiro unidimensional do tipo $2 \times n$, com as seguintes peças: dominós horizontais 1×2 , dominós verticais 2×1 , ambos de peso 1, quadrados verdes 2×2 , com peso x , conforme a Figura 43.

Figura 43– Representação de um tabuleiro $2 \times n$



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Segundo Koshy (2019), consideramos o peso definido por S_n^2 para cada tabuleiro, e $S_0^2 = 1$. Cabe observar, a partir do exame de alguns casos particulares, podemos depreender, por intermédio de um exercício de visualização, que ocorrem apenas duas formas de ladrilhos, quando olhamos para o final. Ocorrem ladrilhos que terminam com retângulos verticais e, neste caso, determinam sub-ladrilhos de comprimento $n - 1$. Por outro lado, podem ocorrer sub-ladrilhos de comprimento $n - 2$ que terminam em quadrados verdes 2×2 ou dominós agrupados da forma de dois retângulos juntos 1×2 , de acordo com a Figura 43.

Por exemplo, com base na Figura 43, quando consideramos os ladrilhos do tabuleiro para $n = 4$, podemos contar 5 ladrilhos que com retângulos verticais, 3 ladrilhos que terminam em quadrados verdes, 3 ladrilhos que terminam com retângulos horizontais, ou seja, $n = 4 \Rightarrow 5 + 2.3 = 11 = J_4$. Com base nesse exame particular, vamos generalizar os respectivos argumentos de contagem dos ladrilhos que preenchem um tabuleiro $2 \times n$, com o Teorema 19.

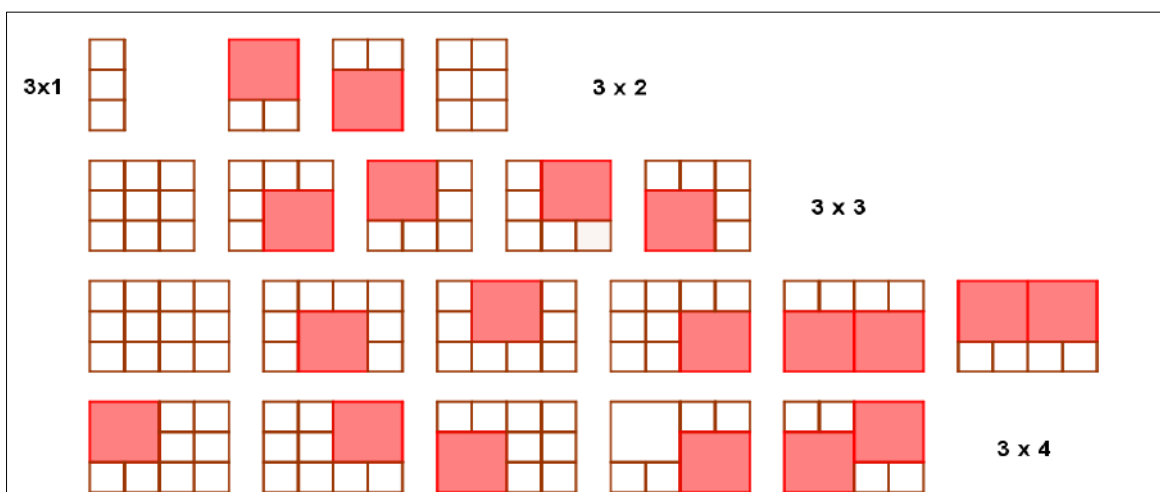
Teorema 19. Seja um tabuleiro $2 \times n$, e os dominós horizontais 1×2 e verticais 2×1 , ambos com peso 1, quadrados pretos 2×2 , com peso x . Então a soma dos pesos de comprimentos n , será $S_n^2 = J_{n+1}$, para $n \geq 0$ (Koshy, 2019).

Prova: considere um tabuleiro $2 \times n$. Denominamos por S_n^2 o número de formas diferentes de ladrilhos deste tabuleiro. De imediato, nos casos $n = 0$ e $n=1$, definimos que $S_0^2 = 1 = J_1$, $S_1^2 = 1 = J_2$. Nos casos seguintes, podemos examinar as relações numéricas exibidas na Figura 43. Considerando ladrilhos arbitrário qualquer, que denotaremos por T , vamos considerar os seguintes casos: (i) quando termina com um dominó vertical; (ii) quando termina com um quadrado; (iii) quando termina com a seguinte dois retângulos juntos na forma horizontal. Percebemos que, quando não ocorre o caso (i), teremos apenas duas possibilidades que ocorrem.

Podem ocorrer sub-ladrilhos da forma de $n - 2$ para quadrados 2×2 , ou sub-ladrilhos da forma de $n - 2$ para dois retângulos horizontais juntos 1×2 . Dessa forma, desde que representações anteriores são independentes, a contribuição total final de todos os casos, por um princípio aditivo e contagem, resulta na expressão $2x S_{n-2}^2$.

E, acrescentando-se os casos do item (i), para os casos de sub-ladrilhos da forma $n-1$, para ladrilhos verticais determinaremos que: $1x S_{n-1}^2 + 2x S_{n-2}^2 = S_{n-1}^2 + 2x S_{n-2}^2$. Por fim, desde que $S_0^2 = 1 = J_1$, $S_1^2 = 1 = J_2$, $S_2^2 = 3 = J_3$, $S_4^2 = 5 = J_4$, expressão anterior corresponde ao caso e mesma regra de recorrência da sequência de Jacobsthal, determinamos que $S_n^2 = J_{n+1}$, para $n \geq 0$.

De acordo com a tese de Craveiro (2004), oferece algumas possibilidades para a representação de ladrilhamentos como: 3×1 , 3×2 , 3×3 , 3×4 e etc., utilizando quadrados de 1×1 e 2×2 para definir o total de números de ladrilhamentos possíveis para um tabuleiro $3 \times n$, conforme a Figura 44.

Figura 44– Representação de um tabuleiro $3 \times n$.

Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

De acordo com a Figura 44, Koshy (2019) e Craveiro (2004), mostram o Teorema 20 a seguir.

Teorema 20. Considerando um tabuleiro $3 \times n$, com apenas dois tipos de ladrilhos, um ladrilho 1×1 na cor branca e um ladrilho 2×2 na cor vermelha. Então, J_n para o número de ladrilhamentos possíveis para o tabuleiro é determinado por $j_n = J_n$ para $n \geq 1$.

Prova: De acordo com os argumentos empregados por Craveiro (2004), vamos considerar três conjuntos, a saber: (i) um conjunto de ladrilhamentos $3 \times n$ (com ladrilhos dos dois tipos definidos 1×1 e 2×2) e que contém, pelo menos um ladrilhamento (à direita) 3×1 e com ladrilhos de cor branca 1×1 ; (ii) um conjunto de ladrilhamentos $3 \times n$ (com ladrilhos dos dois tipos definidos 1×1 e 2×2) e que contém, pelo menos um ladrilhamento (à direita) 3×2 com dois ladrilhos de cor branca e um vermelha sendo os ladrilhos brancos na parte superior das figuras; (iii) um conjunto de ladrilhamentos 3×2 (com ladrilhos dos dois tipos definidos 1×1 e 2×2) e que contém, pelo menos um ladrilhamento (à direita) 3×2 com dois ladrilhos de cor branca e um vermelha, sendo os ladrilhos brancos na parte inferior das figuras.

Após considerar as três possibilidades particulares de ladrilhamentos, como indicados nos itens (i), (ii) e (iii), Craveiro (2004) explica que j_n o número de ladrilhamentos com as peças indicadas no enunciado do teorema. Definiremos que $j_0 = 1 = J_1$. No caso, seguinte, conforme a Figura 44, no caso 3×1 , teremos apenas uma forma de ladrilhar, isto é, $j_1 = 1 = J_2$.

No caso 3×1 temos $j_2 = 3 = J_3$, de acordo com a Figura 44. Mais uma vez, com base na mesma figura, por uma contagem direta, teremos que $j_3 = 5 = J_4$ e, logo a seguir, constatamos que $j_4 = 11 = J_5$.

Por fim, Craveiro (2004) emprega uma representação semelhante ao de Koshy (2019), na medida em que, a partir de uma prova visual, podemos afirmar que para o item (i) o número j_{n-1} e, para os demais casos, concluímos que (ii) e (iii) possuem a mesma quantidade de elementos, que denotaremos por j_{n-2} . Como trata-se de situações independentes e, por um princípio aditivo, somam-se todas as situações que podem ser representadas por $j_n = j_{n-1} + 2 \cdot j_{n-2}$, com os termos iniciais $j_0 = 1 = J_1$ e $j_1 = 1 = J_2$. No entanto, Craveiro (2004) conclui a partir da observação que esta relação de recorrência fornece os números de Jacobsthal, ou seja, $j_n = J_n$ para $n \geq 1$.

3.12.7 Visualizações das identidades de Narayana na forma geométrica

Segundo Bezerra e Alves (2020) uma das identidades de destaque no estudo dos números de Narayana está relacionada aos números de Catalan, por meio de uma interpretação combinatória. Para apresentar essa identidade precisamos primeiro definir os números de Narayana.

Definição 21: Para os inteiros, os números de Narayana são dados pela seguinte fórmula:

$$N(n, k) = N_{n,k} = \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \binom{n-1}{k} \text{ onde } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ é o conhecido coeficiente binomial.}$$

A partir dessa definição, observamos uma tabela com os valores de $N_{n,k}$, para $1 \leq k \leq n \leq 7$.

Tabela 3 – Valores para $N_{n,k}$

n/k	1	2	3	4	5	6	7	Row Sum
1	1							1
2	1	1						2
3	1	3	1					5
4	1	6	6	1				14
5	1	10	20	10	1			42
6	1	15	50	50	15	1		132
7	1	21	105	175	105	21	1	429

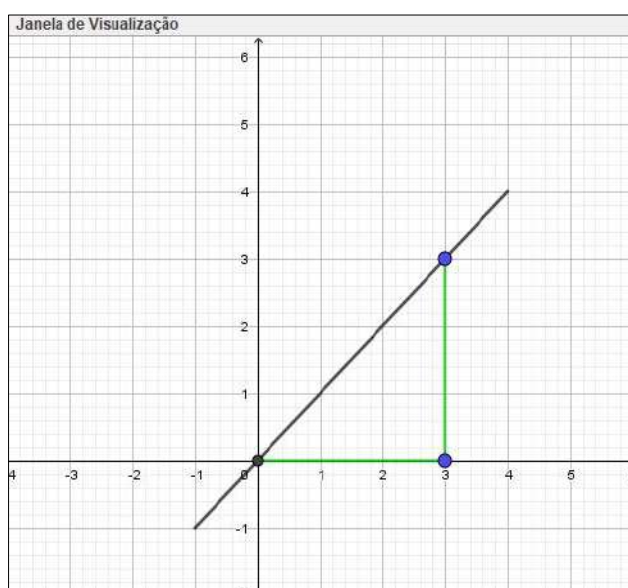
Fonte: Adaptada pelo autor (2022)

Observando a última coluna da tabela 3, podemos apresentar a seguinte identidade:

$$N(n, 1) + N(n, 2) + N(n, 3) + \cdots + N(n, n) = \sum_{k=1}^n N_{n,k} = C_n, n \geq 1.$$

Essa propriedade corresponde à identidade 52, no qual C_n é a representação do número de Catalan. Segundo Grimaldi (2012), algumas interpretações para os números de Narayana são semelhantes como ocorrem com os números de Catalan. As figuras a seguir mostram no GeoGebra os caminhos de rede dos pontos (0, 0) a (3,3) que nunca se elevam acima da reta $y = x$. Estes caminhos podem ser encontrados de acordo com a Definição 21 dos números de Narayana.

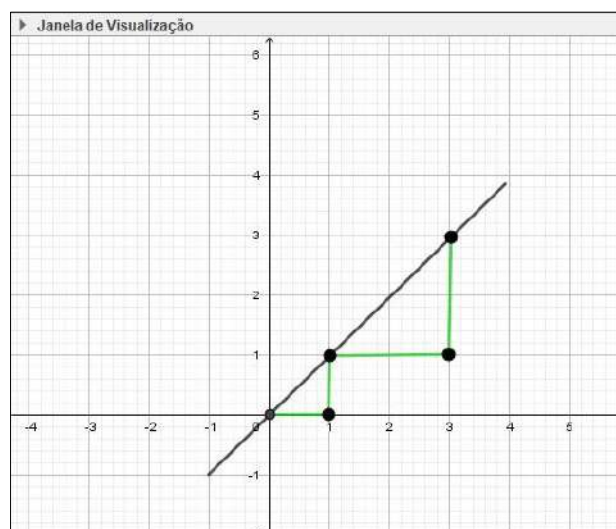
Figura 45– Caminho 3x3



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

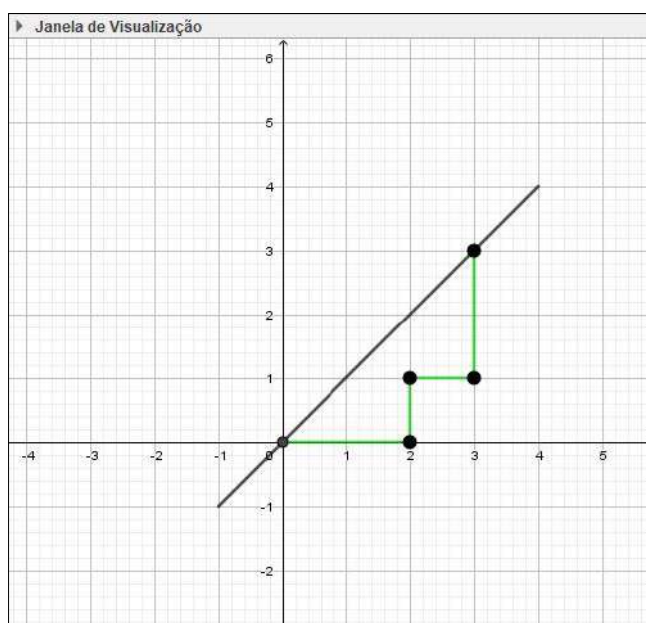
Na Figura 45 observamos três caminhos para a direita e três caminhos para cima. Esse caminho sempre se inicia (0,0) e termina (3,3) que nunca ultrapassam a reta $y = x$. Nas Figuras 46, 47 e 48 mostram três combinações de caminhos utilizando duas unidades para a direita, duas unidades para cima junto a uma unidade para cima e uma unidade para baixo.

Figura 46– Caminho 3x2 (1ª parte)



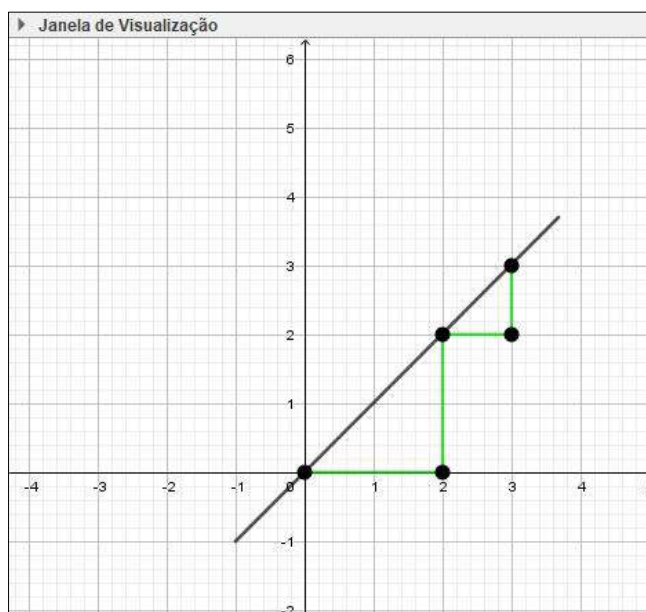
Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Figura 47 – Caminho 3x2 (2ª parte)



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

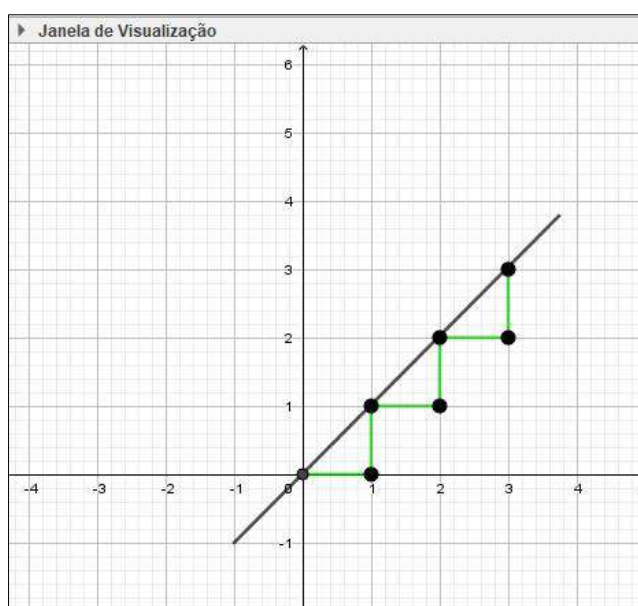
Figura 48– Caminho 3x2 (3ª parte)



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Já na Figura 49, mostra o caminho de uma unidade para a direita e uma unidade para cima, repetindo o percurso três vezes.

Figura 49– Caminho 3x1



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Dessa maneira, o total de caminho pode ser expresso por:

$$N(3,1) + N(3,2) + N(3,3) = 1 + 3 + 1 = 5.$$

Esse resultado cinco, corresponde ao elemento da tabela 3, no qual está localizado na interseção da terceira linha com a última coluna.

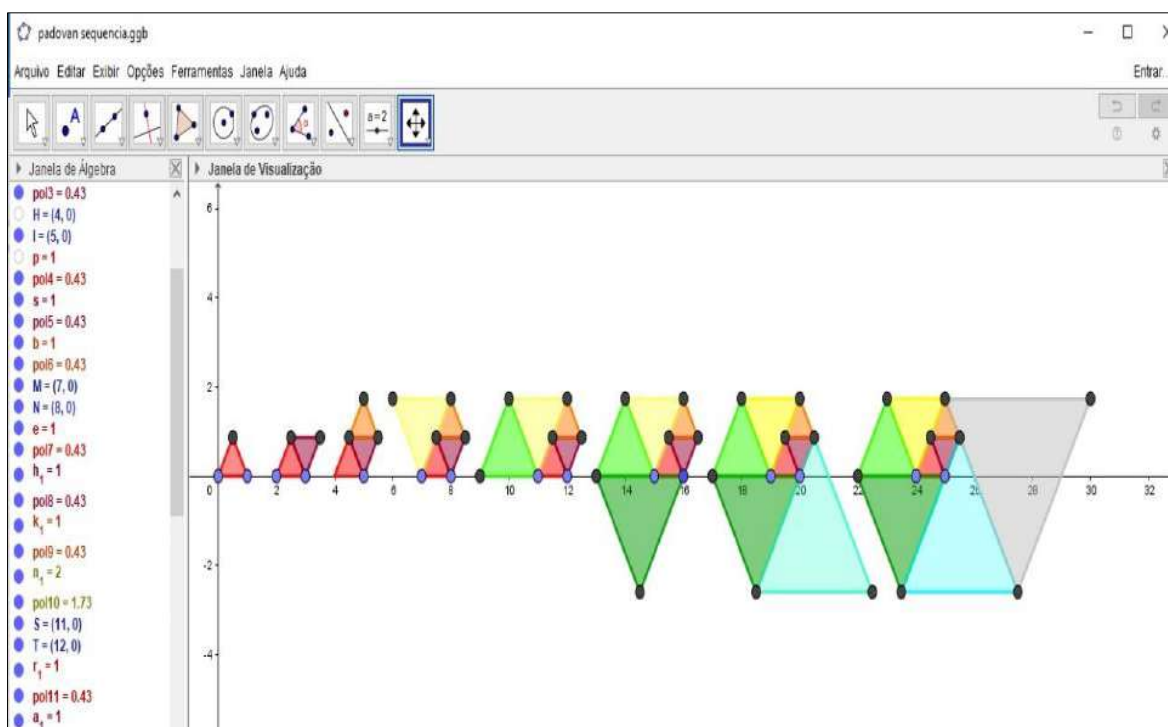
3.12.8 Visualizações das identidades de Padovan na forma geométrica

Segundo Edgar e Nacin (2021), relatam que os números de Padovan surgem de forma natural, e que as identidades podem ser provadas puramente através da geometria. As construções partem de alguns princípios como: a maioria das provas visuais envolve áreas e comprimentos de altitudes de triângulos equiláteros, consequentemente, para melhorar o processo deve-se apresentar uma constante que será utilizada sempre que for necessário.

Para facilitar a notação, define-se $c = \frac{\sqrt{3}}{4}$; fazendo a altitude de um triângulo equilátero com comprimento lateral s igual a $2cs$ e sua área igual a cs^2 : Além disso, a área de um paralelogramo com comprimento lateral s e altitude perpendicular $2ch$ é dado por $2csh$.

Começa-se investigando identidades elementares, algumas das que são exemplos específicos de declarações mais gerais que também têm provas visuais. No entanto, inclui-se para a demonstração os resultados por meio de triângulos.

Figura 50- Representação dos números de Padovan



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

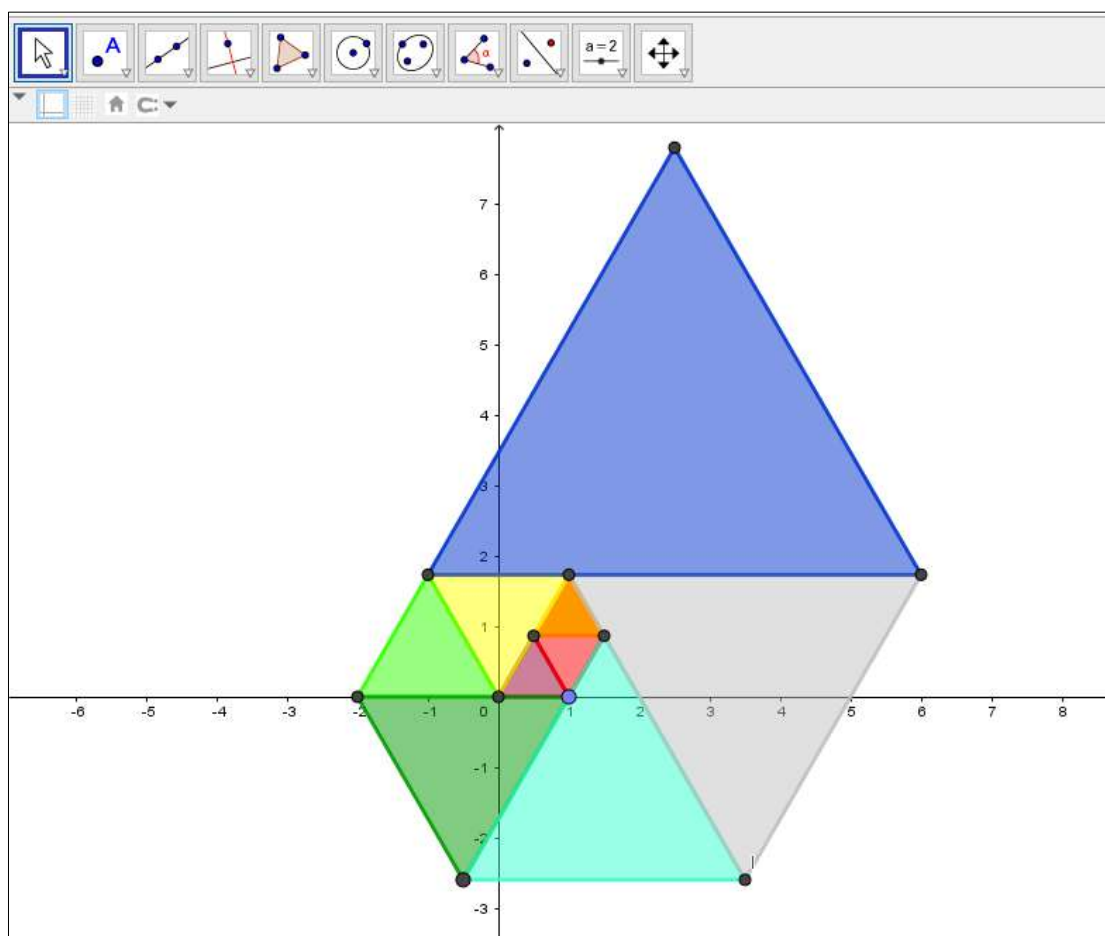
Observando a Figura 50, cada triângulo corresponde a um número na sequência de Padovan de acordo com a identidade 34. Dessa forma, utiliza-se esse raciocínio para provas visuais das identidades a seguir.

Teorema 21. Para todos $n \geq 1$, tem-se:

$$Pa_n^2 + Pa_{n-1}^2 = Pa_{n+2}^2 - 2Pa_{n-1}Pa_n$$

Prova. Para $n = 9$.

Figura 51- Os nove primeiros termos da sequência de Padovan

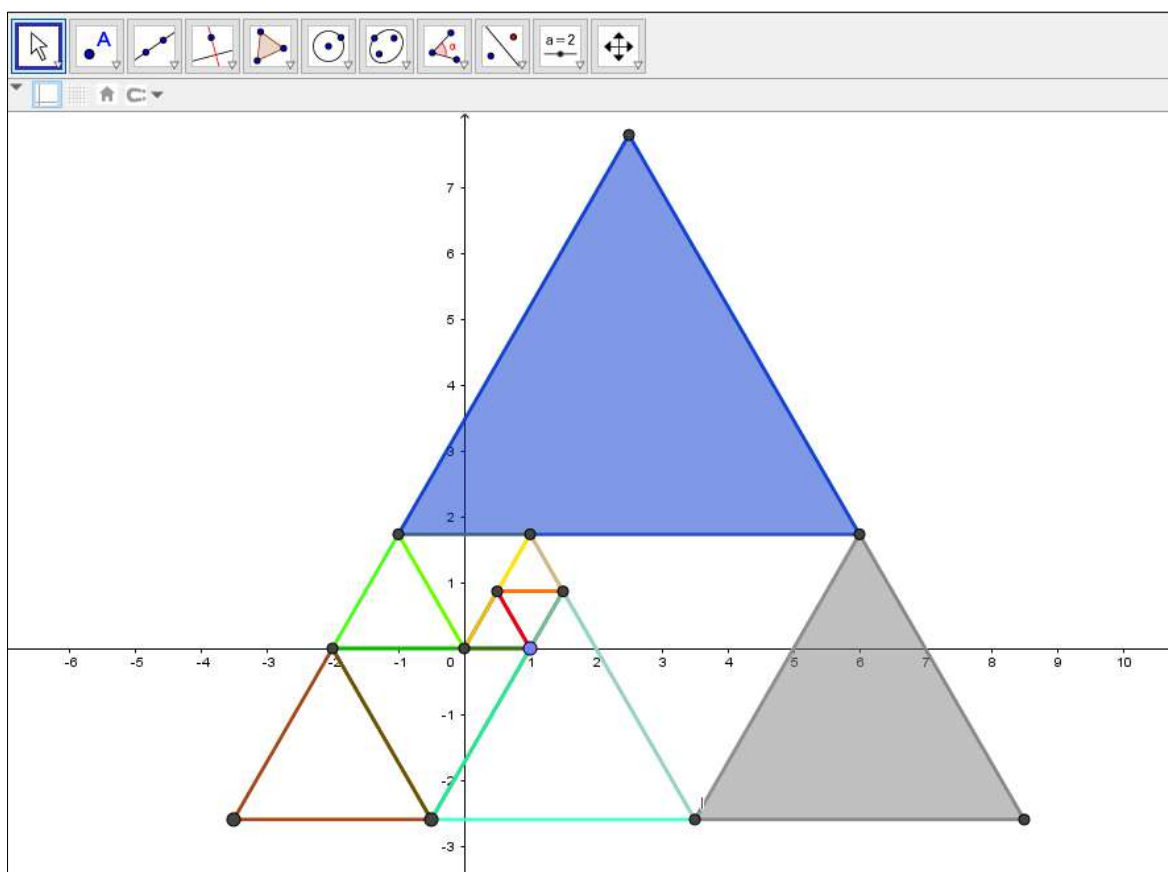


Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Assim,

$$\begin{aligned} cPa_n^2 + cPa_{n-1}^2 &= c.(Pa_n^2 + Pa_{n-1}^2) - 2.cPa_{n-1}Pa_n \\ &= c.(Pa_{n+2}^2 - 2.Pa_{n-1}Pa_n). \end{aligned}$$

Figura 52- Prova visual do Teorema 21



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

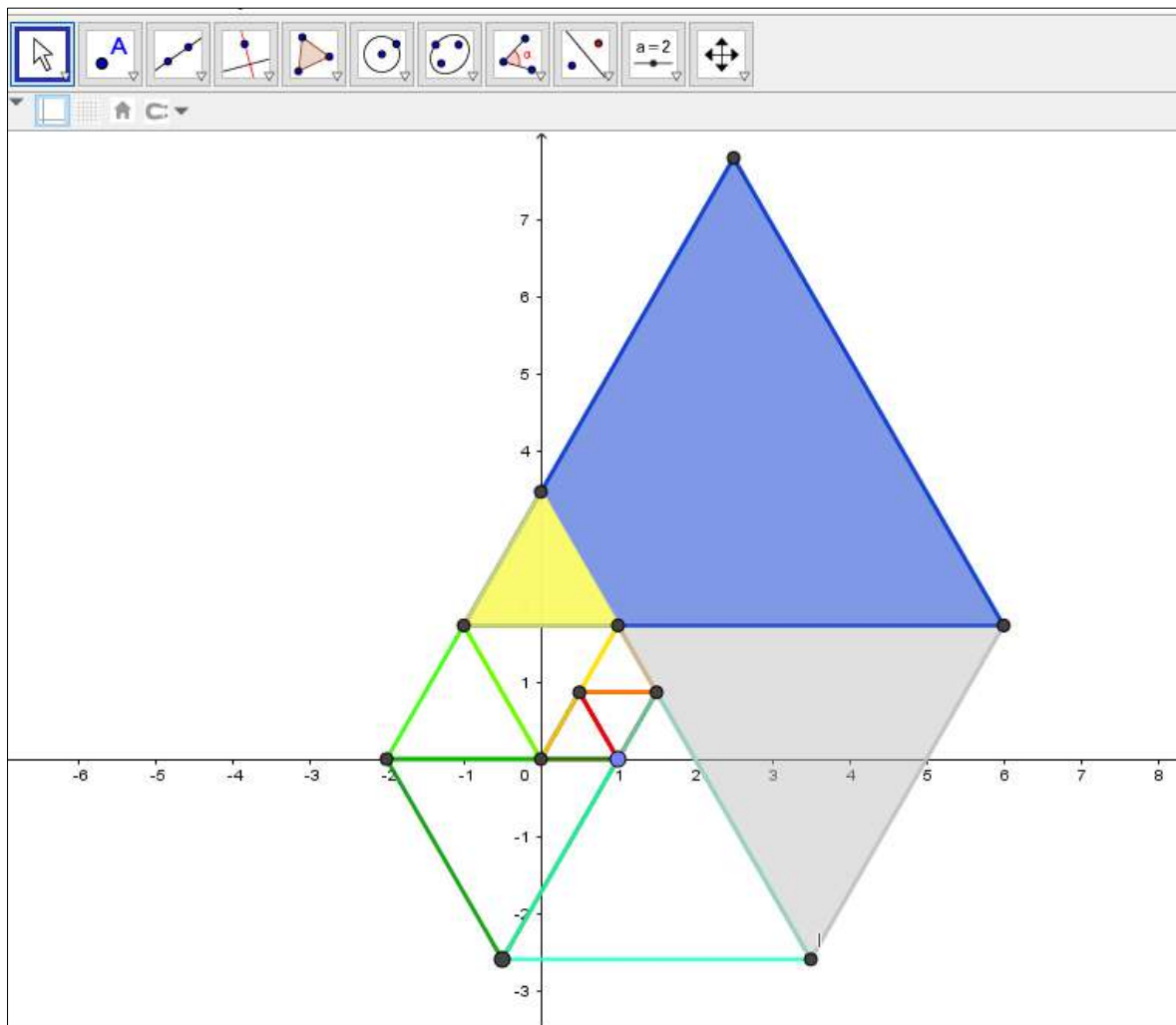
Logo, a soma das áreas dos triângulos preenchidos será igual a ao somatório das áreas não preenchidas, ressaltando que houve uma prolongação com mesma área do sexto termo dos números de Padovan.

Teorema 22. Para todo $n \geq 5$

$$Pa_n^2 + Pa_{n-1}^2 = 2 \cdot Pa_{n-1}Pa_n + Pa_{n-5}^2$$

Prova. Para $n = 9$

Figura 53- Prova visual do Teorema 22.



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

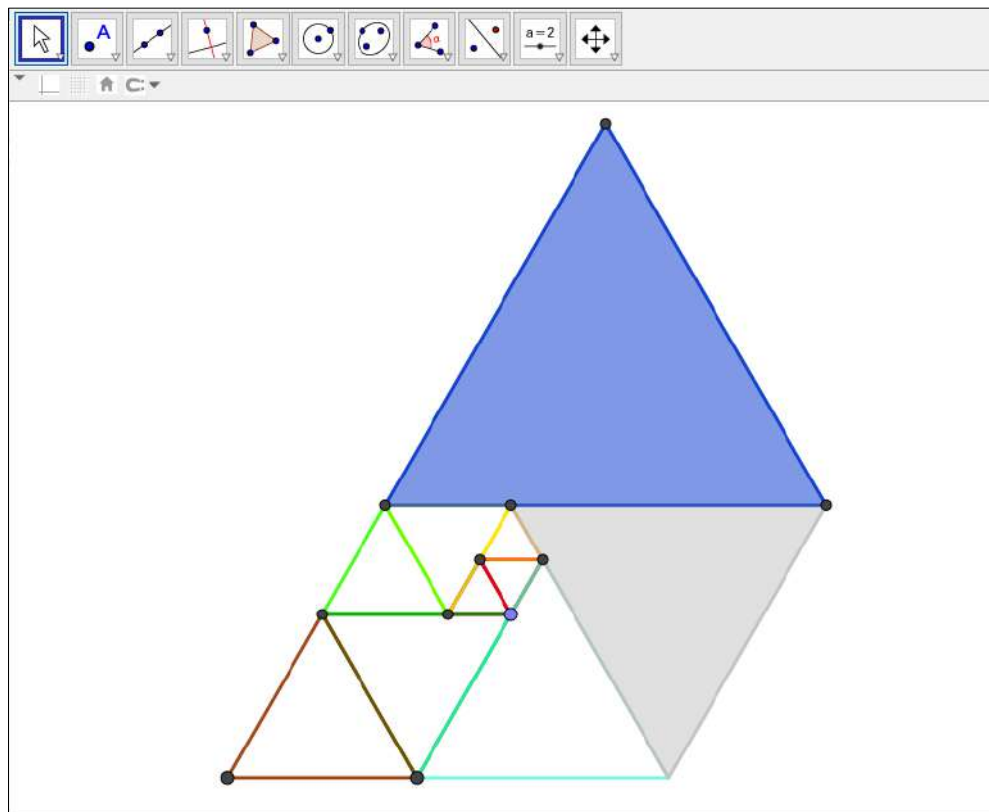
Com base na Figura 51, demonstra-se o Teorema 22 por meio da Figura 53. Por consequência, $cPa_n^2 + cPa_{n-1}^2 = 2 \cdot cPa_{n-1}Pa_n + cPa_{n-5}^2$.

Teorema 23. Para todo $n \geq 5$

$$Pa_n^2 + Pa_{n-1}^2 = Pa_{n+2}Pa_nPa_{n-1}(Pa_n - Pa_{n-2} - Pa_{n-3} - Pa_{n-5}).$$

Prova. Para $n = 9$

Figura 54- Prova visual do Teorema 23



Fonte: Elaborada pelos autores (2022).

Com base na Figura 51, demonstra-se o Teorema 23 por meio da Figura 54. Logo,

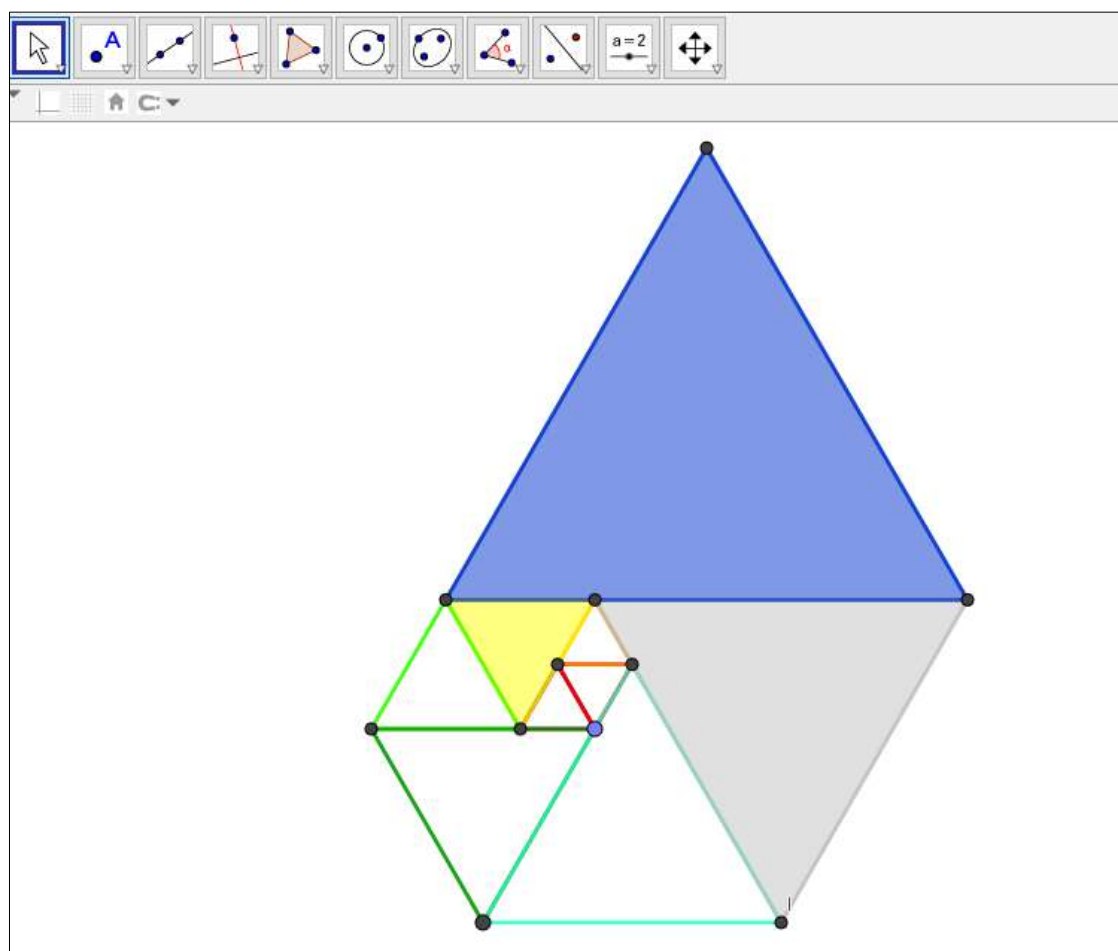
$$\begin{aligned}
 & c(Pa_n^2 + Pa_{n-1}^2) \\
 &= \frac{1}{2}(Pa_n + Pa_{n-1} + Pa_{n-1})2cPa_n - \frac{1}{2}(Pa_{n-2} + Pa_{n-3} \\
 &+ Pa_{n-5})2cPa_{n-1} \\
 &= c(Pa_{n+2}Pa_n + Pa_nPa_{n-1} - Pa_{n-1}Pa_{n-2} - Pa_{n-1}Pa_{n-3} - Pa_{n-1}Pa_{n-5}).
 \end{aligned}$$

Teorema 24. Para todo $n \geq 5$

$$Pa_n^2 = Pa_{n-1}^2 + Pa_{n-5}^2 + 2.Pa_{n-1}Pa_{n-5}$$

Prova. Para $n = 9$

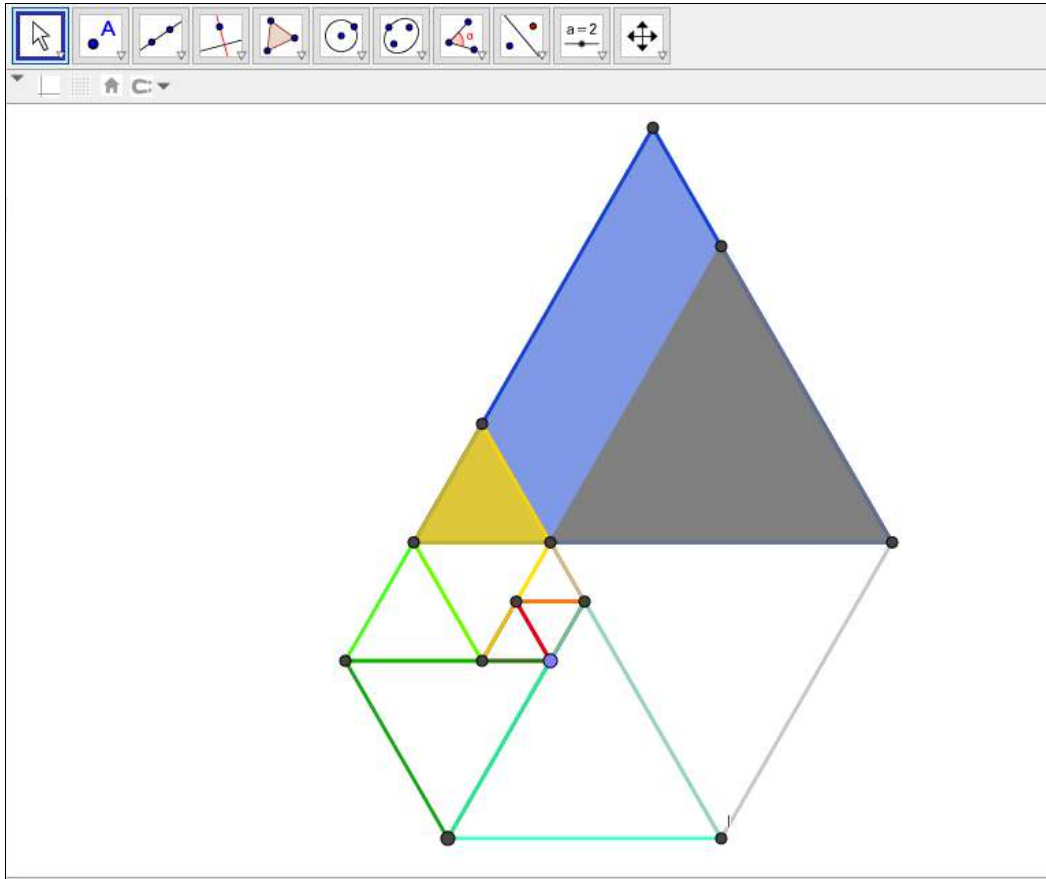
Figura 55- Prova visual do Teorema 24 (1ª parte)



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Para demonstração do Teorema 24, deve-se levar em consideração a Figura 55, para poder compreender a prova visual na Figura 56.

Figura 56- Prova visual do Teorema 24 (2ª parte)



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Assim, demonstra-se o Teorema 24

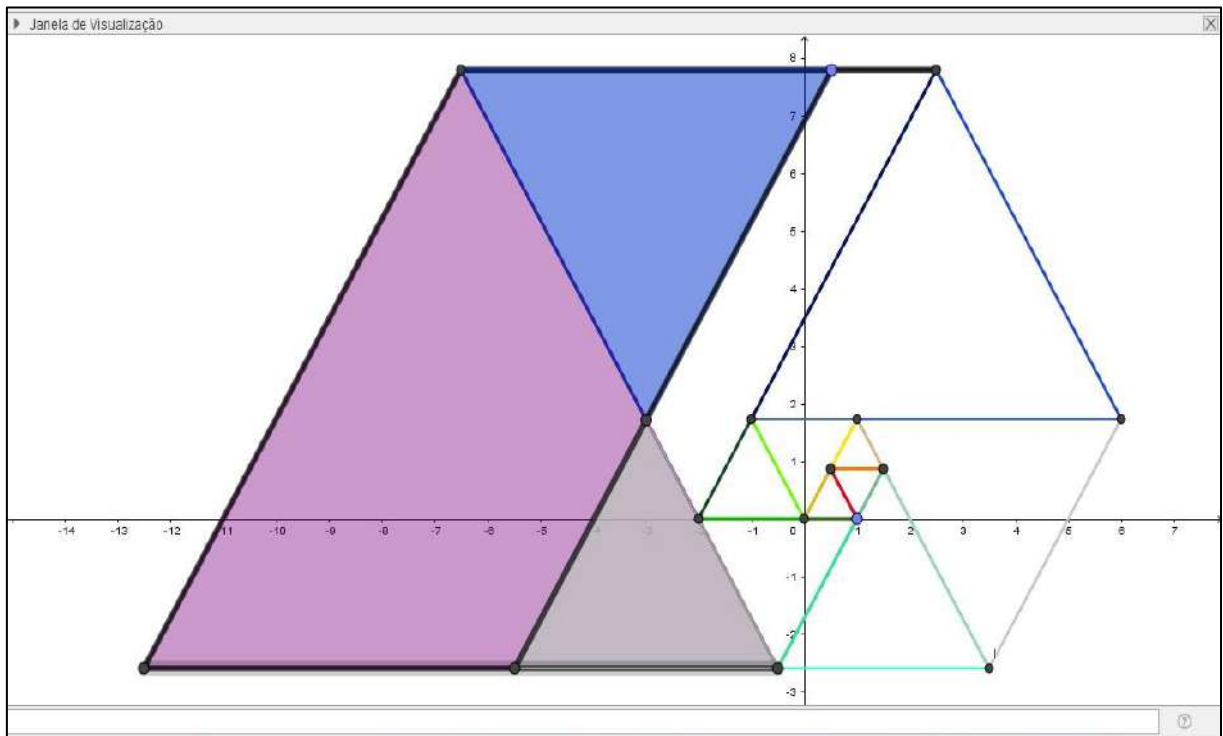
$$cPa_n^2 = cPa_{n-1}^2 + cPa_{n-5}^2 + 2 \cdot cPa_{n-5}Pa_{n-1}.$$

Teorema 25. Para todo $n \geq 3$

$$2Pa_nPa_{n-2} = Pa_n^2 - Pa_{n-3}^2 + Pa_{n-2}^2$$

Prova. Para $n = 11$

Figura 57- Prova visual do Teorema 25



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Dessa forma, observando a área em destaque, conclui-se que:

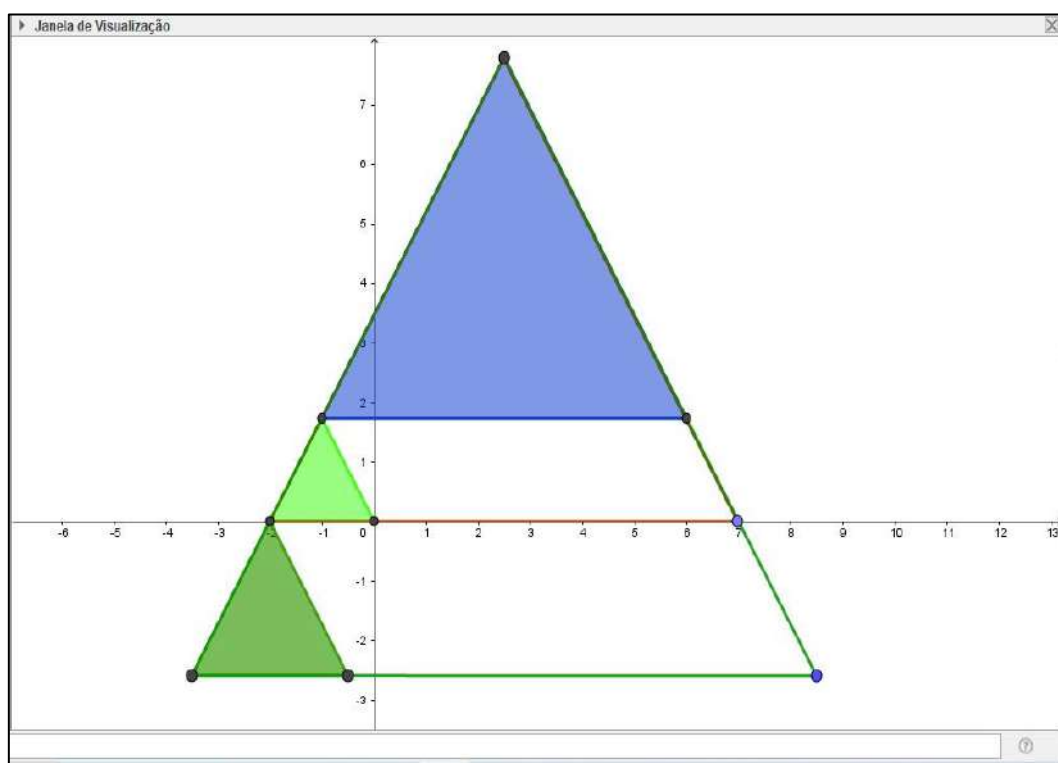
$$\begin{aligned} 2cPa_nPa_{n-2} &= cPa_n^2 - cPa_{n-3}^2 + cPa_{n-2}^2 \\ &= c(Pa_n^2 - Pa_{n-3}^2 + Pa_{n-2}^2). \end{aligned}$$

Teorema 26. Para todo $n \geq 4$

$$Pa_n^2 + Pa_{n-3}^2 + Pa_{n-4}^2 + 2Pa_{n-4}Pa_n + 2Pa_{n-3}(Pa_n + Pa_{n-4}) = Pa_{n+2}^2$$

Prova. Para $n = 9$

Figura 58- Prova visual do Teorema 26



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

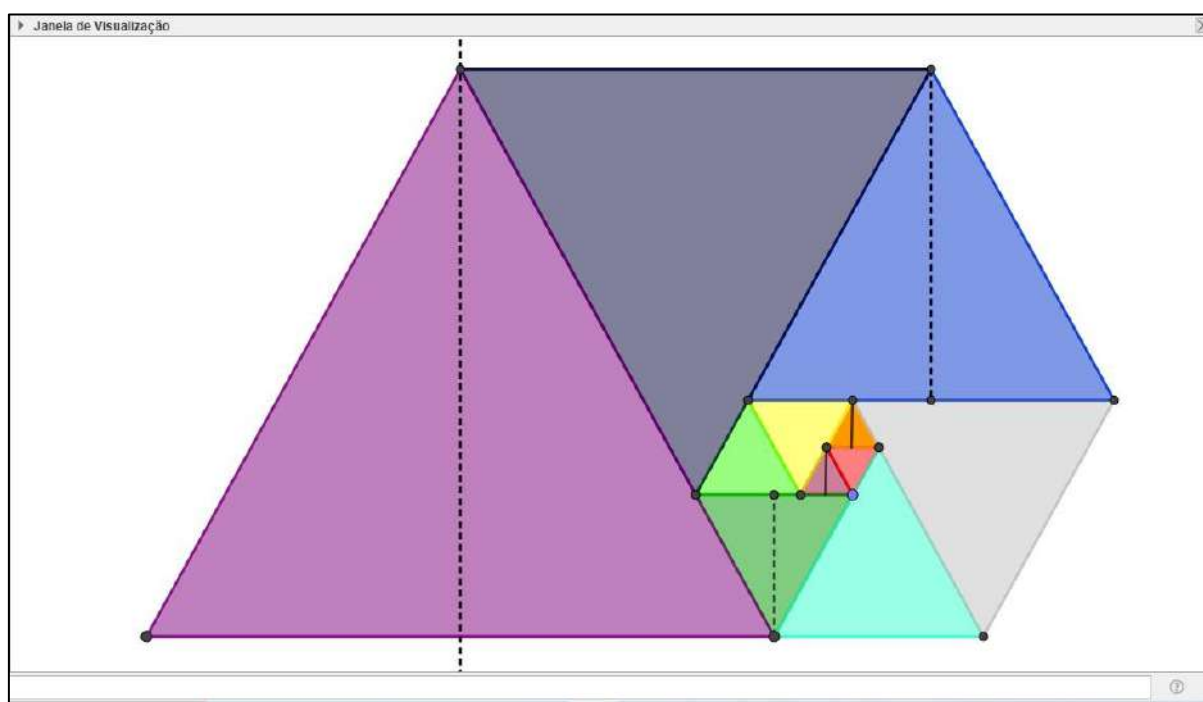
Logo, $cPa_n^2 + cPa_{n-3}^2 + cPa_{n-4}^2 + 2cPa_{n-4}Pa_n + 2cPa_{n-3}(Pa_n + Pa_{n-4}) = cPa_{n+2}^2$.

Teorema 26. Para todo $n \geq 1$, as seguintes identidades:

Identidade 53. $1 + \sum_{k=1}^n Pa_{3k} = Pa_{3n+2}$;

Prova. Para $n = 3$

Figura 59- Prova visual da Identidade 53



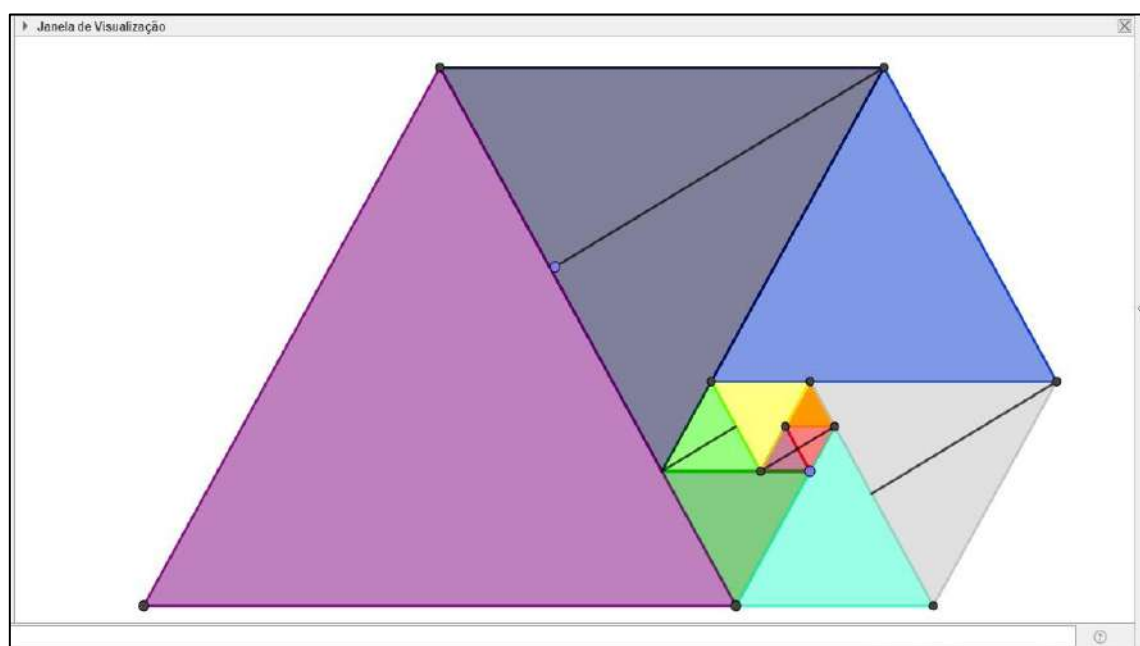
Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Observa-se na Figura 59, que os termos 1,3,6,9, 11 dos números de Padovan, aparecem traçados por uma perpendicular para demonstrar o somatório proposto pela identidade 53.

Identidade 54. $1 + \sum_{k=1}^{n-1} Pa_{3k+2} = Pa_{3n+1};$

Prova. Para $n = 3$

Figura 60- Prova visual da Identidade 54.



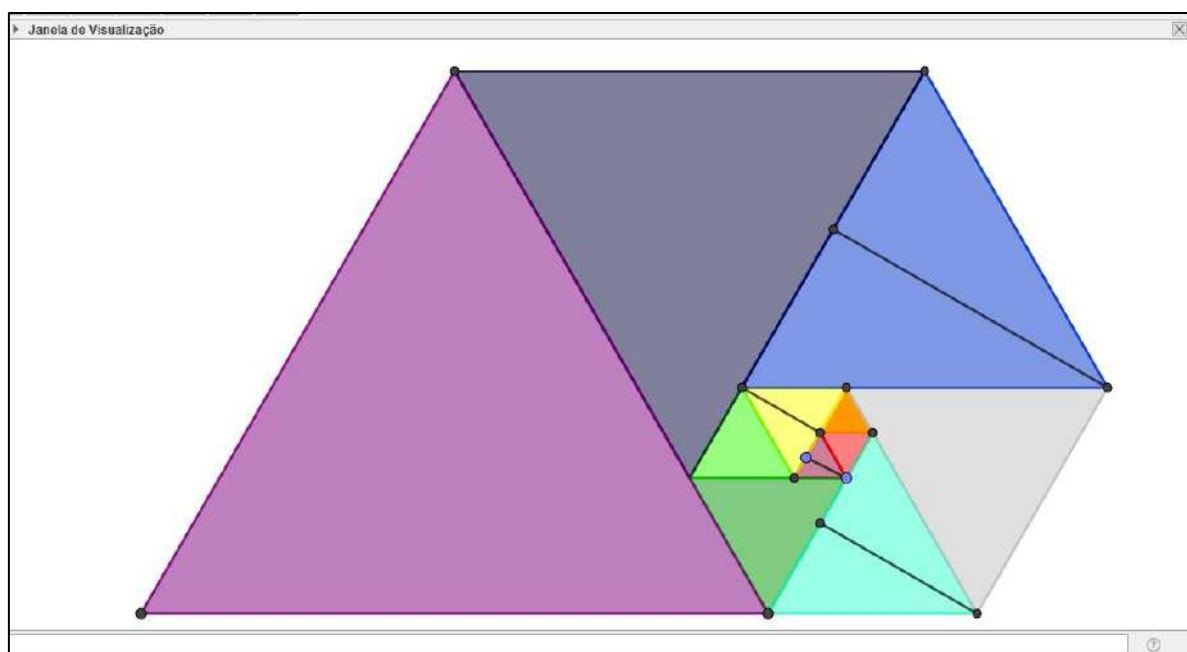
Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

De maneira análoga a identidade 53, faz a demonstração da identidade 54, através da Figura 60.

Identidade 55. $1 + \sum_{k=1}^{n-1} Pa_{3k+1} = Pa_{3n};$

Prova. Para $n = 3$

Figura 61- Prova visual da Identidade 55



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

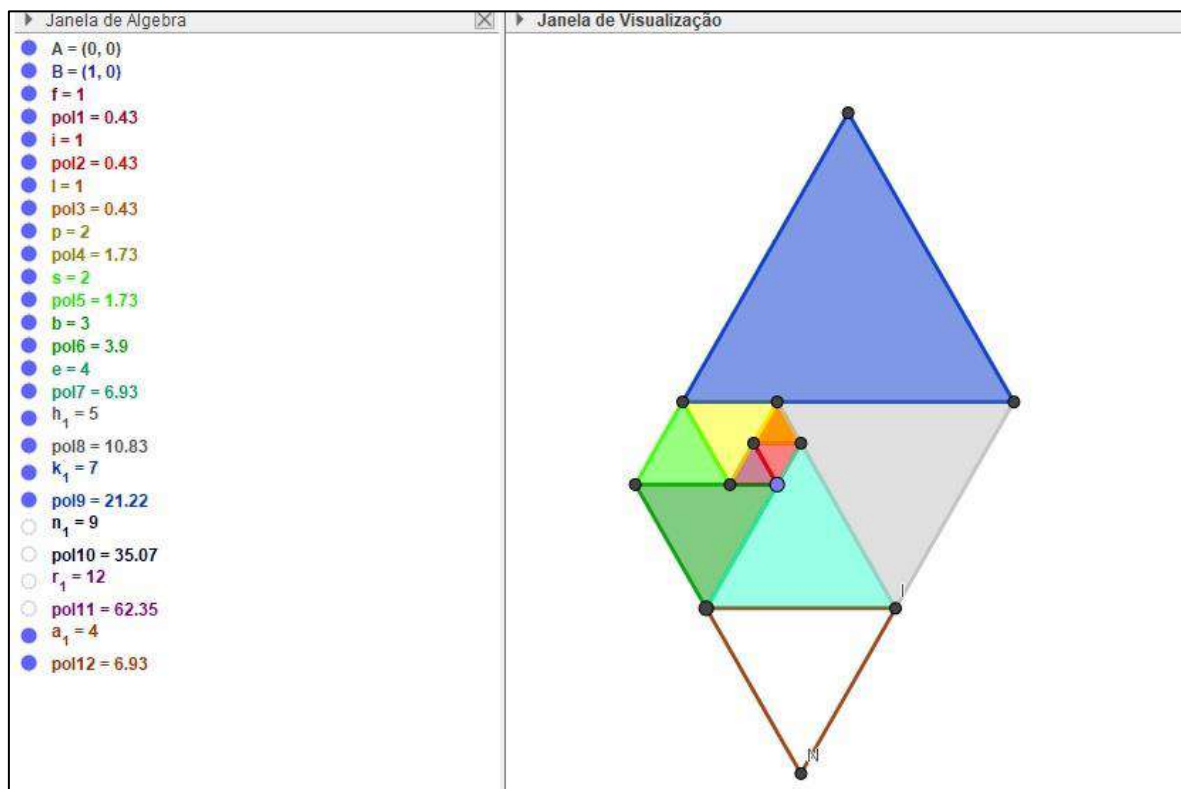
Observa-se na Figura 61, os termos 1,4,7,9 dos números de Padovan, aparecem traçados por uma perpendicular para demonstrar o somatório proposto pela identidade 55.

Teorema 27. Para todo $n \geq 2$

$$\sum_{i=1}^n Pa_i^2 = 2 \cdot Pa_{n+1}Pa_n - Pa_{n-2}^2.$$

Prova. Para $n = 9$

Figura 62- Prova visual do Teorema 27



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n cPa_i^2 &= 2 \cdot cPa_n(Pa_{n-1} + Pa_{n-2}) - Pa_{n-2}^2 \\ &= c(2Pa_nPa_{n+1} - Pa_{n-2}^2). \end{aligned}$$

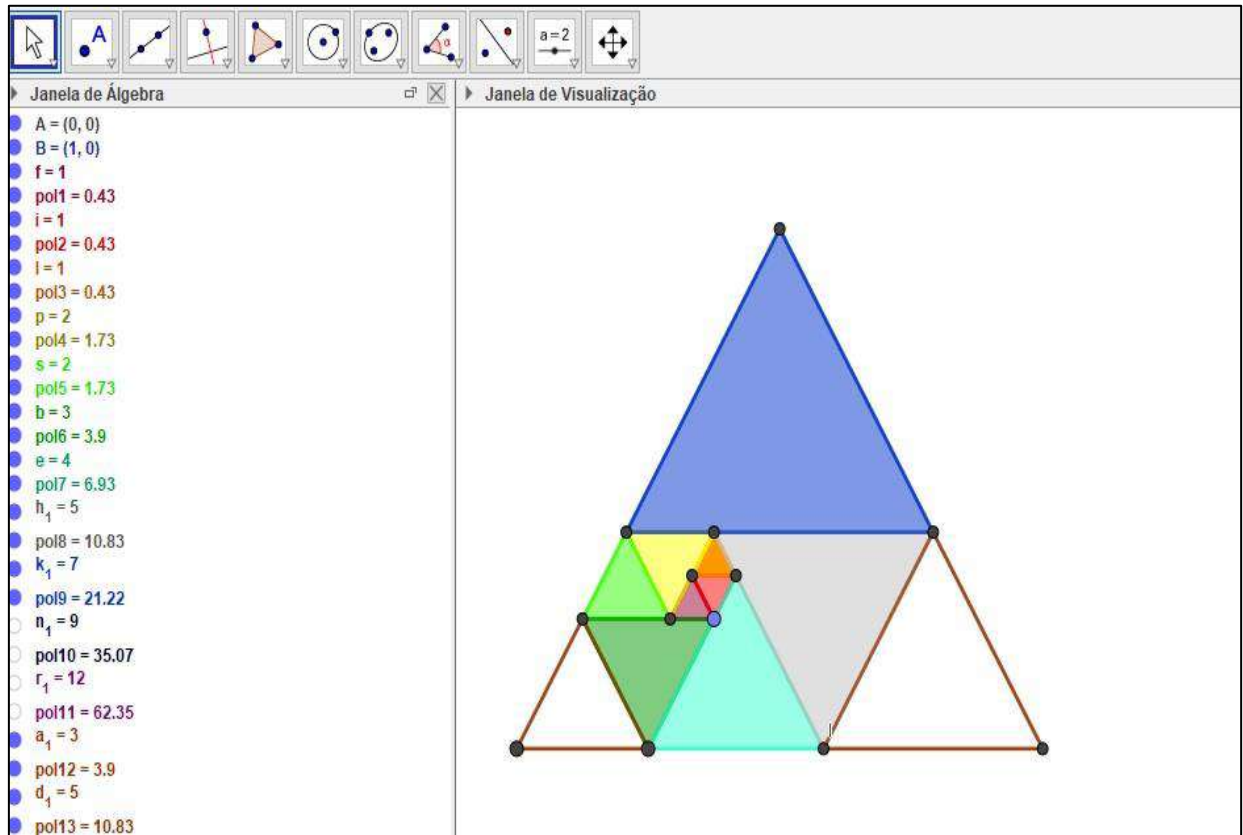
Logo, conclui-se a prova do Teorema 27.

Teorema 28. Para todo $n \geq 3$

$$\sum_{i=1}^n Pa_i^2 = Pa_{n+2}^2 - Pa_{n-1}^2 - Pa_{n-3}^2.$$

Prova. Para $n = 9$

Figura 63- Prova visual do Teorema 28



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Dessa maneira, têm-se:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n cPa_i^2 &= c.(Pa_n + Pa_{n-1})^2 - c.Pa_{n-1}^2 - c.Pa_{n-3}^2 \\ &= c.(Pa_{n+2}^2 - Pa_{n-1}^2 - Pa_{n-3}^2). \end{aligned}$$

Assim, concluiu-se a demonstração do Teorema 28. Dessa forma, finaliza-se algumas provas de Gauss- Style para soma de áreas do número de Padovan.

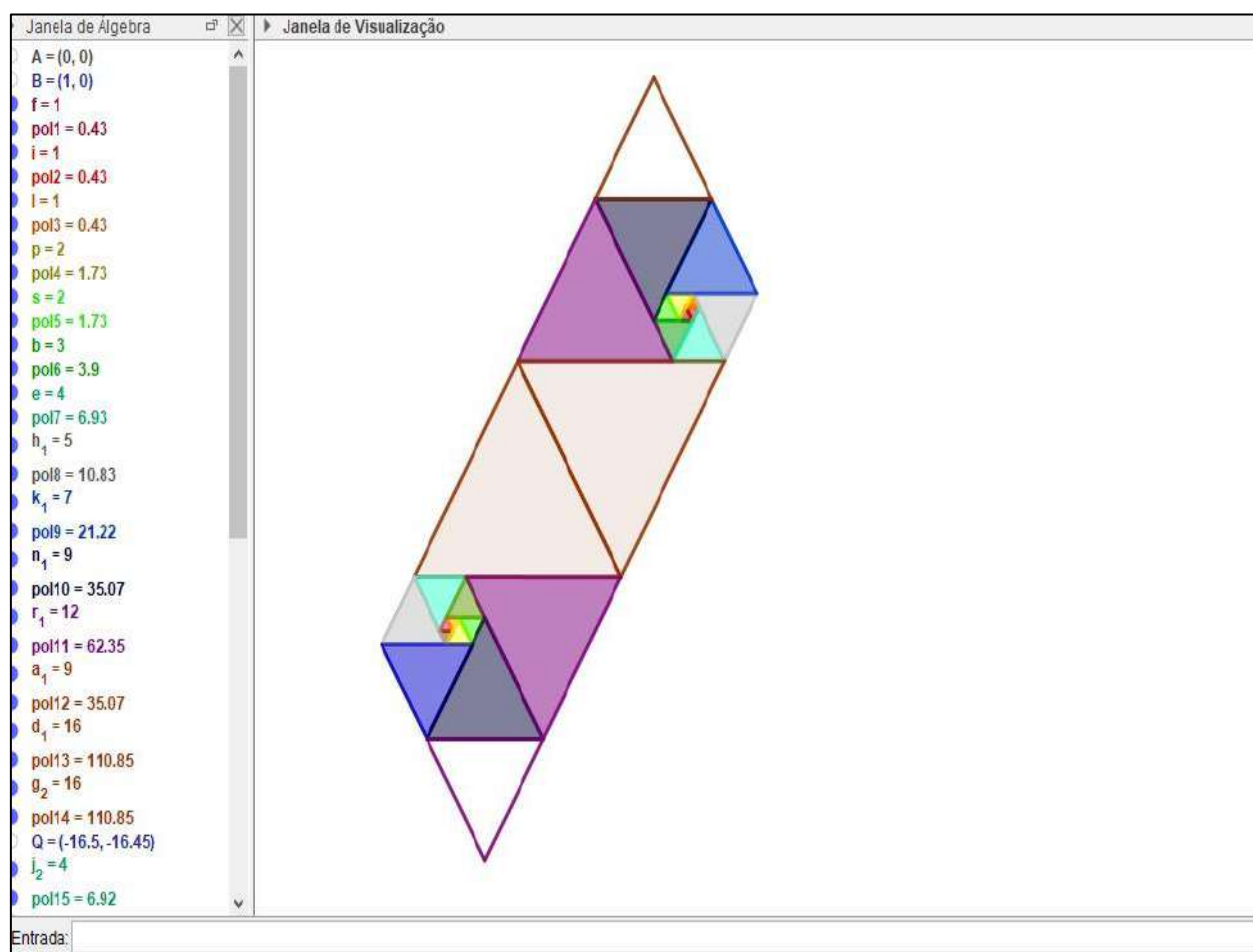
Teorema 29. Para todo $n \geq 4$, têm-se quatro identidades para o somatório

$$S = \sum_{i=1}^n Pa_i^2$$

Identidade 56. $2S + 2Pa_{n-2}^2 = 2(Pa_n + Pa_{n-1} + Pa_{n-2} + Pa_{n-4})(Pa_n)$

Prova. Para $n = 12$

Figura 64- Prova visual do Identidade 5



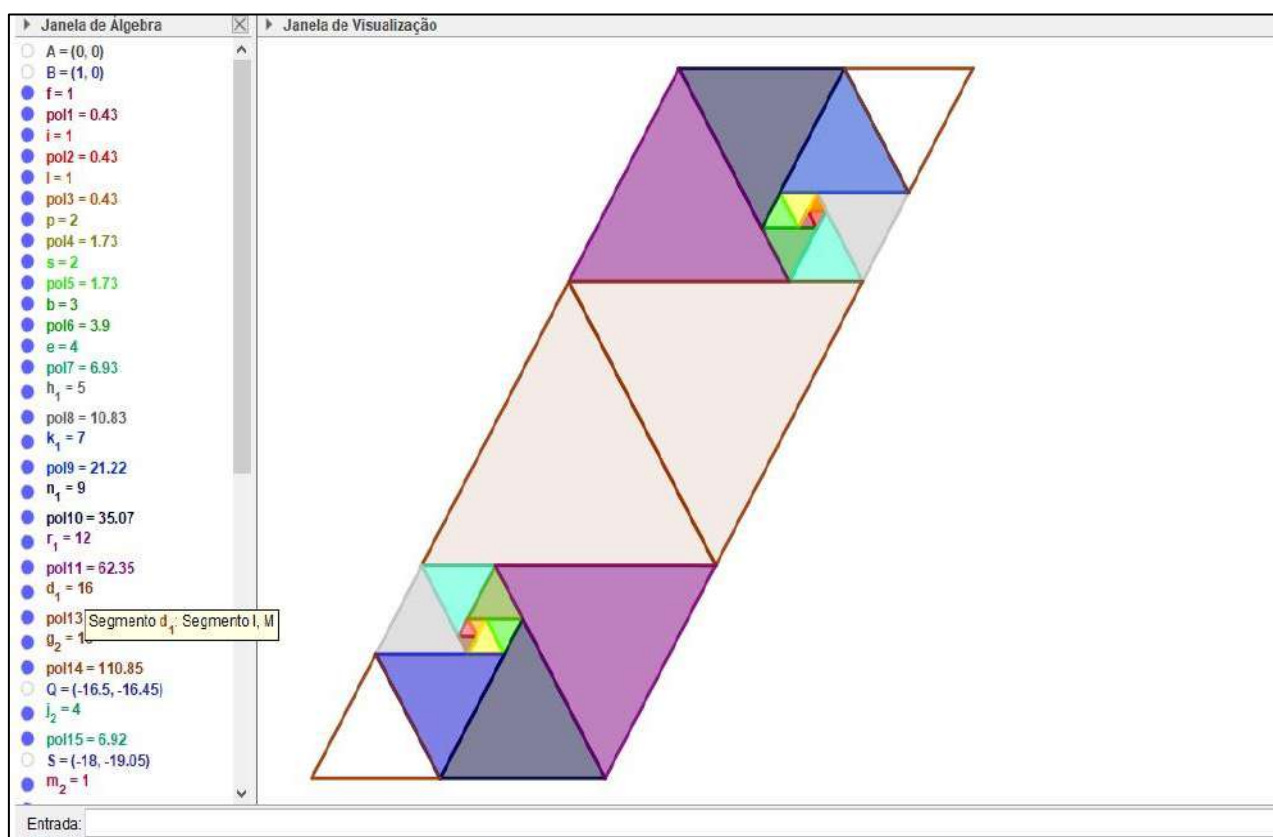
Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Observa-se na Figura 64 a prova visual da identidade 56, por meio de duas sequências de Padovan, com dois prolongamentos por meio de triângulos correspondente ao décimo termo, ou seja, de medida de lado nove.

Identidade 57. $2S + 2Pa_{n-3}^2 = 2(Pa_n + Pa_{n-1} + Pa_{n-2} + Pa_{n-4})(Pa_n)$

Prova. Para $n = 12$

Figura 65- Prova visual do Identidade 57



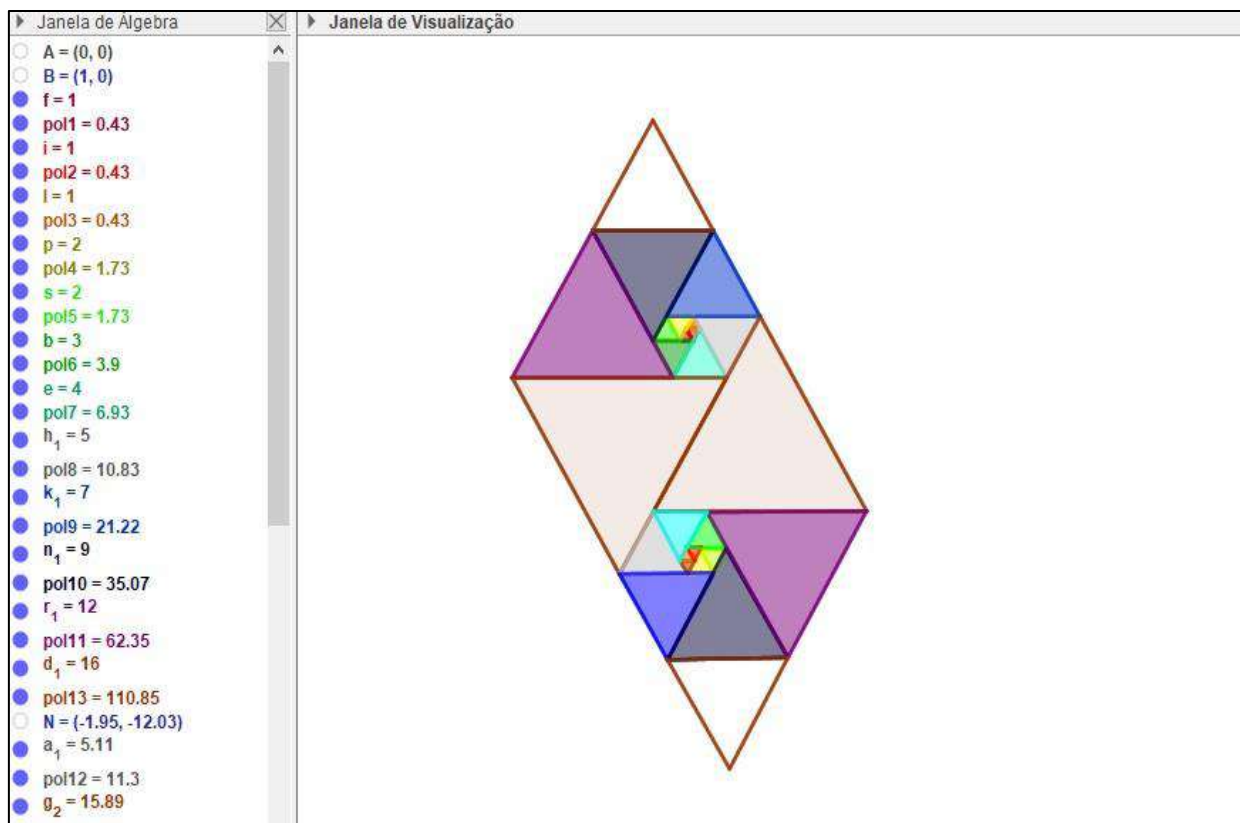
Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Na Figura 65 prova visual da identidade 57, por meio de duas sequências de Padovan, com dois prolongamentos por meio de triângulos correspondente ao nono termo, ou seja, de medida de lado sete.

Identidade 58. $2S + 2Pa_{n-2}^2 = 2(Pa_n + Pa_{n-2} + Pa_{n-3})(Pa_{n-1} + Pa_{n-2})$

Prova. Para $n = 12$

Figura 66- Prova visual do Identidade 58



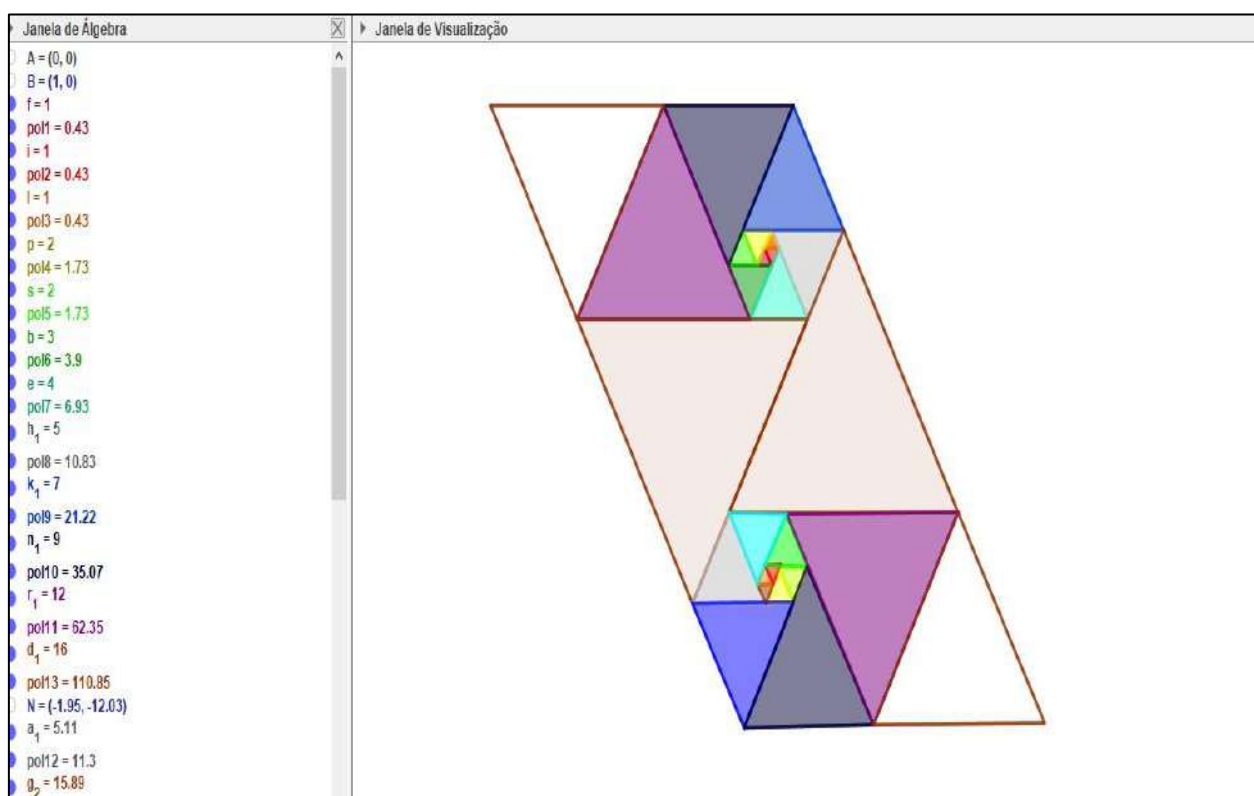
Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Observa-se na Figura 66 a prova visual da identidade 58, por meio de duas sequências de Padovan, no centro da imagem encontram-se dois triângulos resultantes do somatório dos dois termos sétimo e décimo primeiro, com dois prolongamentos por meio de triângulos correspondente ao nono termo.

Identidade 59. $2S + 2Pa_{n-1}^2 = 2(Pa_n + Pa_{n-1} + Pa_{n-3})(Pa_{n-1} + Pa_{n-2})$

Prova. Para $n = 12$

Figura 67- Prova visual do Identidade 59.



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

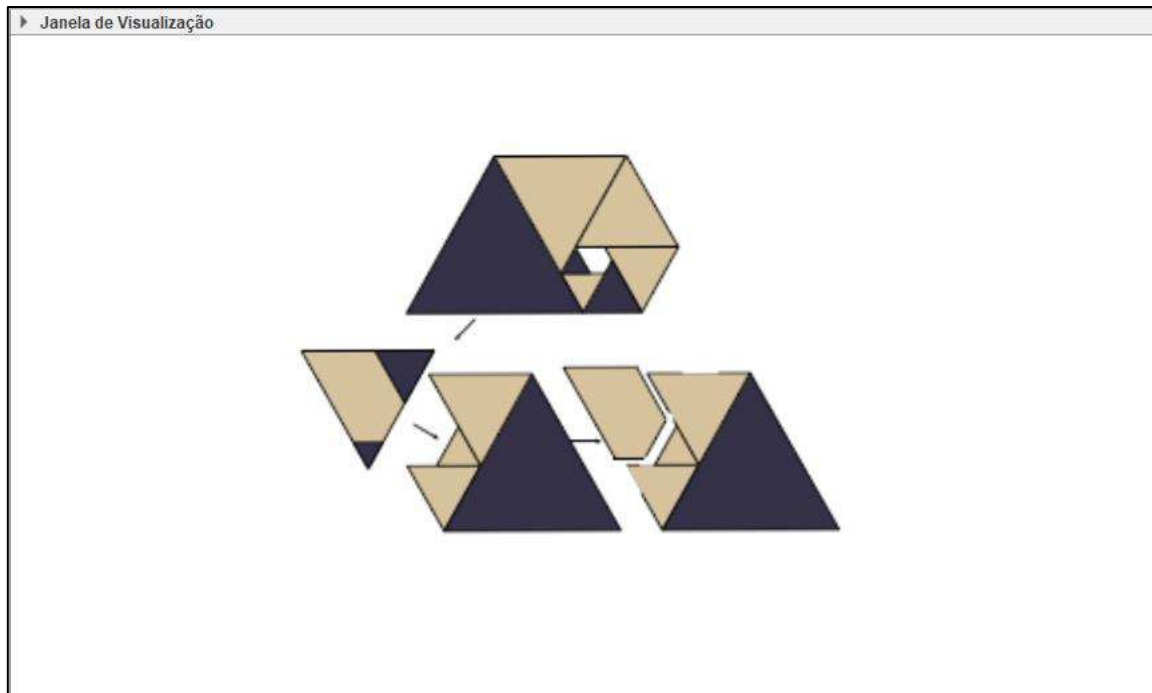
De forma análoga, a prova visual da identidade 58 segue a prova da identidade 59, com a diferença que os dois prolongamentos são por meio de triângulos correspondente ao décimo termo. Segue no próximo teorema um estudo mais profundo.

Teorema 30. Para todo $n \geq 3$

$$Pa_{n+3}^2 + Pa_{n-1}^2 + Pa_{n-3}^2 = Pa_{n+2}^2 + Pa_{n+1}^2 + Pa_n^2 + Pa_{n-2}^2$$

Prova. Para $n = 8$.

Figura 68 Prova visual do Teorema 30.



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Assim,

$$cPa_{n+3}^2 = cPa_{n+2}^2 - cPa_{n-1}^2 - cPa_{n-3}^2 + cPa_{n+1}^2 + cPa_n^2 + cPa_{n-2}^2$$

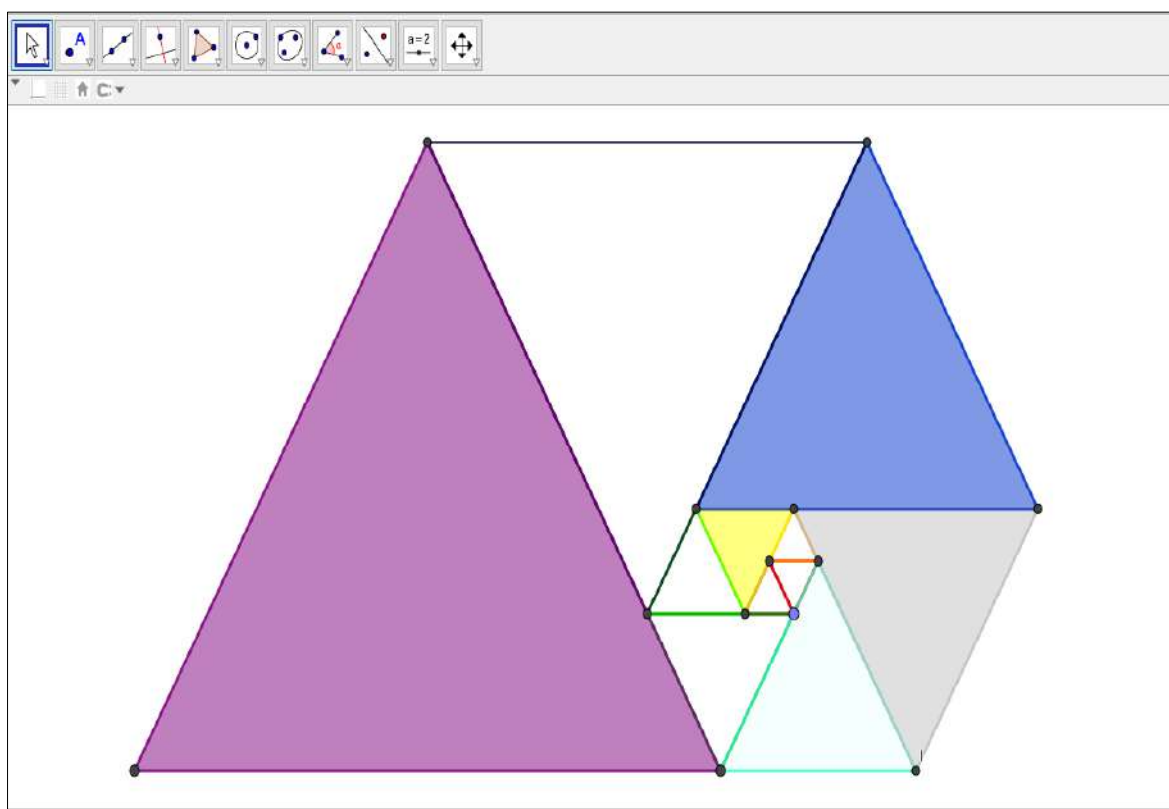
Para encontrar as somas dos índices pares e ímpares dos números de Padovan, faz-se uso da seguinte proposição e sua prova visual.

Proposição 4. Para todo $n \geq 7$,

$$Pa_n^2 = 2Pa_{n-2}^2 + 2Pa_{n-3}^2 - Pa_{n-7}^2$$

Prova. Para $n = 11$.

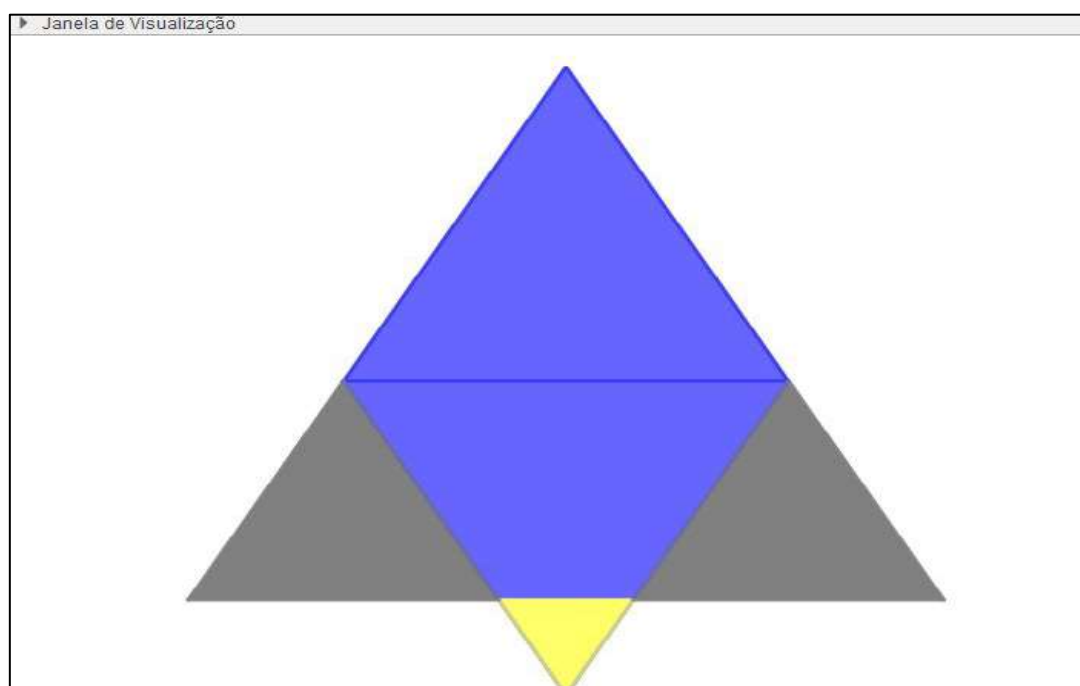
Figura 69- Os onze primeiros números de Padovan



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

De acordo com a Figura 69, segue a demonstração da prova visual da proposição 4. Logo, para finalizar tal prova, mostramos a Figura 70.

Figura 70- Prova visual da proposição 4.



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

A Figura 70, mostra-se a prova visual da proposição 4, utiliza-se um quarto termo, dois oitavos e nonos termos dos números de Padovan. Assim,

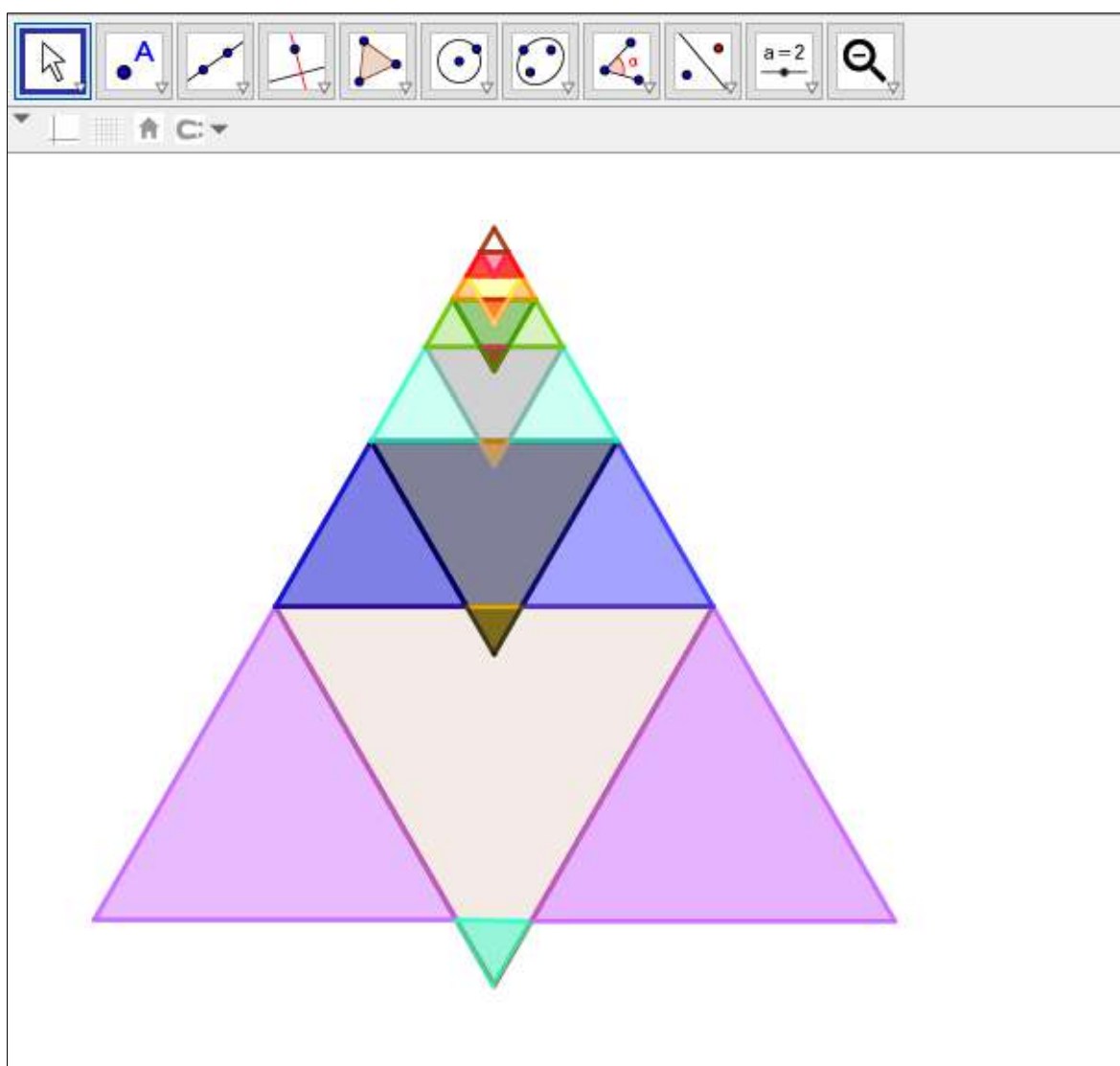
$$cPa_n^2 = 2cPa_{n-2}^2 + 2cPa_{n-3}^2 - cPa_{n-7}^2.$$

Teorema 31. Para todo $n \geq 3$,

$$(1 + \sum_{k=1}^n Pa_{2k-1})^2 = (2Pa_{2n-1} + Pa_{2n-5})^2 = 2 \sum_{k=1}^n Pa_{2k-1}^2 + \sum_{k=1}^n Pa_{2k}^2 - \sum_{k=1}^{n-2} Pa_{2k-1}^2$$

Prova. Para $n = 6$.

Figura 71- Prova visual do Teorema 31



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
c \left(1 + \sum_{k=1}^n Pa_{2k-1} \right)^2 &= c(2Pa_{2n-1} + Pa_{2n-5})^2 \\
&= 2 \sum_{k=1}^n cPa_{2k-1}^2 + \sum_{k=1}^n cPa_{2k}^2 - \sum_{k=1}^{n-2} cPa_{2k-1}^2
\end{aligned}$$

Corolário7. Para todo $n \geq 3$

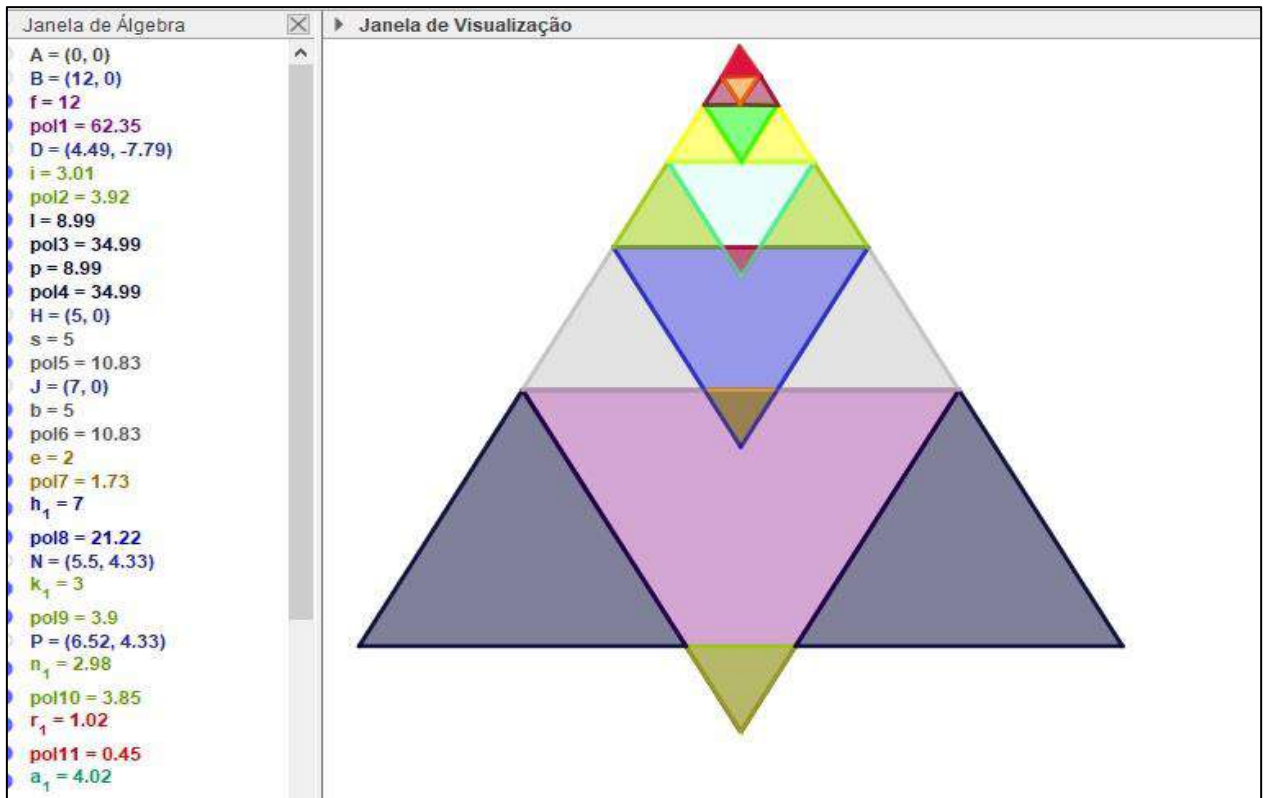
$$\left(1 + \sum_{k=1}^n Pa_{2k-1} \right)^2 = Pa_{2n+2}^2 + Pa_{2n-1}^2 + Pa_{2n-3}^2 + \sum_{k=1}^{2n} Pa_k^2$$

Teorema 32. Para todo $n \geq 3$,

$$\left(1 + \sum_{k=1}^n Pa_{2k} \right)^2 = (2Pa_{2n} + Pa_{2n-4})^2 = 2 \sum_{k=1}^n Pa_{2k}^2 + \sum_{k=1}^{n+1} Pa_{2k-1}^2 - \sum_{k=1}^{n-2} Pa_{2k}^2$$

Prova. Para $n = 5$.

Figura 72- Prova visual do Teorema 32



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Logo,

$$c(1 + \sum_{k=1}^n Pa_{2k})^2 = c(2Pa_{2n} + Pa_{2n-4})^2 = 2 \sum_{k=1}^n cPa_{2k}^2 + \sum_{k=1}^{n+1} cPa_{2k-1}^2 - \sum_{k=1}^{n-2} cPa_{2k}^2$$

Corolário8. Para todo $n \geq 2$,

$$(1 + \sum_{k=1}^n Pa_{2k})^2 = Pa_{2n+3}^2 + Pa_{2n}^2 + Pa_{2n-2}^2 + \sum_{k=1}^{2n+1} Pa_k^2$$

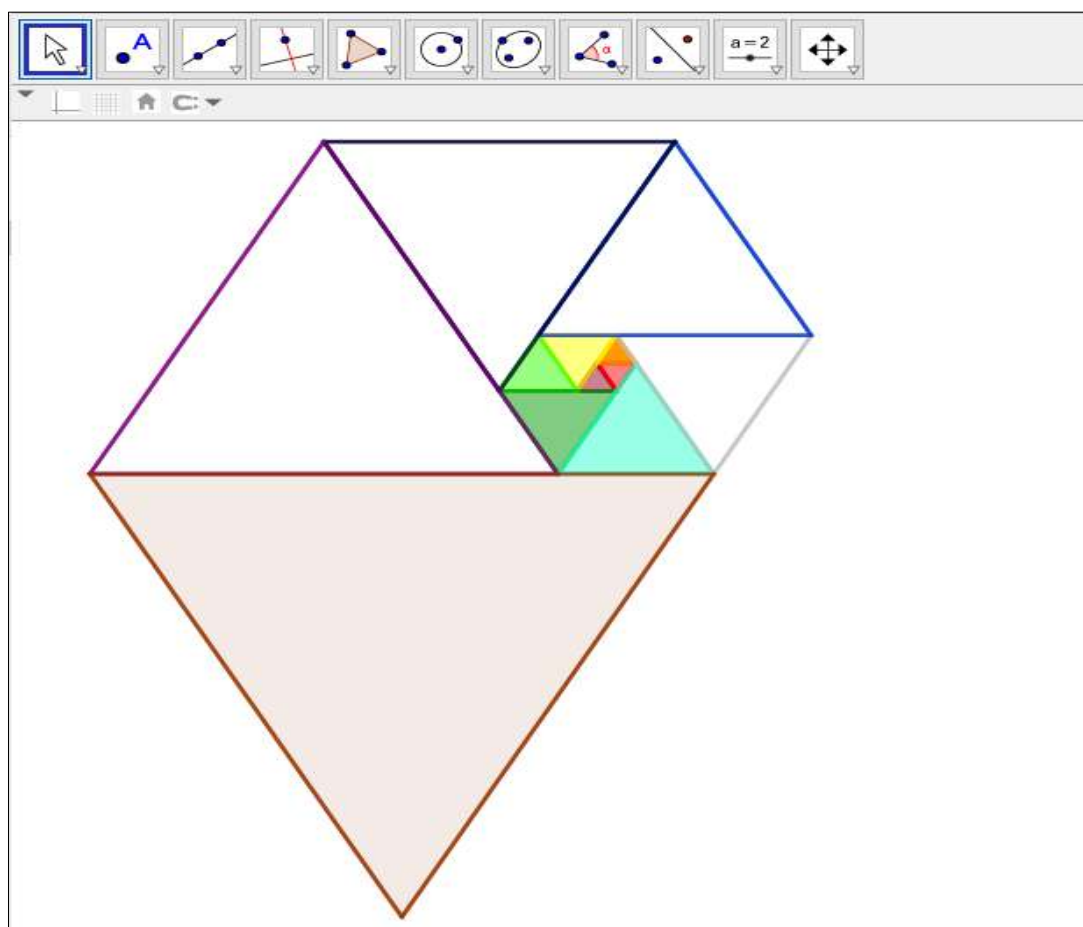
Segundo Edgar e Nacin (2021), os dois corolários anteriores podem ser combinados para ainda outra prova da identidade da soma dos quadrados mostrada acima. Além disso, a combinação dos dois teoremas anteriores fornece uma prova visual da soma de todos os números de Padovan.

Corolário9. Para todo $n \geq 0$,

$$\sum_{i=1}^n Pa_i = Pa_{n+5} - 2$$

Prova. Para $n = 7$.

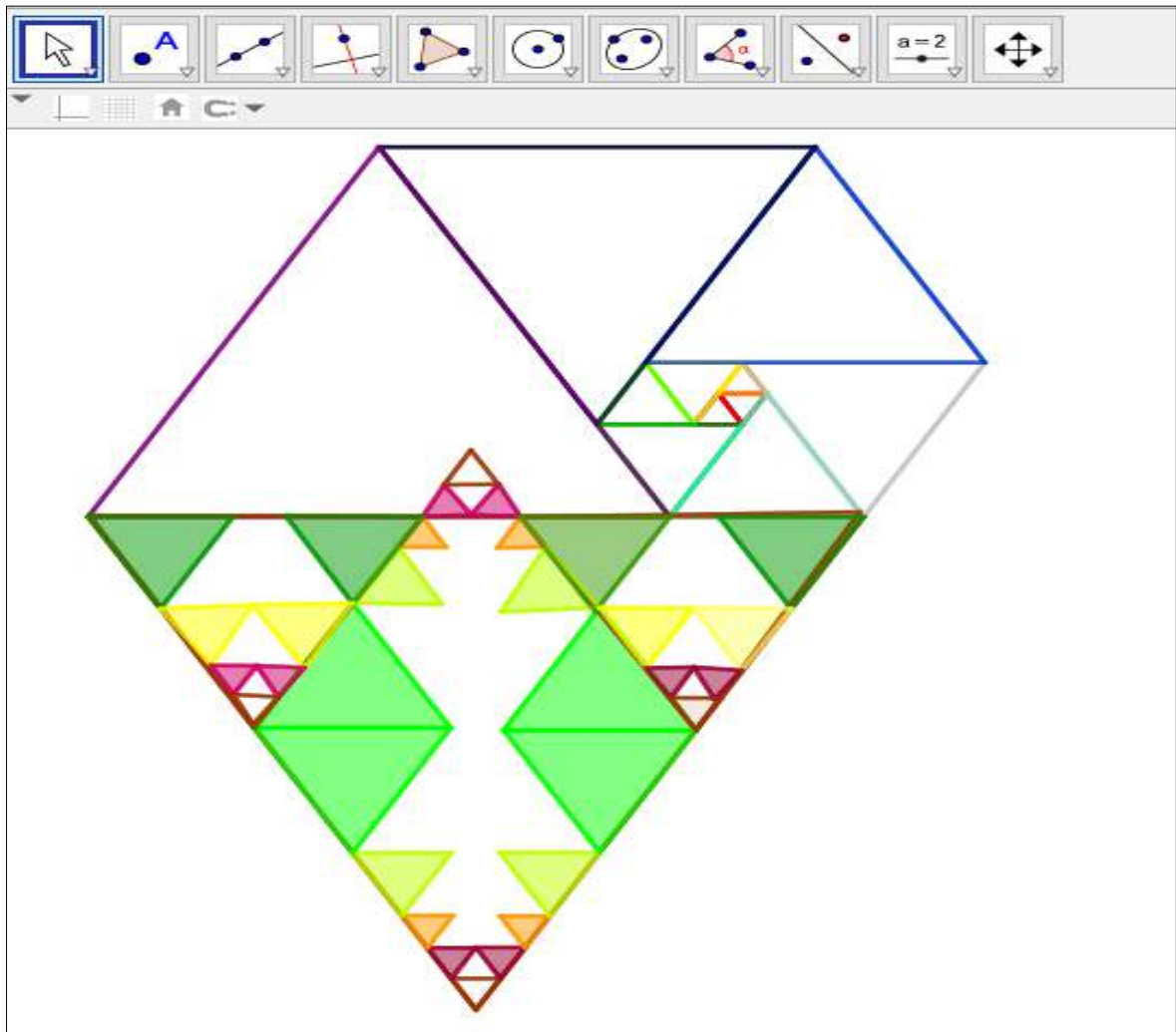
Figura 73- Os doze primeiros termos dos números de Padovan.



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Para demonstrar o corolário 9, observa-se os doze primeiros termos na Figura 73, para o entendimento da Figura 74. Assim,

Figura 74- Prova visual do corolário 9.



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Dessa forma, prova-se que

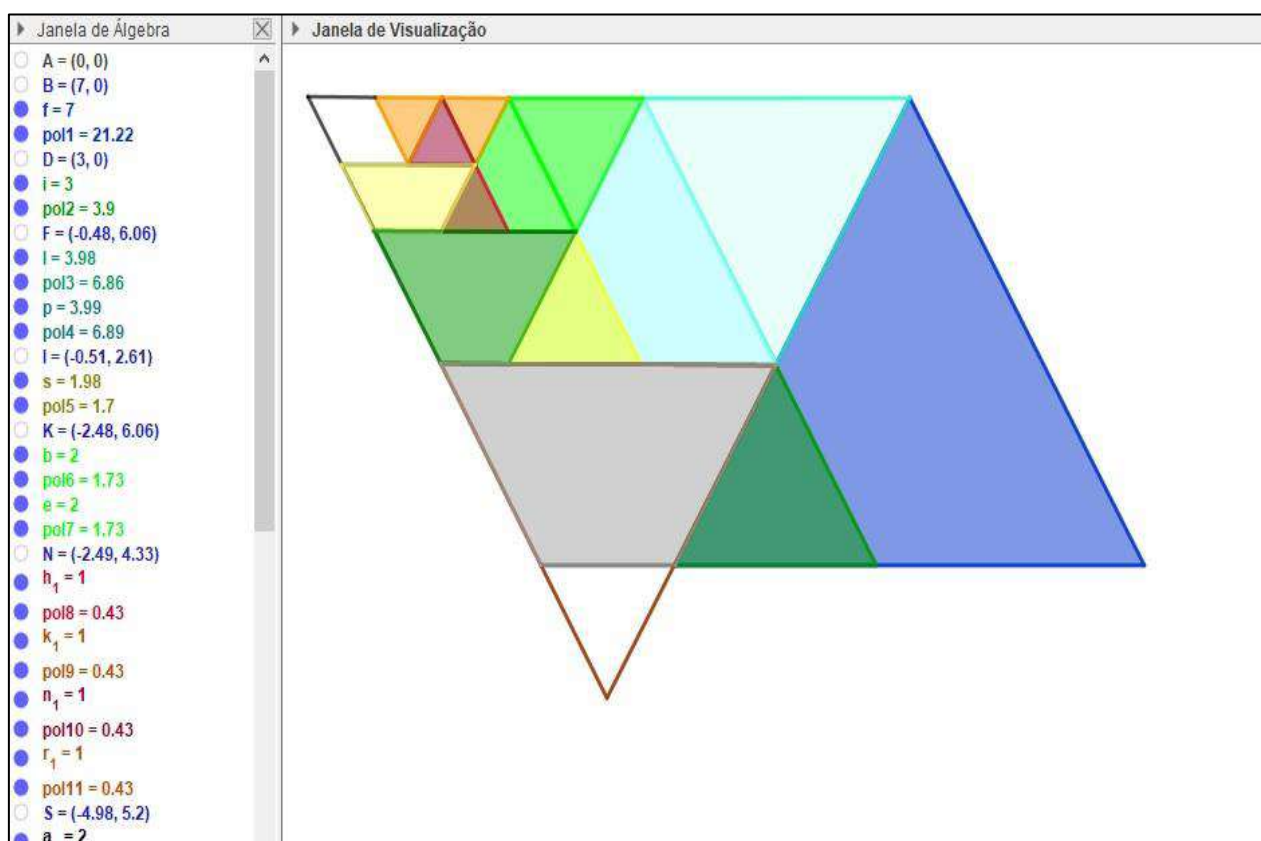
$$\sum_{i=1}^n Pa_i = Pa_{n+5} - 2$$

Teorema 33. Para todo $n \geq 0$,

$$\sum_{i=0}^n Pa_i Pa_{i+2} = Pa_{n+2} Pa_{n+3} - 1$$

Prova. Para $n = 7$.

Figura 75- Prova visual do Teorema 33



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Assim,

$$\sum_{i=0}^n 2cPa_i Pa_{i+2} = 2cPa_{n+2} Pa_{n+3} - 2. c. 1.1$$

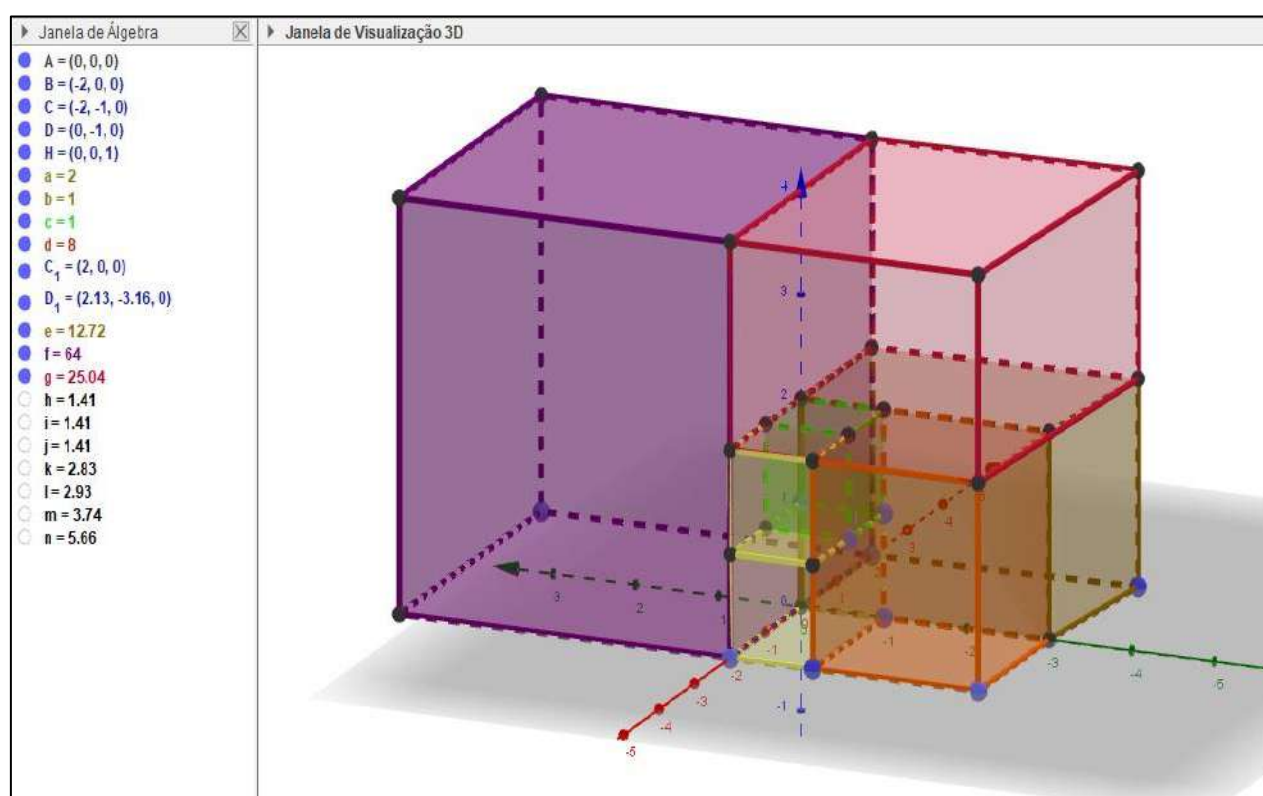
No teorema final requer uma imagem diferente, que resulta em somar cubos com medidas $P_i \times P_i \times P_{i+1}$ em uma certa forma que resulta em um cubo maior, enquanto o diagrama geral e teoremas são bem conhecidos, inclui-se uma versão aqui para integridade.

Teorema 34. Para todo $n \geq 1$,

$$\sum_{i=0}^n Pa_i^2 Pa_{i+1} = Pa_n \cdot Pa_{n+1} \cdot Pa_{n+2}$$

Prova. Para $n = 7$.

Figura 76- Prova visual do Teorema 34.



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

A Figura 76 pode construir a espiral de Padovan, trançando um segmento em dois vértices de cada prisma, sempre dando continuidade à curva para sua construção em uma perspectiva tridimensional. Para melhor visualização da espiral basta ocultar os cubos e observar a mesma com movimento no espaço.

3.12.9 Visualizações das identidades de Perrin na forma geométrica

Segundo Manguera (2022) relata-se que os números de Perrin são análogos aos números de Padovan, assim as identidades podem ser provadas através da geometria. As construções partem também de alguns princípios, tais como: a maioria das provas geométricas envolve áreas e comprimentos de altitudes de triângulos equiláteros.

Portanto, para facilitar o processo apresentamos uma constante que será utilizada sempre que for necessário, define-se $k = \frac{\sqrt{3}}{4}$; fazendo a altitude de um triângulo equilátero com comprimento lateral s igual a $2ka$ e sua área igual a ka^2 : Além disso, a área de um paralelogramo com comprimento lateral s e altitude perpendicular $2kh$ é dado por $2kah$.

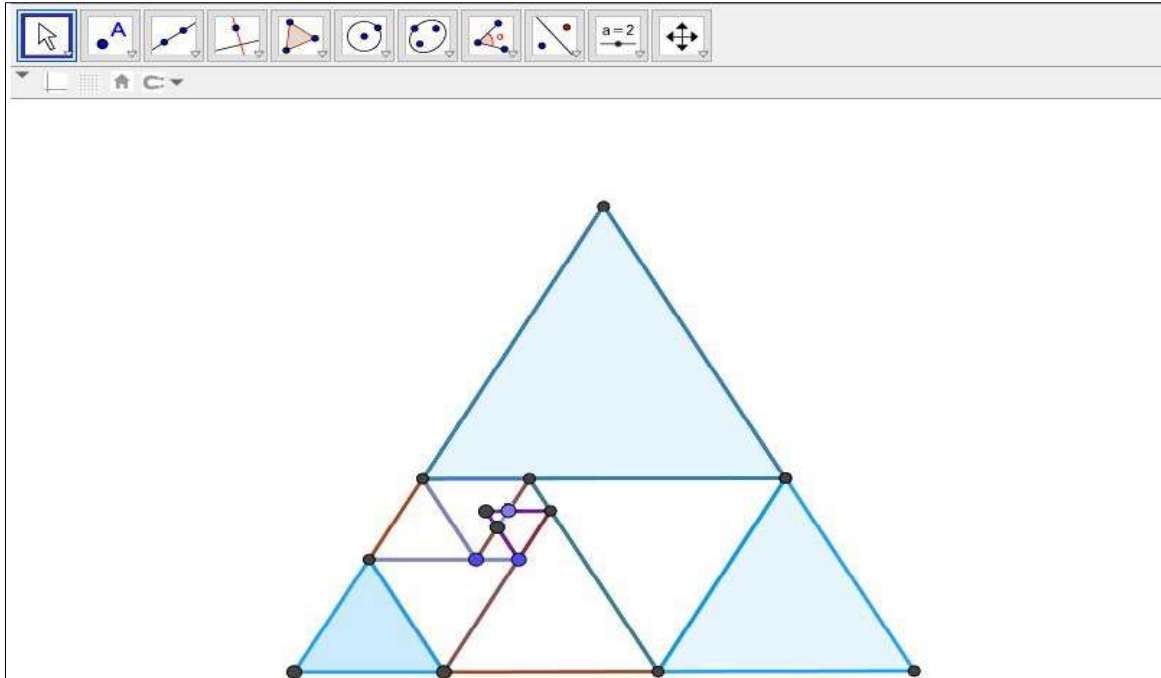
Logo, investigando algumas identidades mais gerais que também têm provas visuais. Por consequência, mostramos a demonstração dos resultados por meio de triângulos.

Teorema 35. Para todos $n \geq 1$, tem-se:

$$Pe_n^2 + Pe_{n-1}^2 = Pe_{n+2}^2 - 2Pe_{n-1}Pe_n$$

Prova. Para $n = 9$.

Figura 77- Prova visual do Teorema 35.



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

$$\begin{aligned} kPe_n^2 + kPe_{n-1}^2 &= k.(Pe_n^2 + Pe_{n-1}^2) - 2.kPe_{n-1}Pe_n \\ &= k.(Pe_{n+2}^2 - 2.Pe_{n-1}Pe_n). \end{aligned}$$

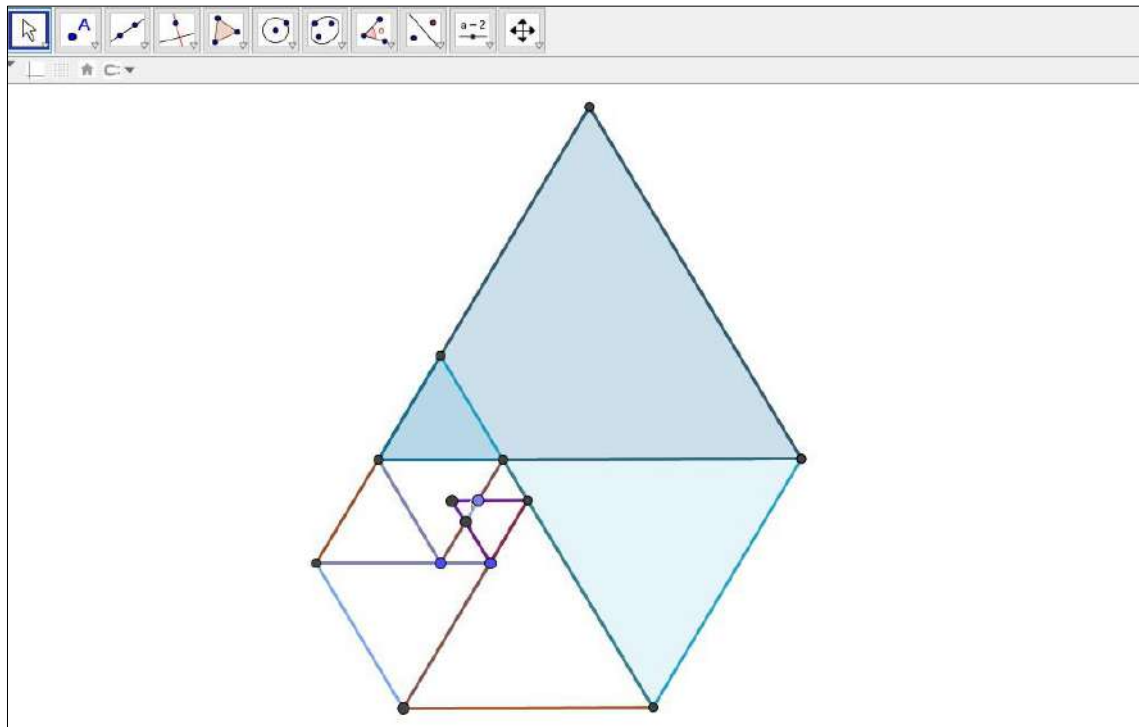
Portanto, a soma das áreas dos triângulos preenchidos será igual a ao somatório das áreas não preenchidas, ressaltando que ocorreu uma prolongação com mesma área do sexto termo dos números de Perrin.

Teorema 36. Para todo $n \geq 5$

$$Pe_n^2 + Pe_{n-1}^2 = 2.Pe_{n-1}Pe_n + Pe_{n-5}^2$$

Prova. Para $n = 9$

Figura 78- Prova visual do Teorema 36



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

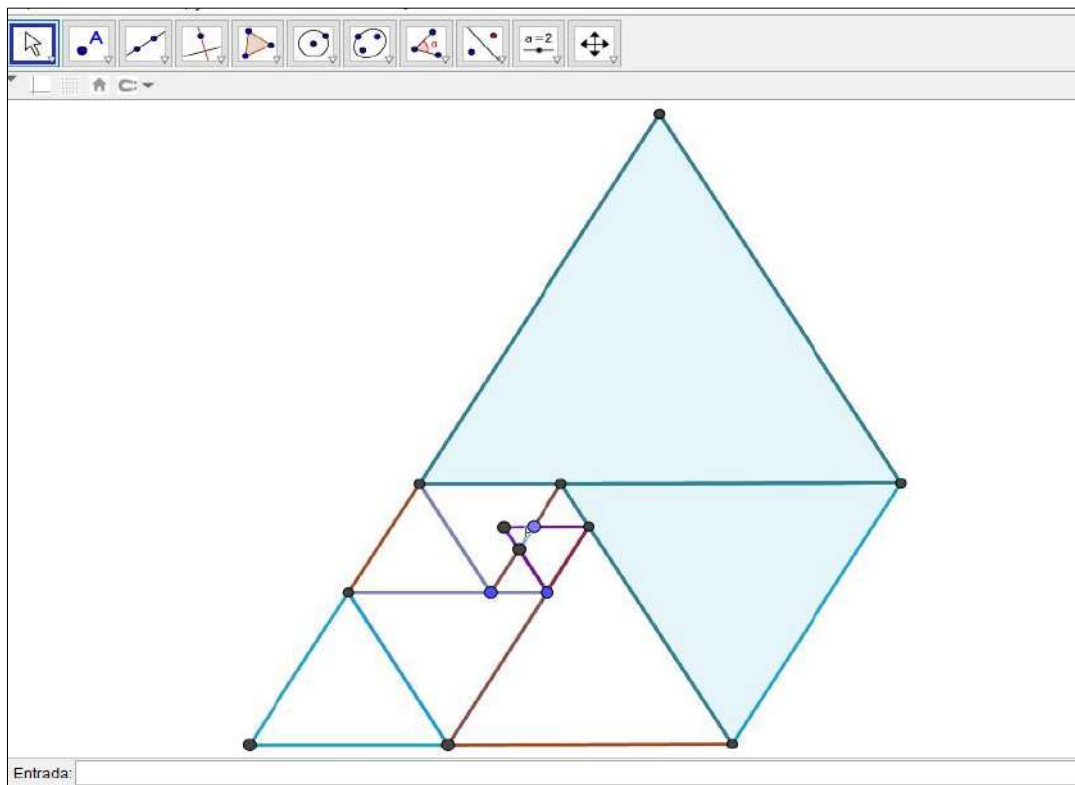
Com base nos números de Perrin, demonstra-se o Teorema 36 por meio da Figura 78. Por consequência, $kPe_n^2 + kPe_{n-1}^2 = 2 \cdot kPe_{n-1}Pe_n + kPe_{n-5}^2$.

Teorema 37. Para todo $n \geq 5$

$$Pe_n^2 + Pe_{n-1}^2 = Pe_{n+2}Pe_nPe_{n-1}(Pe_n - Pe_{n-2} - Pe_{n-3} - Pe_{n-5}).$$

Prova. Para $n = 9$

Figura 79- Prova visual do Teorema 37



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Dessa maneira, demonstra-se o Teorema 37 por meio da Figura 79. Logo,

$$\begin{aligned}
 & k(Pe_n^2 + Pe_{n-1}^2) \\
 &= \frac{1}{2}(Pe_n + Pe_{n-1} + Pe_{n-1})2kPe_n - \frac{1}{2}(Pe_{n-2} + Pe_{n-3} \\
 &+ Pe_{n-5})2kPe_{n-1} \\
 &= k(Pe_{n+2}Pe_n + Pe_nPe_{n-1} - Pe_{n-1}Pe_{n-2} - Pe_{n-1}Pe_{n-3} - Pe_{n-1}Pe_{n-5}).
 \end{aligned}$$

3.12.10 Visualizações das identidades de Leonardo na forma geométrica

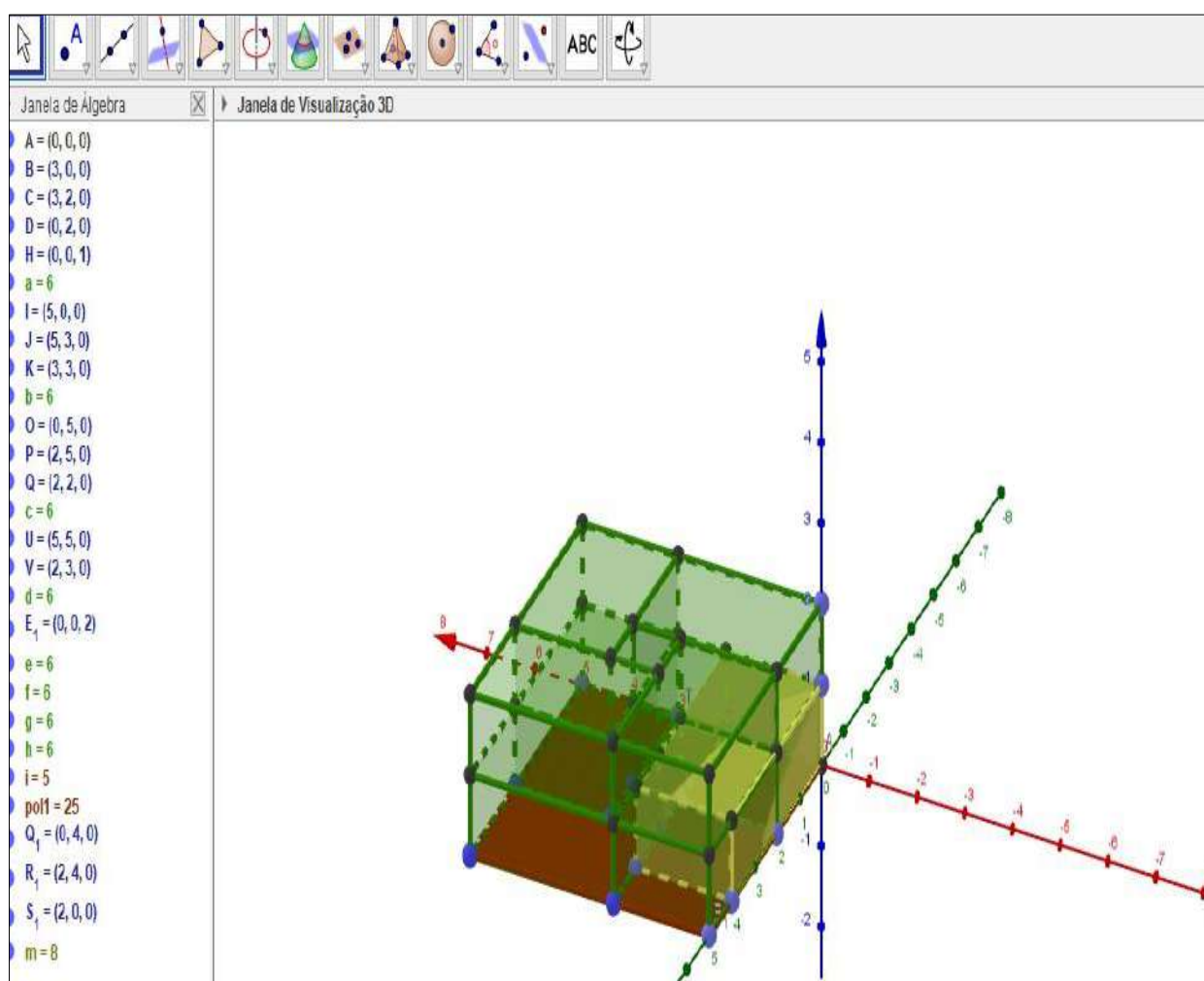
Com base na definição 16 e na identidade 35, podemos demonstrar o Teorema 38, no qual faz a relação dos números de Leonardo aos números de Fibonacci.

Teorema 38. Para todo $n \geq 0$

$$Le_n Le_{n+1} Le_{n+2} = 8F_{n+1}F_{n+2}F_{n+3} - 4F_3F_2 - Le_{n+2}^2$$

Prova. Para $n = 1$

Figura 80- Prova visual do Teorema 38



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Observando a Figura 80, o volume não preenchido na imagem corresponde a um volume cujas medidas são três números consecutivos de Leonardo, isto é, o volume dos oito prismas retangulares de cor verde, que são representados por três termos consecutivos da sequência de Fibonacci, menos o volume do prisma amarelo, no qual as medidas também estão associadas aos números de Fibonacci, menos a área de um quadrado de lado cinco de cor marrom, correspondente a um número de Leonardo.

No próximo capítulo, foram abordadas as concepções das situações didáticas a serem exploradas no decorrer dessa pesquisa.

4 UMA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA: O ESTUDO DAS SEQUÊNCIAS RECURSIVAS LINEARES NO CURSO DE LICENCIATURA

Esta pesquisa teve sua fase experimental concebida em um curso de Licenciatura em Matemática, no Instituto de Educação, Ciências e Tecnologia do Ceará, *campus* Fortaleza, com quatro estudantes matriculados na disciplina da História da Matemática, durante o 6º semestre, com duração de 40 horas, no curso de licenciatura em Matemática, por meio da transposição didática sobre as sequências recursivas lineares, realizando um estudo histórico e matemático.

Com o intuito de analisar as contribuições da Teoria das Situações didáticas para o ensino das aplicações de visualização bidimensional e/ou tridimensional das sequências de Fibonacci, Lucas, Pell, Oresme, Mersenne, Jacobsthal, Narayana, Padovan, Perrin e Leonardo, mediante a Engenharia Didática, por meio do *software* GeoGebra com os estudantes da licenciatura em Matemática.

Para que essa transposição didática acontecesse, foram criadas dez situações didáticas elaboradas a partir de situações-problemas, fundamentadas nas dialéticas da Teoria das Situações Didática, bem como explorando as fases e as concepções da metodologia escolhida.

Diante desse breve esclarecimento, seguindo os pressupostos da Engenharia Didática, detalhamos as concepções das situações didáticas caracterizando a fase da Análise *a priori*.

4.1. Concepções das Situações Didáticas

De acordo com Almouloud e Coutinho (2008), nesta fase da análise *a priori* deveu-se levar em consideração as variáveis didáticas do estudo e todas as características da situação didática a ser desenvolvida, buscando ter controle, para as possíveis previsões de comportamentos dos estudantes mediante uma situação problema, em que “as ações do aluno são vistas no funcionamento quase isolado do professor, que sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagem” (ALMOULOU; COUTINHO, 2008, p. 67).

Dessa maneira, buscou-se especificar as dez situações didáticas de ensino que abordam as sequências recursivas lineares para além do estudo algébrico, explorando-as também por uma perspectiva geométrica, a partir da construção das desenvolvidas no

GeoGebra, com a manipulação de seus parâmetros e elementos pelos sujeitos, incumbindo-os da tarefa de demonstrar seu raciocínio matemático nestas soluções.

Com este propósito, esta etapa da pesquisa seguiu um plano de ação em que definiu as variáveis (globais e locais) da Engenharia Didática. No que se refere às variáveis globais, compreendeu-se como ocorre a organização da Engenharia Didática e a possibilidade de replicação deste estudo em outros contextos, com a vistas à ampliação das hipóteses.

A partir desta determinação das variáveis globais, surgem as variáveis locais, como hipóteses mais específicas voltadas para a sala de aula. Tais conjecturas referem-se à previsão de atitudes dos sujeitos, observando o seu comportamento diante das situações didáticas que, ao final de todo o percurso, foram essenciais para a validação da Engenharia Didática.

Neste caso, elencamos variáveis locais, como: as possíveis dificuldades no desenvolvimento das situações didáticas ao relacionar os termos das sequências recursivas lineares com as construções geométricas realizadas no GeoGebra; os conhecimentos prévios dos estudantes sobre o tema matemático a ser estudado não serem suficientes para a compreensão e solução das situações didáticas.

Segundo Artigue (1996), as situações-problemas ou questões de controle podem ajudar a prever os comportamentos dos alunos e, portanto, nesta fase apresentamos as situações didáticas que envolveram as sequências de Fibonacci, Lucas, Pell, Oresme, Mersenne, Jacobsthal, Narayana, Padovan, Perrin e Leonardo, como suas descrições e resoluções a partir do comportamento esperado pelo estudante.

Assim, para esta fase, análise *a priori* organizou as situações didáticas a partir das etapas da TSD, no propósito de prever comportamentos a partir de uma dialética entre os sujeitos da pesquisa e as situações didáticas, planejado pela pesquisadora no processo de institucionalização e devolução, em que foram esperadas possíveis demonstrações de conhecimentos matemáticos dos sujeitos durante os problemas investigados.

A elaboração desta etapa da pesquisa foi essencial, pois a partir destes comportamentos, buscamos validar as situações didáticas descritas, nas quais foram a interação entre os sujeitos da pesquisa e os conhecimentos desenvolvidos, como produto de suas vivências práticas e das resoluções das situações didáticas propostas.

Dessa maneira, a validação da ED desta pesquisa foi essencialmente interna e realizada com base no confronto entre a análise *a priori*, que estabelece estas previsões atitudinais com base na TSD, e a análise *a posteriori*, que tem como essência a coleta de

dados no percurso de experimentação, com as produções dos sujeitos escritas, gravações de áudio e vídeos e outros tipos de registros que foram pertinentes à validação da pesquisa.

4.2. Análise a priori das Situações Didáticas

Nesta subseção apresentam-se as situações didáticas direcionadas às sequências recursivas lineares, amparadas pelos pressupostos da Teoria das Situações Didáticas (TSD), pois buscou-se analisar, conforme a perspectiva de Brousseau (2004, p. 245) “a situação [...] e as possibilidades de tomada de decisão de um ator em um determinado ambiente, [...] de tal forma que a estratégia de solução só pode ser implementada com algum conhecimento matemático”.

Nesta fase, as previsões dos comportamentos dos sujeitos mediante as situações didáticas propostas, foram organizadas a partir das situações de ação, formulação, validação e institucionalização e descritas com base nesta dialética.

Faz-se interessante que as situações didáticas fossem discutidas e resolvidas tanto individualmente quanto em pequenos grupos, para que a dialética de formulação ocorresse de maneira eficaz.

O software GeoGebra foi utilizado em cada situação didática como recurso para estimular a intuição e a percepção geométrica a partir das possibilidades de construção das definições e propriedades apresentadas em visualizações no ambiente computadorizado, o que puderam auxiliar no desenvolvimento de ideias e nos levantamentos de hipóteses dos sujeitos da pesquisa no decorrer da solução das situações propostas.

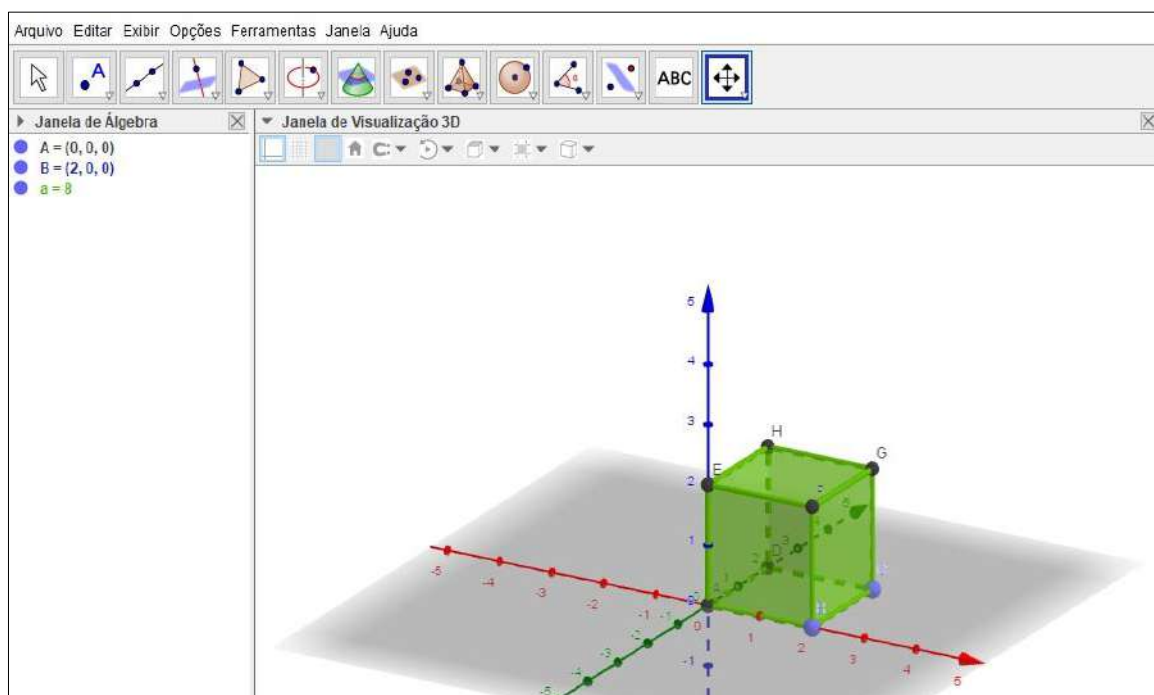
4.2.1 Situação didática 1: encontrar a identidade relacionada aos números de Fibonacci.

Essa situação didática consistiu em explicar como a visualização da identidade dos cubos Fibonacci através do *software* GeoGebra, fazendo a associação das figuras com os termos dessa sequência, facilitando a compreensão da fórmula de recorrência. Para isso, os estudantes precisaram entender como foram construídas as figuras e, principalmente, observarem padrões que foram difíceis de compreender sem a visualização da figura.

Sabendo que o *software* tem algumas funções que fizeram com que as figuras apresentassem os termos relacionados à sequência de Fibonacci, diferentemente de uma imagem que é apresentada por livros ou artigos, que não pode ser editada.

Inicialmente, foi apresentada a construção de um cubo que relaciona as suas arestas ao terceiro números de Fibonacci, conforme mostra a Figura 81 a seguir

Figura 81– Construção do cubo

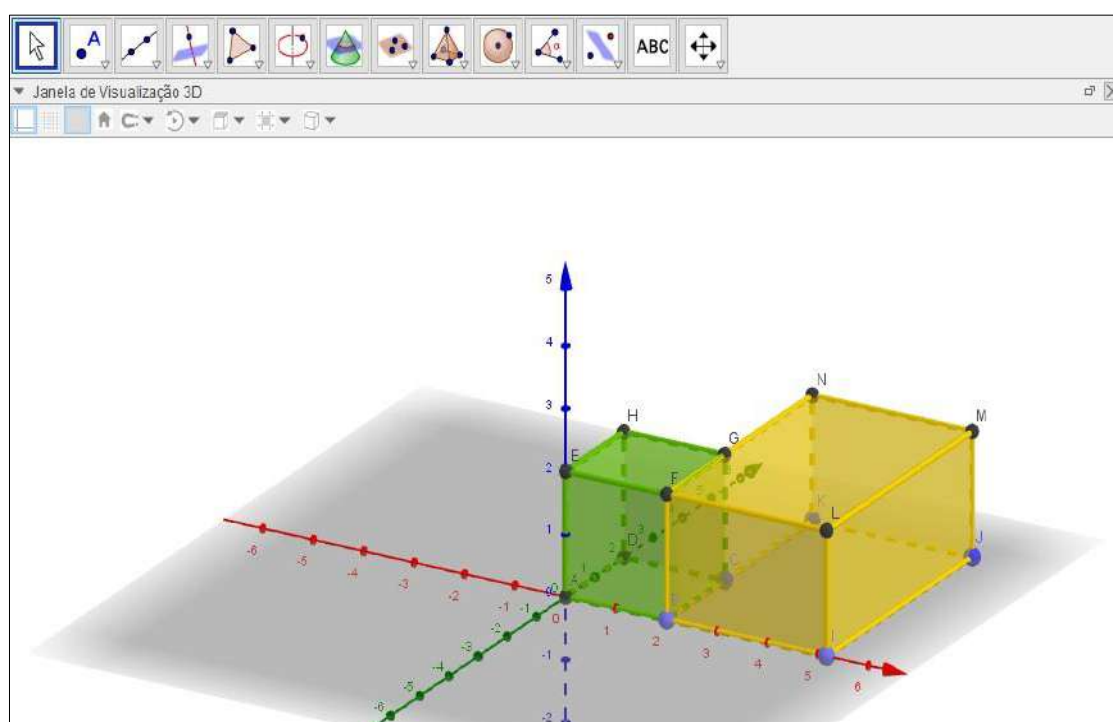


Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

A Figura 81 mostra um cubo, construído por meio da opção que tem a mesma denominação, essa opção está na barra de ferramenta do GeoGebra, no qual para realizar a construção selecionou-se dois pontos para determinar o tamanho da aresta, nesse caso escolhemos o valor igual a dois, que corresponde ao terceiro termo da sequência de Fibonacci.

Observando a janela de álgebra podemos afirmar que o volume desse prisma é igual a oito. Em seguida, construiu-se um novo prisma cujas suas medidas também se relacionaram a outros números de Fibonacci, conforme a Figura 82.

Figura 82– Construção do segundo prisma

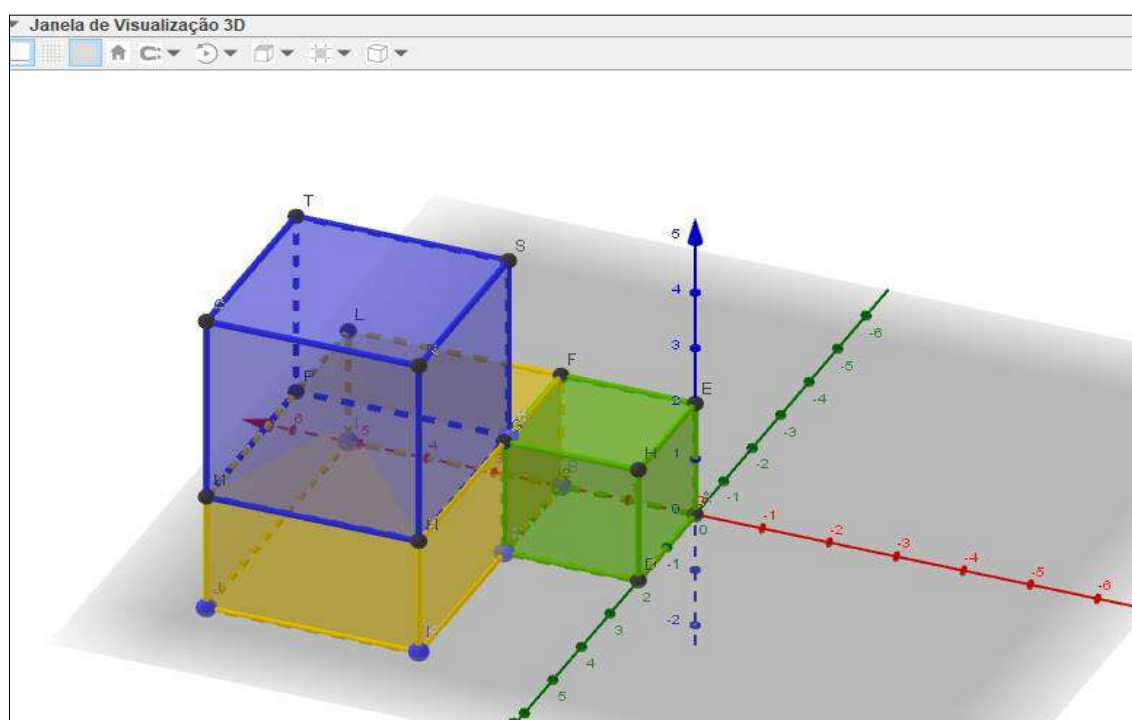


Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

A Figura 82 mostra o segundo prisma, que foi construído pela ferramenta do *software* que possui o mesmo nome. Esse comando, por sua vez, desenhou a base com as duas primeiras medidas de largura e comprimento, e, posteriormente, foi elevada para a obtenção da altura. Observou-se que as medidas correspondentes à largura, comprimento e altura são três, cinco e dois - unidades de medida, respectivamente, e o seu volume igual a trinta unidades de medidas.

Diante disso, continuando a construção, um novo cubo foi construído de forma análoga à Figura 81, cuja aresta tem medida igual a três, no qual o resultado de seu volume é igual a vinte e sete unidade de medidas (Figura 83).

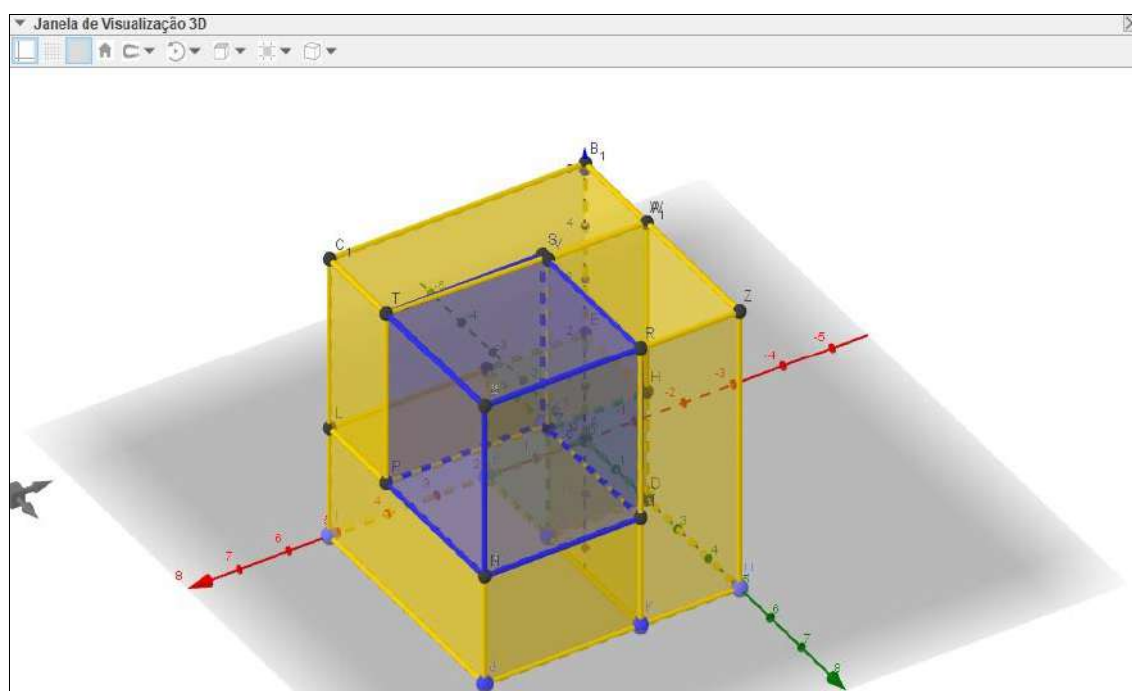
Figura 83– Construção do terceiro prisma



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Por conseguinte, foram criados mais dois prismas cujas medidas são idênticas a Figura 82, que também possuem o volume igual a trinta unidades de medidas como mostra a Figura 84.

Figura 84– Identidade dos números de Fibonacci



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Com base nessas Figuras 81,82,83 e 84 é realizado um questionamento que norteou a pergunta para a realização da Situação didática 1: Qual a identidade de Fibonacci pode ser descrita? A seguir, descrevemos as etapas da TSD, começando com a dialética da ação.

Na situação da *ação*, de forma preliminar os estudantes devem observaram a lei de recorrência $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ para $n \geq 1$. Sendo $F_1 = 1, F_2 = 1$, para calcular os dez primeiros termos da sequência de Fibonacci que são (1,1,2,3,5,8,13,21,34,55....)

Na situação de *formulação*, no qual essa etapa é definida pelas interações existentes em uma situação-problema. Tal situação foi caracterizada pela troca de conhecimentos entre os estudantes. Essa interação pode ocorrer através da escrita ou por diálogos.

Segundo Almouloud (2007), a linguagem dos alunos é expressa de forma natural ou mesmo matemática. Assim, mostramos uma previsão, nos quais os estudantes devem fazer a associação dos valores das arestas dos prismas a um termo da sequência de Fibonacci, como por exemplo:

Prisma 1 – aresta igual a 2, logo esse valor corresponde ao terceiro termo da sequência de Fibonacci.

Prisma 2- as medidas de largura, comprimento e altura são 3, 5 e 2, correspondem ao quarto, quinto e terceiro termos da sequência respectivamente.

Prisma 3 – aresta igual a 3, logo esse valor corresponde ao quarto termo da sequência.

Prisma 4- as medidas de largura, comprimento e altura são 2, 3 e 5, correspondem ao quarto, quinto e terceiro termos da sequência respectivamente.

Prisma 5- as medidas de largura, comprimento e altura são 2, 5 e 3, correspondem ao quarto, quinto e terceiro termos da sequência respectivamente.

Observando as medidas, os estudantes devem pensar no volume total que é representado por um cubo, essa figura por sua vez, é igual ao somatório dos volumes dos prismas mostrados nas construções pelo GeoGebra. Para a generalização dessa identidade que é $F_{n+1}^3 = F_n^3 + F_{n-1}^3 + 3F_{n-1}F_nF_{n+1}$, para $n \geq 1$.

Para a situação de *validação*, as hipóteses devem ser encontradas pelos estudantes na fase de formalização, são pedidas as explicações sobre as teorias e demonstrações (D'AMORE,2005). Nesse momento, os alunos devem convencer aos participantes a asserção das suas afirmações.

Para essa prova os estudantes devem utilizar operações algébricas como $F_{n+1}^3 = (F_n + F_{n-1})^3$, ou seja, o cubo do somatório de dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci.

Por fim, na situação de *institucionalização*, o professor deve realizar as correções que asseguram a consistência das operações (ALVES,2016). Com base nas informações apresentadas durante as fases anteriores, o professor deve sugerir a validação por meio do método da indução, afirmando que a utilização do GeoGebra para realização dessa situação didática é essencial, pois sem o *software* os estudantes não conseguiriam chegar à generalização da identidade proposta.

4.2.2 Situação didática 2: Identificar a semelhança entre a sequência de Lucas e a de Fibonacci por meio das identidades

Nessa situação didática, os estudantes devem ter uma ideia de resolução, pois já devem ter realizados a situação-problema anterior, facilitando as relações por meio das visualizações por meio do GeoGebra.

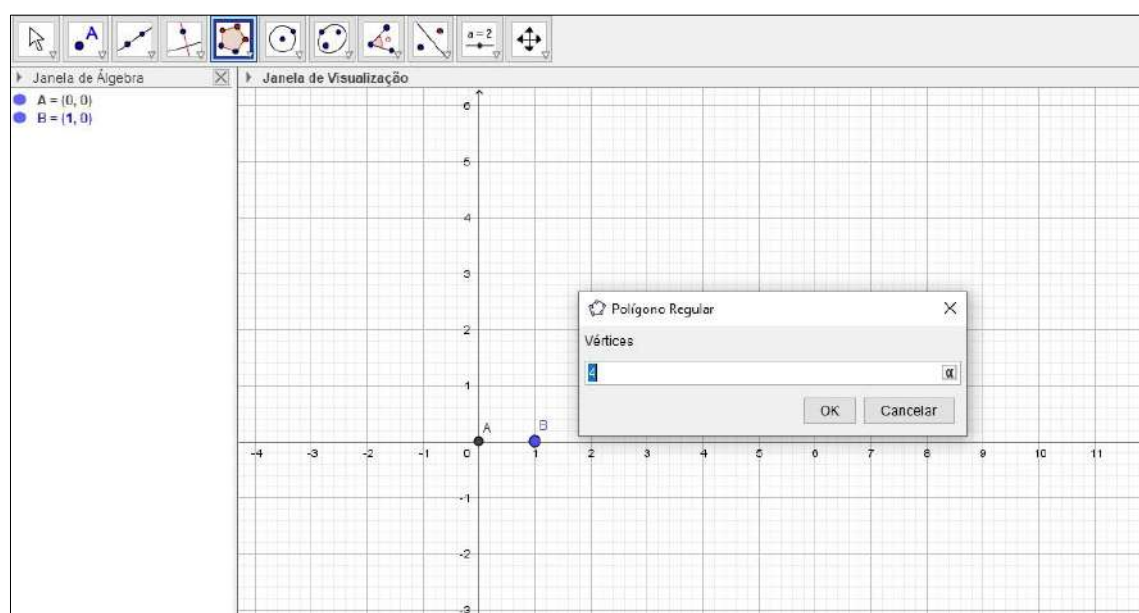
No primeiro momento deve ser apresentada a lei de recorrência $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, $n > 2$, $L_0 = 2$, para determinar os dez primeiros termos da sequência de Lucas que são (1,3,4,7,11,18,29,47,76, 123, ...).

Diante dessas informações, surge a situação didática: Quais as semelhanças entre sequência de Lucas e a sequência de Fibonacci? Prove por meio das identidades.

Para resolver essa situação-problema, deve-se mostrar a primeira identidade de Lucas em uma visualização bidimensional, construindo um retângulo áureo por meio de quadrados, associando cada lado de um quadrilátero com os termos da sequência de Lucas.

Inicialmente, para essa construção, utilizando o *software* GeoGebra, usa-se a ferramenta Polígono Regular, que escolher dois pontos como comprimento do lado de uma figura, determina-se a quantidade de vértices que terá o seu polígono de medidas de lados iguais, construindo um quadrado, conforme a Figura 85.

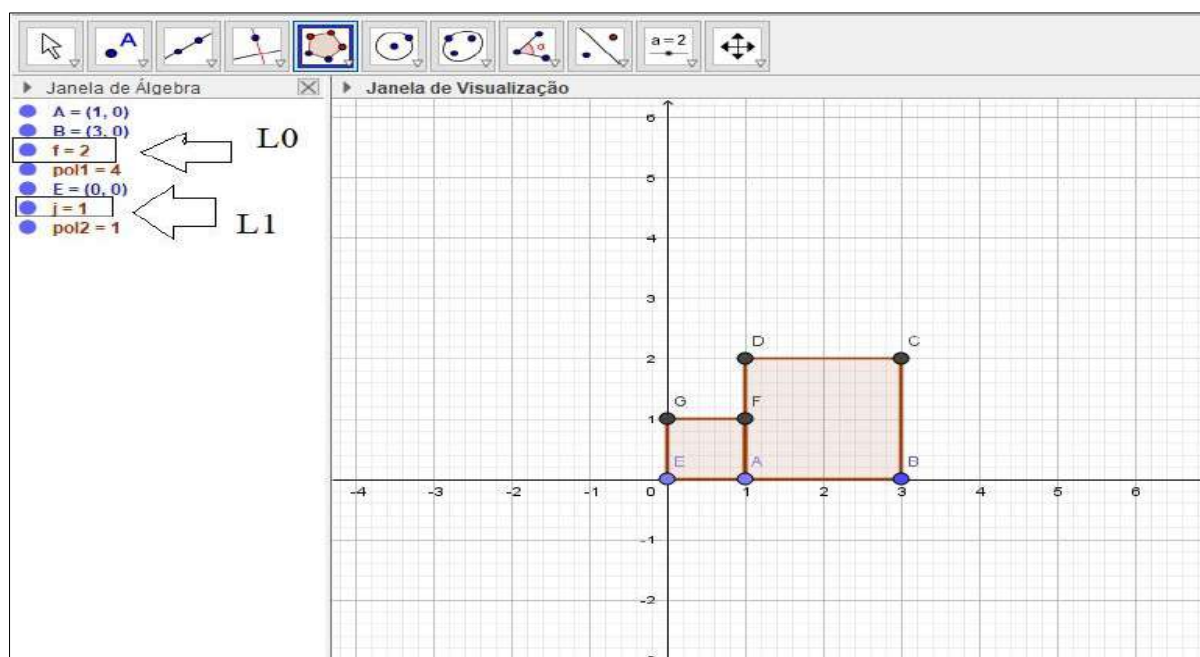
Figura 85– Construção de um quadrado



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Utilizando essa ferramenta, deve-se construir oito quadrados que estão associados os termos da sequência de Lucas, isto é, para cada lado de um quadrado tem um número de Lucas relacionado. Para melhor compreensão, mostra-se a Figura 86, com os quadrados correspondentes aos termos $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$, ou seja, será construído um quadrado de lado dois e outro quadrado de lado um.

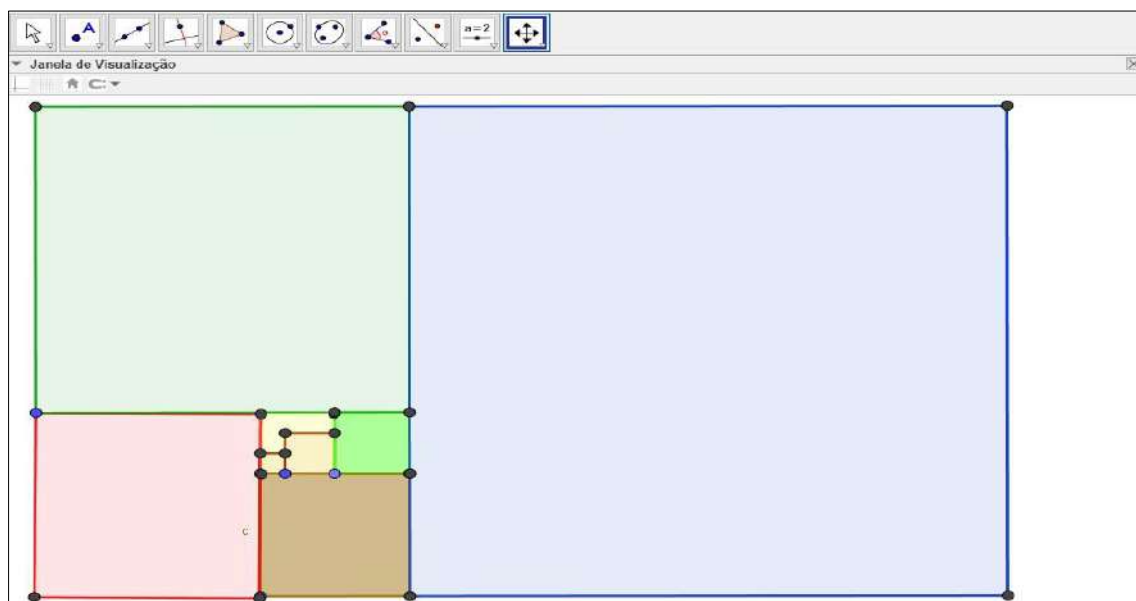
Figura 86– Termos iniciais da sequência de Lucas



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

De forma análoga, deve ser construído mais seis quadrados, cujos lados têm medidas correspondentes aos números de Lucas. Vale ressaltar que, para a construção do próximo quadrado, sempre será soma os valores dos dois lados dos quadrados consecutivos anteriores, conforme a Figura 87.

Figura 87– Oito primeiros termos da sequência de Lucas

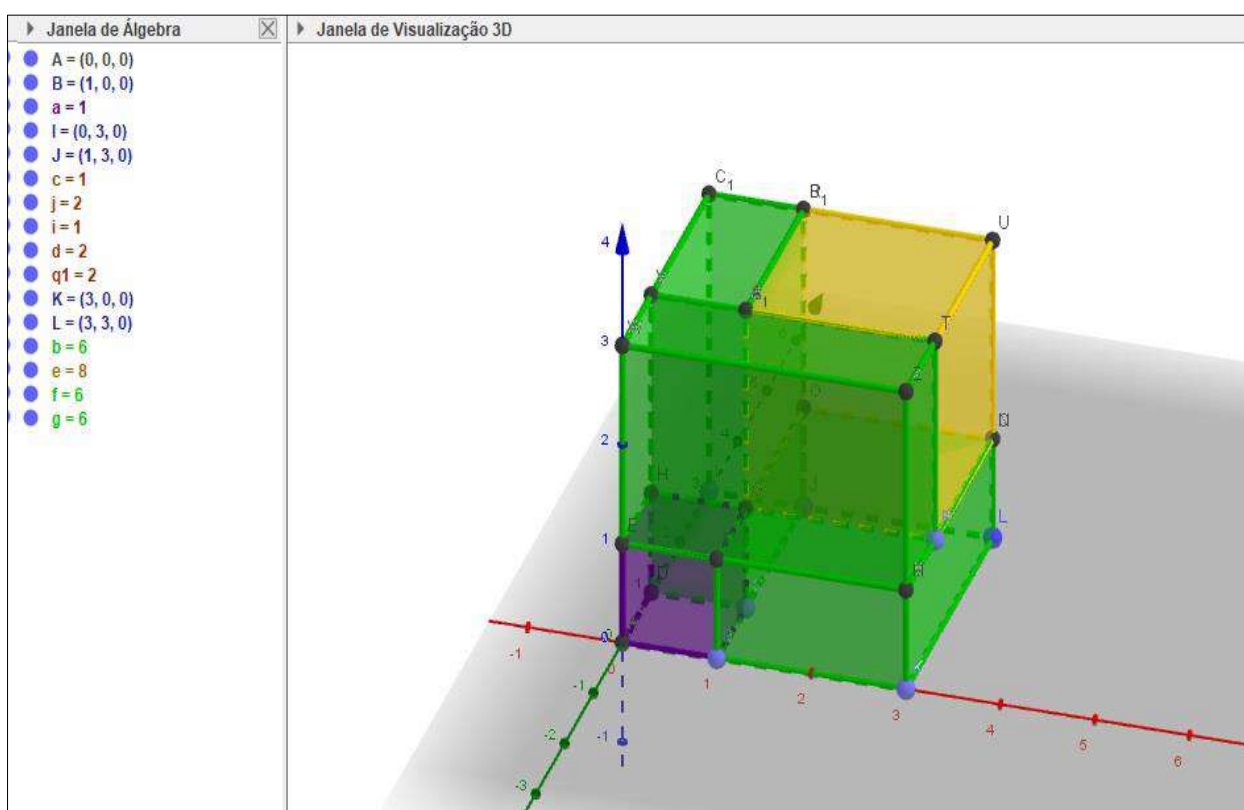


Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

A partir dessa construção, deve se iniciar a fase da *ação*, essa é “aquela em que o aluno realiza procedimentos mais imediatos para resolução de um problema, resultando na produção de um conhecimento de natureza mais experimental e intuitiva do que teórica” (PAIS, 2015, p.34). Com base nas informações obtidas nas construções do GeoGebra, os estudantes devem identificar a primeira identidade de Lucas $\sum_{k=0}^n L_k^2 = L_n L_{n+1} - 2$.

Para a fase da *formulação*, os estudantes devem levantar suas hipóteses. Nesse momento, a Figura 88 deve ser apresentada aos alunos, para que os mesmos possam visualizar e identificar que essa construção deve ocorrer de maneira análoga a situação didática 1.

Figura 88– Representação da identidade de Lucas em uma visualização 3D



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Com base na Figura 88, os estudantes devem observar os dados para obtenção da segunda identidade de Lucas que é $L_{n+1}^3 = L_n^3 + L_{n-1}^3 + 3L_{n-1}L_nL_{n+1}$.

Em seguida, na fase da *validação*, os estudantes devem tentar convencer os participantes à legitimidade de suas afirmações, por meio de uma linguagem formal, ou seja, provar que a sequência de Lucas e de Fibonacci utilizam a razão áurea para convergência entre seus termos da sequência, e por consequência, demonstrar que suas identidades são semelhantes.

Para a fase *institucionalização*, espera-se que o aluno ou grupo de estudantes encontrem um significado para o saber que foi elaborado por ele mesmo ao longo das fases anteriores. Diante dessa situação “o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber” (ALMOULOU 2007, p.40). Nesse momento, o professor deve retornar as discussões feitas nas etapas anteriores, evidenciando a possibilidade da construção de espiral para os números de Lucas e a determinação de outras possíveis identidades.

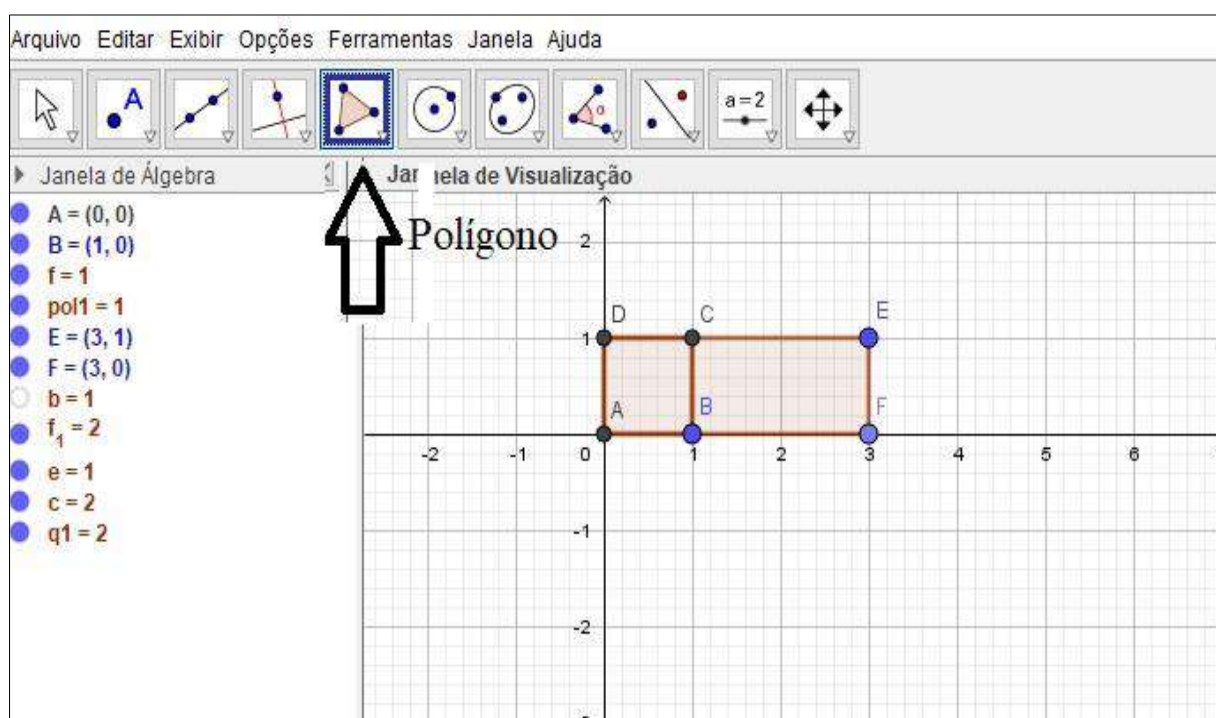
4.2.3 Situação didática 3: associar as representações geométricas aos números de Pell

Nas concepções das situações didáticas, essa situação articular conceitos sobre a sequência de Pell, trazendo os seguintes questionamentos: Qual a relação entre os números de Pell com a identidade de Candido? Como generalizar a identidade de Pell por meio de uma visualização tridimensional?

Para iniciar os estudos, deve ser apresentada a lei de recorrência $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$, $n \geq 3$, com $P_0 = 0, P_1 = 1$ e $P_2 = 2$, para determinar os oito primeiros termos da sequência de Pell que são (1,2,5,12,29,70,169,408, ...).

Para iniciar a fase da *ação*, para o gerar o primeiro questionamento, deve ser apresentada a identidade de Candido utilizando o GeoGebra. Para a construção da imagem que representa essa identidade, são necessários quadrados e retângulos, que podem ser construídas com as ferramentas polígono regular, já utilizada anteriormente, e a opção polígono, que constrói a partir da determinação dos vértices do retângulo, como mostra a Figura 89.

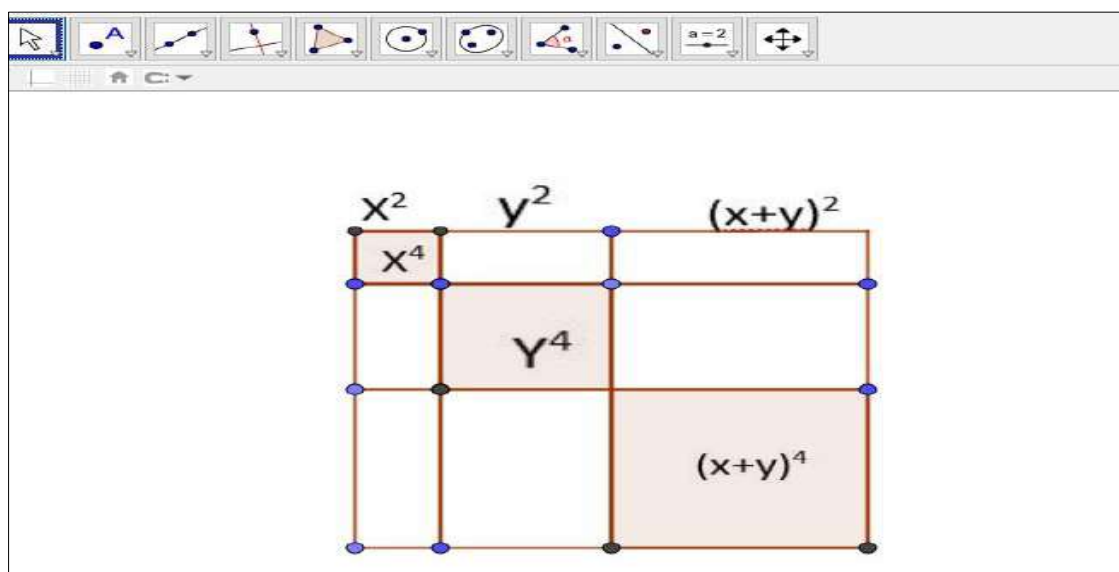
Figura 89– Termos iniciais da identidade de Candido



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

A partir dessas informações iniciais, deve ser construído um quadrado maior, cujos seus lados são determinados por quadrados e retângulos, como mostra a Figura 90.

Figura 90- Generalização da identidade de Candido



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Assumindo a posição da *ação*, que é quando durante o processo o aluno elabora estratégias para criar um método de resolver seu problema (BROUSSEAU, 1997). Os estudantes devem organizar suas estratégias, a partir da representação da situação-problema que deve servir de subsídios para suas tomadas de decisões.

Dessa maneira, os estudantes devem analisar casos particulares para relacionar os números de Pell a identidade de Candido, calculando a área do quadrado mostrado na Figura 90.

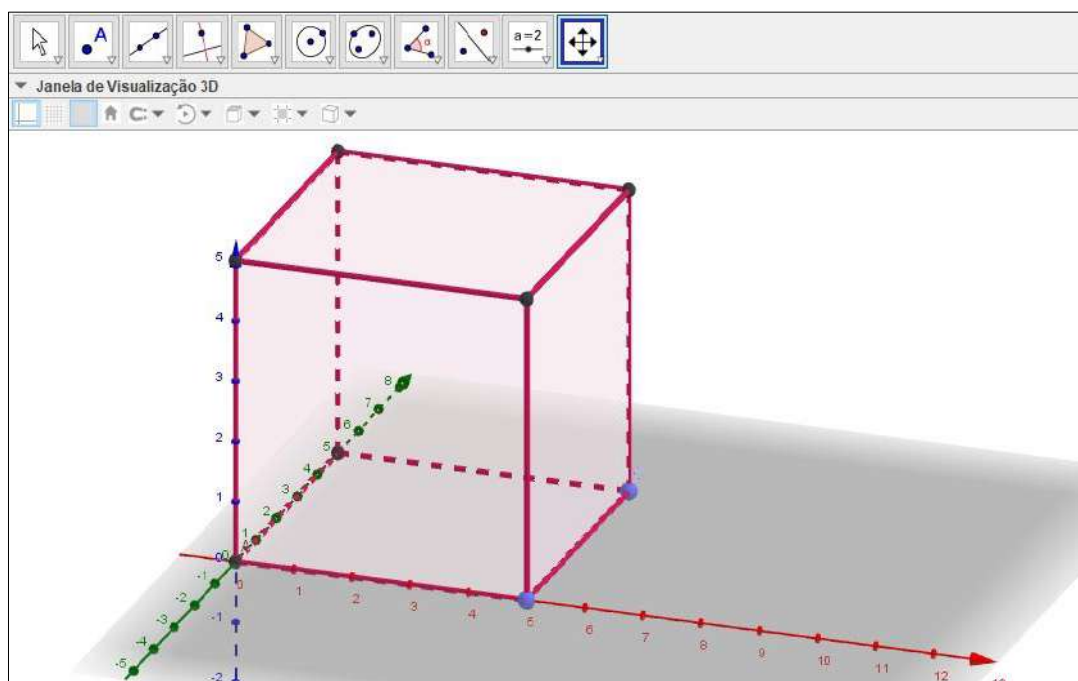
Para fase da *formulação*, o estudante deve substituir o valor de x por P_{n-2} e valor de y por $2P_{n-1}$, somando $x+y$ será igual P_n . Para *validar* essa relação da identidade de Candido com a sequência de Pell, o aluno deve substituir valores para os números de Pell na fórmula obtida, no qual deve observar se a identidade encontrada assume veracidade para qualquer valor relacionado à sequência proposta.

Continuando a situação didática 3, o segundo questionamento: *como generalizar a identidade de Pell por meio de uma visualização tridimensional?*

Para responder essa indagação, deve ser apresentadas duas construções tridimensionais, nas quais os estudantes devem observar, e espera-se que os mesmos criem suas hipóteses para a resolução da situação-problema, posteriormente validando-as com os conceitos matemáticos.

Logo, inicialmente deve-se construir um cubo maior, com o valor da aresta igual a cinco, terceiro termo da sequência de Pell, por meio da ferramenta cubo, já descrita na situação didática 1, conforme a Figura 91.

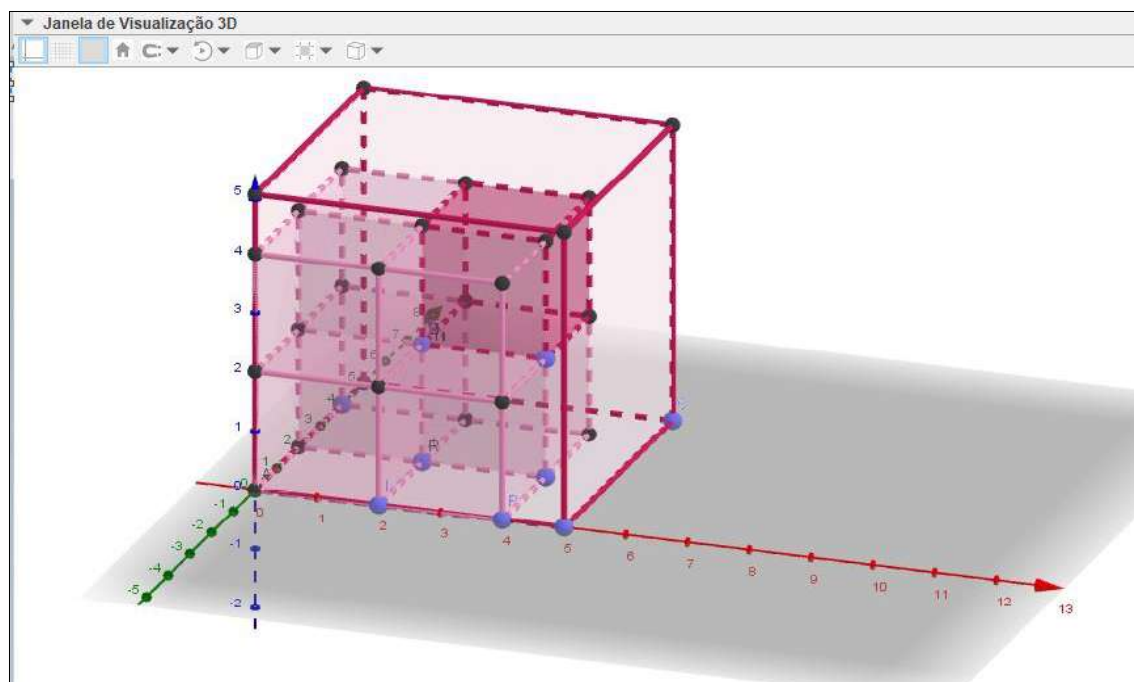
Figura 91–Termo da identidade representada por cubo maior



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Em seguida, na parte interna desse prisma (Figura91) são construídos mais oito cubos menores e idênticos com valores das arestas iguais a dois, segundo termo da sequência de Pell, como mostra a Figura 92.

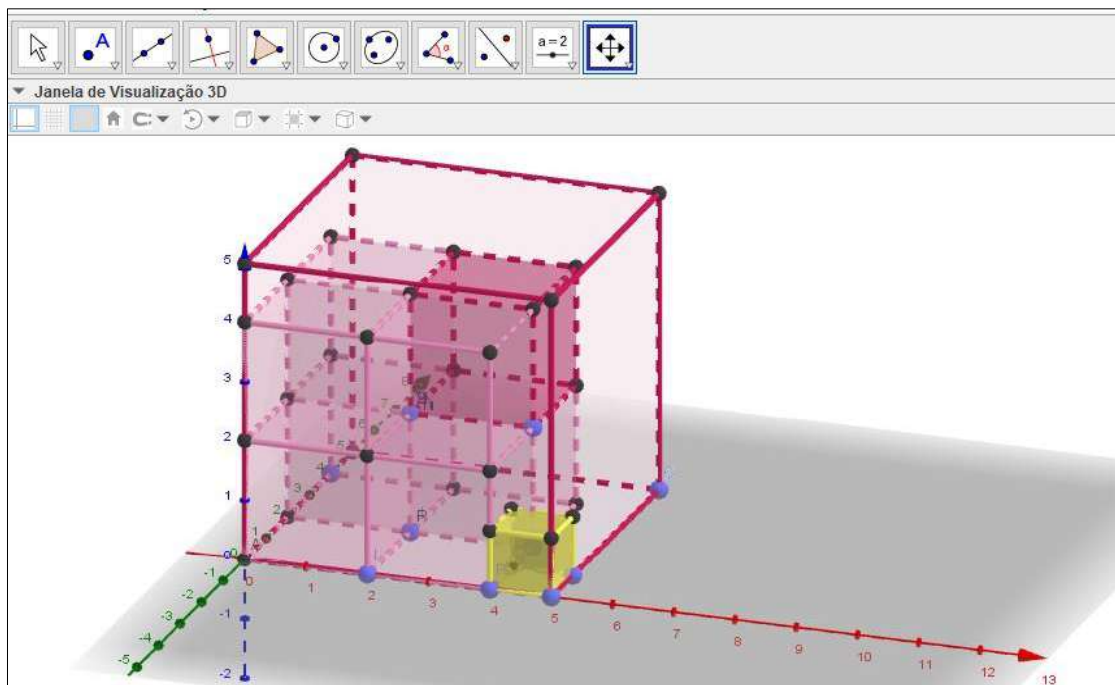
Figura 92 – Outros termos da identidade representadas por cubos menores



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Por conseguinte, deve ser criado mais um cubo de cor amarela, com valor para aresta igual a um, que corresponde ao primeiro termo da sequência de Pell, finalizando a primeira parte da identidade, de acordo com a Figura 93.

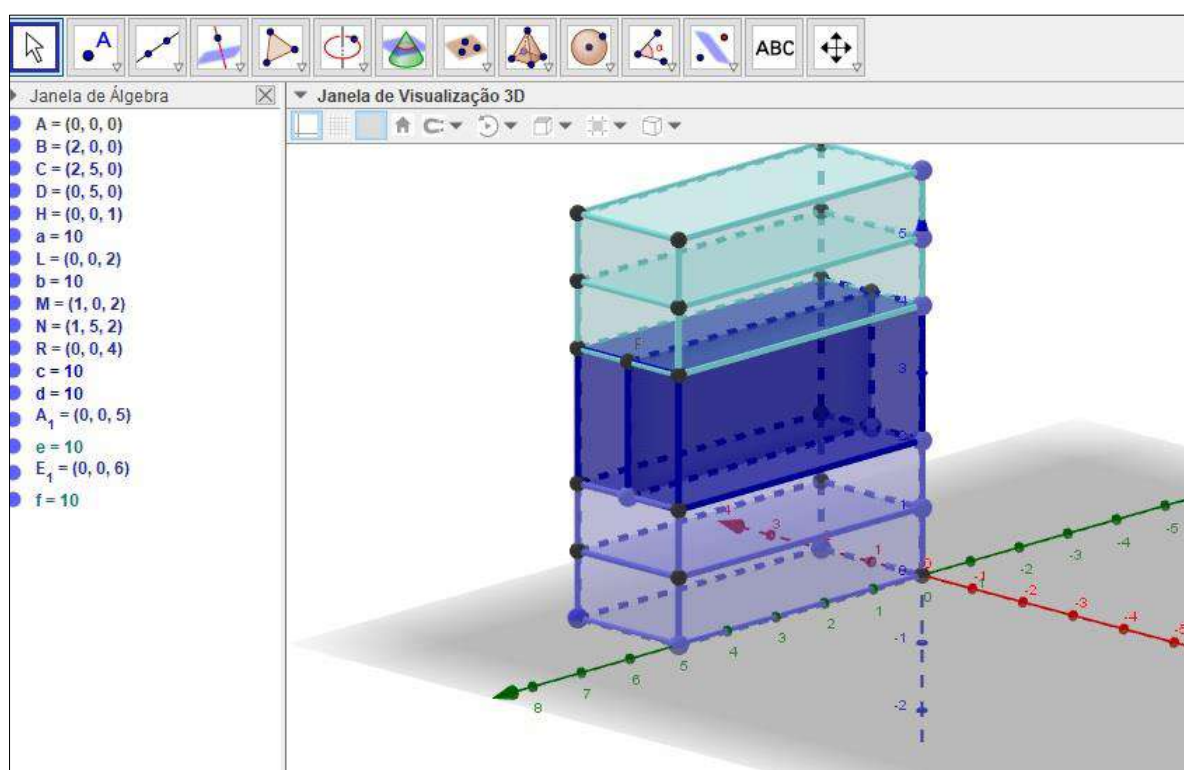
Figura 93– Identidade de Pell (1ª parte)



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Para criar uma igualdade nessa identidade, ou seja, a segunda parte, deve ser construída outra imagem em torno do eixo tridimensional, como mostra a Figura 94.

Figura 94-Identidade de Pell (2ª parte)



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Nessa Figura 94, deve ser construídos seis prismas com medidas cinco, dois e um, para alturas, larguras e comprimentos, que correspondem a terceiro, segundo e primeiro termo da sequência de Pell, por meio da ferramenta prismas, no qual deve-se escolher a base, usando as medidas de largura e comprimento nos eixos x e y, após a construção desse quadrilátero, é determinado a altura no eixo z.

Com base nas Figuras 93 e 94, inicia-se a fase da *ação*, os estudantes devem observar e associar cada medida dos prismas a um termo da sequência de Pell.

Para a fase da *formulação*, espera-se que os alunos pense nas operações implícitas nas imagens, como a subtração das áreas dos cubos que devem ser inseridas no prisma maior, bem como na igual nas Figuras 93 e 94, realizando a igualdade para a generalização da identidade $P_{n+1}^3 - 8P_n^3 - P_{n-1}^3 = 6(P_{n-1} \cdot P_n \cdot P_{n+1})$ para $n \geq 1$.

Já na fase da *validação*, após a generalização, os estudantes devem efetuar os cálculos para demonstrar as igualdades, utilizando os números de Pell. Na situação de *institucionalização*, as informações devem ser levantadas a partir do que foi pensado nas fases anteriores. O professor deve finalizar sua mediação, mostrando outras identidades importantes sobre a sequência de Pell.

4.2.4 Situação didática 4: visualização em 3D por meio das identidades de Jacobsthal

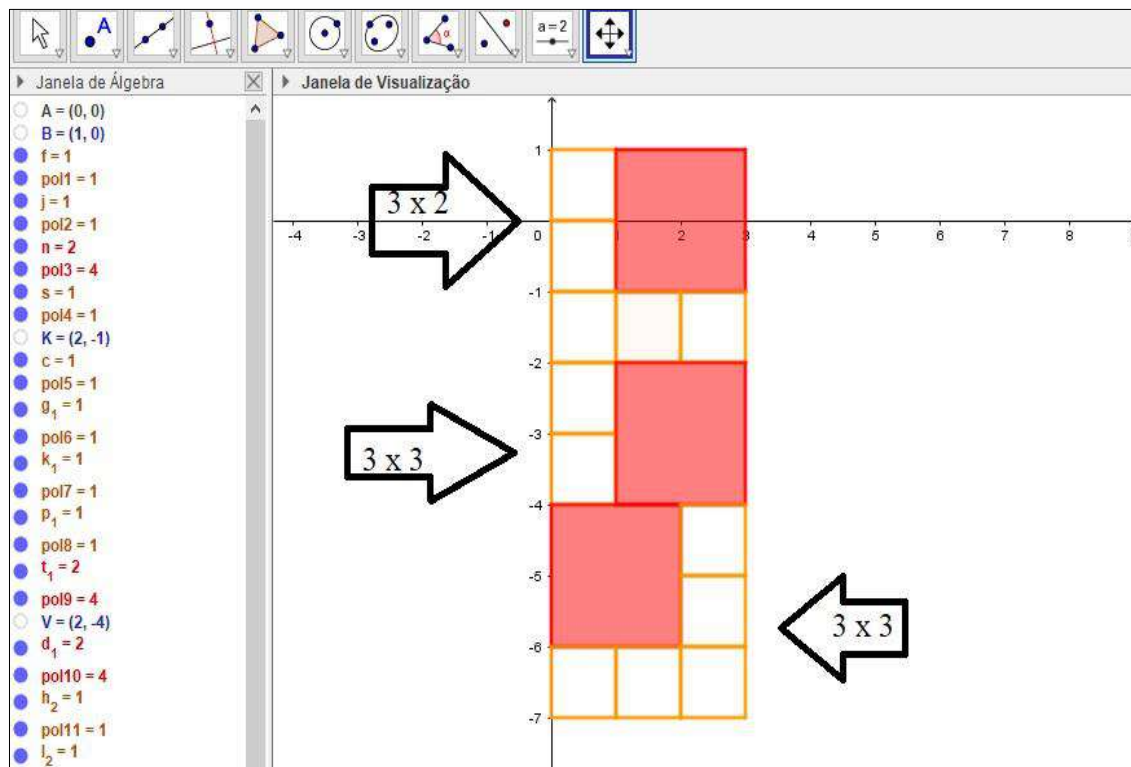
A situação que propomos a seguir, tem como objetivo utilizar as identidades de Jacobsthal para uma construção geométrica. Nesse sentido, apresentamos a seguinte situação: *com base nos números de Jacobsthal, representados por $J_n = \{0,1,1,3,5,11, \dots\}$ podemos representar essa sequência de forma geométrica em uma visualização 3D?*

Na fase da *ação*, deve ser o momento que ocorre a interação de um aluno ou um grupo de estudantes com o ambiente de aprendizagem, bem como a tomada de decisão para organizar as estratégias para resolução da situação-problema.

De início, devem ser apresentados os teoremas 18,19 e 20, esperando que os estudantes compreendam a definição de ladrilhos para resolver o seguinte questionamento: *por meio de ladrilhos, qual o número de maneiras de preencher os espaços com as medidas $2 \times 2 \times n$ com uma figura de medidas $1 \times 2 \times 2$?*

Na fase da *formulação*, espera-se a troca de diálogo entre os estudantes para determinação desse preenchimento. Dessa maneira, os estudantes devem encontrar uma imagem que se assemelhe à Figura 95, por meio do teorema 19, a soma dos pesos dos tabuleiros de comprimento $n \in J_{n+1}(x)$, no qual $n \geq 0$

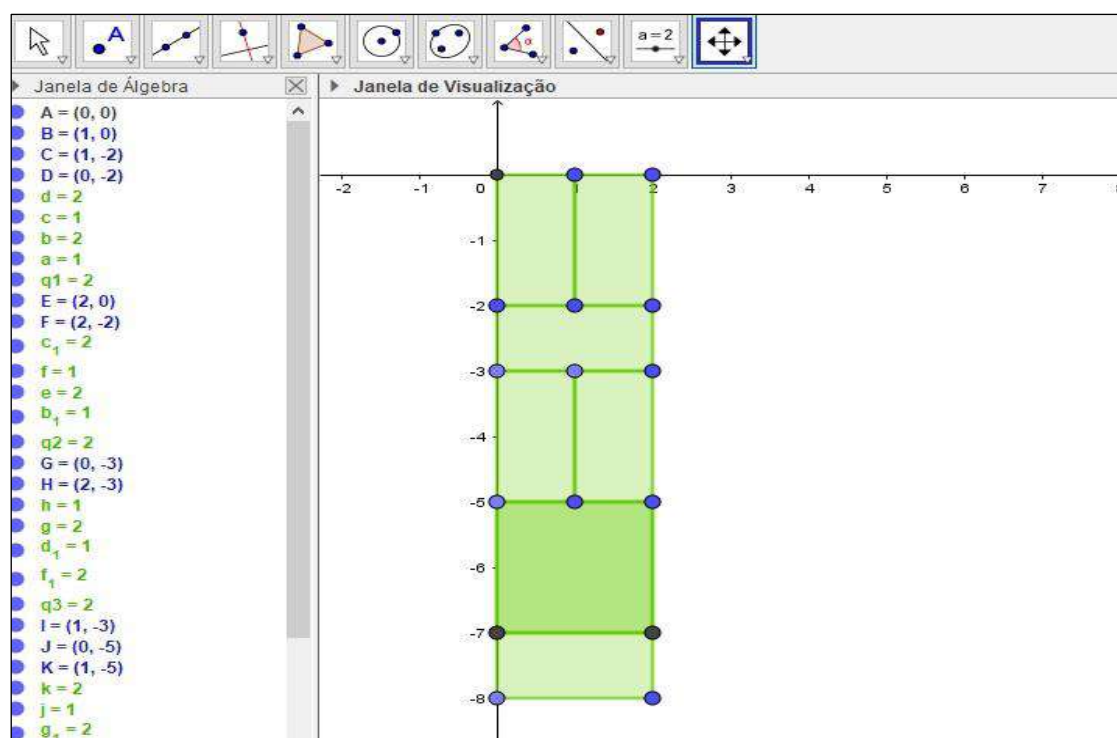
Figura 95- Ladrilhos $3 \times n$ da sequência de Jacobsthal



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Na Figura 95, deve ocorrer a construção de quadrados de lados iguais a um e dois, os dois primeiros termos da sequência de Jacobsthal, para uma combinação $a_n = 3x n$, por meio da ferramenta polígonos regulares já abordado na situação didática 3. Para construir outra parte da imagem tridimensional, espera-se que os estudantes pensem uma maneira de representar o teorema 20, $S_n^2 = J_{n+1}$, para $n \geq 0$, como mostra a Figura 96.

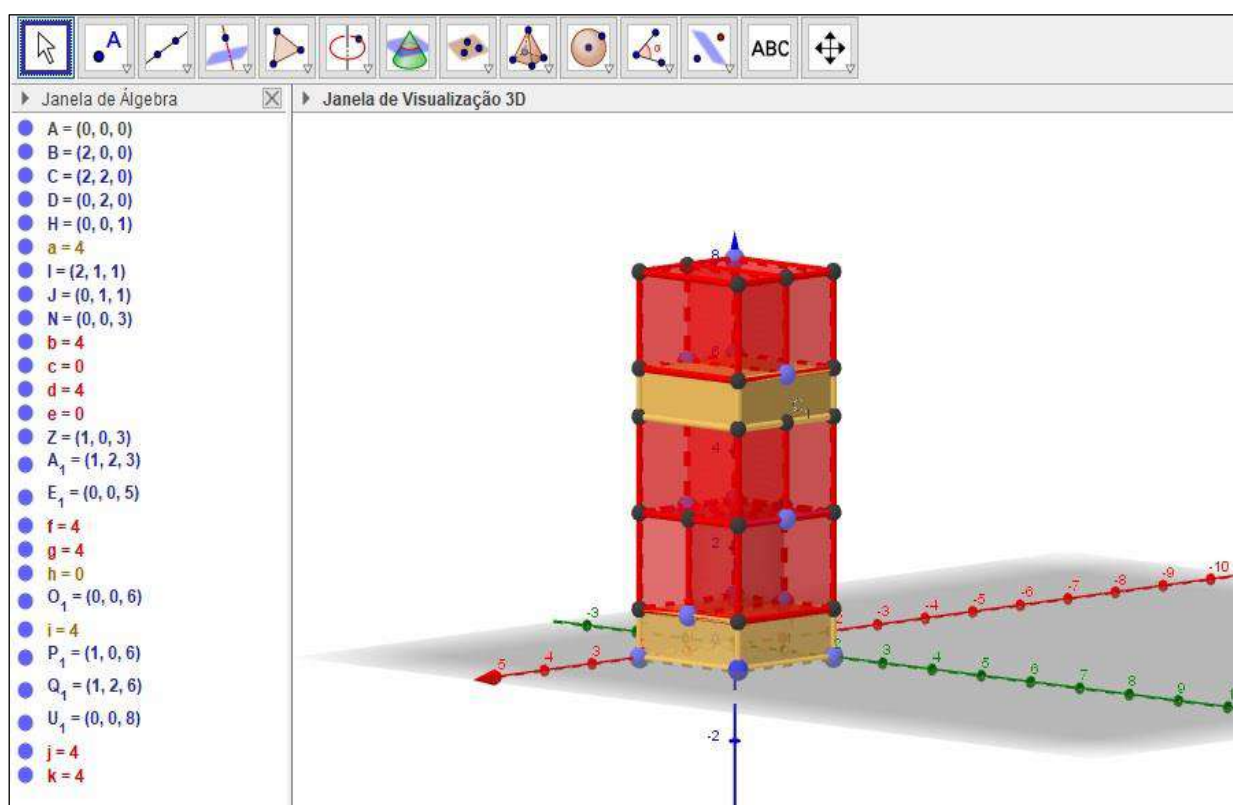
Figura 96– ladrilhos $2x n$ na sequência de Jacobsthal



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Na Figura 96 devem ser construídos retângulos de medidas um e dois, $b_n = 2x n$, utilizando a mesma ferramenta, para a determinação de seis combinações possíveis. Como *validação*, os estudantes devem realizar a união das Figuras 95 e 96 para uma possível construção 3D, como mostra a Figura 97.

Figura 97- Visualização 3D para sequência de Jacobsthal.



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Para *validação* da construção da Figura 97, os alunos devem associar $a_n = b_n = J_{n+1}$, ilustrando essa pequena cadeia de igualdades usando uma prova bijetiva.

De acordo com as fases anteriores, a fase da *institucionalização* dessa situação-problema, o saber é identificado, sistematizado e reconhecido (BROUSSEAU, 1996). Dessa forma, o professor deve argumentar a importância dos polinômios de Jacobsthal para uma construção geométrica e enfatiza que sem o GeoGebra, essa visualização não seria tão simples.

4.2.5 Situação didática 5: representar geometricamente a identidade de Narayana

Nessa situação, espera-se que os estudantes tenham uma base, pois já devem ter realizado a situação didática 4, facilitando as relações por meio das visualizações por meio do GeoGebra.

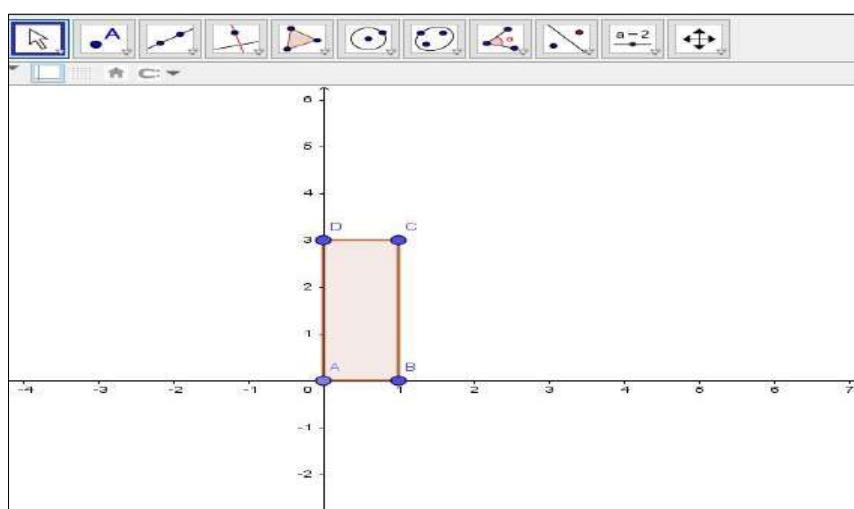
No primeiro momento deve ser apresentada a lei de recorrência $N_r = N_{r-1} + N_{r-3}$, $r \geq 3$, para termos iniciais $N_0 = 0, N_1 = N_2 = 1$, para determinar os dez primeiros termos da sequência de Narayana que são $(0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, \dots)$.

Com base nessas afirmações, apresenta-se a seguinte situação didática: *como podemos representar essa sequência de forma geométrica em forma de ladrilhos? Caso afirmativo, prove por meio de uma identidade.*

Para determinar a fase da *ação*, deve ser apresentado o seguinte problema: uma vaca dá à luz a um bezerro todos os anos. O bezerro, por sua vez, dá à luz a outro bezerro quando tem três anos de idade. Qual o número de bezerros produzidos por uma vaca em 20 anos? (STANLEY,2015)

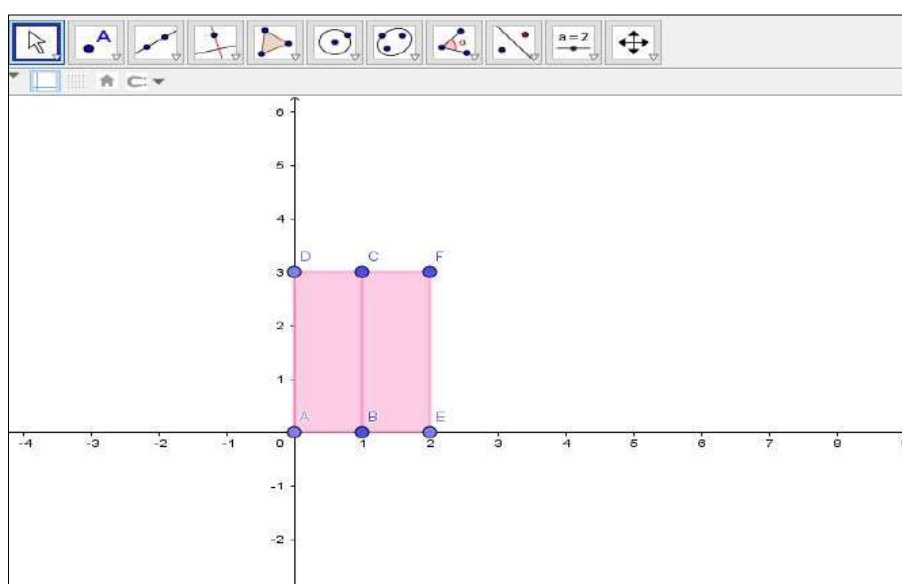
Para resolver essa situação-problema, os alunos devem utilizar a lei de recorrência, para determinar os termos que completam a sequência até o vigésimo termo. Para *formulação*, devem ser apresentadas as Figuras 98,99 e 100, que são representadas por retângulos 3×1 , para uma generalização de uma identidade relacionados aos números de Narayana.

Figura 98– Representação 3×1



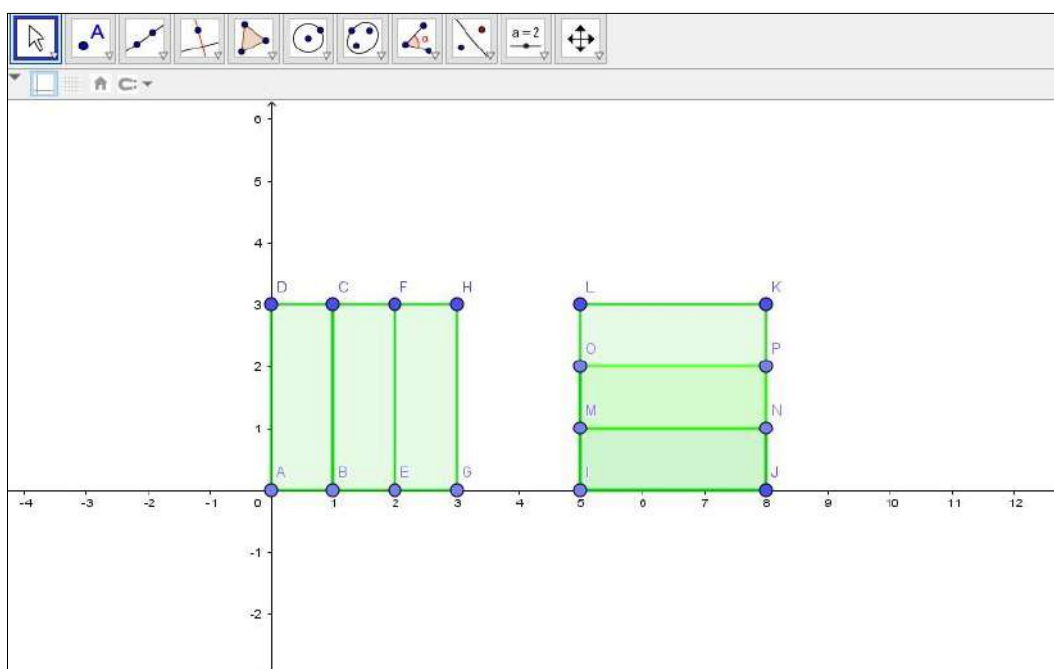
Fonte: Elaborado pelos autores (2022)

Figura 99– Representação 3×2



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Figura 100– Representação 3x3



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Com base nas Figuras 98, 99 e 100, deve ser realizado o seguinte questionamento: *quantas possibilidades de construir a representação 3x6?* Nesse momento, na fase da *formulação*, espera-se que os estudantes associem os valores de possibilidades aos números de Narayana.

Para *validação* das hipóteses criadas na fase anterior, os alunos devem generalizar a identidade $V_n = 3x(n - 1)$, ou seja, a quantidade de possibilidades de ladrilhos construídos 3×1 .

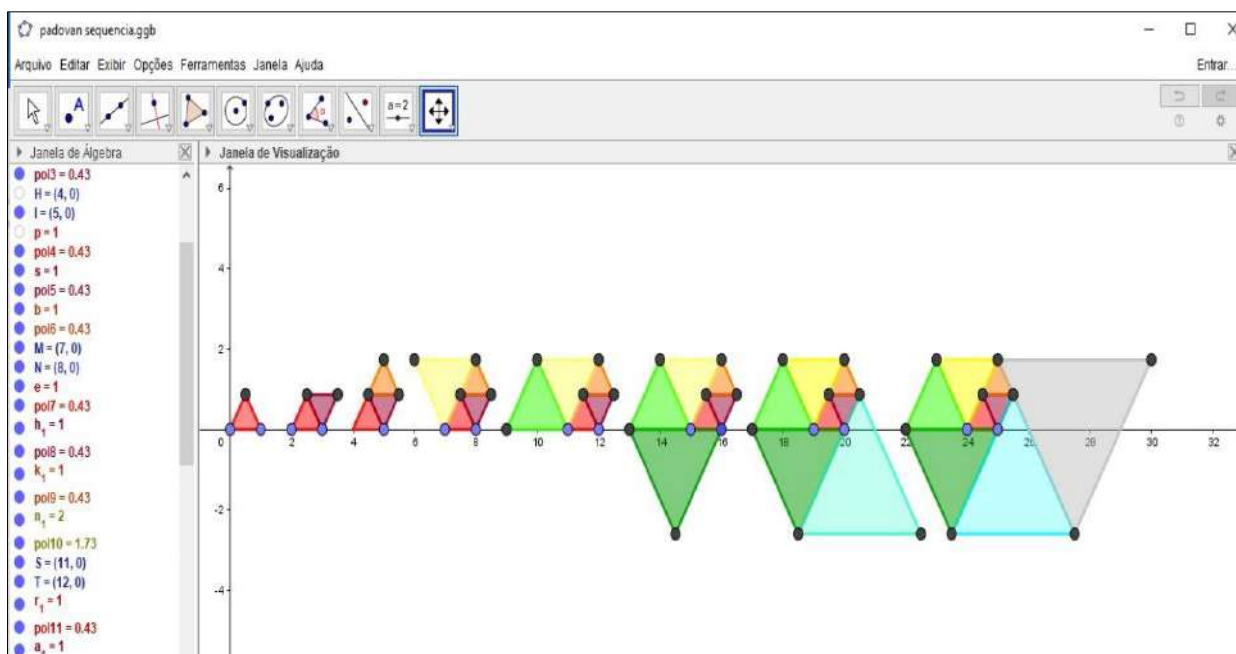
Para finalizar a situação didática, na fase da *institucionalização*, o professor deve fazer a mediação e afirmação que as identidades de Narayana são estudadas segundo Alves e Bezerra (2020) com relação aos números de Catalan, bem como por meio de combinações.

4.2.6 Situação didática 6: encontrar a relação entre os números de Padovan com triângulos equiláteros

Esta situação tem o objetivo de explorar a visualização das identidades de Padovan por meio de triângulos equiláteros, sua composição pode ser feita através da área do triângulo equilátero e as suas propriedades.

Nesta situação, o estudante deverá ser capaz de encontrar as identidades visualizando associação dos números de Padovan aos lados de um triângulo equilátero como mostra a Figura 101.

Figura 101- Representação geométrica dos números de Padovan

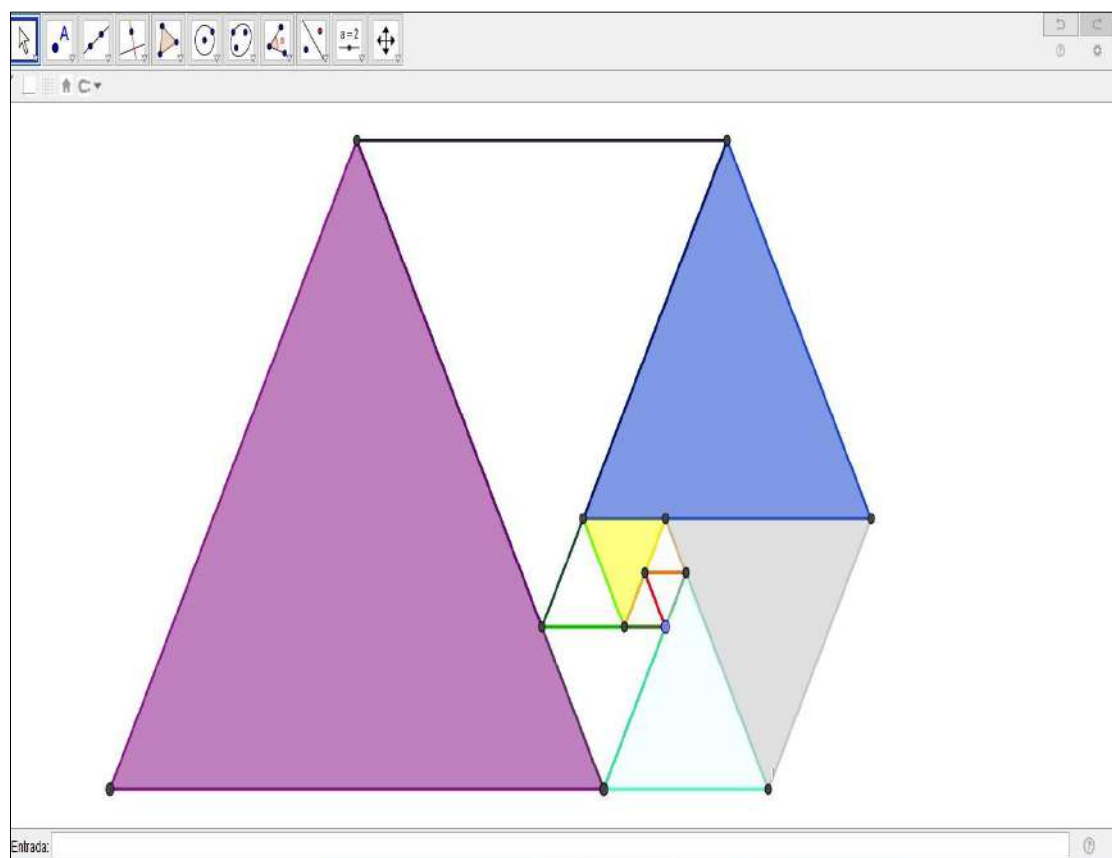


Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Para criar um triângulo equilátero no GeoGebra, utiliza-se a ferramenta polígono regular, descrita nas situações didáticas anteriores. Para a fase da *ação*, deve ser apresentada a lei de recorrência $Pa_n = Pa_{n-2} + Pa_{n-3}$, $n \geq 3$. Para $Pa_0 = 0$, $Pa_1 = 1$ e $Pa_2 = 1$, para determinar os oito primeiros termos da sequência de Padovan que são (0,1,1,1,2,2,3,4,5, ...) e a razão plástica é igual à $\psi = 1.324718 \dots$ de acordo com Vieira e Alves (2020).

Assim, espera-se que os estudantes observem e associem cada lado de um triângulo, na Figura 109, a um número de Padovan. Para fase da *formulação* é esperado que os alunos, relembre a fórmula da área do triângulo equilátero para construção das identidades por meio das Figuras 102 e 103.

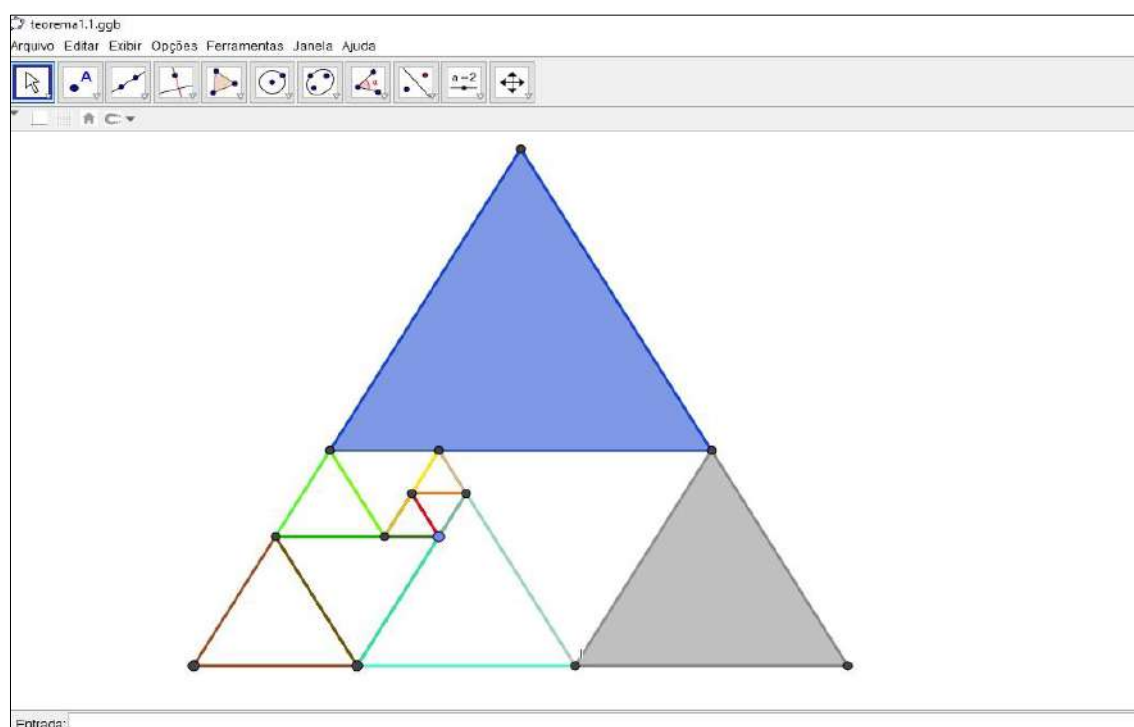
Figura 102– Representação geométrica da identidade



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

De acordo com a Figura 102, os estudantes devem associar os números de Padovan à identidade $P_n^2 = 2P_{n-2}^2 + 2P_{n-3}^2 - P_{n-7}^2$, Para todo $n \geq 7$.

Figura 103 - Representação geométrica de dois termos consecutivos de Padovan



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

De forma análoga, os alunos devem associar os termos da sequência de Padovan a Figura 103, para identificar a identidade $Pa_n^2 + Pa_{n-1}^2 = Pa_{n+2}^2 - 2Pa_{n-1} \cdot Pa_n$, para $n \geq 1$.

Como *validação*, os estudantes devem desenvolver uma demonstração, segundo Edgar e Nacin (2021), dessas duas identidades utilizando a área do triângulo já mencionada nas fases anteriores.

Por fim, o professor na fase da *institucionalização*, deve mostrar que existem outras identidades que podem ser provadas utilizando os mesmos conceitos e com outras representações geométricas envolvendo triângulos.

4.2.7 Situação didática 7: encontrar a relação entre os números de Perrin com os números de Padovan

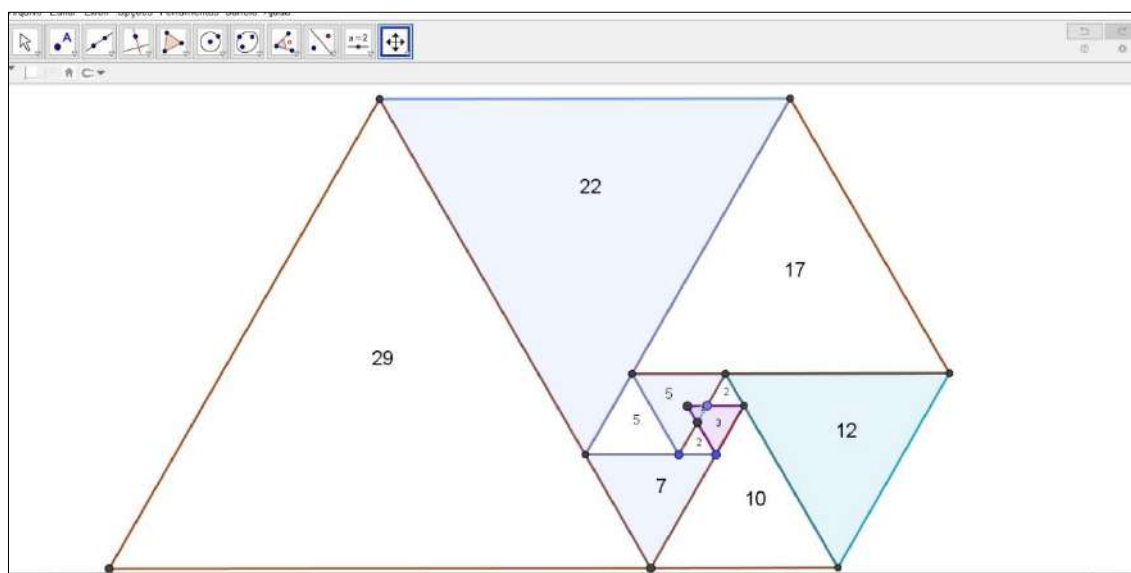
Nesta situação, espera-se os estudantes já tenha uma base, pois devem ter realizado a situação-problema anterior com os números de Padovan, facilitando as relações por meio das visualizações por meio do GeoGebra.

No primeiro momento, na fase da *ação*, deve ser apresentada a lei de recorrência $Pe_n = Pe_{n-2} + Pe_{n-3}$, $n \geq 3$. Para $Pe_0 = 3$, $Pe_1 = 0$ e $Pe_2 = 2$, para determinar os dez primeiros termos da sequência de Perrin que são (3,0,2,3,2,5,5,7,10,12, ...).

Diante dessas informações, surge um questionamento: *podemos afirmar que a sequência de Perrin é semelhante à sequência de Padovan?*

Para responder essa indagação, na fase da *formulação*, deve ser apresentada a Figura 104. Nesse momento as conjecturas devem ser levantadas pelos estudantes para tentar responder ao questionamento.

Figura 104- Representação geométrica da sequência de Perrin



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Nesse momento, espera-se que os estudantes observem a Figura 104 e comecem a perceber as semelhanças entre a sequência de Perrin e de Padovan, pois ambos os termos das sequências puderam ser representados por lados de um triângulo equilátero.

Para a *validação* da semelhança, devem ser solicitados aos alunos que realizem o cálculo da razão entre os termos da sequência de Perrin, para que com essa informação os estudantes pudessem visualizar, também, o número plástico nessa sequência.

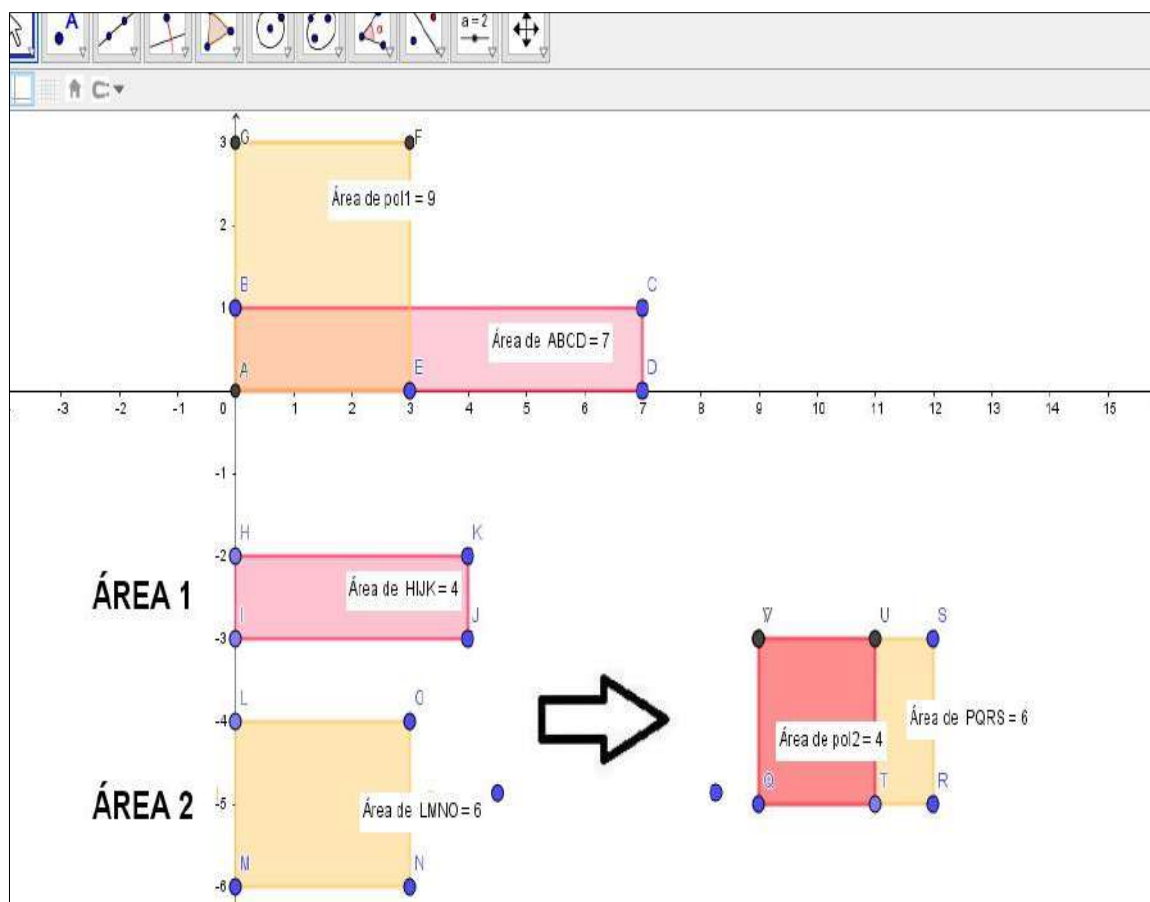
Finalizando, espera-se que os estudantes possam perceber que a lei de recorrência é a mesma, mudando somente os termos iniciais, gerando uma conclusão de que as identidades serão semelhantes para os números de Perrin, baseado em Mangueira (2022).

Para a fase de *institucionalização*, de acordo Almouloud (2007, p. 40) “o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber”. Assim, o professor reassume o controle da situação didática, formalizando o conceito matemático desenvolvido pelos estudantes, partindo de suas observações e apontando as construções no GeoGebra. Nesse momento o docente deve demonstrar algumas identidades de Padovan, de tal forma que as identidades possam ser provadas de forma imediata com os números de Perrin.

4.2.8 Situação didática 8: encontrar uma identidade de Mersenne por meio de uma visualização bidimensional

Para a concepção desta situação didática, deve se iniciar com apresentação da lei de recorrência que define a sequência de Mersenne $M_{n+2} = 3M_{n+1} - 2M_n$, com a condição $M_0 = 0$ e $M_1 = 1$. Catarino, Campos e Vasco (2016). Em seguida na fase da *ação*, devem ser apresentadas as Figuras 105, 106 e 107.

Figura 105– Operações entre áreas de retângulos (1ª parte)



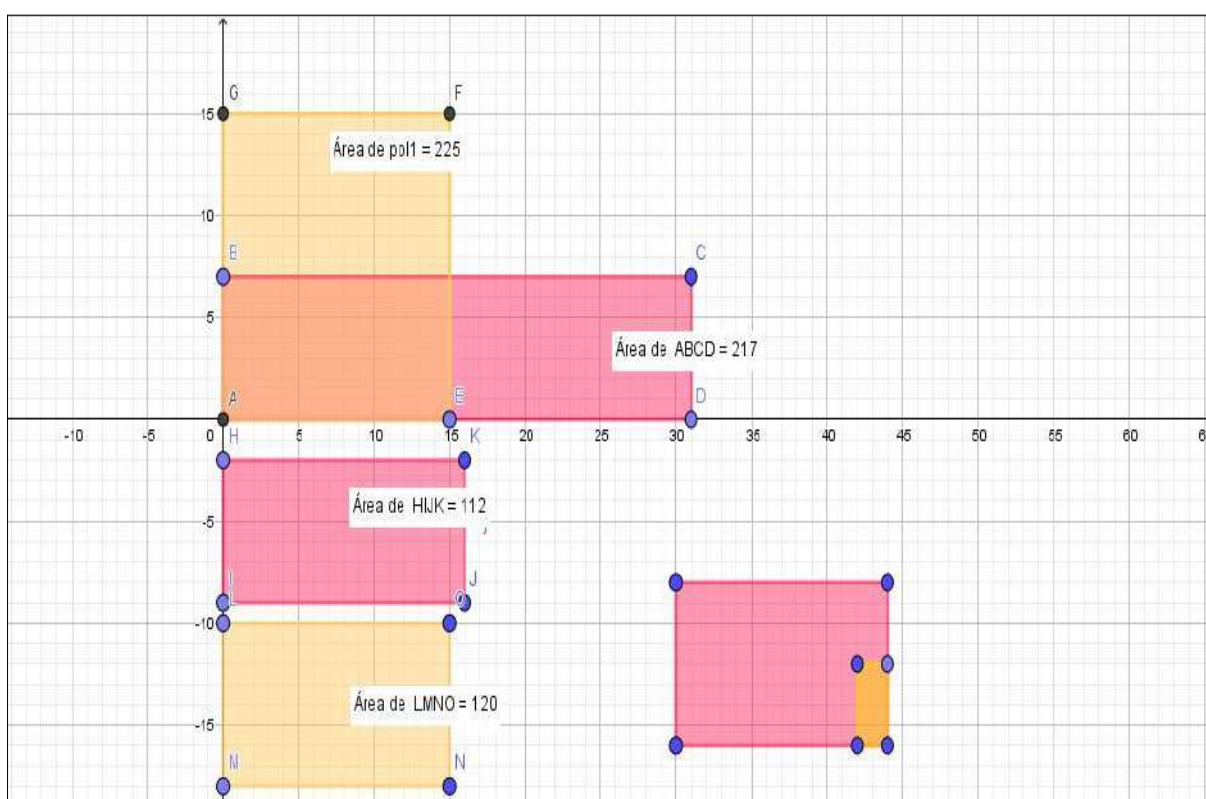
Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Figura 106– Operações entre áreas de retângulos (2ª parte)



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Figura 107– Operações entre áreas de retângulos (3ª parte)



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Nesse momento, espera-se que os estudantes observassem as áreas dos quadriláteros expostos nas Figuras 105, 106 e 107, por meio de três passos.

O primeiro passo, os estudantes devem observar a primeira imagem que são dois quadriláteros com uma interseção. No segundo momento, os alunos devem observar os dois quadriláteros separados sem a imagem de interseção, ocasionando duas figuras distintas. No terceiro passo, os discentes devem observar a subtração entre as duas áreas dos quadriláteros distintos, essas que por sua vez, essa estabelece segunda interseção deve ser apresentada para que a sua identidade possa ser compreendida por duas unidades de medidas.

Na fase da *formulação*, espera-se os alunos associem os números de Mersenne a cada lado do quadrado e retângulo apresentados, devem observar também que existem valores fixos para cada termo da identidade, tornando as conjecturas mais fáceis de serem provadas.

Para a *validação*, espera-se que, ao encontrar a relação entre as áreas e os números de Mersenne nas três situações-problemas propostas, os estudantes devem encontrar as operações de subtrações e generalizar a identidade de Mersenne $M_{n-1}M_{n+1} - M_n^2 = -2^{n-1}$, mostrando a demonstração por meio da relação dos números de Catalan, segundo Catarino, Campos e Vasco (2016, p. 39).

Com base nas informações das fases anteriores, na fase da *institucionalização*, o professor deve afirmar que essa demonstração é realizada pela fórmula de Binet, mas que também pode ser provada por limite tendendo ao infinito, baseado nos estudos de Catarino, Campos e Vasco (2016, p. 39).

4.2.9 Situação didática 9: encontrar a identidade de Oresme por meio de uma visualização bidimensional

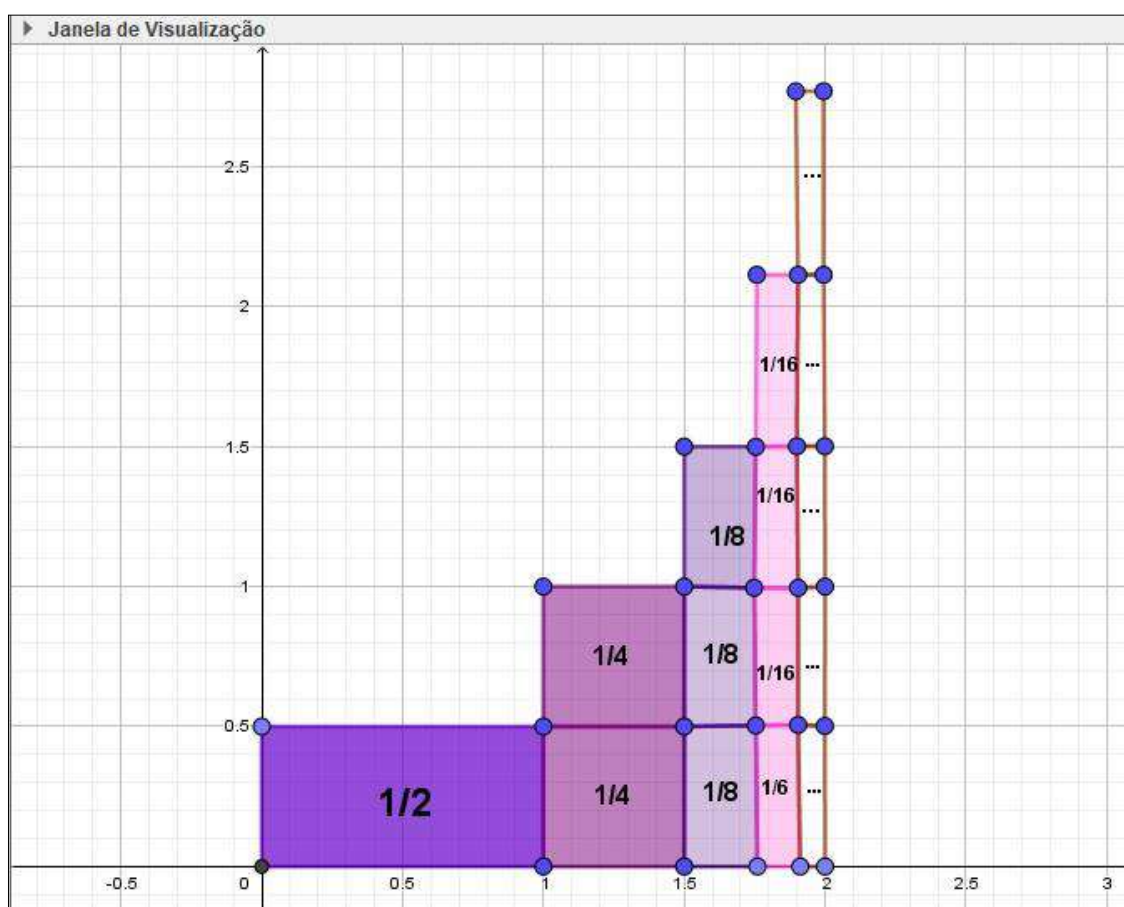
Para esta situação didática, tem como objetivo explorar a sequência de Oresme, ressaltando que esta é uma sequência recorrente e linear, derivada da sequência de Fibonacci, no qual seus coeficientes são expressos por 1 e $\frac{-1}{4}$. Os números de Oresme formam uma sequência de segunda ordem e apresentam a sua fórmula $O_n = O_{n-1} - \frac{1}{4}O_{n-2}$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ com $O_0 = 0$ e $O_1 = \frac{1}{2}$.

Como fase de *ação*, deve ser solicitado aos estudantes que determine os dez primeiros termos dessa sequência para $n > 0$, para que os mesmos observem a continuidade da sequência de Oresme. Neste momento, os alunos também devem observar as características particulares dessa sequência.

Após a construção dos termos que correspondem a sequência de Oresme, como intuito de estimular os alunos a criarem suas hipóteses na fase da *formulação*, deve ser necessário que os estudantes considerassem a soma dos termos da sequência de Oresme como uma série geométrica $G = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$. Tentando provar que essa identidade é igual a dois, como definição de Stillwell (1989, p.119).

Considerando as conjecturas encontradas na série G, espera-se que os estudantes observassem a Figura 108 e determinasse o valor da identidade de Oresme $B = \sum \frac{j}{2^j} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots$, como fase de *validação* para os resultados encontrados.

Figura 108- Somatório dos números de Oresme



Fonte: Elaborada pelos autores (2022)

Na fase da *institucionalização*, o professor deve validar as demonstrações e destacando algumas operações que podem ser exploradas e a necessidade do GeoGebra para a realização dessa situação-problema, pois a identidade tem base em uma série geométrica. Deve ressaltar também a importância das contribuições de Oresme na área da física e entre outras.

4.2.10 Situação didática 10: encontrar a identidade de Leonardo por meio de uma visualização bidimensional

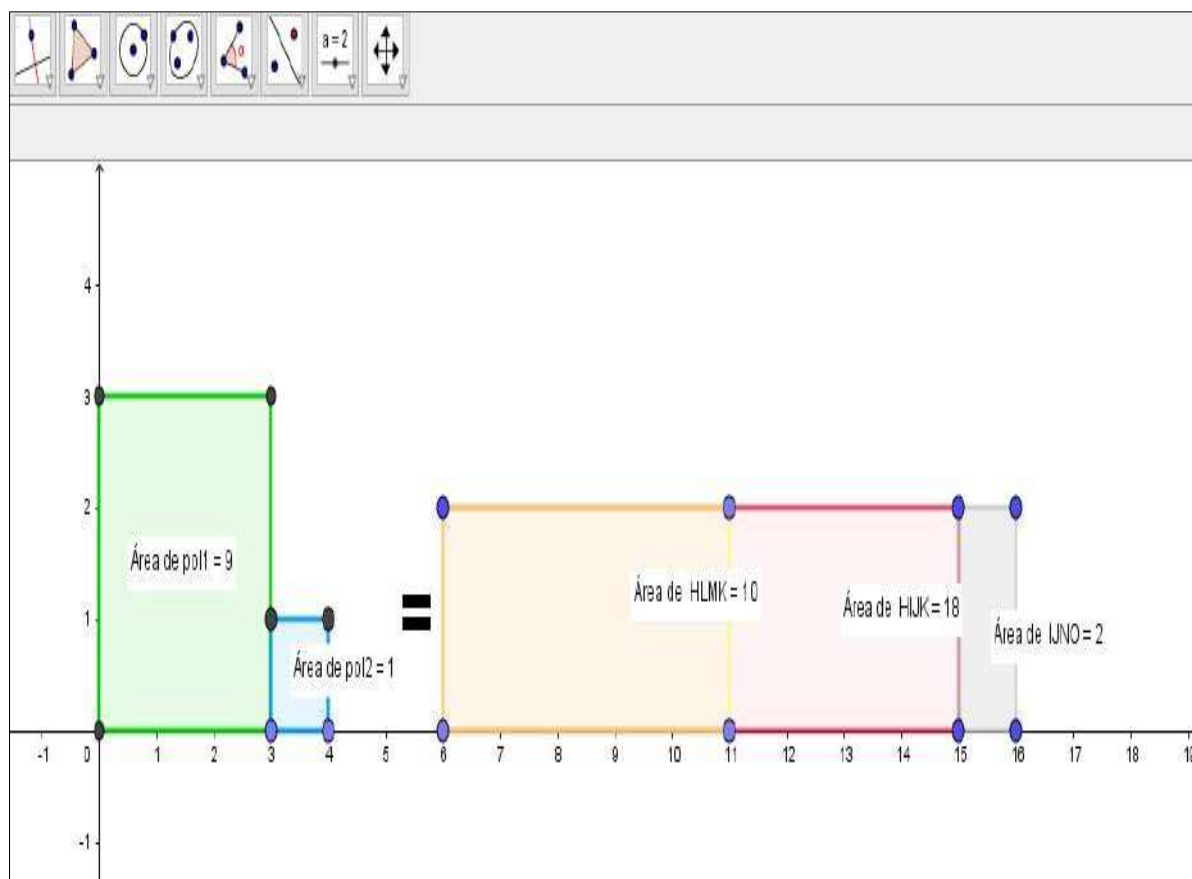
Para esta última situação didática, teve como objetivo demonstrar a identidade de Leonardo com o aporte do GeoGebra.

Na fase da *ação*, com posse da situação-problema, espera-se que os estudantes propõem estratégias para resolução dessa prova. Logo, de início, deve ser solicitado que os alunos determinem os dez primeiros termos positivos da sequência de Leonardo é representada por essa recorrência $Le_n = Le_{n-1} + Le_{n-2} + 1$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ com $Le_0 = Le_1$, segundo Catarino e Borges (2019).

Em seguida, de forma semelhante como a proposta da situação didática 1, na sequência de Fibonacci, deve ser realizada a razão de convergência dos termos da sequência de Leonardo, espera-se que os estudantes encontrem a relação com os números de Leonardo com a razão áurea.

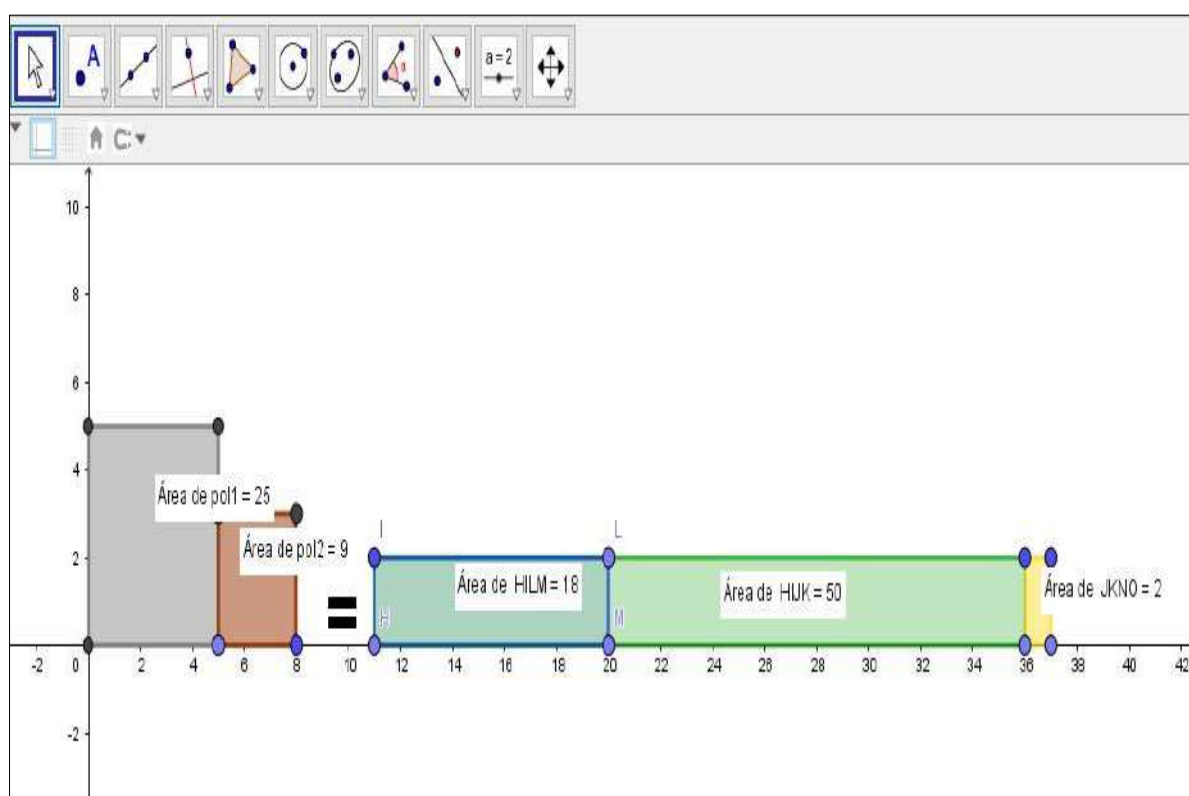
Para a fase da *formulação*, com os resultados obtidos na fase anterior, devem ser apresentadas as Figuras 109 e 110

Figura 109– Operações entre áreas (1ª parte)



Fonte: Elaborada pelos autores (2022)

Figura 110– Operações entre áreas (2ª parte)



Fonte: Elaborada pelos autores (2022)

Nesta fase de formulação, espera-se que os estudantes observassem as Figuras 109 e 110, e que associem os lados de cada quadrilátero a um termo da sequência de Leonardo. Por conseguinte, os alunos devem determinar as operações implícitas nas Figuras 109 e 110, que são inicialmente a soma de dois quadrados deve ser igual a interseção de duas áreas de dois quadriláteros unidos sempre a um retângulo de área igual a duas unidades de medidas. Para posteriormente com base na área dos quadriláteros consiga a generalização da identidade.

Para a *validação* das hipóteses levantadas na fase da *formulação*, o professor deve solicitar que os estudantes provem a identidade $Le_{n+1}^2 + Le_n^2 = 2((Le_{2n+2} - Le_{n+2} + 1))$, sabendo que $Le_n = 2F_{n+1} - 1$, para $n > 0$ segundo Alp e Koçer (2021), utilizando as algumas fórmulas relacionando a identidade de Leonardo com as identidade de Fibonacci.

Finalizando a mediação, na fase da *institucionalização*, o professor deve formular as principais propriedades que comprovam a veracidade e consistência das hipóteses levantadas nas fases precedentes. Nesse momento, o professor deve fomentar com a turma a percepção que a sequência de Leonardo se assemelha à sequência de Fibonacci, de acordo com

Mangueira (2022), bem como a sequência de Lucas. Assim, as identidades puderam ser provadas de imediato como as identidades de Fibonacci.

Por fim, nesta seção propusemo-nos a descrever as situações didáticas selecionadas para a experimentação apoiados nos pressupostos da TSD. Assim, objetivamo-nos na exploração de algumas identidades concernentes as sequências de Fibonacci, Lucas, Pell, Oresme, Mersenne, Jacobsthal, Narayana, Padovan, Perrin e Leonardo.

Logo, na seção seguinte foram evidenciados os protocolos da pesquisa realizados na fase de experimentação. Dessa forma, especificamos o campo e os sujeitos da pesquisa, bem como a condução das situações-problemas realizadas nessa etapa.

4.3 Experimentação

Esta etapa de experimentação teve como objetivo colocar em prática todo o instrumental elaborado na fase anterior. Descreveu-se os procedimentos realizados para a organização dos encontros, como os participantes da pesquisa foram selecionados e como foi realizada a coleta dos dados, bem como detalhamos algumas características do curso de licenciatura em Matemática em que a pesquisa está situada e o perfil dos sujeitos participantes.

Segundo Almouloud e Silva (2012), a fase da experimentação apresenta as aplicações das situações didáticas, tendo como o intuito mostrar o objetivo e as condições de realização da pesquisa, estabelecendo o contrato didático e registrar as observações realizadas.

Nesse sentido, tomamos como público-alvo de quatro estudantes denominado de E1, E2, E3 e E4, regularmente matriculados na disciplina de História da Matemática do 6º semestre do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) – *campus* Fortaleza, com carga horária de 40 horas.

O início das atividades ocorreu entre março/2022 e maio/2022. Os encontros ocorreram com frequência semanal, sendo realizados no turno da tarde às segundas e sextas-feiras.

No primeiro encontro, foi realizada a exposição dos objetivos propostos da pesquisa e a metodologia de trabalho adotada, o contrato didático junto a assinatura do TCLE. A seguir, foi apresentada o contexto histórico da sequência de Fibonacci e a relação de recorrência, determinação de alguns casos particulares e obtenção da fórmula de Binet. Além disso, foi discutida a razão áurea e algumas identidades unidimensionais relacionadas a tal sequência.

Nos demais dias, no caso os dezenove encontros, foram discutido o contexto histórico das outras sequências recursivas lineares, bem como as aplicações das dez situações-

problema propostas, objetivando analisar a evolução destes objetos matemáticos em estudo, com foco no processo de generalização das identidades exploradas geometricamente utilizando o GeoGebra, como ilustrado no Quadro 1.

Quadro 1- Cronograma das atividades

Data do encontro	Conteúdo previsto
07/03/2022	Leitura e assinatura do TCLE; Estabelecimento do contrato didático; Contexto histórico sobre a sequência de Fibonacci.
11/03/2022	Desenvolvimento da situação didática I- Identidade de Fibonacci.
14/03/2022	Contexto histórico sobre a sequência de Lucas.
18/03/2022	Desenvolvimento da situação didática II- Identidade de Lucas.
21/03/2022	Contexto histórico sobre a sequência de Pell.
25/03/2022	Desenvolvimento da situação didática III- Identidade de Pell.
28/03/2022	Contexto histórico sobre a sequência de Jacobsthal.
01/04/2022	Desenvolvimento da situação didática IV- Identidade de Jacobsthal.
04/04/2022	Contexto histórico sobre a sequência de Narayana.
08/04/2022	Desenvolvimento da situação didática V- Identidade de Narayana.
11/04/2022	Contexto histórico sobre a sequência de Padovan.
18/04/2022	Desenvolvimento da situação didática VI- Identidade de Padovan.
25/04/2022	Contexto histórico sobre a sequência de Perrin.
29/04/2022	Desenvolvimento da situação didática VII- Identidade de Perrin.
02/05/2022	Contexto histórico sobre a sequência de Mersenne.
06/05/2022	Desenvolvimento da situação didática VIII- Identidade de Mersenne.
09/05/2022	Contexto histórico sobre a sequência de Oresme.
13/05/2022	Desenvolvimento da situação didática IX- Identidade de Oresme.
16/05/2022	Contexto histórico sobre a sequência de Leonardo.
20/05/2022	Desenvolvimento da situação didática IX- Identidade de Leonardo.

Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Para a execução desses encontros descritos no Quadro 1, foram necessários os materiais como: lápis/caneta, borracha, papel, pincel, quadro branco, data show e computador com o *software* GeoGebra versão 5.0 instalado, celular para registro fotográfico e um gravador para os registros de áudio.

Esta pesquisa possuiu o parecer aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) (Anexo C), sendo, então, disponibilizado o TCLE (Apêndice B) assinado pelos estudantes participantes, bem como foi estabelecido o contrato didático para que tivéssemos um bom andamento nos encontros.

As aulas foram ministradas em sala de aula no IFCE, no período vespertino, com três estudantes do sexo masculino e uma estudante do sexo feminino, com a faixa etária entre 20 a 24 anos. A organização desses encontros ocorreu de forma presencial, sendo ministrada dois dias de aulas para cada sequência, abordando o contexto epistêmico- matemático.

Todavia, as aplicações foram realizadas através de situações didáticas fundamentadas na TSD. As situações-problema propostas foram desenvolvidas por meio de questionamentos a partir de imagens construídas no *software* GeoGebra para uma visualização geométrica das sequências propostas, nas quais, posteriormente, ocorreram discussões entre os estudantes, visando a elaboração de estratégias de soluções descritas no quadro branco e/ou papel.

No Quadro 2, trouxemos um quadro-síntese com um inventário dos documentos coletados na pesquisa, referente aos registros em arquivos de áudio e transcrições dos encontros:

Quadro 2- Inventário de documentos da pesquisa

Código	IDENTIFICAÇÃO DO MATERIAL
1- MATERIAL EM ÁUDIO	
AA01	Desenvolvimento da Situação Didática I- sequência de Fibonacci.
AA02	Desenvolvimento da Situação Didática II- sequência de Lucas.
AA03	Desenvolvimento da Situação Didática III- sequência de Pell.
AA04	Desenvolvimento da Situação Didática IV- sequência de Jacobsthal.
AA05	Desenvolvimento da Situação Didática V- sequência de Narayana.
AA06	Desenvolvimento da Situação Didática VI- sequência de Padovan.
AA07	Desenvolvimento da Situação Didática VII- sequência de Perrin.
AA08	Desenvolvimento da Situação Didática VIII- sequência de Mersenne.
AA09	Desenvolvimento da Situação Didática IX- sequência de Oresme.
AA10	Desenvolvimento da Situação Didática X- sequência de Leonardo.
2- TRANSCRIÇÕES DOS ENCONTROS	
TR01	Transcrição do Encontro: Desenvolvimento da Situação Didática I – Duração de 1h42min.
TR02	Transcrição do Encontro: Desenvolvimento da Situação Didática II – Duração de 1h39min.
TR03	Transcrição do Encontro: Desenvolvimento da Situação Didática III– Duração de 1h45min.
TR04	Transcrição do Encontro: Desenvolvimento da Situação Didática IV – Duração de 1h40min.
TR05	Transcrição do Encontro: Desenvolvimento da Situação Didática V – Duração de 1h.

TR06	Transcrição do Encontro: Desenvolvimento da Situação Didática VI – Duração de 1h44min.
TR07	Transcrição do Encontro: Desenvolvimento da Situação Didática VII – Duração de 1h20min.
TR08	Transcrição do Encontro: Desenvolvimento da Situação Didática VIII – Duração de 1h35min.
TR09	Transcrição do Encontro: Desenvolvimento da Situação Didática IX – Duração de 1h22min.
TR10	Transcrição do Encontro: Desenvolvimento da Situação Didática X – Duração de 1h50min.

Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Para a coleta de dados, foram realizados alguns procedimentos, tais como: registros fotográficos durante as produções, gravação de áudio representados pelo Código (AAxx), conforme o Quadro 2, vídeos com as discussões e afirmações realizadas durante as soluções das situações didáticas realizadas pelos estudantes. Para os códigos das transcrições estão situados após cada excerto apresentado com o formato (TR01, 2022) e assim por diante.

Na seção subsequente, apresentou-se os dados e resultados coletados durante a execução na fase da experimentação com o aporte das fases da TSD. Foram apresentados e discutidos baseados nas produções mais relevantes desta pesquisa.

5 DISCUSSÃO DOS DADOS

Com base na dialética da Engenharia Didática, a quarta fase foi análise *a posteriori*, nos quais os dados foram analisados para melhor compreensão das consequências de intervenção da ED no processo de ensino. Essa análise permitiu analisar as situações que foram exploradas e que tenham sido úteis para o ensino das sequências recursivas lineares, observando as falhas que comprometeram as situações propostas, com base na validação dos dados.

Logo, nessa seção discutiu-se observações feitas durante a experimentação, com o intuito de melhorar o entendimento da elaboração das situações didáticas, evidenciando as produções dos estudantes e observando as fases da TSD. Não obstante, vale destacar que um dos objetivos primordiais da pesquisa foi relacionar, em situações didáticas, as identidades das sequências recursivas lineares na forma geométrica com a sua visualização por meio do *software* GeoGebra.

Com o propósito de organizar a aplicação das situações didáticas, as atividades foram propostas aos estudantes por meio de situações-problemas compostas por questões, que puderam estimular o esforço dos alunos para resolvê-las. Nesse sentido, dando destaque às leis de recorrências das sequências recursivas lineares, com a demonstrações de teoremas e identidades, oportunizou-se uma compreensão das aplicações dessas sequências por meio de uma visualização geométrica por meio do *software* GeoGebra.

5.1 Análise *a posteriori* e validação

As situações didáticas viabilizaram a compreensão da representação das identidades das sequências recursivas lineares por meio de uma visualização geométrica. Inicialmente, foi apresentado o contexto histórico para cada sequência, logo em seguida a lei de recorrência, a razão entre os termos das sequências, a equação característica. Posteriormente, as identidades por meio do *software* GeoGebra.

Para estas situações devemos destacar que sempre que é proposta uma sequência, é pedido para que os alunos encontrem a sua recorrência, a razão ente os termos e as identidades que esta seja provada por meio de algumas manipulações algébricas e geométricas, possibilitando a validação formal para testar a veracidade das hipóteses levantadas pelos estudantes, portanto, isso aconteceu de maneira exitosa.

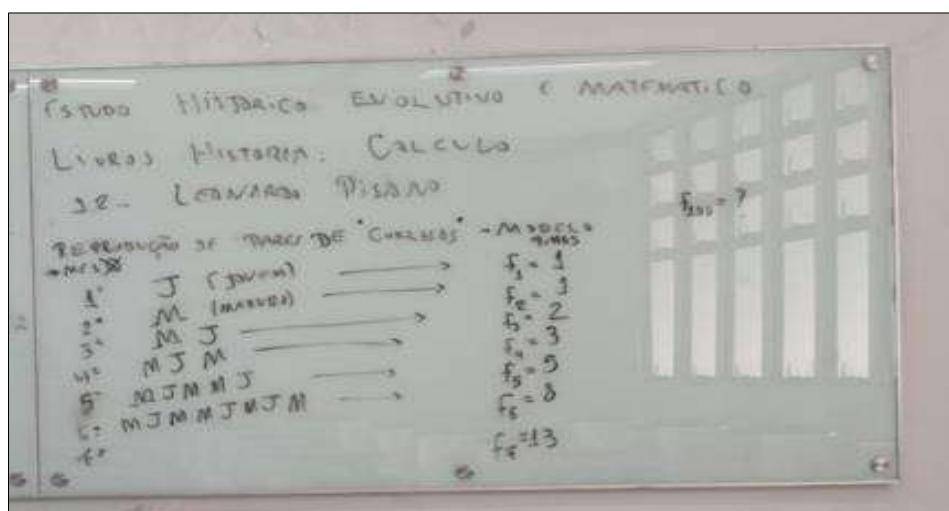
Em alguns casos, foi necessário também analisar possíveis relações entre as sequências para que as propriedades encontradas pudessem ajudar na situação didática seguinte.

Nesse sentido, realizou-se uma análise *a posteriori* avaliou-se e investigou-se os resultados que foram obtidos, considerando algumas variáveis didáticas, para que ocorresse uma contribuição de conhecimento didático durante a transmissão do conteúdo. E ainda, a validação desta pesquisa foi de forma interna, isto é, não foi realizada uma comparação dos dados coletados com produções externas, fundamentada na ED, por meio dos resultados adquiridos da aplicação das situações didáticas.

5.1.1 Validação da Situação didática 1

Para essa situação didática, foram criados alguns questionamentos que estão em torno da lei de recorrência e os números de Fibonacci. Estes questionamentos colocaram os estudantes na fase da ação da TSD, pois eles foram colocados diante da situação- problema, procurando analisá-la e buscando uma solução. Diante disto, foi apresentado aos estudantes o problema que originou a sequência de Fibonacci, a reprodução dos coelhos imortais (WELLS,2005, p.101). Sendo uma forma de organizá-los para execução das outras fases, conforme a Figura 111 a seguir:

Figura 111- Apresentação dos números de Fibonacci

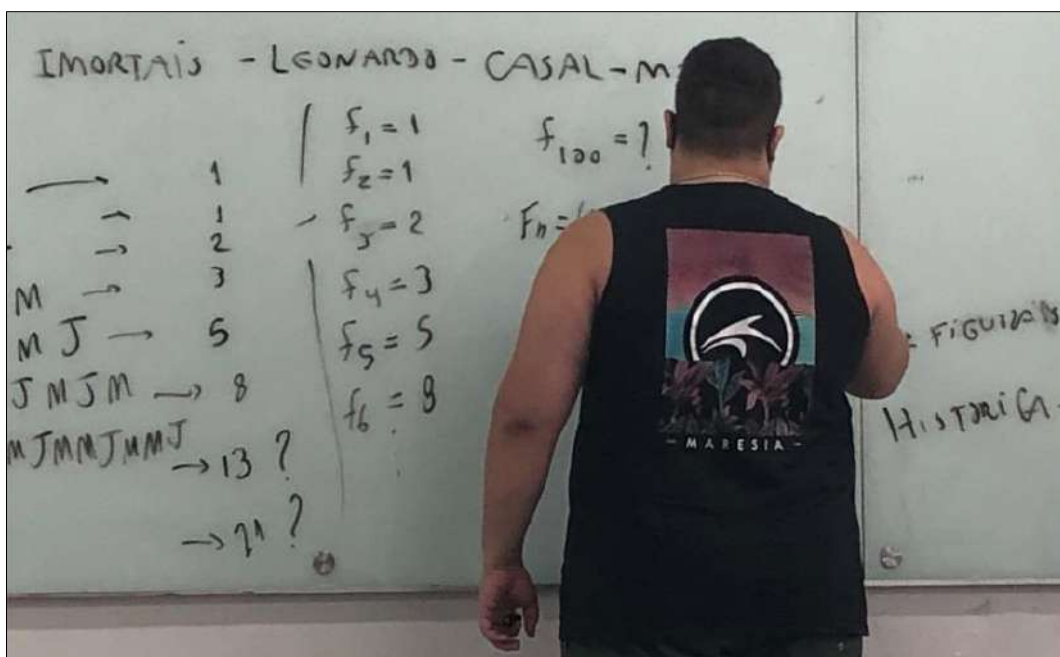


Fonte: Dados da pesquisa (2022)

A Figura 111 apresentou a primeira definição para os números de Fibonacci e as primeiras informações para que os estudantes percebessem a lei de recorrência da sequência de Fibonacci. Nesse momento, o estudante E1, escreveu sua percepção na lousa sobre a lei

de recorrência $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ para $n \geq 1$. Sendo $F_1 = 1, F_2 = 1$, mostrando que a fase da ação e da formulação da ideia ocorre simultaneamente, conforme a Figura 112.

Figura 112- Fase da ação com estudante E1



Fonte: Dados da pesquisa (2022)

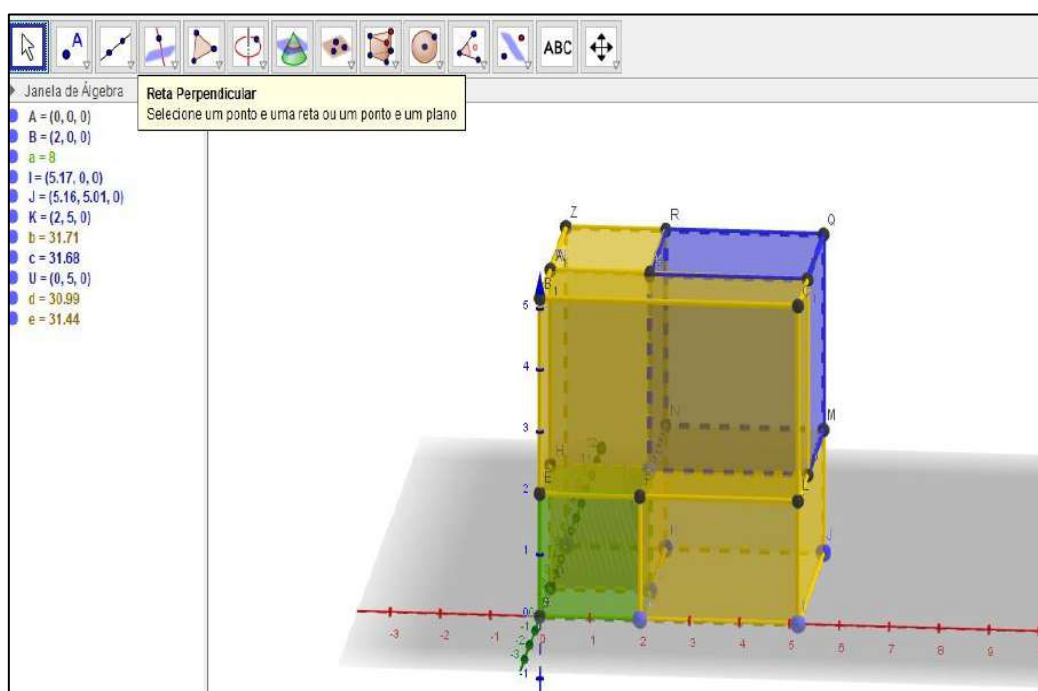
Com base nessas informações, o primeiro questionamento foi lançado: *como esses números de Fibonacci podem ser representados em uma visualização tridimensional?*

Os estudantes E1 e E2 afirmaram:

...O uso de paralelepípedos, pois tem três medidas, altura, largura e comprimento (E1 e E2) (TR01,2022).

A professora/pesquisadora complementou com a informação, de que esses são conhecidos como prismas. Logo, a docente fez outro questionamento, *como esses números de Fibonacci podem estar relacionados a identidade $F_{n+1}^3 = F_n^3 + F_{n-1}^3 + 3F_{n-1}F_nF_{n+1}$, que está representado na Figura 113?*

Figura 113- Representação da identidade de Fibonacci em uma visualização 3D



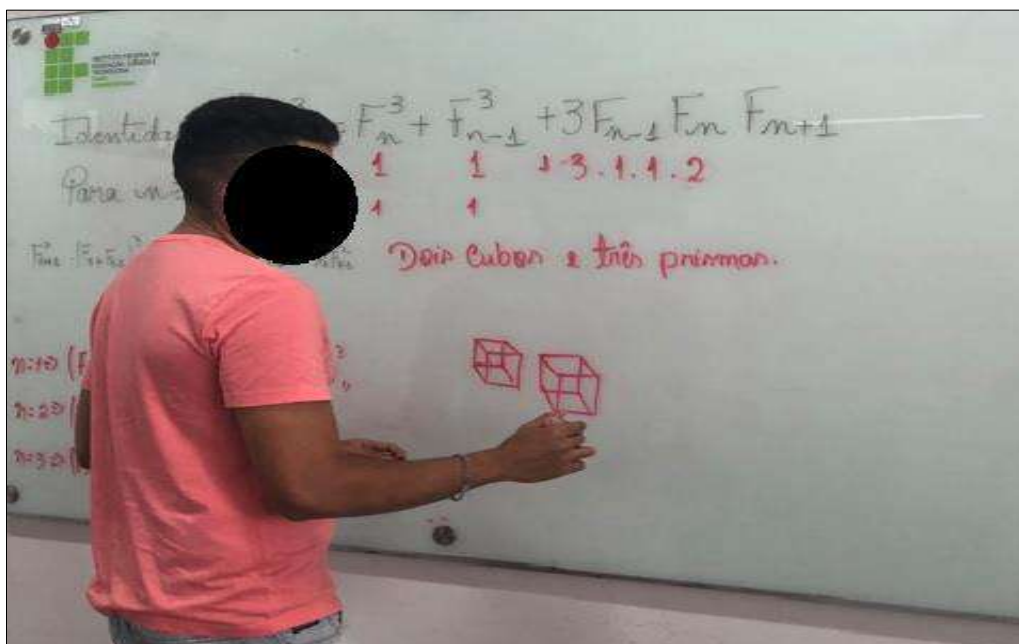
Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Diante desse questionamento, o estudante E2 afirmou a seguinte hipótese:

„Pode fazer também colocando no lugar do n o valor um, depois dois e assim encontramos os números de Fibonacci e provamos aritmeticamente (E2) (TR01).“

Iniciou-se a fase da *formulação*, o estudante E2 realizou a associação dos números de Fibonacci, substituindo os valores na identidade propostas, como mostra a Figura 114.

Figura 114- Fase da formulação do estudante E2



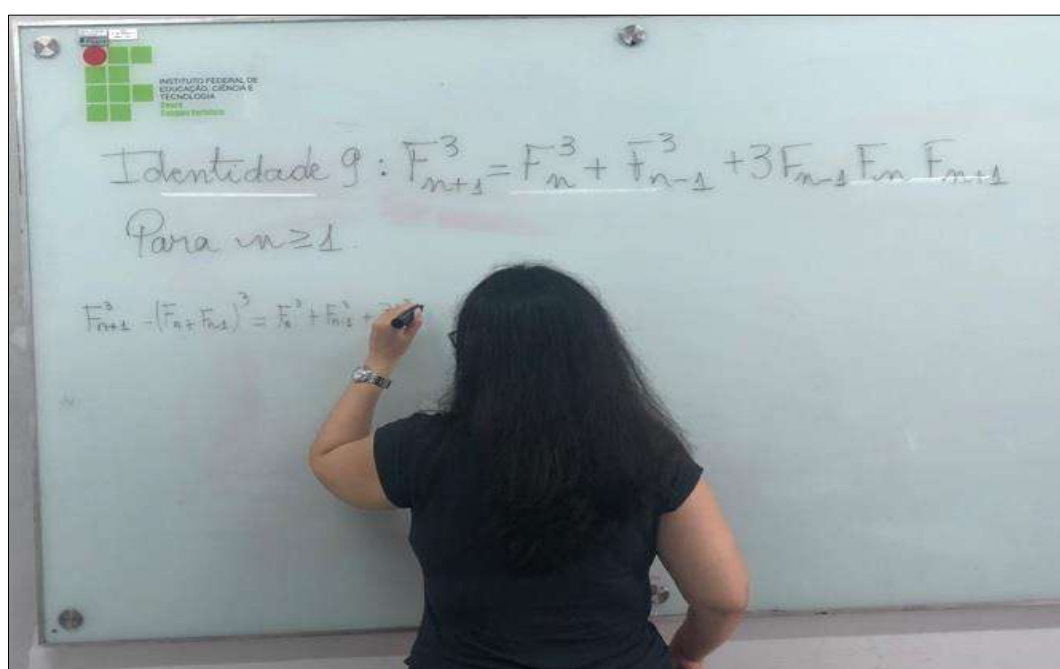
Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Na fase da *formulação*, teve a apropriação das conjecturas encontrando casos particulares através dos valores associados à identidade, que possibilitou a uma possível identificação para uma demonstração desejada. Nesse momento, foi realizado outro questionamento:

- _Como você demonstraria que a veracidade dessa identidade? (professora/pesquisadora)
- _Substituindo no F_{n+1}^3 por $F_n^3 + F_{n-1}^3$, chego lá? (E1)
- _É uma estratégia, vamos tentar? (professora/pesquisadora) (TR01).

Em seguida, os estudantes E3 e E4, fizeram a construção dessa prova no quadro e no caderno respectivamente, conforme as Figuras 115, 116 e 117.

Figura 115-Validação do estudante E3 (1ª parte)



Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Figura 116-Validação do estudante E3 (2ª parte)

$$\begin{aligned}
 F_{n+1}^3 - (F_n + F_{n-1})^3 &= F_n^3 + F_{n-1}^3 + 3F_n^2F_{n-1} + 3F_nF_{n-1}^2 \\
 &= F_n^3 + F_{n-1}^3 + 3F_nF_{n-1}(F_n + F_{n-1}) \\
 &= F_n^3 + F_{n-1}^3 + 3F_{n-1}F_nF_{n+1}
 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Figura 117-Validação do estudante E4

$$\begin{aligned}
 \text{Identidade 1} \\
 F_{n+1}^3 &= F_n^3 + F_{n-1}^3 + 3F_{n-1} \cdot F_n \cdot F_{n+1} \\
 \text{Para } n \geq 1 \\
 (F_n + F_{n-1})^3 &= F_n^3 + 3F_n^2F_{n-1} + 3F_nF_{n-1}^2 + F_{n-1}^3 \\
 &= F_n^3 + F_{n-1}^3 + F_n(2F_nF_{n-1} + F_n \cdot F_{n-1}) + F_{n-1}(F_n \cdot F_{n-1} + 2F_n \cdot F_{n-1}) \\
 &= F_n^3 + F_{n-1}^3 + 3F_nF_{n-1}(F_n + F_{n-1})
 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Nas Figuras 115, 116 e 117 mostraram os estudantes E3 e E4 apresentando uma resposta para a prova de maneira algébrica, utilizando o método da substituição, desde o modelo obtido na recorrência, passando pela soma dos dois termos consecutivos para se formular uma hipótese, até a prova para $n \geq 1$, de acordo Nelsen (2018). Contudo, o estudante E4 afirmou que pode ser também provado de outra forma, porém não apresentou o outro meio que seria o método da indução finita.

Para fase de *institucionalização*, constatou-se que o objetivo dessa situação didática foi alcançado, pois alunos conseguiram fazer a identificação da identidade por meio da visualização geométrica e demonstrando a veracidade de suas hipóteses através da forma algébrica segundo Nelsen (2018).

Como os estudantes já haviam debatido antes de divulgarem seus dados, esta finalização foi feita por meio de um debate rápido, agora com a participação da professora/pesquisadora. A docente, por sua vez, apenas citou os passos tomados, desde a apresentação do problema, até a validação por parte de alguns dos estudantes com a devida explicação.

Para concluir a situação, nessa última fase foi mostrado que essa visualização da identidade na forma geométrica pelo *software* GeoGebra, pode ser construída para qualquer que seja os números de Fibonacci maiores que o primeiro termo da sequência que é igual a um.

5.1.2 Validação da situação didática 2

Dada a resolução da situação didática 1, observamos que esta segunda situação foi rapidamente resolvida, pois tratou de definições que possuíam muitas relações com os números de Fibonacci.

Assim, foram levantados alguns questionamentos para que os estudantes pudessem lidar com a situação didática 2 de maneira a usar esta situação como um elo entre as situações 1 e 2.

A necessidade desta situação esteve no fato de que os estudantes precisaram ter contato com as visualizações bi e tridimensional para relacionarem às identidades propostas, como entendemos que são configurações de muita importância dentro dessas sequências, pois na sequência de Lucas encontrou-se relações com outras sequências com a de Fibonacci e a de Leonardo. Dada essa breve explicação, prosseguimos para a validação desta situação.

De início, a situação foi pensada a partir desses três questionamentos:

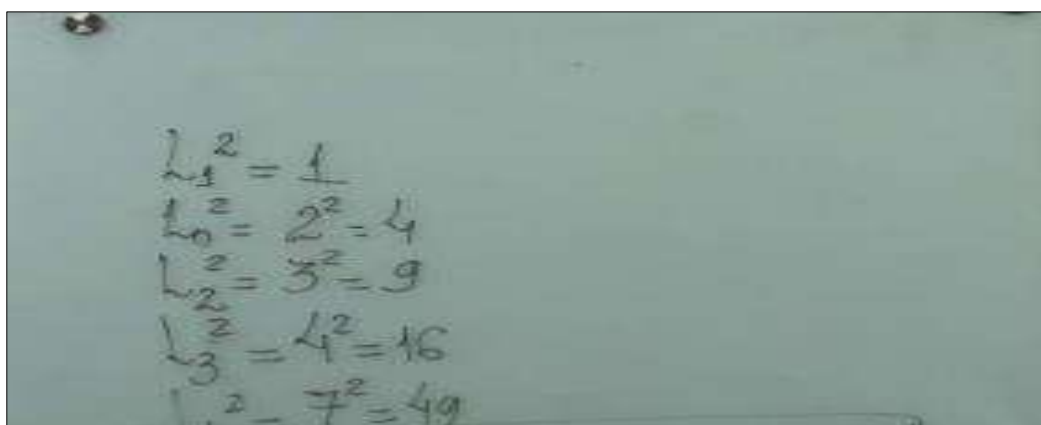
- 1– Qual a identidade de Lucas que pode ser representada através dessa visualização bidimensional?
- 2 – Qual a identidade de Lucas que pode ser representada através dessa visualização tridimensional?
- 3 - De acordo com as identidades de Lucas encontradas, qual a relação com as identidades de Fibonacci?

De início, foi apresentado o contexto histórico sobre Lucas, em seguida a lei de recorrência para encontrar os termos da sequência de Lucas, por conseguinte foi calculada a razão entre esses termos com base em Silva (2017). Logo, o estudante E1 afirmou: “Tendo em vista que os termos dessa sequência de Lucas também convergem para o mesmo número de ouro que é igual a 1,61 aproximadamente (E1) (TR02)”.

Como situação-problema, a professora/pesquisadora mostrou a Figura 33 e fez o primeiro questionamento: *qual a identidade de Lucas que pode ser representada através dessa visualização bidimensional?*

Como fase da *ação*, os estudantes associaram cada número de Lucas a um lado do quadrado da Figura 33, em seguida calcularam a área dos cinco primeiros quadriláteros, como mostrou a Figura 118.

Figura 118- Fase da ação do estudante E1



$$\begin{aligned} L_1^2 &= 1 \\ L_0^2 &= 2^2 = 4 \\ L_2^2 &= 3^2 = 9 \\ L_3^2 &= 4^2 = 16 \\ L_4^2 &= 7^2 = 49 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

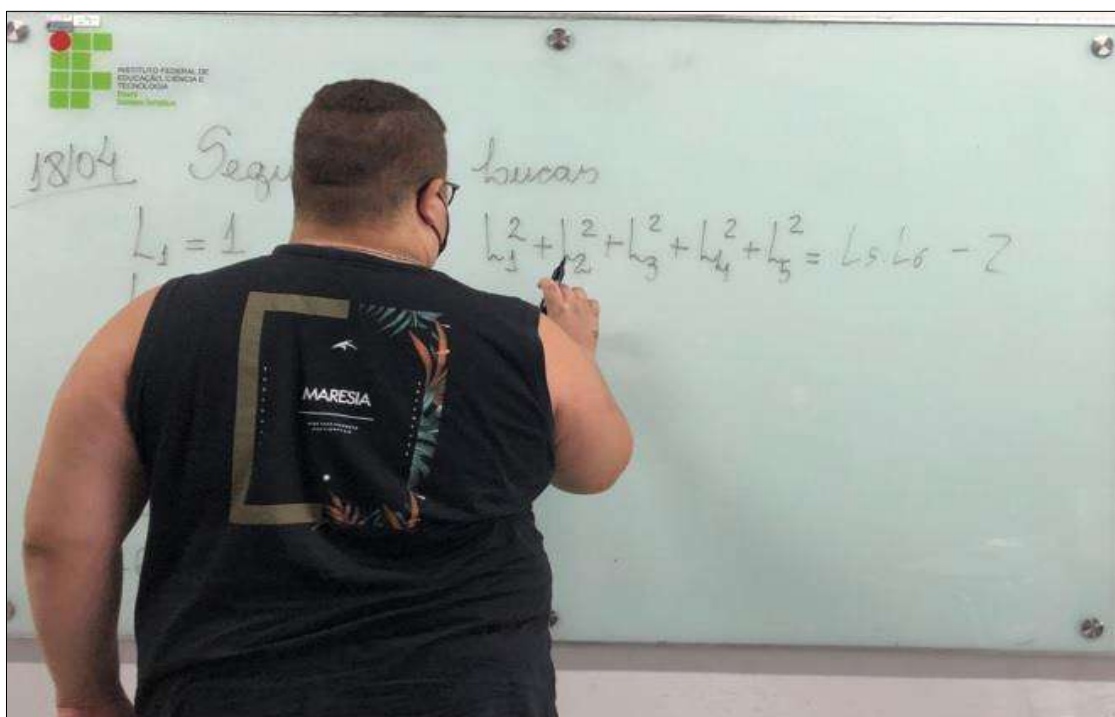
Depois dessa ação, os estudantes começaram uma discussão, essa caracterizou a fase da *formulação*, de como foi a identidade proposta pela Figura 33, com base nos conhecimentos prévio sobre a sequência de Fibonacci. Apresentamos um trecho desse diálogo entre dois estudantes.

- A identidade de Lucas é semelhante a soma dos quadrados de Fibonacci, logo podemos dizer que será a soma dos quadrados de Lucas $L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + \dots + L_n^2 = L_n L_{n+1}$ (E2).

- Acho que está faltando alguma informação, porque observando a figura, existe um quadrado que está sobreposto a outro(E1).
- Verdade! Em cima do quadrado inicial L_0 existem outros dois quadrados que são L_1 e L_2 (E2).
- Então eu acho, que devemos subtrair dois, pois só a metade aparece(E1).
- E como ficaria a escrita dessa identidade? (professora/pesquisadora).
- $L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + \dots + L_n^2 = L_n L_{n+1} - 2$, eu acho...(E1) (TR02).

Dessa maneira, o estudante E1 foi ao quadro fazer uma associação dos cinco primeiros termos da sequência de Lucas para mostrar a hipótese da identidade, conforme as Figuras 119 e 120.

Figura 119- Fase da formulação do estudante E1 (1ª parte)



Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Figura 120- Fase da formulação do estudante E1 (2ª parte)

Sequência de Lucas

$$L_1 = 1$$

$$L_2 = 3$$

$$L_3 = 4$$

$$L_4 = 7$$

$$L_5 = 11$$

$$L_6 = 18$$

$$L_5^2 + L_4^2 + L_3^2 + L_2^2 + L_1^2 = L_5 L_6 - 2$$

$$1^2 + 3^2 + 4^2 + 7^2 + 11^2 = 11 \cdot 18 - 2$$

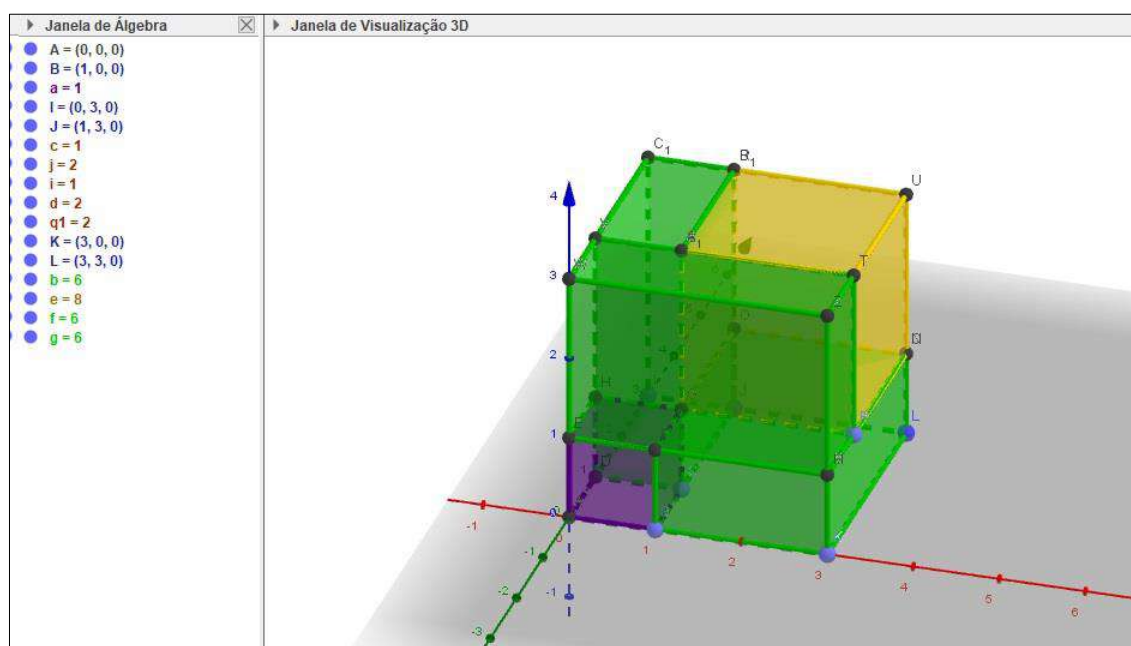
$$1 + 9 + 16 + 49 + 121 = 193 - 2$$

$$190 = 190$$

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

As Figuras 119 e 120, mostraram que a identidade proposta pelo estudante E1, foi validada por meio dos resultados numéricos, porém foi realizado outro questionamento pela professora/pesquisadora: *qual a identidade de Lucas que pode ser representada através dessa visualização tridimensional como mostra a figura 121?*

Figura 121- Representação da identidade de Lucas em uma visualização 3D



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Então, o estudante E2 respondeu:

-Fazemos da mesma forma em que fizemos com a questão de Fibonacci, associamos os três primeiros números de Lucas, a arestas dois cubos e a um prisma, já que ele se repete três vezes(E2).

-Então, represente aqui no quadro para seus colegas possam compreender seu raciocínio! (professora/pesquisadora) (TR02).

Figura 122- Fase da formulação do estudante E2

Handwritten mathematical work on a whiteboard:

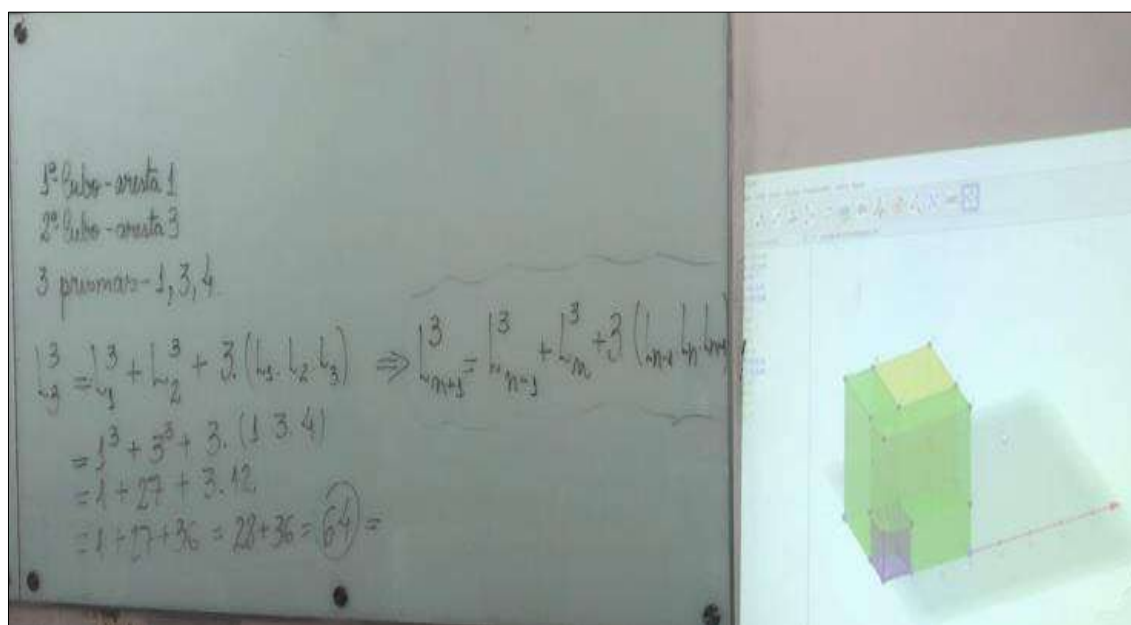
$$\begin{aligned}
 &1^\circ \text{ Cubo} - \text{aresta } 1 \\
 &2^\circ \text{ Cubo} - \text{aresta } 3 \\
 &3 \text{ prismas} - 1, 3, 4 \\
 &L_3 = L_1^3 + L_2^3 + 3(L_1 \cdot L_2 \cdot L_3) \\
 &= 1^3 + 3^3 + 3 \cdot (1 \cdot 3 \cdot 4) \\
 &= 1 + 27 + 3 \cdot 12 \\
 &= 1 + 27 + 36 = 28 + 36 = 64
 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Nesse momento, na fase da *validação*, o estudante E2, validou sua hipótese através dos valores numéricos a partir dos pressupostos de Eves (1969), observamos que foram apresentadas as medidas dos três prismas encontrados na Figura 122, como os número um, três e quatro, mudando de posição à medida que foi se encaixando para a construção de um cubo maior, isto é, existiu um prisma com as medidas, altura uma unidade, largura três unidades e comprimento quatro unidades.

Todavia, outro prisma com altura três unidades, largura quatro unidades e comprimento de uma unidade, bem como o outro paralelepípedo possuiu altura quatro unidades, largura de uma unidade e comprimento três unidades.

Figura 123- Generalização da identidade de Lucas



Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Assim, na Figura 127, mostrou a identidade de Lucas por meio de cubos, validando a hipótese pensada pelo estudante E2. Com base nessas informações, o professor questionou:

-Como as identidades de Lucas encontradas, qual a relação com as identidades de Fibonacci? (professora/pesquisadora)

-Então professora, essas duas identidades são bem semelhantes à de Fibonacci! Pra provar essa 3D é só trocar o F por L, lá na demonstração da identidade de Fibonacci. Isso quer dizer que as outras identidades como a soma dos números de Lucas, pode ser provada da mesma forma? (E1)

-Sim, a sequência de Fibonacci e a de Lucas são semelhantes, devido a contribuição de Lucas nas construções das identidades de Fibonacci e também a utilização da razão áurea na construção da sequência de Lucas (professora/pesquisadora) (TR02).

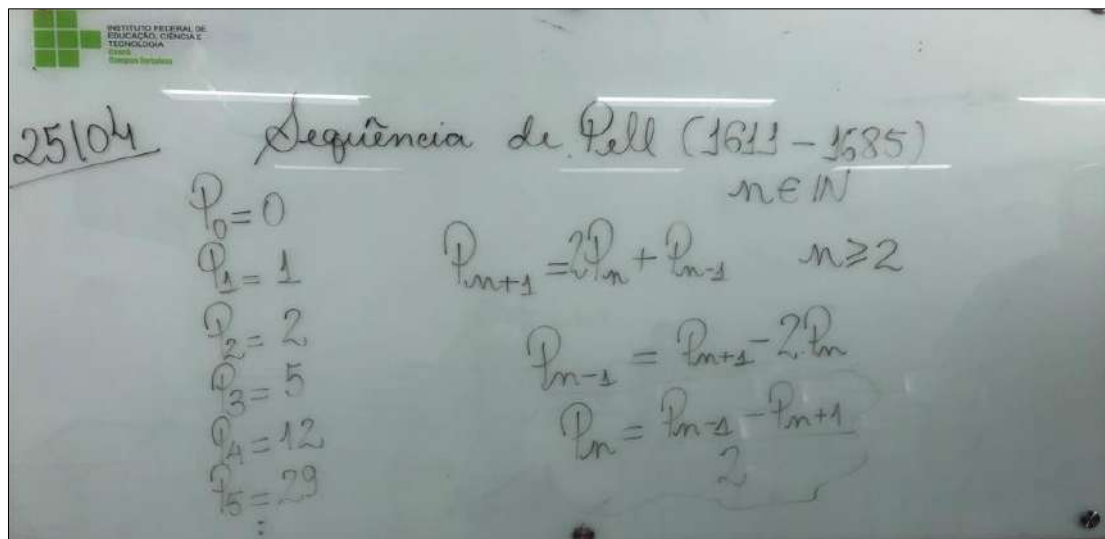
Dessa maneira, o objetivo da situação didática foi alcançado, validando as hipóteses levantadas pelos estudantes. E a fase da *institucionalização*, foi executada a partir do momento que a professora/pesquisadora respondeu ao questionamento do estudante E1. E acrescentou que a soma dos quadrados também constrói uma espiral denominada de Lucas, devido a razão áurea também ter sido utilizada para construção do retângulo por meio da sequência de Lucas.

5.1.3 Validação da situação didática 3

Para iniciar a situação didática 3, foi feita uma contextualização histórica sobre Pell, e suas poucas contribuições devido a sua falta de recursos financeiros segundo Noronha e

Alves (2018). Em seguida foi abordada a lei de recorrência, de acordo com Aydin e Köklü (2017), como mostra a Figura 124, bem como algumas propriedades que se assemelham as de Fibonacci.

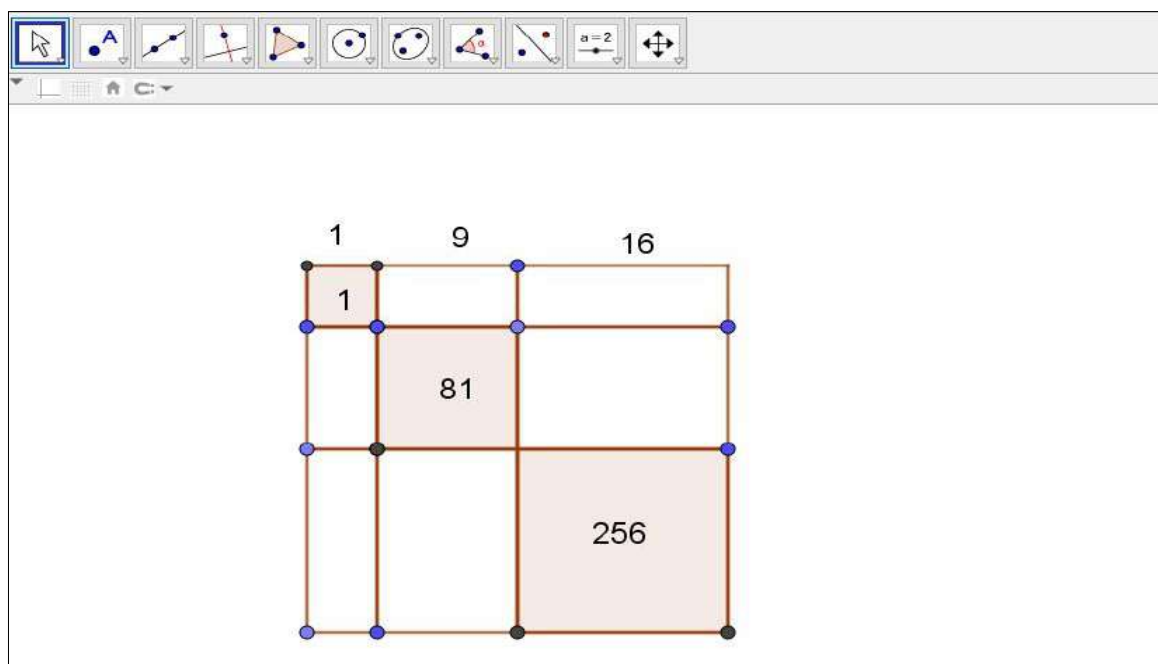
Figura 124- Sequência de Pell



Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Após essas informações, foi apresentada por meio do *software* GeoGebra, a Figura 124, onde trouxe a seguinte pergunta pela professora/pesquisadora: *como podemos generalizar essa identidade utilizando a área de um quadrilátero?*

Figura 125- Identidade de Candidos



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Nesse momento, na fase da *ação*, os estudantes começaram construir as suas hipóteses, porém não conseguiram encontrar de imediato a relação estabelecida com a imagem. Então, com a ajuda da professora/pesquisadora foi apresentada a Figura 81, em que mostrou a generalização dessa identidade. Para representar a área da Figura 81, os alunos observaram que a área total do quadrado será igual à soma das áreas preenchidas.

Figura 126- Fase da formulação do estudante E3

$$= [x^2 + y^2 + (x+y)^2]^2$$

$$= 2 \cdot [x^4 + y^4 + (x+y)^4]$$

Fonte: Dados da pesquisa

Na Figura 126, o estudante E3 validou a identidade de Candido. Com base nas informações de Koshy (2014), fizemos uma associação com os números de Pell, com essa identidade de Candido. Logo, o professor fez esse questionamento aos estudantes, *como fazer essa associação?*

Na fase da *formulação*, ocorreu o diálogo:

- Podemos dizer que o x é igual a P_{n-2} e y igual a $2P_{n-1}$, e se somarmos $x+y$ temos P_n (E1).
- Você pode escrever aqui no quadro essas informações? (professora/pesquisadora) (TR03).

Figura 127- Fase da Formulação do estudante E1. (1ª parte)



Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Figura 128- Fase da Formulação do estudante E1 (2ª parte).

$$\begin{aligned}
 &\text{Identidade de Candido.} \\
 &X = P_{n-2} \quad A^2 = [(P_{n-2})^2 + (2P_{n-1})^2 + (P_n)^2]^2 \text{ ou} \\
 &Y = 2P_{n-1} \\
 &X + Y = P_n \\
 &\quad = 2[(P_{n-2})^4 + (2P_{n-1})^4 + P_n^4]
 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Nas Figuras 127 e 128, o estudante E1 fez associação dos números de Pell com a identidade de Candido. O estudante E4, mostrou como exemplo quando $n = 5$, conforme a Figura 129.

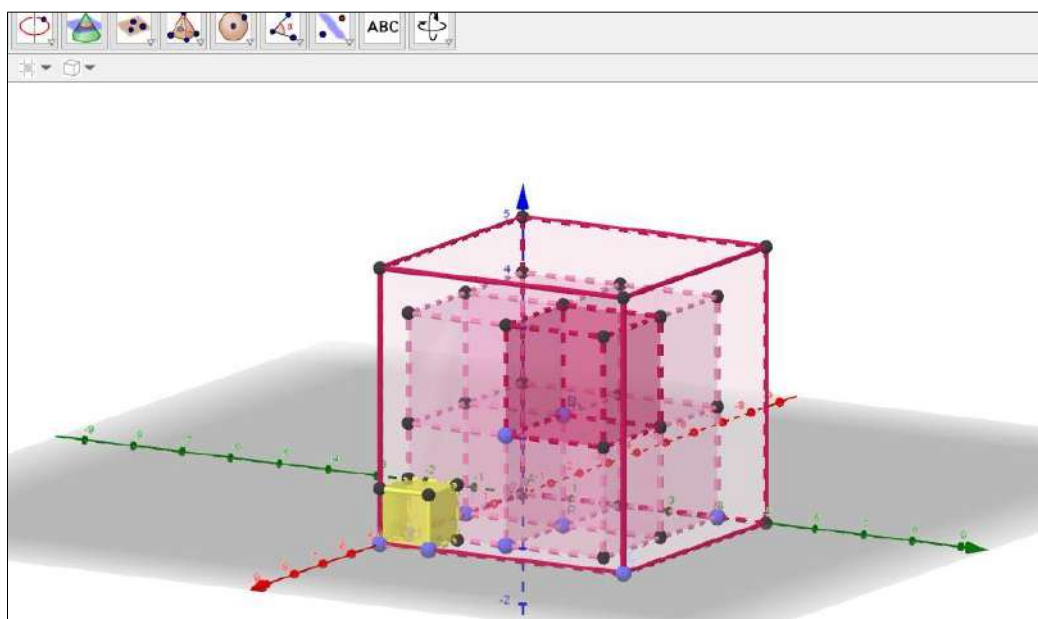
Figura 129- Fase da validação do estudante E3

$$2 \cdot [5^4 + 24^4 + 29^4]$$

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Continuando a situação didática 3, apresentamos a identidade por meio de uma visualização 3D, no qual os estudantes associaram os números de Pell à visualização tridimensional e generalizaram essa identidade.

Figura 130- Identidade de Pell em uma visualização 3D. (1ª parte)



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Com base na Figura 130, nessa primeira parte, os estudantes executaram a fase da *ação e da formulação* simultaneamente, colocando os valores dos volumes dos sólidos e fazendo a relação com os números de Pell, para uma generalização da identidade proposta pela Figura 130. Nesse momento, o estudante E3 mostrou cálculos no quadro, essas informações conforme a Figura 131.

Figura 131- Fase da formulação do estudante E3

$$\Rightarrow 5^3 - 8 \cdot 2^3 - 1 \cdot 1^3 = 125 - 8 \cdot 8 - 1 = 125 - 64 - 1 = 125 - 65 = 60$$

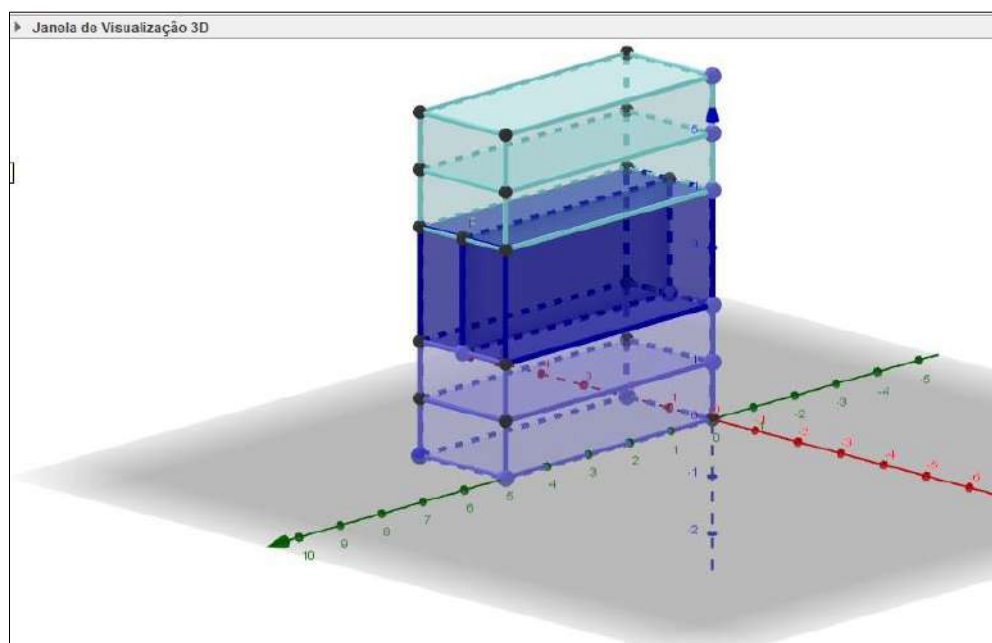
$$P_3^3 - 8 \cdot P_2^3 - P_1^3$$

$$P_n^3 - 8 \cdot P_{n-1}^3 - P_{n-2}^3$$

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Em seguida a professora/pesquisadora, fez um novo questionamento: *Como podemos apresentar o volume da figura 130 relacionando com os números de Pell?* (professora/pesquisadora) (TR03).

Figura 132- Identidade de Pell em uma visualização 3D (2ª parte).



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Diante da Figura 132, retomaram aos diálogos:

- Da mesma forma, associando os números de Pell, as medidas dos prismas, e em seguida fazendo a generalização da identidade (E3).
- Mostre para nós suas hipóteses (professora/pesquisadora) (TR03).

Figura 133- Fase da formulação do estudante E3

$$\Rightarrow 6.(1.2.5) = 6.P_1.P_2.P_3$$

$$607 = 6.(P_{n-1}.P_n.P_{n+1})$$

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Com essas informações conforme a Figura 133, continuou o diálogo entre os estudantes e um questionamento da professora/pesquisadora, de acordo com que é previsto por Brousseau (2008) na fase da *formulação*.

- Observando os valores para as duas identidades, podemos dizer que existe uma condição de igualdade? (E1).
- Acredito que sim, pois dá pra ver que existe na primeira figura um espaço a ser preenchido, logo pode ser associado a essas medidas da segunda figura(E3).
- De acordo com a sua hipótese, como ficaria a generalização dessa identidade? (professora/pesquisadora)

Figura 134- Fase da validação do estudante E3

$$(n+1)^3 - n^3 - (n-1)^3 = 6 \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1)$$

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Portanto, com base na Figura 134, ocorre a fase da *validação*, no qual a generalização realizada pelos estudantes condiz com os estudos de Koshy (2014). Assim, o objetivo dessa situação didática foi alcançado, pois os estudantes conseguiram fazer a associação a identidade de Candido e fizeram a generalização da identidade baseado na igualdade das Figuras 130 e 131, em uma visualização 3D, chegando a uma conclusão, conforme a Figura 134.

A professora/pesquisadora entrou tomou à frente novamente, que caracterizou a fase da *institucionalização* para validar os resultados, ressaltando a importância do GeoGebra para a compreensão dessa identidade, pois sem esse recurso tecnológico a percepção teria sido mais difícil.

5.1.4 Validação da situação didática 4

Para o desenvolvimento das ações dessa situação didática, foram apresentadas as definições da lei de recorrência e de ladrilhos, em como os teoremas segundo Koshy (2019) e Craveiro (2004) para auxiliar nas construções das hipóteses dos estudantes.

De início foi feito um questionamento através de uma situação-problema pela professora/pesquisadora:

-A partir dessas informações, pensamos em uma visualização 3D, por meio de ladrilhos, um número de maneiras de preencher os espaços com as medidas $2 \times 2 \times n$ com uma figura de medidas $1 \times 2 \times 2$? (TR04).

Assim, começa-se a fase da *ação*, no qual os estudantes observaram a Figura 95, para melhor entendimento da construção. Nesse momento os estudantes começaram um diálogo para construir uma solução para situação-problema proposta:

-Já foram colocados três ladrilhos então o próximo poderia ser formado por um quadrado 3×3 (E2).

-E como seria essa figura? (professora/pesquisadora)

-Seria a mesma coisa cinco quadradinhos um em cima do outro, não sei se é..., mas você entendeu? (E3)

-Não consigo encaixar seis quadrinhos desses, de forma que continue sendo esse formato do quadrado. Sempre fica uma coisa diferente, por exemplo se eu colocar um quadrado aqui e preencher com os ladrilhos 1,2,3,4 e 5 fica sempre sobrando um. Não sei como preencher isso e deixar simétrico. [...] Tô pensando! Qualquer forma que eu for colocar vai ficar sobrando. (E2)

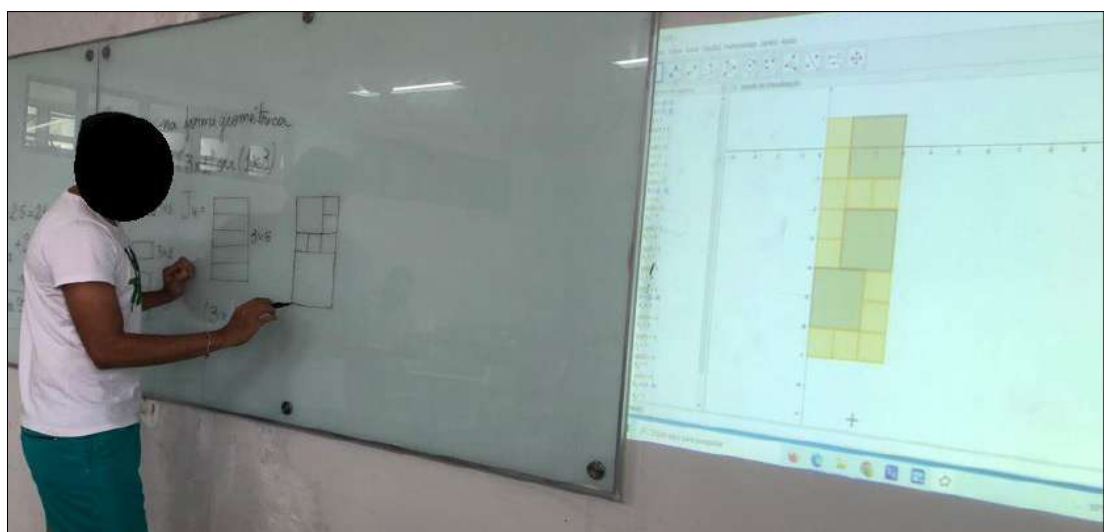
_E, se fosse com o quadrado 3x3? (E1)

_Posso tentar! Mas 3x3 dá. Teria que colocar os ladrilhos juntos ou posso colocar separado? (E2)

_Acho que separado dá certo (E1) (TR04).

Com esse confronto de ideias, ocorreu a fase da *formulação*, na qual os estudantes tentaram encontrar uma solução para a situação-problema proposta, e conforme a Figura 135 mostrou essa fase sendo concebida pelo estudante E2.

Figura 135- Fase da formulação do estudante E2



Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Nesse momento, de acordo com a Figura 135, o estudante E2 concluiu que foi necessário um ladrilho 3x6 para construir uma visualização 3D. Mas para responder ao questionamento inicial, os estudantes observaram também a Figura 95.

Observando a Figura 43 que mostrou a representação geométrica do Teorema 19 segundo Koshy (2019), os alunos deduziram, por meio de tentativas sucessivas de construções no quadro, que a continuação dessa imagem foi uma combinação de 2x6. Dessa maneira, puderam concluir que em uma construção 3D teria que ter duas faces baseadas na Figura 95 e mais duas fases na Figura 96. E para validar essa afirmação o estudante E2 relatou:

-Fazendo a associação $a_n = b_n = J_{n+1}$, observando a Figura 95 e a Figura 96, para provar a construção 3D. Da mesma maneira, ilustramos essa pequena cadeia de igualdades usando uma prova bijetiva, logo com a união dessas figuras, podemos mostrar na Figura 30 essa visualização tridimensional(E2) (TR04).

Dessa maneira, na fase da *validação*, a situação problema foi validada através das conclusões encontradas pelos alunos, chegando à construção da Figura 97, que representa uma visualização tridimensional da sequência de Jacobsthal de acordo com Koshy (2019).

Com base nessas informações e aliadas à Figura 97, a professora/pesquisadora destacou que, à medida que a construção vai aumentando, maior foi a possibilidade de uma combinação $2 \times 2 \times n$ com a união da combinação $1 \times 2 \times 2$, e isso só foi possível devido o suporte dado pelo *software* GeoGebra, caracterizando a fase da *institucionalização*.

Por fim, o objetivo da situação didática 4 foi alcançado, pois os estudantes puderam entender a concepção dos Teoremas 19 e 20, bem como participaram ativamente da construção bi e tridimensional associando aos termos da sequência de Jacobsthal que foi explorada durante a aula.

5.1.5 Validação da situação didática 5

Dada a resolução da situação didática 4, observamos que esta quinta situação foi rapidamente resolvida, pois tratou-se de definições de ladrilhos que ajudaram na construção da identidade de Narayana.

Assim, deixamos alguns questionamentos para que os estudantes pudessem solucionar a situação didática 5 de tal maneira, sendo necessário usar os conhecimentos adquiridos para realizar um elo entre as situações didáticas 4 e 5.

Depois da apresentação do contexto histórico da sequência de Narayana e da lei de recorrência, com base em Cerda-Morales (2018), foi feita a seguinte pergunta aos estudantes:

-Uma vaca dá à luz a um bezerro todos os anos. O bezerro por sua vez dá à luz a outro bezerro quando tem três anos de idade. Qual o número de bezeros produzidos por uma vaca em 20 anos? (professora/pesquisadora) (TR05).

A partir desse questionamento, foi iniciado a fase da *ação*, os estudantes reconheceram que essa indagação, foi semelhante ao problema dos coelhos imortais, abordado durante a aula, em que foram explorados os números de Fibonacci. Logo, começou a discussão para a resolução dessa situação-problema.

[...] Professora, eu acho que é 1278 vacas. (E1)

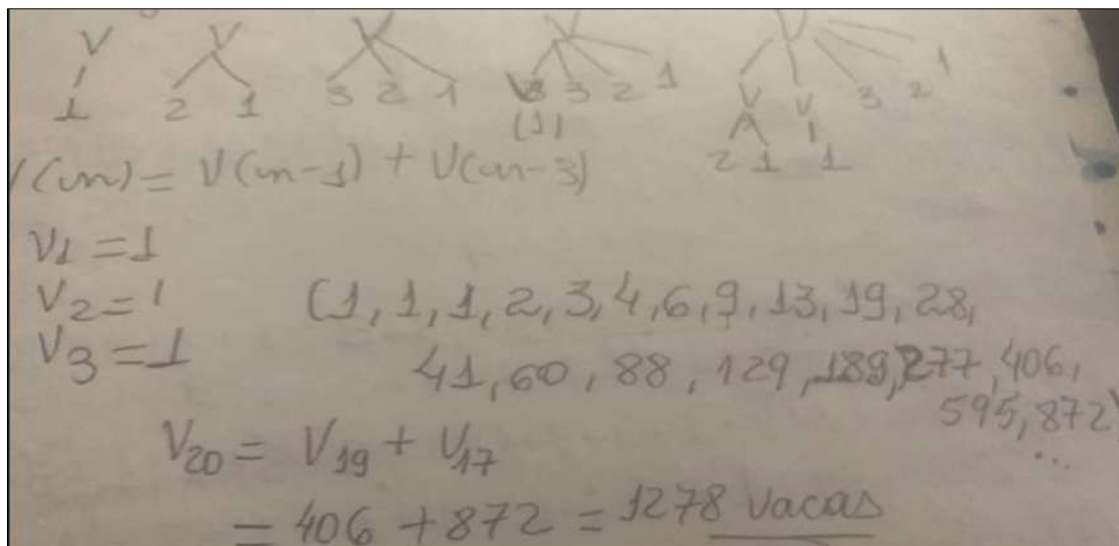
-Como você chegou a esse resultado? (professora/pesquisadora)

-Eu escrevi aqui, um esboço como seria, não tá muito organizado, mas... (E3) (TR05).

Nesse momento, a Figura 136 mostrou a construção do estudante E3, por meio de combinação e tentativas até chegar à solução relatada pelo colega E1. Essas informações

iniciais foram reconhecidas com a fase da ação, o instante em que ocorreram a apropriação da situação-problema e o levantamento das hipóteses, nesse caso caracterizando a fase da *formulação*.

Figura 136- Fase da ação do estudante E3



Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Na Figura 136, o estudante E3 utilizou a lei de recorrência, que tinha sido apresentada pela professora/pesquisadora no início da aula, essa lei ajuda a encontrar os termos da sequência de Narayana e, posteriormente, resolver a situação-problema proposto. Nesse momento, o professor mostrou as Figuras 98, 99 e 100 para os estudantes e perguntou: *como podemos associar esses ladrilhos 3x1 aos números de Narayana?*

Com as observações das Figuras 98, 99 e 100, os estudantes formularam a hipótese que relacionaram os ladrilhos aos números de Narayana, iniciando a fase da formulação. Nesse momento, por meio de uma linguagem informal Brousseau (2008), tentou-se encontrar a solução para a situação-problema, ocorrendo um diálogo ente os estudantes.

-A representação 3x4 tem três possibilidades: um retângulo 3x1 junto ao quadrado 3x3; um quadrado 3x3 e um retângulo 3x1; e quatro retângulos 3x1 (E4).

-E quantas possibilidades de construir a representação 3x 6? (professora/pesquisadora)

-Acredito que são seis possibilidades (E1).

-Quais seriam? Você pode demonstrar? (professora/pesquisadora) (TR05)

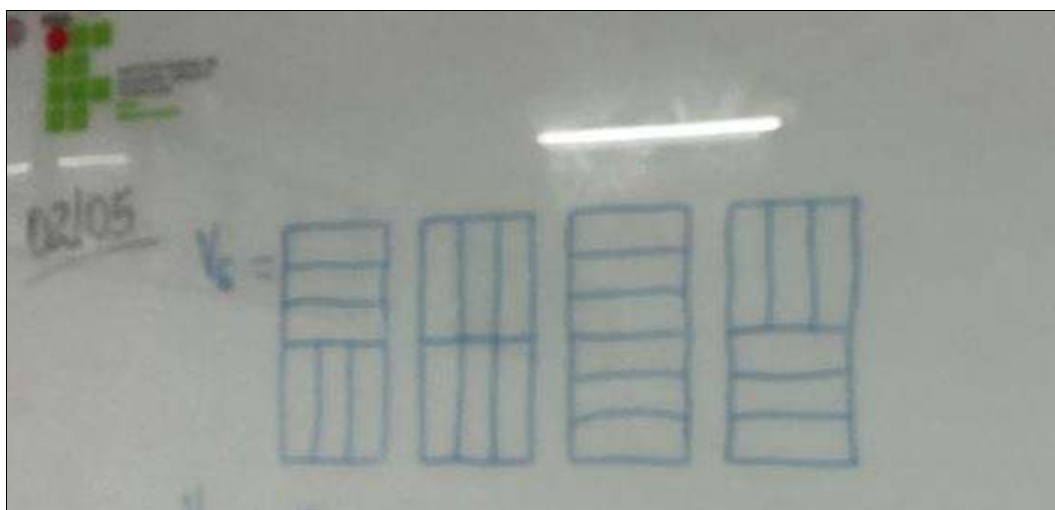
Assim, o estudante E1 tentou demonstrar a sua resposta no quadro, por meio de imagens, relacionando os números de Narayana a um ladrilho 3x1 para a representação das seis possibilidades como mostra a Figura 137.

Figura 137- Fase da formulação do estudante E1



Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Figura 138- Representação 3x6 incompleta



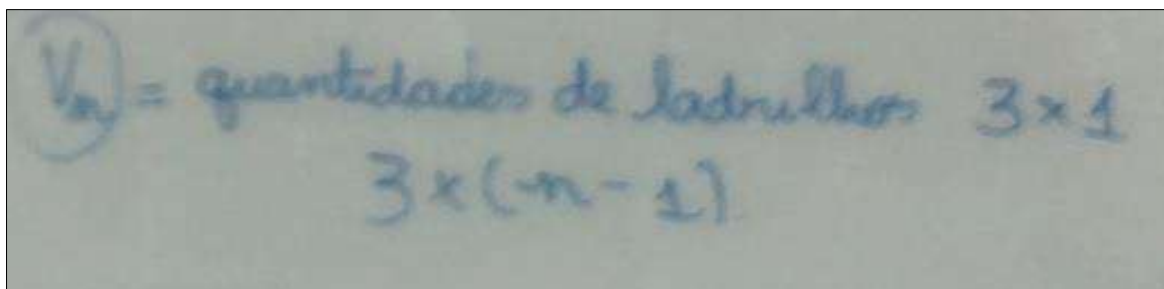
Fonte: Dados da pesquisa (2022)

As Figuras 137 e 138 mostraram a tentativa do estudante E1 ao representar a combinação 3x6, porém a Figura 138 ficou incompleta, pois o estudante E1 não conseguiu visualizar as outras duas imagens, totalizando as seis combinações possíveis. Logo, o estudante E2 ajudou o colega de sala através da afirmação:

- E1 faltou as combinações de um retângulo 3x1, com um quadrado 3x3 e dois retângulos 3x1. Também pode ser feito, dois retângulos 3x1, com um quadrado 3x3 e um retângulo 3x1(E2).
- E quantas representações seriam 3x7? (professora/pesquisadora)
- Seriam nove possibilidades(E2).
- Por quê? Você pode demonstrar? (professora/pesquisadora)
- Cada quantidade de representações dessa, está associada a um número da sequência de Narayana. [...] Não dá pra representar são muitas(E2).
- Então, alguém pode fazer a generalização dessa identidade? (professora/pesquisadora) (TR05).

Diante desse questionamento, os estudantes, em uma linguagem matemática, apresentaram, a fase da *validação*, confirmando as conjecturas levantadas durante a solução da situação- problema.

Figura 139- Fase da validação do estudante E3

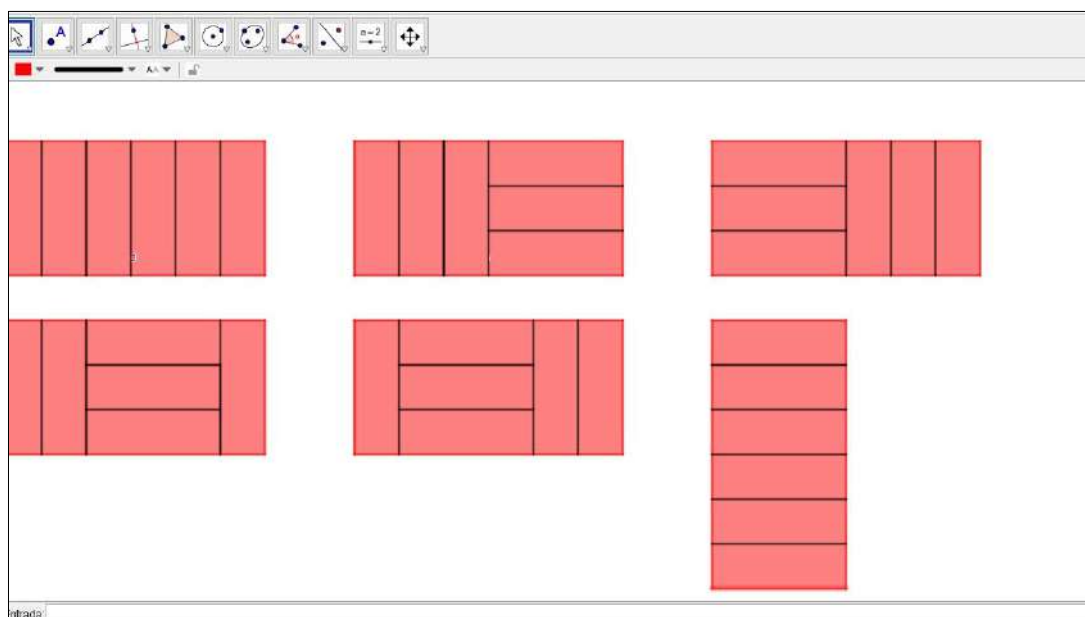


Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Nesse momento, o estudante E3 validou a informação repassada pelo seu colega e a professora/pesquisadora na fase da *institucionalização*, mostrou o principal objetivo dessa situação didática que foram as identidades relacionadas às sequências de Narayana, apresentadas por representações de combinações.

Nessa fase da institucionalização, a professora/pesquisadora mostrou as Figuras 140 e 141 por meio do GeoGebra a solução dos questionamentos levantados durante a situação didática 5, em que os alunos não conseguiram apresentar mediante as imagens construídas no quadro.

Figura 140-Representação 3x6 completa

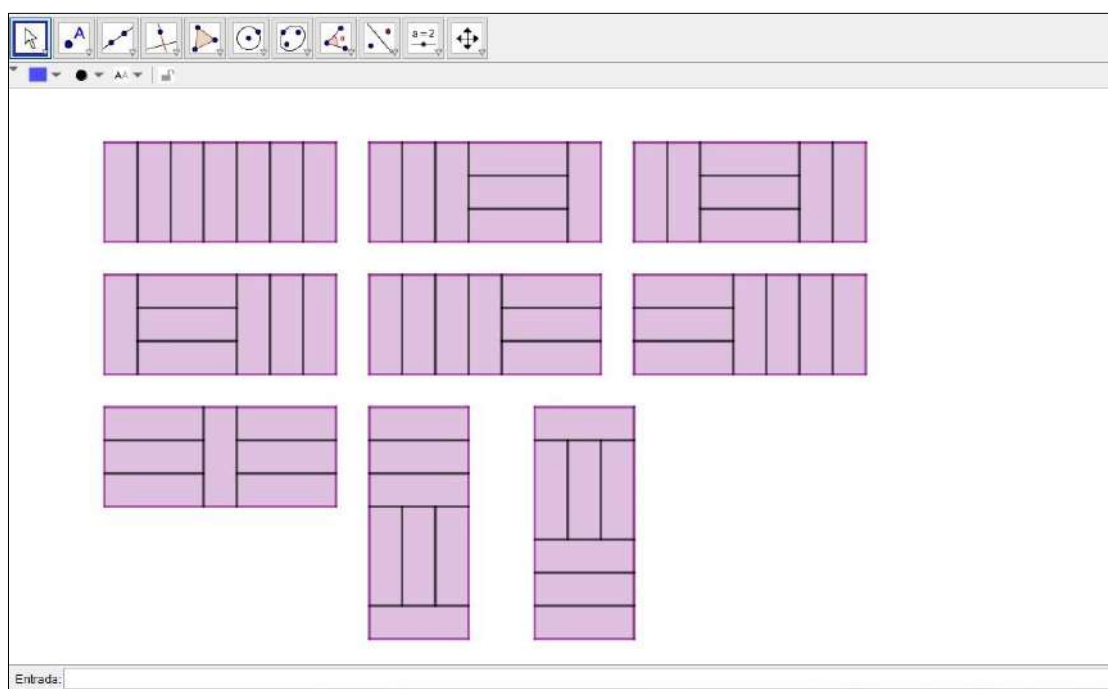


Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Essa representação 3×6 , apresentada pela Figura 140, estiveram as seis possibilidades que foram pensadas de forma algébrica, porém o estudante E1 não conseguiu concluir, mas foi relatada verbalmente pelo estudante E2.

Já na Figura 141, apresentou-se as nove possibilidades de uma representação 3×7 , que foi determinada pelo estudante E2, porém não foi desenhada de forma geométrica.

Figura 141 -Representação 3×7



Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Mesmo sem completar representação geométrica, os estudantes conseguiram compreender a identidade proposta relacionadas com os números de Narayana, tendo êxito no objetivo pensado na análise *a priori*.

A situação didática 5 estimulou os estudantes a fazerem uma ligação da álgebra com a geometria, facilitando a interpretação da questão e dando subsídios para uma prática exitosa, a partir dessas construções realizadas no *software* GeoGebra, tornando possível a apresentação das combinações relacionadas à sequência de Narayana.

5.1.6 Validação da situação didática 6

Diante das situações já apresentadas, discutiu-se a apresentação de uma visualização bidimensional dos números de Padovan.

Em se tratando dos números de Padovan, ocorreu a primeira dimensão, em que essa foi representada pela lei de recorrência segundo Vieira e Alves (2020). A segunda dimensão é formada pela associação aos triângulos equiláteros de acordo com Edgar e Nacin (2021).

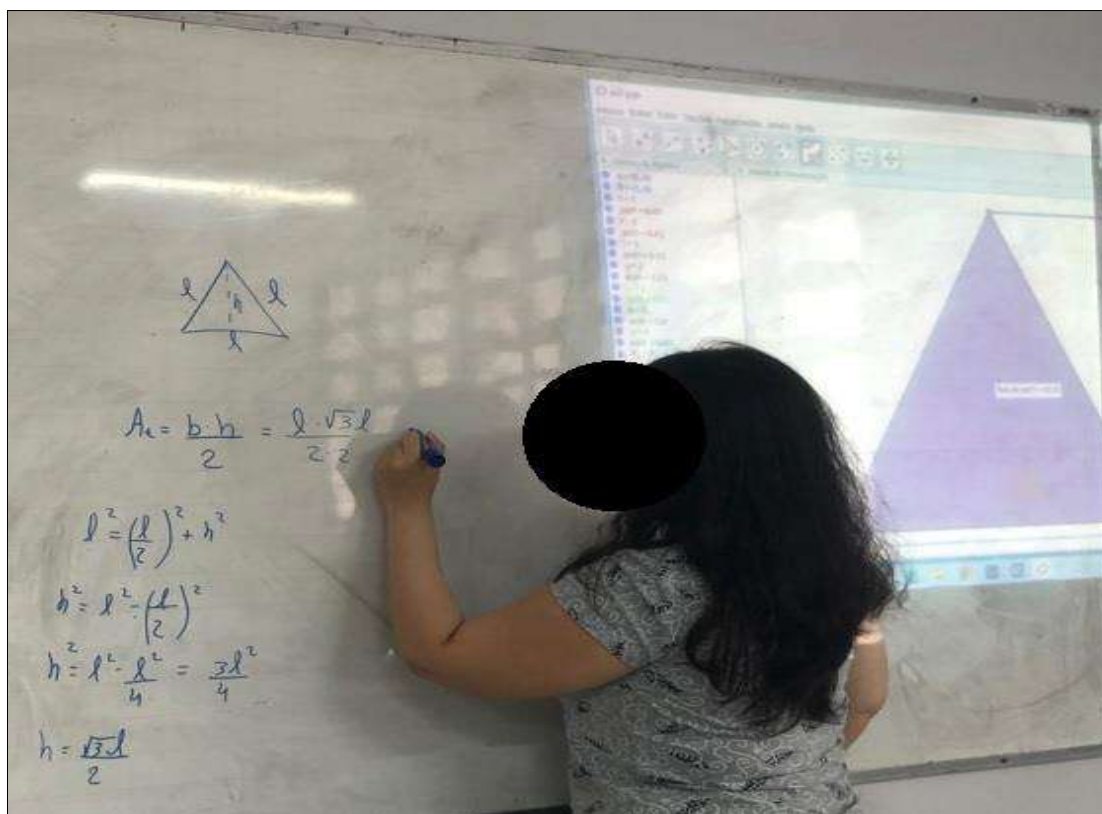
Para iniciarmos a aula, começamos abordando o contexto histórico sobre Cordonnier e Padovan, em seguida a lei de recorrência que define os números de Padovan e a razão entre os seus termos, fazendo uma relação com o número plástico ou também conhecido como número radiante (VIEIRA; ALVES, 2020).

Por conseguinte, mostramos a Figura 101, com o intuito de observar a construção dos oitos primeiros termos da sequência de Padovan por meio do GeoGebra.

Assim, os estudantes puderam observar a associação dos números de Padovan com o lado de cada triângulo equilátero proposto e à medida que ocorre a construção de cada termo dessa sequência, construiu-se uma espiral denominada também de Padovan.

Para a fase da *ação*, foi solicitado que o estudante E3 fizesse a demonstração da área do triângulo equilátero para ajudar na prova das identidades, conforme a Figura 142.

Figura 142– Fase da ação do estudante E3



Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Com essa demonstração realizada pelo estudante E3, na Figura 14, pudemos considerar uma constante para o valor de $\frac{\sqrt{3}}{4}$, que chamamos de C para facilitar na prova da identidade proposta. Para formulação das conjecturas dos estudantes, fase da *formulação*, foi apresentada a Figura 102, com o propósito de definir uma identidade para os termos da sequência de Padovan como condição de $n \geq 7$, com base em Edgar e Nacin (2021).

Para a compreensão dessa identidade, foi solicitado aos estudantes que escolhessem um valor para n maior ou igual a sete, conforme as Figuras 143 e 144, com o intuito de formular as hipóteses para construção do conhecimento, a fim de encontrar subsídios para a demonstração da próxima identidade envolvendo também a área do triângulo equilátero.

Figura 143- Fase da Formulação do estudante E4

• Identidade, $n \geq 7$

$$Pa_n^2 = 2Pa_{n-2}^2 + 2Pa_{n-3}^2 - Pa_{n-7}^2$$

$n=7 \Rightarrow Pa_7^2 = 2Pa_5^2 + 2Pa_4^2 - Pa_0^2$

$$4^2 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 - 0$$

$$16 = 16$$

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Nessa formulação, descrita na Figura 143, foi escolhido o valor de n igual a sete, para mostrar essa identidade algebricamente, tentando associar aos termos da Figura 110, que esteve representada geometricamente. Mas, o estudante E1 também escolheu um valor diferente que foi n igual a onze, como mostra a Figura 144.

Figura 144- Fase da Formulação do estudante E1

$n=11$

$$Pa_{11}^2 = 2Pa_9^2 + 2Pa_8^2 - Pa_4^2 \Rightarrow (12)^2 = 2 \cdot (7)^2 + 2 \cdot (5)^2 - (2)^2$$

$$= 2 \cdot 49 + 2 \cdot 25 - 4 = 98 + 50 - 4 = 144$$

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Após essas substituições, o estudante E1 fez a seguinte afirmação:

-Então professora, quer dizer que para determinar o próximo termo, no caso o décimo primeiro, será o somatório das duas vezes dos termos nove e oito, menos o termo quatro? Desse jeito, podemos observar que os termos oito e nove nos triângulos não são preenchidos, mas o quarto triângulo é (E1) (TR06).

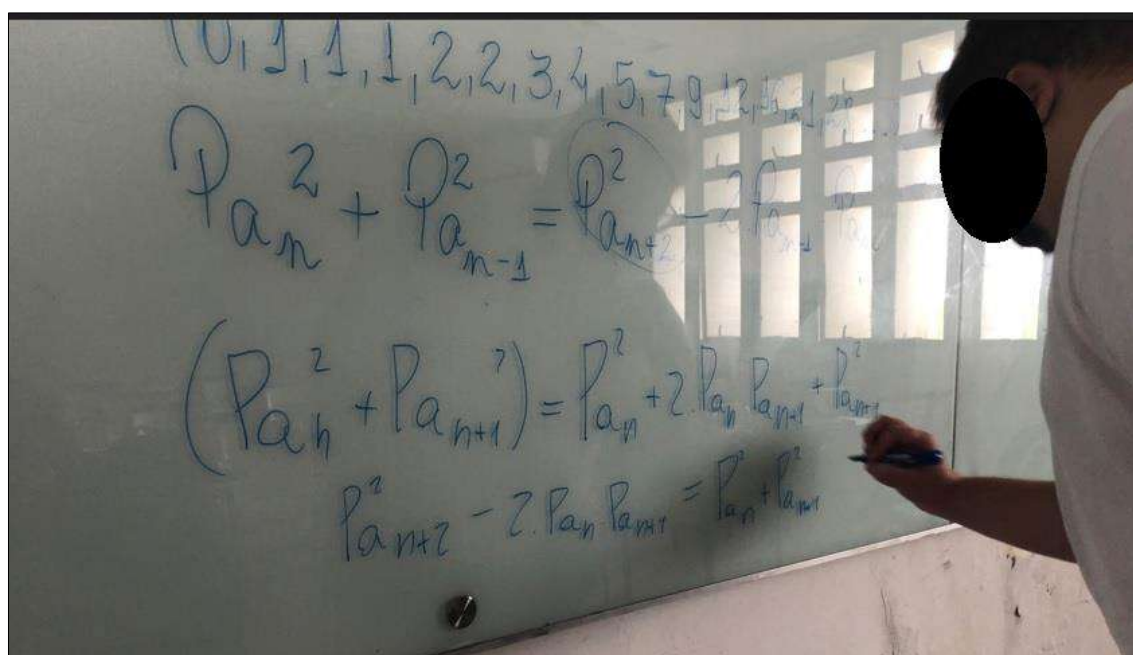
Logo, a professora/pesquisadora confirmou a informação e perguntou:

-Baseado nessas informações, em que você acabou de falar, como podemos representar usando a área do triângulo equilátero? (professora/pesquisadora)
-É só acrescentar a constante C em todos os termos da identidade (E1) (TR06).

Assim, com o propósito de validar essa afirmação, a professora/pesquisadora pediu ao estudante E1 que fizesse a demonstração utilizando uma nova propriedade com base na Figura 103. Essa imagem mostrou a relação dos nove primeiros termos da sequência em uma representação geométrica.

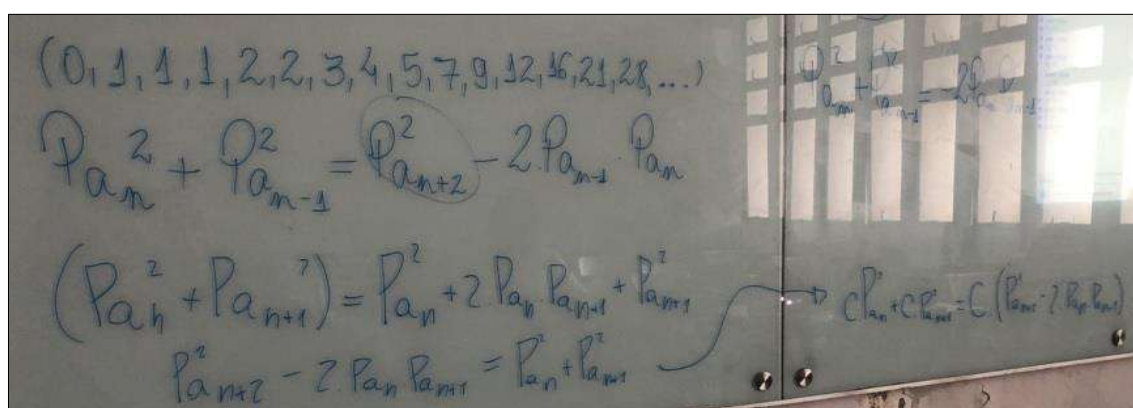
Nessa nova identidade proposta, determinou o somatório do quadrado dos dois termos consecutivos, como mostrou a Figura 103, que pode ser representada pelo Teorema 21 igual a $Pa_n^2 + Pa_{n-1}^2 = Pa_{n+2}^2 - 2Pa_{n-1} \cdot Pa_n$, para $n \geq 1$. O estudante E1 desenvolveu a prova dessa propriedade utilizando a área dos triângulos, como mostrou as Figuras 145 e 146.

Figura 145- Fase da validação do estudante E1 (1ª parte)



Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Figura 146- Fase da validação do estudante E1 (2ª parte)

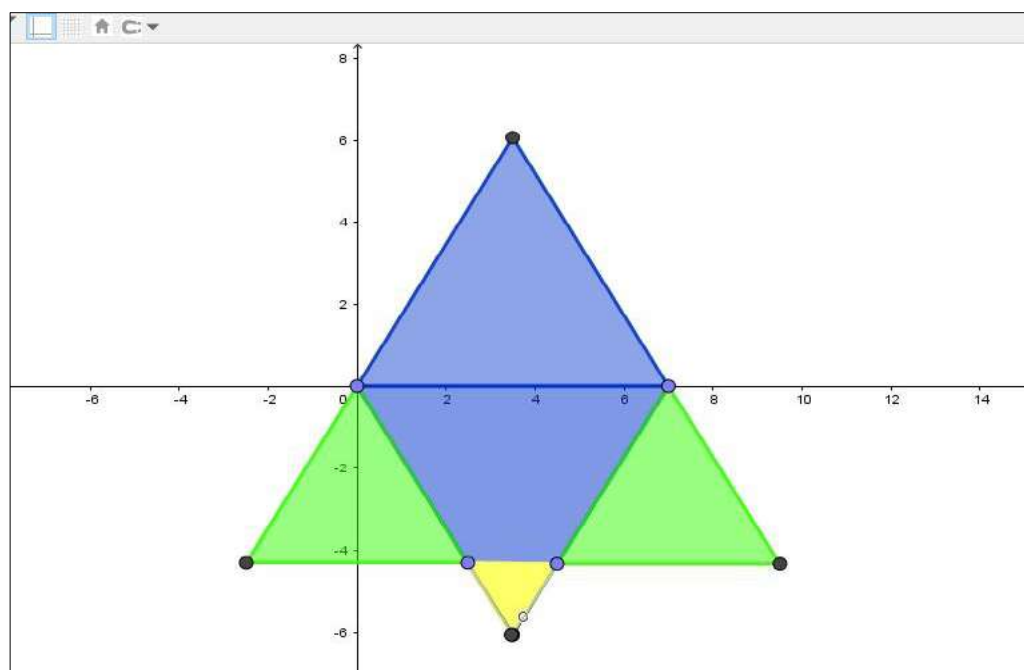


Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Portanto, na fase da validação, ocorreu a demonstração do Teorema 21 explorado nas Figuras 145 e 146, por meio de uma linguagem formal, validando que existe uma relação entre os números de Padovan e a área do triângulo equilátero (EDGAR; NACIN, 2021).

Como fase de *institucionalização*, a professora/pesquisadora relatou que existem outras identidades que podem ser demonstradas utilizando essa constante C e que a identidade calculada algebricamente pelo estudante E1 na Figura 144, pode ser apresentada de forma geométrica através da Figura 147.

Figura 147- Fase de institucionalização



Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Após a apresentação da Figura 147, os estudantes conseguiram visualizar a identidade proposta por meio triângulos, fazendo uma relação entre as Figura 110 e 111 apresentadas, alcançando o objetivo da situação didática 6.

5.1.7 Validação da situação didática 7

Com as informações obtidas durante a execução na situação didática 6, essa relação entre a sequência de Perrin e Padovan, estabeleceu-se quase de forma imediata. Então, para iniciar a aula, a professora/pesquisadora apresentou a Figura 104, que mostrou a sequência de Perrin em uma visualização bidimensional utilizando o *software* GeoGebra com um breve contexto histórico segundo Manguiera (2022).

Para a fase da *ação*, a professora/pesquisadora pediu aos estudantes que observassem a Figura 104, enquanto apresentava a lei de recorrência $Pe_n = Pe_{n-2} + Pe_{n-3}$, para $n \geq 3$.

Como fase de *formulação*, os estudantes calcularam os treze primeiros termos da sequência de Perrin, conforme a Figura 148, sabendo que $Pe_0 = 3$, $Pe_1 = 0$ e $Pe_2 = 2$.

Figura 148- Fase da ação do estudante E3

$Pe_0 = 3; Pe_1 = 0; Pe_2 = 2$
 $Pe_n = Pe_{n-2} + Pe_{n-3} \quad n \geq 3$
 $Pe_3 = Pe_{3-2} + Pe_{3-3} = Pe_1 + Pe_0 = 3$
 $Pe_4 = Pe_{4-2} + Pe_{4-3} = Pe_2 + Pe_1 = 2 + 0 = 2$
 $Pe_5 = Pe_{5-2} + Pe_{5-3} = Pe_3 + Pe_2 = 3 + 2 = 5$
 $Pe_6 = Pe_{6-2} + Pe_{6-3} = Pe_4 + Pe_3 = 2 + 3 = 5$
 $(3, 0, 2, 3, 2, 5, 5, 7, 10, 12, 17, 22, 29).$

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Para esses cálculos, o estudante E3 utilizou a lei de recorrência apresentada pela professora/pesquisadora e as informações dos termos iniciais da sequência de Perrin. Diante dessas informações, a professora/pesquisadora fez a seguinte indagação:

-Com esses vinte primeiros termos da sequência de Perrin, qual o valor para razão entre os termos dessa sequência, e em que momento ela converge? (professora/pesquisadora) (TR07).

Logo, em alguns instantes o estudante E3 afirmou que a razão é 1,32. A professora/pesquisadora perguntou se esse resultado foi exato, os estudantes afirmaram que não. Então, foi realizada essa razão utilizando o GeoGebra, conforme a Figura 149.

Figura 149– Razão entre os termos da sequência de Perrin

	A	B
1	NÚMEROS DE PERRIN	RAZÃO
2	3	
3	0	0
4	2	∞
5	3	1.5
6	2	0.6666666667
7	5	2.5
8	5	1
9	7	1.4
10	10	1.4285714286
11	12	1.2
12	17	1.4166666667
13	22	1.2941176471
14	29	1.3181818182
15	39	1.3448275862
16	51	1.3076923077
17	68	1.3333333333
18	90	1.3235294118
19	119	1.3222222222
20	158	1.3277310924
21	209	1.3227848101

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Esse cálculo da razão mostrou que essa sequência começa a convergir no décimo sétimo termo, no qual foi observado pelo estudante E1, que esse valor é do número plástico, que também se fez presente na razão dos termos de Padovan. Em seguida, o mesmo estudante afirmou:

-Professora, a lei de recorrência de Perrin é igual a de Padovan, só muda os termos iniciais, as duas sequências têm a razão dos termos relacionados ao número plástico, e ambas são representadas geometricamente com triângulos equiláteros. Então podemos fazer essa relação, da mesma forma que relacionamos a sequência de Fibonacci com a de Lucas (E1) (TR07).

Concluiu-se que esses argumentos puderam ser considerados como a fase da validação da situação didática 7, pois os estudantes conseguiram fazer as associações necessárias, atingindo ao objetivo da situação-problema. Para finalizar, a professora/pesquisadora, na fase da *institucionalização*, relatou que alguns estudiosos afirmaram que essa relação foi importante para prova de algumas identidades de Perrin de forma imediata, segundo Manguiera (2022).

5.1.8 Validação da situação didática 8

Para a realização dessa situação didática, foi realizado o contexto histórico sobre os números primos e com destaque às contribuições de Mersenne, segundo Catarino, Campos e Vasco (2016, p. 39). Assim, os estudantes foram instruídos a encontrar os números de Mersenne por meio da definição $M_{n+2} = 3M_{n+1} - 2M_n$, com a condição $M_0 = 0$ e $M_1 = 1$.

Esse primeiro passo foi determinado a fase da *ação*, no qual os alunos elaboraram estratégias para criarem um método de resolverem seu problema (BROUSSEAU, 1997). Com base nas Figuras 105, 106 e 107, foi feito o seguinte questionamento pelo professor: qual a relação da área desses retângulos com a identidade de Mersenne?

Com base nas Figuras 105, 106 e 107, o estudante E1 afirmou:

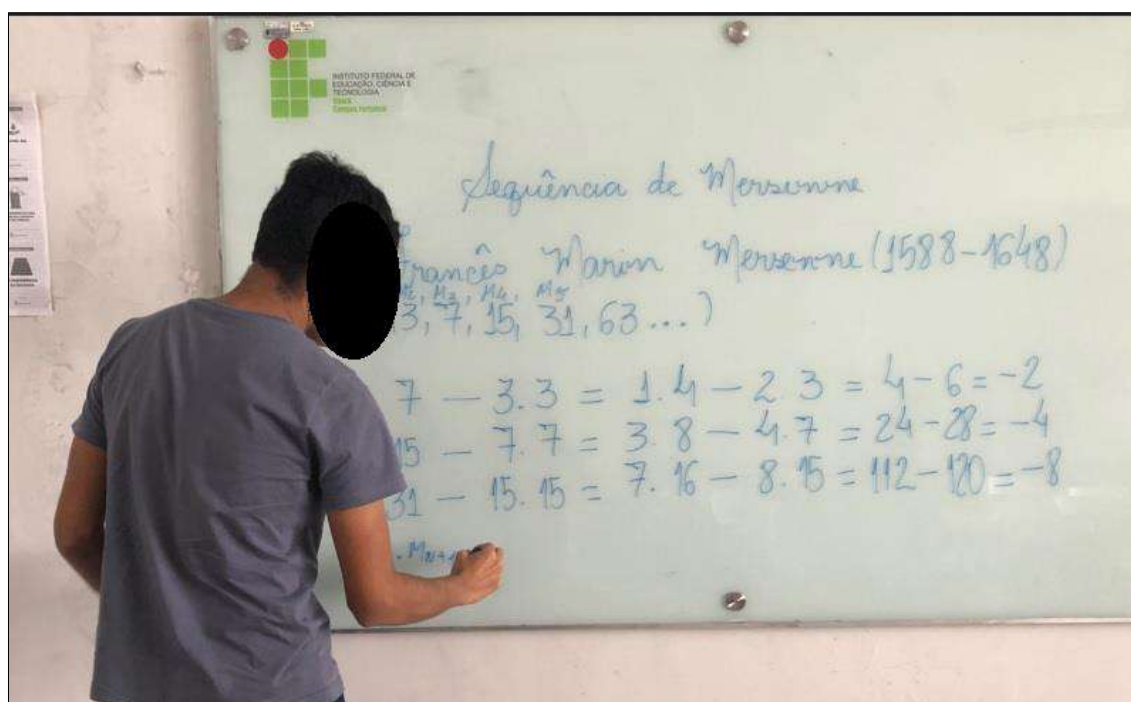
-Professora, observando as imagens percebi que a área 1 é menor que a área 2, logo o resultado sempre será negativo (E1) (TR08).

Logo, a professora/pesquisadora indagou:

-Como você pode mostrar isso aritmeticamente? Você pode mostrar para os seus colegas aqui no quadro? (professora/pesquisadora) (TR08).

Após uma pausa, o estudante E3 foi ao quadro para fazer essa associação, como mostra a Figura 150.

Figura 150- Fase da formulação do estudante E3



Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Na fase da *formulação*, o estudante E3 - descrito na Figura 150, explicou que na Figura 105 foram utilizados os termos M_1 e M_3 para formar a primeira área, sendo utilizado o M_2 como termo associado ao lado do quadrado, que seria a segunda área.

Da mesma maneira, foi observado a Figura 106, os números M_2 e M_4 para formar a primeira área, sendo utilizado o M_3 área é lado da segunda área que foi representada um quadrado.

Por conseguinte, na Figura 107 mostrou que são utilizados os números M_3 e M_5 para construção da primeira área, sendo utilizado o M_4 o valor do lado do quadrado, que correspondeu à segunda área.

Assim, para a fase da *validação*, seguiu a generalização da identidade de Mersenne, segundo Catarino, Campos e Vasco (2016), conforme a Figura 151.

Figura 151- Fase da validação do estudante E3

The image shows a chalkboard with handwritten mathematical identities. The first three lines show specific cases for n=2, n=3, and n=4. The fourth line shows a general formula for the identity.

$$\begin{aligned}
 1. \quad & 7 - 3 \cdot 3 = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2 \\
 3. \quad & 15 - 7 \cdot 7 = 3 \cdot 8 - 4 \cdot 7 = 24 - 28 = -4 \\
 7. \quad & 31 - 15 \cdot 15 = 7 \cdot 16 - 8 \cdot 15 = 112 - 120 = -8 \\
 & M_{n-1} \cdot M_{n+1} - M_n^2 = M_{n-1} \cdot (M_{n+1} + 1) - (M_{n-1} + 1) \cdot M_n = -2^n
 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Como mostra a Figura 151, os três casos relatados foram para $n \geq 2$, ou seja $n = 2, n = 3$ e $n = 4$. Logo, para a validação o estudante E3 relatou que os lados da primeira área foram relacionados a dois termos da sequência de Mersenne, que foram, respectivamente, M_{n-1} e M_{n+1} e que a segunda área foi formada por um quadrado de lado M_n . Essa operação sempre resultará em número negativo de uma potência de base dois.

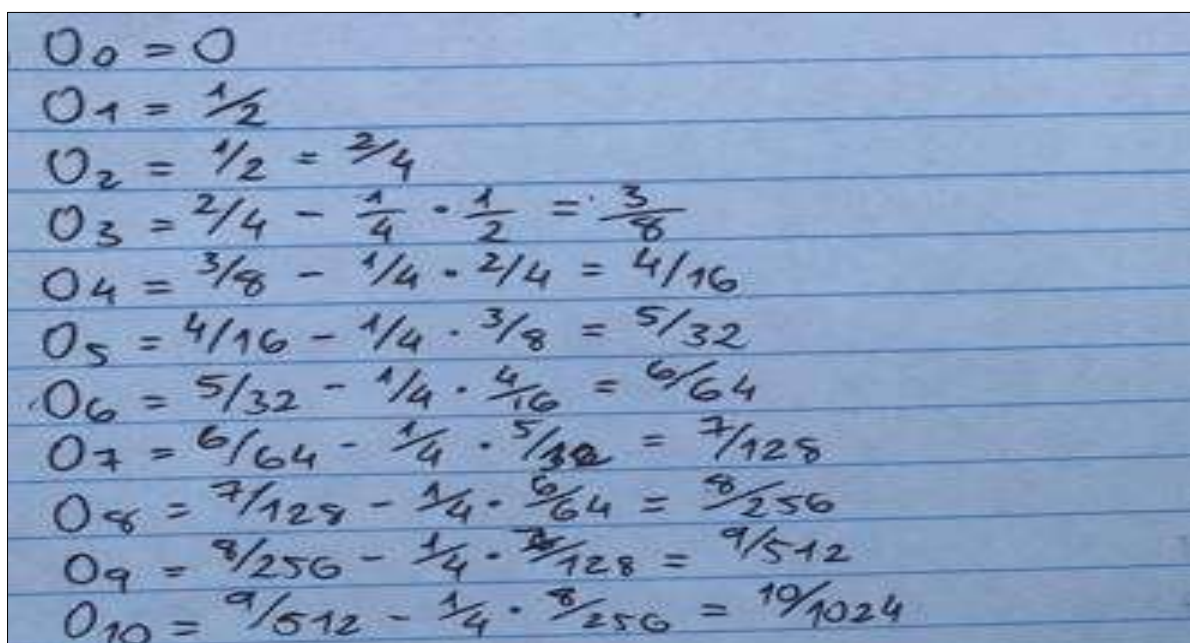
Concluiu-se a situação didática 8 com êxito, pois o objetivo foi alcançado. Assim, com a participação da professora/pesquisadora, na fase de *institucionalização*, relatou que essa identidade foi conhecida também como a identidade de Cassini e que foi uma generalização da identidade de Binet, relacionadas aos números de Mersenne. Essa

identidade pode ser provada também utilizando o limite de n tendo ao infinito, de acordo com Catarino, Campos e Vasco (2016).

5.1.9 Validação da situação didática 9

Essa situação didática começou com o contexto histórico sobre as considerações de Oresme, tanto na matemática, quanto na física. Após essa exploração começou a fase da ação, de acordo com Stillwell (1989, p.119) a lei de recorrência $O_{n+2} = O_{n+1} - \frac{1}{4}O_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sabendo que $O_0 = 0, O_1 = \frac{1}{2}, n \geq 0$. Os estudantes determinaram os dez primeiros termos dessa sequência, como mostra a Figura 152.

Figura 152- fase da ação do estudante E3



Handwritten calculations for the sequence O_n :

$$\begin{aligned} O_0 &= 0 \\ O_1 &= \frac{1}{2} \\ O_2 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{2}{4} \\ O_3 &= \frac{2}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \\ O_4 &= \frac{3}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{4}{16} \\ O_5 &= \frac{4}{16} - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{5}{32} \\ O_6 &= \frac{5}{32} - \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{16} = \frac{6}{64} \\ O_7 &= \frac{6}{64} - \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{32} = \frac{7}{128} \\ O_8 &= \frac{7}{128} - \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{64} = \frac{8}{256} \\ O_9 &= \frac{8}{256} - \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{128} = \frac{9}{512} \\ O_{10} &= \frac{9}{512} - \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{256} = \frac{10}{1024} \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Essa ação envolveu operações aritméticas básicas com números racionais - fator necessário para a fase da formulação, na qual os alunos foram estimulados a demonstrar a série geométrica $\sum_{i=0}^{\infty} G = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots = 2$, conforme as Figuras 153 e 154.

Figura 153- Fase da formulação do estudante E2

$$G = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$$

Nessa série geométrica, temos que o primeiro termo (a_1) é igual a 1 e a razão (r) é igual a $1/2$. Assim,

$|r| = |1/2| = 1/2 < 1$.

Como $|r| < 1$, então a série é convergente. Logo, a soma infinita desses termos é dada por:

$$G = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{1/2} = 2.$$

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Figura 154- Fase da formulação do estudante E3

2.) Temos que $G = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$

Sabemos que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1 \cdot (\frac{1}{2})^0 + 1(\frac{1}{2})^1 + 1(\frac{1}{2})^2 + \dots$

Assim podemos calcular o valor da soma a partir da n e do primeiro termo (1). Daí temos:

$$S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2, \text{ logo, } G = 2$$

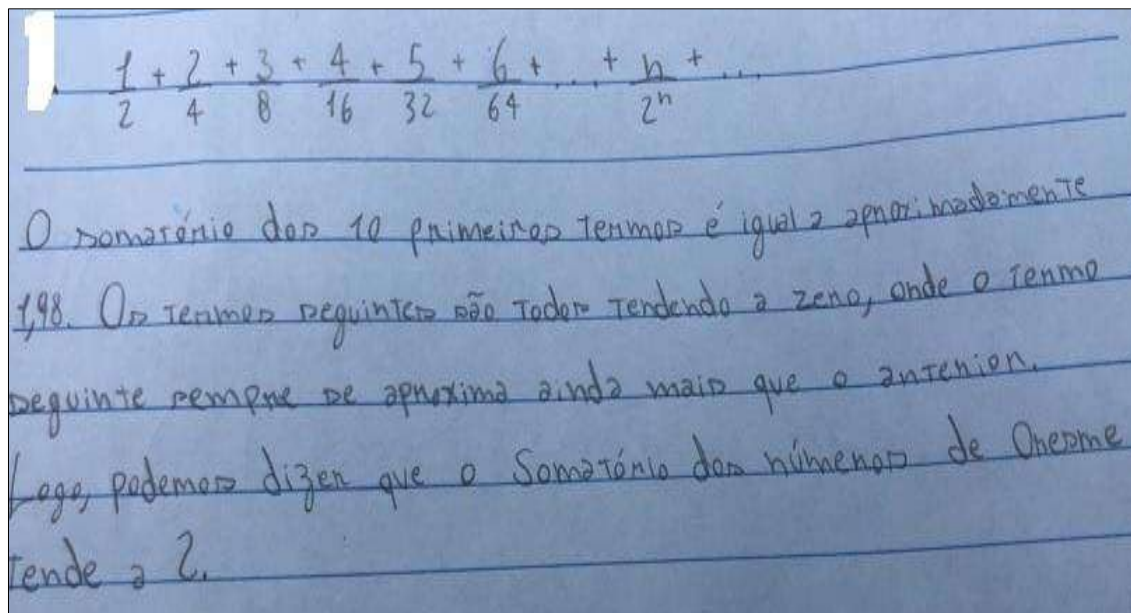
Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Na fase da *formulação*, os estudantes conseguiram com êxito prova da série geométrica, como mostram as Figuras 153 e 154, por meio da soma dos termos infinitos de uma progressão aritmética, com base Horadam (1974, p. 268). Nesse momento, a professora/pesquisadora pediu aos estudantes que demonstrassem a identidade de Oresme, $\sum_{i=0}^{\infty} O_i = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \frac{6}{64} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots$, com base na Figura 108.

Ao observar a Figura 108, o estudante E2 relatou que a soma dessa identidade é igual a dois, pois o gráfico já mostrou o resultado. Nesse momento, o professor pediu que ele

validasse essa informação por uma linguagem matemática, ou seja, por meio de demonstração matemática. Logo, obteve-se duas respostas significativas para essa prova da identidade proposta, para caracterizar a fase da *validação*, conforme as Figuras 155 e 156.

Figura 155- Fase da validação do estudante E1



Fonte: Dados da pesquisa (2022)

figura 156- Fase da validação do estudante E3

1) $B = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{n-1}{2^{n-1}}$

$B = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \dots + \frac{n-1}{2^{n-1}}$

Pelo item anterior, temos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1$$

Como se trata de uma soma de infinitos termos, então

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = 1,$$

Pois a adição de $\frac{1}{2^n}$ não fará uma diferença significativa neste somatório.

Assim,

$$B = 1 + \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \dots + \frac{n-1}{2^n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{2}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{n-2}{2^{n-1}}$$

$$B = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{8} + \frac{2}{16} + \dots + \frac{n-2}{2^{n-1}}$$

$$B = 1 + (1 - 1/2) + \frac{1}{8} + \frac{2}{16} + \dots + \frac{n-2}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{2}{16} + \dots + \frac{n-2}{2^{n-1}} =$$

$$= \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = 2 + \frac{1}{2^n} = 2,$$

Pois $\frac{1}{2^n}$ é um valor muito pequeno para ser considerado em uma soma de infinitos termos.

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Na Figura 155, o estudante E1 fez a prova, por meio de argumentos em uma linguagem formal por aproximação, fazendo, assim, suas conclusões para determinar a identidade de Oresme igual a dois.

Já na Figura 156, o estudante E3, fez uma demonstração por meio de somatórios dos números racionais, utilizando seus conhecimentos prévios, chegando ao resultado também igual a dois.

Os outros dois estudantes aplicaram a soma infinita dos termos de uma progressão aritmética e determinaram o valor de duas unidades para identidade proposta de acordo com Stillwell (1989). Na fase da *institucionalização*, a professora/pesquisadora conferiu os resultados encontrados pelos alunos e validou o resultado dos estudantes, segundo os pressupostos de Horadam (1974), pois ocorreu um maior detalhado em relação ao que foi

pedido, utilizando as definições da fase anterior, alcançando o objetivo da situação didática 9.

5.1.10 Validação da situação didática 10

Diante das situações já apresentadas, foi discutido nessa situação didática a apresentação dos números de Leonardo, falamos sobre a lei de recorrência em que esteve apresentada a primeira dimensão, a segunda foi formada por meio de figuras planas, no caso quadrados e retângulos.

Para iniciarmos a aula, abordamos as pesquisas mais recentes sobre os números de Leonardo realizadas por Mangueira, Alves e Catarino (2021), que foi importante para a compreensão dos estudantes no contexto histórico dessa sequência.

Como fase da *ação*, foi pedido aos estudantes que por meio da lei de recorrência $Le_n = Le_{n-1} + Le_{n-2} + 1, n \geq 2$ e $Le_0 = Le_1 = 1$, calculassem os dez primeiros termos e a razão entre esses termos.

O estudante E3 relatou que havia feito uma pesquisa para saber o mentor dessa sequência, mas não confirmou que foi Leonardo Pisano que tinha definido esses números. Logo, o professor ratificou a informação.

Assim, os dez primeiros termos da sequência de Leonardo são descritos, na Figura157, como:

Figura 157- Fase da ação do estudante E1

Handwritten mathematical work on lined paper showing the recurrence formula for Leonardo numbers and the calculation of the first 10 terms.

$$Le_n = Le_{n-1} + Le_{n-2} + 1, n \geq 2$$

$Le_0 = Le_1 = 1$	$Le_6 = 15 + 9 + 1 = 25$
$Le_2 = 1 + 1 + 1 = 3$	$Le_7 = 25 + 15 + 1 = 41$
$Le_3 = 3 + 1 + 1 = 5$	$Le_8 = 41 + 25 + 1 = 67$
$Le_4 = 5 + 3 + 1 = 9$	$Le_9 = 67 + 41 + 1 = 109$
$Le_5 = 9 + 5 + 1 = 15$	$Le_{10} = 109 + 67 + 1 = 177$

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Na Figura 157, mostrou as operações aritméticas para determinar os dez primeiros termos da sequência de Leonardo, essa ação foi realizada com facilidade pelos demais estudantes. Continuando a fase da ação, na Figura 158 mostrou o cálculo da razão entre os termos dessa sequência proposta.

Figura 158- Fase da ação do estudante E4

$$\begin{array}{lll}
 \frac{Le_2}{Le_1} = \frac{3}{1} = 3; & \frac{Le_3}{Le_2} = \frac{5}{3} \approx 1,67; & \frac{Le_4}{Le_3} = \frac{9}{5} = 1,8; \\
 \frac{Le_5}{Le_4} = \frac{15}{9} \approx 1,67; & \frac{Le_6}{Le_5} = \frac{25}{15} \approx 1,67; & \frac{Le_7}{Le_6} = \frac{41}{25} \approx 1,64; \\
 \frac{Le_8}{Le_7} = \frac{67}{41} \approx 1,6341; & \frac{Le_9}{Le_8} = \frac{109}{67} \approx 1,6269; & \frac{Le_{10}}{Le_9} = \frac{177}{109} \approx 1,6238; \\
 \frac{Le_{11}}{Le_{10}} = \frac{287}{177} \approx 1,6215; & \frac{Le_{12}}{Le_{11}} = \frac{465}{287} \approx 1,6202; & \frac{Le_{13}}{Le_{12}} = \frac{753}{465} \approx 1,6193; \\
 \frac{Le_{14}}{Le_{13}} = \frac{1219}{753} \approx 1,6188; & \frac{Le_{15}}{Le_{14}} = \frac{1973}{1219} \approx 1,6185; & \frac{Le_{16}}{Le_{15}} = \frac{3193}{1973} \approx 1,6183; \\
 \frac{Le_{17}}{Le_{16}} = \frac{5167}{3193} \approx 1,6182.
 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Na Figura 158 mostrou que a razão encontrada é de aproximadamente 1,62, os estudantes conseguiram observar que os termos da sequência de Leonardo, também utilizaram a proporção áurea com as sequências de Fibonacci e de Lucas, vistas nas duas primeiras situações didáticas.

Com efeito em estimular a criação de conjecturas feita pelos alunos, o professor mostrou as Figuras 109 e 110, para construir uma das identidades relacionadas aos números de Leonardo.

Com base nas situações didáticas 1 e 2, nas Figuras 109 e 110, respectivamente, a professora/pesquisadora levantou o seguinte questionamento:

-Como podemos relacionar os números de Leonardo com as áreas desses quadriláteros? (professora/pesquisadora) (TR10).

Essa foi a pergunta norteadora para fase da *formulação* dos estudantes. Os estudantes entraram em um diálogo e observaram a seguinte situação, detalhada pelo estudante E1:

-Existe na primeira figura uma soma entre quadrados de lados três e um, e isso é igual a área de um retângulo cuja medidas são dois e nove, e uma segunda área que está em cima da anterior com as medidas dois e cinco, somadas a um terceiro retângulo de medidas dois e um.

-Na segunda figura temos uma soma entre dois quadrados de lados cinco e três, que é igual a uma área do retângulo de lados dois e vinte e cinco, e uma segunda área de outro retângulo sobreposta com medidas dois e nove, adicionada a um novo retângulo com medidas dois e um (E1)(TR10).

Figura 159- Fase da formulação do estudante E3

Handwritten mathematical work by student E3 showing three cases for $n=1$, $n=2$, and $n=3$. Each case involves summing squares and relating them to a product of two numbers plus one.

$n = 1 \rightarrow Le_1^2 + Le_2^2 = 2(Le_4 - Le_3 + 1)$
 $1^2 + 3^2 = 2(9 - 5 + 1)$
 $10 = 10$

$n = 2 \rightarrow Le_2^2 + Le_3^2 = 2(Le_6 - Le_4 + 1)$
 $3^2 + 5^2 = 2(25 - 9 + 1)$
 $9 + 25 = 2 \cdot 17$
 $34 = 34$

$n = 3 \rightarrow Le_3^2 + Le_4^2 = 2(Le_8 - Le_5 + 1)$
 $5^2 + 9^2 = 2(67 - 15 + 1)$
 $106 = 106$

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Na Figura 159, o estudante E3 formalizou, por meio de operações aritméticas, o que foi relatado anteriormente, fazendo o caso para $n = 1$ relacionado à Figura 109, para $n = 2$ de acordo com a Figura 110, e para $n = 3$ utilizando o mesmo pensamento. Com base nessas informações, o professor pediu aos estudantes que fizessem a generalização da identidade e sua demonstração.

O estudante E1 respondeu:

-Então, temos a seguinte identidade $Le_{n+1}^2 + Le_n^2 = 2(Le_{2n+2} - Le_{n+2} + 1)$, sendo que para fazer a prova precisamos de algumas informações a mais(E1).

-Como você pode afirmar isso? (Professora/pesquisadora)

-Tentei aqui, mas me deparei com uma situação que não tem saída (E1) (TR10).

Logo, a professora/pesquisadora sugeriu que os alunos utilizassem duas outras identidades, que foram: $le_n = 2F_{n+1} - 1$ para $n \geq 0$, $Le_n = 2Le_{n-1} - Le_{n-3}$, para $n \geq 3$, segundo Catarino e Borges (2019).

Assim, o estudante E1 fez a demonstração da identidade de Leonardo, conforme a Figura 160.

Figura 160- Fase de validação do estudante E1

5. Vimos em sala que, $le_{2n+2}^2 + le_n^2 = 2(le_{2n+2} - le_{n+2} + 1)$
e que $F_{2m+1}^2 + F_{2n+1}^2 = F_{m+n+1}^2 + F_{m-n}^2$

Dado, $le_{2n+2}^2 + le_n^2 = (2F_{n+2} - 1)^2 + (2F_{n+1} - 1)^2$

$$= (4F_{n+2}^2 - 4F_{n+2} + 1) + (4F_{n+1}^2 - 4F_{n+1} + 1)$$

Reagrupando,

$$= 4F_{n+2}^2 + 4F_{n+1}^2 - 4F_{n+2} - 4F_{n+1} + 2$$

$$= 4(F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2) - 4(F_{n+2} + F_{n+1}) + 2$$

Temos

$$= 4(F_{2n+3} - F_1) - 4(F_{n+3}) + 2$$

Colocando o 2 em evidência,

$$= 2(2F_{2n+3} - 2F_{n+3} + 1) = 2(2F_{2n+3} - (2F_{n+3} - 1))$$

$$= 2(2F_{2n+3} - le_{n+2}) = 2(le_{2n+2} + 1 - le_{n+2}) //$$

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Nessa fase da *validação*, os estudantes E2 e E4 relataram que não conseguiram realizar a demonstração devido à dificuldade de empregar as identidades propostas associadas aos números de Fibonacci. O estudante E3 afirmou que houve uma dificuldade em realizar tal prova, pois pensou de uma maneira diferente, como mostrou a Figura 161.

Figura 161- Fase da validação do estudante E3

$$\begin{aligned}
 L_n^2 + L_{n+1}^2 &= (2F_{n+1} - 1)^2 + (2F_{n+2} - 1)^2 \\
 &= 4F_{n+1}^2 - 4F_{n+1} + 1 + 4F_{n+2}^2 - 4F_{n+2} + 1 = \\
 &= 2(2(F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2) - 2(F_{n+1} + F_{n+2}) + 1)
 \end{aligned}$$

Usando a identidade $F_{x+1} \cdot F_{y+1} = F_{x+y+1}^2 + F_{x-y}^2$ e considerando $x=y=0$, temos: $F_{x+1}^2 + F_x^2 = F_{2x+1}^2 + F_{x-x}^2 = F_{2x+1}^2 + F_0^2 = F_{2x+1}^2$. Assim, $F_{(x+1)+1}^2 + F_{(x+1)}^2 = F_{2(x+1)+1}^2 = F_{2x+3}^2 = F_{2x+3}^2$. Seja $x=n$.

Logo, $F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+3}^2$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
 L_n^2 + L_{n+1}^2 &= 2(2F_{2n+3} - 2(F_{n+1} + F_{n+2}) + 1) = \\
 &= 2(2F_{2n+3} - 2(\cancel{F_{n+1}} + F_{n+3} - \cancel{F_{n+1}}) + 1) = \\
 &= 2(2F_{2n+3} - 2F_{n+3} + 1) \\
 &= 2(L_{2n+2} + 1 - (L_{n+2} + 1) + 1) \\
 &= 2(L_{2n+2} + 1 - L_{n+2} - 1 + 1) \\
 &= 2(L_{2n+2} - L_{n+2} + 1). \quad \square
 \end{aligned}$$

// // //

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Na Figura 159 mostrou a prova da identidade de Leonardo, segundo o estudante E3, a maior dificuldade encontrada durante esse processo foi o pensamento de relacionar os números de Leonardo, aos números de Fibonacci.

-Eu pensei que era só colocar as identidades, mas tinha que fazer algumas coisinhas...(E3).

-Pois é, tinha que modificar o m e o n da propriedade(E1).

-Eu fiquei sofrendo com esse m e n dos números de Fibonacci, então eu mudei para x e y, porque já estava misturando tudo (E3) (TR10).

Com a validação dessas identidades, alcançamos o objetivo da situação didática 10. Na fase da *institucionalização*, a professora/professora relatou que as identidades de Leonardo foram provadas de forma imediata com base nas identidades apresentadas de Fibonacci e a de Lucas.

Desta forma, observou-se que as fases da TSD foram observadas e registradas em todas as situações criadas, algumas situações tiveram alguns obstáculos a serem superados,

mesmo que previstos, o que nos permitiu contornar e obter as respostas pretendidas nas dez situações didáticas.

Durante algumas vezes tivemos que sair da análise *a posteriori* para voltar a análise *a priori*, mas consideramos que o objetivo geral e os objetivos específicos de cada situação didática foram alcançados.

Os objetivos específicos foram pensados durante a análise *a priori*. Com isso, foi constatado na análise *a posteriori*, que as maiores dificuldades estavam relacionadas ao tempo que os estudantes demoravam para apresentar alguns resultados e as dificuldades em manusear a álgebra e fazer as associações com a geometria.

Diante de todas essas observações constatamos que as fases da TSD foram bem descritas e observadas dentro das situações propostas e todos os obstáculos encontrados foram previstos e estes tinham outros meios de serem superados. Consideramos, assim, finalizada a nossa validação interna da pesquisa diante do comportamento dos estudantes com um aproveitamento desejável frente às dez situações propostas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa apresentou uma abordagem acerca das sequências recursivas lineares que tiveram origem com estudos em torno da sequência de Fibonacci e evoluíram para outras nove sequências que são Lucas, Pell, Oresme, Mersenne, Jacobsthal, Narayana, Padovan, Perrin, Leonardo (Apêndice A).

O estudo teve como base o processo de evolução histórica dos vanguardistas das sequências, relações de recorrência e de linearidade, em como as identidades para uma visualização das figuras geométricas geradas pelo arranjo das configurações por meio do *software* GeoGebra, que se mostrou como recurso tecnológico que facilitou o entendimento das construções geométricas dentro das dimensões bi e tridimensionais.

Para início, com os objetivos traçados para essa pesquisa, partimos de orientações didático metodológicas fundamentadas na Engenharia Didática e da Teoria das Situações Didáticas, assim, foi realizada uma análise preliminar do objeto matemático a partir de estudos encontrados em artigos científicos e dissertações que abrangeram sequências recursivas e lineares. Assim como narrativas históricas por livros de História da Matemática, essas análises prévias denominaram a primeira fase da ED.

Nesse sentido, a partir do levantamento e análise bibliográfica e organizado um conjunto de obras, visando produzir de forma inédita neste trabalho a análise e aplicações de visualização bidimensional e/ou tridimensional das sequências recursivas lineares. Assim, foi possível realizar um estudo de desenvolvimento histórico e matemático das sequências recursivas lineares e suas identidades alcançando os dois primeiros objetivos específicos desta pesquisa.

A análise *a priori* foi a segunda etapa de ED, com ela foi preciso analisar as possibilidades na abordagem dessas identidades das sequências recursivas lineares em sala, visto que a disciplina dentro do curso de licenciatura em Matemática que abordou tais sequências, no caso a escolhida foi a História da Matemática, pois nela abordou-se o contexto histórico, permitindo discussões de conceitos e relações matemáticas. Contudo, esta pesquisa foi aplicada na disciplina de HM, no curso de Licenciatura em Matemática do IFCE, após uma minuciosa análise da matriz curricular que nos permitiu discutir a evolução dessas sequências.

Diante disso, foi preciso aproximar o estudo das sequências recursivas lineares e suas conjecturas ao propósito da disciplina para que não ocorresse uma resistência por parte dos

estudantes, visto que, por diversas vezes foram estudadas apenas trajetórias e descobertas de alguns matemáticos em um contexto histórico.

Essa transposição didática está prevista dentro da teoria de ensino (TSD), que foi estudada para aplicação em algumas das fases da (ED). Essa teoria mostrou-se essencial para ajudar a entender diversos comportamentos em sala, como estudar essas sequências somente na forma algébrica. Diante disso, pudemos levar o assunto abordado de maneira puramente matemática, como um conteúdo aplicável em sala de aula, traçando objetivos e criando situações de ensino com a finalidade de prevê alguns resultados na fase de aplicação da pesquisa.

Durante a experimentação, a terceira fase, foram feitas as aplicações das situações didáticas previstas na análise *a priori*, observou-se alguns obstáculos como: os estudantes não conseguiram relacionar algumas características algébricas com as geométricas. Outro entrave encontrado durante o percurso foi a resistência dos alunos em associar os termos de uma sequência a uma figura geométrica. Essas dificuldades foram superadas durante a validação interna, pois ocorreram troca de informações e interações entre discentes minimizando os percalços.

As construções geométricas, vistas de forma inéditas neste trabalho, permitiram superar alguns obstáculos, abordando identidades, essa que, até então não eram conhecidas para essas sequências recursivas lineares estudadas. Com isso, observou-se nesta pesquisa, o surgimento das visualizações bi e /ou tridimensionais a partir dos valores iniciais de cada sequência e da lei de recorrência.

Entretanto, com base do micro engenharia didática e transposição didática, foi observado que a representação geométrica das identidades de cada sequência foi estudada em situações de ensino, norteadas na TSD, por meio de situações-problema de conteúdos selecionados previamente, com o propósito de compreender o processo histórico evolutivo, satisfazendo o último objetivo específico desta pesquisa.

Para essas aplicações realizadas na disciplina de HM, que compuseram esta pesquisa, foram necessários alguns documentos submetidos ao comitê de ética e pesquisa para que a aplicação fosse amparada e legalizada, já que a pesquisa ocorreu com pessoas. Neste contexto, as situações didáticas foram aplicadas e registradas por meio de fotos, gravações de áudio e vídeo, bem como anotações dos estudantes no quadro e papel, nas quais foram abordadas dez situações didáticas nas aulas no período da tarde, em dias de segunda e sexta-feira, com a duração de duas horas/aulas cada encontro, totalizando quarenta horas/aulas durante o semestre 2022.1.

Esses registros serviram de base para uma análise posterior que foi feita nas fotos, vídeos e áudios, foram organizadas segundo a TSD, com situações norteadas nas dialéticas da teoria de ensino. Esta organização foi essencial para a pesquisa, pois permitiu que esta fosse analisada de forma minuciosa e separada, elencando o desenvolvimento em cada situação e a evolução de uma fase para a outra dentro de acordo com a TSD.

À vista disso, a quarta etapa da pesquisa, que foi a análise *a posteriori*, em que analisamos as situações didáticas, apresentou que os estudos em relação a ED, TSD, as sequências recursivas lineares e o GeoGebra, obtiveram um nível satisfatório de resultados, pois, diante da teoria de ensino e a metodologia de pesquisa empegada, a pesquisa pode ser bem estruturada, de modo a considerar as especificações de cada etapa.

Dentro da análise das situações, percebemos que muitos dos problemas propostos foram bem desenvolvidos, não havendo perda de conteúdo, estes que já haviam sido previstos na fase de análise prévia, ou seja, mostrou o sucesso na implementação da ED.

Em relação ao conteúdo matemático, a análise de dados revelou que os estudantes entenderam a evolução, tanto histórica, quanto matemática em uma situação de ensino, pois precisava-se desse entendimento para que a continuidade de conteúdo dentro das situações de ensino acontecesse.

A utilização do recurso computacional GeoGebra permitiu facilitar a busca pela representação geométrica dessas sequências recursivas lineares, por meio de visualizações bi e tridimensionais, sendo essencial para o entendimento de algumas identidades propostas. Foi possível, ainda, aproximar estas sequências a áreas e volumes desses objetos existentes, por meio de conceitos matemáticos, facilitando assim o processo de ensino deste conteúdo.

Finalmente, esta pesquisa proporcionou aos estudantes - futuros professores em formação inicial, aumentarem o seu conhecimento sobre a sequências recursivas lineares e suas visualizações bi e tridimensionais, através das identidades matemáticas. E, ainda, permitiu o desenvolvimento da construção dos conhecimentos no contexto histórico e matemático no processo de ensino. Com isso, espera-se que este trabalho possa subsidiar outras pesquisas que pretendem explorar a perspectiva da TSD, as sequências recursivas lineares em uma abordagem geométrica, bem como o *software* GeoGebra, que não são muito apresentados em curso de Licenciatura em Matemática.

REFERÊNCIAS

- ABAR, A. A. P. A. C. Transposição Didática na criação de estratégias para a utilização do GeoGebra, **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, vol. 9, no. 1, p. 59-75, 2020.
- ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.
- ALMOULOUD, S. A. Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. **REVEMAT**. Florianópolis (SC), v.11, n. 2, p. 109-141, 2016.
- ALMOULOUD, S. A. Diálogos da didática da matemática com outras tendências da educação matemática. **Caminhos da Educação Matemática em Revista (Online)**, v. 9, n. 1, 2018.
- ALMOULOUD, S. A; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 3, n. 1, p. 62-77, 2008.
- ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. Engenharia didática: evolução e diversidade. **Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem.**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 22-52, 2012. ISSN 1981-1322.
- ALP, Y. & KOÇER, E.G. Some properties of Leonardo Numbers. **Konuralp Journal of Mathematics**, vol.9, n.1, p. 183-189,2021.
- ALSINA, C.; NELSEN, R. B. **A mathematical space odyssey: solid geometry in the 21th century**. Washington: The Mathematical Association of América, 2015.
- ALVES, F. R. V. Didática de matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. **Interfaces da Educação**, v. 7, n. 21, p. 131-150, 2016.
- ALVES, F. R. V. Engenharia Didática para a generalização da sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura Didactical Engineering for the generalization of Fibonacci´s sequence: an experience in a graduate course. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 18, n. 1, 2016.
- ALVES, F. R. V. Engenharia Didática para a generalização da sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v. 18, n. 1, p. 61-93, 2016b.
- ALVES, F. R. V. Engenharia Didática de Formação (EDF): sobre o ensino dos Números (Generalizados) de Catalan (NGC). **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v. 20, n. 2, p. 47 – 83, 2018b.
- ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A Classe dos Polinômios Bivariados de Fibonacci (PBF):Elementos Recentes sobre a Evolução de um Modelo. **Revista Thema**, v.14, n.1, p.112-136, 2017.

ALVES, F. R. V.; DIAS, M. A. Engenharia Didática para o Teorema de Binet, ou Lamé, ou de Moivre: Análises Preliminares e a Priori. **Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas**, v. 19, n. 2, p. 103, 2018.

ARTIGUE, M. et al. **A enseñanza dos princípios do cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos e didáticos**. Ingeniería didáctica en educación matemática, v. 1, 1995.

ARTIGUE, M. et al. **Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas**. [S.l.]: Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, 1995.

AYDIN, F. T.; KÖKLÜ, K. On Generalizations of the Pell Sequence. 2017. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1711.06260.pdf>>. Acesso em: 30 mai. 2022.

BABB, J. Mathematical concepts and proofs from Nicole Oresme: Using the History of Calculus to Teach Mathematics. *Science & Education*, v 14, n 3-5, p. 443-456, 2005.

BARIK, B. **Lucas sequence, its properties and generalization**. 30f. Dissertation (master's degree)- National Institute of Technology Rourkela, Odisha, 2013.

BARROS, F.E. **Engenharia Didática sobre os números figurados K-dimensionais: relações recorrentes, termo geral, função geradora e representações por meio de recursos computacionais**. Dissertação (Mestrado) — Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE), 2021.

BENJAMIN, A.T.; EUTIS, A.K.; PLOTT, S.S. **The 99th Fibonacci identity**, *Electr. J. Combinatorics*, vol. 15, #R34, pp. 1-13, 2008.

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. São Paulo: **Blucher**, 2010.

BEZERRA, F.H.C. **Engenharia Didática com o tema: Sequência de Narayana e os números de Narayana**. Dissertação (Mestrado) — Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE), 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**, 2018. Brasília. MEC. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf. Acesso em: 03 mai. 2021.

BICKNELL, M. A primer on the Pell sequence and related sequences. *The Fibonacci Quartely*, Halifax, v. 13, n. 4, p. 345-349, Dec. 1975.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. In J. Vanhamme & W. Vanhamme (Eds.), *La problématique et l'enseignement de la mathématiques. Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques*. Louvain-la-Neuve, p. 101-117, 1976.

BROUSSEAU, G. **Theorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques**. Tese (Doutorado) — These d'état, Université de Bordeaux I, 1986.

BROUSSEAU, Guy. **Theory of didactical situations in mathematics**: didactique des mathématiques (1970-1990). [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 1997.

BROUSSEAU, G. Educación y didáctica de las matemáticas. **Educación Matemática**, v. 12, n. 1, p. 5–38, 2000.

BROUSSEAU, G. **Theory of Didactical Situations in Mathematics Didactique de Mathématiques, 1970–1990**. 19. ed. [S.l.]: Mathematics Education Library, 2002.

BROUSSEAU, G. **Conteúdos e Métodos de Ensino**. In: SILVA, Benedito Antônio da. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas**. Tradução de: Camila Bogéa. São Paulo: Ática, 128 p, 2008.

BOYER, C. Fractional Indices, Exponents, and Powers. National Mathematics Magazine, Mathematical Association of America, v18, n2, pp. 81-86, 1943. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/3029982?seq=1#page_scan_tab_contents> Acesso em: 01.jun.2022

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. 2 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

CARNEIRO, V. C. G. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática. **Zetetike**, Campinas: UNICAMP, v. 13, n. 23, p. 85-118, 2005.

CAJORI, F. **A history of mathematical notations**. Londres: The Open Court Company, 1928.

CRAVEIRO, I. M. **Extensões e Interpretações Combinatórias para os Números de Fibonacci, Pell e Jacobsthal**. (tese de doutorado). Campinas: Unicamp. 2004.

CATARINO, P.; CAMPOS, H.; VASCO, P. On the Mersenne sequence. *Annales Mathematicae et Informaticae*. v.46, pp. 37–53, 2016.

CERECEDA, J. L. Binet's formula for generalized tribonacci numbers. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 46, n. 8, p. 1235–1243, Apr. 2015.

CERDA- MORALES, G. Identities involving Narayana numbers, **arXiv:1805.02255v1 [math.CO]**, 2018.

CLAGETT, M. Nicole Oresme and medieval scientific thought. *Proceedings of the American Philosophical Society*, Philadelphia, v.108, n.4, p. 298-309, 1964.

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado**. 3. ed. Argentina: Artigue, 1998.

DUNLAP, R. A. *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*. **World Scientific**, 2003.

EDGAR, T.; NACIN, D. **A Visual Tour of Identities for the Padovan Sequence**. The Author(s), under exclusive licence to Springer Science+Business Media, LLC, part of Springer Nature, 2021. <https://doi.org/10.1007/s00283-021-10076-8>. Acesso: jul.2021.

EVES, H. **An introduction to the History of Mathematics**. Third edition. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1969.

EVES, H. **Foundations and fundamental concepts of mathematics**. Mineola (New York): Dover, 1997.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

GRANT, E. **Part I of Nicole Oresme's Algorismus Proportionum**. *Isis: A Journal of the History of Science Society*, v56, n3, p. 327-341, 1965.

GERMANO, J.G. da C. **Uma Proposta de Abordagem dos Números Complexos com o uso do GeoGebra**. Dissertação (Mestrado Profissional), Universidade Federal do Ceará, 2016.

GRIMALDI, RALPH. P. **Fibonacci and Catalan Numbers: An Introduction**. New York: Wiley and Sons Publishers, 2012.

GUEDES, A. M. S.; ALVES, F. R. V. **Uma investigação com professores em formação inicial sobre: sequência de Lucas e os números de k-Lucas**. *Research, Society and Development*, 8(7), 1-16, 2019.

HARE, K.; PRODINGER, H.; SHALLIT, J. Three series for the generalized golden mean. **arXiv:** 1401.6200 [math.NT], jan. 2014. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1401.6200.pdf>. Acesso em: 15 set. 2021.

HILLMAN, A.P. (ed). **Elementary problems and solutions**, *Fib. Quart.*, vol. 8, no. 4, pp. 443-448, Oct. 1970.

HOGGAT, Jr. V. E. & VENNEN, E. **Fibonacci and Lucas Numbers**. Santa Clara: Fibonacci Association Publishers, 1969.

HORADAM, A. F. Oresme numbers. **The Fibonacci quarterly**, v. 12, n. 3, p. 267 – 271, 1974. Disponível em: <https://www.fq.math.ca/12-3.html>.

HONSBERGER, R. **On a theorem of Gabriel Lamé**, In **Mathematica gems II**, The Mathematical Association of America, Washington D.C., 1976, pp.54-57. Dolciani Mathematical Expositions, No.2.

KATZ, Victor. **The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam**. Princeton: Princeton University Press, 2007.

KOSHY, T. **Pell and Pell- Lucas numbers with applications**, II Wiley, New York, 2019.

KOSHY, T. **Pell and Pell- Lucas numbers with applications**, Wiley, New York, 2014.

KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas numbers with applications**, Wiley, New York, 2001.

LABORDE, C. Affronter la complexité des situations didactiques d'apprentissage des mathématiques en classe: défis et tentatives. **Didaskalia**, 10(1), 97-112, 1997.

LIMA, E. L. et al. **Matemática no Ensino Médio**, vol. 1. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MANGUEIRA, M.C.dos S. **Engenharia Didática: Um processo de Híbridização e Hipercomplexificação de sequências lineares recursivas**. Dissertação (Mestrado) — Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE), 2022.

MAROHNIC, L.; STRMECKI, T. Plastic number: construction and applications. **Advanced Research in Scientific Areas**, v. 1, n. 1, p. 1523-1528, 2012. Disponível em: https://bib.irb.hr/datoteka/628836.Plastic_Number_-_Construct.pdf. Acesso em: 15 set. 2021.

MATOS, P. M.; SERIES, E. **Equações Diferenciais**. [S.l.]: **Prentice Hall**, São Paulo, 2001.
MENDONÇA, A.F.; BORGES NETO, H. Nicole Oresme: perspectivas históricas para o uso em sala de aula. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática** – Vol. 03, Nº 09, p.48 – 62, 2016. DOI: 10.30938/bocehm.v3i9.53

MILLER, M. D. On generalized Fibonacci numbers. **The American Mathematical Monthly**, v. 78, n. 10, p. 1108–1109, 1971.

MOTA, C. dos S. **Um estudo sobre generalizações da sequência de Pell e aplicações com o CAS Maple**. Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2019.

NELSEN, R.B. **Nuggets of number theory: a visual approach**. Description: Providence, Rhode Island.: MAA Press, The American Mathematical Society, 2018.

NELSEN, R.B. **Proofs Without Words III: More Exercises in Visual Thinking**. The Mathematical Association of America, Washington, DC, 2015.

NICODEMI, Olympia. Galileo and Oresme: Who is modern? Who is medieval? **Mathematics Magazine**, v. 83, p. 24-32, 2010. Disponível em: http://qrc.depaul.edu/djabon/CTTI/Readings/Nicodemi_Galileo_and_Oresme.pdf.

NORONHA, W.F.R. **Engenharia Didática clássica sobre a sequência de Pell e seus modelos de Generalização**. Dissertação (Mestrado) — Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE), 2020.

NORONHA, W.F.R.; ALVES, F.R.V. Sequência de Pell: propriedades e considerações epistemológicas. *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, v.13, 2018.

OLIVEIRA, R. R. de. **Engenharia Didática sobre o Modelo de Complexificação da Sequência Generalizada de Fibonacci: Relações Recorrentes N-dimensionais e Representações Polinomiais e Matriciais**. Dissertação (Mestrado) — Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE), 2018.

OLIVEIRA, J.L.de. O retângulo de prata, a razão de prata e sua relação com a sequência de Pell. *Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática- Professor de Matemática Online*. v.10, n.2, 2022. ISSN: 2319-023X <https://doi.org/10.21711/2319023x2022/pmo1011>.

OLIVEIRA, R.R.de; ALVES, F.R.V. Os números Gaussianos de Fibonacci e relações recorrentes bidimensionais. *Revista: THEMA*, v.16, n.4, p.745-754, 2019.

OLIVEIRA, R. R.; ALVES, F. R. V.; PAIVA, R. E. B. Identidades Bi e Tridimensionais para os Números de Fibonacci na Forma Complexa. *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, v.11ic, p.91-106, 2017.

OLLERTON, R. L. **Proof without words: Fibonacci tiles**, Math. Magazine 81, 302.

PRICE, L. 2011 The Pythagorean tree: **A new species**,2008. <http://arxiv.org/pdf/0809.4324.pdf>.

ORESME, N. **Questiones super geometriam Euclidis**, H. L. L. Busard (ed), Leiden: Brill, 1961.

PAIS, L.C. **Didática da Matemática: Uma análise da influência francesa**. 3. ed. Belo Horizonte: Ed. Autêntica, 2015.

PETERSEN. T. Kyle. **Eulerien Numbers**. New York: T. Kyle Petersen ,2015.

PINTO, F. L. O uso das recorrências e do raciocínio recursivo no ensino médio. Instituto de Matemática. Departamento de Matemática., 2017.

PLOFKER, Kim. **Mathematics in India**. Princeton: Princeton University Press, 2009.

POMMER, W. M. A Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares. **São Paulo**, 2013.

POSAMENTIER, A. S.; LEHMANN, I. **The fabulous Fibonacci umbers**. New York: Prometheus Books,2007.

PUTTASWAMY, T. K. **Mathematical Achievements of Pre-modern Indian Mathematicians**. New York: Elsevier, 2012.

RAMOS, M. G. O. **A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Ilhéus: UESC, 2013, 93p. Disponível em: <http://www.biblioteca.uesc.br/biblioteca/bdtd/201160277D.pdf>

RESENDE, M. R. “A Teoria dos Números na Licenciatura em Matemática, Pedagogia e Educação Básica”, in **Teoria Elementar dos Números da Educação Básica à Formação dos Professores que Ensinam Matemática**, S. D. A. Machado, B. L. Bianchini, M. C. Maranhão, Org., São Paulo: Iglu, pp.1-13, 2015.

RIBEIRO, T.N; SOUZA, D.N. A Utilização do *software* GeoGebra como ferramenta pedagógica na construção de uma unidade de ensino potencialmente significativa (UEPS) **ReviSeM**, N°. 1, p. 36 – 51, 2016.

SANTOS, A. A. dos. **Engenharia Didática sobre o Estudo e Ensino da Fórmula de Binet como modelo de generalização e extensão da Sequência de Fibonacci**. Dissertação (Mestrado) — Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE), 2017.

SELBERG, S. **Ernst Jacobsthal. (Norwegian), Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim)**, 38, 70-73. 1965 <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Jacobsthal/>

SERRANO, I. M.; SUCEAVĂ, B. D. A medieval mystery: Nicole Oresme’s concept of curvitas. **Notices of AMS**, Estados Unidos, v.62, n.9, p. 1030-1034, October, 2015.

SIEGMUND-SCHULTZE, R. **Mathematicians fleeing from Nazi Germany: Individual fates and global impact**. [S.l.]: Princeton University Press, 2009.

SHIRALI, S. Marin Mersenne, 1588-1648. **Ressonância** vol.18, n.3, março 2013. DOI:10.1007/s12045-013-0034-2

SILVA, B.A. e. **Números de Fibonacci e números de Lucas**. 81f. (Dissertação de mestrado) - PROFMAT - Universidade de São Paulo. São Carlos, 2017.

SOUZA, T.S.A.de. **Sequência Generalizada de Jacobsthal: Uma Engenharia Didática sobre seu ensino**. Dissertação (Mestrado) — Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE), 2020.

STEWART, I. **Univers. des Nombres**. Paris: Belin pour la Science, 2000.

STILLWELL, John. **Mathematics and its history**. New York: Springer-Verlag, 1989.

STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas**. Tradução João Cosme dos Santos Guerreiro. 2a ed. Lisboa: Gradiva, 1992.

SUGUMARAN, A.; RAJESH, K. Perrin graceful graphs. **International Journal of Pure**

and Applied Mathematics, v. 114, n. 6, p. 131–137, 2017.

VIEIRA, R.P.M; ALVES, F.R.V. Engenharia Didática e sequência de Padovan e Tridovan: uma análise preliminar e a *priori*. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, 2020.

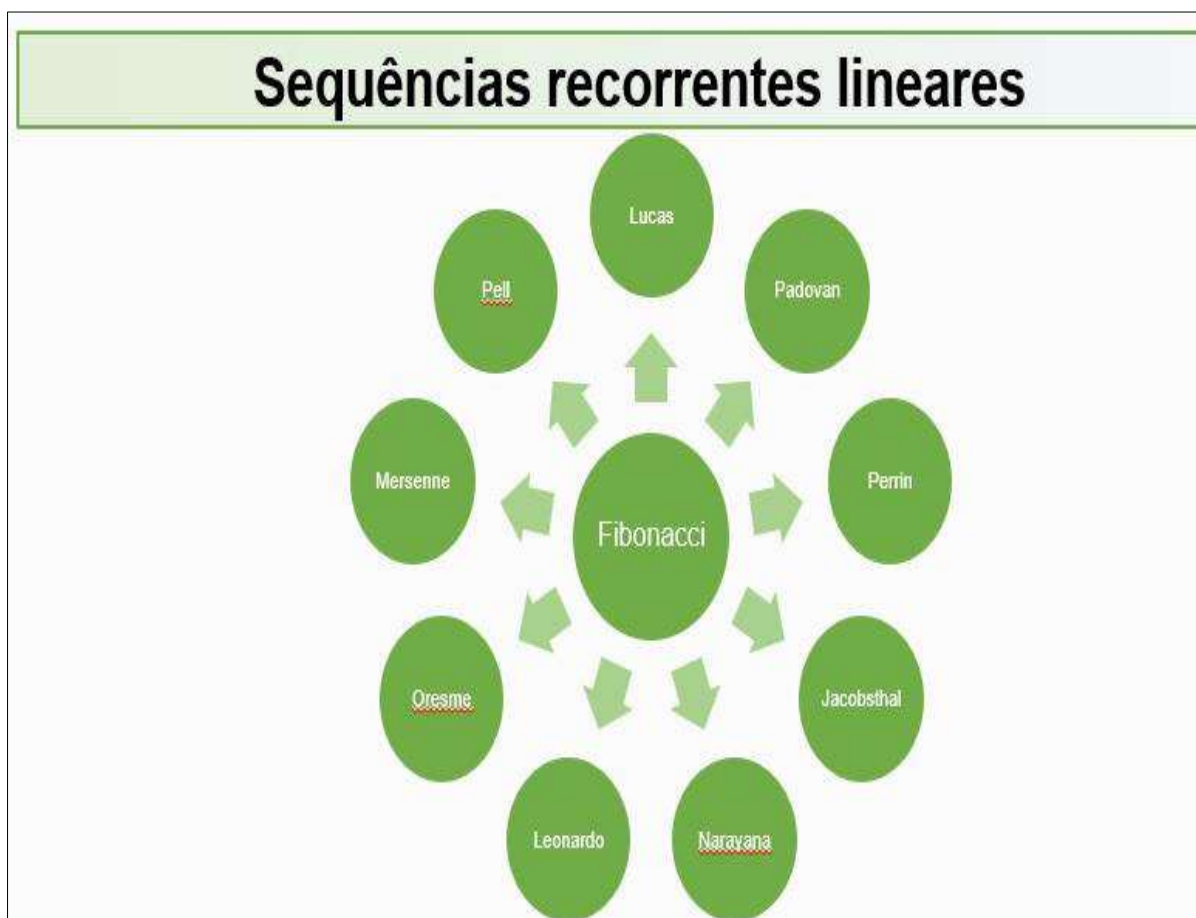
VIEIRA, R.P.M. **Engenharia Didática (ED): o caso da Generalização e Complexificação da Sequência de Padovan ou Cordonnier**. 266 f.: il. color. Dissertação (Mestrado) - Instituto Federal do Ceará (IFCE), Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Campus Fortaleza, 2020.

VOET, C. The poetics of order: Dom Hans van der Laan's architectonic space. **Architectural Research Quarterly**, v. 16, n. 2, p. 137–154, 2012.

YOUSCHKEVITCH, A.P. The concept of function up to the middle of the 19th century. **Archive for History of Exact Sciences**. v.16, n.1, p. 37–85, March 1976.

WELLS, D. **Prime Numbers: the mysterious figures in the Math**. New Jersey: John Wiley and Sons. Inc. 2005.

APÊNDICE

APÊNDICE A –RELAÇÃO ENTRE A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E AS DEMAIS

Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

APÊNDICE B – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido



INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Ceará

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

ENGENHARIA DIDÁTICA: UM PORCESSO DE ENSINO DAS SEQUÊNCIAS RECURSIVAS LINEARES POR MEIO SOFTWARE GEOGEBRA

Carla Patrícia Souza Rodrigues Pinheiro
Francisco Régis Vieira Alves

Você está sendo convidado a participar como voluntário de uma pesquisa. Este documento, chamado Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, visa assegurar seus direitos como participante e é elaborado em duas vias, uma que deverá ficar com você e outra com o pesquisador.

Por favor, leia com atenção e calma, aproveitando para esclarecer suas dúvidas. Se houver perguntas antes ou mesmo depois de assiná-lo, você poderá esclarecê-las com o pesquisador. Se preferir, pode levar este Termo para casa e consultar seus familiares ou outras pessoas antes de decidir participar. Não haverá nenhum tipo de penalização ou prejuízo se você não aceitar participar ou retirar sua autorização em qualquer momento.

Justificativa e objetivos:

Este estudo tem como questionamento norteador: como desenvolver uma Engenharia Didática para as sequências de recorrência que permitam uma transposição do conteúdo matemático por meio de uma situação aplicável ao ensino em sala de aula? Com isso, essa pesquisa tem como objetivo de estudo uma abordagem da Engenharia Didática nas aulas da História da Matemática.

Objetivo Geral

Analisar aplicações de visualização bidimensional e/ou tridimensional das sequências recursivas lineares, com base na Engenharia Didática e na Teoria das Situações Didáticas com os estudantes da licenciatura em Matemática.

Objetivos específicos

1. Realizar um estudo histórico, teórico e metodológico de ensino sobre as sequências recursivas lineares;
2. Investigar as relações de recorrência, forma geral e suas identidades das sequências recursivas lineares;
3. Relacionar, em situações didáticas, as identidades das sequências recursivas lineares na forma geométrica com a sua visualização por meio do software GeoGebra.

Rubrica do pesquisador: _____

Rubrica do participante: _____



INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Ceará

Procedimentos:

Participando do estudo você está sendo convidado a: de questionário e gravação de aulas em áudio ou vídeo. Estes procedimentos descritos acima ocorrerão nas salas virtuais e/ ou nas dependências do IFCE – Campus Fortaleza dentro do horário da disciplina de História da Matemática, não sendo necessário o deslocamento ao campus em outros períodos. Somente o pesquisador e a orientadora terão acesso ao material coletado e a identidade dos participantes será mantida em sigilo absoluto. As aplicações de questionários devem ocorrer no período de uma aula (50 minutos). Ao fim da pesquisa, os dados serão discutidos pelos pesquisadores envolvidos e, em seguida, o material coletado na forma de questionário e as aulas em vídeo ou áudio serão descartadas, ficando de posse dos pesquisadores por um período mínimo de 5 anos.

Desconfortos e riscos:

Você não deve participar deste estudo caso se sentir-se constrangido com algum dos procedimentos anteriormente citados, tendo a liberdade de deixar de participar do estudo em qualquer momento, sem haver nenhum tipo de prejuízo para a sua conduta. Ao estar participando dos encontros virtuais para a realização das aulas experimentais dessa pesquisa, o sujeito está exposto aos seguintes riscos:

- **Riscos ergonômicos**

Acontecem devido aos esforços repetitivos que prejudicam a postura do profissional, causando lesões e que podem afetar a realização de suas atividades. São considerados riscos ergonômicos todas as ações que podem interferir nas características psicofisiológicas do profissional. Os melhores exemplos desses riscos são: execução de movimentos repetitivos, trabalho em turnos muito longos e postura incorreta do trabalhador durante a execução de suas funções. Esse risco é classificado com moderado.

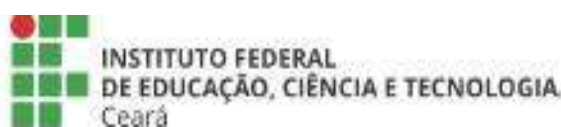
Para evitar os riscos existentes dentro desse ambiente, todos os sujeitos da pesquisa devem seguir algumas orientações:

- Usar mobiliário adequado;
- Adotar uma postura correta ao andar ou ficar em pé;
- Sentar-se de jeito certo, preferencialmente em cadeiras com encosto, evitando cruzar as pernas;
- Verificar o ritmo de trabalho e o excesso de carga horária;
- Deixar o monitor na linha dos olhos e nunca mais baixo;
- Manter o teclado posicionado de maneira que o braço forme com o antebraço um ângulo de 90° ou usar um modelo que tenha disposição adequada das teclas para cada uma das mãos;
- Usar apoio de mão arredondados e macios, que são colocados entre o teclado e a borda da mesa;
- Usar apoio nos pés, um objeto parecido com degrau;
- Realizar pausas durante as atividades manuais ou que provocam repetição de movimentos;
- Fazer exercícios de relaxamento e alongamento para irrigar os tecidos.

Benefícios:

Rubrica do pesquisador: _____

Rubrica do participante: _____



Procedimentos:

Participando do estudo você está sendo convidado a: de questionário e gravação de aulas em áudio ou vídeo. Estes procedimentos descritos acima ocorrerão nas salas virtuais e/ ou nas dependências do IFCE – Campus Fortaleza dentro do horário da disciplina de História da Matemática, não sendo necessário o deslocamento ao campus em outros períodos. Somente o pesquisador e a orientadora terão acesso ao material coletado e a identidade dos participantes será mantida em sigilo absoluto. As aplicações de questionários devem ocorrer no período de uma aula (50 minutos). Ao fim da pesquisa, os dados serão discutidos pelos pesquisadores envolvidos e, em seguida, o material coletado na forma de questionário e as aulas em vídeo ou áudio serão descartadas, ficando de posse dos pesquisadores por um período mínimo de 5 anos.

Desconfortos e riscos:

Você não deve participar deste estudo caso se sentir-se constrangido com algum dos procedimentos anteriormente citados, tendo a liberdade de deixar de participar do estudo em qualquer momento, sem haver nenhum tipo de prejuízo para a sua conduta. Ao estar participando dos encontros virtuais para a realização das aulas experimentais dessa pesquisa, o sujeito está exposto aos seguintes riscos:

- **Riscos ergonômicos**

Acontecem devido aos esforços repetitivos que prejudicam a postura do profissional, causando lesões e que podem afetar a realização de suas atividades. São considerados riscos ergonômicos todas as ações que podem interferir nas características psicofisiológicas do profissional. Os melhores exemplos desses riscos são: execução de movimentos repetitivos, trabalho em turnos muito longos e postura incorreta do trabalhador durante a execução de suas funções. Esse risco é classificado com moderado.

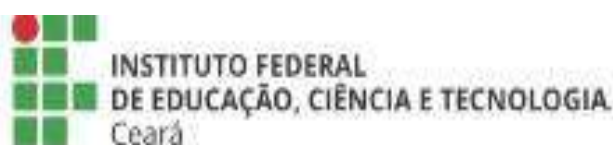
Para evitar os riscos existentes dentro desse ambiente, todos os sujeitos da pesquisa devem seguir algumas orientações:

- Usar mobiliário adequado;
- Adotar uma postura correta ao andar ou ficar em pé;
- Sentar-se de jeito certo, preferencialmente em cadeiras com encosto, evitando cruzar as pernas;
- Verificar o ritmo de trabalho e o excesso de carga horária;
- Deixar o monitor na linha dos olhos e nunca mais baixo;
- Manter o teclado posicionado de maneira que o braço forme com o antebraço um ângulo de 90° ou usar um modelo que tenha disposição adequada das teclas para cada uma das mãos;
- Usar apoio de mão arredondados e macios, que são colocados entre o teclado e a borda da mesa;
- Usar apoio nos pés, um objeto parecido com degrau;
- Realizar pausas durante as atividades manuais ou que provocam repetição de movimentos;
- Fazer exercícios de relaxamento e alongamento para irrigar os tecidos.

Benefícios:

Rubrica do pesquisador: _____

Rubrica do participante: _____



acarretar, aceito participar e declaro estar recebendo uma via original deste documento assinada pelo pesquisador e por mim, tendo todas as folhas por nós rubricadas:

Nome do(a) participante:

Contato telefônico (opcional):

e-mail (opcional):

(Assinatura do participante ou nome e assinatura do seu RESPONSÁVEL LEGAL)

Data: ____/____/____.

Responsabilidade do Pesquisador:

Asseguro ter cumprido as exigências da resolução as orientações e determinações fixadas nas Resoluções nº 466, de 12 de dezembro de 2012, e 510, de 07 de abril de 2016, e Norma Operacional nº 001/2013, pelo CNS, e disponíveis no Regimento Interno do Comitê de Ética em Pesquisa do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) e complementares na elaboração do protocolo e na obtenção deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Asseguro, também, ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Informo que o estudo foi aprovado pelo CEP perante o qual o projeto foi apresentado. Comprometo-me a utilizar o material e os dados obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

Pesquisadora,

Carla Patrícia Souza Rodrigues Pinheiro

Fortaleza, ____ de ____ de ____

Rubrica do pesquisador: _____

Rubrica do participante: _____

ANEXOS

ANEXO A – MATRIZ CURRICULAR DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DO INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ (IFCE)

 INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ DIRETORIA DE ENSINO Matrizes Curriculares										
Matrizes 3908 - Licenciatura em Matemática IV (2012/1)										
Curso 01402 - Licenciatura em Matemática										
Nível Superior										
Período Período										
Regime Não-seriado										
Situação Matriz em Vigor										
Per. Letivo Inicial 2012/1										
C.H. Disciplinas 3000										
Per.	Componentes Curriculares			Co-Requisitos					Carga Horária	Pré-requisitos
	Código	Descrição	Núcleo	OPT	Hab.	Cred.				
1	01.402.01	GEOMETRIA PLANA E CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS	COM	N	57	4	0	80		
1	01.402.02	MATEMÁTICA DISCRETA	COM	N	57	4	0	80		
1	01.402.03	MATEMÁTICA ELEMENTAR I	COM	N	57	4	0	80		
1	01.402.04	HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO NO BRASIL	COM	N	57	2	0	40		
1	01.402.05	COMUNICAÇÃO E LINGUAGEM	COM	N	57	3	0	60		
1	01.402.06	INICIAÇÃO A FILOSOFIA	COM	N	57	3	0	60		
2	01.402.07	CÁLCULO I	COM	N	57	4	0	80		01.402.03
2	01.402.08	LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA	COM	N	57	2	0	40		
2	01.402.09	MATEMÁTICA ELEMENTAR II	COM	N	57	4	0	80		01.402.01+01.402.02
2	01.402.10	FUNDAMENTOS SOCIOFILOSÓFICOS DA EDUCAÇÃO	COM	N	57	4	0	80		
2	01.402.11	PSICOLOGIA DO DESENVOLVIMENTO	COM	N	57	2	0	40		
2	01.402.12	LIBRAS	COM	N	57	2	0	40		
2	01.402.13	METODOLOGIA DO TRABALHO CIENTÍFICO I	COM	N	57	2	0	40		
3	01.402.14	ÁLGEBRA LINEAR	COM	N	57	4	0	80		01.402.06
3	01.402.15	CÁLCULO II	COM	N	57	4	0	80		01.402.07
3	01.402.16	INFORMÁTICA APLICADA AO ENSINO DA MATEMÁTICA	COM	N	57	4	0	80		01.402.01+01.402.07
3	01.402.17	PROJETOS SOCIAIS	COM	N	57	2	0	40		
3	01.402.18	POLÍTICAS EDUCACIONAIS	COM	N	57	3	0	60		
3	01.402.19	PSICOLOGIA DA APRENDIZAGEM	COM	N	57	3	0	60		01.402.11

 INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ DIRETORIA DE ENSINO Matrizes Curriculares																																			
4	01.402.20	CÁLCULO III	COM	N	57	4	0	80			01.402.19 + 01.402.15																								
4	01.402.21	GEOMETRIA ESPACIAL E PROJETIVA	COM	N	57	4	0	80			01.402.01 + 01.402.19																								
4	01.402.22	METODOLOGIA DO ENSINO DA MATEMÁTICA	COM	N	57	4	0	80			01.402.08 + 01.402.16																								
4	01.402.23	TEORIA DOS NÚMEROS	COM	N	57	4	0	80			01.402.02																								
4	01.402.24	DIDÁTICA GERAL	COM	N	57	4	0	80																											
5	01.402.25	CÁLCULO IV	COM	N	57	4	0	80			01.402.26																								
5	01.402.26	ESTRUTURAS ALGÉBRICAS	COM	N	57	4	0	80			01.402.19 + 01.402.23																								
5	01.402.27	CURRÍCULOS E PRÁTICAS EDUCATIVAS	COM	N	57	3	0	60																											
5	01.402.28	MECÂNICA NEWTONIANA	COM	N	57	4	0	80			01.402.16																								
5	01.402.29	ESTÁGIO I	COM	N	57	5	0	100																											
6	01.402.30	EDO E SÉRIES	COM	N	57	4	0	80																											
6	01.402.31	HISTÓRIA DA MATEMÁTICA	COM	N	57	4	0	80			01.402.01 + 01.402.15 + 01.402.23																								
6	01.402.32	ELETRICIDADE E MAGNETISMO	COM	N	57	4	0	80			01.402.25 + 01.402.28																								
6	01.402.33	ESTÁGIO II	COM	N	57	8	0	160																											
7	01.402.34	CÁLCULO NUMÉRICO	COM	N	57	4	0	80			01.402.26																								
7	01.402.35	FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA	COM	N	57	4	0	80			01.402.25 + 01.402.38																								
7	01.402.36	METODOLOGIA DO TRABALHO CIENTÍFICO II	COM	N	57	2	0	40			01.402.13																								
7	01.402.37	ESTÁGIO III	COM	N	57	7	0	140																											
7	01.402.38	OPTATIVA 71	COM	S	57	3	0	60																											
8	01.402.39	INTRODUÇÃO A ANÁLISE	COM	N	57	4	0	80																											
8	01.402.40	PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	COM	N	57	4	0	80			01.402.02 + 01.402.16																								
8	01.402.41	PROGRESSÕES E MATEMÁTICA FINANCEIRA	COM	N	57	3	0	60																											
8	01.402.42	OPTATIVA 81	COM	S	57	4	0	80																											
8	01.402.43	TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO	COM	N	57	2	0	40																											
<table> <tr> <th colspan="2"></th><th colspan="2">Créd.</th><th colspan="8">Carga Horária</th></tr> <tr> <th>Código</th><th>Sigla</th><th>Habilitação</th><th>Básica</th><th>Obrig.</th><th>Estágio</th><th>Optativa</th><th>Eleiva</th><th>At. Comp.</th><th>Proj. Final</th><th>Mín. Créd.</th><th></th></tr> </table>														Créd.		Carga Horária								Código	Sigla	Habilitação	Básica	Obrig.	Estágio	Optativa	Eleiva	At. Comp.	Proj. Final	Mín. Créd.	
		Créd.		Carga Horária																															
Código	Sigla	Habilitação	Básica	Obrig.	Estágio	Optativa	Eleiva	At. Comp.	Proj. Final	Mín. Créd.																									
57	57	DISC. BÁSICAS - LICENCIATURA EM MATEMÁTICA	Sm	0		0	0	0		0																									

ANEXO B – Ementa da disciplina de História da Matemática



PROGRAMA DE UNIDADE DIDÁTICA – PUD

DISCIPLINA: HISTÓRIA DA MATEMÁTICA		
Código:		
Carga Horária Total: 80 h	Teórica: 70 h	Prática Como Componente Curricular: 10 h
Número de Créditos:	4	
Código pré-requisito:	Geo Plana e Cons. Geom, Cálculo II e Teoria dos Números	
Semestre:	6º	
Nível:	Graduação	
EMENTA		
Estudo do conceito, desenvolvimento histórico e representações do número. O desenvolvimento da Matemática nas diversas civilizações ao longo da história. Vida obra e contexto histórico dos principais matemáticos e suas contribuições para o desenvolvimento da Matemática. História da Matemática no Brasil.		
OBJETIVO		
- Levar o aluno a compreender o desenvolvimento da Matemática de acordo com o contexto histórico e social e fazer conexões com as metodologias de ensino e propostas curriculares; - Conhecer os principais matemáticos e suas principais contribuições no desenvolvimento do conhecimento matemático ao longo da história; - Utilizar o conhecimento da História da Matemática para aprimorar o ensino de forma crítica e contextualizada; - Entender o desenvolvimento da História da Matemática no Brasil.		
PROGRAMA		
1. O conceito de número e os sistemas de numeração. 2. O desenvolvimento histórico da álgebra, Geometria e Aritmética nas diferentes épocas e civilizações. 3. Principais matemáticos da história e suas contribuições para o desenvolvimento da Matemática. 4. História da Matemática no Brasil.		
METODOLOGIA DE ENSINO		
Aulas expositivas, seminários, debates, apresentação de vídeos e pesquisa.		
AVALIAÇÃO		
Provas, trabalhos, seminários e avaliação contínua.		
BIBLIOGRAFIA BÁSICA		
- EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. Campinas-SP: Editora Unicamp, 2004. - BOYER, Carl B. História da Matemática. 2ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006. - D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Uma História Concisa da Matemática no Brasil. Petrópolis-RJ: Vozes, 2008.		
BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR		
- MENDES, I. A. O uso da História no Ensino da Matemática: reflexões teóricas e experiências. Belém: EDUEPA, 2001.		

Válido somente com assinatura e carimbo do IFCE

 INSTITUTO FEDERAL DO CEARÁ-IFCE
CAMPUS FORTALEZA
DIRETORIA DE ENSINO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

- MIGUEL, Antônio *et. al.* *História da Matemática em Atividades Didáticas*. São Paulo: Livraria da Física Editora, 2009.

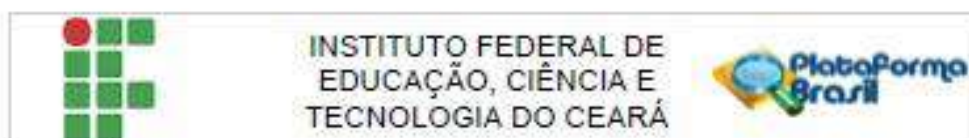
Coordenador do Curso

Setor Pedagógico

Válido somente com assinatura e carimbo do IFCE

ANEXO C – PARECER DO COMITÊ DE ÉTICA DA PESQUISA

	INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ			
PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP				
DADOS DO PROJETO DE PESQUISA				
Título da Pesquisa: ENGENHARIA DIDÁTICA COM O ESTUDO SOBRE AS SEQUÊNCIAS DE FIBONACCI, LUCAS E PADOVAN POR MEIO DE RECURSOS COMPUTACIONAIS.				
Pesquisador: Carla Patricia Souza Rodrigues Pinheiro				
Área Temática:				
Versão: 3				
CAAE: 52038621.2.0000.5589				
Instituição Proponente: INSTITUTO FEDERAL DE EDUCACAO, CIENCIA E TECNOLOGIA DO CEARA				
Patrocinador Principal: Financiamento Próprio				
DADOS DO PARECER				
Número do Parecer: 5.074.370				
Apresentação do Projeto: Nesse trabalho, utiliza-se a ED para organizar as etapas do estudo, de tal forma que seja sequenciado. A parte inicial será voltada para a revisão bibliográfica, ressaltando o que os autores abordam na ED e TSD, bem como nas sequências de Fibonacci, Lucas e Padovan. Em outra parte, aborda-se a história dos descobridores dessas sequências recorrentes dentro da HM e da Didática da Matemática. Dessa forma, permite-se estudar, criar e transformar situações de ensino que são essenciais para o avanço dessa pesquisa.				
Objetivo da Pesquisa: Realizar uma análise e aplicação de visualização bidimensional e tridimensional das sequências de Fibonacci, de Lucas e de Padovan, com base na Engenharia Didática e na Teoria das Situações Didáticas, ou seja, desenvolver relações didáticas entre essas sequências por meio das situações didáticas proporcionando uma concordância com o conhecimento científico e as habilidades cognitivas dos estudantes.				
Objetivo da Pesquisa: 1. Realizar uma análise histórica, teórica e metodológica de ensino sobre as sequências de Fibonacci, de Lucas e de Padovan;				
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 40%;"> Endereço: Rua Jorge Dumas, nº 1703 Bairro: Jardim América UF: CE Município: FORTALEZA Telefone: (85)3401-2332 </td> <td style="width: 60%;"> CEP: 60.410-426 E-mail: cep@ifce.edu.br </td> </tr> </table>			Endereço: Rua Jorge Dumas, nº 1703 Bairro: Jardim América UF: CE Município: FORTALEZA Telefone: (85)3401-2332	CEP: 60.410-426 E-mail: cep@ifce.edu.br
Endereço: Rua Jorge Dumas, nº 1703 Bairro: Jardim América UF: CE Município: FORTALEZA Telefone: (85)3401-2332	CEP: 60.410-426 E-mail: cep@ifce.edu.br			



Continuação do Parecer 5.074.370

2. Investigar as relações de recorrência, forma geral e suas identidades das sequências de Fibonacci, de Lucas e de Padovan;
3. Relacionar, em situações didáticas, as identidades das sequências de Fibonacci, de Lucas e de Padovan na forma geométrica com a sua visualização por meio do software GeoGebra.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

Riscos:

Você não deve participar deste estudo caso se sentir-se constrangido com algum dos procedimentos anteriormente citados, tendo a liberdade de deixar de participar do estudo em qualquer momento, sem haver nenhum tipo de prejuízo para a sua conduta. Ao estar participando dos encontros virtuais para a realização das aulas experimentais dessa pesquisa, o sujeito está exposto aos seguintes riscos:

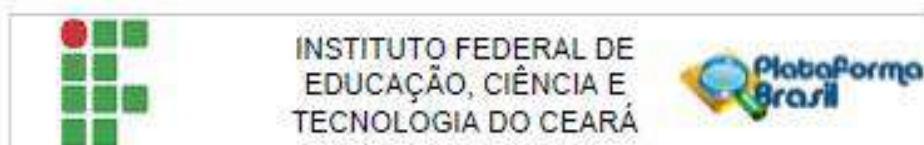
- Riscos ergonômicos

Acontecem devido aos esforços repetitivos que prejudicam a postura do profissional, causando lesões e que podem afetar a realização de suas atividades. São considerados riscos ergonômicos todas as ações que podem interferir nas características psicofisiológicas do profissional. Os melhores exemplos desses riscos são: execução de movimentos repetitivos, trabalho em turnos muito longos e postura incorreta do trabalhador durante a execução de suas funções. Esse risco é classificado com moderado.

Para evitar os riscos existentes dentro desse ambiente, todos os sujeitos da pesquisa devem seguir algumas orientações:

- Usar mobiliário adequado;
- Adotar uma postura correta ao andar ou ficar em pé;
- Sentar-se de jeito certo, preferencialmente em cadeiras com encosto, evitando cruzar as pernas;
- Verificar o ritmo de trabalho e o excesso de carga horária;
- Deixar o monitor na linha dos olhos e nunca mais baixo;
- Manter o teclado posicionado de maneira que o braço forme com o antebraço um ângulo de 90° ou usar um modelo que tenha disposição adequada das teclas para cada uma das mãos;
- Usar apoio de mão arredondados e macios, que são colocados entre o teclado e a borda da mesa;

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703
 Bairro: Jardim América CEP: 60.410-426
 UF: CE Município: FORTALEZA
 Telefone: (85)3401-2332 E-mail: cep@ifce.edu.br



Continuação do Parecer: 5.074.370

- Usar apoio nos pés, um objeto parecido com degrau;
- Realizar pausas durante as atividades manuais ou que provocam repetição de movimentos.

Benefícios:

Ao participar desta pesquisa você não terá nenhum benefício direto. Entretanto, esperamos que este estudo traga informações importantes sobre a metodologia Engenharia Didática usada nas aulas de História da Matemática, de forma que o conhecimento que será construído a partir desta pesquisa possa subsidiar futuras adesões a mesma metodologia, onde o pesquisador se compromete a divulgar os resultados obtidos.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

Projeto de pesquisa apresentado ao programa de Pós-graduação em Ensino de ciência e matemática do IFCE.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

Apresenta todos os termos obrigatórios.

Recomendações:

Sem recomendações.

Conclusões ou Pendências e Lista de inadequações:

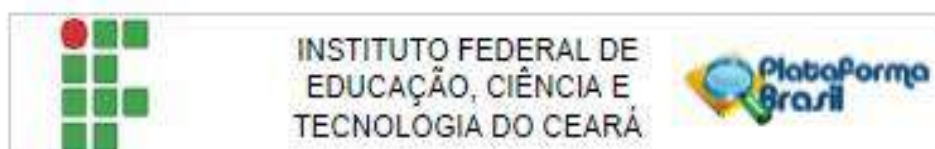
Não há pendências.

Considerações Finais a critério do CEP:

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PE INFORMACOES_BASICAS_DO_P ROJETO_1823941.pdf	18/10/2021 11:00:27		Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	6TCLEATUAL.pdf	18/10/2021 10:59:18	Carla Patrícia Souza Rodrigues Pinheiro	Aceito
Outros	Questionarios.pdf	23/09/2021 15:55:45	Carla Patrícia Souza Rodrigues Pinheiro	Aceito

Endereço: Rua Jorge Dumas, nº 1703
 Bairro: Jardim América CEP: 60.410-426
 UF: CE Município: FORTALEZA
 Telefone: (85)3401-2332 E-mail: cep@ifce.edu.br



Continuação do Parecer: 5.074-370

Orçamento	4Orçamento.pdf	23/09/2021 15:55:11	Carla Patrícia Souza Rodrigues Pinheiro	Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	7Declaraçãodeexistênciaeinfraestrutura pararealizaçãodapesquisa.pdf	23/09/2021 15:54:53	Carla Patrícia Souza Rodrigues Pinheiro	Aceito
Declaração de concordância	3Declaraçãodegarantidaregressodosbe nefícios.pdf	23/09/2021 15:54:06	Carla Patrícia Souza Rodrigues Pinheiro	Aceito
Declaração de Pesquisadores	2Declaraçãodecompromissopelopesquis adoreapresentarosresultadosobtidosno desenvolvimentodapesquisa.pdf	23/09/2021 15:51:42	Carla Patrícia Souza Rodrigues Pinheiro	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	Projeto de Pesquisa.pdf	17/09/2021 12:23:13	Carla Patrícia Souza Rodrigues Pinheiro	Aceito
Cronograma	5Cronograma.pdf	17/09/2021 12:21:45	Carla Patrícia Souza Rodrigues Pinheiro	Aceito
Folha de Rosto	1Folhad Rosto.pdf	17/09/2021 12:21:23	Carla Patrícia Souza Rodrigues Pinheiro	Aceito

Situação do Parecer:

Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:

Não

FORTALEZA, 01 de Novembro de 2021

Assinado por:
Jeffé Ferreira da Silva
(Coordenador(a))

Endereço: Rua Jorge Dumas, nº 1703
Bairro: Jardim América CEP: 60.410-426
UF: CE Município: FORTALEZA
Telefone: (85)3401-2332 E-mail: cep@ifce.edu.br