

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ –
IFCE – CAMPUS FORTALEZA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PGECM

FRANCISCO EVAMAR BARROS

ENGENHARIA DIDÁTICA SOBRE OS NÚMEROS FIGURADOS K-DIMENSIONAIS:
RELAÇÕES RECORRENTES, TERMO GERAL, FUNÇÃO GERADORA E
REPRESENTAÇÃO POR MEIO DE RECURSOS COMPUTACIONAIS

FORTALEZA

2021

FRANCISCO EVAMAR BARROS

ENGENHARIA DIDÁTICA SOBRE OS NÚMEROS FIGURADOS K-DIMENSIONAIS:
RELAÇÕES RECORRENTES, TERMO GERAL, FUNÇÃO GERADORA E
REPRESENTAÇÃO POR MEIO DE RECURSOS COMPUTACIONAIS

Dissertação de Mestrado Acadêmico apresentada ao
Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e
Matemática do Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE – Campus
Fortaleza, como exigência parcial para obtenção do
título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.
Coorientador: Prof. Dr. David Carneiro de Souza

Área de concentração: Ensino de Matemática.

FORTALEZA - CE
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal do Ceará - IFCE
Sistema de Bibliotecas - SIBI

Ficha catalográfica elaborada pelo SIBI/IFCE, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- B277e Barros, Francisco Evamar.
 Engenharia Didática sobre os números figurados k-dimensionais : relações recorrentes, termo geral, função geradora e representação por meio de recursos computacionais / Francisco Evamar Barros. - 2021.
 248 f. : il. color.
- Dissertação (Mestrado) - Instituto Federal do Ceará, Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Campus Fortaleza, 2021.
 Orientação: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.
 Coorientação: Prof. Dr. David Carneiro de Souza.
1. Números Figurados. 2. Software GeoGebra. 3. Geometria. 4. Teoria das Situações Didática. 5. Engenharia Didática. I. Título.

CDD 510.07



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIA MATEMÁTICA (PGECM)

Aos 5 dias do mês de março do ano de 2021, às 14h30 no através de videoconferência pelo link <https://meet.google.com/grb-tuqq-pzq>, realizou-se a Defesa de dissertação, intitulada "**ENGENHARIA DIDÁTICA SOBRE OS NÚMEROS FIGURADOS K-DIMENSIONAIS: RELAÇÕES RECORRENTES, TERMO GERAL, FUNÇÃO GERADORA E REPRESENTAÇÃO POR MEIO DE RECURSOS COMPUTACIONAIS**", de autoria do(a) candidato(a) **FRANCISCO EVAMAR BARROS**, aluno(a) do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PGCEM/IFCE, em nível de Mestrado. A Comissão Examinadora esteve constituída pelos professores: **Prof(a). Dr(a). Francisco Régis Vieira Alves**, Presidente (orientador) – IFCE, **Prof(a). Dr(a). David Carneiro de Souza** (coorientador) – IFCE, **Prof(a). Dr(a). Rafael Jorge Pontes Diógenes** – UNILAB, **Prof(a). Dr(a). Paulo César Cavalcante de Oliveira** – URCA. Concluídos os trabalhos de apresentação e arguição, o(a) candidato(a) foi **APROVADO(A)** pela Comissão Examinadora. Foi concedido um prazo de **90(noventa) dias**, para o(a) candidato(a) efetuar as correções sugeridas pela Comissão Examinadora e apresentar o trabalho em sua redação definitiva, sob pena de não expedição do Diploma. E, para constar, foi lavrada a presente ata, que vai assinada pelos membros da Comissão.

BANCA EXAMINADORA:

Prof(a). Dr(a). Francisco Régis Vieira Alves, Presidente (orientador) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Prof(a). Dr(a). David Carneiro de Souza (coorientador) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Prof(a). Dr(a). Rafael Jorge Pontes Diógenes – Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (Unilab)

Prof(a). Dr(a). Paulo César Cavalcante de Oliveira – Universidade Regional do Cariri (URCA)

Prof(a). Dr(a). Laerte Silva da Fonseca – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sergipe (IFS)

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: "ENGENHARIA DIDÁTICA SOBRE OS NÚMEROS FIGURADOS K-DIMENSIONAIS: RELAÇÕES RECORRENTES, TERMO

GERAL, FUNÇÃO GERADORA E REPRESENTAÇÃO POR MEIO DE RECURSOS COMPUTACIONAIS"

LOCAL: <https://meet.google.com/grb-tuqq-pzq>

HORA DE INÍCIO: **14h30**

Em sessão pública, após exposição de cerca de **45 minutos**, a candidata foi arguida oralmente pelos membros da banca tendo como resultado:

(X) APROVADO, devendo o candidato entregar a versão final no prazo máximo de 90 dias.

() APROVADO com louvor.

() APROVAÇÃO CONDICIONAL, devendo o candidato satisfazer, no prazo máximo de 90 dias, às exigências listadas na Folha de Modificações de Dissertação de Mestrado anexa à presente ata.

() REPROVADO.

Na forma regulamentar foi lavrada a presente ata que é abaixo assinada pelos membros da banca, na ordem acima determinada, e pelo candidato.

BANCA EXAMINADORA

Prof(a). Dr(a). Francisco Régis Vieira Alves, Presidente (orientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Prof(a). Dr(a). David Carneiro de Souza (coorientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Prof(a). Dr(a). Rafael Jorge Pontes Diógenes
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (Unilab)

Prof(a). Dr(a). Paulo César Cavalcante de Oliveira
Universidade Regional do Cariri (URCA)

Prof(a). Dr(a). Laerte Silva da Fonseca
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sergipe (IFS)

Candidato (a): FRANCISCO EVAMAR BARROS



Documento assinado eletronicamente por **Paulo César Cavalcante de Oliveira, Usuário Externo**, em 16/03/2021, às 15:23, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rafael Jorge Pontes Diógenes, Usuário Externo**, em 16/03/2021, às 15:33, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **FRANCISCO EVAMAR BARROS, Usuário Externo**, em 17/03/2021, às 14:02, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Laerte Silva da Fonseca, Usuário Externo**, em 12/04/2021, às 14:41, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **David Carneiro de Souza, Coordenador(a) do Curso de Licenciatura em Matemática**, em 10/05/2021, às 16:41, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Francisco Regis Vieira Alves, Professor(a) do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico**, em 24/05/2021, às 08:39, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade do documento pode ser conferida no site https://sei.ifce.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0 informando o código verificador **2476562** e o código CRC **F74C0411**.

À minha família.

Aqueles que admiram a matemática

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado forças, fé e dedicação ao meu trabalho, por nunca ter me abandonado e por ser a fonte de toda minha força.

Aos meus pais. Minha mãe Fátima que sempre lutou pela minha educação e acredita em todos os meus planos, que sempre esteve presente e é a minha maior admiradora, também é minha maior admiração e ao meu pai Manoel, sempre batalhador, me ensinou que tudo se consegue com luta, dedicação e força, a eles eu agradeço não só por esse trabalho, mas por ter me dado a vida e por serem minha base.

A minha filha, Valentina que me deu a vida ao nascer, é a razão de tudo que eu faço, que não só faço, mas tento fazer da melhor maneira possível para ser um exemplo e também para sempre mostrar o meu melhor.

A minha esposa Bruna, por ser meu alicerce, meu escudo e a pessoa que sei que posso contar para qualquer coisa, pelos planos que fazemos, pelo norte que me dá e pelo carinho e amor a mim dedicados, que sempre será recíproco.

Ao meu orientador, Professor Doutor Francisco Régis, por ter me ajudado desde o começo desta caminhada, pelos ensinamentos, conselhos, retornos e força para superar os momentos mais difíceis nesta jornada.

Ao meu coorientador, Professor Doutor David Carneiro, pelos ensinamento, dedicação e por estar sempre à disposição quando eu precisei.

Aos professores do programa PGECM, pela dedicação e empenho ao ensinar, por serem pessoas acessíveis e serenas, e por fazerem parte da minha formação.

Aos meus colegas de curso e amigos, Arianny, Cícera, Milena, Renata, Rosalide, Alison, Gleison e Hedyleno que sempre estiveram presentes durante este período, compartilhando dos momentos prazerosos e também dos difíceis, que sempre foram mais do que uma equipe, uma verdadeira família.

A todos, o meu mais sincero, muito obrigado.

“Tudo é número”
(Filosofia pitagórica)

RESUMO

Esta pesquisa, apresenta uma investigação acerca das sequências dos números figurados gregos, que tiveram sua origem desde os pitagóricos, que pretendiam aliar a geometria e aritmética de maneira que se pudesse provar sua filosofia de que tudo na natureza pode ser escrito como números. Tais sequências numéricas, quando seus números são representados por pontos, e organizados de forma equidistante, formam figuras geométricas e podem ser escritas em uma dada dimensão k . Este trabalho teve como objetivo organizar situações didáticas com estes números para que suas propriedades sejam organizadas e discutidas, abordando-se tanto o contexto histórico da sua evolução quanto o matemático que se refere as fórmulas de termo geral, recorrência e função geradora, também serão abordados os estudos das propriedades através da visualização, utilizando-se o software GeoGebra como recurso didático. Estas situações foram criadas utilizando-se uma metodologia de ensino intitulada, Teoria das Situações Didáticas (TSD), que visa dividir um dado conteúdo em situações bem definidas que permitam uma análise do desenvolvimento do aluno, são estas; situação de ação, formulação, validação e institucionalização e foi realizada com alunos da graduação do curso de licenciatura em matemática do instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) – campus Fortaleza, na disciplina de História da matemática. A pesquisa tem como metodologia a Engenharia Didática (ED), que compara o trabalho do professor com o de um engenheiro, permitindo um planejamento, pesquisa e análise de um conteúdo em fases bem estruturadas, são estas: análise preliminar, análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori*. Ao fim das situações, foi feita uma análise a luz da TSD para que as questões apresentadas em sala fossem analisadas de forma a apresentar a eficácia ou não dos métodos adotados na fase inicial da pesquisa. Esta análise nos permitir revelar que os estudantes desenvolveram elementos necessários para descrever as relações referentes a números figurados, em suas configurações planas, espaciais e k -dimensionais, bem como suas relações de recorrência, fórmula para o termo geral, função geradora e descrição de propriedades por meio da visualização, cumprindo assim os objetivos da pesquisa.

Palavras-chave: Números Figurados. *Software* GeoGebra. Geometria. Teoria das Situações Didática. Engenharia Didática.

ABSTRACT

This research presents an investigation about the sequences of Greek figurative numbers, which had their origin since the Pythagoreans, who intended to combine geometry and arithmetic in a way that could prove their philosophy that everything in nature can be written as numbers. Such numerical sequences, when their numbers are represented by points, and organized in an equidistant way, form geometric figures and can be written in a given dimension k . This work aimed to organize didactic situations with these numbers so that their properties are organized and discussed, addressing both the historical context of its evolution and the mathematical one that refers to the formulas of general term, recurrence and generating function, will also be addressed studies of properties through visualization, using GeoGebra software as a teaching resource. These situations were created using a teaching methodology called, Theory of Didactic Situations (TDS), which aims to divide a given content into well-defined situations that allow an analysis of the student's development, these are; situation of action, formulation, validation and institutionalization and was carried out with undergraduate students of the undergraduate course in mathematics at the Federal Institute of Education, Science and Technology of Ceará (IFCE) - campus Fortaleza, in the discipline of History of mathematics. The research has as methodology the Didactic Engineering (DE), which compares the work of the teacher with that of an engineer, allowing a planning, research and analysis of content in well structured phases, these are: preliminary analysis, *a priori* analysis, experimentation and *a posteriori* analysis. At the end of the situations, a light analysis of the TSD was carried out so that the questions presented in the classroom could be analyzed in order to present the effectiveness or not of the methods adopted in the initial phase of the research. This analysis allows us to reveal that students have developed the necessary elements to describe the relations referring to figurative numbers, in their flat, spatial and k -dimensional configurations, as well as their recurrence relations, formula for the general term, generating function and description of properties through visualization, thus fulfilling the research objectives.

Keywords: Figurate Numbers. GeoGebra software. Geometry. Theory of Didactic Situations. Didactic Engineering.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - triângulo da relação professor-aluno-saber	38
Figura 2 - esquema de uma situação de ação.....	39
Figura 3 - situação de formulação por esquema	40
Figura 4 - esquema da situação de formulação.....	40
Figura 5 - Pitágoras de Samos	42
Figura 6 - representação dos números triangulares por Nicômaco de Gerasa.....	44
Figura 7 - números lineares	44
Figura 8 - configuração com bolinhas formando números triangulares.....	44
Figura 9 - o <i>gnômon</i>	45
Figura 10 - números pentagonais.....	46
Figura 11 - representação piramidal de Nicômaco de Gerasa	46
Figura 12 - números octaedrais	47
Figura 13 - números da <i>stella octangula</i>	47
Figura 14 - representação de alguns números poligonais.....	52
Figura 15 - gnômon completando um quadrado de pontos	54
Figura 16 - número triangular formado por soma de números naturais	56
Figura 17 - o <i>gnômon</i> dos números triangulares	56
Figura 18 - o <i>gnômon</i> dos números poligonais quadrados	57
Figura 19 - <i>gnômon</i> dos números poligonais pentagonais	57
Figura 20 - os quatro primeiros números triangulares.....	60
Figura 21 - gnômons formando o quinto número triangular	61
Figura 22 - os quatro primeiros números quadrados - elaboração do autor	65
Figura 23 - propriedade dos números quadrados.....	67
Figura 24 - figura do teorema 5.....	68
Figura 25 - os quatro primeiros números pentagonais-elaboração dos autores.....	70
Figura 26 - lista de fórmulas dos números poligonais.....	72
Figura 27 - FG dos números triangulares pelo software wxMáxima	74
Figura 28 - FG dos números quadrados.....	76
Figura 29 - FG dos números poligonais com o auxílio do SM.....	77
Figura 30 - os quatro primeiros números triangulares centralizados.....	78
Figura 31 - terceiro número triangular centralizado apresentado como soma de três números triangulares	80
Figura 32 - os quatro primeiros números quadrados centralizados	81

Figura 33 - FG dos números poligonais centralizados	84
Figura 34 - FG dos números <i>m</i> -gonais centralizados	85
Figura 35: Quinto número triangular e seu simétrico.....	87
Figura 36: sexto números quadrado e seu análogo de índice oposto.....	88
Figura 37 - números pentagonais de índices opostos	88
Figura 38 - números hexagonais de índices opostos	89
Figura 39 - FG dos números triangulares negativos.....	91
Figura 40 - FG dos números pentagonais negativos.....	92
Figura 41 - FG dos números <i>m</i> -gonais de índices negativos.....	92
Figura 42 - quarto número dodecagonal centralizado retirando-se seis números triangulares $n=3$	93
Figura 43 - os quatro primeiros números estrela	94
Figura 44 - Os quatro primeiros números tetraédrais	96
Figura 45- Os quatro primeiros números piramidais quadrados	97
Figura 46 - Quarto número piramidal pentagonal	98
Figura 47 - Os quatro primeiros números cúbicos	100
Figura 48 - FG dos números cúbicos no SG.....	102
Figura 49 - octaedro formado como casco convexo de pontos no espaço	103
Figura 50 - os quatro primeiros números octaédricos	103
Figura 51 - função geradora dos números piramidais quadrados multiplicados por "x"	106
Figura 52 - Os cinco sólidos de Platão	107
Figura 53 - Os cinco primeiros números dodecaedrais	110
Figura 54 – Função geradora dos números dodecaedrais pelo SG.....	111
Figura 55 - Os cinco primeiros números icosaedrais no SG	112
Figura 56 - FG dos números icosaedrais no SG	112
Figura 57 - as quatro primeiras configurações da stella octangula.....	113
Figura 58 - configuração do décimo número da stella octangula.....	114
Figura 59 - quinto número pentatope	116
Figura 60 – triângulo euleriano	120
Figura 61 - quatro primeiros números hipercúbicos para $k=1$	122
Figura 62 - representação do hipercubo 4D.....	122
Figura 63 - os quatro primeiros números hipercúbicos 4D	123
Figura 64 - representação do crescimento dimensional dos ortoplexos	125
Figura 65 - representação do crescimento dos números quadrados	125

Figura 66 - crescimento de um ortoplexo 3D	126
Figura 67 - relação dos números octaédricos e tetraédricos	127
Figura 68 - representação de um número ortoplexo 4D e sua relação com os números de pentatope	128
Figura 69 - quinto número hiperoctaédrico 4-dimensional	130
Figura 70 - função geradora dos números hiperoctaédricos 4-dimensionais, por meio do software máxima.....	131
Figura 71 - representação do crescimento dimensional dos ortoplexos	132
Figura 72- Quinto número triangular	134
Figura 73 - Nono número quadrado como soma de dois números triangulares	135
Figura 74 - esquema do polígono de construção dos números pentagonais.....	136
Figura 75 - construção de uma lista de pontos sobre o polígono base para os números pentagonais	137
Figura 76 - Quinto número pentagonal.....	137
Figura 77 - relação dos números hexagonais e triangulares	138
Figura 78 - Exemplo de números poligonais centralizados.....	139
Figura 79 - Sexto número triangular centralizado	140
Figura 80 - números quadrados centralizados e a relação com números triangulares	141
Figura 81 - números pentagonais centralizados e sua relação com números triangulares	141
Figura 82 - Quarto número estrela.....	143
Figura 83 - outra visão no software geogebra do quarto número estrela	143
Figura 84 - relação de números pentagonais e triangulares.....	144
Figura 85- relação de números hexagonais e triangulares.....	145
Figura 86 - Sétimo número tetraédrico.....	147
Figura 87 - Quarto número piramidal quadrado com destaque na base	148
Figura 88 - Quinto número piramidal pentagonal, e sua relação com números tetraédricos	149
Figura 89 - Outra apresentação dos números piramidais pentagonais no software GeoGebra	150
Figura 90 - número piramidal pentagonal com ênfase na recorrência	150
Figura 91 - Quinto número octaédrico	151
Figura 92 - Quinto número cúbico construído com números tetraédricos	152
Figura 93 - Visão aproximada de um número cúbico	153
Figura 94 - resolução da relação entre os números dodecaedrais e tetraédricos no SG	155
Figura 95 - 5º, 6º e 7º números dodecaedrais	155

Figura 96 - constatação da relação entre números icosaédrais e tetraédrico no SG.....	156
Figura 97 - 5º, 6º e 7º números icosaedrais.	156
Figura 98 - Stella octangula construída com dois tetraedros.....	157
Figura 99 - Números octaédricos construídos no núcleo de uma stella octangula.....	157
Figura 100 - Sétimo número da stella octangula	158
Figura 101 - Visão aproximada de um número da stella octangula	159
Figura 102 - Outra construção para os números da stella octangula	160
Figura 103 - Visão aumentada para a segunda construção dos números da stella octangula.	160
Figura 104 - números tetraédricos de índices positivo e negativos	162
Figura 105- números piramidais quadrados e sua relação com os números tetraédricos.....	163
Figura 106 - quinto número piramidal pentagonal, seu análogo negativo e a relação com tetraédricos.....	164
Figura 107- quinto número piramidal pentagonal	165
Figura 108- número piramidal pentagonal com $n=-5$	165
Figura 109- números piramidais hexagonais com $n=-5$ e $n=5$	167
Figura 110- vista 3D de números piramidais hexagonais de índices opostos	167
Figura 111- composição de um número piramidal hexagonal através de números tetraédricos	168
Figura 112- composição de um número piramidal hexagonal com índice negativo com números tetraédricos também de índices negativos	168
Figura 113 - números triangulares no software geogebra	171
Figura 114 - ponto A dos números triangulares no <i>sottware</i> GeoGebra	171
Figura 115 - lista de pontos dos números triangulares	172
Figura 116 - sequência completa dos números triangulares no software GeoGebra.....	173
Figura 117 - números quadrados a partir do software GeoGebra.....	174
Figura 118 - números pentagonais no software GeoGebra	174
Figura 119 - números pentagonais triangulados.....	175
Figura 120 - números hexagonais com software GeoGebra.....	176
Figura 121 - números hexagonais com triângulos.....	176
Figura 122 - números piramidais triangulares no SG.....	177
Figura 123 - número piramidais quadrados no SG.....	178
Figura 124 - números piramidais hexagonais no SG.....	179
Figura 125 - números octaedrais no SG	180
Figura 126 - número cúbico separado em pirâmides triangulares.....	180

Figura 127 - números triangulares centralizados com triângulos.....	182
Figura 128 - números cúbicos a partir de números tetraédricos.....	182
Figura 129 - números octaédricos a partir de números tetraédricos.....	183
Figura 130 - crescimento dimensional dos números simplexos.....	185
Figura 131 - apresentação dos números triangulares.....	187
Figura 132 - termo geral para os números triangulares (Aluna A5 situação de ação)	188
Figura 133 - fórmula fechada dos números triangulares (Aluna A5 - fase de validação).....	189
Figura 134 - fase de formulação para a prova de indução dos números triangulares (Aluno A6)	189
Figura 135 - fase de formulação do aluno A6 depois da intervenção	190
Figura 136 - segundo passo da indução (Aluno A2 - fase de validação)	190
Figura 137 - Aluno A2 na fase de ação para a sequência dos números quadrados	191
Figura 138 - Aluno A2 fase de formulação para determinar a recorrência dos números quadrados.....	192
Figura 139 - Aluno A5 fase de validação para a sequência dos números quadrados.....	192
Figura 140 - fórmula válida para os números triangulares e quadrados.....	193
Figura 141 - fórmula válida para os números triangulares e quadrados.....	194
Figura 142 - aluno A1 na fase de formulação	195
Figura 143 - validação feita pelo aluno A1	196
Figura 144 - questão apresentada pelo professor para provar a soma de números quadrados	197
Figura 145 - aluno A6 continuando a questão proposta	198
Figura 146 - aluno A6 apresentando a questão devidamente resolvida	198
Figura 147 - aluno A1 apresentando a fórmula para os números tetraédricos	199
Figura 148 - relação entre números triangulares	201
Figura 149 - aluno A2 na fase de formulação	202
Figura 150- aluno A2 na fase de validação	202
Figura 151 - aluna A3 na fase de validação	203
Figura 152 - relação dos números quadrados com os números triangulares	203
Figura 153 - aluno A2 fase de ação/formulação.....	204
Figura 154 - aluna A4 na fase de validação	204
Figura 155 - apresentação dos números piramidais quadrados	205
Figura 156 - apresentação dos números piramidais pentagonais	206
Figura 157 - apresentação dos números piramidais hexagonais	206
Figura 158 - fase de formulação do estudante A8	207

Figura 159 - fase de validação feita pelo aluno A8	207
Figura 160 - apresentação dos números octaedrais	208
Figura 161 - fase de validação da fórmula dos números octaedrais pelo aluno A8	209
Figura 162 - fase de validação dos números cúbicos, aluno A8.....	209
Figura 163 - FG a partir da descrição de A6	211
Figura 164 - apresentação da FG dos números pentagonais por A6	212
Figura 165 - solução apresentada por A6 para a FG dos números pentagonais centralizados	212
Figura 166 - fórmula encontrada por A6 no SG	213
Figura 167 - FG dos números pentagonais centralizados.....	213
Figura 168 - fase de validação da S4.....	214
Figura 169 - aluno A1 na fase de ação da S5	216
Figura 170 - relação de recorrência encontrada pelo aluno A1, fase de formulação	216
Figura 171 - relação encontrada pelo aluno A1 na S5.....	218
Figura 172 - aluno A1 na fase de validação de S5	218
Figura 173 - fase de validação feita por A1 na S5.....	219
Figura 174 – crescimentos dos números simplexos	229

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - parte da família de sequência dos números de gnômons poligonais.....	58
Tabela 2 - tabela dos teoremas 1 e 2.....	64
Tabela 3 - recorrência e termo geral dos números piramidais.....	99
Tabela 4 - Lista da forma geral para os números platônicos	110
Tabela 5 - os dez primeiros números simplexos das nove primeiras dimensões	118
Tabela 6 - conjunto de permutações divididas por subidas	119
Tabela 7 - os quinze primeiros números hipercúbicos para as sete primeiras dimensões.....	123

LISTA DE SIGLAS

CEP – comitê de ética e pesquisa

DM – Didática da Matemática

ED – Engenharia Didática

FG – Função Geradora

NF – números figurados

PP – Poliedro de Platão

SG – software GeoGebra

SM – Software wxMáxima

TSD – Teoria das situações didáticas

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	23
1.1	Análises prévias.....	24
1.1.1	<i>Revisão bibliográfica</i>	25
1.1.2	<i>Abordagem histórica e didática dos números figurados</i>	26
1.2	Problemática e justificativa da pesquisa.....	27
1.3	Objetivos da pesquisa	28
1.3.1	<i>Objetivo geral</i>	28
1.3.2	<i>Objetivos específicos</i>	29
2	REFERENCIAL TEÓRICO	30
2.1	Engenharia didática.....	30
2.1.1	<i>Análises preliminares</i>	32
2.1.2	<i>Análise a priori e concepção</i>	34
2.1.3	<i>Experimentação</i>	35
2.1.4	<i>Análise a posteriori</i>	36
2.2	Teoria das situações didáticas (TSD)	36
2.3	Evolução histórica dos números figurados.....	41
3	CAMPO MATEMÁTICO DE ESTUDO: O CRESCIMENTO DIMENSIONAL DOS NÚMEROS FIGURADOS E SUAS REPRESENTAÇÕES	49
3.1	Sequências lineares recursivas e suas representações	49
3.1.1	<i>Equação de recorrência.....</i>	49
3.1.2	<i>Forma geral.....</i>	50
3.1.3	<i>Função geradora.....</i>	50
3.2	Apresentação dos números figurados	52
3.3	O gnômon.....	53
3.3.1	<i>O número de gnômons dos números poligonais.....</i>	55
3.4	Números figurados planos	59
3.4.1	<i>Números poligonais</i>	59
3.4.2	<i>Números poligonais centralizados</i>	77
3.4.3	<i>Extensão para os índices negativos dos números poligonais.....</i>	85
3.4.4	<i>Números estrela</i>	93

3.5	Números poliedrais.....	95
3.5.1	Números piramidais.....	95
3.5.2	Números cúbicos.....	100
3.5.3	Números octaédrais	103
3.5.4	Números platônicos	106
3.5.5	Números da stella octangula	113
3.6	Números figurados k-dimensionais.....	114
3.6.1	Números simplexos k-dimensionais.....	115
3.6.2	Números hipercúbicos k-dimensionais	119
3.6.3	Números ortoplexos k-dimensionais	124
3.7	Relação entre números figurados com o uso do software GeoGebra.....	133
3.7.1	Construção de números figurados planos a partir de números triangulares.....	135
3.7.2	Construção dos números poligonais com extensão para índices negativos	144
3.7.3	Construção de números figurados 3D, a partir de números triangulares.....	146
3.7.4	Visualização dos números piramidais com extensão para índices negativos.....	161
4	VISUALIZAÇÃO DOS NÚMEROS FIGURADOS COM O APOIO DO SOFTWARE GEOGEBRA: ELABORANDO SITUAÇÕES DIDÁTICAS PARA O ENSINO	170
4.1	Situação didática 1: encontrar a fórmula para o n-ésimo número poligonal m-gonal.	170
4.2	Situação didática 2: a forma geral dos números piramidais m-gonais e platônicos	177
4.3	Situação didática 3: propriedades de números figurados.....	181
4.4	Situação didática 4: descrever a função geradora dos números poligonais e simplexos.....	183
4.5	Situação didática 5: forma geral dos números simplexos	184
5	DISCUSSÃO DOS DADOS	186
5.1	Validação interna e a análise a posteriori	186
5.1.1	Validação da situação 1: encontrar a recorrência e termo geral para os números poligonais	187
5.1.2	Validação da situação 2 – forma geral e recorrência dos números piramidais e platônicos	196

5.1.3	<i>Validação da situação 3 – com base na visualização dos números figurados, definir e provar possíveis propriedade e relações entre eles.</i>	200
5.1.4	<i>Validação da situação 4 – a função geradora dos números poligonais, poligonais centralizados e simplexos.....</i>	210
5.1.5	<i>Validação da situação 5 – forma geral dos números simplexos</i>	215
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	221
	REFERÊNCIAS	224
	APÊNDICE A – MAPA MENTAL DA CLASSE DOS NÚMEROS SIMPLEXOS	229
	APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)	230
	APÊNDICE C – QUESTIONÁRIOS.....	233
	ANEXO A – GRADE CURRICULAR DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA – IFCE – CAMPUS FORTALEZA.....	242
	ANEXO B – PROGRAMA DE UNIDADE DIDÁTICA – PUD DA DISCIPLINA DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA - IFCE.....	244
	ANEXO C – PARECER DO COMITÊ DE ÉTICA E PESQUISA.....	246

1 INTRODUÇÃO

Os elementos que contribuem significativamente para o ensino de matemática são objetos de vários estudos que constituem o campo da didática da matemática. Dentre os vários caminhos seguidos pelos pesquisadores, destacamos a Didática da Matemática de origem francesa, desenvolvida no início dos anos 1970 com o “contexto marcado pela reforma da Matemática Moderna, pela criação dos IREM (Instituto de Pesquisa sobre Ensino da Matemática)” (ALMOULOUD, 2018). Segundo Alves (2016), nesse contexto existia uma convicção que deveriam acontecer muitas mudanças no sistema de ensino francês, causando uma mobilização de estudiosos que atuavam dentro das universidades.

Para Almouloud (2018), também foram fatores importantes a necessidade de desenvolver mecanismos para o ensino da matemática com o avanço das teorias de aprendizagem, o que conferia a matemática um certo saber específico e, por isso, a urgência em um debate no assunto. Nesse contexto, surgiu a discussão acerca da Didática da matemática, a preocupação não seria tão somente a aprendizagem, mas também outros entes que cercam a educação, como a formação de professores, currículo, livros, dentre outros.

Dentro dessa mesma linha de pensamento, porém não introdutória e sim tendo em vista a necessidade de aprimoramento, ainda existe a necessidade do debate e estudo para que sempre se possa incrementar elementos que forneçam suporte para possíveis estudos dentro da área do ensino de matemática. Assim, alguns assuntos puramente matemáticos devem ser usados como ponte para que se desenvolva um trabalho visando o ensino, porém aparado pelos pressupostos da Didática da Matemática Francesa, no nosso caso, a História da Matemática (HM) ainda deve ser amparada por outros conteúdos específicos como teoria dos números, estudo de sequências e uso de softwares para ajudar na visualização e desenvolvimento e compreensão de cálculos mais complexos.

Na história da matemática, o estudo das sequências numéricas constituem uma grande quantidade de possibilidades, pois envolvem, além do seu descobridor, uma série de descobertas dentro de outras áreas dentro da matemática, tal estudo permite a aplicação de situações didáticas aplicáveis no ensino dentro de uma abordagem epistêmico-matemática e histórica acerca do assunto. Dito isto, este trabalho traz a evolução dos números figurados gregos, observados pelos pitagóricos e desenvolvidos através dos anos por vários matemáticos fascinados pelo assunto que surgiu para explicar a ligação entre álgebra e geometria, além de

um sentido místico dentro da lógica dos pitagóricos para explicar que tudo da natureza é pura matemática.

Estes números formam sequências numérica e trazem consigo uma peculiaridade entre as demais sequências conhecidas e mais estudadas, pois estes podem ser escritos como pontos que formam figuras geométricas, ou seja, além de descritas como estruturas algébricas, também podem ser representadas por figuras, ampliando ainda mais as possibilidades de estudo. Assim, esse estudo objetivou estudar a maioria das possibilidades das sequências dos números figurados, dentro do contexto da educação matemática, fazendo com que esse conteúdo apresentasse uma visão mais voltada para o ensino e também dentro da HM que não lhe confere um lugar tão importante quanto deveria ser por se tratar de um assunto que além de ter passado por várias descobertas durante os anos, desde os pitagóricos, também representa uma variedade de linhas de estudos.

Assim, na presente pesquisas são apresentadas os aspectos históricos e matemáticos que fizeram com que os números figurados tivessem uma evolução deste sua representação plana, ou seja, números que representam figuras geométricas bidimensionais, sua representação piramidal, isto é, números que representam pirâmides ou camadas de números planos consecutivos, até as representações atuais que generalizam as figuras e, conseqüentemente, os números figurados dentro do espaço k -dimensional. Tais aspectos são apresentados por meio de uma metodologia de pesquisa, a Engenharia Didática (ED) de Artigue (1995) e uma metodologia de ensino, a Teoria das situações Didáticas (TSD) de Brousseau (1976), em seguida apresentaremos algumas análises que nortearão a nossa pesquisa, tais como a revisão bibliográfica, um pouco da história dos números figurados bem como a problemática da pesquisa e seus objetivos, tais análise serão base para o estudo que fora desenvolvido e nos deram suporte para a compreensão e desenvolvimento da pesquisa.

1.1 Análises prévias

Dentro da ED, devemos organizar em etapas o estudo para que este seja sequenciado, deste modo, uma parte da pesquisa inicial será voltada para a revisão bibliográfica, em que procuraremos autores que tratam de ED, TSD e também dos números figurados, a outra parte consiste em procurar uma abordagem que ligue a história dos números figurados dentro da sua evolução através dos anos dentro da história da matemática e da didática da matemática, esse último nos permitirá estudar, criar e modificar situações de ensino que serão necessárias para a evolução da presente pesquisa.

1.1.1 Revisão bibliográfica

Para o estudo em questão, é necessário que se faça um levantamento para cada um dos assuntos, por isso foram consultadas dissertações, livros, teses e artigos para cada tema em questão, esses temas são tratados algumas vezes de forma independente mas nesse trabalho é necessário que possamos uni-los de forma a trazer o sentido de ensino de matemática proposto pela pesquisa. Assim, os assuntos pesquisados se referem a: Engenharia Didática, Teoria das situações Didática e Números figurados, bem como assuntos que possam nos guiar na busca pela junção destes.

Dentro dos materiais consultados para o estudo da Engenharia Didática, destaca-se, além do livro de Artigue (1995), esta fonte principal de estudos acerca do assunto, ainda foi artigos como Alves e Dias (2018) que traz um debate sobre as duas primeiras etapas da ED, A dissertação de Oliveira (2018) que aborda todas as fases da ED empregadas para o ensino da sequência de Fibonacci, os artigos de Almouloud e Silva (2012), que definem bem as etapas da ED e apresentam a discussão sobre o uso e evolução da noção de Engenharia didática, também foram consultados os trabalhos Alves (2016), Pommer (2013) e Alves (2014), feita essa revisão acerca da Engenharia Didática, iniciamos o estudo sobre a Teoria das Situações Didáticas.

Para entendermos como elaborar a fase de experimentação da ED, necessitaríamos dos estudo da TSD por isso, foram consultadas algumas obras, dentre elas destacamos principalmente a de Brousseau (1997), Brousseau (1986) que trazem a definição e fases da TSD, a dissertação de Oliveira (2018), Teixeira e Passos (2013) por serem da literatura brasileira, além da dissertação de Fonseca (2011), desse modo podemos investigar sobre a elaboração de situações didáticas, diante disto, podemos iniciar o estudo de campo matemático.

Diante da bibliografia das teorias já definidas, foi preciso entender e descrever a generalização dos números figurados, como estes são sequências recorrentes e precisavam ser descritas com suas formas gerais, recorrências e função geradora por isso foram consultadas as dissertações de Silva (2015) que trata de recorrências lineares.

Para compreender a geometria contida nas sequências dos números figurados, foi necessário um estudo aprofundado sobre o crescimento dimensional dos politopos, para isso foram consultadas várias obras, dentre ela destaca-se o livro de Coxeter (1973), Coxeter (1969) que abordam a generalização de figuras geométricas k -dimensionais, ou politopos como são descritos na maior parte deste escrito.

Diante do entendimento sobre o comportamento dimensional dos politopos, seguimos então para o estudo dos números figurados propriamente ditos, para este tema, foi consultado o

livro de Deza e Deza (2012) que trata puramente da generalização de muitas classes de números figurados bem como o artigo de Alves (2012) que aborda a evolução histórica dos números figurados e algumas propriedades de tais números. Além disso foram utilizados livros que trazem as primeiras definições de alguns números figurados como Conway e Guy (1996), Burton (1986) e da dissertação de mestrado de Chipatala (2016), que nos ajudou a estruturar os primeiros capítulos.

Diante disto, o passo seguinte consistiu em elaborar as situações de ensino previstas na ED por meio da TSD, onde foram consultadas as mesmas obras da fase inicial da pesquisa, mais precisamente as dissertações de Oliveira (2018) e Santos (2017) para o entendimento do percurso metodológico a ser seguido, já que esses trabalhos também descrevem situações didáticas porém com aplicações da sequência de Fibonacci, porém com enfoque diferente, a primeira para a complexificação do modelo de Fibonacci e a segunda para a generalização com extensão para os inteiros da mesma sequência.

Sendo assim, a revisão bibliográfica fora descrita seguindo todos os passos da pesquisa segundo a ED, os escritos pesquisados foram para a metodologia de pesquisa, metodologia de ensino e conteúdo matemático, mesmo que em alguma as metodologias aparecessem juntas, foi necessário um estudo de ambas separadamente. O conteúdo matemático foi preciso separar por partes pois seria necessário estudar sobre geometria, sequências numéricas e história da matemática, esses, na maioria das vezes, em escritos diferentes. A ligação que foi feita em relação aos números estudados e a metodologia utilizada, serão descritos no próximo tópico.

1.1.2 Abordagem histórica e didática dos números figurados

Para esta seção, devemos descrever como abordar os números figurados em sala e também o lócus de aplicação, assim, foi necessário uma breve pesquisa na matriz curricular do curso de licenciatura em matemática do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Ceará (IFCE), para determinar qual a disciplina que melhor se encaixaria no conteúdo a ser desenvolvido, visto que o desenvolvimento dos números figurados tratam de teoria dos números, conceitos de geometria, história da matemática, dentre outros assuntos que poderiam ser aplicados em boa parte das disciplinas dentro da grade matemática do curso em questão.

Diante de todos essas análises, e, como seria necessária desenvolver uma discussão histórica para o desenvolvimento inicial dos números figurados, a disciplina escolhida foi a História da Matemática, pois além de tratar de conteúdos históricos sobre diversos matemáticos, também trata da evolução histórica da aritmética, essencial para o desenvolvimento das noções de números figurados, geometria, esta, sendo base para compreender crescimentos

dimensionais e nomenclatura de politopos e algébrica, sendo de grande importância para as generalizações previstas na maioria das explicações.

Diante deste aprofundamento na disciplina de HM, foi constatado que os números figurados são estudados na disciplina na parte que trata da história da criação de Pitágoras, como a disciplina também aborda a evolução da sequência de Fibonacci, nós podemos desenvolver a parte histórica e matemática dos números figurados por meio de livros de história da matemática e sua parte matemática por meio de artigos que discutem esses números dentro de uma análise algébrica e de suas fórmulas de recursão e geral. Essa descrição nos permitiu, então, descrever toda a problemática e justificativa da pesquisa, abordadas no tópico seguinte.

1.2 Problemática e justificativa da pesquisa

Visto que a maioria dos livros de história da matemática, trazem a abordagem sobre os números figurados muito pormenorizadas, ou seja, ficam restritos aos que os pitagóricos concluíram. Estes tratando das primeiras sequências de números figurados planos, ou seja, apenas configurações que representam polígonos e poucas configurações que representam poliedros. Ademais, Pitágoras é conhecido como o descobridor das triplas pitagóricas e da relação entre catetos e hipotenusa, ou seja os livros de HM não abordam com tanta atenção os números figurados.

Como era de se esperar, os livros de HM não trazem a evolução histórica que se espera visto que o conteúdo deveria apresentar algum assunto desde a sua descoberta até o que se foi construindo através do tempo com o crescimento do número de sequências cada vez maior, deste modo não se sabe bem quem foram os autores que conseguiram discutir outras sequência que também representam figuras geométricas e mesmo que muitos autores a descrevam, esse debate fica fora da disciplina de HM que se preocupa apenas em mostrar as descobertas de Pitágoras e seus seguidores, deixando assim, hiatos históricos acerca dos números figurados.

De todo modo, foram encontrados durante a revisão bibliográfica dos números figurados, relações que remetem a elementos de ordem cognitiva e didática, podendo estes números, apresentarem um conjunto de opções didáticas para o ensino e compreensão de assuntos históricos e matemáticos dentro da disciplina de HM, o que seria de grande importância para que os estudantes e futuros professores.

No aspecto cognitivo, podemos destacar a relação entre as sequências seguindo padrões semelhantes aos que acontecem na geometria com as figuras geométricas, no aspecto didático, destacamos que estas sequências são aplicáveis em qualquer nível de ensino, trazendo uma

variedade de opções para futuros professores, desde de o ensino fundamental, quando se pode trabalhar usando as representações feitas por pontos até o ensino superior, quando se pode abordar o crescimento dimensional de uma sequência e seus análogos multidimensionais.

Visto isso, a justificativa da nossa pesquisa busca resolver a seguinte questão: como desenvolver uma engenharia didática para os números figurados que nos permitam traspor a evolução matemática de tal conteúdo por meio de situações de ensino em sala?

Para resolver essa questão, temos que construir alguns objetivos que nos permitam evoluir a pesquisa e, ao passo em que forem resolvidos, as situações de ensino propostas sejam elaboradas buscando a melhor compreensão do assunto. Com base nisso, uniu-se estes aspectos com a finalidade de trabalhar estes aspectos cognitivos e didáticos, no plano cognitivo, foi trabalhado a evolução de conceitos matemáticos a fim de instigar o estudante a encontrar a resposta por meio de raciocínio dedutivo-matemático, nas fases da TSD desenvolvidas durante a aplicação. Já no plano didático pode-se trabalhar a transposição didática das relações matemáticas existentes nos números figurados também seguindo as fases da TSD.

1.3 Objetivos da pesquisa

Para Almouloud e Coutinho (2008), na ED os objetivos devem ter uma concordância em comparação das fases de análise *a posteriori* e *a priori*, estas devem “relacionar as observações com os objetivos definidos a priori e estimar a reprodutibilidade e a regularidade dos fenômenos didáticos identificados” (ALMOULOU & COUTINHO, 2008, p.68). Assim, este trabalho busca descrever seus objetivos com base nas fases da ED, com a finalidade de comparar seus resultados e analisar as fases que antecedem e procedem a aplicação da pesquisa compreendendo os pressupostos estabelecidos pela metodologia ensino juntamente com a metodologia de pesquisa. Desta forma foram elencados os seguintes objetivos geral e específicos.

1.3.1 Objetivo geral

Realizar um estudo e a aplicação deste com base na Engenharia Didática e Teoria das Situações Didáticas, para a generalização e visualização das sequências dos números figurados *k*-dimensionais, ou seja, desenvolver um estudo sobre as relações entre os números figurados por meio de situações didáticas que possibilitem a adequação do conhecimento científico com as possibilidades cognitivas dos estudantes.

1.3.2 *Objetivos específicos*

1. Investigar as relações de recorrência, forma geral e função geradora para os números figurados e seu crescimento dimensional.
2. Explorar, em situações didáticas, as relações entre os números figurados e sua visualização por meio de recursos computacionais como o *software geogebra* e *wxMáxima*.
3. Realizar um estudo histórico sobre a evolução epistêmico-matemática dos números figurados dentro da proposta das situações didáticas em sala.

Dados estes objetivos, a pesquisa foi desenvolvida para que seus resultados fossem comparados e avaliados se estes foram alcançados ou não, para que a pesquisa fosse realizada dentro da proposta da ED e TSD será descrito adiante o referencial teórico da pesquisa relacionado as teorias estudadas juntamente com uma abordagem inicial sobre os números figurados.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O presente capítulo trata do desenrolar das teorias de ensino e pesquisa, intitulados teoria das situações didáticas (TSD) e engenharia didática (ED), respectivamente, que tiveram suas origens diante da discussão dentro da didática da matemática (DM) surgida por volta do final da década de 1960 e início da década de 1970, esta é apresentada como:

a arte de conceber e conduzir condições que podem determinar a aprendizagem de um conhecimento matemático por parte de um sujeito (que pode ser qualquer organismo envolvido nessa atividade: uma pessoa, uma instituição, um sistema, até mesmo um animal). Aqui é preciso entender que a aprendizagem como um conjunto de modificações de comportamentos (portanto de realizações de tarefas solicitadas) que assinalam, para um observador pré-determinado, segundo sujeito em jogo, que o primeiro sujeito dispõe de um conhecimento (ou de uma competência) ou de um conjunto de conhecimentos (ou de competências), o que impõe a gestão de diversas representações, a criação de convicções específicas, o uso de diferentes linguagens, o domínio de um conjunto de repertórios de referências idôneos, de experiências, de justificações ou de obrigações. Essas condições têm que poder ser colocadas em ação e reproduzidas intencionalmente. Nesse caso fala-se de práticas didáticas. (D'AMORE, 2007, p.183)

Neste caso trata-se de como este conhecimento pode ser passado a diante, esta definição está voltada tanto da arte de ensinar quanto com a preocupação de se aprender, para Brousseau (1986), se por um lado o professor espera algo do aluno, o aluno também espera algo do professor. Para D'Amore (2007) as práticas didáticas são formada por um tipo de condição e, acabem se tornando o próprio objeto de estudo. Sendo assim, A didática mostra-se como o estudo destas condições, como propostas e realizações que buscam a efetividade do que se deseja ensinar.

Os estudos científicos – de tipo experimental – nesse campo necessitam da explicitação de conceitos e métodos que têm que ser submetidos a exigências de verificação de coerência e de adequação à contingência específica. Certas teorias, como por exemplo, a teoria das situações didáticas, têm como objeto dizer o que estuda a didática. (D'AMORE, 2007, p. 184)

Diante disto, nas próximas subseções, discutiremos a ED e TSD como aporte para o ensino de conceitos dentro da DM, trazendo um pouco da sua história e importância no ensino objetivando-se com isso, entender como estes processos modificam ou interferem nas práticas adotadas pelo professor dentro de um ambiente de ensino.

2.1 Engenharia didática

Para estruturarmos a presente pesquisa, usaremos como metodologia de pesquisa, a Engenharia Didática ou de seus elementos, uma vez que quando lançamos um problema, consideramos o primeiro passo para iniciarmos uma ED.

Antes de iniciarmos o estudo da ED, porém, é necessário que façamos um relato de cunho histórico do seu surgimento, segundo Douady (1995) durante as décadas de 1960 e 1970, a comunidade tanto científica passou por uma crise matemática muito forte em muitos países da Europa inclusive na França, a autora relata que nesse período o currículo matemático era de responsabilidade de estudiosos e intelectuais de renome e tinha-se como objetivo, reduzir as poderosas ferramentas matemáticas porém, que respeitasse o rigor da matemática, a ideia era que “se os alunos tivessem esse número reduzido de ferramentas poderosos e gerais, então eles poderiam aplicá-los em muitas situações diferentes” (Douday, 1995).

Para tentar barrar essa crise instalada, foram criados na França os intitutos de Investigação do Ensino em Matemática (IREM), que tinham forte influência de Bourbaki, Douday relata que esses institutos trabalhavam com Douady (1995, p. 3) esclarece que nos IREM's, “trabalhavam professores de todos os níveis de ensino interessados em investigações no âmbito do ensino de Matemática. E, a partir da sinergia dos grupos de trabalhos, se formulou um trabalho e uma nova problemática” (LIMA, 2016). Os estudos realizados buscavam ênfase no significado e como consequência “os problemas fontes de aprendizagem e de desequilíbrios para os quais os alunos não manifestam todos os conhecimentos para a sua solução” (DOUADY, 1995, p. 4).

Para isso Artigue (1995) relata que a ED surgiu com o objetivo de abordar questões cruciais dentro da didática da matemática.

A noção de engenharia didática surgiu na didática da matemática no início dos anos oitenta. Foi nomeado com este termo uma forma de trabalho didático comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto específico, é baseado no conhecimento científico de seu domínio e concordar em submeter a um tipo científico. No entanto, ao mesmo tempo, ele é obrigado a trabalhar com objetos muito mais complexos que objetos refinados da ciência e, portanto, tem que abordar praticamente, com todos os meios disponíveis, problemas que a ciência não quer ou não pode assumir (Artigue, 1995)

A engenharia didática (ED) é uma metodologia de pesquisa que segundo Santos (2017), tem como principal foco valorizar o professor no que tange a sua prática e experiência em sala de aula, sendo assim ele se torna um pesquisador em potencial, devido a essas experiências, a prática do professor podem “ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado objeto matemático e, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito” (ALMOULOU, 2007, p.171).

A ideia é que o professor considere que sua prática de ensino pode ser articulada junto as práticas de investigação, desse modo pode servir para que ele se aproprie de novas práticas a partir das suas experiências, isso facilitaria a busca por uma aprendizagem significativa por parte de seus alunos.

A Engenharia Didática foi criada para atender a duas questões: a) das relações entre pesquisa e ação no sistema de ensino; b) do lugar reservado para as realizações didáticas entre as metodologias de pesquisa. É uma expressão com duplo sentido. Designa produções para o ensino, derivadas de resultados de pesquisa, e também designa uma específica metodologia de pesquisa baseada em experiências de sala de aula. Nessa linha, prática de ensino é articulada com prática de investigação. A teoria da Engenharia Didática pode ser vista como referencial para o desenvolvimento de produtos para o ensino, gerados na junção do conhecimento prático com o conhecimento teórico. (CARNEIRO, 2005, p. 3)

A Engenharia Didática é dividida, segundo Artigue (1996) em quatro fases entre sua elaboração e execução, estas fases são conhecidas como: 1) análises preliminar; 2) concepção e análise *a priori*; 3) implementação da experiência; 4) análise *a posteriori* e validação da experiência, a seguir, descreveremos cada fase com suas características específicas

2.1.1 Análises preliminares

Esta fase consiste em um estudo a fim de analisar como o conteúdo é repassado, pois a partir desse estudo podemos obter meios necessários para posteriormente propormos possíveis intervenções. Nesta etapa, o trabalho deve ser dividido em três dimensões segundo Santos (2017)

[...]epistemológica, relacionada com o saber em estudo, podendo ser observada sua evolução histórica, os obstáculos relativos à sua natureza, dentre outros aspectos; didática, relativa à forma como o conteúdo é apresentado nos livros didáticos, como proposta de ensino ao professor; cognitiva, caracterizada pela análise de questões relativas aos conhecimentos dos alunos sobre a temática de estudo. (SANTOS, 2017, p. 3)

De acordo com Almouloud (2017, p. 172) esta etapas estão descritas de maneira mais detalhadas como;

1) estudo da organização matemática, fase em que pode ser feita a análise da gênese do conteúdo, alguns aspectos históricos de relevância e como isso pode servir de subsidio para uma nova prática;

2) análise didática do objeto, etapa em pode ser feito um estudo sobre como o conteúdo em questão é abordado em livros e se estes trazem uma variedade na abordagem.

No que tange a etapa 1, podemos afirmar que se trata de uma revisão documental a fim de procurar argumentos de base histórica que ajudarão posteriormente nas fases finais da

pesquisa, não só isso, esse estudo histórico deve servir de alicerce para as possíveis práticas que serão adotadas em toda a pesquisa.

Para falarmos da etapa 2 temos de ter em vista que é preciso conhecer a ligação que o conteúdo estudado tem enquanto objeto de ensino, a importância que os materiais didáticos dão a este e por fim, se está sendo tratado utilizando-se todo o seu potencial em busca de aspectos didáticos, cognitivos e epistemológicos.

No estudo do aspecto epistemológico deve se levar em consideração a gênese do objeto que se pretende ensinar. O que se procura é entender aspectos específicos para que esse objeto possa ser validado enquanto conteúdo e qualquer outro ponto de vista que possa deixar claro as potencialidades sobre o assunto. Assim, “A particularidade da didática em relação a essas disciplinas se encontra na dimensão epistemológica de sua problemática, que considera a especificidade dos conhecimentos em jogo” (ALMOULOU, 2007, p. 149).

Desse modo, “os saberes matemáticos são analisados epistemologicamente, a fim de compreender os seus elementos históricos, priorizando os conceitos matemáticos”. (OLIVEIRA, 2018) . Se na metodologia da matemática tradicional os conteúdos são ensinados de maneira rigorosa, em uma análise epistemológica pode-se investigar estes conceitos e ainda questioná-los. “Esse tipo de análise pode auxiliar o pesquisador em didática da matemática a entender melhor as relações entre os objetos matemáticos e controlar as variáveis didáticas relacionadas com o processo de ensino e aprendizagem de tais objetos” (ALMOULOU, 2007, p.157).

Oliveira (2018) destaca que neste sentido, o saber que se pretende obter dentro de uma análise epistemológica não é propriamente o saber científico, mas sim a diferença entre este o que se pretende ensinar, nesta análise podem surgir obstáculos, estes são chamados de obstáculos epistemológicos.

Quando se busca compreender o conceito de obstáculos epistemológicos, tomando como referência o desenvolvimento dos conceitos matemáticos, se faz necessário levar em consideração a existência de dois processos distintos: o primeiro, que está associado à fase inicial da descoberta das noções e concepções matemáticas, e o segundo, que se refere à forma (redigida), na qual se representa os conceitos construídos. Com isso, no contexto da Matemática, pode-se dizer que os obstáculos surgidos durante a produção e aprendizagem do conhecimento, dificilmente serão registrados historicamente. (OLIVEIRA, 2018, p.25)

Em outras palavras, um obstáculo é uma ideia que se mostrou útil e eficiente em um dado momento da investigação e formação de um certo conceito, mas ao passo em que se tenta aplicá-lo em outro problema, o resultado pode ser um fracasso, o investigador tenta então

preservá-lo a fim de poder utilizá-lo posteriormente, porém essa ideia acaba por prejudicar a aprendizagem futura. (D'AMORE, 2007, p.211).

No que diz respeito ao aspecto didático, são analisados as condições de funcionamento do ensino, para Artigue (1988), mesmo que a autora refira-se a esta definição como nada de original, este aspecto analisa o matéria, abordagem, condições, para Almouloud (2014), estas etapas devem ser levadas em consideração pois podem influenciar as informações que serão passadas do pesquisador, neste o professor, para ser estudantes.

Na perspectiva cognitiva, segundo Almouloud (2014) deve-se levar em consideração a cognição dos alunos, ou seja, conhecimentos pré adquiridos ou conhecimento prévios, estes delimitaram o estilo dos estudantes que se interessa desenvolver o conteúdo, isto é importante para que o tema seja bem delimitado, vale lembrar que nos aspectos anteriores podem ser identificadas dificuldades, portanto estas também devem ser levadas em consideração no aspecto cognitivo.

Concluimos então que esta é a fase de investigação sobre as potencialidades do conteúdo estudado, sua natureza propriamente dita e onde se busca ter domínio sobre o assunto para amparar as fases subsequentes da ED. Na etapa a seguir será descrita a análise *a priori*, esta, baseada na Teoria das Situações Didáticas.

2.1.2 *Análise a priori e concepção*

É a etapa em o pesquisador busca o planejamento sobre o conteúdo estabelecido na etapa anterior previamente estruturado, este planejamento de ações, deve ser feito a partir de duas variáveis, essas segundo Artigue (1998), podem ser manipuladas pelo pesquisador:

- as variáveis macrodidáticas ou globais: essa faz parte da organização geral da ED
- as variáveis microdidáticas ou locais: relativas à organização de uma fase específica da engenharia.

Esses dois tipos de variáveis podem ser de ordem geral ou dependente do conteúdo matemático estudado e suas análises serão realizadas em três dimensões: a dimensão epistemológica (associada às características do saber), a dimensão cognitiva (associada às dimensões cognitivas dos alunos sujeitos da aprendizagem) e dimensão didática (associada às características do sistema de ensino, no qual os sujeitos estão inseridos). O objetivo de uma análise *a priori* é determinar como as escolhas efetuadas (as variáveis que queremos assumir como pertinentes) permitem controlar os comportamentos dos alunos e explicar seu sentido. (ALMOULOU & COUTINHO, 2008, p. 67)

Neste caso, o objetivo de uma análise *a priori* buscar meios para determinar as possíveis escolhas tomadas na execução futura, ou seja, quais variáveis deveremos assumir como base,

manipular estas variáveis para controlar seus resultados e assim poder explica-los, deste modo Almouloud & Coutinho (2008) explica o que se deve fazer uma análise *a priori*:

1) Descrever as escolhas das variáveis locais e as características da situação adidática desenvolvida. 2) Analisar a importância dessa situação para o aluno e, em particular, em função das possibilidades de ações e escolhas para construção de estratégias, tomadas de decisões, controle e validação que o aluno terá. As ações do aluno são vistas no funcionamento quase isolado do professor, que, sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagem; 3) Prever comportamentos possíveis e tentar mostrar como a análise feita permite controlar seu sentido, assegurando que os comportamentos esperados, se e quando eles intervêm, resultam do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem. (ALMOULOU & COUTINHO, 2008, p. 67)

Para que se consiga de fato, controlar estas escolhas na análise *a priori* Artigue (1988), destaca que que é preciso basear as suposições que serão validadas posteriormente. Estas hipóteses serão confrontadas na quarta fase, ou seja, a análise *a priori* será validada pela análise *a posteriori*. “Tradicionalmente, esta análise, que inclui uma parte descritiva e preditiva é uma análise focada em características de uma situação a-didática” (ARTIGUE, 1988, p.258), devemos enfatizar que uma situação adidática é aquela que produz no estudante a percepção de padrões que serão utilizados para resolver uma situação didática.

Deste modo a análise *a priori* é descrita por Artigue (1988) como uma fase de controle dentro da engenharia didática, esta permite delinear as necessidades dos estudantes através de situações previamente criadas de acordo com o público a quem se deseja aplicar a pesquisa, esta aplicação já estabelecida é a terceira fase de uma ED, chamada de experimentação, que será descrita a seguir.

2.1.3 Experimentação

Etapa em que se aplicam as situações didáticas e coleta dos dados referentes à pesquisa. Vale ressaltar que na coleta, podemos fazer usar instrumentos, tais como vídeos, relatórios de aula, registros fotográficos, gravações em áudio, produções dos alunos, entrevistas, dentre outros recursos, com a finalidade de formarmos o *corpus da pesquisa*.

A fase da experimentação segundo Almouloud & Coutinho (2008) é quando se aplica todo o conteúdo e situações elaboras nas fases anteriores, “corrigindo-o se necessário, quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade, o que implica em um retorno à análise *a priori*” (ALMOULOU & COUTINHO, 2008, p. 68). Este retorno a fase *a priori*, se deve pelo fato de o pesquisador não identificar um possível obstáculo ou

pelos conhecimento prévios dos estudantes não estarem em acordo com o que fora desenvolvido.

Os autores ainda relatam a necessidade de se trabalhar uma metodologia de ensino para estruturar a aplicação desta fase da ED, no caso da presente pesquisa utilizaremos a TSD e seus mecanismos de coleta de dados, vale lembrar que a qualidade desta coleta implicará diretamente em na análise *a posteriori*, pois confrontará os dados obtidos com os pretendidos, deste modo descreveremos a teoria de ensino usada, posteriormente, após uma breve explicação sobre a fase de análise *a posteriori*

2.1.4 Análise a posteriori

Fase em que se caracteriza “pela devida organização do *corpus da pesquisa*, a fim de uma avaliação posterior” (SANTOS, 2017, P. 4), confrontando ideias formadas na fase de análise *a priori*, a fim de constatar eficiência da metodologia usada, além da possibilidade de levantarmos questionamentos para futuras pesquisas sobre o tema proposto.

As investigações que recorrem à experimentação em sala de aula, muitas vezes, incluem uma avaliação externa de grupos experimentais ou grupos de testemunho diferentes, para verificar sua validade. Na Engenharia Didática, a validação é essencialmente interna, fundada no confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*. (CARNEIRO, 2005, p, 105))

Assim, para Carneiro (2005) todo o material coletado na fase de experimentação deve ser analisado e confrontado com as hipóteses da análise *a priori* para que se considerar as ideias que sofreram distorção durante a análise *a priori* e portanto, não poderiam ser validadas naquele momento.

Diante das definições de cada fase da ED, e, percebendo que durante o processo de experimentação da pesquisa, deveremos nos basear em alguma teoria de ensino e coleta de dados, no próximo tópico descreveremos a teoria de ensino utilizada nesta pesquisa.

2.2 Teoria das situações didáticas (TSD)

De acordo com Teixeira e Passos (2013) a teoria das situações didáticas (TSD), de Guy Brousseau tem como elementos indispensáveis no ensino, tanto professor como aluno, em sua relação de ensino e aprendizagem, bem como o meio em que eles estão interagindo, esse meio é conhecido por *milieu*.

Sobre este meio, o *milieu*, Oliveira (2018) explica que é um conjunto de elementos externos ao aluno, que age no sentido contrário ao sujeito, ou seja.

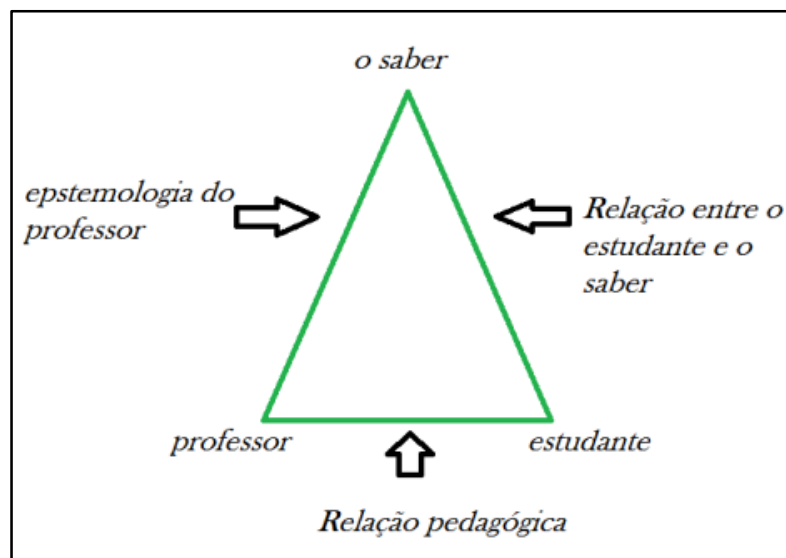
O *milieu* atua como um conjunto adidático, que não possui propósitos didáticos, no entanto, por meio de um efeito retroativo à ação do indivíduo, possibilita-o a participar ativamente do processo de ensino e aprendizagem. Nesse sentido, “segundo a teoria piagetiana, a criança aprende adaptando-se a um *milieu* numa situação não didática”.(OLIVEIRA, 2018, p. 30)

Teixeira e Passos (2013) relata que Brousseau seguiu o sentido inverso de Comenius que sugeria que “o estudo do ensino começava, de modo direto, pelo inventário dos princípios gerais da educação e das condições que decorriam racionalmente desses princípios. A consideração do conhecimento ensinado, objeto principal do ensino, só intervinha depois” (TEIXEIRA e PASSOS, 2013, p. 2).

[...]Partiu de traços/vestígios da atividade cultural que produz precisamente tal conhecimento matemático a ser ensinado (um texto) e buscou estabelecer condições para que essa atividade possa ir ao encontro de um modo de aculturação para um jovem iniciante. Dos textos aos problemas, depois às situações matemáticas... e, enfim, às condições didáticas que permitem sustentar essas situações e fazê-las produzir a aculturação visada. [...]a Didática da Matemática estuda atividades didáticas que têm como objetivo o ensino da parte específica dos saberes matemáticos, propiciando explicações, conceitos e teorias, assim como meios de previsão e análise; incorporando resultados relativos aos comportamentos cognitivos dos alunos, além dos tipos de situações utilizadas e os fenômenos de comunicação do saber. (TEIXEIRA E PASSOS, 2013, p. 3).

Pommer (2013) descreve a modelagem da teoria das situações didáticas a partir de um triângulo em cujos vértices são distribuídos entre o aluno, o professor e o saber, esses três elementos são fundamentais e formam uma relação complexa e dinâmica, essas relações levam em consideração todos os meios para a aprendizagem significativa desde a intervenção do professor e o aluno que são os elementos humanos e as mediações do saber, conhecidos como elementos não-humanos.

Figura 1 - triângulo da relação professor-aluno-saber



Fonte: do autor

Desta forma, Nunes & Nunes descreve a TSD como:

A TSD constitui-se um modelo para analisar o processo de ensino e aprendizagem, assim como construir Sequências Didáticas. Tal modelo teórico decompõe-se em quatro tipos de situações distintas, que potencializam um processo de investigação em sala de aula, nas quais o saber tem funções diferentes e o aprendiz não estabelece a mesma relação com esse. Nestas situações interligadas, podem-se observar tempos. (NUNES & NUNES, 2019, p. 169)

Nesse sentido, apresentaremos o que Teixeira e Passos (2013), e Nunes e Nunes (2019) classificam como etapas específicas para a aprendizagem em matemática, a situação didática da devolução, ação, formulação, validação e por último a institucionalização,

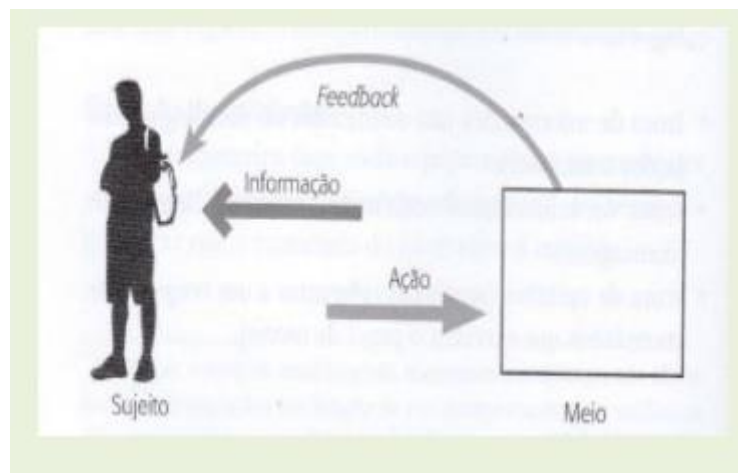
Situação de Devolução

Nessa etapa o professor repassa toda a responsabilidade da aprendizagem para o estudante, fazendo com que este entenda que terá de assumir seus atos em busca da sua aprendizagem, seus erros e acertos estarão por sua própria conta, nesse momento o professor deverá lançar um problema em que o aluno tenha condições de resolver, este deverá ver o problema como um algo que lhe instigue.

Situação de Ação: a primeira etapa da sequência, com a finalidade de envolver o aluno no processo de aprendizagem, nesta fase, as respostas são puramente experimentais, ou seja, não possuem grande influência do ponto de vista teórico. Todas as ações são estabelecidas conforme o estudo pré-estabelecido, “mas que não permitem a compreensão sistemática do objeto em estudo. A organização da sequência deve possibilitar ao aluno (individualmente ou em grupo) enfrentar o problema sem intervenção direta do professor.” (NUNES & NUNES,

2019, p. 164). Neste momento o estudante, já de posse do problema, deverá buscar métodos para a resolução, interagindo com o meio (*milieu*), buscando refletir e com tentativas para encontrar um método que lhe garanta a resolução do problema. Brousseau (2008) apresenta uma representação para mostrar esta situação:

Figura 2 - esquema de uma situação de ação



Fonte: Brousseau (2008, p. 28)

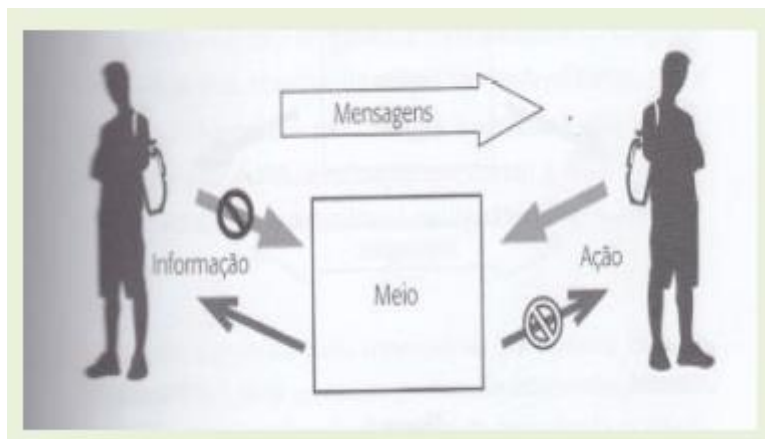
A figura apresenta como o aluno lidar com a informação, a transmite no meio em forma de ação, esta ação é devolvida para o aluno configurando-se como a situação de ação (NUNES & NUNES, 2019, p. 165)

Situação de Formulação:

Devido ao processo de ação desenvolvido na etapa anterior, o aluno possivelmente poderá elaborar uma situação que se aproxime do rigor matemático exigido, para tanto, este se utiliza de alguma teoria ou elementos de uma, mesmo que não intencionalmente, esta resposta ainda não pode ser validada pois o aluno não tem a obrigatoriedade de a justificar.

Para Nunes & Nunes (2019), para que o processo ocorra de forma satisfatória, deve haver uma imensa comunicação entre ideias, da mesma forma que o processo de investigação requer. Ocorre então a interação do aluno com o *milieu*, é importante que a linguagem usada seja a mais próxima ao estudante, sem a necessidade de uma linguagem matemática, podendo aparecer termos que não condizem com a situação, o aluno irá procurar a melhor maneira para se expressar cabendo assim, o “uso de metáforas, criação de termos semiológicos novos, falta de pertinência e de eficácia na mensagem, dentro de retroações contínuas (TEIXEIRA & PASSOS, 2013, p. 166). A figura a seguir, representa o que Brousseau usou para demonstrar esta situação.

Figura 3 - situação de formulação por esquema



Fonte: Brousseau (2008, p.29)

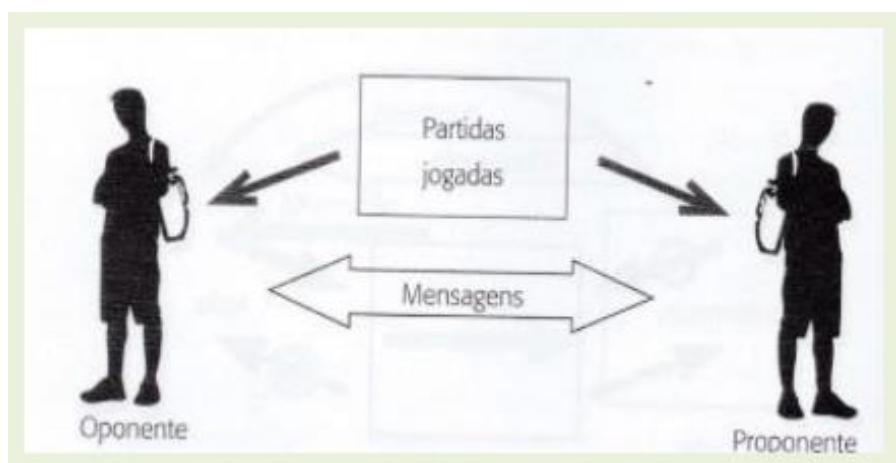
Na figura acima, Brousseau (2008), explica que nesta fase o sujeito é capaz de reconhecer, identificar, decompor e reconstruir um conhecimento e assim transformá-lo em uma descrição por palavras. Neste caso o meio deve oferecer a esse sujeito, um outro sujeito para que este possa informar sobre suas descobertas.

Situação de Validação:

Como ocorreu na etapa anterior, um conjunto de ideias não formuladas devidamente pelo estudante, o professor deverá conduzir um discurso, a fim de levar o estudante a formular suas ideias levando em conta, agora, o rigor matemático exigido, algo como uma prova, demonstração,

Aqui acontece a tentativa dos estudantes de convencerem os interlocutores do resolução problema, agora com uma linguagem matemática apropriada usando demonstrações, vale lembrar que nas etapas anteriores o professor deve deixar os alunos seguirem seus próprios caminhos para a resolução, essas fases são chamadas de adidáticas. A seguir, a figura que representa esta situação.

Figura 4 - esquema da situação de formulação.



Fonte: Nunes & Nunes (2019, p. 166)

Esta figura representa, a troca de ideias, agora de maneira mais coletiva, visando o rigor matemático, a comunicação leva a escolhas de respostas, estas respostas formam um conceito, e este conceito pode ser validado.

Situação de Institucionalização: etapa em que a resolução é revelada, ou seja, o professor deve intervir na aprendizagem apresentando o caminho correto a se seguir, tomando para si a responsabilidade antes dada ao estudante podendo desfazer trilhas feitas pelos alunos que não são necessárias para a formar o objeto de estudo para a devida generalização do problema. “É na institucionalização que o papel explícito do professor é manifestado: o objeto é claramente oferecido ao aluno. (TEIXEIRA e PASSOS, 2013, p. 12).

Por fim, temos a descrição da teoria de pesquisa (ED), que nos permite mapear o estudo de forma a desenhar esquemas que nos permita a estruturação de todos os passos desta. Para que seja validada esta metodologia de pesquisa na sua fase de experimentação, é necessário uma teoria que nos permita coletar os dados, esta teoria usada foi a TSD. Para tanto, necessitaremos do conteúdo matemático, este deve ser iniciado com os pressupostos da ED, conhecendo-se a sua gênese, e seu percurso até a concepção das situações de ensino, posteriormente validados de acordo com a ED, trataremos deste conteúdo matemático no tópico a seguir.

2.3 Evolução histórica dos números figurados

Nesta seção, apresentaremos algumas considerações acerca do desenvolvimento dos números figurados através do tempo, iniciando com os pitagóricos a partir de relatos em livros de HM até os dias atuais com a evolução dos NF desde as configurações planas e sua gênese, até as configurações k -dimensionais e sua abordagem em diversas subáreas da matemática.

O nascimento dos Números Figurados são atribuídos aos pitagóricos como relatam vários autores de livros de História da Matemática, como Roque (2012), Eves (1995) e Conway & Guy (1998), mesmo que estes nem possam mesmo afirmar que existiu de fato um Pitágoras, pois seus relatos matemáticos datam de séculos depois da sua suposta morte, “a escassez das fontes, somada à convergência interessada dos únicos textos disponíveis, nos permite duvidar até mesmo da existência de um matemático de nome Pitágoras” (ROQUE, 2012, P.86), assim os autores citam a escola pitagórica como berço da criação dos números figurados.

Figura 5 - Pitágoras de Samos



Fonte: Kenny (2004)

Estes fatos nos deixam com os escritos de estudiosos ditos neopitagóricos que são, de fato os primeiros a que se tem registro, tais escritos são atribuídos a Nicômaco de Gerasa (100 d.C) segundo Almeida (2003):

Se algum tratado sistemático de aritmética foi escrito entre Euclides (que viveu em torno de 300 a.C.) e Nicômaco, nenhum sobreviveu. Quase nada é sabido sobre a vida de Nicômaco, dito de Gerasa, provavelmente a Gerasa situada ao leste do rio Jordão na Judéia, cidade primariamente grega. Provavelmente viveu em torno de 100 d.C. e foi um membro importante do grupo neopitagórico. Era um vulgarizador e compilador de manuais, não realmente um matemático original. Escreveu uma Introdução à Harmonia, um livro sobre a doutrina mística do número denominado *Theologoumena Arithmeticae* e uma Introdução à Aritmética. O sucesso desse último deve ter sido quase imediato, sendo usado como manual na antiguidade e, com base na paráfrase de Boécio, ao longo da Idade Média. Neste livro encontramos a melhor exposição sistemática da teoria pitagórica dos números figurados que sobreviveu. (ALMEIDA, 2003, p.86)

Para Roque (2012) os pitagóricos enxergavam a matemática diferente do que se tem hoje, os números eram entes físicos e não abstratos como se definiu ao passar dos tempos, eram “bem diferente da predominantemente compreensão quantitativa de hoje. Para o Pitagórico, o

número é vivo” (KENNY,2004), representados por pedrinhas e outros objetos, estes tinham um sentido não apenas matemático e sim sagrado, divino.

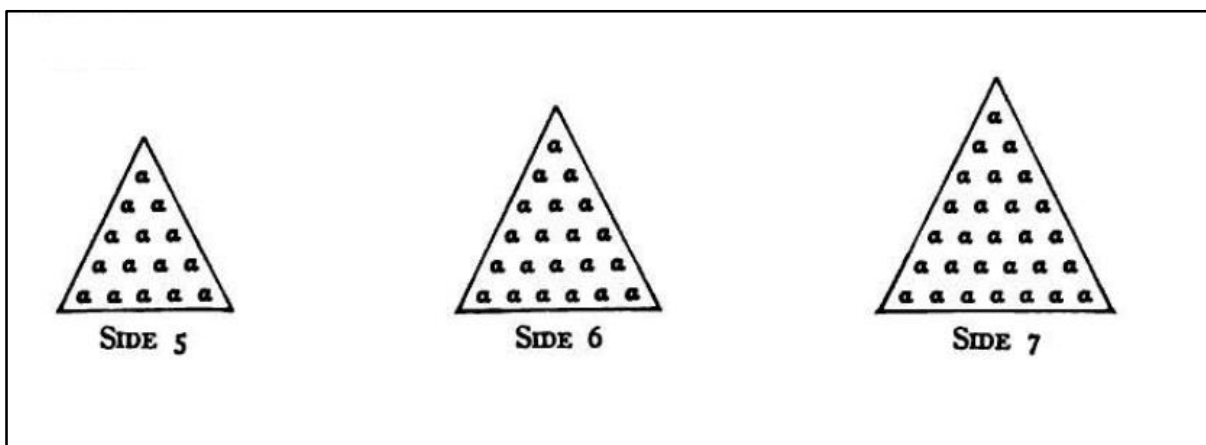
O uso pitagórico não é, em certo sentido, mesmo um uso em tudo: Número não é algo para ser usado; em vez disso, sua natureza deve ser descoberta. Em outras palavras, usamos números como tokens para representar as coisas, mas para Pitagóricos Número é um princípio universal, como real como luz ou som. Como a ciência pitagórica possuía uma dimensão sagrada, o número não é visto apenas como um princípio universal, mas também como um princípio divino. O objetivo de Pitagórico e ciência platônica posterior é diferente da ciência moderna "aristotélico": não é tanto envolvido com a investigação das coisas, como a investigação de princípios. Ele deve ser muito firmemente enfatizado, no entanto, que para Pitágoras o científico e dimensões religiosas de número nunca estavam em desacordo uns com os outros. Além disso, a Abordagem pitagórica para o Número, pela primeira vez na Grécia, matemática elevada para um estudo que vale a pena perseguir acima de qualquer extremidade puramente utilitário para o qual tinha anteriormente foi empregado. (KENNY,2004, p.vi)

Desta forma, não podemos afirmar que estes tinham um conceito de número abstrato. Essa ideia, reforça os escritos de Nicômaco, porém este introduz uma outra escrita para representar tais pontos para apresentar estruturas aritméticas por meio de representações concretas, assim, no seu livro:

No seu Capítulo VI, (2) começa explanando uma maneira semigeométrica de representar números por meio de alfas (α). Não menciona a representação por meio de pontos, porém em seguida diz : "A unidade [$\alpha = 1$], então, ocupando o lugar e o caráter de um ponto [$\bullet$], será o começo de intervalos e de números,..."[itálico nosso] o que dá a entender que a representação dos números figurados também pode ser feita por meio de pontos [$\bullet$], justificando-se assim a representação tradicional dos números figurados por meio de pontos. A representação por meio de pontos deve ser mais antiga, provavelmente reminiscência do emprego de seixos nas colunas do ábaco. O sistema ático, se usado, provavelmente era muito incipiente no tempo de Pitágoras. (ALMEIDA, 2003, p.87)

A descrição de Nicômaco era feita através de símbolos como o α diferentemente dos representados pelos pitagóricos, conforme a figura a seguir, retirada do livro de Nicômaco de Gerasa, obra traduzida, de 1926 onde o autor descreve alguns números triangulares e os representa por meio da letra grega, este também apresenta alguma relações aritmética que serviriam de base para os estudos futuros acerca deste tema:

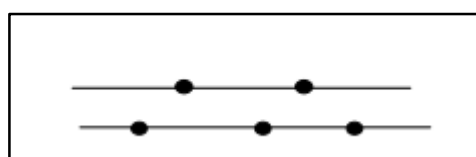
Figura 6 - representação dos números triangulares por Nicômaco de Gerasa



Fonte: D'ooge; Robbins & karpinski, (1926)

Os pontos representavam a estrutura dos números e assim poderiam escrever qualquer, para representar os números planos, por exemplo, deveria ser construídos antes nos números lineares, conforme a figura a seguir:

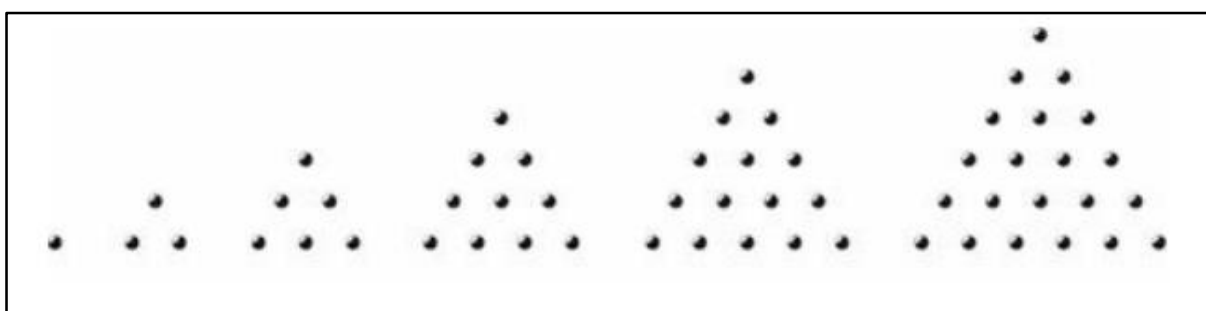
Figura 7 - números lineares



Fonte: (Almeida, 2003)

Estes, por sua vez davam origem a outros números, agora com configurações que remetem a polígonos, é o caso dos números triangulares, representados na figura a seguir, formado filas de pontos usados na representação da figura anterior.

Figura 8 - configuração com bolinhas formando números triangulares



Fonte: Roque (2012)

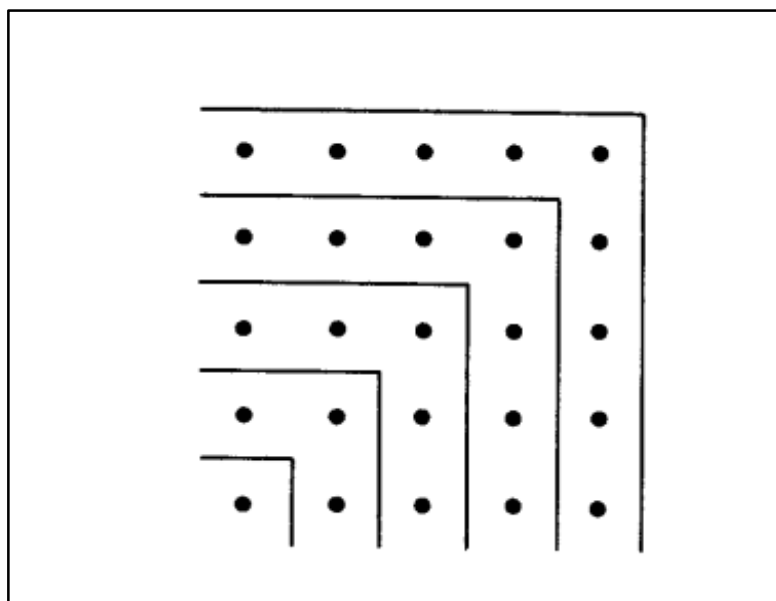
Estes números provavelmente foram os primeiros números planos descritos pelos pitagóricos pois são obtidos da soma direta dos números lineares, apresentados na Figura 3 e passaram a conter o símbolo da seita pitagórica, o chamado *Tetraktys*, (MOL, 2013) este representado pelo número 10 ou seja, o quarto número triangular apresentado na Figura 5.

Para os pitagóricos, segundo Kenny (2004), os *Tetraktys* representava a perfeição do Número. Para eles o *Tetraktys* simboliza, como o escala musical, uma imagem diferenciada de

Unidade. No caso do Tetraktys, a representação começava-se pelo número 1 e se manifestava por quatro níveis, a linha, o plano e o espaço, ou seja 2,3 e 4. Exatamente o número de pontos mínimos para se obter estes geometricamente, tal fato ainda era interessante pois a soma destes quatro entes resulta em 10 (quarto número triangular) e retorna a unidade, pois $10 (1+0=1)$, retornando-se ao ponto de partida.

Outras configurações descritas ainda pelos pitagóricos, deu origem a outra importante entidade dos números figurado, o *gnômon*, assim como os números triangulares são formados pela soma dos números naturais, segundo Almeida (2003), os números quadrados dos pitagóricos são formados pela soma dos números ímpares, isto pode ter dado origem ao estudo das triplas pitagóricas, pois relacionavam números quadrados e como se acrescentar um número quadrado a um número ímpar para se obter outro número quadrado, a figura do quadrado separados por *gnômons* aparece a seguir:

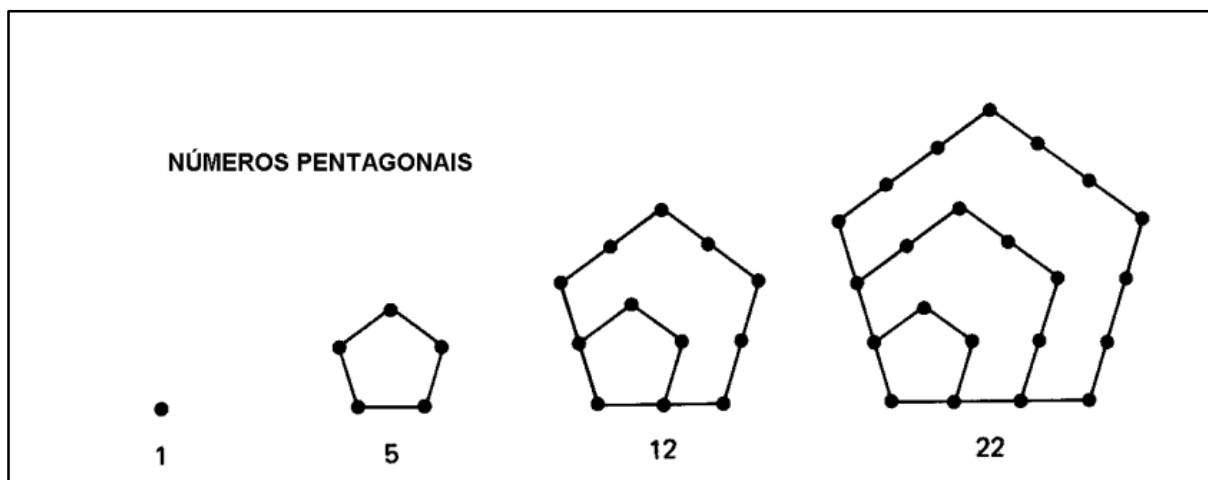
Figura 9 - o *gnômon*



Fonte: Almeida (2003)

Assim, os números figurados foram criando suas formas dentro da escola pitagórica, utilizando-se basicamente pedras e outros objetos, estes números tinham três características principais, começavam sempre pela unidade, o segundo número tomava uma forma poligonal qualquer e a partir do segundo, usava-se um “*gnômon*” para se construir o próximo. Vale lembrar que optaremos por nos referir a *gnômon* sem aspas quando estivermos falando do mecanismo usado para encontrar os próximos números quadrados e com aspas quando estivermos nos referindo a outros números figurados, da mesma forma podem ser construídos números pentagonais, hexagonais e assim por diante.

Figura 10 - números pentagonais

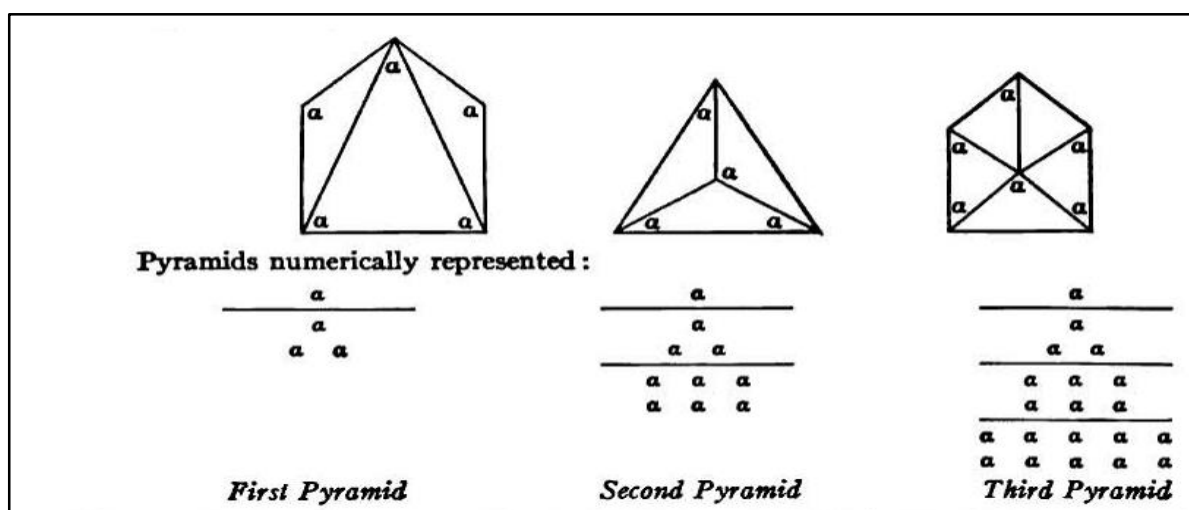


Fonte: Almeida (2003)

Assim, os autores citados não acreditam que os pitagóricos tenham desenvolvido mais do que números poligonais, porém Alves (2012) menciona que a ideia lançada pelos pitagóricos deu origem ao estudo dos números figurados no sentido de ampliar as configurações antes restritas a planas para o campo das figuras tridimensionais.

Não se sabe bem quando e onde surgiram a ideia de que se poderia estender os números figurados para outras dimensões para fins de generalização, porém estes já são descritos por Nicômaco de Gerasa como empilhamento de números poligonais sem a preocupação com a generalização.

Figura 11 - representação piramidal de Nicômaco de Gerasa

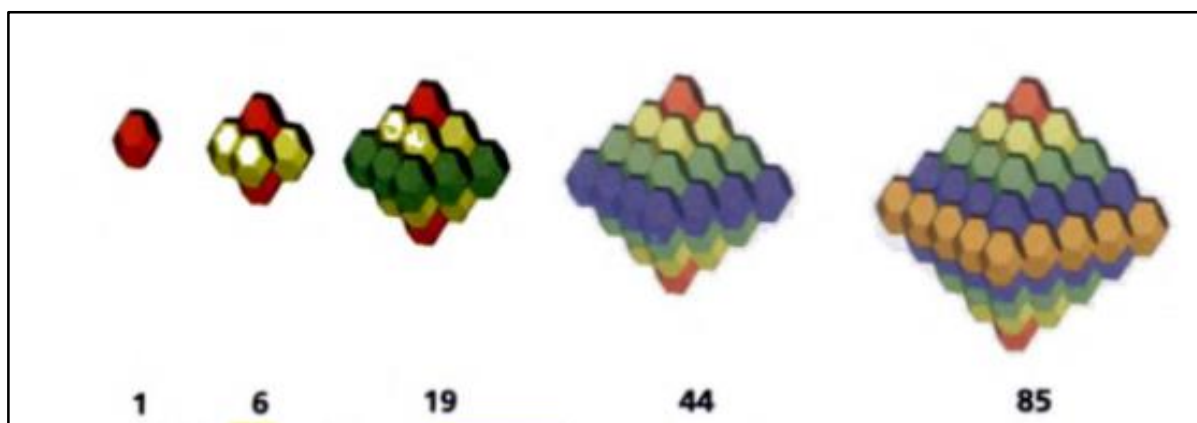


Fonte: D'ooge; Robbins & karpinski, (1926)

Assim, acredita-se que o estudo dos números figurados mais antigos sejam apenas dos poligonais, realizados pelos pitagóricos e estendido para o campo dos 3D por Nicômaco apenas para representar pirâmides de pontos, uma das primeiras formas de se aventurar pelos figuras geométricas de dimensões anteriores como configurações de pontos.

No livro de Conway & Guy, intitulado O livro dos números, Utilizando-se pontos, neste caso os número figurados em 3D, para formar estruturas relacionadas a álgebra, descrevendo suas fórmulas e deixando o sentido pitagórico apenas como contexto histórico, aqui o autor já trata destes números relacionando propriedades e apresentando a fórmula do termo geral dos números piramidais triangulares, e outras configurações como as que formam tetraedro truncado, stella octangula, octaedros, dentre outras.

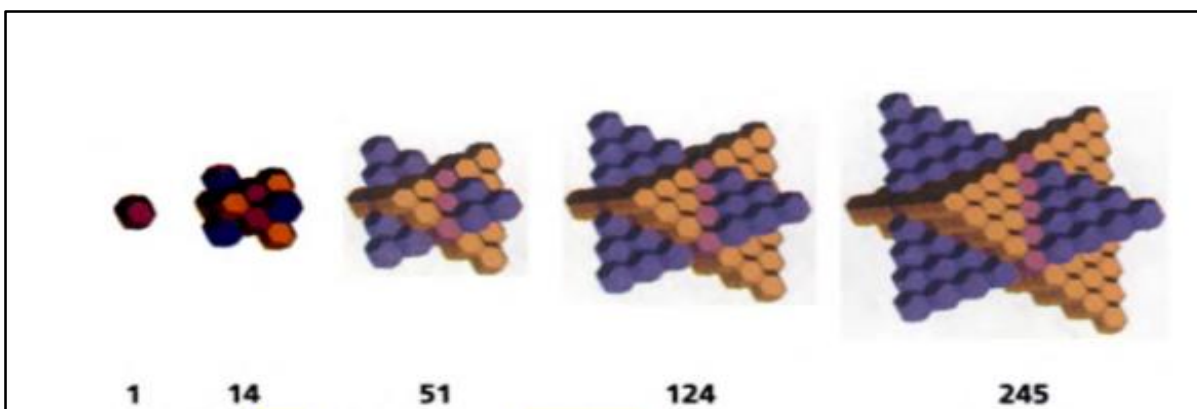
Figura 12 - números octaedrais



Fonte Conway & Guy (1995)

Estes números já dão a ideia de empilhamento de duas pirâmides e deles já surgem outros números como os da Stella octangula que é formada por um núcleo de octaedro com tetraedros formado a partir de cada face.

Figura 13 - números da *stella octangula*



Fonte Conway & Guy (1995)

A partir dessas configurações e da evolução natural dos números figurados, o assunto passou a ser discutido em livros de teoria dos números, deixando assim seu contexto histórico mais voltado para sua visualização e passando a ter um caráter mais abstrato a medida em que ficava mais difícil apresentar sua visualização.

Deza & Deza (2012) em seu livro *Figurate Numbers*, faz uma generalização dos números figurados estendendo suas fórmulas para a k -ésima dimensão, os autores descrevem

os números em relação as classes de politopos apresentados por Coxeter (1973), como os simplexos, relacionados a classe dos triângulos e seus análogos, a classe dos hipercubos relacionados aos quadrados e seus análogos multidimensionais, e os ortoplexos, referente ao octaedro e seus representantes em outras dimensões. Vale lembrar que a medida que estes números foram evoluindo ao passar do tempo, sua apresentação por visualização foi desaparecendo, ficando cada vez mais no campo da matemática pura com conceitos abstratos, e fugindo mais do sentido representativo e visual lançado pelos pitagóricos.

Assim, para que esse trabalho traga, de fato uma contribuição no campo dos números figurados, dada a sua evolução histórica, pretende-se apresentar os números figurados sempre relacionando com sua visualização, com isso acredita-se que além de trazer um sentido novo, que mais remete ao antigo modo como eram vistos, também apresenta uma possibilidade de entendimento maior diante das situações propostas e a relação com softwares matemáticos que tanto ajudam no entendimento por parte dos estudantes.

Por fim, devemos descrever assim como sua evolução histórica mostra, os NF desde sua primeira representação, nos números triangulares e relações de gnômons, passando por suas representações que aqui contarão com recorrência, termo geral, função geradora e visualização até que se generalize as classes de números que possuem relações com dimensões superiores, todo este percurso será descrito na próxima seção deste trabalho.

3 CAMPO MATEMÁTICO DE ESTUDO: O CRESCIMENTO DIMENSIONAL DOS NÚMEROS FIGURADOS E SUAS REPRESENTAÇÕES

Para iniciarmos o estudo das fórmulas dos números figurados, é necessário que se explique que estes são sequências numéricas recorrentes e que se pretende aqui apresentar a recorrência dos números descritos, fórmula geral e função geradora, para isso é necessário que se faça uma breve explicação do que cada fórmula dessas significa, por isso antes de mostrarmos os números propriamente ditos, apresentaremos a matemática que existe nestas representações, ou seja na sequências lineares recursivas.

3.1 Sequências lineares recursivas e suas representações

Uma sequência é definida como recursiva, se esta for apresentada por uma regra que permite calcular um termo qualquer utilizando seus termos anteriores. Alguns exemplos comuns de sequências recorrentes são as progressões aritmética e geométricas, a sequência de Fibonacci e até os números naturais, por definição temos:

Definição 1: dada uma função $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ chamaremos esta função $x(n)$ de sequência e será representada por $X = (x(1), x(2), x(3), \dots, x(n))$, assim as sequências recorrentes podem ser representadas por dois tipos de fórmulas.

3.1.1 Equação de recorrência

É uma equação que relaciona um termo com seu ou seus termos anteriores, isto é, cada termo, partir do primeiro está diretamente ligado ao seu anterior através de uma função, por exemplo: uma sequência que possui o primeiro termo $x(1) = 1$ e os demais determinados pela função $x(n) = 2(x(n-1))$ ou seja $X = (1, 2, 4, 8, \dots)$ neste caso $x(n) = 2(x(n-1))$ é a equação de recorrência.

Repare que para se ter uma sequência definida por uma equação de recorrência, é necessário que se conheça, pelo menos o primeiro termo. As equações de recorrências são classificadas quando a ordem, linearidade e homogeneidade, a seguir serão definidas cada tipo.

Definição 2: a ordem de uma equação de recorrência é a diferença dos seu índices tomados o maior e o menor deles, por exemplo: $x(n) = x(n-1) + x(n-3)$ com $n > 3$ é uma recorrência de 3ª ordem isto porque $n - (n-3) = 3$ isto quer dizer, a grosso modo, que para se

determinar os termos dessa sequência, seriam necessários os três primeiros termos, assim caso $x(1) = 1, x(2) = 2$ e $x(3) = 10$ então $x(4) = x(4-1) + x(4-3) = 10 + 1 = 11$.

Definição 3: a equação de recorrência é chamada de homogênea, se nesta forem percebidos apenas termos em função dos termos anteriores, por exemplo:

$x(n) = x(n-1) + 2(n-2) + 3(n-3), n > 3$ é homogênea enquanto $x(n) = x(n-1) + 1$ é não-homogênea, por fim temos

Definição 4: uma equação de recorrência é dita linear de ordem p se todos os seus termos são escritos $x(n+p) = f_1(n)x(n+p-1) + f_2(n)x(n+p-2) + \dots + f_{(p+1)}(n)$ com $f_i(n)$ sendo uma função de n com i natural, ou seja:

$x(n) = 2x(n-1) - x(n-3) + 1$ é linear pois 1 pode ser escrito como uma função sobre os naturais, já $x(n) = (x(n-1))^2$ é não linear.

Devemos deixar claro que todas as equações que serão apresentadas neste estudo são do tipo lineares, variado apenas pela ordem e homogeneidade, contudo, quando necessário, serão usados artifícios algébricos para que as recorrências não homogêneas deem lugar a outras que sejam homogêneas.

3.1.2 Forma geral

É uma fórmula fechada que permite encontrar qualquer termo sem a necessidade de conhecer seus antecessores, por exemplo $x(n) = 2n$ ou seja, dado $n \in \mathbb{N}$ a sequência dada é $X = (2, 4, 6, 8, \dots)$ repare que para calcular qualquer termo não necessitaríamos seguir a sequência até o valor desejado, por exemplo $x(100) = 2 \cdot 100 = 200$ diferentemente da equação de recorrência que deveríamos ter em mão o valor de $x(99)$ para se obter $x(100)$.

3.1.3 Função geradora

É dita função geradora de uma sequência, o polinômio de Taylor definido por $F[A(n), x] = a(1)x + a(2)x^2 + a(3)x^3 + \dots + a(n)x^n$ em $a(1), a(2), \dots, a(n)$ são os termos da sequência $A(n)$. Deza & Deza apresenta a seguinte solução para se encontrar a função geradora para qualquer sequência linear homogênea.

seja: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$ e $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$, com $m < n$, de modo que o quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$, tenha como resultado a função $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_mx^m + \dots + c_nx^n + \dots$, esta função é chamada de geradora da sequência $c_0, c_1, c_2, \dots, c_m, \dots, c_n, \dots$, sendo assim, $f(x) = g(x) \cdot (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_mx^m + \dots + c_nx^n + \dots)$, que podemos reescrever como $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n) \cdot (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_mx^m + \dots + c_nx^n + \dots)$. Então podemos determinar o valor para cada a_i , com $i \geq \mathbb{N}$. Com base na igualdade, temos que:

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0c_0 \\ a_1 &= b_0c_1 + b_1c_0 \\ a_2 &= b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0 \\ a_3 &= b_0c_3 + b_1c_2 + b_2c_1 + b_3c_0 \\ &\dots \\ a_m &= b_0c_m + b_1c_{m-1} + b_2c_{m-2} + \dots + b_mc_0 \end{aligned}$$

Ainda temos que os valores de b e c maiores que m , são todos nulos ou seja:

$$\begin{aligned} 0 &= b_0c_{m+1} + b_1c_m + b_2c_{m-1} + \dots + b_{m+1}c_0 \\ 0 &= b_0c_n + b_1c_{n-1} + b_2c_{n-2} + \dots + b_nc_0 \\ 0 &= b_0c_{n+1} + b_1c_n + b_2c_{n-1} + \dots + b_{n+1}c_0 \\ 0 &= b_0c_{n+k} + b_1c_{n+k-1} + b_2c_{n+k-2} + \dots + b_{n+k}c_0 \end{aligned}$$

Agora vejamos que dada uma sequência qualquer, podemos determinar uma recorrência linear de modo que essa sequência seja a solução da recorrência, então tomando como base a sequência $c_0, c_1, c_2, \dots, c_m, \dots, c_n, \dots$, e a recorrência linear $b_0c_{n+k} + b_1c_{n+k-1} + b_2c_{n+k-2} + \dots + b_{n+k}c_0 = 0$, sendo $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ os coeficientes dessa recorrência, assim, podemos determinar os valores de a para o maior índice m possível em relação a n ou seja, $n - 1$, usando os valores iniciais da recorrência linear, então podemos reescrever $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n) \cdot (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_mx^m + \dots + c_nx^n + \dots)$ com índices n . Desse modo temos que: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n)(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n)$ ou ainda $\frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$ e, definindo os valores para a com base no índice n .

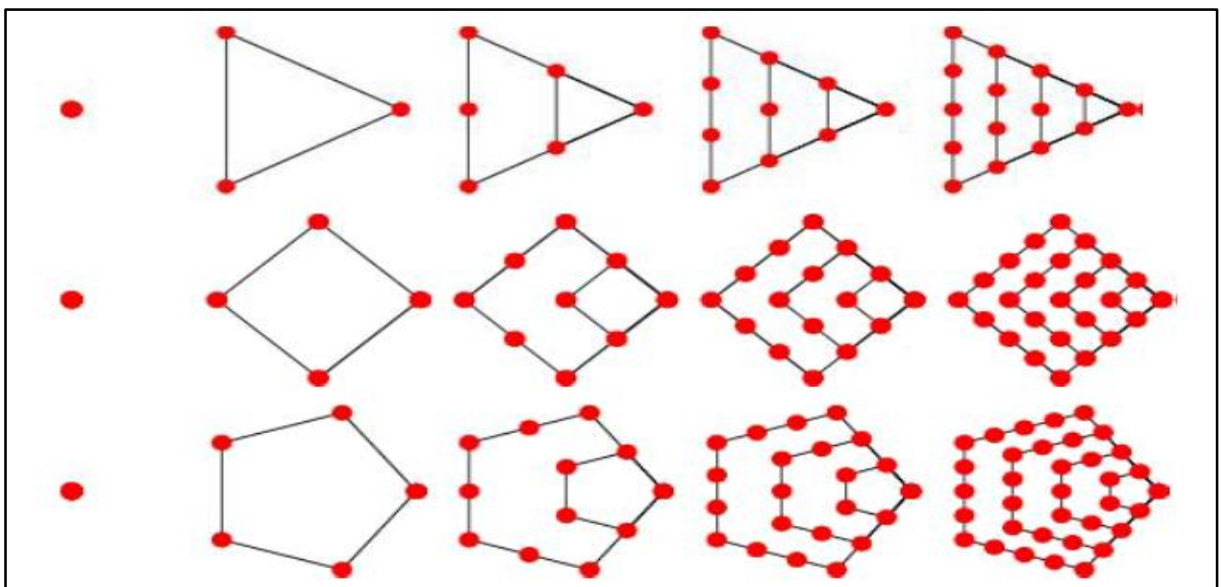
$$\begin{aligned}
a_0 &= b_0 c_0 \\
a_1 &= b_0 c_1 + b_1 c_0 \\
a_2 &= b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 \\
a_3 &= b_0 c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 c_0 \\
&\dots \\
a_{n-1} &= b_0 c_{n-1} + b_1 c_{n-2} + b_2 c_{n-3} + \dots + b_{n-1} c_0
\end{aligned}$$

Assim, sempre que precisarmos encontrar uma função geradora das sequências seguintes, precisaremos dos seus primeiros termos e que a equação de recorrência seja homogênea, a seguir começaremos a descrever as primeiras sequências dos números figurados, as que formam os *gnômons* dos números poligonais, antes, porém faremos uma breve apresentação dos números figurados a luz da matemática envolvida.

3.2 Apresentação dos números figurados

Os números figurados são sequências de números que podem ser representados por pontos e quando arranjados de forma equidistantes, formam figuras geométricas, tais números, assim como na geometria, podem representar figuras planas, (DEZA & DEZA, 2012), (ALVES & BARROS, 2019), sólidos geométricos, e politopos em uma dimensão arbitrária, desde que se tenha a estrutura do politopo que se quer formar. Estas sequências, possuem além de uma recorrência, uma fórmula para o termo geral, função geradora e uma representação geométrica já que representam politopos, na figura está apresentada a construção de números poligonais, ou seja, aquelas que formam polígonos.

Figura 14 - representação de alguns números poligonais



Fonte: Deza & Deza (2012, p. 3)

Para descrevermos os números figurados, precisaremos utilizar uma série de termos e símbolos, pois cada figura gera uma sequência, essa sequência pode ser classificada dentro de um conjunto de sequências, assim como as figuras que estas representam, iremos explicar estes números no decorrer do trabalho, um exemplo é quando falarmos em família de sequências, estamos falando de sequências em que seus representantes geométricos, possuem alguma semelhança dentro de uma dimensão, um exemplo são os polígonos regulares, triângulo equilátero, quadrado e pentágono regular, estes geram as sequência que pertencem ao números poligonais, essa reunião de sequências chamaremos aqui de família de sequências.

De modo análogo, quando sequências representarem figuras geométricas que possuem alguma característica, porém esta semelhança se percebe de uma dimensão para outra, um exemplo seria o quadrado e o cubo, de dimensões diferentes, porém com características geométricas, este conjunto de sequência, chamaremos aqui de classe de sequências. Vale lembrar que estes termos não foram retirados de nenhum escrito da literatura dos números figurados, e será tratado assim para facilitar a leitura e entendimento do leitor.

Para discutirmos o crescimento dimensional dos números figurados será preciso entender a construção que relacione uma dimensão a outra imediatamente superior, neste caso serão apresentados os números figurados planos, poliédrico, bem como os números figurados 4D, para se chegar a uma generalização de números figurados a partir do crescimento dimensional, no caso da construção dos números figurados planos, precisaremos entender como estas estruturas se formam a partir de figuras unidimensionais, chamadas de *gnômons*.

3.3 O *gnômon*

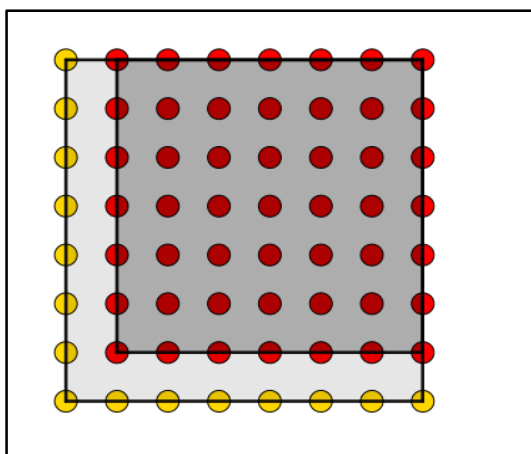
Pitágoras é considerado por muitos o pai da matemática, sua teoria relacionada aos números, não ser baseadas em provas, mas sim de maneira indutiva, era concreta, isso fez com que ele e seus seguidores buscassem relações dos números com a natureza, segundo Roque (2012):

Era possível obter, graficamente, generalizações sobre sequências de números, mas as regras para a obtenção de tais sequências, como as dos números quadrados, cubos e outros, eram desenvolvidas para uso prático. A diferença estava na reverência que os pitagóricos cultivavam pelos números, empregados não apenas para fins práticos. Associadas a forças cósmicas, as propriedades dos números não podiam ser consequências lógicas de sua estrutura, o que banalizaria suas propriedades. (ROQUE, 2012, p.54)

Pitágoras acreditava que os números poderiam explicar a natureza do universo, dentro da sua convicção de que “tudo é número”, ou seja, tudo pode ser explicado ou apresentado através de números ou os números explicariam a organização da natureza ou do cosmos, dentro dessa teoria, os pitagóricos organizaram dentro outros conceitos matemáticos, os números figurados. No entanto, acredita-se que a organização dos números figurados foi possível por causa do que nós chamamos hoje de “triplos pitagóricos”, que são basicamente a soma de dois números quadrados que resulta em outros números quadrados. “Estas triplas são constituídas por números inteiros, que podem ser associados às medidas dos lados de um triângulo retângulo” (ROQUE,2012, p.54).

Para que os pitagóricos chegassem a essas triplas, usavam um ente matemático conhecido como *gnômon*, que pelo próprio significado segundo o dicionário, representa um objeto que quando colocado no plano horizontal, criaria uma espécie de coluna vertical e assim poderia indicar a hora do dia com a sombra, ou seja, é um tipo de relógio solar, dentro da geometria, esse termo também se refere a parte que resta de um paralelogramo quando retirado um outro similar que teria um dos ângulos comum, de todo modo, a figura ou conjunto de pontos que representa um *gnômon*, seria o complemento de um quadrado como mostra a figura a seguir:

Figura 15 - *gnômon* completando um quadrado de pontos



Fonte: do autor

Na figura, podemos observar que para completar o próximo quadrado, ou seja, o número quadrado formado por pontos, podemos adicionar a este um *gnômon*, que é representado por duas linhas de pontos que formam entre si um ângulo de 90° , levando este exemplo para a construção de números figurados, podemos representar o *gnômon* como um

números de pontos que adicionaremos a um número figurado para se obter o próximo número semelhante a este, vale lembrar que estes números formam sequências de números figurados unidimensionais, com recorrência, fórmula para termo geral, função geradora e apresentação por meio do *software* GeoGebra.

3.3.1 O número de *gnômons* dos números poligonais

Levando em consideração o crescimento dimensional dos números figurados, percebe-se a necessidade de entender como se comportam as sequências dos *gnômons*, pois estas nos fornecerão meios para a construção de números poligonais. Assim, chamaremos as sequências de números figurados de *gnômons*, de $S_m^1(n)$ em que 1 representa a dimensão da sequência, m representa o número de lados do polígono formado com esses *gnômons*, ou seja $m \in \mathbb{N}, m \geq 3$ e n representando a posição do número na sequência em que $n \in \mathbb{N}, n > 1$ e $S_m^1(1) = 1$, em geral os números figurados k -dimensionais que serão formados a partir destes *gnômons* são representados por $S_m^k(n)$.

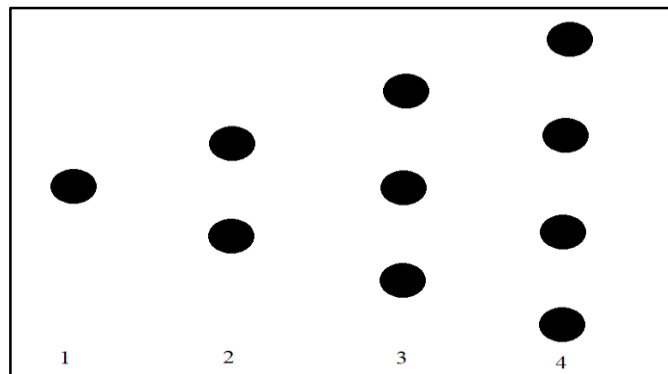
Para iniciarmos a construção dos números figurados de *gnômons*, observamos a sequência $(1, 2, 3, 4, \dots)$ e chamaremos de $S_3^1(1) = 1, S_3^1(2) = 2, S_3^1(3) = 3, \dots$ observe que:

$$\begin{aligned} S_3^1(1) &= 1, \\ S_3^1(2) &= 2 = 1 + 1 = S_3^1(1) + 1, \\ S_3^1(3) &= 3 = 2 + 1 = S_3^1(2) + 1, \\ S_3^1(4) &= 4 = 3 + 1 = S_3^1(3) + 1, \\ S_3^1(5) &= 5 = 4 + 1 = S_3^1(4) + 1 \\ &\dots \\ S_3^1(n+1) &= n+1 = (n+1-1) + 1 \\ S_3^1(n+1) &= S_3^1(n) + 1 \end{aligned}$$

Ou ainda: $S_3^1(n) = (n-1) + (3-2)$

Esta sequência (de números naturais), quando somados seus n termos geram números triangulares, conforme mostra a figura a seguir:

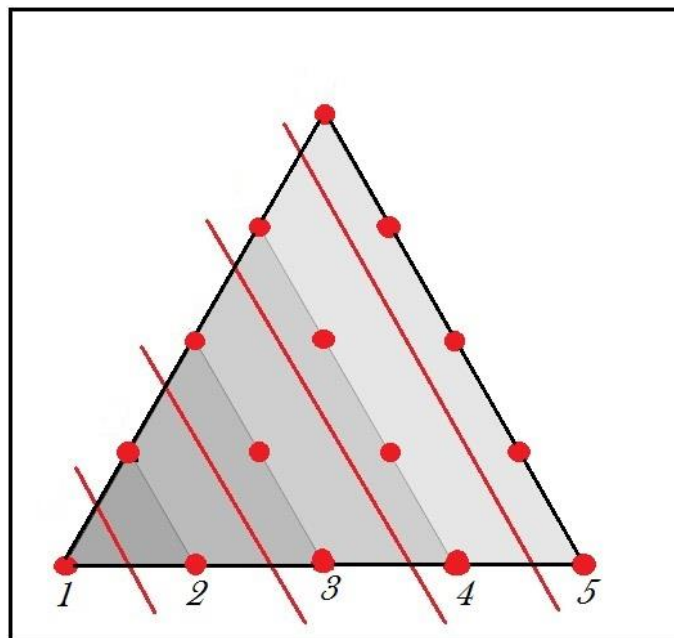
Figura 16 - número triangular formado por soma de números naturais



Fonte: elaboração do autor

Observando a figura podemos perceber que organizando os números da sequência S_3^1 , podemos construir um triângulo de pontos que correspondem aos números triangulares (discutidos na próxima seção), em outra figura, podemos observar outro triângulo de pontos separados por *gnômons*, o que sugere que o n -ésimo número triangular é formado pela soma sucessiva dos n primeiros números S_3^1

Figura 17 - o *gnômon* dos números triangulares



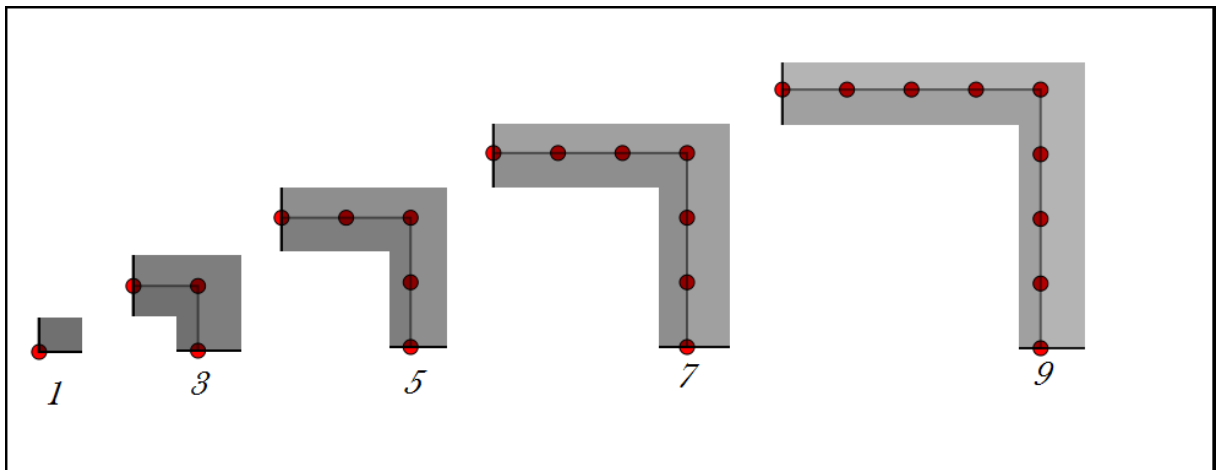
Fonte: do autor

Observando a sequência $(1, 3, 5, 7, \dots)$ e chamando de $S_4^1(1) = 1, S_4^1(2) = 3, S_4^1(3) = 5, \dots$ esta sequência é a dos números ímpares, podemos encontrar uma recorrência para tal sequência de modo que:

$$\begin{aligned}
 S_4^1(1) &= 1, \\
 S_4^1(2) &= 3 = 1 + 2 = S_4^1(1) + 2, \\
 S_4^1(3) &= 5 = 3 + 2 = S_4^1(2) + 2, \\
 S_4^1(4) &= 7 = 5 + 2 = S_4^1(3) + 2 \\
 &\dots \\
 S_4^1(n+1) &= 2(n) + 2 = \\
 S_4^1(n+1) &= S_4^1(n) + 2
 \end{aligned}$$

Veja que também podemos definir uma recorrência usando as mesmas propriedades da sequência anterior, desta maneira: $S_4^1(n) = S_4^1(n-1) + (4-2)$

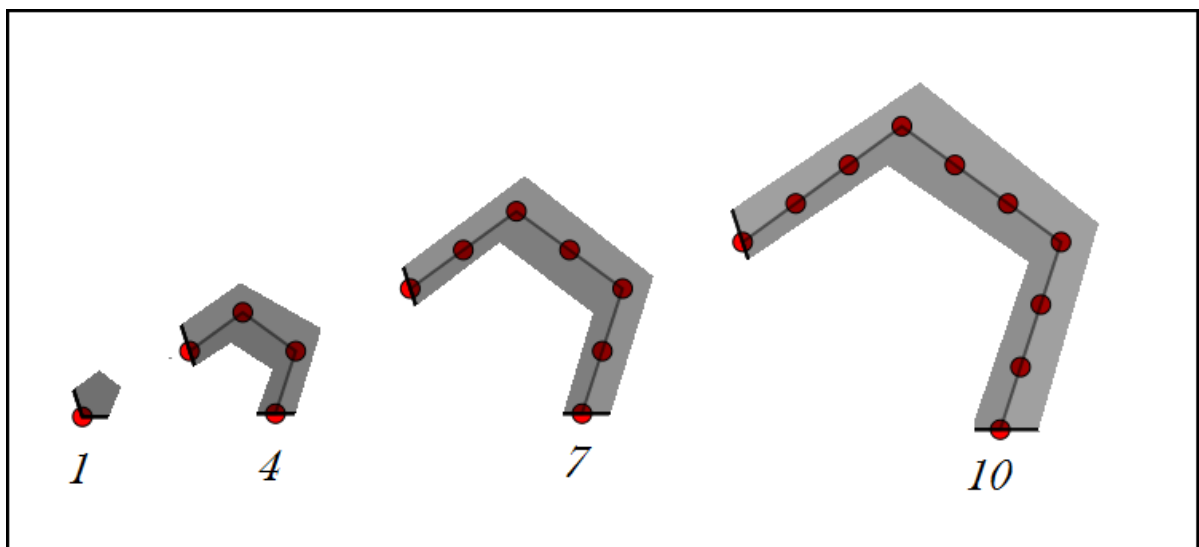
Figura 18 - o gnômon dos números poligonais quadrados



Fonte: do autor

Veamos o caso para a sequência $\{1, 4, 7, 10, \dots\}$ uma progressão aritmética com o primeiro termo igual a 1 e a razão igual a 3, como mostra a figura, vamos definir como:

Figura 19 - gnômon dos números poligonais pentagonais



Fonte: do autor

$$\begin{aligned}
S_5^1(1) &= 1, \\
S_5^1(2) &= 4 = 1 + 3 = S_5^1(1) + 3 \\
S_5^1(3) &= 7 = 4 + 3 = S_5^1(2) + 3 \\
&\dots \\
S_5^1(n) &= S_5^1(n-1) + (5-2)
\end{aligned}$$

Assim, um número de *gnômon* dos números poligonais pode ser definido como:

$$S_m^1(n) = S_m^1(n-1) + (m-2), \text{ com } n \text{ e } m, \text{ naturais e } n > 1, m \geq 3.$$

Para encontrar uma fórmula em que não necessitaremos do termo anterior, podemos usar as somas especiais, observar o crescimento das sequências:

$$\begin{aligned}
S_3^1(n) &= \{1, 2, 3, \dots, 1+1n-1\} \\
S_4^1(n) &= \{1, 3, 5, \dots, 1+2n-2\} \\
S_5^1(n) &= \{1, 4, 7, \dots, 1+3n-3\} \\
&\dots \\
S_m^1(n) &= 1 + (m-2)n - (m-2) \\
S_m^1(n) &= 1 + (m-2)(n-1)
\end{aligned}$$

A tabela a seguir apresenta os primeiros números das 10 primeiras sequências dos números de *gnômons* que formam os números poligonais.

Tabela 1 - parte da família de sequência dos números de *gnômons* poligonais

m	S_m^1
3	(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, ...)
4	(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, ...)
5	(1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52, 55, 58, 61, 64, 67, 70, 73, 76, 79, 82, 85, 88, 91, 94, 97, 100, 103, 106, 109, 112, 115, 118, ...)
6	(1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49, 53, 57, 61, 65, 69, 73, 77, 81, 85, 89, 93, 97, 101, 105, 109, 113, 117, 121, 125, 129, 133, 137, 141, 145, 149, ...)
7	(1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46, 51, 56, 61, 66, 71, 76, 81, 86, 91, 96, 101, 106, 111, 116, 121, 126, 131, 136, 141, 146, 151, 156, 161, 166, 171, 176, 181, ...)
8	(1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 49, 55, 61, 67, 73, 79, 85, 91, 97, 103, 109, 115, 121, 127, 133, 139, 145, 151, 157, 163, 169, 175, 181, 187, 193, 199, 205, 211, ...)

9	(1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50, 57, 64, 71, 78, 85, 92, 99, 106, 113, 120, 127, 134, 141, 148, 155, 162, 169, 176, 183, 190, 197, 204, 211, 218, 225, 232, 239, 246, ...)
10	(1, 9, 17, 25, 33, 41, 49, 57, 65, 73, 81, 89, 97, 105, 113, 121, 129, 137, 145, 153, 161, 169, 177, 185, 193, 201, 209, 217, 225, 233, 241, 249, 257, 265, 273, 281, ...)

Fonte: elaboração do autor

A tabela apresenta as sequências de números figurados unidimensionais que formam os gnômons dos números poligonais, que serão discutidos na seção a seguir, com suas respectivas recorrências, fórmula geral e funções geradoras, bem como a representação pelo software GeoGebra.

3.4 Números figurados planos

Os números figurados planos são as sequências que representam qualquer figura plana, vale mencionar que são descritos aqui as figuras planas regulares, estes incluem os polígonos e a estrela de seis pontas, os polígonos, por sua vez possuem duas configurações, as comuns, onde o crescimento acontece a partir de um vértice da figura e as configurações centralizadas, onde o crescimento da figura acontece a partir de um ponto central a esta, essas configurações, no entanto, seguem para todas as dimensões, porém neste trabalho, apresentaremos a configuração centralizada apenas dos números poligonais e alguns tridimensionais, sendo estes últimos apenas com sua visualização nos apêndices para se ter uma ideia do crescimento dimensional destes.

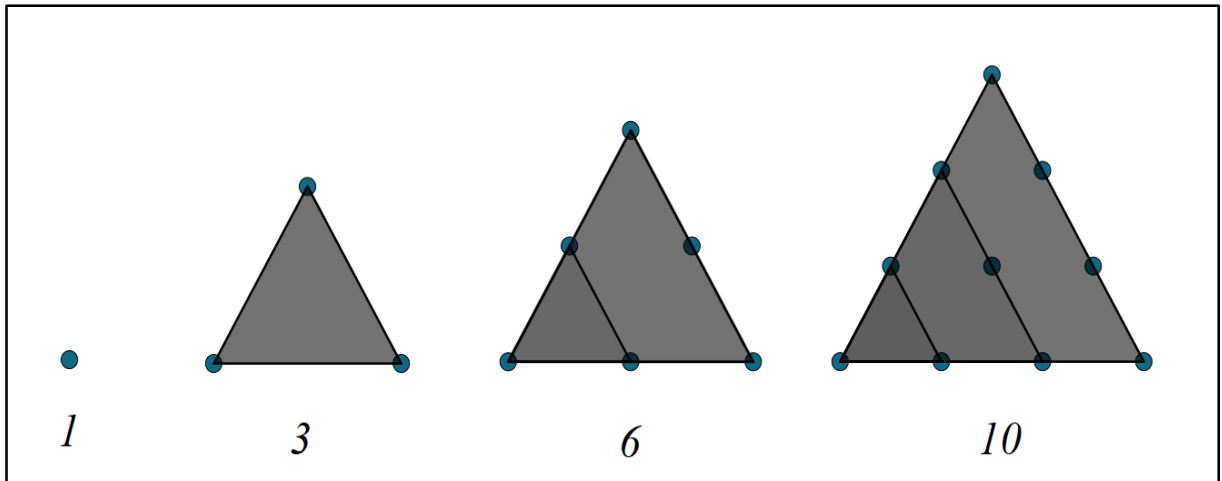
3.4.1 Números poligonais

Números figurados poligonais, são os números formados por pontos que se arranjam, formam figuras geométricas planas, esses números foram objetos de estudos dos pitagóricos com a finalidade de buscar padrões numéricos que pudessem relacionar a geometria com a aritmética, assim um número poligonal distribuídos em arranjos, podem formar triângulos, quadrados, pentágonos e etc., formando assim as sequências de números listadas nesse tópico que são as sequências de números triangulares, quadrados, pentagonais, hexagonais e assim por diante.

Como trataremos de números figurados escritos em duas dimensões, chamaremos de S_m a sequência dos números m -gonais e ocultaremos o valor da dimensão por esses números aparecerem como centro do estudo pitagórico acerca de números figurados.

Números triangulares, são os números de pontos que formam triângulos equiláteros, tal conjunto gera a sequência numérica $(1, 3, 6, 10, \dots)$, conforme as figuras a seguir:

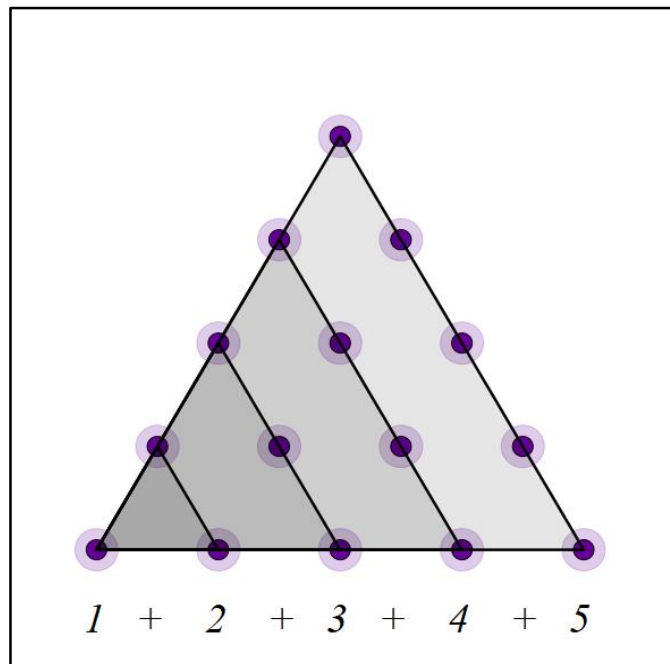
Figura 20 - os quatro primeiros números triangulares



Fonte: do autor

A figura apresenta os quatro primeiros números triangulares, a partir de uma disposição de pontos, deveremos relacionar tais pontos com os *gnômons* estudados na seção anterior para que consigamos encontrar sua recorrência, fórmula geral e função geradora, observamos ainda a figura a seguir que apresenta um número triangular como soma de *gnômons*.

Figura 21 - gnômons formando o quinto número triangular



Fonte: elaboração do autor

A figura apresenta a disposição dos números triangulares como uma soma de números naturais, os *gnômons* dos números triangulares formam a sequência numérica $S_3^1(n) = n$, assim podemos descrever a sequência dos *gnômons* dos números triangulares como uma progressão aritmética em que o primeiro termo e a razão são iguais a 1, tal sequência pode ser observada de forma mais simples como a sequência dos naturais positivos $(1, 2, 3, 4, \dots)$, logo podemos definir as somas que formam os números triangulares como:

$$S_3(1) = 1$$

$$S_3(2) = 3 = 1 + 2$$

$$S_3(3) = 6 = 1 + 2 + 3$$

...

$$S_3(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

Tal definição nos permite encontrar uma fórmula recorrente e outra fechada para os números triangulares, a recorrência para essa sequência é apresentada como:

$$\begin{aligned}
S_3(1) &= 1 \\
S_3(2) &= 3 = 1 + 2 = S_3(1) + 2 \\
S_3(3) &= 6 = 3 + 3 = S_3(2) + 3 \\
&\dots \\
S_3(n+1) &= S_3(n) + (n+1)
\end{aligned}$$

Como a recorrência não nos fornece um termo sem o conhecimento do termo anterior, necessitaremos também da formula fechada, ou seja, uma fórmula que nos apresente qualquer termo da sequência em função apenas de n , assim temos que:

$$\begin{aligned}
S_3(1) &= 1, S_3(2) = 3, S_3(3) = 6 \dots \\
S_3(1) &= 1 = \frac{1(1+1)}{2} \\
S_3(2) &= 3 = \frac{2(2+1)}{2} \\
S_3(3) &= 6 = \frac{3(3+1)}{2} \\
&\dots \\
S_3(n) &= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

Para provar tal afirmação, suponha que exista um conjunto $\mathfrak{T} = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid S_3(n) = \frac{n(n+1)}{2} \right\}$ e notamos que $1, 2, 3 \in \mathfrak{T}$, logo $\mathfrak{T} \neq \emptyset$, vamos provar pelo princípio da indução que essa fórmula é válida para $n+1$, então escrevemos $S_3(n+1) = 1 + 2 + \dots + n + (n+1)$, assim temos:

$$\begin{aligned}
S_3(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
S_3(n+1) &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
S_3(n+1) &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
S_3(n+1) &= \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}
\end{aligned}$$

Essa fórmula pode ser verificada também através das somas especiais:

$S_3(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$, adicionando essa igualdade a $S_3(n)$, temos:

$S_3(n) = (1 + 2 + \dots + (n-1) + n) + (n + (n-1) + \dots + 2 + 1)$, que reagrupando as somas, vemos que

$2S_3(n) = (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)$, com o termo $n+1$ aparecendo n vezes, logo:

$$2S_3(n) = n \cdot (n+1), \quad S_3(n) = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Por fim, segundo Deza e Deza (2012), mais uma maneira de encontrarmos a fórmula para o n -ésimo número triangular, é percebendo que $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ é um polinômio do segundo grau, portanto pode ser escrito como $an^2 + bn + c$, e para $n = 1, 2, 3$, nos fornece os três primeiros números triangulares ou seja:

$$\begin{aligned} a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c &= 1, & a + b + c &= 1, \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c &= 3, & 4a + 2b + c &= 3 \text{ e} \\ a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c &= 6, & 9a + 3b + c &= 6 \end{aligned}$$

para encontrar os respectivos valores de a, b e c , usaremos o sistema linear, segue que:

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 9a + 3b + c = 6 \end{cases}, \text{ como } c = 1 - a - b, \text{ podemos reduzir o sistema a duas equações, assim temos}$$

$$\text{que: } \begin{cases} 4a + 2b + 1 - a - b = 3 \\ 9a + 3b + 1 - a - b = 6 \end{cases} = \begin{cases} 3a + b = 2 \\ 8a + 2b = 5 \end{cases} = \begin{cases} -6a - 2b = -4 \\ 8a + 2b = 5 \end{cases}, \text{ na primeira equação temos}$$

$$2b = -6a + 4 \text{ que podemos substituir na segunda, assim, } 8a - 6a + 4 = 5 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2},$$

$$\text{substituindo esse valor em } 3a + b = 2, \text{ temos } 3 \cdot \frac{1}{2} + b = 2 \Rightarrow b = \frac{1}{2}, \text{ por fim substituímos } a \text{ e } b$$

em $a + b + c = 1$, logo $c = 0$, assim o polinômio obtido e simplificado para $S_3(n)$ é:

$$\begin{aligned} S_3(n) &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \\ S_3(n) &= \frac{1}{2}n \cdot (n+1) \\ S_3(n) &= \frac{n \cdot (n+1)}{2} \end{aligned}$$

Teorema 1: dadas a sequência $A_n = n, n \in \mathbb{N}$, e a sequência dos números ímpares

$I_n = 2n - 1, n \in \mathbb{N}$, o produto $A_n \cdot I_n$ é um número triangular:

Demonstração: $A_n \cdot I_n = n(2n-1) = 2n^2 - n$, multiplicando todos os termos por 2, temos:

$$\begin{aligned} 2A_n \cdot I_n &= 4n^2 - 2n \\ 2A_n \cdot I_n &= (2n-1)(2n) \\ A_n \cdot I_n &= \frac{(2n-1)(2n)}{2} = S_3(2n-1) \end{aligned}$$

Teorema 2: dadas a sequência dos números naturais, $A_n = n, n \in \mathbb{N}$, e a sequência dos números ímpares $I_n = 2n-1, n \in \mathbb{N}$, o produto $A_n \cdot I_{n+1}$ é um número triangular:

Demonstração:

$$\begin{aligned} A_n \cdot I_{(n+1)} &= n[2(n+1)-1] \\ A_n \cdot I_{(n+1)} &= 2n^2 + n \\ A_n \cdot I_{(n+1)} &= \frac{2 \cdot (2n^2 + n)}{2} \\ A_n \cdot I_{(n+1)} &= \frac{1}{2}(4n^2 + 2n) \\ A_n \cdot I_{(n+1)} &= \frac{1}{2}[(2n) \cdot (2n+1)] = S_3(2n) \end{aligned}$$

Os dois teoremas podem ser visualizados por meio da tabela a seguir:

Tabela 2 - tabela dos teoremas 1 e 2

n.2n-1	1	3	5	7	9	11	13
1	1	3	5	7	9	11	13
2	2	6	10	14	18	22	26
3	3	9	15	21	27	33	39
4	4	12	20	28	36	44	52
5	5	13	25	35	45	55	65
6	6	18	30	42	54	66	78
7	7	21	37	49	63	77	91

Fonte: elaboração do autor

Teorema 3: O único número triangular $S_3(n)$ primo é 3, com $n \geq 1$ (Alves 2012, p.5)

Demonstração: como vimos que $S_3(n) = \frac{n(n+1)}{2}$, como $n \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{cases} n \text{ é par} = 2k \\ n \text{ é ímpar} = 2k+1 \end{cases}, \text{ com } k \in \mathbb{N}, \text{ no caso de } n \text{ ser par então:}$$

$$S_3(2k) = \frac{2k(2k+1)}{2}$$

$$S_3(2k) = k(2k+1)$$

Para que esse produto seja um números primo, temos apenas o caso em que $k = 1$, pois no caso de $2k+1=1$, teríamos $k=0$, o que tornaria o produto nulo, ora sendo $k = 1$, temos:

$$S_3(2) = \frac{2(2+1)}{2} = 3$$

Para o caso em que n , é da forma $2k+1$, teremos:

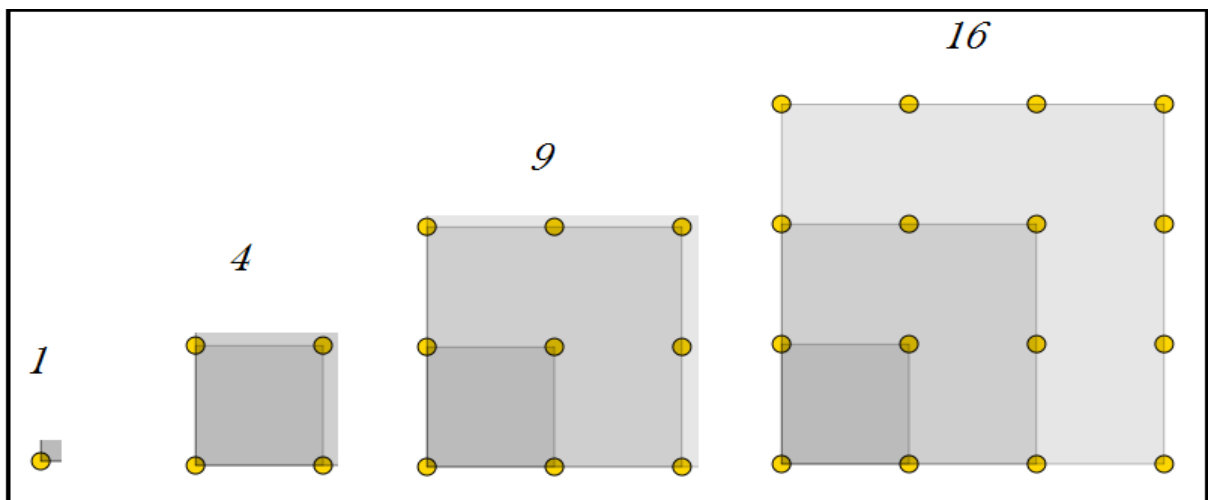
$$S_3(2k+1) = \frac{2k+1(2k+2)}{2}$$

$$S_3(2k+1) = (2k+1)(k+1)$$

No produto é perceptível que para ambos os caso para que se tenha a unidade é preciso que $k=0$, o que nos levaria a $1 \cdot 1 = 1$, que não é primo.

A próxima sequência descrita está representada pela figura a seguir:

Figura 22 - os quatro primeiros números quadrados - elaboração do autor



Fonte: elaboração do autor

Observando a distribuição dos pontos da figura, temos a sequência $(1, 4, 9, 16, \dots, n^2)$, esta sequência é conhecida como números quadrados e é representada por $S_4(n) = n^2$, seus gnômoms formam a sequência de números ímpares $(1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1)$, logo os números quadrados podem ser expressos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
S_4(1) &= 1 \\
S_4(2) &= 1 + 3 \\
S_4(3) &= 9 = 4 + 5 \\
S_4(4) &= 16 = 9 + 7 \\
&\vdots \\
S_4(n+1) &= S_4(n) + 2n + 1
\end{aligned}$$

O passo que apresenta a indução para o $(n+1)$ -ésimo número quadrado pode ser apresentado a partir da recorrência da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
S_4(n+1) &= S_4(n) + 2n + 1 \\
S_4(n+1) &= n^2 + 2n + 1 \\
S_4(n+1) &= (n+1)^2
\end{aligned}$$

Uma outra forma de se encontrar os números quadrados é a partir das somas especiais, o mesmo procedimento usado para encontrar os números triangulares, assim podemos descrever $S_4(n) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-5) + (2n-3) + (2n-1)$, pelo fato de se tratar da soma de uma progressão aritmética de razão 2, desse modo temos que:

$$\begin{aligned}
S_4(n) &= 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-5) + (2n-3) + (2n-1) + \\
S_4(n) &= (2n-1) + (2n-3) + (2n-5) + \dots + 5 + 3 + 1 \\
\hline
2S_4(n) &= \underbrace{2n + 2n + \dots + 2n}_{n \text{ vezes}} \\
2S_4(n) &= 2n^2 \\
S_4(n) &= n^2
\end{aligned}$$

Para finalizar, discutiremos o método desenvolvido por Gupta (2013) que apresenta a solução para se encontrar a fórmula para os números poligonais a partir da expressão genérica

$$an^2 + bn + c = S_4(n), \text{ assim necessitaremos de três valores para } n, \text{ segue que: } \begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 4 \\ 9a + 3b + c = 9 \end{cases}$$

, como temos na primeira equação que $c = 1 - a - b$, podemos simplificar para

$$\begin{cases} 4a + 2b - a - b = 3 \\ 9a + 3b - a - b = 8 \end{cases}, \text{ ou } \begin{cases} 3a + b = 3 \\ 8a + 2b = 8 \end{cases}, \text{ segue que } \begin{cases} -6a - 2b = -6 \\ 8a + 2b = 8 \end{cases} \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \text{ e,}$$

substituindo em qualquer equação temos $b = c = 0$, ou seja: $S_4(n) = n^2$

Agora exploraremos algumas propriedades dos números quadrados por meio de figuras com o arrimo do *software GeoGebra*, suas relações dentro da própria sequência bem como com os números triangulares.

Teorema 4: (*Theon* de Smyrna, 100 a. C.) todo número quadrado é a soma de dois números triangulares consecutivos.

Demonstração: temos que $n > 1$ e $S_4(n) = n^2$, que podemos reescrever como $S_4(n) = \frac{n^2 + n + n^2 - n}{2}$, segue que: $S_4(n) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = S_3(n) + S_3(n-1)$. A prova por indução dessa propriedade pode ser observada a seguir, partindo dos valores iniciais, ou seja $S_4(2) = S_3(2) + S_3(1) \Rightarrow 4 = 3 + 1$ e $S_4(3) = S_3(3) + S_3(2) \Rightarrow 9 = 6 + 3$, o próximo passo requer que partamos da nossa hipótese de indução $S_4(n) = S_3(n) + S_3(n-1)$, daí temos que:

$$S_4(n+1) = (n+1)^2$$

$$S_4(n+1) = n^2 + 2n + 1$$

$$S_4(n+1) = \frac{2n^2 + 4n + 2}{2}$$

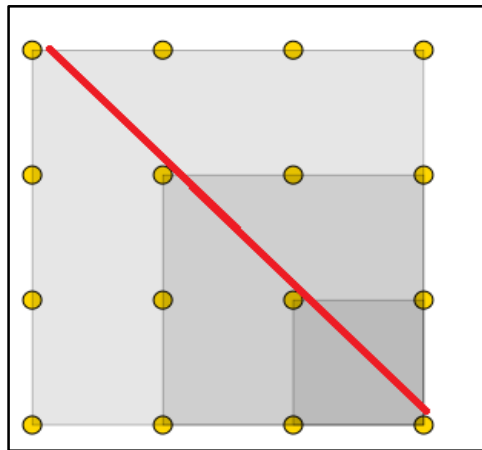
$$S_4(n+1) = \frac{(n^2 + 3n + 2) + (n^2 + n)}{2}$$

$$S_4(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_4(n+1) = S_3(n+1) + S_3(n)$$

Utilizando uma visualização do teorema 4, temos:

Figura 23 - propriedade dos números quadrados

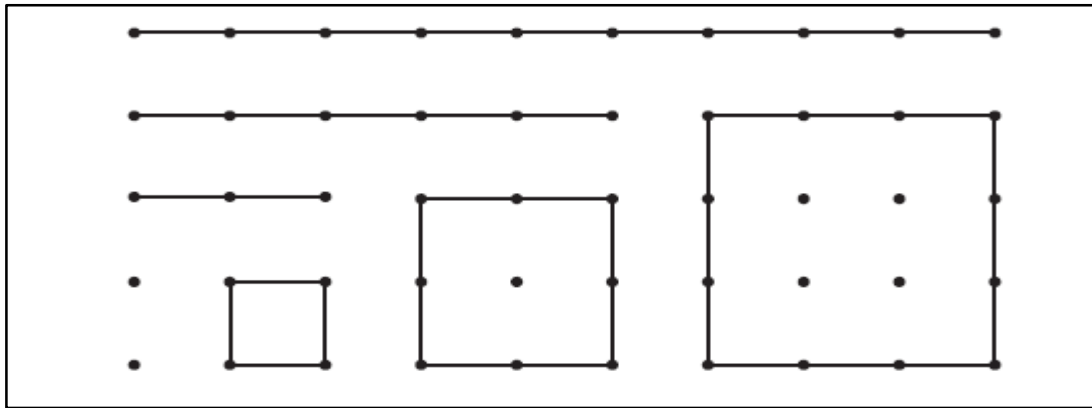


Fonte: autor

Teorema 5: (Burton, 1985, p.100) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Demonstração: observando a figura a seguir, buscaremos relações entre a soma dos n primeiros números quadrados e um retângulo, completando seus lados.

Figura 24 - figura do teorema 5



Fonte: Alves (2012)

Fazendo o teste para os primeiros números quadrados temos que:

Para $n = 1$

$$1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$$

Para $n = 2$, temos:

$$1^2 + 2^2 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6} = 5$$

Para $n = 3$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{6} = 14$$

Recorrendo a figura, observe que para tornar a soma de quadrados iguais ao retângulos formado precisamos adicionar pontos, assim podemos definir que:

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + \left(1 + 3 + 6 + \dots + \frac{n(n+1)}{2}\right) = (1 + 2 + 3 + \dots + n) \cdot (n+1)$$

Perceba que o primeiro termo refere-se a soma de quadrados descrita na figura de Burton, os pontos adicionais para se completar o retângulo, são n números triangulares, a base do retângulo formado é a base da soma dos n números naturais e, por fim, a altura do retângulo é formado pela altura do n -ésimo número quadrado mais uma linha com o n -ésimo número triangular, portanto $n+1$ pontos de altura, chamaremos o termo $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ de S , desenvolvendo apenas a soma de números triangulares temos:

$$\begin{aligned}
& 1+3+6+\dots+\frac{n(n+1)}{2} \\
& \frac{1\cdot(1+1)}{2}+\frac{2\cdot(2+1)}{2}+\frac{3\cdot(3+1)}{2}+\dots+\frac{n(n+1)}{2} \\
& \frac{1}{2}\cdot(1^2+1+2^2+2+3^2+3+\dots+n^2+n) \\
& \frac{1}{2}\cdot(1^2+2^2+3^2+\dots+n^2+1+2+3+\dots+n) \\
& \frac{1}{2}\cdot\left(S+\frac{n(n+1)}{2}\right) \\
& \frac{S}{2}+\frac{n(n+1)}{4}
\end{aligned}$$

Então temos a igualdade a seguir:

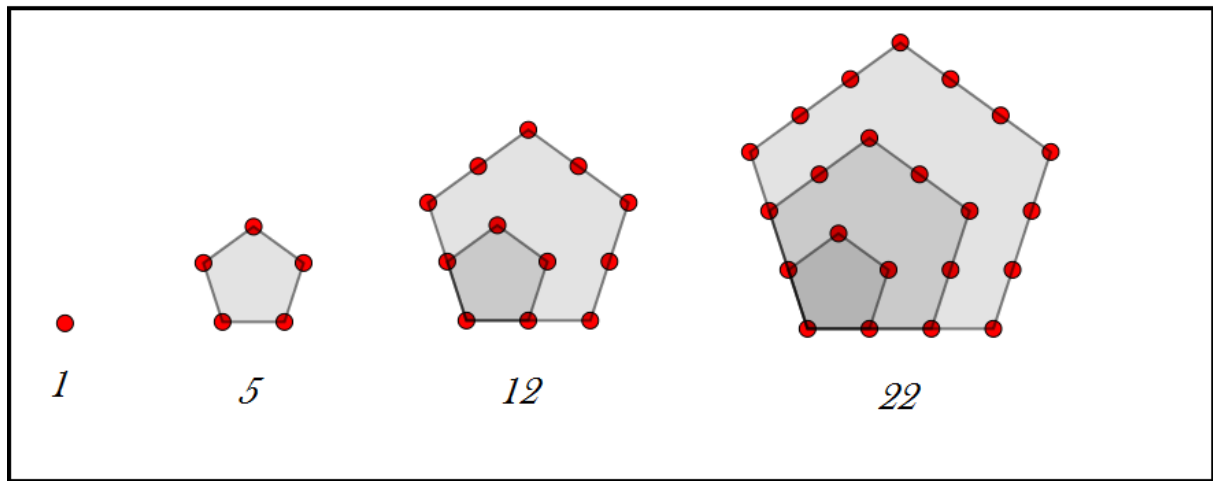
$$S+\frac{S}{2}+\frac{n(n+1)}{4}=\frac{n(n+1)}{2}\cdot(n+1)$$

Então, segue que:

$$\begin{aligned}
\frac{3S}{2} &= \frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)}{4} \\
\frac{3S}{2} &= \frac{2n(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)}{4} \\
\frac{3S}{2} &= \frac{n\cdot(n+1)}{4}\cdot(2\cdot(n+1)-1) \\
\frac{3S}{2} &= \frac{n\cdot(n+1)}{4}\cdot(2n+1) \\
3S &= \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{2} \\
S &= \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

Os números que formam uma configuração de pentágono regular, são descritos pela sequência (1,5,12,22...).

Figura 25 - os quatro primeiros números pentagonais-elaboração dos autores



Fonte: elaboração do autor

Assim, podemos definir uma recorrência linear para tais números, observe que:

$$S_5(1) = 1$$

$$S_5(2) = 5 = 1 + 4 = S_5(1) + 3 \cdot 2 - 2$$

$$S_5(3) = 12 = 5 + 7 = S_5(2) + 3 \cdot 3 - 2$$

$$S_5(4) = 22 = 12 + 10 = S_5(3) + 3 \cdot 4 - 2$$

$$\vdots$$

$$S_5(n+1) = S_5(n) + 3 \cdot (n+1) - 2 = S_5(n) + 3n + 1$$

Com base nesta recorrência, poderemos definir também a fórmula para o termo geral, usando as somas sucessivas, por exemplo, então podemos apresentar essa afirmação da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} S_5(n) &= 1 + 4 + 7 + \dots + (3(n-3) + 1) + (3(n-2) + 1) + (3(n-1) + 1) \\ &= 1 + (3 \cdot (1) + 1) + (3 \cdot (2) + 1) + \dots + (3(n-3) + 1) + (3(n-2) + 1) + (3(n-1) + 1) \\ 2S_5(n) &= (1 + (3 \cdot (1) + 1) + (3 \cdot (2) + 1) + \dots + (3(n-3) + 1) + (3(n-2) + 1) + (3(n-1) + 1)) \\ &\quad + ((3(n-1) + 1) + (3(n-2) + 1) + (3(n-3) + 1) + \dots + (3 \cdot (2) + 1) + (3 \cdot (1) + 1) + 1) \\ &= n(3n-1) \Rightarrow S_5(n) = \frac{n(3n-1)}{2} \end{aligned}$$

Para determinar a fórmula que generaliza os números poligonais, devermos recorrer ao fato de que estes números são as somas dos números de gnômons descritos na seção anterior ou seja, são a soma de termos de progressões aritméticas em que a razão é $m-2$, por exemplo, o n -ésimo número triangular é formado pela soma dos n primeiros números naturais, o n -ésimo número quadrado, por sua vez é a soma dos n primeiros números ímpares, os pentagonais são formados usando o mesmo critério, porém com a razão entre seus termos iguais a 3, ou seja

$(5-2)$, sendo assim o termo geral de uma progressão aritmética com razão $(m-2)$ é dado pela fórmula:

$$S_m^1(n) = 1 + (n-1)(m-2)$$

Em que $S_m^1(n)$ representa o n -ésimo termo da progressão aritmética de razão $(m-2)$, perceba que este termo é o *gnômon* de um número poligonal, esta então é a forma do termo geral da sequência dos números de *gnômons* dos números poligonais, logo a soma dos termos é dada por:

$$\begin{aligned} S_m(n) &= \frac{(1+1+(n-1)(m-2)) \cdot n}{2} \\ S_m(n) &= \frac{(2+2-m-2n+mn) \cdot n}{2} \\ S_m(n) &= \frac{n((m-2)n-m+4)}{2} \end{aligned}$$

Para provar essa fórmula por meio do princípio de indução, precisamos da recorrência para o $(n-1)$ -ésimo número m -gonal , então, observamos que:

$$\begin{aligned} S_3(n+1) &= S_3(n) + n + 1, S_4(n+1) = S_4(n) + 2n + 1 \text{ e } S_5(n+1) = S_5(n) + 3n + 1, \text{ portanto} \\ S_m(n+1) &= S_m(n) + (m-2) \cdot n + 1, \text{ assim, temos que:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_m(n+1) &= S_m(n) + (m-2) \cdot n + 1, S_m(1) = 1 \\ &= \frac{n((m-2)n-m+4)}{2} + (m-2) \cdot n + 1 \\ &= \frac{n((m-2)n-m+4)}{2} + \frac{2n(m-2)+2}{2} \\ &= \frac{(n((m-2)n-m+4) + 2n(m-2) + 2)}{2} \\ &= \frac{n^2(m-2) - nm + 4n + 2n(m-2) + 2 + (m-2) - (m-2)}{2} \\ &= \frac{(n+1)^2(m-2) - nm + 4n - m + 4}{2} \\ &= \frac{(n+1)^2 \cdot (m-2) + (-m+4)(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)((m-2)(n+1) - m + 4)}{2} \end{aligned}$$

A tabela a seguir, foi retirada do livro de Deza & Deza (2012) e apresenta as fórmulas dos números poligonais em particular, bem como seus respectivos registros na *Oeis*, site responsável por catalogar as sequências numéricas dos inteiros descobertas.

Figura 26 - lista de fórmulas dos números poligonais

Name	Formula												Sloane
Triangular	$\frac{1}{2}(n^2 + n)$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	A000217
Square	$\frac{1}{2}(n^2 - 0 \cdot n)$	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	A000290
Pentagonal	$\frac{1}{2}(3n^2 - 1 \cdot n)$	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	176	A000326
Hexagonal	$\frac{1}{2}(4n^2 - 2n)$	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190	231	A000384
Heptagonal	$\frac{1}{2}(5n^2 - 3n)$	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235	286	A000566
Octagonal	$\frac{1}{2}(6n^2 - 4n)$	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280	341	A000567
Nonagonal	$\frac{1}{2}(7n^2 - 5n)$	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325	396	A001106
Decagonal	$\frac{1}{2}(8n^2 - 6n)$	1	10	27	52	85	126	175	232	297	370	451	A001107
Hendecagonal	$\frac{1}{2}(9n^2 - 7n)$	1	11	30	58	95	141	196	260	333	415	506	A051682
Dodecagonal	$\frac{1}{2}(10n^2 - 8n)$	1	12	33	64	105	156	217	288	369	460	561	A051624
Tridecagonal	$\frac{1}{2}(11n^2 - 9n)$	1	13	36	70	115	171	238	316	405	505	616	A051865
Tetradecagonal	$\frac{1}{2}(12n^2 - 10n)$	1	14	39	76	125	186	259	344	441	550	671	A051866
Pentadecagonal	$\frac{1}{2}(13n^2 - 11n)$	1	15	42	82	135	201	280	372	477	595	726	A051867
Hexadecagonal	$\frac{1}{2}(14n^2 - 12n)$	1	16	45	88	145	216	301	400	513	640	781	A051868
Heptadecagonal	$\frac{1}{2}(15n^2 - 13n)$	1	17	48	94	155	231	322	428	549	685	836	A051869
Octadecagonal	$\frac{1}{2}(16n^2 - 14n)$	1	18	51	100	165	246	343	456	585	730	891	A051870
Nonadecagonal	$\frac{1}{2}(17n^2 - 15n)$	1	19	54	106	175	261	364	484	621	775	946	A051871
Icosagonal	$\frac{1}{2}(18n^2 - 16n)$	1	20	57	112	185	276	385	512	657	820	1001	A015872
Icosihenagonal	$\frac{1}{2}(19n^2 - 17n)$	1	21	60	118	195	291	406	540	693	865	1056	A015873
Icosidigonal	$\frac{1}{2}(20n^2 - 18n)$	1	22	63	124	205	306	427	568	729	910	1111	A015874
Icositrigonal	$\frac{1}{2}(21n^2 - 19n)$	1	23	66	130	215	321	448	596	765	955	1166	A015875
Icositetragonal	$\frac{1}{2}(22n^2 - 20n)$	1	24	69	136	225	336	469	624	801	1000	1221	A015876
Icosipentagonal	$\frac{1}{2}(23n^2 - 21n)$	1	25	72	142	235	351	490	652	837	1045	1276	
Icosihexagonal	$\frac{1}{2}(24n^2 - 22n)$	1	26	75	148	245	366	511	680	873	1090	1331	
Icosiheptagonal	$\frac{1}{2}(25n^2 - 23n)$	1	27	78	154	255	381	532	708	909	1135	1386	
Icosioctagonal	$\frac{1}{2}(26n^2 - 24n)$	1	28	81	160	265	396	553	736	945	1180	1441	
Icosinonagonal	$\frac{1}{2}(27n^2 - 25n)$	1	29	84	166	275	411	574	764	981	1225	1496	
Triacontagonal	$\frac{1}{2}(28n^2 - 26n)$	1	30	87	172	285	426	595	792	1017	1270	1551	

Fonte: Deza & Deza (2012, p.6)

Para determinar a função geradora das sequências dos números poligonais, como já possuímos a forma canônica, deveremos ter somente a recorrência linear e homogênea e os primeiros termos das sequências desejadas.

Assim, tudo que precisamos agora é de uma sequência, sua recorrência e seus valores iniciais e, empregando elementos aritméticos, podemos encontrar sua função geradora, vamos tomar como exemplo a sequência dos números triangulares (1,3,6,10,15, ...).

A fórmula para se encontrar o próximo número triangular a partir do anterior é: $S_3(n+1) = S_3(n) + (n+1)$, (Alves, 2012), que é uma recorrência linear não homogênea e para encontrar a recorrência linear homogênea relacionada a essa sequência, teremos que usar alguns processos algébricos, vejamos que: $S_3(n+2) = S_3(n+1) + (n+2)$, subtraindo a primeira da segunda fórmula, observamos que:

$$S_3(n+2) - S_3(n+1) = S_3(n+1) - S_3(n) + (n+2) - (n+1)$$

$$S_3(n+2) - S_3(n+1) = S_3(n+1) - S_3(n) + 1$$

$$S_3(n+2) = 2S_3(n+1) - S_3(n) + 1$$

Agora usaremos $S_3(n+3) = S_3(n+2) + (n+3)$ e subtraímos $S_3(n+2) = 2S_3(n+1) - S_3(n) + 1$, com isso:

$$\begin{aligned} S_3(n+3) - S_3(n+2) &= S_3(n+2) - 2S_3(n+1) + S_3(n) + (n+3) - 1 \\ S_3(n+3) &= 2S_3(n+2) - 2S_3(n+1) + S_3(n) + (n+2) \end{aligned}$$

Com isso, usando o mesmo procedimento, podemos subtrair

$S_3(n+2) = S_3(n+1) + (n+2)$ de $S_3(n+3) = 2S_3(n+2) - 2S_3(n+1) + S_3(n) + (n+2)$ visando eliminar o termo $(n+2)$, portanto:

$$S_3(n+3) - S_3(n+2) = 2S_3(n+2) - 2S_3(n+1) - S_3(n+1) + S_3(n) + (n+2) - (n+2), \text{ ou seja}$$

$S_3(n+3) = 3S_3(n+2) - 3S_3(n+1) + S_3(n)$ que é uma recorrência linear homogênea de 3ª ordem, reescrevendo essa recorrência igualando a zero temos,

$$S_3(n+3) - 3S_3(n+2) + 3S_3(n+1) - S_3(n) = 0. \text{ Veja que comparando com a função genérica,}$$

$$\frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n \text{ como temos } n = 3 \text{ reescrevendo com}$$

$$\text{os valores temos } \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3, \text{ também sabemos que os}$$

números $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ são coeficientes da recorrência então determinaremos

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \text{ com os valores de } S_3(n+3) - 3S_3(n+2) + 3S_3(n+1) - S_3(n) = 0,$$

que agora podemos escrever $c_{n+3} - 3c_{n+2} + 3c_{n+1} - c_n = 0$ assim sendo, temos que:

$$b_0 = 1, b_1 = -3, b_2 = 3 \text{ e } b_3 = -1, \text{ com isso } g(x) = 1 - 3x + 3x^2 - x^3 \text{ ou seja } g(x) = (1-x)^3.$$

Para os valores iniciais, como se trata de uma recorrência linear de 3ª ordem, deveremos ter os três primeiros valores, ou valores iniciais, recorremos a sequência, logo, $S_3(1) = 1, S_3(2) = 3$ e $S_3(3) = 6$ que agora podemos escrever $c_0 = 1, c_1 = 3$ e $c_2 = 6$. Por fim, encontraremos os valores dos coeficientes do polinômio a_0, a_1 e a_2 conforme as igualdades $a_0 = b_0c_0, a_1 = b_0c_1 + b_1c_0, a_2 = b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0$ então segue que:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \cdot 1 = 1 \\ a_1 &= 1 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 0 \\ a_2 &= 1 \cdot 6 - 3 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Então temos que $f(x) = 1$, logo a função geradora para os números triangulares é:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + \dots + S_3(n)x^{n-1}$$

Multiplicando a igualdade por x ; $\frac{x \cdot f(x)}{g(x)} = \frac{x}{(1-x)^3} = 1x + 3x^2 + 6x^3 + \dots + S_3(n)x^n$.

Usando um recurso computacional para verificar a função geradora obtida, temos:

Figura 27 - FG dos números triangulares pelo software wxMáxima

```
(%i21) rectform(%);
(%o21)  $\frac{x}{(1-x)^3}$ 

(%i22) trigrat(%);
(%o22)  $\frac{x}{x^3-3x^2+3x-1}$ 

(%i25) taylor(rectform(%), x, 0, 100);
(%o25)  $\frac{1}{T} x + 3x^2 + 6x^3 + 10x^4 + 15x^5 + 21x^6 + 28x^7 + 36x^8 + 45x^9 + 55x^{10} + 66x^{11} + 78x^{12} + 91x^{13} + 105x^{14} + 120x^{15} + 136x^{16} + 153x^{17} + 171x^{18} + 190x^{19} + 210x^{20} + 231x^{21} + 253x^{22} + 276x^{23} + 300x^{24} + 325x^{25} + 351x^{26} + 378x^{27} + 406x^{28} + 435x^{29} + 465x^{30} + 496x^{31} + 528x^{32} + 561x^{33} + 595x^{34} + 630x^{35} + 666x^{36} + 703x^{37} + 741x^{38} + 780x^{39} + 820x^{40} + 861x^{41} + 903x^{42} + 946x^{43} + 990x^{44} + 1035x^{45} + 1081x^{46} + 1128x^{47} + 1176x^{48} + 1225x^{49} + 1275x^{50} + 1326x^{51} + 1378x^{52} + 1431x^{53} + 1485x^{54} + 1540x^{55} + 1596x^{56} + 1653x^{57} + 1711x^{58} + 1770x^{59} + 1830x^{60} + 1891x^{61} + 1953x^{62} + 2016x^{63} + 2080x^{64} + 2145x^{65} + 2211x^{66} + 2278x^{67} + 2346x^{68} + 2415x^{69} + 2485x^{70} + 2556x^{71} + 2628x^{72} + 2701x^{73} + 2775x^{74} + 2850x^{75} + 2926x^{76} + 3003x^{77} + 3081x^{78} + 3160x^{79} + 3240x^{80} + 3321x^{81} + 3403x^{82} + 3486x^{83} + 3570x^{84} + 3655x^{85} + 3741x^{86} + 3828x^{87} + 3916x^{88} + 4005x^{89} + 4095x^{90} + 4186x^{91} + 4278x^{92} + 4371x^{93} + 4465x^{94} + 4560x^{95} + 4656x^{96} + 4753x^{97} + 4851x^{98} + 4950x^{99} + 5050x^{100} + \dots$ 
```

Fonte: elaboração do autor

Agora apresentaremos o mesmo procedimento para encontrar a função geradora dos números quadrados, (1, 4, 9, 16, ...)

Onde $S_4(1) = 1, S_4(2) = 4, S_4(3) = 9$, e $S_4(n) = n^2$ com $n \in \mathbb{N}$, para isso necessitaremos da relação de recorrência homogênea, usando os mesmos procedimentos anteriores temos:

$$\begin{aligned} S_4(1) &= 1, \\ S_4(2) &= 4 = S_4(1) + 3, \\ S_4(3) &= 9 = S_4(2) + 5, \\ &\dots \\ S_4(n) &= n^2 = S_4(n-1) + 2(n) + 1 \end{aligned}$$

Logo:

$$S_4(n+1) = S_4(n) + 2n + 1, S_4(n+2) = S_4(n+1) + 2(n+1) + 1$$

$$S_4(n+2) - S_4(n+1) = S_4(n+1) - S_4(n) + 2$$

$$S_4(n+2) = 2S_4(n+1) - S_4(n) + 2.$$

$$S_4(n+3) = S_4(n+2) + 2(n+2) + 1$$

$$S_4(n+3) - S_4(n+2) = S_4(n+2) - 2S_4(n+1) + S_4(n) + 2n + 3$$

$$S_4(n+3) = 2S_4(n+2) - 2S_4(n+1) + S_4(n) + 2n + 3.$$

$$S_4(n+3) - S_4(n+2) = 2S_4(n+2) - 3S_4(n+1) + S_4(n)$$

$$S_4(n+3) = 3S_4(n+2) - 3S_4(n+1) + S_4(n).$$

$$S_4(n+3) - 3S_4(n+2) + 3S_4(n+1) - S_4(n) = 0$$

Novamente verificamos uma recorrência de 3ª ordem, logo podemos usar a mesma

fórmula canônica $\frac{a_0 + a_1x + a_2x^2}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$ para encontrar os termos do

polinômio $S_4(n+3) - 3S_4(n+2) + 3S_4(n+1) - S_4(n)$, sendo $S_4(n) = c_0, S_4(n+1) = c_1, \dots$

percebemos que os valores de b não se alteram em relação aos números triangulares e a única diferença são os valores iniciais $c_0 = 1, c_1 = 4$ e $c_2 = 9$, o que podemos concluir que:

$$a_0 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$a_1 = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 1$$

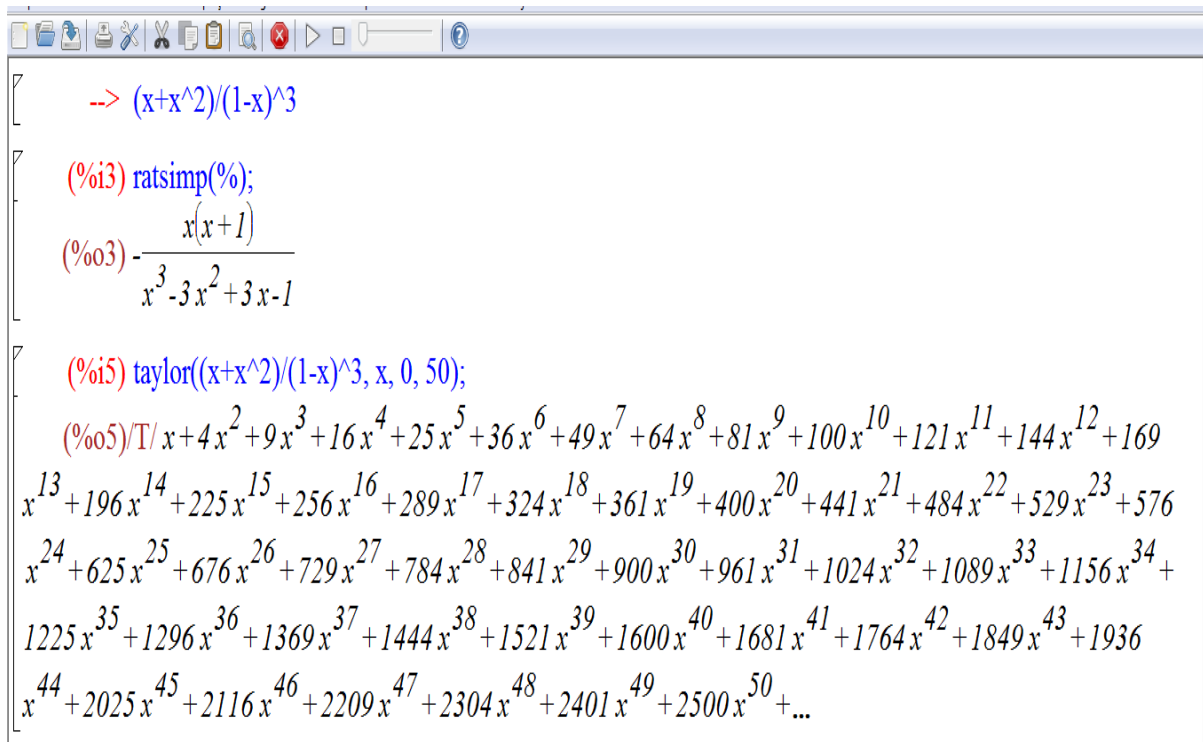
$$a_2 = 1 \cdot 9 - 3 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 0$$

Assim, podemos definir a função geradora $\frac{1+x}{(1-x)^3} = 1 + 4x + 9x^2 + \dots + (S_4(n))x^{n-1}$

Ou ainda: $\frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = 1x + 4x^2 + 9x^3 + \dots + (S_4(n))x^n, |x| < 1.$

Aplicando novamente o recurso computacional para verificar a função geradora.

Figura 28 - FG dos números quadrados



```

--> (x+x^2)/(1-x)^3

(%i3) ratsimp(%);

(%o3) -
      x(x+1)
      -----
      x^3-3x^2+3x-1

(%i5) taylor((x+x^2)/(1-x)^3, x, 0, 50);

(%o5) T/ x+4x^2+9x^3+16x^4+25x^5+36x^6+49x^7+64x^8+81x^9+100x^10+121x^11+144x^12+169
x^13+196x^14+225x^15+256x^16+289x^17+324x^18+361x^19+400x^20+441x^21+484x^22+529x^23+576
x^24+625x^25+676x^26+729x^27+784x^28+841x^29+900x^30+961x^31+1024x^32+1089x^33+1156x^34+
1225x^35+1296x^36+1369x^37+1444x^38+1521x^39+1600x^40+1681x^41+1764x^42+1849x^43+1936
x^44+2025x^45+2116x^46+2209x^47+2304x^48+2401x^49+2500x^50+...

```

Fonte: elaboração do autor

De modo geral temos:

$$S_3(n+1) = S_3(n) + n + 1$$

$$S_4(n+1) = S_4(n) + 2n + 1$$

$$S_5(n+1) = S_5(n) + 3n + 1$$

...

$$S_m(n+1) = S_m(n) + (m-2)n + 1$$

Com os primeiros termos da sequência dos números m -gonais são: $S_m(1) = 1, S_m(2) = m$ e $S_m(3) = m + (m-2) \cdot 2 + 1 = m + 2m - 4 + 1 = 3m - 3$. Assim, a função geradora para o n -ésimo número m -gonal pode ser encontrada usando:

$$S_m(n+1) = S_m(n) + (m-2)n + 1, S_m(n+2) = S_m(n+1) + (m-2)(n+1) + 1$$

$$S_m(n+2) - S_m(n+1) = S_4(n+1) - S_4(n) + m - 2$$

$$S_m(n+2) = 2S_m(n+1) - S_m(n) + m - 2.$$

$$S_m(n+3) = S_m(n+2) + (m-2)(n+2) + 1$$

$$S_m(n+3) - S_m(n+2) = S_m(n+2) - 2S_m(n+1) + S_4(n) + (m-2)(n+2-1) + 1$$

$$S_m(n+3) = 2S_m(n+2) - 2S_m(n+1) + S_4(n) + (m-2)(n+1) + 1.$$

$$S_m(n+3) - S_m(n+2) = 2S_m(n+2) - 3S_m(n+1) + S_m(n)$$

$$S_m(n+3) = 3S_m(n+2) - 3S_m(n+1) + S_m(n).$$

$$S_m(n+3) - 3S_m(n+2) + 3S_m(n+1) - S_m(n) = 0$$

Onde:

$$a_0 = b_0 c_0 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0 = 1 \cdot m - 3 \cdot 1 = m - 3$$

$$a_2 = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 = 1 \cdot (3m - 3) - 3m + 3 = 0.$$

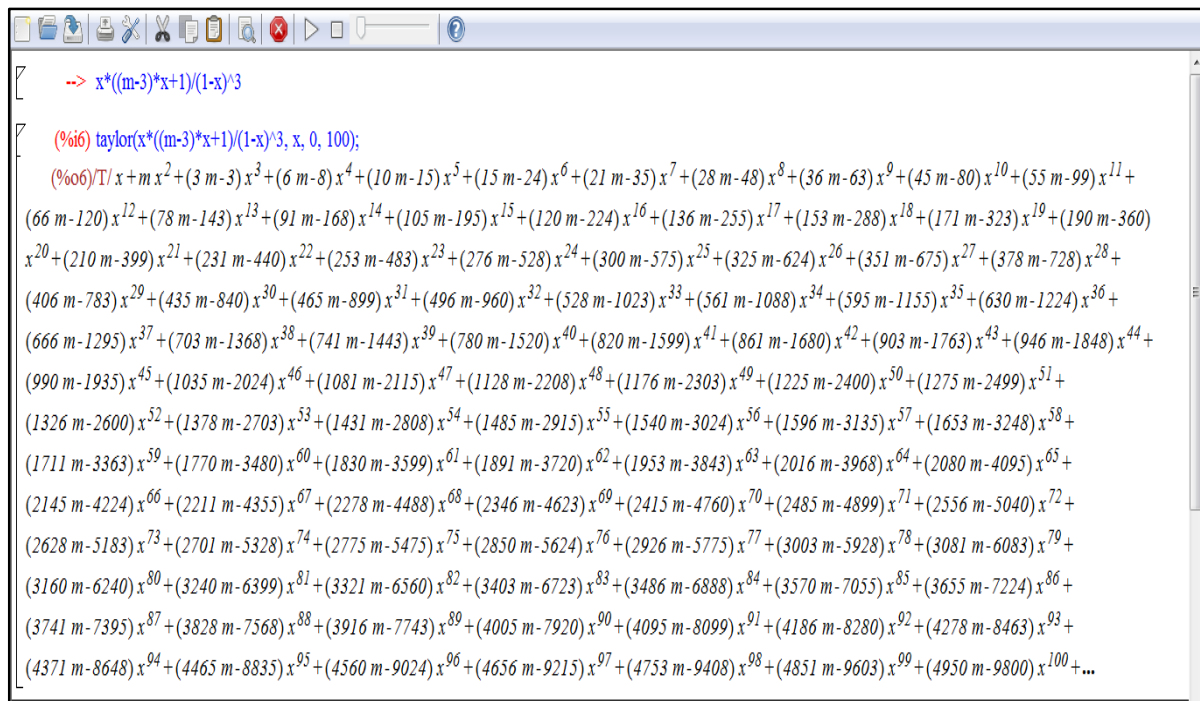
$$f(x) = 1 + (m - 3)x, g(x) = (1 - x)^3$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 + (m - 3)x}{(1 - x)^3} = S_m(1) + S_m(2)x + S_m(3)x^2 + \dots + S_m(n)x^{n-1}$$

$$G[S_m(n), x] = \frac{x(1 + (m - 3)x)}{(1 - x)^3} = S_m(1)x + S_m(2)x^2 + S_m(3)x^3 + \dots + S_m(n)x^n$$

Podemos comprovar esta fórmula com a ajuda do SM, como nos mostra a figura a seguir:

Figura 29 - FG dos números poligonais com o auxílio do SM



```

--> x*((m-3)*x+1)/(1-x)^3

(%i6) taylor(x*((m-3)*x+1)/(1-x)^3, x, 0, 100);

(%o6) 1/x + m x^2 + (3 m - 3) x^3 + (6 m - 8) x^4 + (10 m - 15) x^5 + (15 m - 24) x^6 + (21 m - 35) x^7 + (28 m - 48) x^8 + (36 m - 63) x^9 + (45 m - 80) x^10 + (55 m - 99) x^11 +
(66 m - 120) x^12 + (78 m - 143) x^13 + (91 m - 168) x^14 + (105 m - 195) x^15 + (120 m - 224) x^16 + (136 m - 255) x^17 + (153 m - 288) x^18 + (171 m - 323) x^19 + (190 m - 360)
x^20 + (210 m - 399) x^21 + (231 m - 440) x^22 + (253 m - 483) x^23 + (276 m - 528) x^24 + (300 m - 575) x^25 + (325 m - 624) x^26 + (351 m - 675) x^27 + (378 m - 728) x^28 +
(406 m - 783) x^29 + (435 m - 840) x^30 + (465 m - 899) x^31 + (496 m - 960) x^32 + (528 m - 1023) x^33 + (561 m - 1088) x^34 + (595 m - 1155) x^35 + (630 m - 1224) x^36 +
(666 m - 1295) x^37 + (703 m - 1368) x^38 + (741 m - 1443) x^39 + (780 m - 1520) x^40 + (820 m - 1599) x^41 + (861 m - 1680) x^42 + (903 m - 1763) x^43 + (946 m - 1848) x^44 +
(990 m - 1935) x^45 + (1035 m - 2024) x^46 + (1081 m - 2115) x^47 + (1128 m - 2208) x^48 + (1176 m - 2303) x^49 + (1225 m - 2400) x^50 + (1275 m - 2499) x^51 +
(1326 m - 2600) x^52 + (1378 m - 2703) x^53 + (1431 m - 2808) x^54 + (1485 m - 2915) x^55 + (1540 m - 3024) x^56 + (1596 m - 3135) x^57 + (1653 m - 3248) x^58 +
(1711 m - 3363) x^59 + (1770 m - 3480) x^60 + (1830 m - 3599) x^61 + (1891 m - 3720) x^62 + (1953 m - 3843) x^63 + (2016 m - 3968) x^64 + (2080 m - 4095) x^65 +
(2145 m - 4224) x^66 + (2211 m - 4355) x^67 + (2278 m - 4488) x^68 + (2346 m - 4623) x^69 + (2415 m - 4760) x^70 + (2485 m - 4899) x^71 + (2556 m - 5040) x^72 +
(2628 m - 5183) x^73 + (2701 m - 5328) x^74 + (2775 m - 5475) x^75 + (2850 m - 5624) x^76 + (2926 m - 5775) x^77 + (3003 m - 5928) x^78 + (3081 m - 6083) x^79 +
(3160 m - 6240) x^80 + (3240 m - 6399) x^81 + (3321 m - 6560) x^82 + (3403 m - 6723) x^83 + (3486 m - 6888) x^84 + (3570 m - 7055) x^85 + (3655 m - 7224) x^86 +
(3741 m - 7395) x^87 + (3828 m - 7568) x^88 + (3916 m - 7743) x^89 + (4005 m - 7920) x^90 + (4095 m - 8099) x^91 + (4186 m - 8280) x^92 + (4278 m - 8463) x^93 +
(4371 m - 8648) x^94 + (4465 m - 8835) x^95 + (4560 m - 9024) x^96 + (4656 m - 9215) x^97 + (4753 m - 9408) x^98 + (4851 m - 9603) x^99 + (4950 m - 9800) x^100 + ...

```

Fonte: do autor

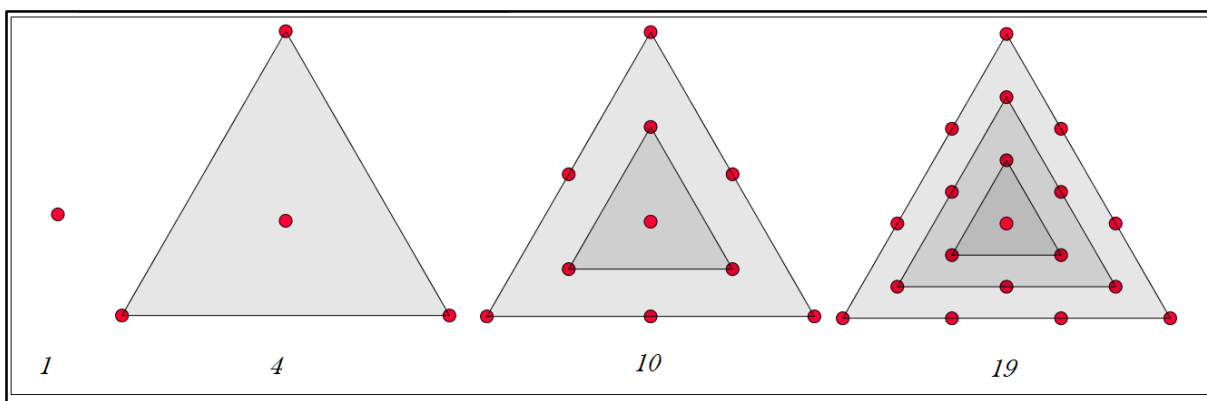
Desta forma, descrevemos as principais maneiras de apresentar números poligonais com o auxílio dos softwares GeoGebra e wxMáxima. Ademais trataremos de outra família de sequência dos números figurados, que divide em duas as possibilidades de configurações de pontos em qualquer dimensão nos NF, ou seja, quando necessário descrever números figurados, precisamos saber se estes estão em configuração normal ou centralizada, como veremos a seguir.

3.4.2 Números poligonais centralizados

Quando apresentamos números figurados seja de qual for o tipo, quantidade de lado, se é regular ou não, sempre partimos de um ponto como sendo o primeiro vértice e completamos com o *gnômon* como se a figura aumentasse sempre de um vértice arbitrário, porém podemos considerar o fato de que poderíamos fazer esse crescimento também de “dentro para fora” da figura como se o primeiro ponto não fizesse parte dos vértices da segunda figura que formaríamos, tais configurações são chamadas de centralizadas, e para cada número figurado existente, existe também seu análogo centralizado pois seria apenas uma maneira de demonstrar um tipo de crescimento diferente do que mostramos no início da seção dos números poligonais, assim, seguiremos descrevendo da mesma forma que foi feito nas configurações comuns, agora nas configurações centralizadas, começando dos números triangulares centralizados, quadrados centralizados e assim por diante.

Os números triangulares centralizados, são os triângulos formados por um ponto central e n camadas de triângulos, cada camada com um número de pontos em seus lados, essa regra vale para qualquer outro número poligonal centralizado, visto que são figuras regulares, a seguir a figura apresenta os números figurados triangulares centralizados

Figura 30 - os quatro primeiros números triangulares centralizados



Fonte: elaboração do autor

Bem como os números poligonais comuns, esses números também possuem recorrência particular, uma fórmula geral e uma função geradora que, não necessariamente se relaciona com o seu análogo de configuração comum, chamaremos esses números de $SC_3(1)=1$, $SC_3(2)=4$, $SC_3(3)=10$, $SC_3(4)=19$, para a recorrência dessa sequência, temos que:

$$\begin{aligned}
SC_3(1) &= 1 \\
SC_3(2) &= 4 = 1 + 3 \cdot 1 \\
SC_3(3) &= 10 = 4 + 3 \cdot 2 \\
SC_3(4) &= 19 = 10 + 3 \cdot 3 \\
&\vdots \\
SC_3(n+1) &= SC_3(n) + 3n
\end{aligned}$$

Esse fato decorre naturalmente pois cada número é formado pelo seu anterior mais uma camada que forma um triângulo cujo os pontos são sempre acrescidos entre dois já existentes, ou seja, para formar a primeira camada, necessitaremos do número de pontos do próprio triângulo, ou seja, três, partindo disto o próximo deverá ter um ponto entre dois dos pontos existentes na estrutura anterior, ou seja 6, o seguinte deveremos ter dois pontos entre os três pontos, isso quer dizer que teremos nove, e assim por diante.

Para encontrarmos uma possível fórmula que nos apresente qualquer termo sem a necessidade do anterior, temos:

$$\begin{aligned}
SC_3(1) &= 1 \\
SC_3(2) &= 4 = 1 + 3 \cdot \left(\frac{2 \cdot 1}{2} \right) \\
SC_3(3) &= 10 = 1 + 3 \cdot \left(\frac{3 \cdot 2}{2} \right) \\
SC_3(4) &= 19 = 1 + 3 \cdot \left(\frac{4 \cdot 3}{2} \right) \\
&\vdots \\
SC_3(n) &= 1 + 3 \cdot \left(\frac{n(n-1)}{2} \right)
\end{aligned}$$

Para provarmos tal fato, recorreremos para o método da indução finita, pois temos que se $SC_1(1)=1$ e para os três primeiros termos vale a fórmula apresentada, suponhamos que a fórmula seja válida para $n \in \mathbb{N}$, mostraremos se é válido para $n+1$, com isto, usaremos a recorrência para solucionar este problema, então temos:

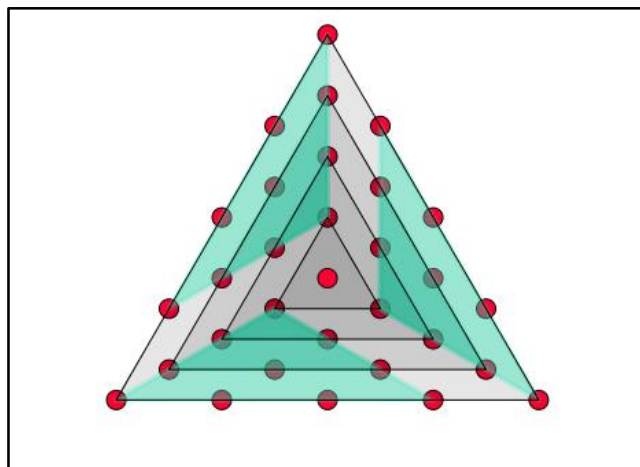
$$\begin{aligned}
SC_3(n+1) &= SC_3(n) + 3n \\
&= 1 + 3 \cdot \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) + 3n \\
&= 1 + 3 \cdot \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) + \frac{6n}{2} \\
&= 1 + 3 \cdot \left(\frac{n(n-1) + 2n}{2} \right) \\
&= 1 + 3 \cdot \left(\frac{n((n-1) + 2)}{2} \right) \\
&= 1 + 3 \cdot \left(\frac{(n+1) \cdot (n-1+1)}{2} \right)
\end{aligned}$$

Esses números tem uma relação com os números triangulares de configuração normal, pois partem da adição do número 1, seguidos dos múltiplos de 3 ou seja:

$$\begin{aligned}
SC_3(n) &= 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \dots + 3 \cdot (n-1) \\
&= 1 + 3 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + (n-1))
\end{aligned}$$

Ou seja, em um determinado ponto, temos a soma de números naturais que como visto nas seções anteriores, geram os números triangulares, de configurações normais. Esse relação entre os números triangulares e triangulares centralizados, pode ser observada na figura a seguir:

Figura 31 - terceiro número triangular centralizado apresentado como soma de três números triangulares



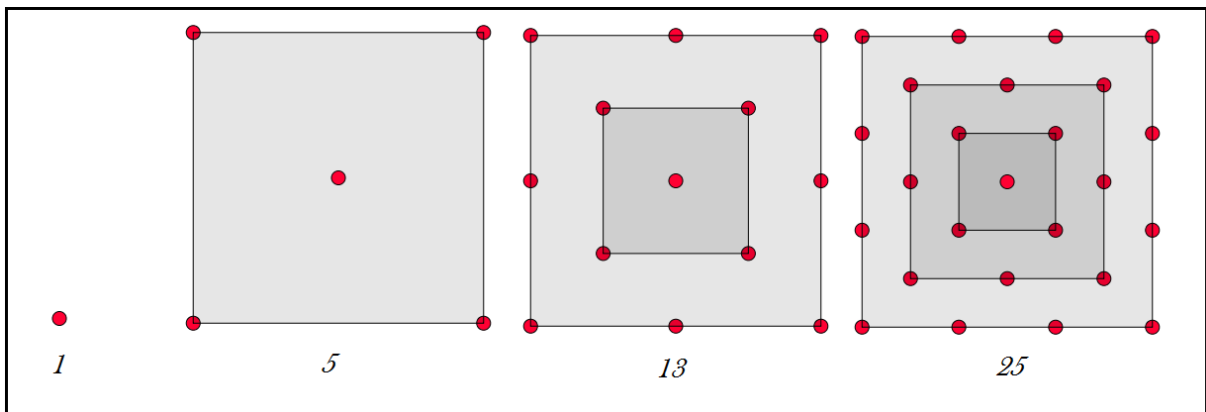
Fonte: elaboração do autor

A figura apresentada, mostra que um certo $SC_3(n)$, número triangular centralizado é uma adição de três números triangulares da forma $S_3(n-1)$, adicionado a 1, com essa relação

é possível definir um número triangular centralizado partindo da fórmula dos números triangulares de configuração normal.

Para a sequência em que os números formam quadrados centralizados temos de determinar sua recorrência e sua fórmula para termo geral, procuraremos fazer isso de modo a buscar uma generalização para que se determine o n -ésimo termo da sequência de números m -gonais centralizados, para isso temos a sequência formada pelos termos (1,5,13,25,...)

Figura 32 - os quatro primeiros números quadrados centralizados



Fonte: elaboração do autor

Chamaremos de $SC_4(1)=1$, $SC_4(2)=5$, $SC_4(3)=13$, $SC_4(4)=25$, observe que:

$$SC_4(1)=1$$

$$SC_4(2)=5=1+4\cdot 1$$

$$SC_4(3)=13=5+4\cdot 2$$

$$\vdots$$

$$SC_4(n+1)=SC_4(n)+4n$$

Nota-se que esta recorrência é encontrada usando os mesmos passos usados para os números triangulares centralizados e que essas duas sequências possuem algumas semelhanças, o que nos ajudará na generalização posteriormente dessa classe de sequências, no entanto, para esta, ainda precisamos da fórmula do termo geral, para tanto, observamos que:

$$SC_4(1)=1, SC_4(2)=5=1+4\cdot 1=1+4\cdot \left(\frac{2\cdot 1}{2}\right)$$

$$SC_4(3)=13=1+4\cdot 1+4\cdot 2=1+4\cdot (1+2)=1+4\cdot \left(\frac{3\cdot 2}{2}\right)$$

$$SC_4(4)=25=1+4\cdot (1+2+3)=1+4\cdot \left(\frac{4\cdot 3}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$SC_4(n)=1+4\cdot (1+2+3+\cdots+(n-1))=1+4\cdot \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$$

Ainda precisamos provar a veracidade desta fórmula, o que sabemos até o momento é que ela é válida para 1, 2, 3 e 4, para $n \geq 1$ com $n \in \mathbb{N}$. Para provarmos usando indução, temos, pela recorrência que:

$$\begin{aligned}
 SC_4(n+1) &= SC_4(n) + 4n \\
 &= 1 + 4 \cdot \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) + 4n \\
 &= 1 + 4 \cdot \left(\frac{n(n-1) + 2n}{2} \right) \\
 &= 1 + 4 \cdot \left(\frac{n(n-1+2)}{2} \right) \\
 &= 1 + 4 \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) \\
 &= 1 + 4 \cdot \left(\frac{(n+1)(n-1+1)}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Com esses resultados, é possível se pensar em uma maneira de generalizar tanto a recorrência quanto a fórmula geral para os números poligonais centralizados,

Para encontrar a recorrência para os números poligonais centralizados, bem como sua fórmula para o termo geral, poderemos partir de propriedades encontradas nos números triangulares centralizados e números quadrados centralizados, tais propriedades são:

Propriedade 1: um número poligonal centralizado é formado por um ponto central adicionado a camadas que formam polígonos regulares, cada camada possui os n múltiplos naturais do número de lado desse polígono.

Propriedade 2: o n -ésimo número poligonal centralizado m -gonal, pode ser apresentado como um ponto adicionado a $m \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i$.

Para a primeira propriedade, temos a recorrência linear para os números poligonais centralizados, pois:

$$\begin{aligned}
 SC_m(1) &= 1 \\
 SC_m(2) &= 1 + m = SC_m(1) + m \\
 SC_m(3) &= 1 + m + 2m = SC_m(2) + 2m \\
 SC_m(4) &= 1 + m + 2m + 3m = SC_m(3) + 3m \\
 &\vdots \\
 SC_m(n+1) &= 1 + m + 2m + 3m + \cdots + nm = SC_m(n) + nm
 \end{aligned}$$

Para a segunda propriedade, temos uma relação que pode nos fornecer a fórmula para o termo geral, desde que seja provada por meio da indução, então temos que:

$$\begin{aligned} SC_m(n) &= 1 + m + 2m + 3m + \cdots + (n-1)m \\ &= 1 + m(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)) \end{aligned}$$

Como temos que $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)$ trata-se do $(n-1)$ -ésimo número triangular, então podemos considerar por hipótese de indução, que $SC_m(n) = 1 + m\left(\frac{(n-1)n}{2}\right)$, e para o valor de $n=1$, temos $SC_m(1) = 1 + m\left(\frac{(1-1) \cdot 1}{2}\right) = 1$, essa afirmação é verdadeira pela recorrência e pelo fato de todo número figurado em que $n=1$ é 1. Temos para $n=2$ que $SC_m(2) = 1 + m\left(\frac{(2-1) \cdot 2}{2}\right) = 1 + m$, então a fórmula é válida para os valores apresentados, para mostrar que também será válida para $n+1$, recorreremos a recorrência $SC_m(n+1) = SC_m(n) + nm$, então temos que:

$$\begin{aligned} SC_m(n+1) &= SC_m(n) + nm \\ &= 1 + m\left(\frac{(n-1)n}{2}\right) + nm \\ &= 1 + m\left(\frac{(n-1)n + 2n}{2}\right) \\ &= 1 + m\left(\frac{n(n-1+2)}{2}\right) \\ &= 1 + m\left(\frac{(n-1+1)(n+1)}{2}\right) \end{aligned}$$

Solucionado o problema das recorrências e fórmula geral para os números poligonais centralizados, partiremos para a última maneira de expressar tal sequência, ou seja, devemos encontrar a função geradora para essa família de sequências. Para tanto, teremos de encontrar uma recorrência que esteja expressa toda em termos anteriores, logo em seguida analisar a ordem da sequência descoberta e usar a forma canônica da função geradora para definir a sequência, temos a recorrência para os números poligonais centralizados $SC_m(n+1) = SC_m(n) + n \cdot m$, com base nesta recorrência podemos extrair que:

$$SC_m(n+1) = SC_m(n) + nm \quad [1]$$

$$SC_m(n+2) = SC_m(n+1) + (n+1)m \quad [2]$$

$$SC_m(n+3) = SC_m(n+2) + (n+2)m \quad [3]$$

Fazendo $[2] - [1]$, temos:

$$\begin{aligned} SC_m(n+2) - SC_m(n+1) &= SC_m(n+1) + (n+1)m - (SC_m(n) + nm) \\ SC_m(n+2) &= 2SC_m(n+1) - SC_m(n) + m \quad [5] \end{aligned}$$

Para [3]–[2], temos:

$$\begin{aligned} SC_m(n+3) - SC_m(n+2) &= SC_m(n+2) + (n+2)m - (SC_m(n+1) + nm) \\ SC_m(n+3) &= 2SC_m(n+2) - SC_m(n+1) + m \quad [6] \end{aligned}$$

Por fim, temos que [6]–[5] é igual a:

$$\begin{aligned} SC_m(n+3) - SC_m(n+2) &= 2SC_m(n+2) - SC_m(n+1) + m - (2SC_m(n+1) - SC_m(n) + m) \\ SC_m(n+3) &= 3SC_m(n+2) - 3SC_m(n+1) + SC_m(n) \end{aligned}$$

Com isto, temos a recorrência:

$$SC_m(n+3) - 3SC_m(n+2) + 3SC_m(n+1) - SC_m(n) = 0$$

Esta é uma recorrência de terceira ordem, ou seja, necessitaremos da função genérica

$$\frac{a_0 + a_1x + a_2x^2}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots \quad \text{com } SC_m(1) = c_0 = 1, \quad SC_m(2) = c_1 = 1 + m \quad \text{e}$$

$SC_m(3) = c_2 = 1 + m + 2m$, de um modo geral temos $SC_m(n+k) = c_{n+k-1}$, como temos que, para $n \geq 3, a_n = 0$, podemos escrever essa recorrência como

$$a_{n+2} = b_0c_{n+2} + b_1c_{n+1} + b_2c_n + b_3c_{n-1} + (0 \cdot c_{n-2} + \dots + 0 \cdot c_{n-n}), \quad \text{então } g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$$

pode ser escrita como $g(x) = 1 - 3x + 3x^2 - x^3$ ou $g(x) = (1-x)^3$, e, para os valores de $f(x)$,

temos as relações $a_0 = b_0c_0 = 1 \cdot 1 = 1$, $a_1 = b_0c_1 + b_1c_0 = 1 \cdot (1+m) - 3 \cdot 1 = m-2$ e, por fim temos

$$a_2 = b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0 = 1 \cdot (1+3m) - 3 \cdot (1+m) + 3 \cdot 1 = 1, \quad \text{assim podemos definir a função do}$$

numerador como $f(x) = 1 + (m-2)x + x^2 = 1 + x(m-2+x)$ e assim, a função geradora para os

números poligonais centralizados é: $G(x) = \frac{1 + x(m-2+x)}{(1-x)^3}$ que, usando um recurso

computacional temos:

Figura 33 - FG dos números poligonais centralizados

```
--> (1+x*(m-2+x))/(1-x)^3
(%i15) rectform((1+x*(m-2+x))/(1-x)^3);
(%o15)  $\frac{x(x+m-2)+1}{(1-x)^3}$ 
(%i16) taylor((1+x*(m-2+x))/(1-x)^3, x, 0, 20);
(%o16)  $\frac{1}{T} \left( 1 + (m+1)x + (3m+1)x^2 + (6m+1)x^3 + (10m+1)x^4 + (15m+1)x^5 + (21m+1)x^6 + (28m+1)x^7 + (36m+1)x^8 + (45m+1)x^9 + (55m+1)x^{10} + (66m+1)x^{11} + (78m+1)x^{12} + (91m+1)x^{13} + (105m+1)x^{14} + (120m+1)x^{15} + (136m+1)x^{16} + (153m+1)x^{17} + (171m+1)x^{18} + (190m+1)x^{19} + (210m+1)x^{20} + \dots \right)$ 
```

Fonte: elaboração do autor

Ou ainda, multiplicando todos os termos por x para que a série nos forneça os valores sem o zero, temos:

$$G[SC_m(n), x] = \frac{x(1+x(m-2+x))}{(1-x)^3}$$

Usando novamente o recurso computacional, temos:

Figura 34 - FG dos números m-gonais centralizados

```
--> (x*(1+x*(m-2+x)))/(1-x)^3
(%i2) rectform((x*(1+x*(m-2+x)))/(1-x)^3);
(%o2)  $\frac{x(x(x+m-2)+1)}{(1-x)^3}$ 
(%i3) taylor((x*(1+x*(m-2+x)))/(1-x)^3, x, 0, 20);
(%o3) T/  $x + (m+1)x^2 + (3m+1)x^3 + (6m+1)x^4 + (10m+1)x^5 + (15m+1)x^6 + (21m+1)x^7 +$ 
 $(28m+1)x^8 + (36m+1)x^9 + (45m+1)x^{10} + (55m+1)x^{11} + (66m+1)x^{12} + (78m+1)x^{13} + (91m+1)x^{14} +$ 
 $(105m+1)x^{15} + (120m+1)x^{16} + (136m+1)x^{17} + (153m+1)x^{18} + (171m+1)x^{19} + (190m+1)x^{20} + \dots$ 
```

Fonte: autor

Ou seja:

$$G[SC_m(n), x] = \frac{x(1+x(m-2+x))}{(1-x)^3} = x + (1+m \cdot S_3(1))x^2 + (1+m \cdot S_3(2))x^3 + \dots + (1+m \cdot S_3(n-1))x^n$$

3.4.3 Extensão para os índices negativos dos números poligonais

Nesta seção, abordaremos os números poligonais com a extensão dos índices para o conjunto dos números inteiros, apresentar suas fórmulas de recorrência, termo geral e função geradora, mas principalmente observar o comportamento das configurações destes números em relação a visualização pelo software GeoGebra, assim deveremos mostrar como estes números estão organizados para índices negativos e sua relação com os números de índices simétricos.

Para expandir os índices das sequências de números poligonais para índices inteiros, deveremos ter os valores definidos para $n = 0$, assim temos, por definição, que $S_m(0) = 0$ e $S_m(1) = 1$, e, buscando a fórmula para o termo geral, que é dada por

$S_m(n) = \frac{n((m-2)n - m + 4)}{2}$ deveremos escrever esta fórmula para $S_m(-n)$, assim, temos que

$$S_m(-n) = \frac{-n((m-2)(-n) - m + 4)}{2}, \text{ ou seja:}$$

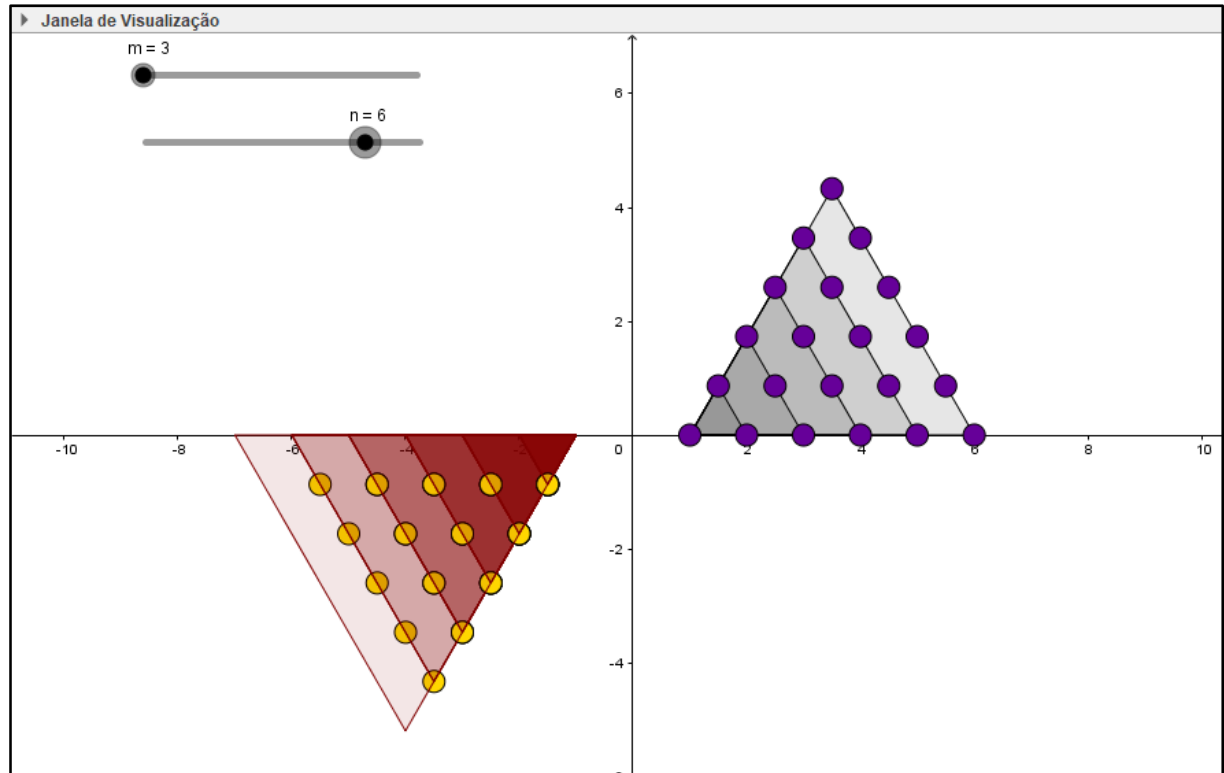
$$S_m(-n) = \frac{n((m-2)n + m - 4)}{2}, n \in \mathbb{N}$$

Com isto, temos em particular as fórmulas para índices inteiros negativos dos números triangulares dada por $S_3(-n) = \frac{n(n-1)}{2}$ dos quadrados negativos dada por $S_4(-n) = n^2$ e dos números pentagonais negativos sendo $S_5(-n) = \frac{n(3n+1)}{2}$, e assim por diante. A relação entre as fórmulas do termo geral dos números poligonais para índices positivos e negativos é dada por:

$$\begin{aligned} S_m(-n) &= \frac{n((m-2)n + 2m - m - 8 + 4)}{2} \\ &= \frac{n((m-2)n - m + 4)}{2} + \frac{n(2m - 8)}{2} \\ &= \frac{n((m-2)n - m + 4)}{2} + n(m - 4) \\ &= S_m(n) + n(m - 4) \end{aligned}$$

Este fato sugere que a construção de um número poligonal de índice negativo é formado, usando o número poligonal com índice simétrico, também mostra que a partir dos números pentagonais, a construção tende a ter mais pontos com índice negativo comparado ao número que representa o índice simétrico, para os números quadrados este número permanece o mesmo como já foi apresentado, e no caso dos números triangulares, a relação é dada por $S_3(-n) = S_3(n) - n$, a construção a seguir apresenta os números triangulares com índices simétricos para que se observe tal relação. Para facilitar a visualização, as figuras desta seção que representam índices negativos aparecerão sempre na parte inferior do eixo x indicado no *software* GeoGebra, logo, a figura que representa os números de índices positivos, estarão sempre na parte superior, disto isto, observe a figura a seguir:

Figura 35: Quinto número triangular e seu simétrico

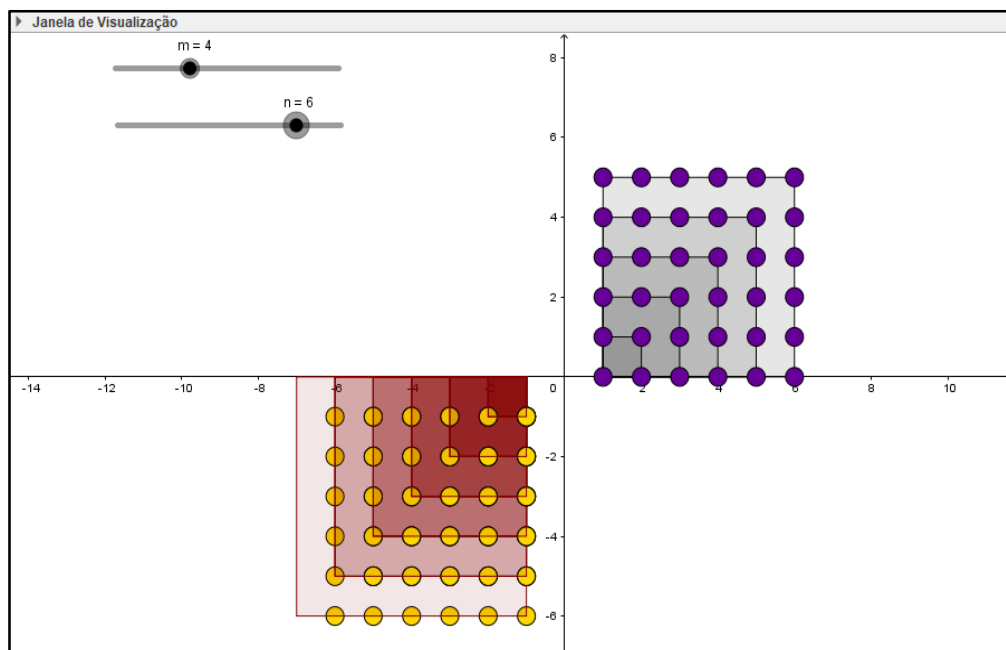


Fonte: elaboração do autor

A figura apresentada, mostra um número triangular e seu análogo de índice negativo, é possível notar que falta uma linha de pontos para que o triângulo seja completado, como estes representam, da esquerda para a direita respectivamente $S_3(-5)$ e $S_3(5)$, podemos perceber que no triângulo que representa o índice negativo, faltam 5 pontos para completar o triângulo que determina a área onde devem aparecer os pontos, também é claro que a figura e a fórmula do termo geral, mostram que $S_m(-n) = S_3(n-1)$ com $S_3(0) = 0$, dito isto, a sequência que representa os números triangulares negativos é dada por $(0, 1, 3, 6, 10, \dots)$.

Para os números quadrados, temos a figura a seguir que representa sua configuração com índices opostos.

Figura 36: sexto números quadrado e seu análogo de índice oposto

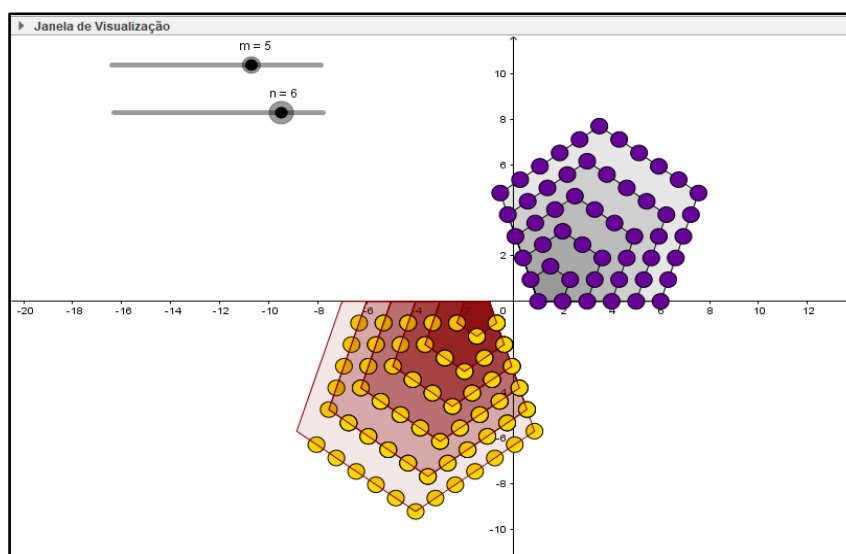


Fonte: elaboração do autor

Na figura acima, é possível perceber que o número de pontos é igual, porém a configuração é deslocada do eixo na figura que representa o número quadrado de índice negativo, como estes possuem as mesmas configurações com índices simétricos, então vale a mesma recorrência, função geradora e fórmula do termo geral.

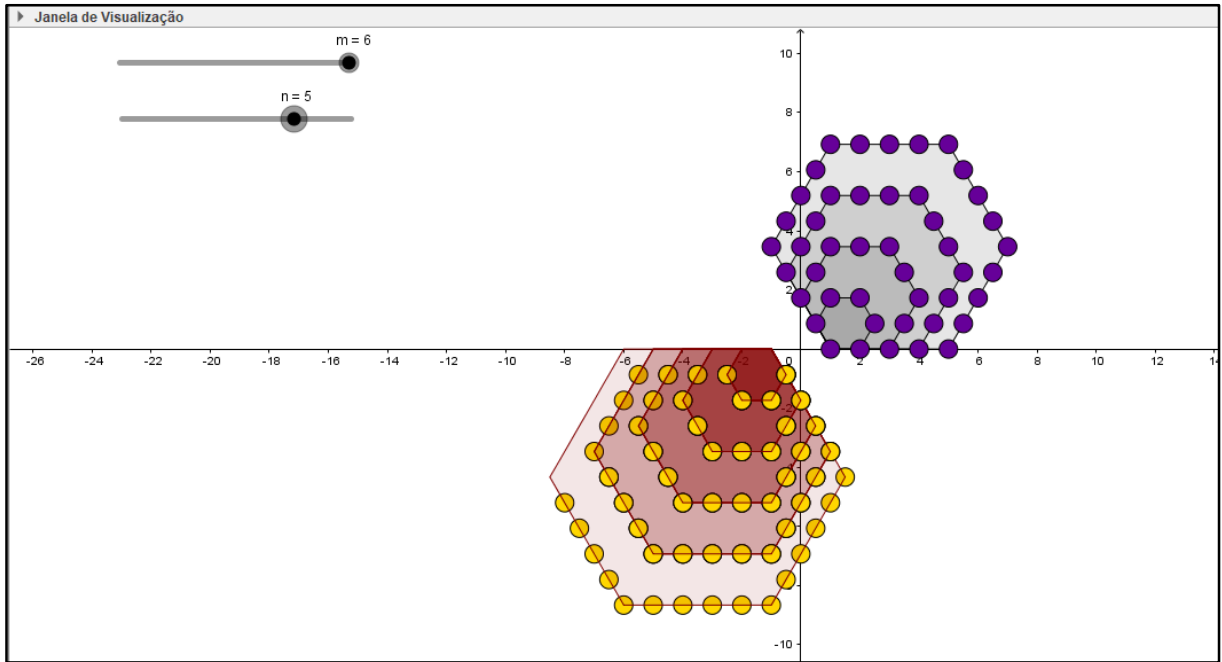
Para generalizar a visualização dos números poligonais de índices negativos, apresentaremos em seguida os números pentagonais e hexagonais, com índices opostos, estas figuras nos fornecem o comportamento que será usado para todos os números poligonais com índices negativos.

Figura 37 - números pentagonais de índices opostos



Fonte: elaboração do autor

Figura 38 - números hexagonais de índices opostos



Fonte: do autor

Em cada figura das apresentadas, é possível perceber que um número poligonal de índice negativo sugere a seguinte relação com o seu análogo de índice positivo:

$$S_m(-n) = S_m(n+1) - 2n$$

Prova:

$$\begin{aligned}
 S_m(n+1) - 2n - 1 &= \frac{(n+1)((m-2)(n+1) - m + 4) - 4n - 2}{2} \\
 &= \frac{(n+1)(mn - 2n + m - 2 - m + 4) - 4n - 2}{2} \\
 &= \frac{(n+1)(mn - 2n + 2) - 4n - 2}{2} \\
 &= \frac{mn^2 - 2n^2 + 2n + mn - 2n + 2 - 4n - 2}{2} \\
 &= \frac{mn^2 - 2n^2 + mn - 4n}{2} \\
 &= \frac{n(mn - 2n + m - 4)}{2} \\
 &= \frac{n((m-2)n + m - 4)}{2} = S_m(-n)
 \end{aligned}$$

A recorrência dos números poligonais com índices negativos também podem ser relacionadas com seus análogos de índices positivos, levando em consideração a recorrência dos números poligonais de índices positivos dada por $S_m(n+1) = S_m(n) + (m-2)n + 1$, com

$n > 0$ e $S_m(1) = 1$ porém, considerando que para os índices negativos temos que $S_m(0) = 0$, temos $S_m(n) = S_m(n-1) + (m-2)(n-1) + 1$ que pode ser escrito com índices negativos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} S_m(-n) &= S_m(-n-1) + (m-2)(-n-1) + 1 \\ S_m(-n-1) &= S_m(-n) - (m-2)(-n-1) - 1 \\ S_m(-n-1) &= S_m(-n) + (m-2)(n+1) - 1 \end{aligned}$$

Desta maneira, temos em particular, as recorrências $S_3(-n-1) = S_3(-n) + n$, $S_4(-n-1) = S_4(-n) + 2n + 1$, $S_5(-n-1) = S_5(-n) + 3n + 2$ e assim por diante, percebe-se que essa recorrência também pode ser escrita como:

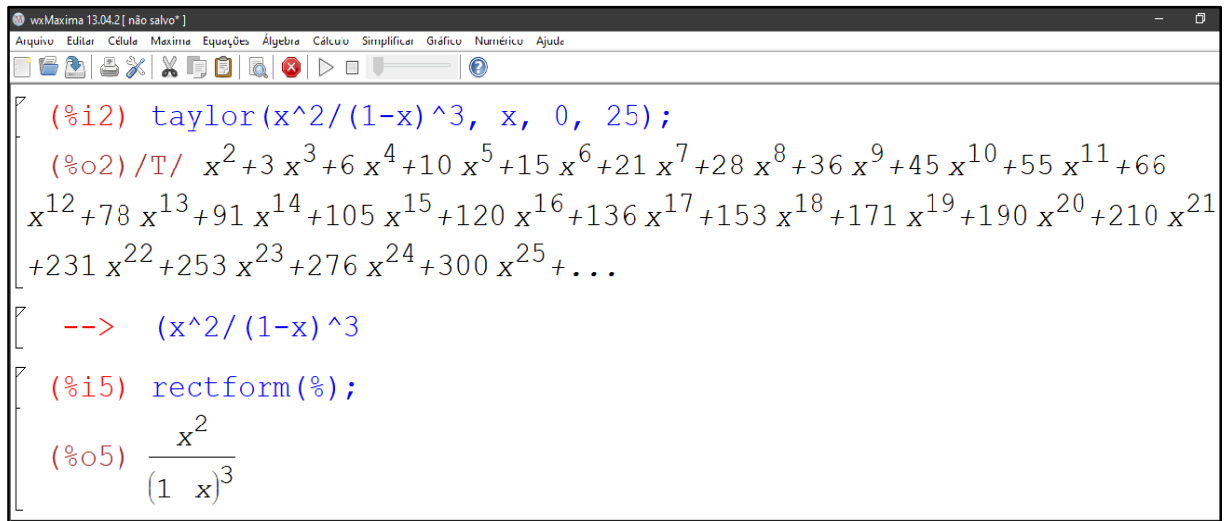
$$S_m(-n-1) = S_m(-n) + (m-2)n + (m-3)$$

Por fim temos a função geradora para os números poligonais com índices negativos, para calcular tais funções necessitaremos da relação $S_m(-n) = S_m(n) + n(m-4)$, como já temos que a função geradora dos números poligonais é dada por $G[S_m(n), x] = \frac{x(1+(m-3)x)}{(1-x)^3}$ e no segundo termo, temos $(m-4)n$, neste caso precisamos apenas da função geradora da sequência dada pela forma geral $S_3^1(n) = n$ que são os *gnômons* dos números triangulares, usando a função geradora genérica, encontramos a função geradora definida por $G[S_3^1(n), x] = \frac{x}{(1-x)^2}, |x| < 1$ então, multiplicando por $(m-4)$ temos a função geradora do segundo termo dada por $G[S_3^1(n)(m-4), x] = \frac{(m-4)x}{(1-x)^2}, x < 1$, chamaremos a função geradora dos números poligonais de índices negativos de $G[-S_m(n), x]$ e esta é dada pela soma das funções $G[S_m(n), x]$ e $G[S_3^1(n)(m-4), x]$, assim temos:

$$\begin{aligned}
G[-S_m(n), x] &= G[S_m(n), x] + G[S_3^1(n)(m-4), x] \\
&= \frac{x(1+(m-3)x)}{(1-x)^3} + \frac{(m-4)x}{(1-x)^2} \\
&= \frac{x(1+(m-3)x) + (1-x)(m-4)x}{(1-x)^3} \\
&= \frac{x(1+(m-3)x + (1-x)(m-4))}{(1-x)^3} \\
&= \frac{x(1+mx-3x+m-4-mx+4x)}{(1-x)^3} \\
&= \frac{x((m-3)+x)}{(1-x)^3}, |x| < 0
\end{aligned}$$

Em particular temos as funções geradoras dos números triangulares de índices negativos dada por $G[-S_3(n), x] = \frac{x^2}{(1-x)^3}, |x| < 0$ e usando o recurso computacional que permite encontrar a função geradora, podemos comprovar a veracidade desta função, a figura a seguir representa a função geradora dos números triangulares negativos por meio do *software wxMaxima*.

Figura 39 - FG dos números triangulares negativos



```

(%i2) taylor(x^2/(1-x)^3, x, 0, 25);
(%o2) /T/ x^2+3 x^3+6 x^4+10 x^5+15 x^6+21 x^7+28 x^8+36 x^9+45 x^10+55 x^11+66
x^12+78 x^13+91 x^14+105 x^15+120 x^16+136 x^17+153 x^18+171 x^19+190 x^20+210 x^21
+231 x^22+253 x^23+276 x^24+300 x^25+...
--> (x^2/(1-x)^3
(%i5) rectform(%);
(%o5) x^2
(1-x)^3

```

Fonte: do autor

Para os números quadrados negativos, a função geradora é dada pela mesma fórmula dos números quadrados de índices positivos, já para os números pentagonais a função geradora

é dada por $G[-S_5(n), x] = \frac{x(2+x)}{(1-x)^3}, |x| < 0$ comprovada pela figura a seguir:

Figura 40 - FG dos números pentagonais negativos

```

--> x*(2+x)/(1-x)^3
(%i1) rectform(x*(2+x)/(1-x)^3);
(%o1)  $\frac{x(x+2)}{(1-x)^3}$ 
(%i2) taylor(%o1, x, 0, 25);
(%o2) /T/  $2x + 7x^2 + 15x^3 + 26x^4 + 40x^5 + 57x^6 + 77x^7 + 100x^8 + 126x^9 + 155x^{10} + 187x^{11} + 222x^{12} + 260x^{13} + 301x^{14} + 345x^{15} + 392x^{16} + 442x^{17} + 495x^{18} + 551x^{19} + 610x^{20} + 672x^{21} + 737x^{22} + 805x^{23} + 876x^{24} + 950x^{25} + \dots$ 

```

Fonte: do autor

Por fim, usando o mesmo recurso computacional para obter os termos da função geradora dos números *m-gonais* com índices negativos, temos:

Figura 41 - FG dos números *m-gonais* de índices negativos

```

--> x*((m-3)+x)/(1-x)^3
(%i1) rectform(x*((m-3)+x)/(1-x)^3);
(%o1)  $\frac{x(x+m-3)}{(1-x)^3}$ 
(%i2) taylor(%o1, x, 0, 25);
(%o2) /T/  $(m-3)x + (3m-8)x^2 + (6m-15)x^3 + (10m-24)x^4 + (15m-35)x^5 + (21m-48)x^6 + (28m-63)x^7 + (36m-80)x^8 + (45m-99)x^9 + (55m-120)x^{10} + (66m-143)x^{11} + (78m-168)x^{12} + (91m-195)x^{13} + (105m-224)x^{14} + (120m-255)x^{15} + (136m-288)x^{16} + (153m-323)x^{17} + (171m-360)x^{18} + (190m-399)x^{19} + (210m-440)x^{20} + (231m-483)x^{21} + (253m-528)x^{22} + (276m-575)x^{23} + (300m-624)x^{24} + (325m-675)x^{25} + \dots$ 

```

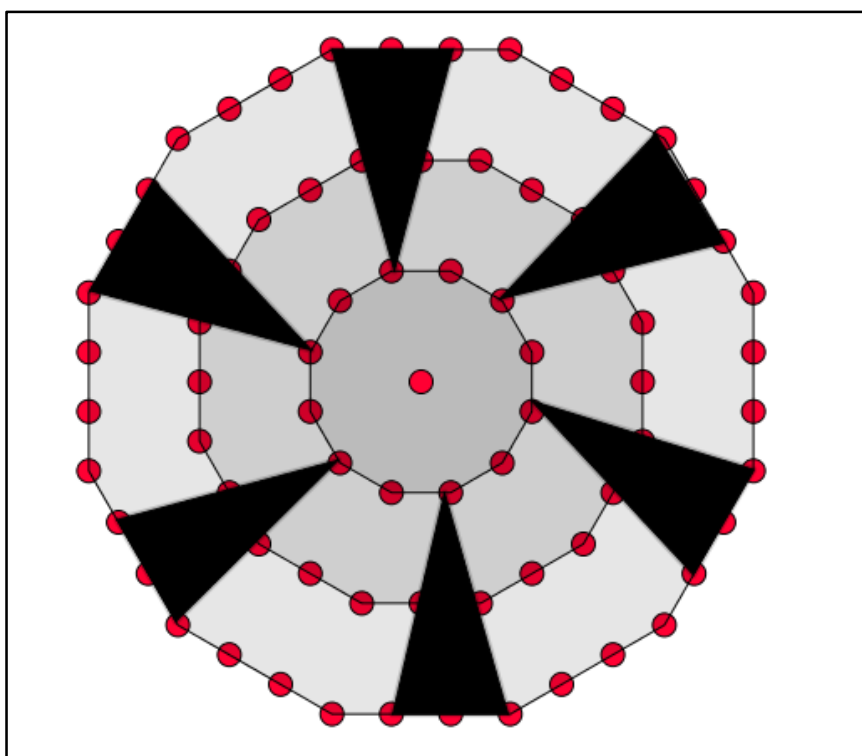
Fonte: do autor

Assim, descrevemos as fórmulas de termo geral, recorrência e função geradora dos números poligonais com índices negativos, bem como sua construção por meio do *software GeoGebra*, o que permitiu observar alguns padrões que permitiram fazer uma relação entre estes e seus análogos de índices positivos, é válido lembrar que o *software* ainda permite observar propriedades deste números que serão discutidos posteriormente. Assim, encerramos a discussão sobre os números figurados planos, na próxima seção serão abordados os números cuja configuração formam figuras espaciais, mais precisamente, os poliedros.

3.4.4 Números estrela

Os números estrela tem sua forma geométrica composta por uma estrela de seis pontas, é um número figurado centralizado e sua sequência é numericamente igual aos da sequência dos números dodecagonais centralizados, isto porque, se retirarmos seis listas que formam números triangulares de um número dodecagonal o que resta são números hexagonais, posteriormente, estas seis listas de pontos são colocadas no número hexagonal restante, juntando um dos lados do triângulo de pontos retirado, com um dos lados do hexágono de pontos restantes, o resultado é um número que representa um polígono estrelado de seis pontas observe a figura a seguir, de um número dodecagonal $SC_{12}(n)$ retirando-se seis números triangulares $S_3(n)$:

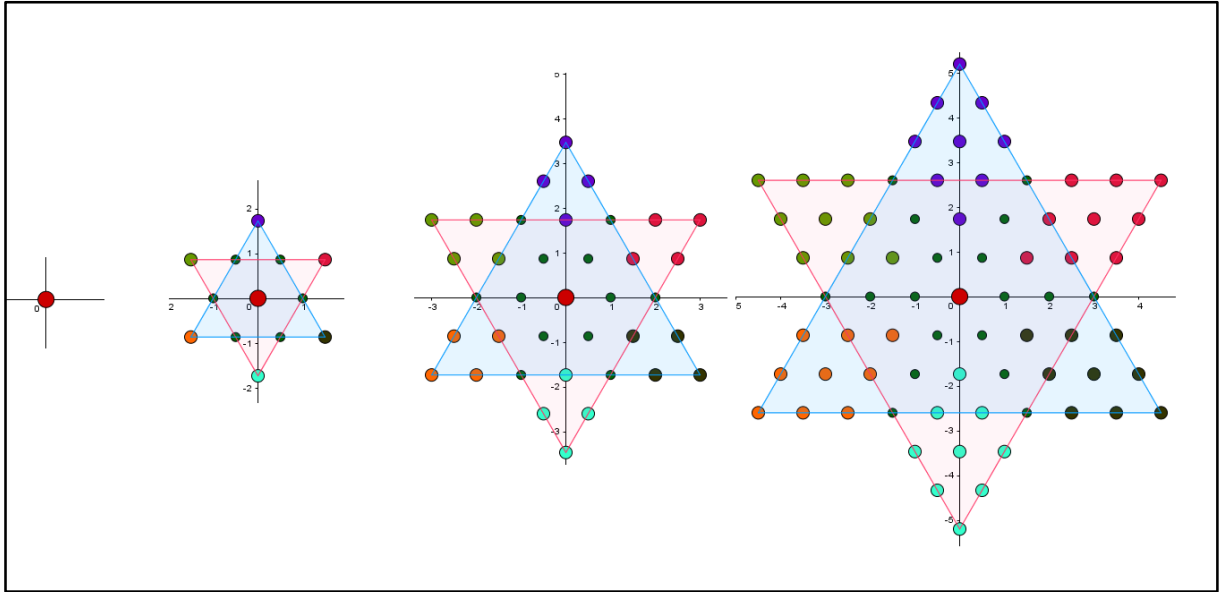
Figura 42 - quarto número dodecagonal centralizado retirando-se seis números triangulares $n=3$



Fonte: autor

Assim sua recorrência, termo geral e função geradora são as mesmas do número figurado anteriormente citado. Este novo arranjo de pontos gera a figura a seguir.

Figura 43 - os quatro primeiros números estrela



Fonte: do autor

A figura acima apresenta os quatro primeiros números estrela, e é a sequência A003154 no registro da *OEIS*, tal arranjo pode acontecer com qualquer outro números poligonal centralizado, do qual geraria a família de números m-gramais, citados por Deza e Deza (2012), porém estes em particular trazem um diferencial, pois estes são compostos por dois números triangulares cujos vértices de um triângulo são escritos sobre os lados do outro de forma a construir outros números triangulares menores, da forma $S_3(n)$ na figura da n -ésima estrela. Os números triangulares que formam esta estrela são da forma $S_3(3n-2)$ a interseção destes dois triângulos formam o n -ésimo número hexagonal centralizado, isto quer dizer que a fórmula para o n -ésimo número estrela pode ser obtida através da soma do n -ésimo número hexagonal centralizado com 6 cópias do $(n-1)$ -ésimo número triangular, ou seja:

$$E(n) = SC_6(n) + 6S_3(n-1)$$

Desta forma, temos que:

$$\begin{aligned} E(n) &= (3n^2 - 3n + 1) + 6\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) \\ &= 3n^2 - 3n + 1 + 3n^2 - 3n \\ &= 6n^2 - 6n + 1 \end{aligned}$$

Que corresponde, fato ao números 12-gonais centralizados, conforme a fórmula apresentada anteriormente.

Assim, encerramos a seção que trata dos números figurados planos, estes representados aqui por números poligonais e números poligonais centralizados, bem como outra configuração

para os números dodecagonais centralizados, trataremos na próxima seção de alguns análogos tridimensionais dos números desta seção, os números poliedrais.

3.5 Números poliedrais

Assim como os números figurados podem ter sua representação geométrica em forma de polígonos, estes também podem ser arranjados de modo a formar poliedros tais como os prismas, pirâmides e poliedros de Platão, bem como outros sólidos como os poliedros estrelados. Nesta seção trataremos destas famílias de sequência, em particular das que formam as pirâmides, que são chamados de números piramidais, com as configurações comuns, os arranjos de pontos que formam os sólidos de Platão, bem como os números da *stella octangula*, representação análoga aos números estrela em 3D, tais representações serão mostradas das quatro formas já vistas, que são: recorrência, forma geral, função geradora e representação geométrica por meio do GeoGebra.

3.5.1 Números piramidais

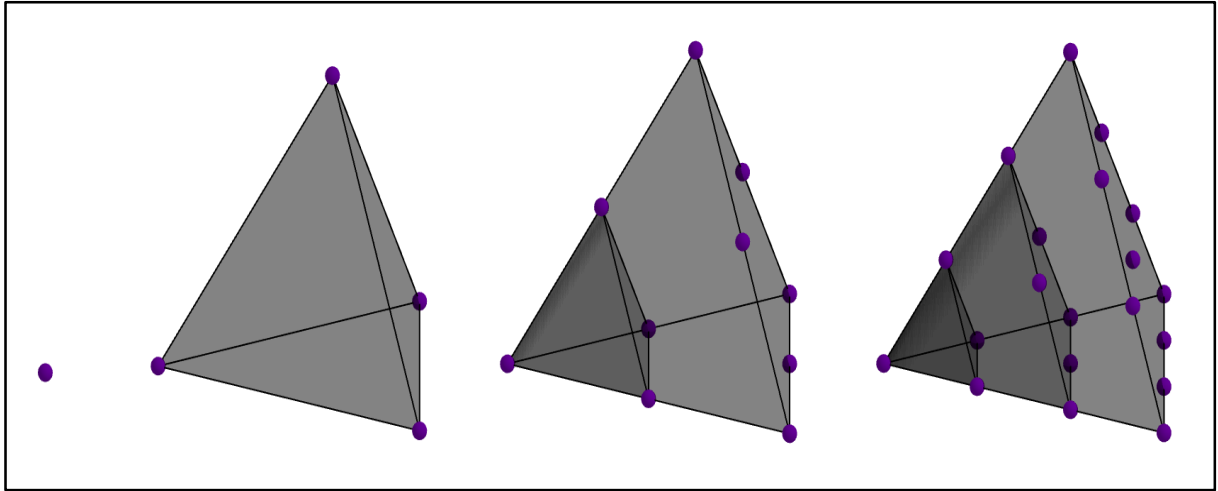
Os números figurados que formam pirâmides, são a classe de números figurados mais conhecidos dentre as que formam poliedros, isso porque são formados por camadas de números poligonais desde o n -ésimo número poligonal localizado na base da pirâmide até o ponto que representa o primeiro número poligonal, localizado no topo da pirâmide, ou seja, onde se encontra o único vértice que não está na base, esses números estão no passo seguinte para quem define os números poligonais e compõe umas das poucas famílias de números figurados que não são regulares, exceto pelos números tetraédrico, estes pertencentes aqui a família dos números piramidais, a família dos números platônicos e a classe dos números simplexos, que serão descritos posteriormente.

Assim como os números poligonais podem ser definidos como triangulares, quadrados, pentagonais, dentre outros, os números piramidais também podem ser apresentados como piramidais triangulares, piramidais quadrados e assim por diante, por se tratar da base do poliedro que forma essa pirâmide.

Para darmos início, iremos descrever os números piramidais triangulares (números tetraédricos), que podem ser apresentados dada a sequência (1,4,10,20,...), e definimos por

$$S_3^3(1)=1, S_3^3(2)=4, S_3^3(3)=10, S_3^3(4)=20$$

Figura 44 - Os quatro primeiros números tetraédrais



Fonte: elaboração do autor

Para que consigamos encontrar uma recorrência, deveremos perceber que:

$$\begin{aligned}
 S_3^3(1) &= 1 = S_3(1) \\
 S_3^3(2) &= 4 = 1 + 3 = S_3^3(1) + S_3(2) \\
 S_3^3(3) &= 10 = 4 + 6 = S_3^3(2) + S_3(3) \\
 &\vdots \\
 S_3^3(n+1) &= S_3^3(n) + S_3(n+1) \\
 S_3^3(n+1) &= S_3^3(n) + \frac{(n+1)(n+2)}{2}
 \end{aligned}$$

Que é a recorrência para essa sequência, o próximo passo, buscaremos o termo geral, ou fórmula fechada que nos forneça uma condição para encontrarmos qualquer números tetraédrico sem a necessidade do seu anterior, nestas condições que:

$$\begin{aligned}
 S_3^3(1) &= 1 = S_3(1) \\
 S_3^3(2) &= 4 = 1 + 3 = S_3(1) + S_3(2) \\
 S_3^3(3) &= 10 = 1 + 3 + 6 = S_3(1) + S_3(2) + S_3(3) \\
 &\vdots \\
 S_3^3(n) &= S_3(1) + S_3(2) + S_3(3) + \cdots + S_3(n) = \sum_{i=1}^n S_3(i)
 \end{aligned}$$

Assim, temos a algumas relações já estudadas nas seções anteriores, observamos que

$S_3^3(n) = 1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{n(n+1)}{2}$, porém, cada número triangular pode ser representado usando a

fórmula fechada, ou seja $S_3^3(n) = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} + \frac{2 \cdot (2+1)}{2} + \frac{3 \cdot (3+1)}{2} + \cdots + \frac{n(n+1)}{2}$, separando os

quadrados segue que $S_3^3(n) = \frac{(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + (1 + 2 + 3 + \dots + n)}{2}$, podemos reescrever

como $2S_3^3(n) = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + (1 + 2 + 3 + \dots + n)$, como já temos que

$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ e que $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$, então $2S_3^3(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$ ou ainda

$S_3^3(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{3n(n+1)}{12}$, colocando o termo $n(n+1)$ em evidência, temos

$S_3^3(n) = \frac{n(n+1)(2n+1+3)}{12} = \frac{n(n+1)(2n+4)}{12} = \frac{2n(n+1)(n+2)}{12}$ ou seja:

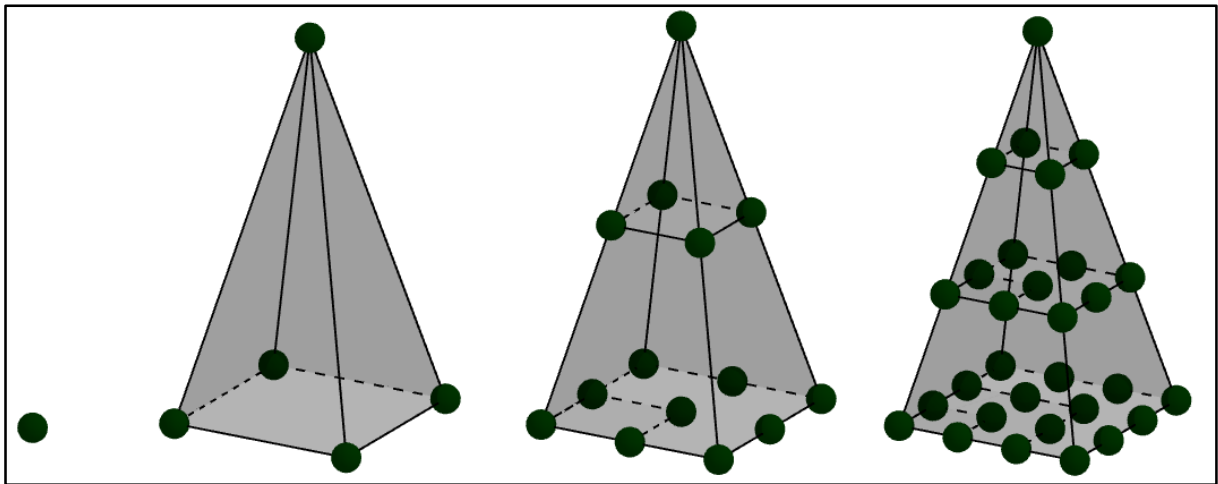
$$S_3^3(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Para os números piramidais quadrados, temos a sua fórmula do termo geral já definida,

pois já sabemos que $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ e que se empilharmos os n primeiros números

quadrados, teremos uma pirâmide de base quadrada como sugere a figura a seguir:

Figura 45- Os quatro primeiros números piramidais quadrados



Fonte: do autor

Segundo a figura, os números piramidais quadrados formam a sequência (1, 5, 14, 30, ...)

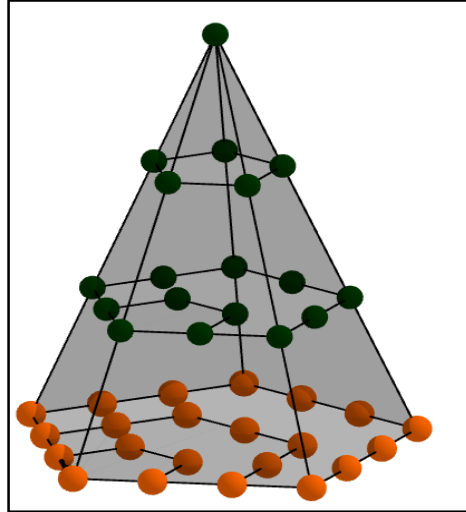
e, chamaremos de $S_4^3(1) = 1, S_4^3(2) = 5, S_4^3(3) = 15$ e assim por diante.

Com base nas descrições da forma geral para números piramidais triangulares e quadrados, podemos sugerir uma fórmula que nos forneça o termo geral para números piramidais m -gonais, ou seja, $S_m^3(n) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot ((m-2) \cdot n - m + 5)}{6}$ que poderá ser provada

através de indução matemática se observarmos que um número piramidal, a partir do segundo,

pode ser descrito se adicionarmos ao seu anterior, o número poligonal referente a sua base, observe esta afirmação com base na figura de um número piramidal de base pentagonal.

Figura 46 - Quarto número piramidal pentagonal



Fonte: elaboração do autor

Isto quer dizer que uma forma de encontrar a recorrência dos números piramidais, assim como observado com os números piramidais triangulares, é a relação $S_m^3(n+1) = S_m^3(n) + S_m(n+1)$ que podemos usar para provar a fórmula do termo geral proposta, assim temos:

$$\begin{aligned}
 S_m^3(n+1) &= S_m^3(n) + S_m(n+1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot ((m-2) \cdot n - m + 5)}{6} + \frac{(n+1) \cdot ((m-2) \cdot (n+1) - m + 4)}{2} \\
 &= \frac{(n+1)}{6} \cdot [n^2(m-2) + n \cdot (5-m)] + \frac{(n+1)}{6} \cdot 3 \cdot [(m-2)(n+1) - m + 4] \\
 &= \frac{(n+1)}{6} \cdot [n^2(m-2) + n \cdot (5-m)] + \frac{(n+1)}{6} [3(n+1)(m-2) - 3 \cdot (4-m)] \\
 &= \frac{(n+1)}{6} \cdot [(n^2 + 3n + 3)(m-2) + n(5-m) + 3(4-m)] \\
 &= \frac{(n+1)}{6} \cdot [(n^2 + 3n + 2)(m-2) + (m-2) + n(5-m) + 3(4-m)] \\
 &= \frac{(n+1)}{6} \cdot [(n^2 + 3n + 2)(m-2) + (m-2) + (n+2)(5-m) - 2 \cdot (5-m) + 3 \cdot (4-m)] \\
 &= \frac{(n+1)}{6} \cdot [(n+1)(n+2)(m-2) + (n+2)(5-m) + m - 2 - 10 + 2m + 12 - 3m] \\
 &= \frac{(n+1)}{6} \cdot [(n+1)(n+2)(m-2) + (n+2)(5-m)] = \frac{(n+1)(n+2) \cdot [(m-2)(n+1) - m + 5]}{6}
 \end{aligned}$$

Desta forma, temos descritas as duas primeira fórmulas para os números piramidais.

Descrevemos em seguida a função geradora desta família de sequências, temos que os números piramidais são formados pela soma dos n primeiros números poligonais, assim, manipularemos a função geradora dos números poligonais para que esta nos apresente a FG dos números piramidais, observamos que:

$$G[S_m(n), x] = \frac{x(1+(m-3)x)}{(1-x)^3} = S_m(1)x + S_m(2)x^2 + \dots + S_m(n)x^n + \dots$$

$$\frac{x(1+(m-3)x)}{(1-x)^3} \cdot \frac{1}{1-x} = (S_m(1)x + S_m(2)x^2 + \dots + S_m(n)x^n) \cdot (1+x+x^2+\dots+x^{n-1})$$

$$\frac{x(1+(m-3)x)}{(1-x)^4} = S_m(1)x + (S_m(1)+S_m(2))x^2 + \dots + (S_m(1)+S_m(2)+\dots+S_m(n))x^n$$

$$G[S_m^3(n), x] = \frac{x(1+(m-3)x)}{(1-x)^4}, |x| < 1$$

Assim, descrevemos algumas formas de apresentar a sequência dos números piramidais m -gonais, conforme a tabela a seguir:

Tabela 3 - recorrência e termo geral dos números piramidais

Sequência	Recorrência	Forma geral
Piramidais triangulares (tetraedrais)	$S_3^3(n+1) = S_3^3(n) + \frac{(n+1)(n+2)}{2}$	$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$
Piramidais quadrados	$S_4^3(n+1) = S_4^3(n) + (n+1)^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Piramidais pentagonais	$S_5^3(n+1) = S_5^3(n) + \frac{(n+1)(3(n+1)-1)}{2}$	$\frac{n(n+1)(3n)}{6}$
Piramidais hexagonais	$S_6^3(n+1) = S_6^3(n) + 2(n+1)^2 - (n+1)$	$\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$
Piramidais decagonais	$S_{10}^3(n+1) = S_{10}^3(n) + 4(n+1)^2 - 3(n+1)$	$\frac{n(n+1)(8n-5)}{6}$
Piramidais icosagonais	$S_{20}^3(n+1) = S_{20}^3(n) + 9(n+1)^2 - 8(n+1)$	$\frac{n(n+1)(18n-15)}{6}$

Fonte: elaboração do autor

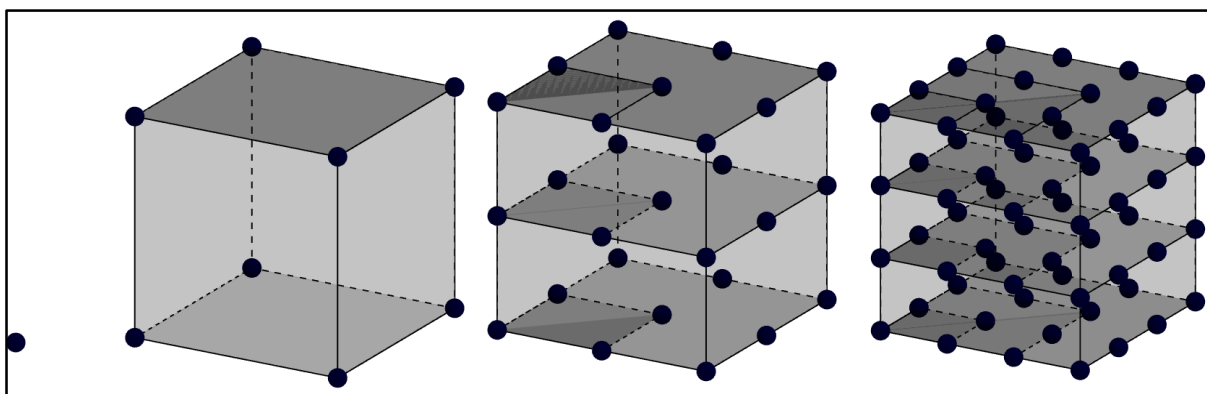
A tabela acima, mostra alguns números piramidais, suas respectivas fórmulas de termo geral e suas recorrências, a seguir, descreveremos a sequência tridimensional dos números cúbicos, análogos dos números quadrados em três dimensões.

3.5.2 Números cúbicos

Os números cúbicos serão tratados aqui não dentro de uma família de sequências, mas sim individualmente, pois assim como o cubo na geometria desperta grande interesse, este também merece um lugar de destaque, primeiro porque este número pertence a duas principais famílias de sequências, a dos números primais e a dos números platônicos, além disto, esta sequência dá origem a descrição da classe dos hipercubos, mesmo sendo seu representante bidimensional também descrito aqui, é a partir dos números cúbicos que se entende que outra classe de números pode surgir a partir dos números quadrados, antes inclusos apenas na família dos números poligonais.

Para o número de pontos que podem ser organizados em cubo, temos a figura a seguir, para que possamos observar as configurações através do *software* GeoGebra

Figura 47 - Os quatro primeiros números cúbicos



Fonte: do autor

Estes números formam a sequência $(1, 8, 27, 64, \dots)$, chamaremos de $C(1)=1, C(2)=8, C(3)=27$ e assim por diante, de modo que $C(n)=n^3$, esta sequência pode ser observada a partir da recorrência:

$$C(1)=1^3=1$$

$$C(2)=2^3=8=1^3+3\cdot 1^2+3\cdot 1+1=C(1)+3\cdot 1^2+3\cdot 1+1$$

$$C(3)=3^3=27=2^3+3\cdot 2^2+3\cdot 2+1=C(2)+3\cdot 2^2+3\cdot 2+1$$

$\vdots$

$$C(n+1)=n^3+3\cdot n^2+3\cdot n+1=C(n)+3\cdot n^2+3\cdot n+1$$

Sua fórmula geral, dada por $C(n)=n^3$, com $C(1)=1$ pode ser provada, através da recorrência usando indução. Temos como hipótese que $C(n)=n^3$ então:

$$C(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

$$C(n+1) = (n+1)^3$$

A função geradora pode ser construída se encontrarmos uma recorrência que seja homogênea, assim temos que:

$$C(n) = n^3 \quad (I)$$

$$C(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \quad (II)$$

$$C(n+2) = (n+1)^3 + 3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 \quad (III)$$

$$C(n+3) = (n+2)^3 + 3(n+2)^2 + 3(n+2) + 1 \quad (IV)$$

$$C(n+4) = (n+3)^3 + 3(n+3)^2 + 3(n+3) + 1 \quad (V)$$

Subtraindo as fórmulas:

$$(II) - (I) = C(n+1) - C(n) = 3n^2 + 3n + 1 \quad (VI)$$

$$(III) - (II) = C(n+2) - C(n+1) = 3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 \quad (VII)$$

$$(IV) - (III) = C(n+3) - C(n+2) = 3(n+2)^2 + 3(n+2) + 1 \quad (VIII)$$

$$(V) - (IV) = C(n+4) - C(n+3) = 3(n+3)^2 + 3(n+3) + 1 \quad (IX)$$

Subtraindo as novas fórmulas

$$\begin{aligned} (VII) - (VI) &= C(n+2) - C(n+1) - (C(n+1) - C(n)) = 3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 - (3n^2 + 3n + 1) \\ &= C(n+2) - 2C(n+1) + C(n) = 3 \cdot (n^2 + 2n + 1 + n + 1 - n^2 - n) = 6n + 6 \quad (X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (VIII) - (VII) &= C(n+3) - C(n+2) - (C(n+2) - C(n+1)) = 3(n+2)^2 + 3(n+2) + 1 \\ &\quad - (3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1) \\ &= C(n+3) - 2C(n+2) + C(n+1) = 3(n^2 + 4n + 4 + n + 2 - n^2 - 2n - 1 - n - 1) \\ &= 6n + 12 \quad (XI) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (IX) - (VIII) &= C(n+4) - C(n+3) - (C(n+3) - C(n+2)) = 3(n+3)^2 + 3(n+3) + 1 \\ &\quad - (3(n+2)^2 + 3(n+2) + 1) \\ &= C(n+4) - 2C(n+3) + C(n+2) = 6n + 18 \quad (XII) \end{aligned}$$

Por fim, temos:

$$\begin{aligned}
(XII) - 2 \cdot (XI) + (X) &= C(n+4) - 2C(n+3) + C(n+2) - 2(C(n+3) - 2C(n+2) + C(n+1)) \\
&+ C(n+2) - 2C(n+1) + C(n) = 0 \\
C(n+4) - 4C(n+3) + 6C(n+2) - 4C(n+1) + C(n) &= 0
\end{aligned}$$

Dada esta recorrência, podemos encontrar a função geradora através dos mesmos procedimentos já vistos. Para reduzirmos os processos, percebemos que esta recorrência é de quarta ordem, então sua função geradora será do tipo $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4}$, também percebe-se pelos exemplos anteriores que os coeficientes da recorrência são os mesmos de $g(x)$, logo $g(x) = 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4 = (1-x)^4$ e pelos valores iniciais da sequência, temos:

$$a_0 = b_0c_0 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$a_1 = b_0c_1 + b_1c_0 = 1 \cdot 8 - 4 \cdot 1 = 4$$

$$a_2 = b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0 = 27 - 32 + 6 = 1$$

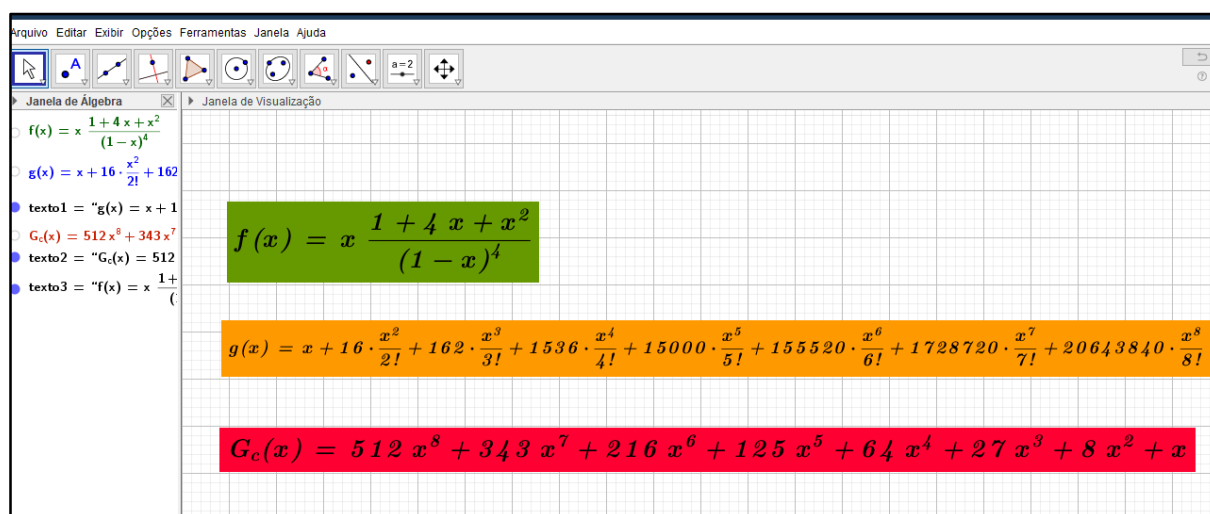
$$a_3 = b_0c_3 + b_1c_2 + b_2c_1 + b_3c_0 = 64 - 108 + 48 - 4 = 0$$

Assim, $f(x) = 1 + 4x + x^2$ então a função geradora dos números cúbicos é dada por:

$$G[C(n), x] = \frac{x(1 + 4x + x^2)}{(1-x)^4}, |x| < 1$$

A figura a seguir mostra a representação desta função geradora através do SG.

Figura 48 - FG dos números cúbicos no SG



Fonte: autor

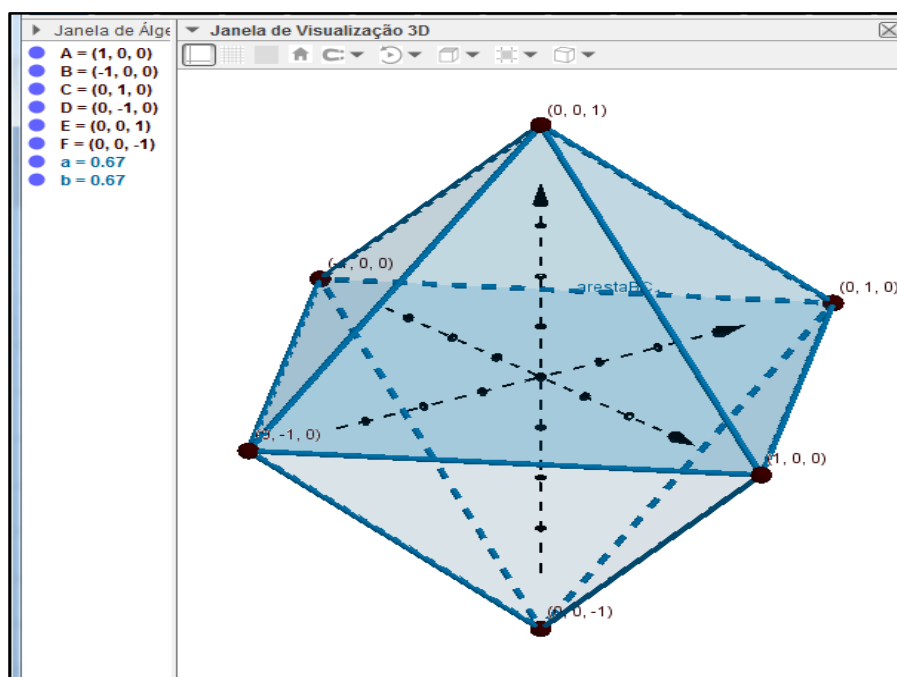
E assim, temos as fórmulas que geram a sequência de números cúbicos, dadas pela recorrência, termo geral e função geradora, bem como a visualização destes usando o SG. Esses

números juntamente com os números tetraédricos, fazem parte de outra família de sequências, a dos números platônicos, que serão vistas na próxima seção.

3.5.3 Números octaédrais

Os números octaédrais, como o próprio nome sugere, são os números da sequência relacionada ao octaedro, estes formam a sequência $(1, 6, 19, 44, 85, 146, 231, \dots)$, catalogada como *A005900* na *Oeis*. Precisamos apresentar os valores para os números octaédricos ou seja, aqueles formados pela união dos pontos $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (-1, 0, 0), (0, -1, 0)$ e $(0, 0, -1)$ como definido por Coxeter (1972), assim a figura a seguir apresenta um octaedro com seus vértices escritos nos pontos dados acima

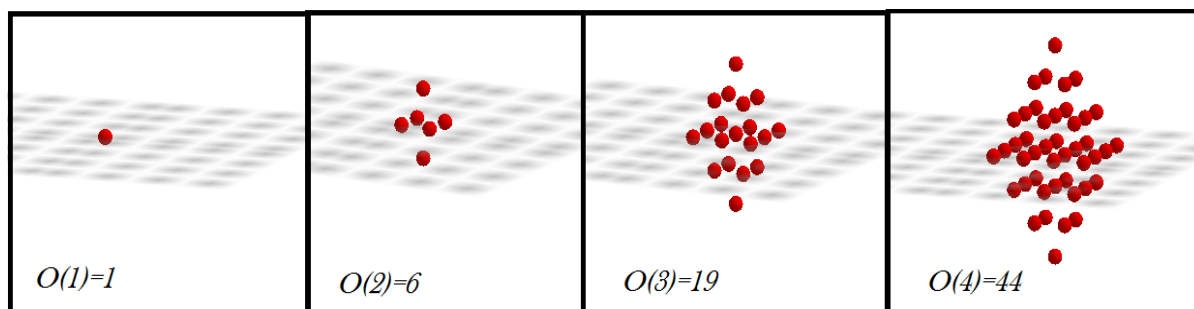
Figura 49 - octaedro formado como casco convexo de pontos no espaço



Fonte: autor

Para determinar os primeiros números octaédricos e facilitar o entendimento por meio da visualização, recorreremos a figura a seguir com a sequência de pontos.

Figura 50 - os quatro primeiros números octaédricos



Fonte: elaboração do autor

Apresentaremos tais números usando o símbolo $O(1)=1, O(2)=6, O(3)=19, \dots$ como descrito na figura acima

De acordo com Deza e Deza (2012) Um número octaédrico é um número figurado tridimensional que representa um octaedro, ou “duas pirâmides colocadas juntas, uma de cabeça para baixo embaixo do outro” (Deza e Deza, 2012.p.123). Logo o n -ésimo número octaédrico $O^3(n)$ ou simplesmente $O(n)$, representa a soma de dois números piramidais quadrados consecutivos:

$$O(n) = S_4^3(n-1) + S_4^3(n)$$

Para encontrar os números octaédricos, precisamos primeiramente provar a existência da fórmula para os números piramidais quadrados, ou seja:

$$\sum_{S=1}^n S^2 = \frac{(2n+1)n(n+1)}{6}$$

Para provar esta fórmula, consideraremos a diferença entre dois termos consecutivos dessa sequência, $S^2 - (S-1)^2 = S^2 - S^2 + 2S - 1 = 2S - 1$, também consideramos que:

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1 \\ 2^2 &= 1 + 3 \\ 3^2 &= 1 + 3 + 5 \\ &\vdots \\ n^2 &= 1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 \end{aligned}$$

Adicionando todos os termos teremos:

$$\begin{aligned}\sum_{S=1}^n S^2 &= 1 \cdot n + 3 \cdot (n-1) + 5 \cdot (n-2) + \dots + 2n-1 \Rightarrow \sum_{S=1}^n S^2 = \sum_{S=1}^n (2S-1)(n-S+1) \\ \sum_{S=1}^n S^2 &= \sum_{S=1}^n (2Sn - 2S^2 + 3S - n - 1) \Rightarrow \sum_{S=1}^n S^2 = \sum_{S=1}^n \left(2S \left(n + \frac{3}{2}\right) - 2S^2 - n - 1\right) \\ \sum_{S=1}^n S^2 &= 2 \left(n + \frac{3}{2}\right) \sum_{S=1}^n S - 2 \sum_{S=1}^n S^2 - (n+1) \sum_{S=1}^n 1 \Rightarrow 3 \sum_{S=1}^n S^2 = 2 \left(n + \frac{3}{2}\right) \sum_{S=1}^n S - (n+1) \sum_{S=1}^n 1\end{aligned}$$

Como temos que $\sum_{S=1}^n S = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ e $\sum_{S=1}^n 1 = n$, então:

$$\begin{aligned}3 \sum_{S=1}^n S^2 &= 2 \left(n + \frac{3}{2}\right) \sum_{S=1}^n S - (n+1) \sum_{S=1}^n 1 \Rightarrow 3 \sum_{S=1}^n S^2 = \left(n + \frac{3}{2}\right) (n \cdot (n+1)) - n \cdot (n+1) \\ 3 \sum_{S=1}^n S^2 &= n \cdot (n+1) \cdot \left(n + \frac{3}{2} - 1\right) \Rightarrow 3 \sum_{S=1}^n S^2 = n \cdot (n+1) \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow 6 \sum_{S=1}^n S^2 = n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) \\ \sum_{S=1}^n S^2 &= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}\end{aligned}$$

Agora iremos encontrar a fórmula para o n -ésimo números octaédrico, então teremos que adicionar dois números piramidais quadrados consecutivos, ou seja:

$O(n) = S_4^3(n-1) + S_4^3(n)$, então temos que:

$$\begin{aligned}O(n) &= \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} + \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = \frac{n(2n^2 - 3n + 1 + 2n^2 + 3n + 1)}{6} = \frac{n(4n^2 + 2)}{6} \\ O(n) &= \frac{n(2n^2 + 1)}{3}\end{aligned}$$

Como não necessitaremos provar esta fórmula, poderemos encontrar a recorrência apenas escrevendo

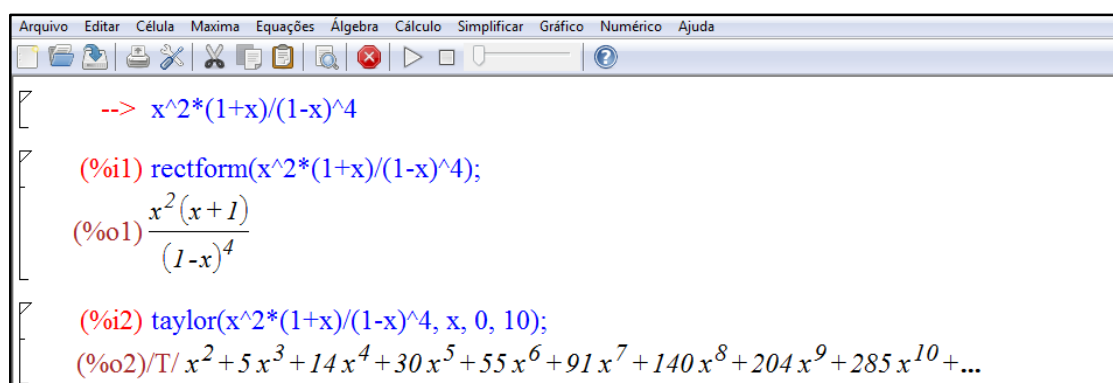
$$\begin{aligned}O(n+1) &= \frac{(n+1)(2(n+1)^2 + 1)}{3} = \frac{(n+1)(2n^2 + 4n + 3)}{3} = \frac{n(2n^2 + 1) + n(4n + 2) + 2n^2 + 4n + 3}{3} \\ O(n+1) &= O(n) + 2n^2 + 2n + 1 = O(n) + n^2 + (n+1)^2\end{aligned}$$

Que é a recorrência dos números octaédricos, dado isto, iremos descrever em seguida a função geradora desta sequência, para isto, seguiremos de maneira diferente, vamos usar a função geradora da soma dos números quadrados consecutivos, ou seja, dos números piramidais quadrados já vistos anteriormente, e adicionarmos, do mesmo modo que fizemos para encontrar o termo geral dos números octaédricos, desta forma, precisamos das funções geradoras

$G[S_4^3(n), x] = \frac{x(1+x)}{(1-x)^4}$, agora, necessitaremos da fórmula para encontrar a função geradora dos

números piramidais quadrados $S_4^3(n-1)$ ou seja, a função procurada deve ser da forma $G[S_4^3(n-1), x] = S_4^3(1)x^2 + S_4^3(2)x^3 + S_4^3(3)x^4 + \dots + S_4^3(n-1)x^n$, então basta que façamos $GS_{4,n-1}^3(x) = GS_4^3(x) \cdot x$ isto quer dizer que $G[S_4^3(n-1), x] = \frac{x^2(1+x)}{(1-x)^4}$, usando um recurso computacional, comprovamos a afirmação.

Figura 51 - função geradora dos números piramidais quadrados multiplicados por "x"



Fonte: autor

Por fim, a função dos números octaédricos podem ser expressa com a soma das funções $GS_4^3(x)$ e $GS_{4,n-1}^3(x)$ pois cada coeficiente representa um número piramidal quadrado que será adicionado ao seu anterior, assim, chamaremos de $GO(x) = GS_4^3(x) + GS_{4,n-1}^3(x)$, surge que:

$$GO(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^4} + \frac{x^2(1+x)}{(1-x)^4} = \frac{x(1+x)(1+x)}{(1-x)^4} = \frac{x(1+x)^2}{(1-x)^4}, \text{ que é a função geradora dos}$$

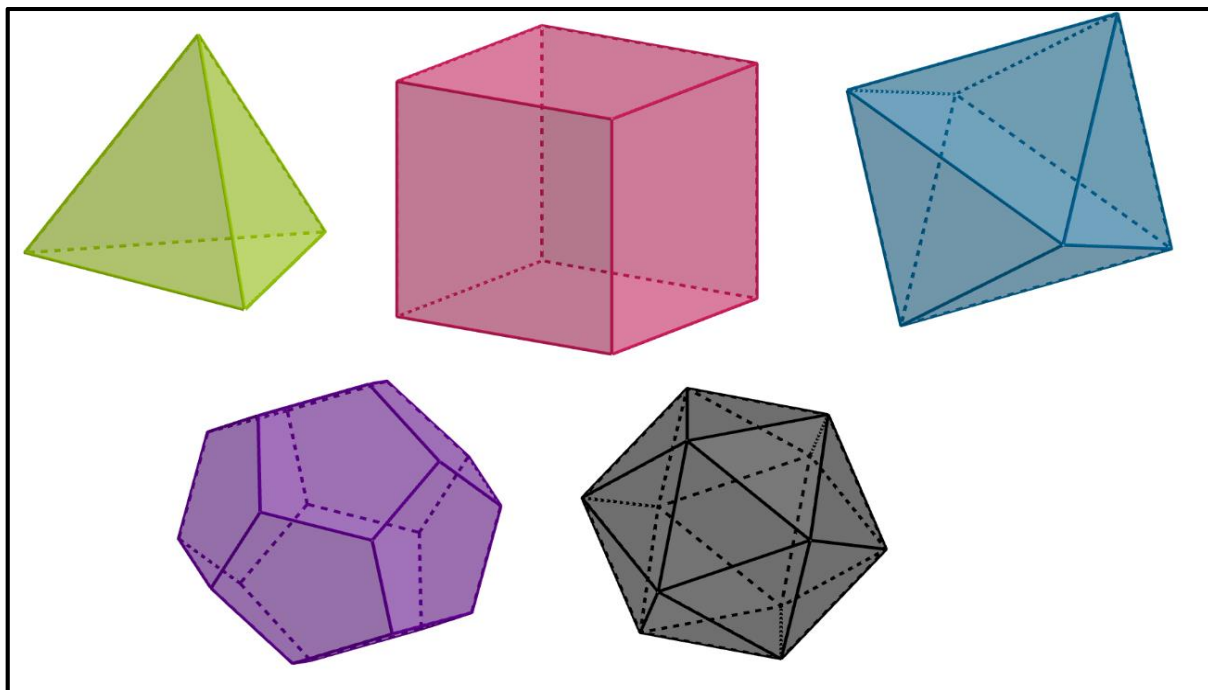
números octaédricos. Esta sequência, juntamente com outras duas anteriores, números cúbicos e números tetraédrais, podem ser classificada como números platônicos, pois formam sólidos de Platão, porém precisaremos definir outras duas sequências, as dos números que se relacionam com o dodecaedro e com o icosaedro, estes então, objeto de estudo do nosso próximo tópico.

3.5.4 Números platônicos

As sequências em que os números representam poliedros de Platão, conforme a figura a seguir, são chamadas de sequência de números figurados platônicos que são os números tetraédrais, números cúbicos, números octaédrais, números dodecaédrais e números icosaédrais, nesta seção, descreveremos uma forma de representar estes números de maneira

geral através de uma forma fechada, recorrência e função geradora, sempre com ênfase na visualização que nos permite estudar melhor a estrutura que compõe as figuras, facilitando a determinação de tais fórmulas.

Figura 52 - Os cinco sólidos de Platão



Fonte: do autor

A princípio temos os números tetraédrais, cúbicos e octaédrais já descritos com recorrência forma geral, função geradora e visualização, agora deveremos apresentar uma generalização para estes números que incluem os números dodecaédrais e icosaédrais, para isto, Kim (2003) descreve um método para se obter as sequências dos números platônicos.

Devemos considerar, por convenção que para qualquer número platônico $P(n)$ temos que $P(0) = 0$ e $P(1) = 1$ então podemos construir o próximo número a partir de alguns passos descritos a seguir, assim temos para $P(n)$:

1. $P(n-1)$, pois o número platônico anterior deve estar contido no próximo
2. para cada novo vértice criado, deveremos adicionar os números 0-dimensionais, ou seja a unidade que corresponde a sequência (1,1,1,...)
3. para cada nova aresta criada devemos adicionar os números 1-dimensionais ou lineares, que representam a sequência (0,1,2,3,...) com $L(n) = n$ para $n = 0,1,2,...$ Isto quer dizer que para o n -ésimo número platônico, devemos adicionar $n-2$ números lineares em cada nova aresta, pois dois pontos já foram adicionados nos vértices.
4. para cada nova face criada, devemos adicionar o número poligonal correspondente, no exemplo do cubo temos as faces formadas por quadrados. Isto quer dizer que para um n -

ésimo número platônico, devermos adicionar a quantidade de pontos internos ao n -ésimo número poligonal correspondente, uma vez que os pontos da camada mais externa já foram preenchidos com números lineares e unitários, assim poderemos contar os pontos e formar o próximo termos da sequência de um número platônico qualquer, de acordo com Kim (2003).

Para que a construção desta fórmula de recorrência seja exata, também temos que acrescentar que a quantidade de arestas partindo de cada vértice de um poliedro de Platão não é a mesma, bem como as faces dos poliedros, por isso teremos que definir alguns termos para que possamos encontrar uma fórmula que contemplem todos estes componentes, assim, se temos que o crescimento de uma sequência de números platônicos, partem de um vértice, chamaremos de: V' = Os vértice V do poliedro, excluindo-se o vértice de partida

A' = As arestas A do poliedro, excluindo-se as que partem do vértice de origem

F' = As faces F do poliedro, excluindo-se as que possuem o vértice de origem

Então podemos definir uma recorrência linear para um poliedros de Platão definido como $P(n)$ dadas as informações acima, temos:

$$P_F(n) = P_F(n-1) + V_{P_F}' + A_{P_F}' \cdot (n-2) + F_{P_F}' \cdot (S_m(n) - m(n-1)), n > 1, P_F(1) = 1$$

Vale lembrar que F só poderá assumir os valores $\{4, 6, 8, 12, 20\}$ pois representam o número de faces de um poliedro de Platão e m apenas $\{3, 4, 5\}$, já que as faces dos PP são formadas apenas por triângulos (tetraedro, octaedro e icosaedro), quadrados (cubo) e pentágono (dodecaedro).

Usando como exemplo os números tetraédrais, temos a sua recorrência com base nesse método:

$$\begin{aligned} P_4(n) &= P_4(n-1) + 3 + 3 \cdot (n-2) + 1 \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2} - 3(n-1) \right) \\ P_4(n+1) &= P_4(n) + 3 + 3 \cdot (n-1) + 1 \cdot \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 3(n) \right) \\ &= P_4(n) + 3n - 3n + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= P_4(n) + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= P_4(n) + S_3(n+1) \end{aligned}$$

Que, de fato, é a recorrência apresentada anteriormente para os números tetraédrais. Para determinarmos a forma geral usando as informações apresentadas até então, vamos analisar que quando este poliedros cresce partindo de um vértice, os números que surgem a

partir de cada elemento do poliedro agora formará uma sequência, ou seja, os números 1-dimensionais que surgem em cada no conjunto de vértices, formam a soma dos n -ésimos números da sequência 1-dimensional, isto é $\underbrace{1+1+1+\dots+1}_{n \text{ vezes}} = n$. Para as arestas que formam números lineares a cada nova aresta, temos o somatório destes números, ou seja, números triangulares, como os números lineares presentes em cada aresta são da forma $L(n-2)$, então os números triangulares que surgem são da forma $S_3(n-2)$ ou seja $1+2+3+\dots+(n-2) = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$ já as faces formam a soma dos pontos internos dos polígonos de cada camada, como a soma destes polígonos formam um número piramidal com a base sendo a face do poliedro, então essa soma corresponde ao número de pontos internos de um número piramidal, porém quando contamos estes números internos de um polígono, o valor não é contado para $S_m(1)$ ou seja, a soma dos números de pontos internos aos piramidais devem ser subtraídos dele, isto acontece porque $S_m(1)=1$ e a contagem dos seus pontos internos seriam $S_m(1)-m \cdot (1-1)=1$, o que se tornaria um problema pois dentro de um número piramidal este seria um ponto externo e não interno, para que este problema seja solucionado, deveremos subtrair esta unidade, assim temos que:

$$(S_3(2)-m \cdot 1) + (S_3(3)-m \cdot 2) + \dots + (S_3(n)-m \cdot (n-1)) = (S_m^3(n)-1) - m \left(\frac{n(n-1)}{2} \right)$$

Com isto podemos construir a forma geral para qualquer número platônico, dado por:

$$\begin{aligned} P_F(n) &= 1 + V' \cdot L(n-1) + A' \cdot S_3(n-2) + F' \cdot \left((S_m^3(n)-1) - m \cdot (S_3(n-1)) \right) \\ &= 1 + V' \cdot (n-1) + A' \cdot \left(\frac{(n-2)(n-1)}{2} \right) \\ &\quad + F' \cdot \left(\left(\frac{n \cdot (n+1) \cdot ((m-2) \cdot n - m + 5)}{6} - 1 \right) - m \left(\frac{(n-1)n}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

Desenvolvendo esta fórmula para os números cúbicos, temos:

$$\begin{aligned} P_6 &= 1 + 7(n-1) + 9 \left(\frac{(n-2)(n-1)}{2} \right) + 3 \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n-1)}{2} - 1 \right) \\ &= 7n - 6 + \frac{9n^2 - 27n + 18}{2} + \frac{2n^3 + 3n^2 + n - 12n^2 + 12n - 6}{2} \\ &= 7n - 6 + n^3 - 7n + 6 = n^3 \end{aligned}$$

As fórmulas para as cinco sequências de número platônico, desenvolvendo-se esta forma canônica são dadas por:

Tabela 4 - Lista da forma geral para os números platônicos

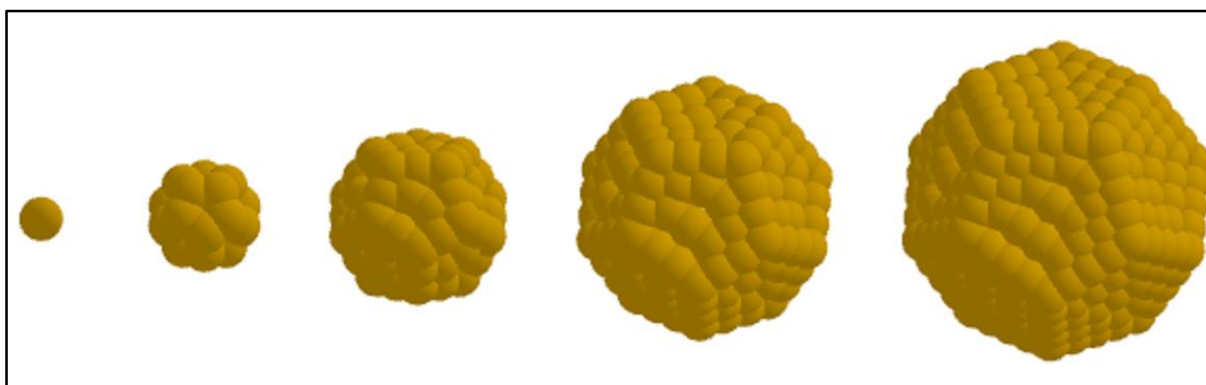
Sequência	Forma geral
Números tetraedrais	$S_3^3(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$
Números cúbicos	$C(n) = n^3$
Números octaedrais	$O(n) = \frac{n(2n^2+1)}{3}$
Números dodecaedrais	$D(n) = \frac{n(3n-1)(3n-2)}{2}$
Números icosaedrais	$I(n) = \frac{n(5n^2-5n+2)}{2}$

Fonte: elaboração do autor

Para as funções geradoras de cada sequência desta família, desenvolveremos usando as funções geradoras dos números figurados da família dos cubos, ou seja, números cúbicos, quadrados e lineares, isto porque as formas gerais podem ser decompostas de modo a surgir estes números em sua estrutura, como já temos as funções geradoras para números tetraédrais, cúbicos e octaedrais, faremos esse procedimento apenas para os números dodecaedrais e icosaedrais. Partiremos primeiramente do desenvolvimento da forma geral dos números dodecaedrais, para isto temos os dez primeiros números desta sequência dados por (1, 20, 84, 220, 455, 816, 1330, 2024, 2925, 4060), A006566 no catalogo das sequencias inteiras e

$$D(n) = \frac{n(3n-1)(3n-2)}{2} = \frac{9n^3 - 9n^2 + 2n}{2} \text{ e sua construção no SG na próxima figura:}$$

Figura 53 - Os cinco primeiros números dodecaedrais



Fonte: elaboração do autor

temos as funções dos números cúbicos dadas por $G[C(n), x] = \frac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4}$ a dos números quadrados dada por $G[S_4(n), x] = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ e dos números lineares, igual a $G[L(n), x] = \frac{x}{(1-x)^2}$, assim podemos construir a FG destes números da seguinte maneira

$$G[D(n), x] = \frac{1}{2} \left(\frac{9x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4} - \frac{9x(1+x)}{(1-x)^3} + \frac{2x}{(1-x)^2} \right)$$

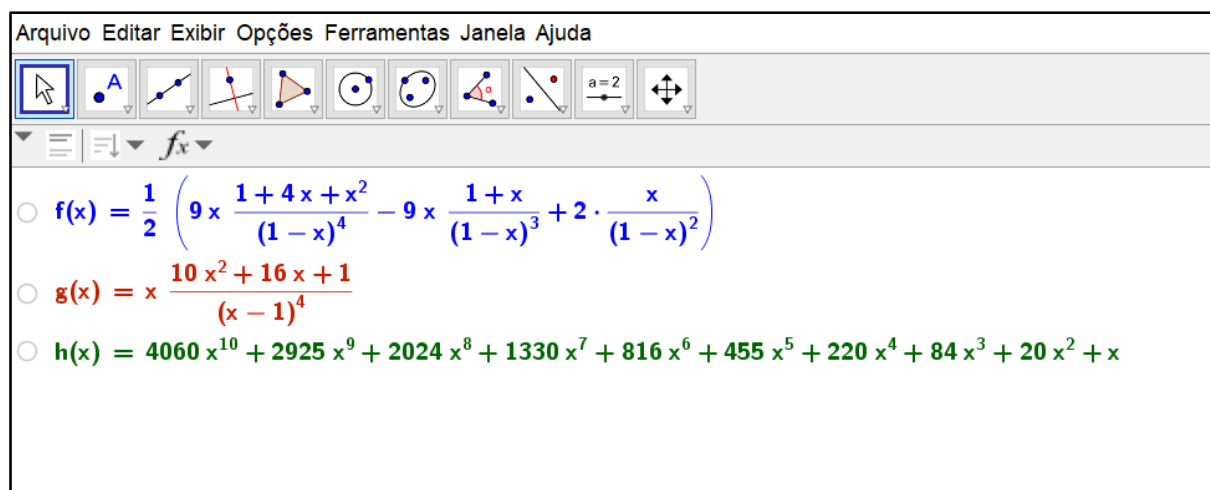
desenvolvendo estes cálculos, temos

$$G[D(n), x] = \frac{x(1+16x+10x^2)}{(1-x)^4}$$

que é a função geradora dos números dodecaedrais, o

desenvolvimento desta função no software GeoGebra, na figura a seguir, comprova este fato:

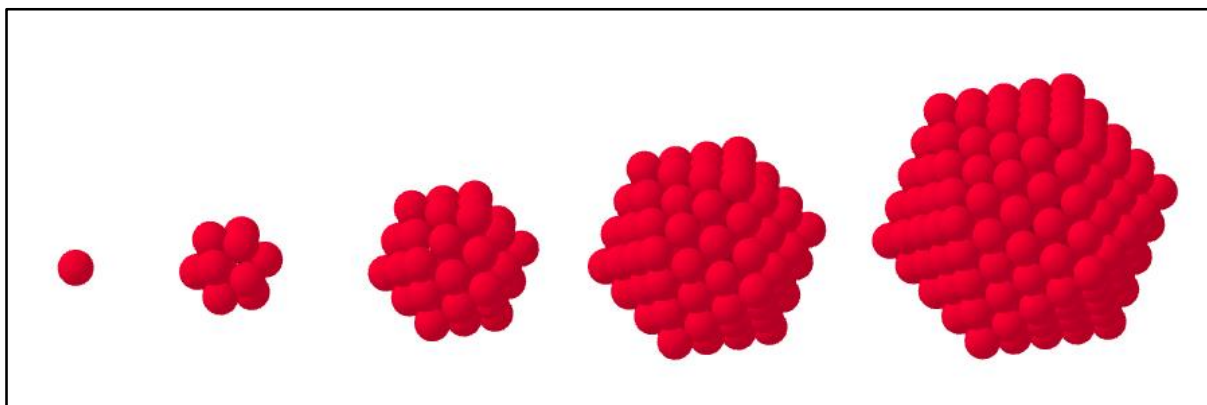
Figura 54 – Função geradora dos números dodecaedrais pelo SG



Fonte: elaboração do autor

Para finalizarmos a apresentação das FG dos números platônicos, faremos o mesmo procedimento para os números icosaedrais, cujo os primeiros números são (1,12,48,124,255,456,742,1128,1629,2260) com o número A006564 na Oeis, sua representação pelo SG e dada pela figura a seguir:

Figura 55 - Os cinco primeiros números icosaedrais no SG



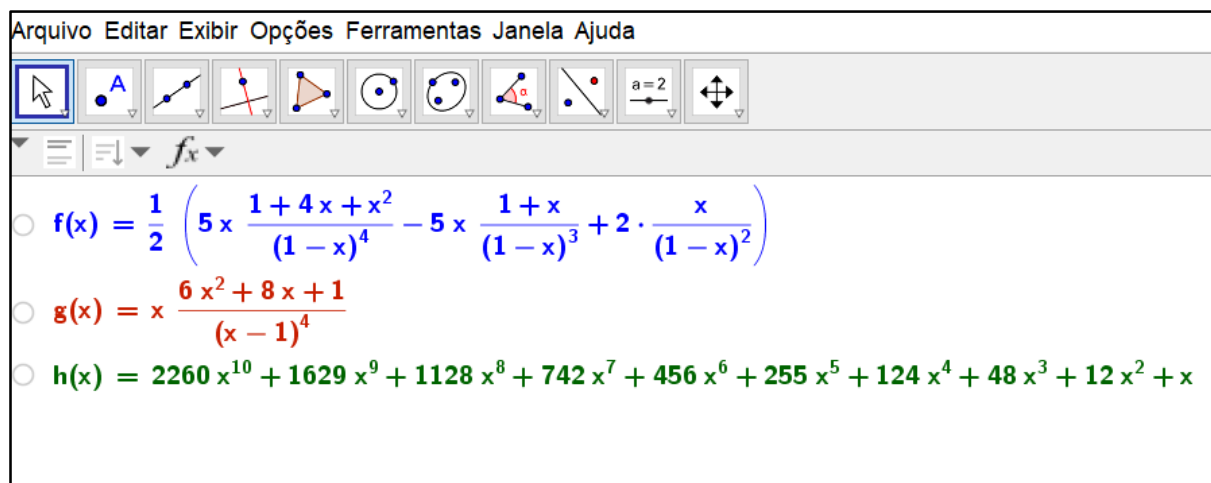
Fonte: do autor

Sua forma geral desenvolvida é dada por $I(n) = \frac{5n^3 - 5n^2 + 2n}{2}$ substituindo pelas FG correspondentes, temos $G[I(n), x] = \frac{1}{2} \left(\frac{5x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4} - \frac{5x(1+x)}{(1-x)^3} + \frac{2x}{(1-x)^2} \right)$ que resulta em

$$G[I(n), x] = \frac{x(1+8x+6x^2)}{(1-x)^4} \text{ que é a FG dos números icosaedrais, tendo a comprovação}$$

através do SG na figura a seguir:

Figura 56 - FG dos números icosaedrais no SG



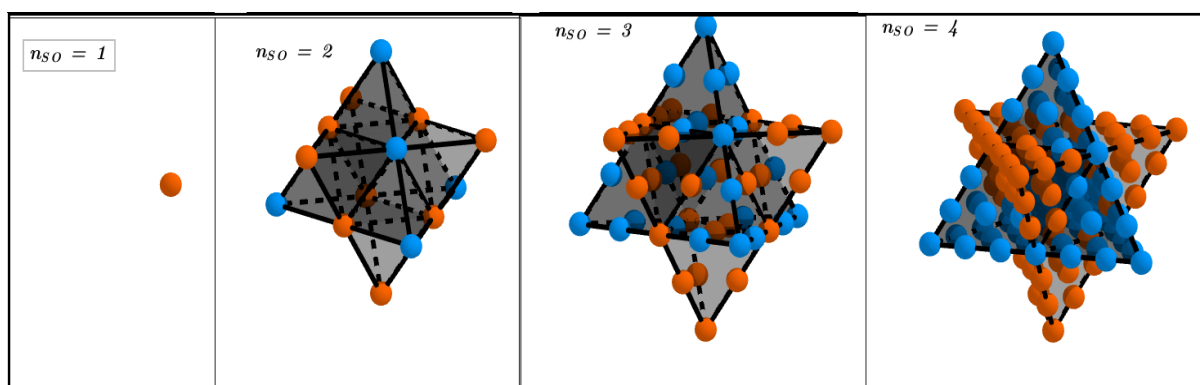
Fonte: do autor

Assim, descrevemos as principais representações dos números platônicos com o arrimo do SG para o auxílio da visualização e desenvolvimento da FG, das duas sequências que completam a família.

3.5.5 Números da stella octangula

Os números da sequência que formam uma poliedro estrelado, formado pelo encaixe de dois tetraedros que formam uma estrela de “oito braços”, são chamados de números da estrela octangular, ou números da estrela de oito braços são a sequência em que os primeiros números são (1,14,51,124,...) e chamaremos aqui de $SO(1)=1, SO(2)=14, SO(3)=51, \dots$, estes números são apresentados por (Conway & Guy,1996) e discutidos por (Deza & Deza, 2012). A representação por meio do SG apresenta os dois tetraedros encaixados conforme a figura que segue:

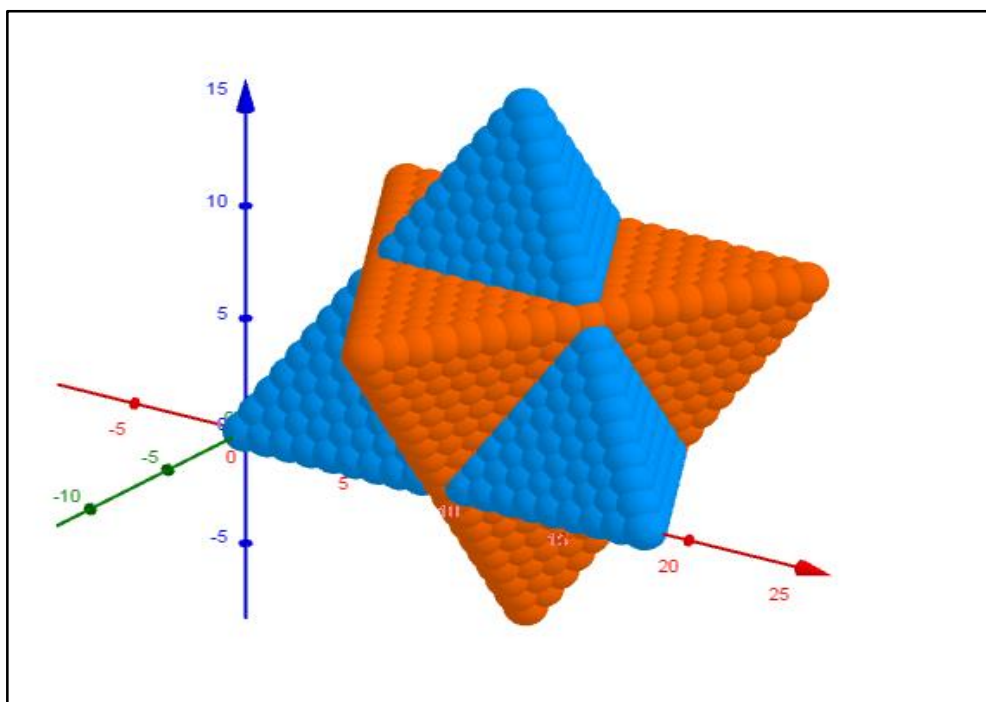
Figura 57 - as quatro primeiras configurações da stella octangula



Fonte: elaboração do autor

Para números maiores, é possível ver com mais precisão a formação da stella octangula e seus oito braços, como mostra a próxima figura.

Figura 58 - configuração do décimo número da stella octangula



Fonte: elaboração do autor

Apresentaremos a forma geral, recorrência e função geradora destes números a título de informação, o objetivo de apresentarmos tais números é basicamente para mostrar a visualização pois pouco se mostra a visualização destes números na literatura, porém, usando-se o SG é possível construir estes números a partir de um conjunto de números tetraédricos, o qual sugere algumas propriedades e relações entre números figurados que serão discutidos posteriormente neste trabalho, assim usaremos esta seção apenas para apresentar as fórmulas:

Termos geral: $SO(n) = n(2n^2 - 1)$ (conway & Guy, 1996, p. 51)

Recorrência: $SO(n+1) = SO(n) + 6n^2 + 6n + 1$, $SO(1) = 1$ (Deza & Deza, 2012, p. 120)

Função geradora: $F[SO(n), x] = \frac{x(x^2 + 10x + 1)}{(x - 1)^4}$, $|x| < 1$ (Deza & Deza, 2012, p. 120)

Ademais, encerraremos esta seção de números figurados tridimensionais a fim de partirmos para as generalizações de três classes de números vistos por Deza & Deza (2012), objeto da nossa próxima seção.

3.6 Números figurados k -dimensionais

Nesta sessão, apresentaremos uma generalização das sequências de NF que representam politopos regulares, que podem ser representados em uma dada dimensão k , esses politopos são descritos por Coxeter (1967) e são classificados como simplexos, hipercubos e hiperoctaédricos. Os simplexos são a família de politopos mais simples em cada dimensão, ou seja, aqueles que podem ser construídos com o menor número possível de faces dentro da sua dimensão, o triângulo é o representante dos simplexos em duas dimensões, enquanto o tetraedro é o representante em 3D.

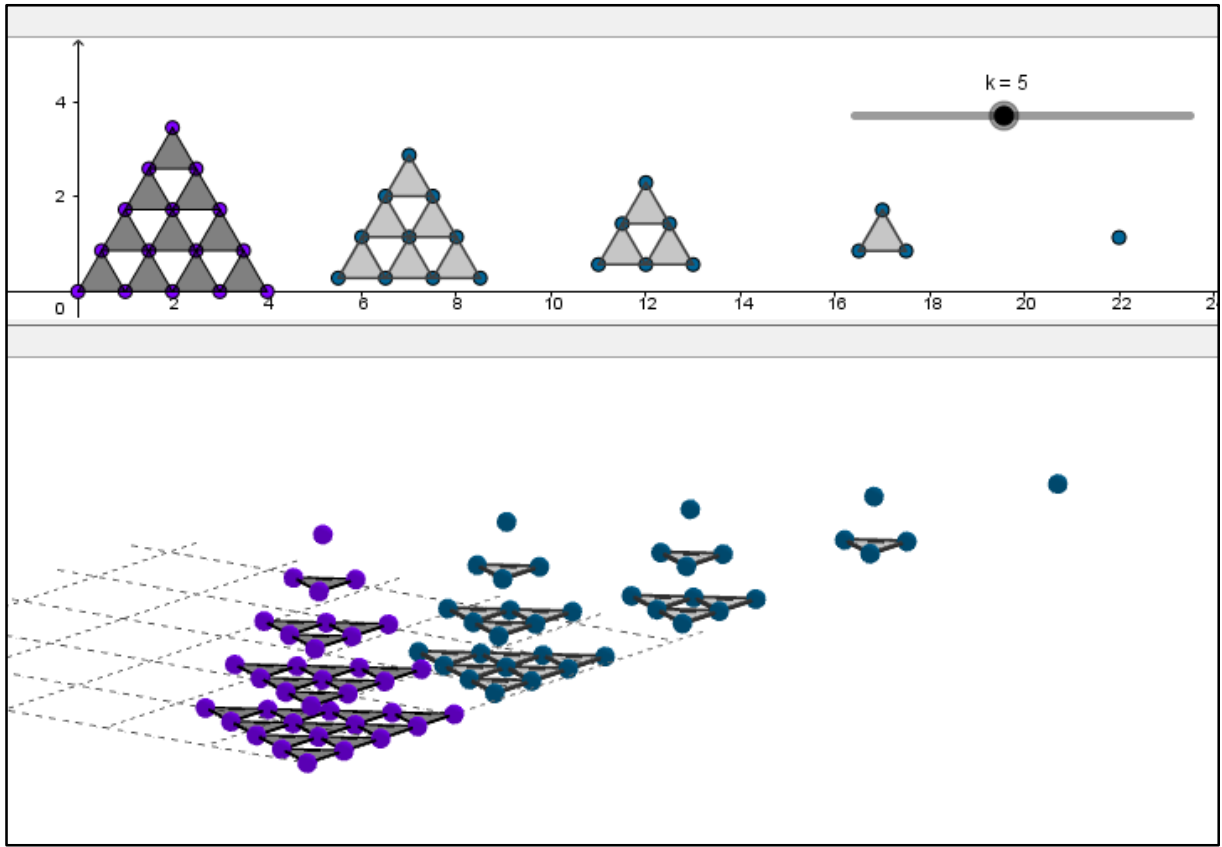
Para a família dos hipercubos, temos os politopos que são formados a partir de segmentos paralelos dentro da sua dimensão, o quadrado é o representante de um hipercubo em 2D enquanto o cubo é o representante 3D. Para finalizar temos os hiperoctaédricos, que são os politopos formados a partir do casco convexo a união dos pontos que possuem uma de suas coordenadas igual a 1 ou -1 e o restante igual a zero em uma dimensão qualquer, o quadrado é o exemplar de um hiperoctaédrico em 2D enquanto o octaedro é o representante em 3D.

3.6.1 Números simplexos k -dimensionais

Iniciaremos a procura pelas formas de apresentação da sequência dos números da classe dos simplexos, pela função geradora, uma vez que, para encontrarmos o n -ésimo número simplexo de uma dimensão k , devemos somar os n primeiros termos dos seus análogos da dimensão $k-1$

Para buscarmos generalizar as funções geradoras dos números hipertetraédricos ou simplexos, observamos que $\frac{x}{(1-x)^5} = \frac{x}{(1-x)^4} \cdot \frac{1}{(1-x)}$, sendo $\frac{x}{(1-x)^4}$, a função geradora dos números tetraédricos, e $\frac{1}{(1-x)}$, a função geradora da sequência $(1, 1, 1, 1, \dots, 1)$, vale informar que essa sequência é considerada a zero-dimensional da família dos simplexos pelo fato da soma de seus termos gerarem os números lineares (naturais) que por sua vez, se somados consecutivamente geram os triangulares e assim por diante, sendo assim, observaremos a obtenção da função geradora dos números pentatopos, segundo Deza e Deza (2012), que são os simplexos 4D, conforme a figura a seguir:

Figura 59 - quinto número pentatope



Fonte: autor

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{(1-x)^5} &= \left[\left(S_3^3(1) \right) x + \left(S_3^3(2) \right) x^2 + \left(S_3^3(3) \right) x^3 + \cdots + \left(S_3^3(n) \right) x^n \right] \cdot \left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} \right) \\
 &= \left(S_3^3(1) \right) x + \left(S_3^3(1) + S_3^3(2) \right) x^2 + \left(S_3^3(1) + S_3^3(2) + S_3^3(3) \right) x^3 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^n S_3^3(i) \right) x^n \\
 &= \left(S_3^4(1) \right) x + \left(S_3^4(2) \right) x^2 + \left(S_3^4(3) \right) x^3 + \cdots + \left(S_3^4(n) \right) x^n \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(S_3^4(i) \right) x^i
 \end{aligned}$$

Partindo dessa observação, e, com as fórmulas dos termos gerais de cada números lineares, triangulares, tetraédricos e pentatopes, podemos definir uma fórmula para os números hipertetraédricos k -dimensionais para $k \in \mathbb{N}$, observe que os números lineares (sequência $(1, 2, 3, \dots, n)$) ou seja, os simplexes da dimensão 1, possuem o termo geral dado por $S_3^1 = n = \frac{n}{1!}$ os triangulares são obtidos somando-se os termos sucessivos dos números lineares, ou seja

$1+2+3+\dots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$, assim o termos geral dos números triangulares é dado por

$$S_3 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2!}. \text{ Para os números tetraédricos, temos } S_3^3(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$$

Assim, podemos propor uma hipótese de que para um certo $k \in \mathbb{N}$, temos $S_3^k(n) = \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!}$ e, para provarmos tal fato para $n+1$, temos que

$$\begin{aligned} S_3^k(n+1) &= S_3^k(n) + S_3^{k-1}(n+1) = \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!} + \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+1+k-2)}{(k-1)!} \\ &= \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!} + \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)k!}{(k-1)!k!} \\ &= \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!} + \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)k(k-1)!}{(k-1)!k!} \\ &= \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!} + \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)k}{k!} \\ &= \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)(n+k)}{k!} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+1+k-1)}{k!}, n \in \mathbb{N}, n > 0 \end{aligned}$$

Agora, temos que a função geradora correspondente a cada dimensão dos simplexos é dada para $\frac{x}{(1-x)^2}$, para os números lineares, ou seja, para $k=1$, para os números triangulares

com $k=2$, é dada por $\frac{x}{(1-x)^3}$, para os tetraédricos e pentatopes, com $k=3$ e $k=4$,

respectivamente temos $\frac{x}{(1-x)^4}$ e $\frac{x}{(1-x)^5}$, então para um certo $k, k \in \mathbb{N}$ e $k > 0$, temos a função

geradora $G[S_3^k(n), x] = \frac{x}{(1-x)^{k+1}}$, de fato podemos demonstrar isto usando o produto das

funções $\frac{x}{(1-x)^k} \cdot \frac{1}{(1-x)}$, assim temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{(1-x)^{k+1}} &= \frac{x}{(1-x)^k} \cdot \frac{1}{(1-x)} = \left(S_3^{k-1}(1)x + S_3^{k-1}(2)x^2 + \cdots + S_3^{k-1}(n)x^n \right) (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) \\
&= S_3^{k-1}(1)x + \left(S_3^{k-1}(1) + S_3^{k-1}(2) \right) x^2 + \left(S_3^{k-1}(1) + S_3^{k-1}(2) + S_3^{k-1}(3) \right) x^3 + \cdots \\
&\quad + \left(S_3^{k-1}(1) + S_3^{k-1}(2) + S_3^{k-1}(3) + \cdots + S_3^{k-1}(n) \right) x^n = S_3^k(1)x + S_3^k(2)x^2 + S_3^k(3)x^3 + \cdots \\
&\quad + S_3^k(n-1)x^{n-1} + S_3^k(n)x^n, |x| < 1
\end{aligned}$$

Para finalizarmos, veremos a recorrência linear dentro de uma dada dimensão k para os números simplexos, vejamos que o termo até agora é uma recorrência que surge de uma dimensão para

outra, ou seja $S_3^k(n+1) = S_3^k(n) + S_3^{k-1}(n+1)$ assim, já que $S_3^{k-1}(n+1) = \frac{n(n+1) \cdots (n+k-2)}{(k-1)!}$,

podemos então reescrever a recorrência linear dos números simplexos como:

$$S_3^k(n+1) = S_3^k(n) + \frac{(n+1) \cdots (n+k-1)}{(k-1)!}$$

A tabela a seguir apresenta alguns números simplexos dentro das primeiras dimensões

Tabela 5 - os dez primeiros números simplexos das nove primeiras dimensões

$S(n) \backslash K$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	3	6	10	15	21	28	36	45	55
4	4	10	20	35	56	84	120	165	220
5	5	15	35	70	126	210	330	495	715
6	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002
7	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005
8	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440
9	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310
10	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620
11	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378
12	12	78	364	1365	4368	12376	31824	75582	167960
13	13	91	455	1820	6188	18564	50388	125970	293930
14	14	105	560	2380	8568	27132	77520	203490	497420
15	15	120	680	3060	11628	38760	116280	319770	817190
16	16	136	816	3876	15504	54264	170544	490314	1307504
17	17	153	969	4845	20349	74613	245157	735471	2042975
18	18	171	1140	5985	26334	100947	346104	1081575	3124550
19	19	190	1330	7315	33649	134596	480700	1562275	4686825
20	20	210	1540	8855	42504	177100	657800	2220075	6906900

Fonte: autor

Assim, concluímos os resultados das funções geradoras, termo geral e recorrência dos números simplexos em dimensões arbitrárias, usando as regularidades encontradas nas relações

uni, bi, tri e tetradimensionais, e artifícios algébricos que nos permitiram encontrar a generalização da classe.

3.6.2 Números hipercúbicos k -dimensionais

Os números que formam a classe dos hipercubos, são representados pela forma geral $C^k(n) = n^k$, estes formam os números lineares para a dimensão 1, os números quadrados na dimensão 2 e os números cúbicos para a dimensão 3. Neste tópico apresentaremos além da sua forma geral já apresentada, a sua recorrência e função geradora, iniciaremos com sua recorrência, uma vez que desenvolvendo o binômio

$$(n+1)^k = \binom{k}{0}n^k + \binom{k}{1}n^{k-1} + \binom{k}{2}n^{k-2} + \dots + \binom{k}{k}n^0 \text{ então a recorrência de um número da}$$

família dos hipercubos pode ser escrita como $C^k(n+1) = C^k(n) + \binom{k}{1}n^{k-1} + \binom{k}{2}n^{k-2} + \dots + 1$.

Para a função geradora desta família de sequências, necessitaremos de um triângulo numérico em que os termos aparecem como coeficientes na FG dos números hipercubos, trata-se do triângulo euleriano, descrito por Petersen (2015) como sendo o conjunto de descidas d , ou seja, a quantidade de vezes em que um número dentro de um conjunto com c elementos é maior que seu próximo, exemplo: na combinação 1342 existe uma descida pois $4 > 2$ e na combinação 4321 existem 3 descidas pois $4 > 3$, $3 > 2$ e $2 > 1$, vejamos a seguinte tabela descrita por Pertesen (2015) para o grupo de permutações que podem ser escritas com os números 1,2,3 e 4, ou seja, $c = 4$

Tabela 6 - conjunto de permutações divididas por subidas

d=0	d=1	d=2	d=3
1234	1243	1432	4321
	1324	2143	
	1342	2431	
	1423	3142	
	2134	3241	
	2314	3214	
	2341	3421	
	2413	4132	
	3124	4231	
	3412	4213	
	4123	4312	

Fonte: autor

Desta forma, o triângulo euleriano é construído por Petersen (2015) conforme a figura a seguir:

Figura 60 – triângulo euleriano

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1									
2	1	1								
3	1	4	1							
4	1	11	11	1						
5	1	26	66	26	1					
6	1	57	302	302	57	1				
7	1	120	1191	2416	1191	120	1			
8	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1		
9	1	502	14608	88234	156190	88234	14608	502	1	
10	1	1013	47840	455192	1310354	1310354	455192	47840	1013	1

Fonte: Petersen (2015)

Estes são os coeficientes do numerador da função geradora dos números hipercúbicos e são descritos como $\left\langle \begin{smallmatrix} k \\ n \end{smallmatrix} \right\rangle$ com $n < k \leq 10$. E por definição $\left\langle \begin{smallmatrix} k \\ n \end{smallmatrix} \right\rangle = \left| \left\{ w \in E_k : des(w) = n \right\} \right|$ em que $des(w)$ são as descidas de um número w .

Para construir as funções geradoras dos números hipercúbicos, partiremos da recorrência, assim observamos os números quadrados que possuem recorrência $S_4(n+1) = S_4(n) + 2n + 1$ para encontrar sua FG rescreveremos cada termo como uma função geradora da sequência que tem como forma geral o próprio termo, por exemplo, para a recorrência acima, temos a equação $G[S_4(n+1), x] = G[S_4(n), x] + 2G[n, x] + G[1, x]$ sendo

assim, já temos que $G[S_4(n+1), x] = \frac{G[S_4(n), x]}{x}$ e também já temos as FG da sequência dos

números lineares então $2G[n, x] = \frac{2x}{(1-x)^2}$ e, por fim, para a sequência de pontos, temos

$G[1, x] = \frac{1}{1-x}$, logo podemos reescrever a FG dos números quadrados como

$\frac{G[S_4(n), x]}{x} = G[S_4(n), x] + \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)}$ e segue que:

$$G[S_4(n), x](1-x) = \frac{2x^2 + x(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{x^2 + x}{(1-x)^3}$$

$$G[S_4(n), x] = \frac{x + x^2}{(1-x)^3}, |x| < 1$$

Observe que na FG dos números quadrados os coeficientes da função do numerador são os números do triângulo euleriano para $k = 2$, então, usaremos este método com a finalidade de descrever as funções geradoras dos números hipercúbicos, encontrando nos numeradores os termos do triângulos euleriano através dos polinômios de Euler. Petersen (2015), define os polinômios de Euler como $E_k(x) = \sum_{n=0}^{k-1} \left\langle k \atop n \right\rangle x^n$

Para a FG dos números cúbicos, podemos reescrever sua recorrência, dada por $C(n+1) = C(n) + 3n^2 + 3n + 1$ como a soma de funções

$$G(C^3(n), x) = \left(\binom{3}{1} G(C^2(n), x) + \binom{3}{2} G(C^1(n), x) + \binom{3}{3} G(C^0(n), x) \right) \frac{x}{1-x} \text{ o que sugere}$$

que para um número hipercubico k-dimensional, sua função geradora pode ser escrita como:

$$G(C^k(n), x) = \left(\binom{k}{1} G(C^{k-1}(n), x) + \binom{k}{2} G(C^{k-2}(n), x) + \dots + \binom{k}{k} G(C^0(n), x) \right) \frac{x}{1-x}$$

No entanto, esta seria apenas uma recorrência para as FG dos números hipercubicos k-dimensionais, para a FG desses números, seguiremos apresentando as definições de Petersen (2015) a partir de uma importante identidades sobre os polinômios de Euler

$$E_k(x) = (1-x)^{k+1} \sum_{n \geq 0} (n+1)^k x^n$$

Dessa identidade, extraímos justamente as FG dos números hipercúbicos k -dimensionais, pois: $\frac{E_k(x)}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n \geq 0} (n+1)^k x^n$, ajustando os coeficientes, temos:

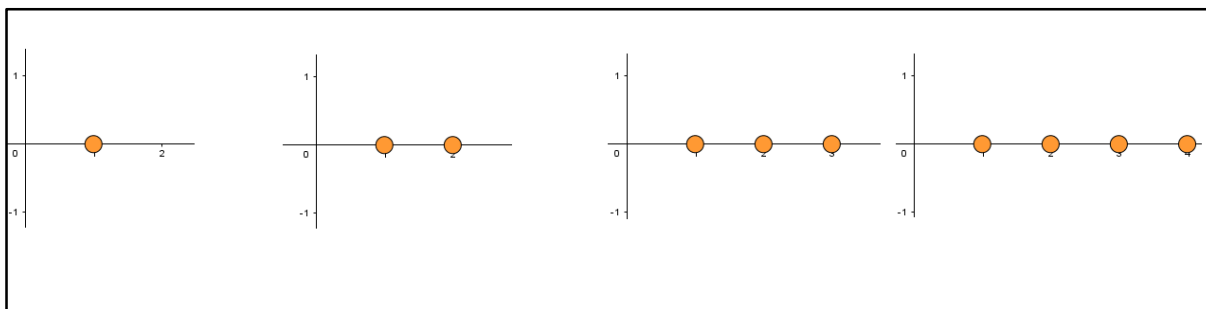
$$G[C^k(n), x] = \frac{x \cdot E_k(x)}{(1-x)^{k+1}}, |x| < 1$$

Que é a FG dos números hipercúbicos. Assim a visualização dos números e suas respectivas fórmulas podem ser vistas como.

Números lineares: recorrência $C^1(n+1) = C^1(n) + 1$, forma geral igual a $C^1(n) = n$ e

FG $G[C^1(n), x] = \frac{x}{(1-x)^2}$ a figura a seguir representa esses números.

Figura 61 - quatro primeiros números hipercúbicos para $k=1$



Fonte: autor

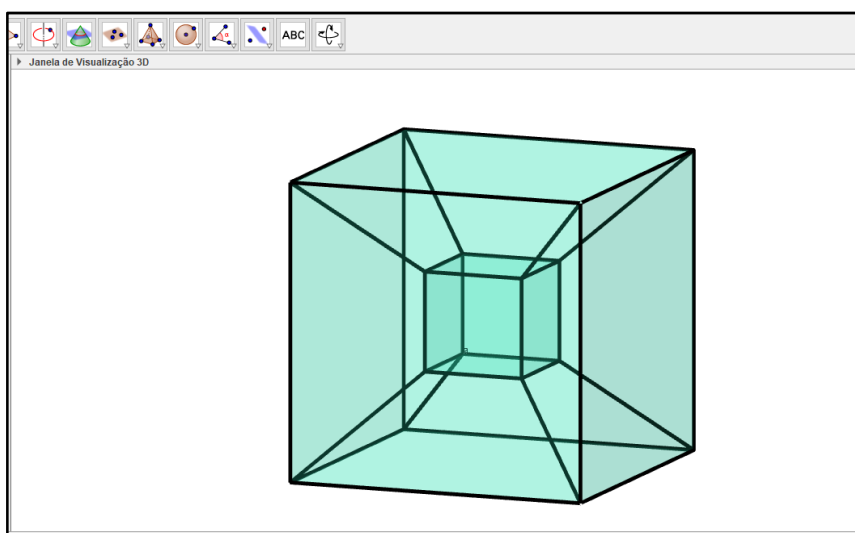
Para a segunda dimensão temos os números quadrados com recorrência $C^2(n+1) = C^2(n) + 2n + 1$, forma geral $C^2(n) = n^2$ e FG igual a $G[C^2(n), x] = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$, os

números cúbicos temos recorrência, termo geral e função geradora respectivamente

$$C^3(n+1) = C^3(n) + 3n^2 + 3n + 1, \quad C^3(n) = n^3 \text{ e } G[C^3(n), x] = \frac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4}.$$

Os números que representam a quarta dimensão dos números hipercúbicos, chamaremos de números tesseráticos, pois o tesseracto é o análogo quadridimensional do cubo, pode ser escrito como uma projeção de dois cubos ligados por seus vértices através de novas arestas, essa ligação cria um novo cubo, de modo que essa figura seja composta por oito cubos, sendo seis formados pela projeção das faces, como mostra a figura a seguir:

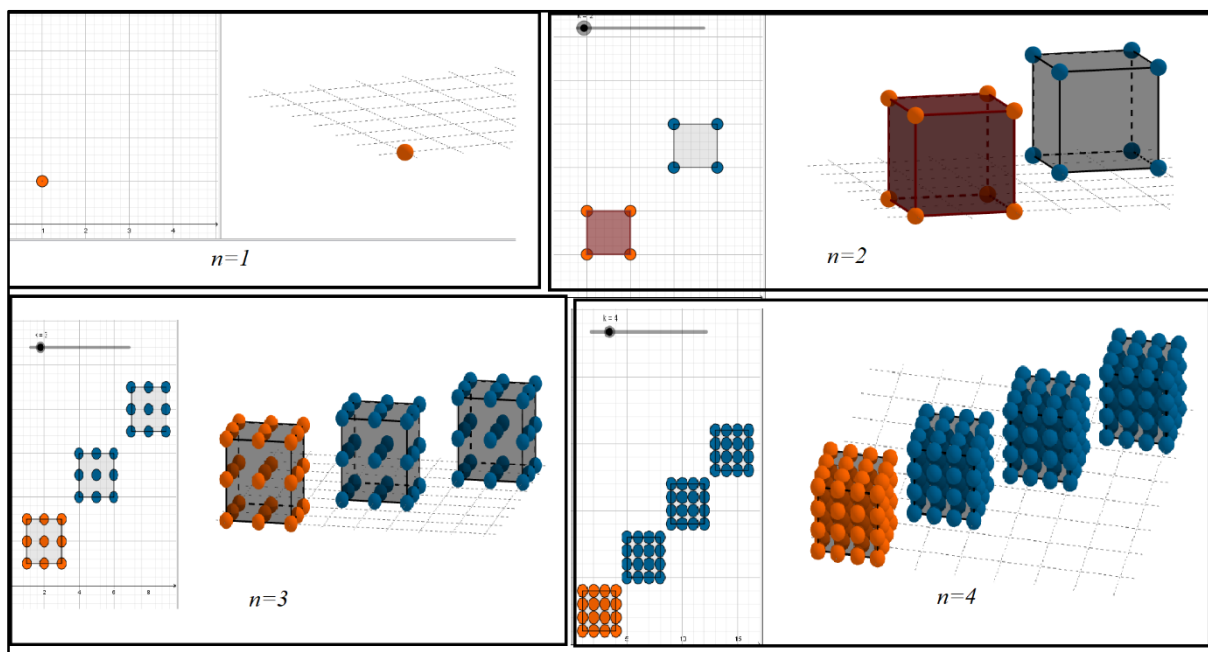
Figura 62 - representação do hipercubo 4D



Fonte: autor

Então, para a visualização desses números no SG, projetaremos os números cúbicos, de modo que na janela 2D apareçam os números cúbicos de modo planificado, conforme a figura:

Figura 63 - os quatro primeiros números hipercúbicos 4D



Fonte: do autor

Sua recorrência, termo geral e FG são, respectivamente:

$$C^4(n+1) = C^4(n) + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \quad C^4(n) = n^4 \quad \text{e} \quad G[C^4(n), x] = \frac{x(1+11x+11x^2+x^3)}{(1-x)^5},$$

A seguir, uma tabela com os primeiros números hipercúbicos k-dimensionais

Tabela 7 - os quinze primeiros números hipercúbicos para as sete primeiras dimensões

$C(n) \backslash K$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	4	8	16	32	64	128
3	3	9	27	81	243	729	2187
4	4	16	64	256	1024	4096	16384
5	5	25	125	625	3125	15625	78125
6	6	36	216	1296	7776	46656	279936
7	7	49	343	2401	16807	117649	823543
8	8	64	512	4096	32768	262144	2097152
9	9	81	729	6561	59049	531441	4782969
10	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000
11	11	121	1331	14641	161051	1771561	19487171
12	12	144	1728	20736	248832	2985984	35831808
13	13	169	2197	28561	371293	4826809	62748517
14	14	196	2744	38416	537824	7529536	105413504
15	15	225	3375	50625	759375	11390625	170859375

Fonte: autor

Para outras dimensões o SG não traria boas visualizações, entretanto pode se seguir a lógica das figuras para se entender como acontece esse crescimento de modo visual.

3.6.3 Números ortoplexos k -dimensionais

Neste seção, discutiremos a recorrência, fórmula para o termos geral e por função geradora, da classe de números figurados intitulado de números de politopo cruzado, esses números são discutidos no livro de Deza e Deza (2012) bem como seu crescimento dimensional porém para entender a estrutura que formam esse número recorreremos a escritos como o de Coxeter (1973) que trata do crescimento de politopos regulares bem como Conway e Burgiel (2016) que trata do detalhamento de politopos regulares.

Na geometria, define-se como politopo cruzado, qualquer figura geométrica convexa e regular, apresentada em uma dimensão k , com seus vértices delimitados no ponto ± 1 de cada eixo no espaço, ou seja, uma permutação dos valores $(\pm 1, 0, 0, 0 \dots 0)$ do espaço k -dimensional, Coxeter (1973) define como uma das principais e fundamentais propriedades dos espaços para se obter esse tipo de figura:

A possibilidade de desenharmos linhas mutuamente perpendiculares através de quaisquer pontos O ; k pontos equidistantes de O ao longo destas linhas são evidentemente os vértices de um simplex¹. Produzindo as linhas além de O , obtemos um quadro cartesiano de cruz. os pontos equidistantes de O em ambas as direções são os vértices $2n$ de outra figura importante, o politopo cruzado. (Coxeter, 1973, p. 121).

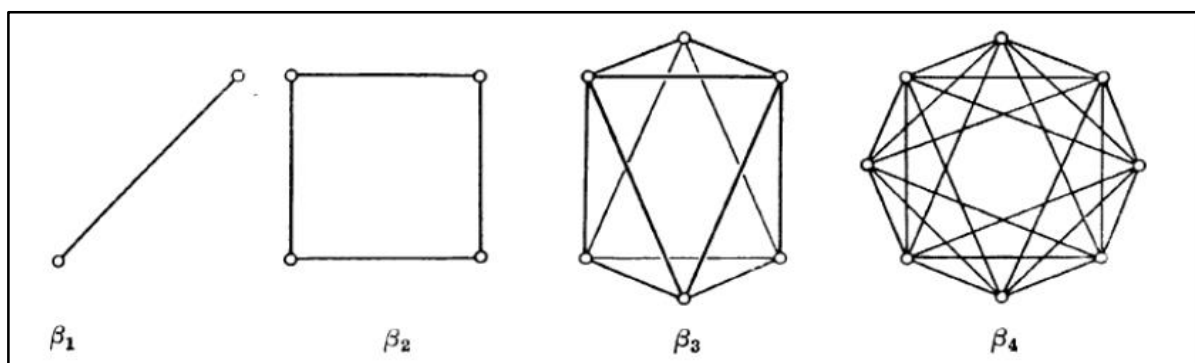
Quando escrito na reta ou seja, na dimensão 1, essa linha forma o segmento, portanto o politopo cruzado da primeira dimensão é um segmento unitário, quando dispostos no plano, ligam-se os pontos $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$, obtemos um losango ou quadrado, essa figura representa o 2-politopo cruzado ou politopo cruzado da segunda dimensão. No espaço tridimensional a ligação dos pontos $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$ e $(0, 0, \pm 1)$ pelo casco convexo, formam um octaedro regular ou uma bipirâmide quadrada, as figuras das dimensões superiores são chamadas de hiperoctaedro, vale mencionar que autores como Conway e Burgiel (2016) chamam esse tipo de figura de k -ortoplexos, enquanto nos símbolos de Schläfli, eles aparecem como $\{3, 3, 3, \dots, 4\}$, Coxeter batizou essa família com o símbolo β_n como trataremos do espaço multidimensional como k -dimensional, usamos para um politopo cruzado desta dimensão o símbolo β_k .

Em relação as estruturas que compõem politopo, ou seja, vértices, arestas, faces e k -faces, uma vez que todas essas estruturas podem ser classificadas como facetas, temos que os vértices de um k -ortoplexo é sempre da forma $2k$, pelo fato da figura formada sempre partir

¹ É a definição de segmento de reta unitário, triângulo ou tetraedro para uma dimensão k , é a figura mais simples que pode ser formada em uma dimensão arbitrária, o triângulo é o 2-simplex, já o tetraedro é o 3-simplex.

para lados opostos no espaço em que está sendo escrita, em relação as $(k-1)$ -facetas, ou seja os componentes dimensionais da dimensão imediatamente inferior, são sempre os $(k-1)$ -simplex, ou seja, dado um politopo cruzado k -dimensional, suas $(k-1)$ -facetas são simplexes $(k-1)$ -dimensionais, por exemplo o quadrado, em que suas facetas, no caso, suas arestas são segmento enquanto o octaedro que é uma figura tridimensional, tem suas facetas (faces) formadas por triângulos (simplexos bidimensionais) .

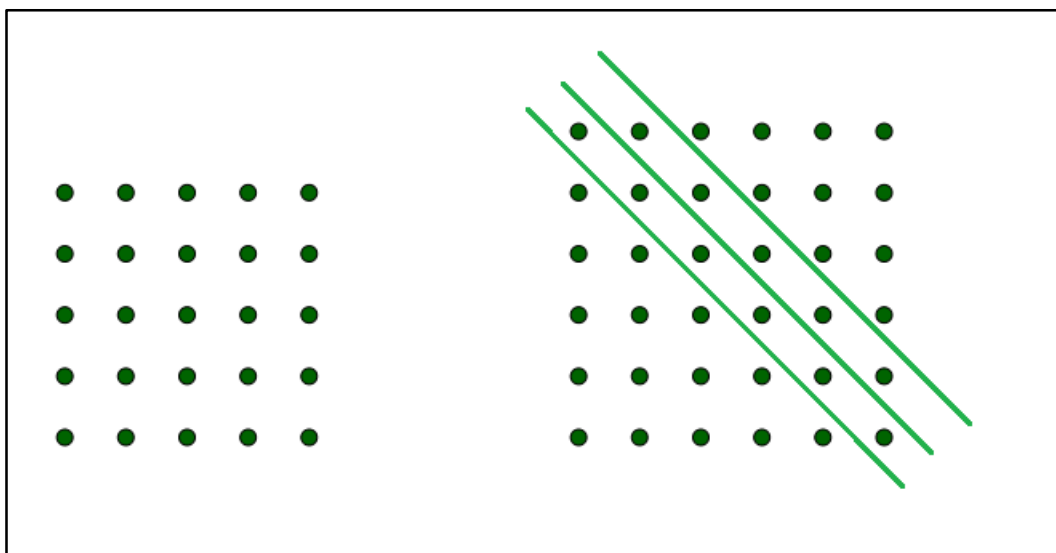
Figura 64 - representação do crescimento dimensional dos ortoplexos



Fonte: Coxeter (1973, p.121)

Analisaremos a recorrência desta família de sequências observando o crescimento proposto pela figura a seguir e em seguida pelo seu análogo em outra dimensão:

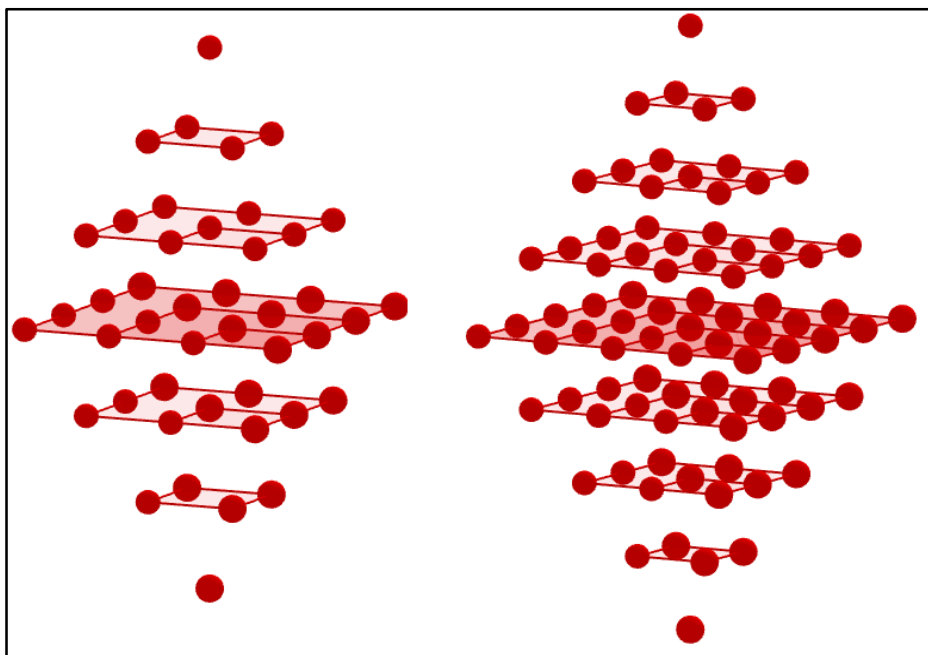
Figura 65 - representação do crescimento dos números quadrados



Fonte: elaboração do autor

Estes números representam respectivamente o quinto e sexto número quadrado, para formar o próximo número quadrado necessitaremos sempre adicionar duas linhas de pontos, uma no centro da figura e a outra do lado em que não está a linha que antes era o centro, esta mesma configuração percebemos quando falamos dos número octaedrais, observe:

Figura 66 - crescimento de um ortoplexo 3D



Fonte: autor

Os números octaédricos também possuem a mesma formação, para o formar o próximo número octaédrico, precisamos adicionar dois números quadrados da mesma forma que fizemos com os quadrados, sempre no centro, usando o número que possui a mesma posição do que se quer formar e outro da forma $n-1$ que representa justamente o antigo número que se posicionava no centro, neste exemplo, para formar o quinto número octaédrico, precisamos adicionar ao quarto número octaédrico, o quarto e o quinto número quadrado. Ou seja sempre adicionamos os dois números n e $n-1$ número da dimensão imediatamente inferior, ou seja, se um número ortoplexo classificado como $O^k(n)$ tem sua forma de recorrência descrita como:

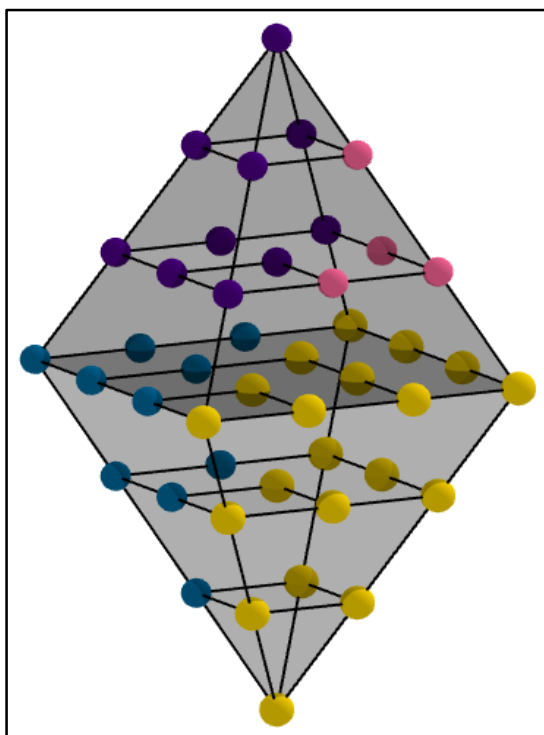
$$O^k(n+1) = O^k(n) + O^{k-1}(n) + O^{k-1}(n+1)$$

O termo geral para os número ortoplexos k -dimensionais também analisaremos os números estudados até aqui, ou seja, números lineares, quadrados e octaédricos. Para isto, usaremos uma classe já definida, a dos números simplexos, isto é, como formar números ortoplexos usando apenas números simplexos da mesma dimensão. Observando os números pelo seu termos geral, percebemos uma relação entre os números quadrados e triangulares, um número quadrado é formado pela soma de dois triangulares consecutivos, podemos formular isto como

$$S_4(n) = S_3(n) + S_3(n-1) \text{ de fato, temos } S_4(n) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2 \text{ para os}$$

números octaédricos podemos apresentar a figura a seguir e mostrar uma relação com os números tetraédricos:

Figura 67 - relação dos números octaedrias e tetraédricos



Fonte: elaboração do autor

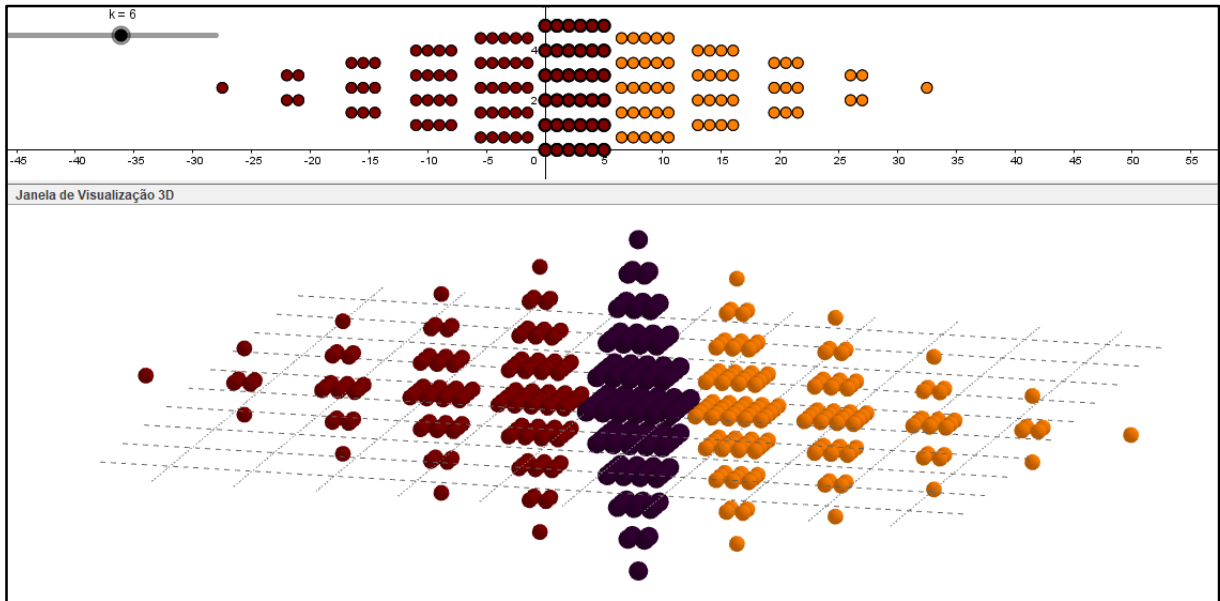
Percebemos na figura uma possível relação

$O(n) = S_3^3(n) + 2S_3^3(n-1) + S_3^3(n-2)$, $n > 2$ de fato, temos que:

$$\begin{aligned} O(n) &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{2(n-1)n(n+1)}{6} + \frac{(n-2)(n-1)n}{6} \\ &= \frac{n(n^2 + 3n + 2 + 2n^2 - 2 + n^2 - 3n + 2)}{6} \\ &= \frac{n(4n^2 + 2)}{6} = \frac{n(2n^2 + 1)}{3} \end{aligned}$$

Sobre os números ortoplexos quadridimensionais também chamados de números hiperoctaédricos podemos descrever sua forma geral usando números de pentatope, ou seja, números simplexos quadridimensionais, a figura a seguir, apresenta esta relação:

Figura 68 - representação de um número ortoplexo 4D e sua relação com os números de pentatope



Fonte: autor

Observando os extremos deste número hiperoctaédrico, percebemos a formação de pilhas de números tetraédricos formando assim números de pentatope, estas pilhas são quatro de cada lado, totalizando oito pilhas no total, estão distribuídas da seguinte maneira:

$O^4(6) = S_3^4(6) + 3S_3^4(5) + 3S_3^4(4) + S_3^4(3)$, sugerindo então a fórmula geral:

$$O^4(n) = S_3^4(n) + 3S_3^4(n-1) + 3S_3^4(n-2) + S_3^4(n-3)$$

Sabemos que tal fórmula deverá ser provada, por isso apresentaremos a forma geral para os números ortoplexos k -dimensionais, com base nas fórmulas apresentadas até o momento, um número ortoplexo pode ser apresentado da seguinte maneira:

Assim podemos propor uma fórmula que possa representar os números ortoplexos a

partir dos números simplexos da seguinte maneira: $O^k(n) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \binom{n+i}{k}$ com $k > 1$,

$n > 0$ e $O^k(1) = 1$, para fazermos a prova por indução usaremos a recorrência dos ortoplexos e a forma geral e recorrência dos números simplexos, já provados assim, pela recorrência dos

ortoplexos temos; $O^k(n+1) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \binom{n+i}{k} + \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-2}{i} \binom{n+i}{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-2}{i} \binom{n+1+i}{k-1}$ dos

dois últimos termos podemos desenvolver esses somatórios para observar uma propriedade dos números binomiais, assim temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-2}{i} \binom{n+i}{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-2}{i} \binom{n+1+i}{k-1} &= \binom{k-2}{0} S_3^{k-1}(n) + \binom{k-2}{1} S_3^{k-1}(n+1) + \dots \\
&+ \binom{k-2}{k-2} S_3^{k-1}(n+k-2) + \binom{k-2}{0} S_3^{k-1}(n+1) \\
&+ \binom{k-2}{1} S_3^{k-1}(n+2) + \dots + \binom{k-2}{k-2} S_3^{k-1}(n+1+k-2) \\
&= S_3^{k-1}(n) + \left[\left(\binom{k-2}{0} + \binom{k-2}{1} \right) S_3^{k-1}(n+1) \right] + \dots \\
&+ \left[\left(\binom{k-2}{k-2} + \binom{k-2}{k-1} \right) S_3^{k-1}(n+k-2) \right] \\
&+ \binom{k-2}{k-2} S_3^{k-1}(n+1+k-2)
\end{aligned}$$

Ou

seja,

$$\sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-2}{i} \binom{n+i}{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-2}{i} \binom{n+1+i}{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \binom{n+1+i}{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} S_3^{k-1}(n+1)$$

Adicionando ao primeiro termo da recorrência já modificado, temos:

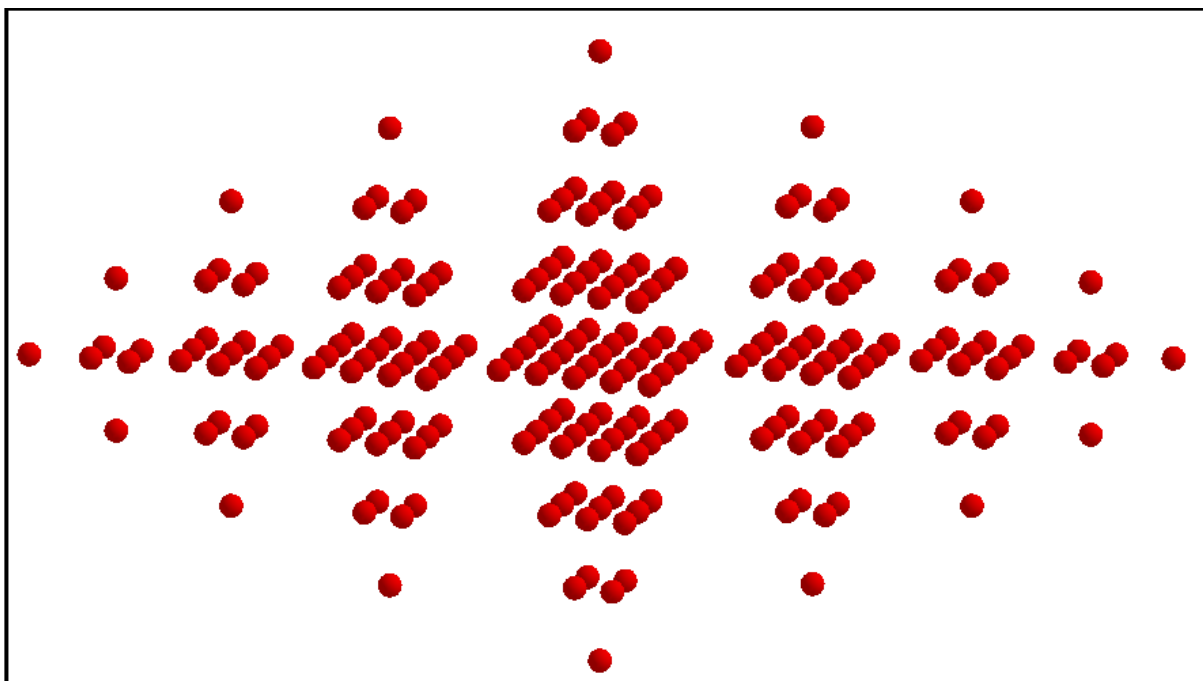
$$O^k(n+1) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (S_3^k(n) + S_3^{k-1}(n+1)) \text{ como já vimos, nos números simplexos}$$

$$S_3^k(n) + S_3^{k-1}(n+1) = S_3^k(n+1) \text{ ou seja } O^k(n+1) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} S_3^k(n+1) \text{ ou ainda:}$$

$$O^k(n+1) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \binom{n+1+i}{k}$$

Para finalizar, descreveremos a função geradora dos números ortoplexos para a quarta dimensão, os números hiperoctaédricos, que são formados a partir do empilhamento de números octaédricos da mesma maneira que os números octaédricos utilizam empilhamento de números quadrados, a representação por meio de figura só pode ser representada utilizando uma disposição tridimensional de empilhamentos de números octaédricos.

Figura 69 - quinto número hiperoctaédrico 4-dimensional



Fonte: elaboração do autor

A figura apresenta uma representação em que é possível ver um empilhamento de números octaédricos consecutivos, no caso a base é central e representa o quinto número octaédrico, a partir disso, os números octaédricos anteriores são colocados em ambos os lados da figura, gerando uma bipirâmide com vértices na quarta dimensão ortogonal as outras três, do mesmo modo que acontece com números octaédricos e quadrados.

Os primeiros números hiperoctaédricos 4-dimensionais, são: (1, 8, 33, 96, 225, 456, 833, 1408, 2241, 3400, 4961, 7008, 9633,...) sequência com o código *A014820* na *Oeis*.

Para encontrar a função geradora dos números hiperoctaédricos, seguiremos os mesmos procedimentos usados para obter a função geradora dos números octaédricos, que consiste em três passos:

1- obter a função geradora do somatório dos números octaédricos, chamaremos esta sequência de Q^4

2- encontrar a função geradora do somatório dos números octaédricos cujo coeficiente represente um número que esteja a uma posição a menos que o expoente de x

3- adicionar as duas funções encontradas

Para o primeiro passo temos que:

$$\begin{aligned}
& G[O^3(n), x] \cdot G[L(n), x] \\
&= \frac{x(1+x)^2}{(1-x)^4} \cdot \frac{1}{(1-x)} \\
&= (x + 6x^2 + 19x^3 + \dots + O(n)x^n) \cdot (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) \\
&= x + (1+6)x^2 + (1+6+19)x^3 + \dots + (1+6+19+\dots + O(n)^n)x^n \\
&= \frac{x(1+x)^2}{(1-x)^5} = G[Q^4(n), x]
\end{aligned}$$

Para o segundo passo temos:

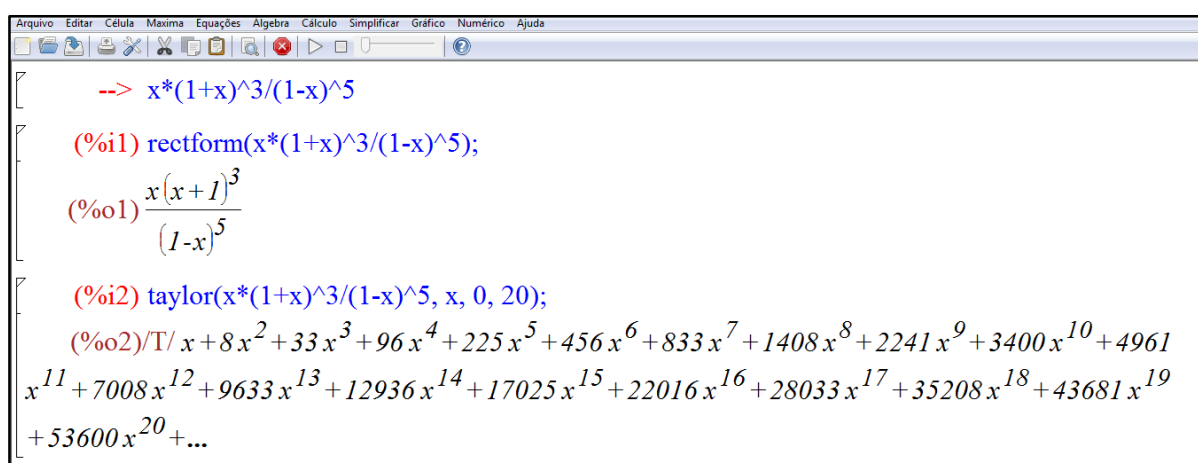
$$G[Q^4(n-1), x] = G[Q^4(n), x] \cdot x = \frac{x(1+x)^2}{(1-x)^5} \cdot x = \frac{x^2(1+x)^2}{(1-x)^5}$$

Por fim, somaremos as duas funções encontradas:

$$\begin{aligned}
G[O^4(n), x] &= G[Q^4(n), x] + G[Q^4(n-1), x] \\
&= \frac{x(1+x)^2}{(1-x)^5} + \frac{x^2(1+x)^2}{(1-x)^5} \\
&= \frac{x(1+x)(1+x)^2}{(1-x)^5} \\
&= \frac{x(1+x)^3}{(1-x)^5}
\end{aligned}$$

Para confirmar temos a figura a seguir:

Figura 70 - função geradora dos números hiperoctaédricos 4-dimensionais, por meio do software máxima



```

--> x*(1+x)^3/(1-x)^5
(%i1) rectform(x*(1+x)^3/(1-x)^5);
(%o1)  $\frac{x(x+1)^3}{(1-x)^5}$ 
(%i2) taylor(x*(1+x)^3/(1-x)^5, x, 0, 20);
(%o2)  $\frac{1}{5}x + 8x^2 + 33x^3 + 96x^4 + 225x^5 + 456x^6 + 833x^7 + 1408x^8 + 2241x^9 + 3400x^{10} + 4961x^{11} + 7008x^{12} + 9633x^{13} + 12936x^{14} + 17025x^{15} + 22016x^{16} + 28033x^{17} + 35208x^{18} + 43681x^{19} + 53600x^{20} + \dots$ 

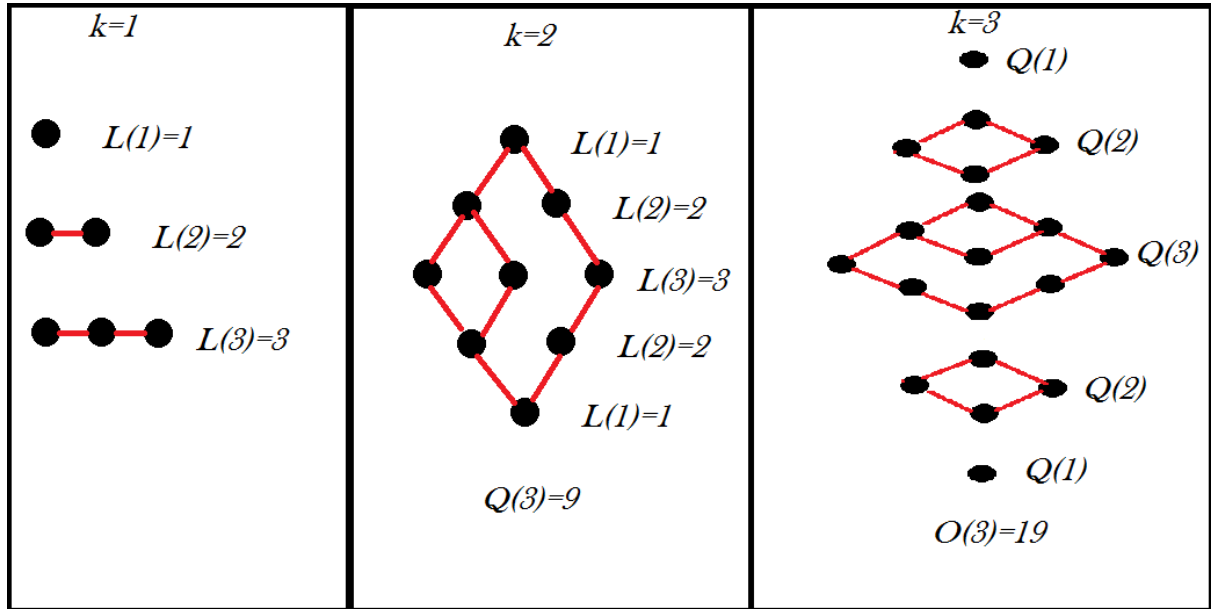
```

Fonte: elaboração dos autores

Para a generalização dos ortoplexos temos a figura a seguir que apresenta um quadro com o crescimento dimensional do terceiro números ortoplexo de algumas dimensões como

uma soma de empilhamentos de ortoplexos da dimensão imediatamente inferior, formando bipirâmides

Figura 71 - representação do crescimento dimensional dos ortoplexos



Fonte: autor

De uma maneira geral, percebemos um padrão a respeito das funções geradoras dos números hipertetraédricos com base na dimensão k em que se encontram. Para $k = 1$ temos a

função definida por $\frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x(1+x)^0}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + \dots + nx^n, |x| < 1$, para $k = 2$ temos os

números quadrados cuja função geradora é dada por $\frac{x(1+x)^1}{(1-x)^3} = x + 4x^2 + \dots + (O^2(n))x^n, |x| < 1$

. Para os números octaédricos, ou seja, os ortoplexos tridimensionais, temos a função geradora

definida como $\frac{x(1+x)^2}{(1-x)^4} = x + 6x^2 + \dots + (O^3(n))x^n, |x| < 1$ e, por fim, temos definida também

a função geradora para os números hiperoctaédricos, 4-dimensionais, dada por

$\frac{x(1+x)^3}{(1-x)^5} = x + 8x^2 + \dots + (O^4(n))x^n, |x| < 1$. Tal fato sugere como uma hipótese de indução que

para uma certa dimensão k a função geradora é dada por $\frac{x(1+x)^{k-1}}{(1-x)^{k+1}}$, como temos essa fórmula

válida para $k = 1$, vamos verificar se é válida para uma dimensão $k + 1$, ou seja, seguiremos os três passos citados anteriormente partindo de uma dimensão k .

Para o primeiro passo, buscaremos a função geradora do somatório dos números ortoplexos k -dimensionais, ou seja, se $G[O^k(n), x] = \frac{x(1+x)^{k-1}}{(1-x)^{k+1}}$, então a função somatório é

dada por $G[Q^{k+1}(n), x] = \frac{x(1+x)^{k-1}}{(1-x)^{k+2}}$ em seguida tomaremos a função

$G[Q^{k+1}(n), x] \cdot x = G[Q^{k+1}(n-1), x] = \frac{x^2(1+x)^{k-1}}{(1-x)^{k+2}}$, por fim, temos que:

$$\begin{aligned} G[O^{k+1}(n), x] &= G[Q^{k+1}(n), x] + G[Q^{k+1}(n-1), x] \\ &= \frac{x(1+x)^{k-1}}{(1-x)^{k+2}} + \frac{x^2(1+x)^{k-1}}{(1-x)^{k+2}} \\ &= \frac{x(1+x)(1+x)^{k-1}}{(1-x)^{k+2}} \\ &= \frac{x(1+x)^{k-1+1}}{(1-x)^{k+1+1}} \end{aligned}$$

Assim, temos a função geradora dos números ortoplexos, também conhecidos como números de politopos cruzado ou números hiperoctaédricos k -dimensionais, dada por:

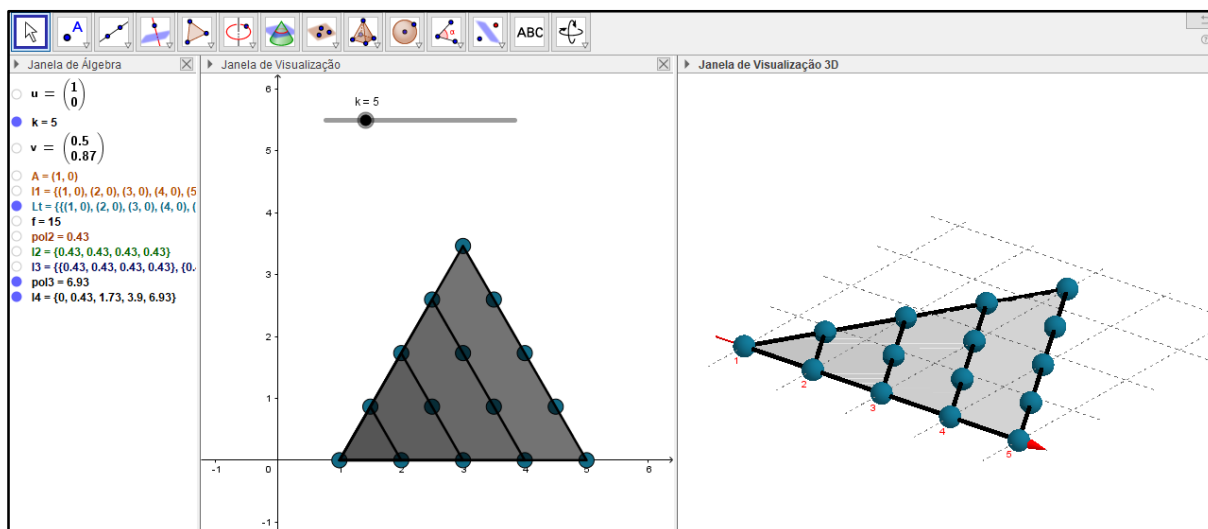
$$G[O^k(n), x] = \frac{x(1+x)^{k-1}}{(1-x)^{k+1}} = O^k(1)x + O^k(2)x^2 + O^k(3)x^3 + \dots + O^k(n)x^n, |x| < 1$$

3.7 Relação entre números figurados com o uso do *software* GeoGebra

Nesta seção, apresentaremos a construção de alguns números figurados a partir da construção de números triangulares, e seus análogo 3D, os números tetraédricos. O que propõe uma relação aritmética entre os números apresentados e números triangulares, base de todas as construções que serão mostardas nesta etapa

Para iniciarmos, apresentaremos os números triangulares com o uso do *software* GeoGebra, com sua relação de recorrência e termo geral, a figura a seguir representa a sequência mencionada já construída no GeoGebra

Figura 72- Quinto número triangular



Fonte: elaboração do autor

A recorrência dessa sequência pode ser vista na figura que representa o quinto número triangular, da imagem percebemos que para formarmos o próximo número triangular, precisamos adicionar o número triangular anterior a um número natural que representa a ordem do próximo número, ou seja $S_3(n+1) = S_3(n) + (n+1)$, $S_3(1) = 1$

Esta fórmula, que já fora apresentada nas seções anteriores, pôde ser vista agora de acordo com a visualização, bem como a forma de termo geral, que remete a soma dos números naturais sucessivos e resulta em $S_3(n) = \frac{n(n+1)}{2}$, fórmula esta, também já apresentada nas seções anteriores.

Para que a construção seja possível, é necessário usar comandos como “sequência” a partir de um ponto criado, por este ponto, cria-se uma sequência de outros pontos, que percorrem a aresta do polígono desejado, por fim, sobre esta lista de pontos que formam a aresta do polígono, criamos uma parte de lista formando um triângulo e preenchido assim a face do polígono desejado.

Este procedimento resulta em um triângulo de pontos, que formam os números triangulares, para criarmos outro polígono, usando os números triangulares, será preciso preencher este polígono com triângulos e assim perceberemos as relações que este novo número figurado tem com os números triangulares. Desta forma, apresentaremos, na sequência, os números quadrados e pentagonais, suas respectivas fórmulas de termo geral e a forma para a construção de outros números usando a sequência de números triangulares.

3.7.1 Construção de números figurados planos a partir de números triangulares

Os números quadrados formam a sequência (1, 4, 9, 16, ...) e tem sua forma geral descrita por, Deza & Deza (2012) como $S_4(n) = n^2$

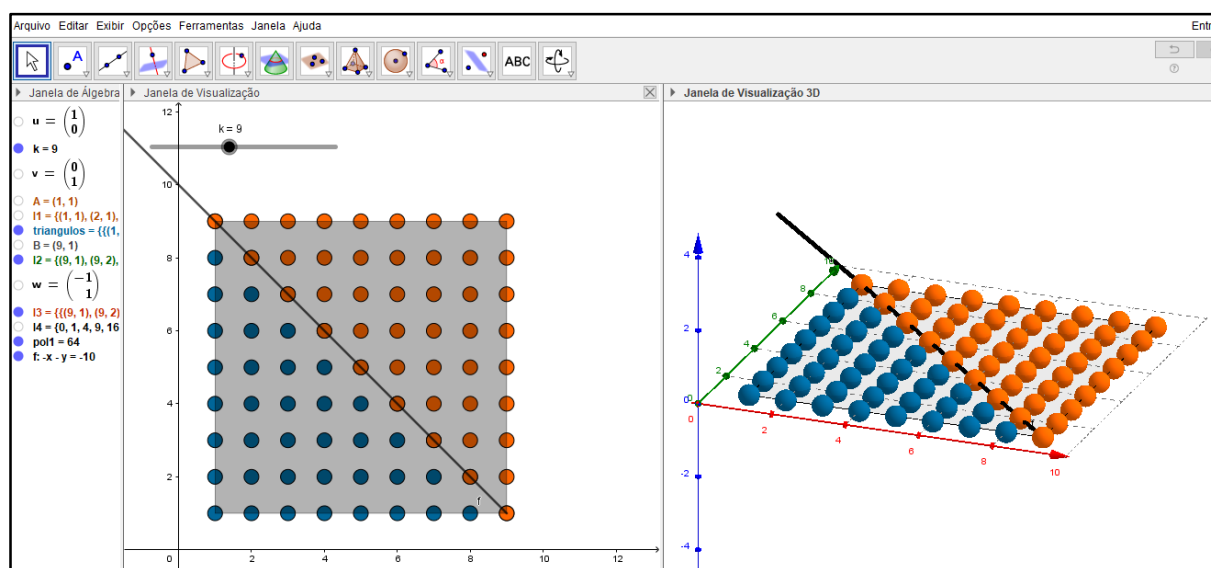
Proposição 1: todo número quadrado é a soma de dois números triangulares consecutivos.

Prova:

$$\begin{aligned} S_4(n) &= n^2 \\ &= \frac{2n^2}{2} = \frac{n^2 + n^2 + n - n}{2} = \frac{n^2 - n + n^2 + n}{2} = \frac{n(n-1) + (n+1)n}{2} = S_3(n) + S_3(n+1) \end{aligned}$$

Esta proposição já havia sido demonstrada neste trabalho, porém com o recurso da visualização pelo SG fica perceptível esta relação, conforme a figura a seguir:

Figura 73 - Nono número quadrado como soma de dois números triangulares



Fonte: elaboração do autor

Percebemos dois triângulos retângulos, que são números triangulares e uma semirreta indicando que a propriedade pode ser percebida pela figura em questão.

Os números pentagonais, são os números que formam a sequência (1, 5, 12, 22, ...) , assim, definimos como $S_5(1) = 1, S_5(2) = 5, S_5(3) = 12, S_5(4) = 22$, de modo que $S_5(n) = \frac{3n^2 - n}{2}$

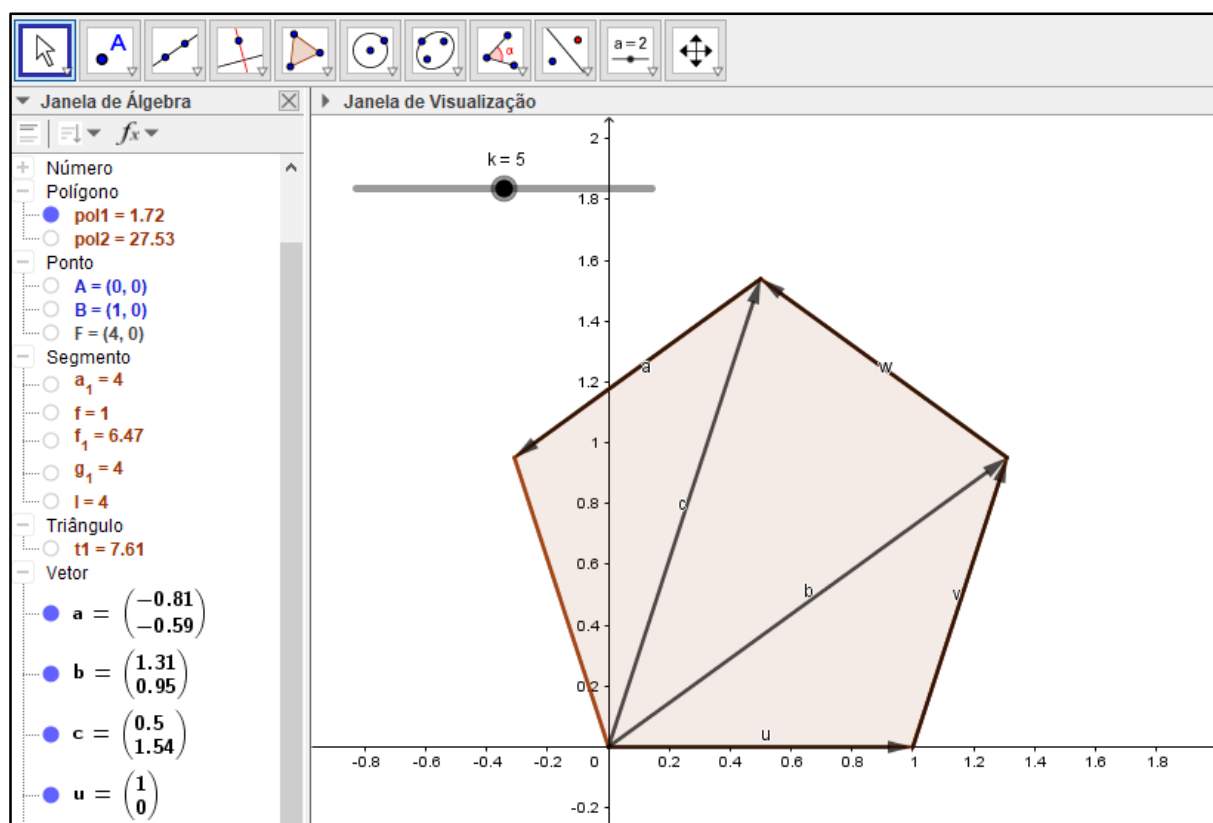
Proposição 2: o n -ésimo número pentagonal é formado pela soma de três $(n-1)$ -ésimos números triangulares mais n .

Prova:

$$3 \cdot S_3(n-1) + n = 3 \cdot \left(\frac{(n-1)n}{2} \right) + n = n \cdot \left(\frac{3(n-1) + 2}{2} \right) = n \left(\frac{3n-1}{2} \right) = \frac{3n^2 - n}{2}$$

Para a construção de números pentagonais, deveremos criar três listas de números triangulares, acrescidos de uma lista de n pontos, para isso deveremos transladar vetores pelas listas de triângulos, observe que na seguinte figura a seguir, é feita a construção de um pentágono e entre seus pontos são formados vetores por onde as listas de pontos serão transladadas.

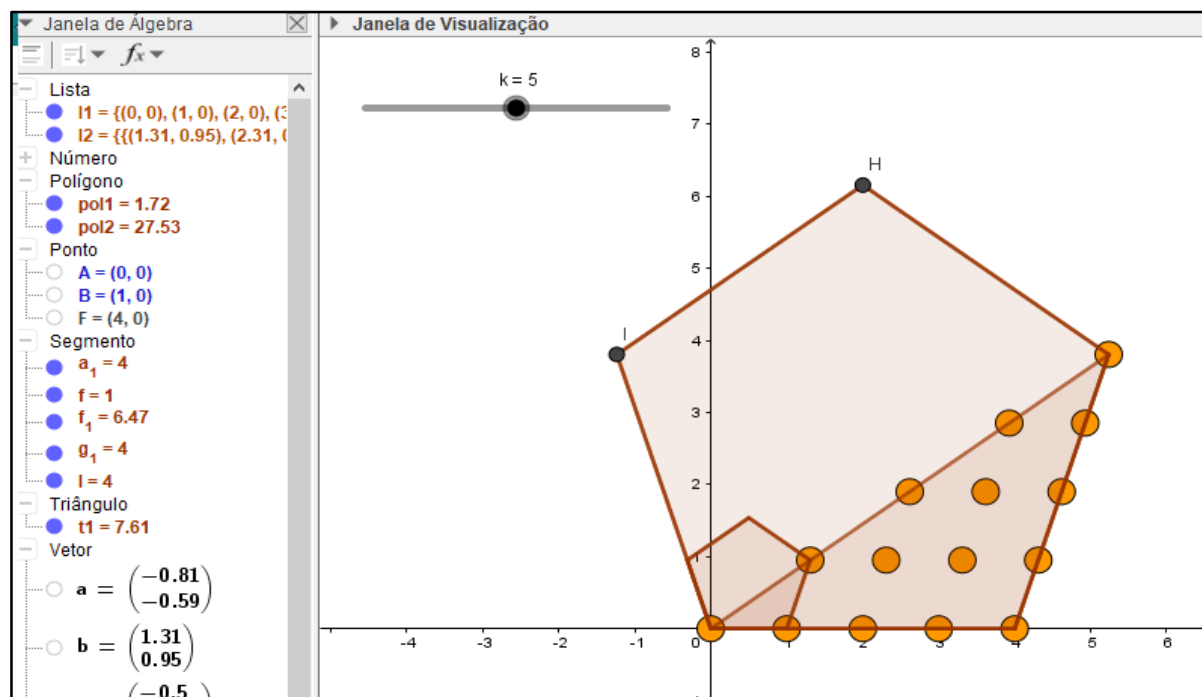
Figura 74 - esquema do polígono de construção dos números pentagonais



Fonte: elaboração do autor

Na figura, temos um pentágono de lado $1u$ (uma unidade de medida), e por esses lados construímos vetores por onde serão transladadas as listas de pontos ou triângulos, usando os mesmos comandos usados para construir números triangulares. A próxima figura apresentará uma lista de triângulos pelos vetores u e v a figura gerada forma o primeiro triângulo dentro de um pentágono

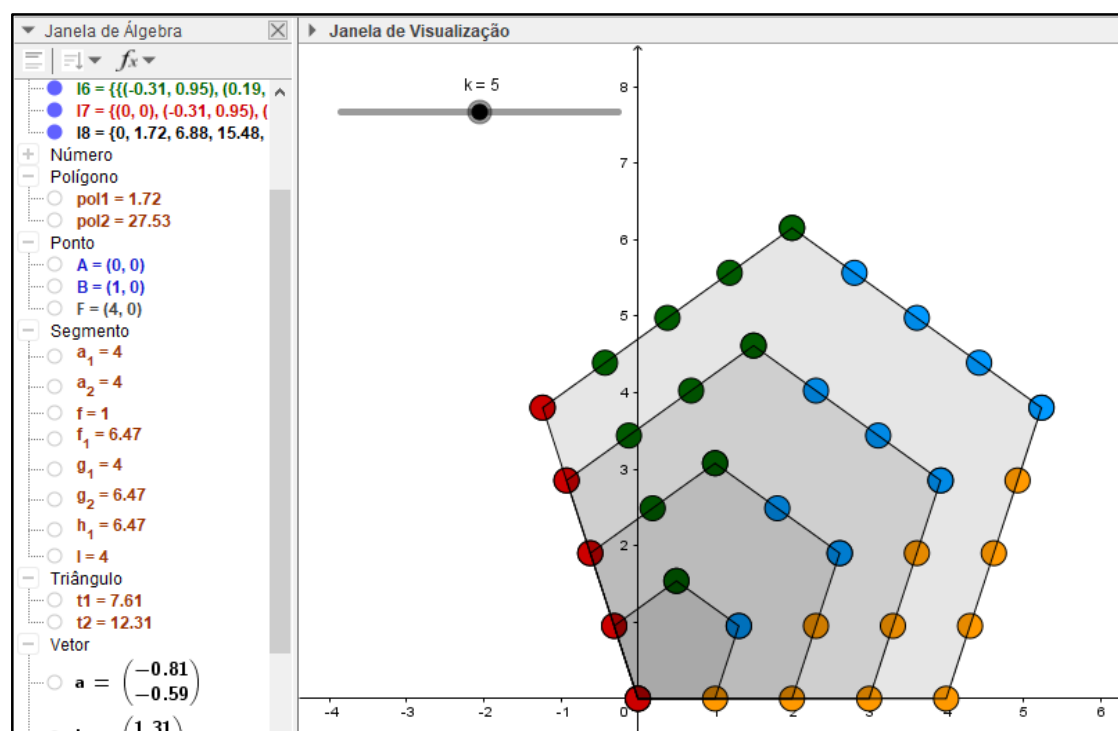
Figura 75 - construção de uma lista de pontos sobre o polígono base para os números pentagonais



Fonte: elaboração do autor

Seguindo o mesmo procedimento para a outras listas podemos perceber que elas formarão, de fato, o pentágono e a sequência de números pentagonais.

Figura 76 - Quinto número pentagonal

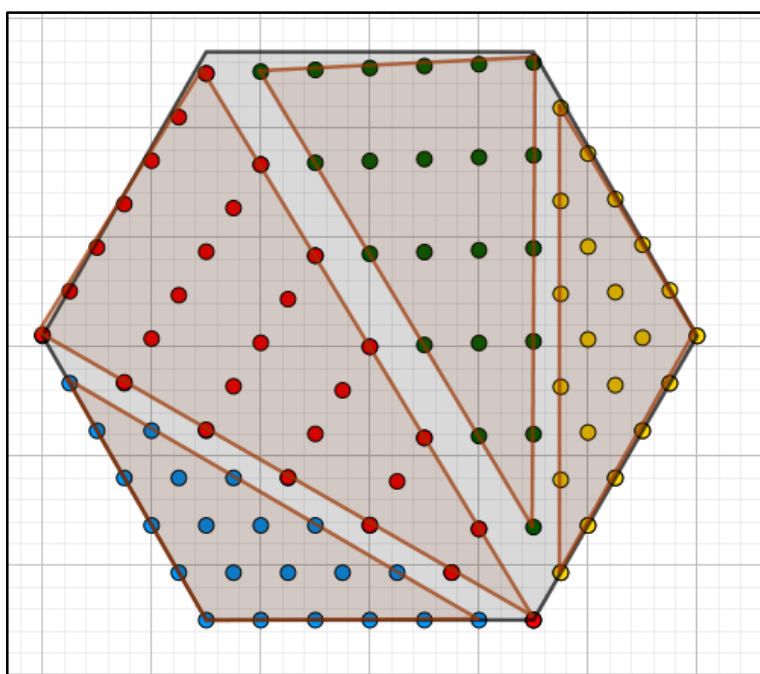


Fonte: elaboração dos autores

A figura apresenta a proposição 2, com os números triangulares e a linha com n pontos, diferenciadas por cores, as linhas que cobrem cada lista de pontos, define a sucessão de números pentagonais conforme a sequência apresentada anteriormente. Contudo, esta propriedade não apresenta somente números triangulares, pois traz uma linha de n pontos, porém devemos observar que $S_3(n) = S_3(n-1) + n, n > 1, S_3(1) = 1$ por isso a relação entre números pentagonais e triangulares ainda pode ser reescrita como $S_5(n) = S_3(n) + 2S_3(n-1), n > 1$

Desta forma, poderemos construir também números hexagonais, heptagonais e assim por diante, bastando assim, definir vetores por onde as lista irão transladar, para apresentar a relação entre os números hexagonais e triangulares, segue a figura:

Figura 77 - relação dos números hexagonais e triangulares



Fonte: autor

Esta configuração de números hexagonais e triangulares é dada por $S_6(n) = S_3(n) + 3S_3(n-1), n > 1, S_3(1) = 1, S_6(1) = 1$ que resulta de fato na fórmula dos números hexagonais, com isso, podemos construir a fórmula dos números m -gonais a partir dos números triangulares, perceba que:

$$S_3(n) = S_3(n) + 0S_3(n-1), n > 1, S_3(1) = 1$$

$$S_4(n) = S_3(n) + 1S_3(n-1), n > 1, S_3(1) = 1, S_4(1) = 1$$

$$S_5(n) = S_3(n) + 2S_3(n-1), n > 1, S_3(1) = 1, S_5(1) = 1$$

$$S_6(n) = S_3(n) + 3S_3(n-1), n > 1, S_3(1) = 1, S_6(1) = 1$$

Ou seja, os números m -gonais podem ser escritos como:

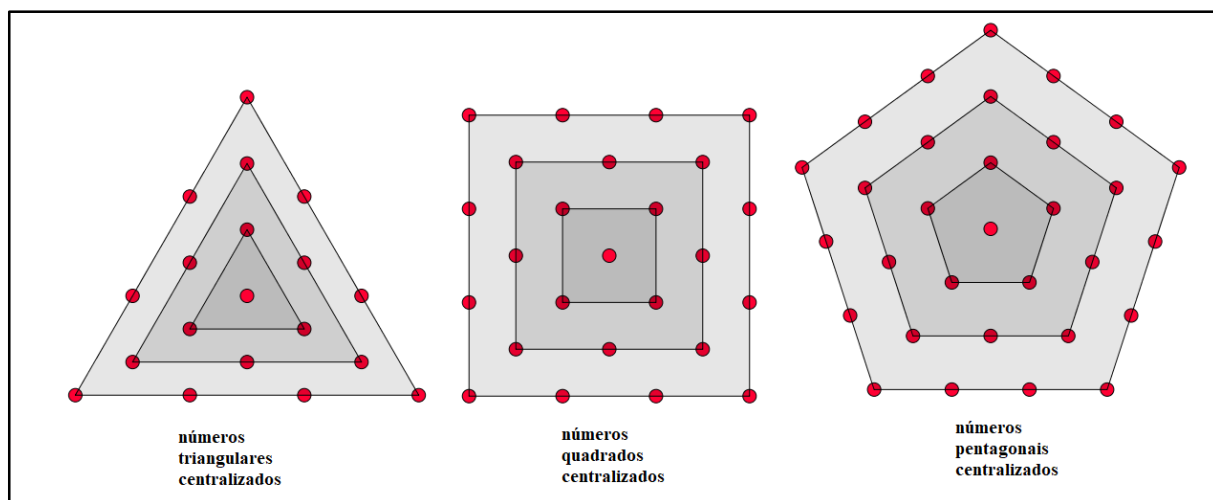
$$S_m(n) = S_3(n) + (m-3)S_3(n-1), n > 1, S_3(1) = 1, S_m(1) = 1$$

De fato, seguir que:

$$\begin{aligned} S_m(n) &= S_3(n) + (m-3)S_3(n-1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (m-3)\frac{(n-1)n}{2} \\ &= \frac{n}{2}(n+1+mn-m-3n+3) \\ &= \frac{n}{2}mn - 2n - m + 4 \\ &= \frac{n((m-2)n-m+4)}{2} \end{aligned}$$

Para números figurados planos de configurações diferentes dos números poligonais, devemos entender a estrutura da figura formada pela sequência dada, por exemplo, os números poligonais centralizados são formados por um ponto central e camadas de pontos ao redor deste, formando polígonos, os números que formam essas sequências são chamados de: números triangulares centralizados, quadrados centralizados e assim por diante, a figura a seguir apresenta alguns números poligonais centralizados.

Figura 78 - Exemplo de números poligonais centralizados



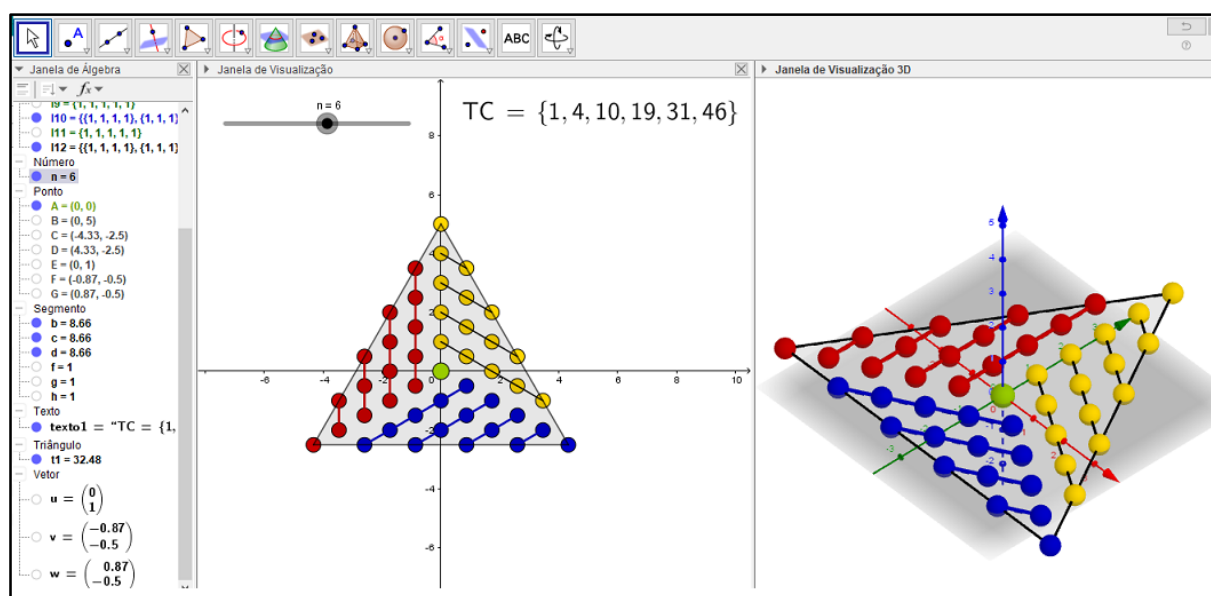
Fonte: elaboração dos autores

Esses números também trazem algumas propriedades com os relacionam com números triangulares, por isso também é possível construir estas sequências com o arrimo do *software GeoGebra*, para isso, apresentaremos os números triangulares, e sua fórmula de termo geral.

Definiremos a sequência dos números triangulares centralizados, dada por $(1, 4, 10, 19, \dots)$ como $SC_3(1) = 1, SC_3(2) = 4, SC_3(3) = 10, \dots$ e, percebemos que: $SC_3(1) = 1,$

$SC_3(2) = 1 + 3 \cdot 1 = 1 + 3S_3(1)$, $SC_3(3) = 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 1 + 3 \cdot (1 + 2) = 1 + 3S_3(2)$, desta forma $SC_3(n) = 1 + 3S_3(n-1)$, $SC_3(1) = 1$, esta fórmula pode ser apresentada usando o GeoGebra fazendo um ponto central e gerando ao redor deste, três listas de números triangulares, cada lista poderá partir dos vértices, a figura a seguir, representa um número triangular centralizado, construído a partir dessa propriedade, vale ressaltar que foram usados alguns recursos extras, como listas de segmentos, lista com alguns termos da sequência, cores variadas, tudo isso apenas para aprimorar a visualização, no entanto é possível observar as três listas de números triangulares com clareza, lembrando que para construir esses números, foram usados apenas as mesmas listas de números triangulares, transladadas pelos vetores que partem do ponto central.

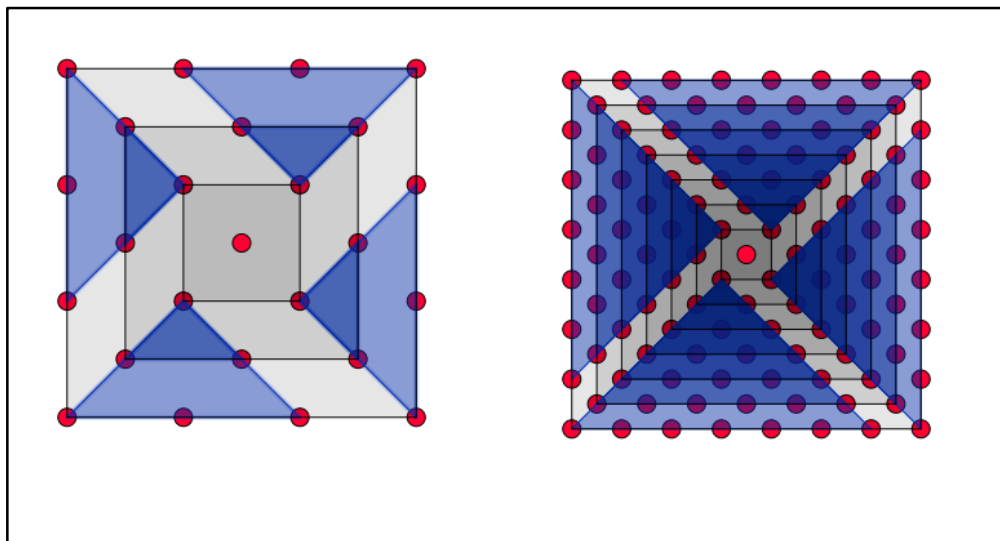
Figura 79 - Sexto número triangular centralizado



Fonte: elaboração do autor

Na figura acima, podemos observar que cada lista de números triangulares, partiu de cada vértice do triângulo, ou seja é possível usar a mesma noção para construir outros números figurados poligonais centralizados, com isso também poderemos estabelecer esta fórmula com a ajuda do SG, e compararmos com a fórmula apresentada na seção 3.4.2, apresentaremos a construção de alguns números figurados centralizados a seguir, começando pelos números quadrados centralizados e sua relação com números triangulares.

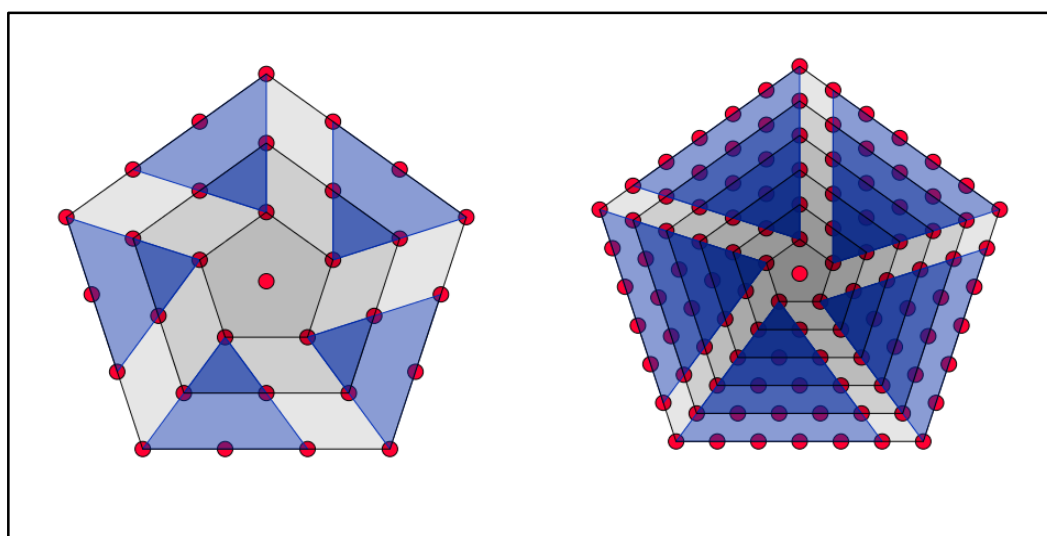
Figura 80 - números quadrados centralizados e a relação com números triangulares



Fonte: autor

Pela figura podemos perceber a relação dos números quadrados centralizados e números triangulares, juntamos a informação contida na figura relacionada a números triangulares centralizados e sua relação com números triangulares, apresentaremos a seguir os números pentagonais centralizados para apresentarmos uma possível forma geral para os números m -gonais centralizados.

Figura 81 - números pentagonais centralizados e sua relação com números triangulares



Fonte: autor

Esta relação é a mesma descrita na seção dos números poligonais centralizados e portanto sua fórmula geral já traz consigo a relação de números m -gonais centralizados e números triangulares, ou seja:

$$\begin{aligned}
SC_3(n) &= 1 + 3(S_3(n-1)) \\
SC_4(n) &= 1 + 4(S_3(n-1)) \\
SC_5(n) &= 1 + 5(S_3(n-1)) \\
&\vdots \\
SC_m(n) &= 1 + m(S_3(n-1))
\end{aligned}$$

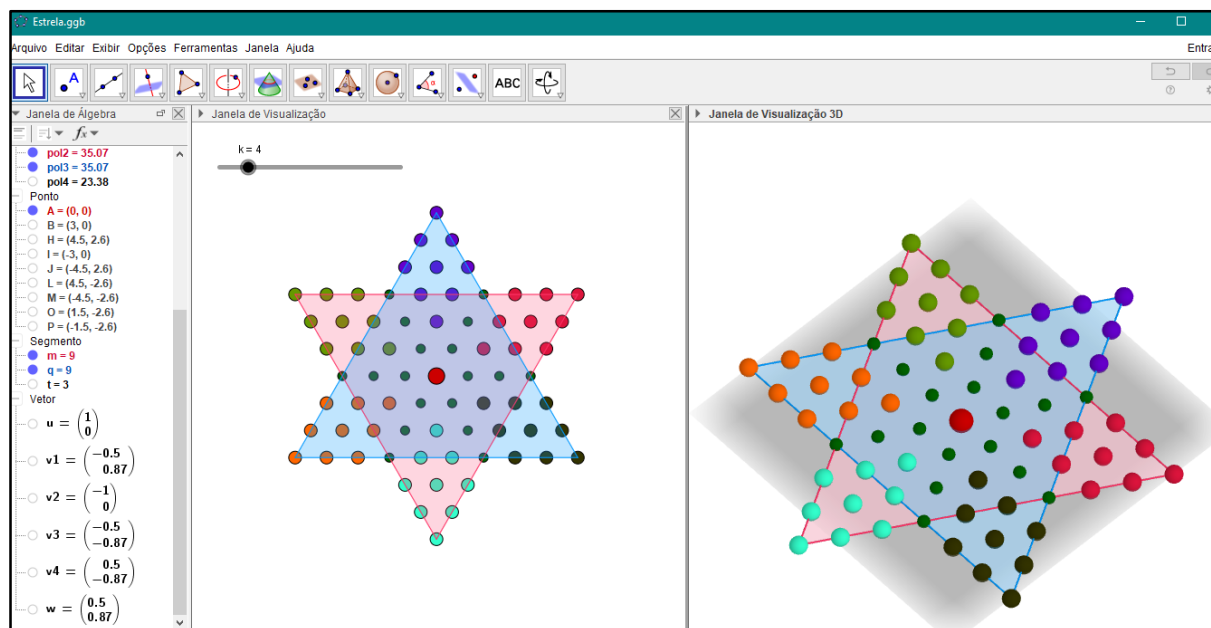
Os próximos números planos que também podemos construir usando números triabculares, são chamados de números estrela, os mesmo da sequência dos números dodecagonais centralizados, ou seja, sua representação tanto pode ser construída como um polígono de doze lados com um ponto centralizado, como também pode ser apresentada como uma estrela de seis pontas com um ponto também centralizado. Isto quer dizer que, como números poligonais centralizados já foram descritos em relação aos números triangulares, estes números também podem ser.

Os números estrela formam a sequência (1,13,37,73,121,...) , isso nos leva a supor que $E_{n+1} = 1 + 12T_n$, que é equivalente a fórmula apresentada por Deza & Deza (2012), para a construção desses números no SG, usaremos um ponto central e seis listas de números quadrados $S_4(n-1)$, adicionados a uma lista de pontos $L(n-1)$, sendo assim $E_n = 6S_4(n-1) + 6L(n-1)$, ou seja:

$$\begin{aligned}
E_n &= 1 + 6(S_4(n-1) + L(n-1)) \\
&= 1 + 6(S_3(n-1) + S_3(n-2) + L(n-1)) \\
&= 1 + 6(2S_3(n-1)) = 1 + 12S_3(n-1)
\end{aligned}$$

Assim, construindo as listas através dos vetores partindo do ponto central no sentido de cada vértice de um hexágono regular e gerando por estes uma lista de números quadrados, como já vimos, a relação entre estes números e os triangulares pode ser percebida pois os números quadrados são formados a partir de números triangulares também, temos então a seguinte figura:

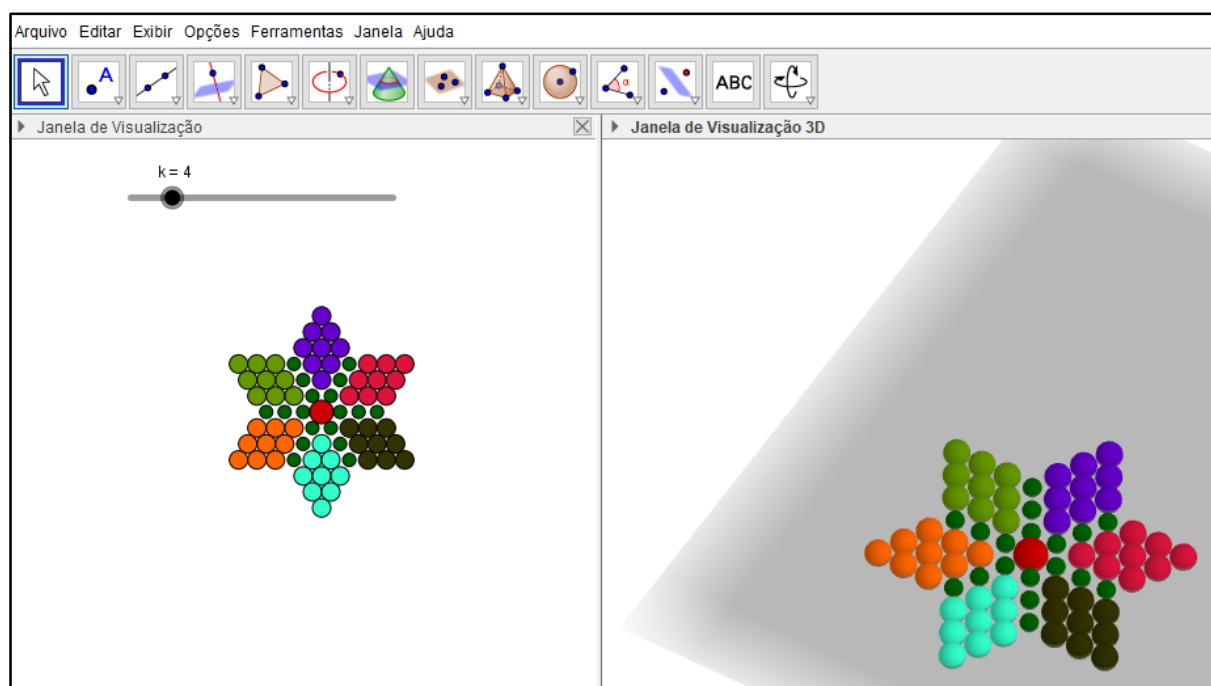
Figura 82 - Quarto número estrela



Fonte: elaboração do autor

Podemos observar na figura que as listas de números lineares, são formadas por pontos menores, apenas para melhorar a visualização, em outra figura, podemos observar a configuração com ênfase nos pontos e sem os polígonos.

Figura 83 - outra visão no software geogebra do quarto número estrela



Fonte: elaboração do autor

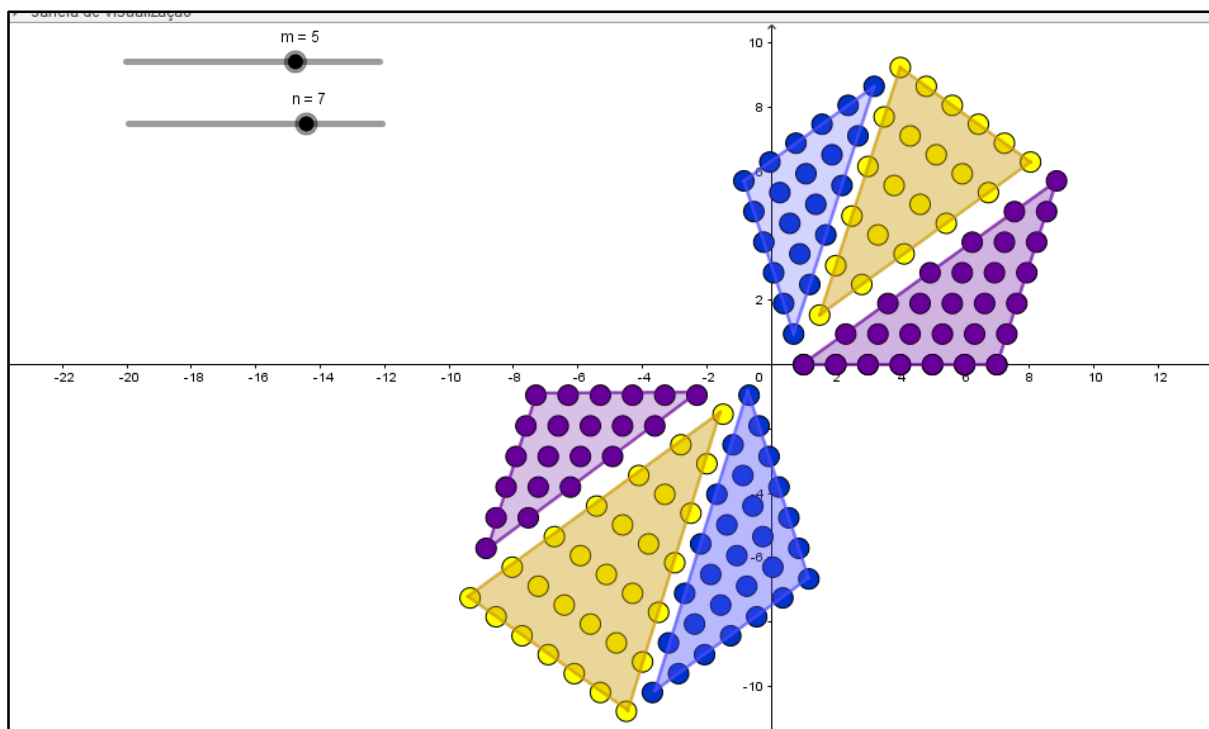
Na figura, podemos observar uma estrela bem definida, usando as mesmas configurações porém sem a necessidade de polígonos, também sem os eixos e malhas para que a figura se apresente apenas com as configurações de pontos que a formam, com isso, nessa

seção, mostramos que é possível construir diversas figuras partindo apenas da relação desse com números triangulares. Na próxima sessão trataremos das configurações que formam números figurados panos e poligonais com extensão dos índices para o conjunto dos números inteiros, e suas relações com números triangulares que permitam observar algumas propriedades importantes.

3.7.2 Construção dos números poligonais com extensão para índices negativos

Nesta seção descreveremos uma propriedade importante que relaciona números poligonais de índices positivos e negativos por meio dos números triangulares, para isto deveremos, novamente, recorrer ao GeoGebra como recurso importante de visualização, porém, como os números triangulares são o foco desta seção e os números quadrados são iguais para índices positivos e negativos, apresentaremos primeiramente os números pentagonais com ênfase nos números triangulares, observe a figura a seguir:

Figura 84 - relação de números pentagonais e triangulares



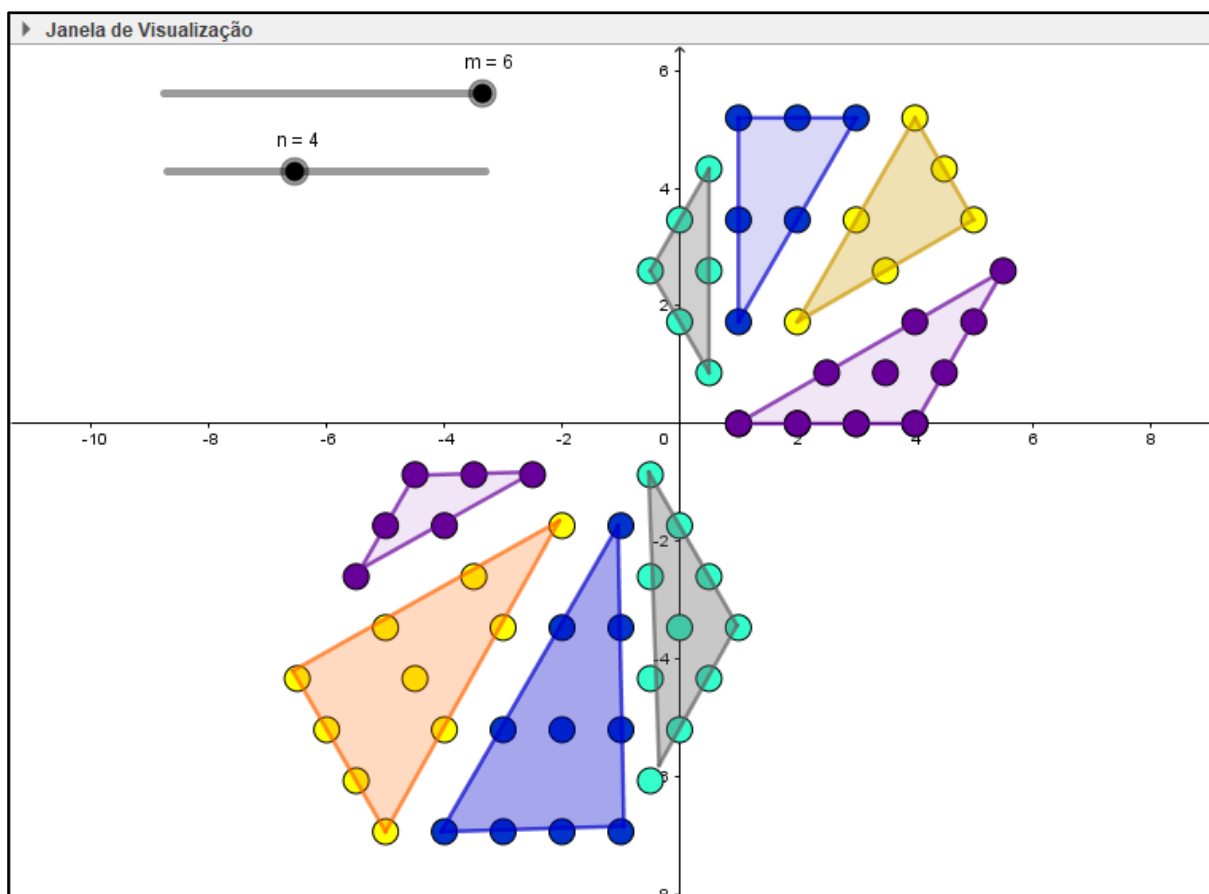
Fonte: elaboração do autor

A figura apresenta a relação importante que os números pentagonais possuem em relação aos números triangulares, além disto, ela também apresenta a mesma formação para os números pentagonais de índices negativos, na figura que representa os índices positivos, temos $S_5(n) = S_3(n) + 2S_3(n-1)$. Ao analisarmos os números pentagonais de índices negativos,

notamos, então, um fato interessante, os coeficientes dos números triangulares presentes na formação do número poligonal, alteram as posições, ou seja $S_5(-n) = 2S_3(n) + S_3(n-1)$, se desenvolvermos as fórmulas, perceberemos que esta fórmula, de fato, corresponde ao termo geral dos números pentagonais para índices negativos.

Para que tenhamos mais argumentos para buscarmos uma fórmula geral para tal propriedade, analisaremos os números hexagonais por meio da próxima figura:

Figura 85- relação de números hexagonais e triangulares



Fonte: elaboração do autor

A figura representa os números $S_6(4)$ na parte superior e $S_6(-4)$ na parte inferior, com as informações contidas nela, iremos construir a mesma propriedade vista anteriormente nos números pentagonais, porém para os números hexagonais, temos que $S_6(n) = S_3(n) + 3S_3(n-1)$ e $S_6(-n) = 3S_3(n) + S_3(n-1)$, novamente os coeficiente dos números triangulares invertem as posições quando o índice é alterado de positivo para negativo, deste modo podemos analisar se, de modo geral, $S_m(n) = S_3(n) + (m-3)S_3(n-1)$ para os índices positivos e $S_m(-n) = (m-3)S_3(n) + S_3(n-1)$ para índices negativos.

Para índices positivos, temos:

$$\begin{aligned}
S_m(n) &= S_3(n) + (m-3)S_3(n-1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(m-3)n(n-1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1+(m-3)(n-1))}{2} \\
&= \frac{n(n+1+(m-3)n-m+3)}{2} \\
&= \frac{n(n(m-3+1)-m+4)}{2} \\
&= \frac{n((m-2)n-m+4)}{2}
\end{aligned}$$

Como mostrado anteriormente, esta fórmula corresponde ao n -ésimo termo dos números poligonais, já para índices negativos, temos:

$$\begin{aligned}
S_m(-n) &= (m-3)S_3(n) + S_3(n-1) \\
&= \frac{(m-3)n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \\
&= \frac{n((m-3)(n+1)+n-1)}{2} \\
&= \frac{n((m-3)n+m-3+n-1)}{2} \\
&= \frac{n(n(m-3+1)+m-4)}{2} \\
&= \frac{n((m-2)n+m-4)}{2}
\end{aligned}$$

A fórmula acima também corresponde ao termo geral dos m -gonais, mostrando que a relação com os números poligonais apresentada, de fato é verdadeira.

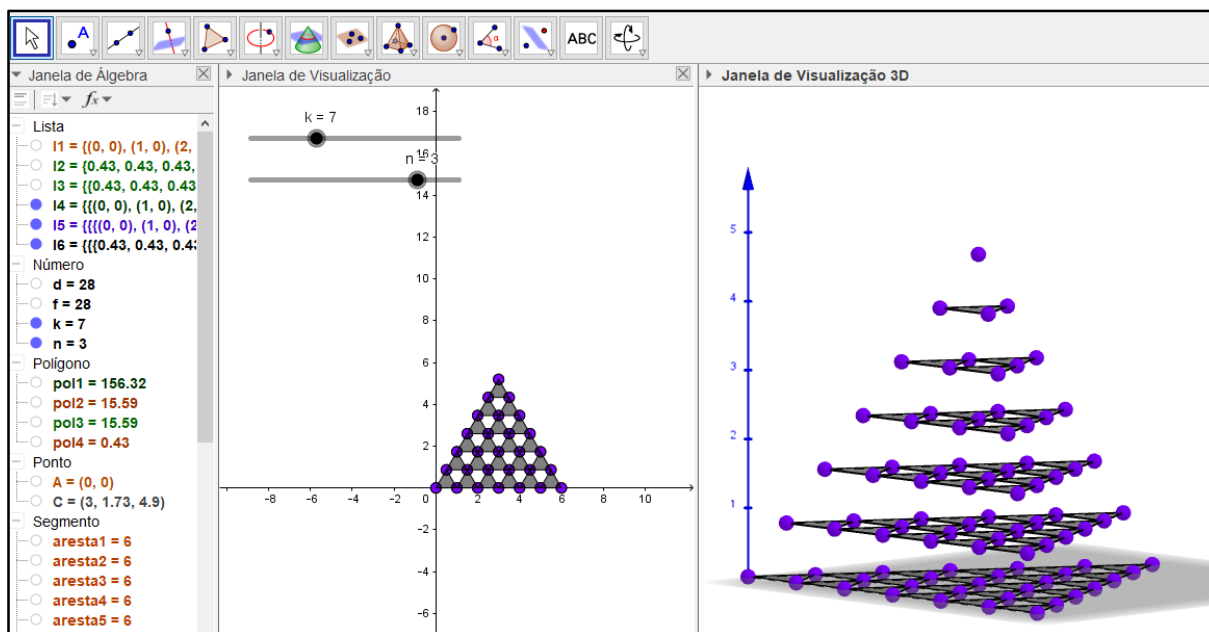
A seguir, a relação de números figurados 3D com a inclusão de mais um a dimensão, porém com o auxílio da janela 3D do GeoGebra.

3.7.3 Construção de números figurados 3D, a partir de números triangulares

Os números figurados tridimensionais, espaciais ou poliédricos, são representados usando a janela 3D do GeoGebra, discutiremos aqui as relações desses números com os números triangulares, dentre eles os primeiros a serem apresentados são os números tetraédricos, que são formados por somas de números triangulares sucessivos, ou seja, o n -ésimo número tetraédrico $S_3^3(n)$, é formado pela soma dos n primeiros números triangulares S_3 , sendo assim, a fórmula do termo geral para os números tetraédricos é dada por

$S_3^3(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ com $S_3^3(1)=1$ e $n \in \mathbb{N}$, (Alves, 2012), quando usamos os comandos de soma sucessiva dos números triangulares, através do “transladar parte da lista”, usando como lista os números triangulares, construímos a figura seguinte:

Figura 86 - Sétimo número tetraédrico



Fonte: elaboração do autor

Perceba que na figura temos uma soma de n números triangulares visualizados na janela 3D, o resultado é uma pirâmide de pontos que representam os números tetraédricos.

A partir da montagem deste números e, usando os mesmos argumentos podemos construir outros números piramidais, e encontrar suas fórmulas de termo geral, é o caso dos números piramidais quadrados pentagonais, os primeiros são os números piramidais quadrados que formam a sequência (1,5,14,30,...) e chamaremos de $S_4^3(1)=1, S_4^3(2), S_4^3(3)=14$, e assim por diante. A fórmula para estes números é dada por $S_4^3(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ com $S_4^3(n)=1$ (Conway e Guy,1996, p.57).

Usando números tetraédrico com o apoio do software GeoGebra, observamos a seguinte relação:

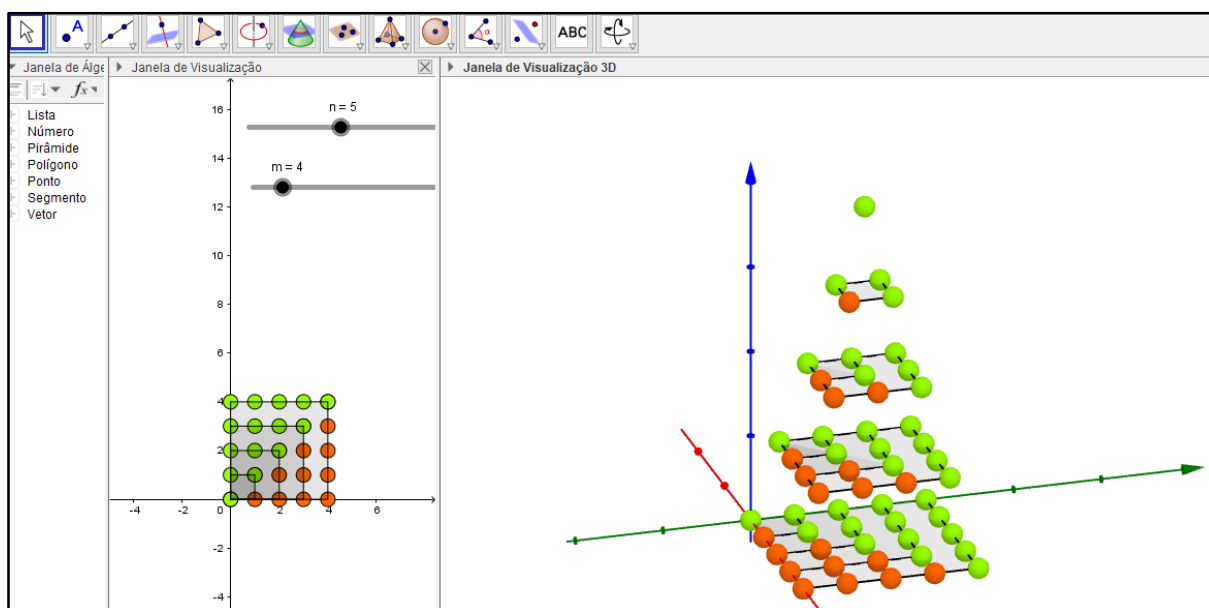
$$S_4^3(n) = S_3^3(n) + S_3^3(n-1)$$

Ou seja, usaremos dois números tetraédricos seguidos para construir os números piramidais quadrados, temos então:

$$\begin{aligned}
 S_4^3(n) &= S_3^3(n) + S_3^3(n-1) \\
 &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n-1)n(n+1)}{6} \\
 &= \frac{(n(n+1))(n+2+n-1)}{6} \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
 \end{aligned}$$

A figura a seguir mostra como a construção apresenta, de fato, números piramidais quadrados.

Figura 87 - Quarto número piramidal quadrado com destaque na base



Fonte: elaboração do autor

Na figura é possível observar as duas listas de números tetraédricos, com cores destacadas, unidas, formando uma pirâmide de pontos com uma base quadrada, ou seja, de fato, pela figura e pela fórmula usada, esses números são mesmos os números piramidais quadrados, esta relação também pode ser obtida usando-se a relação de números quadrados com números triangulares.

De modo similar, usaremos três listas para formar os números piramidais pentagonais, como temos a base sendo formada por números pentagonais, estes já apresentados, podemos encontrar sua fórmula da mesma forma dos piramidais quadrados.

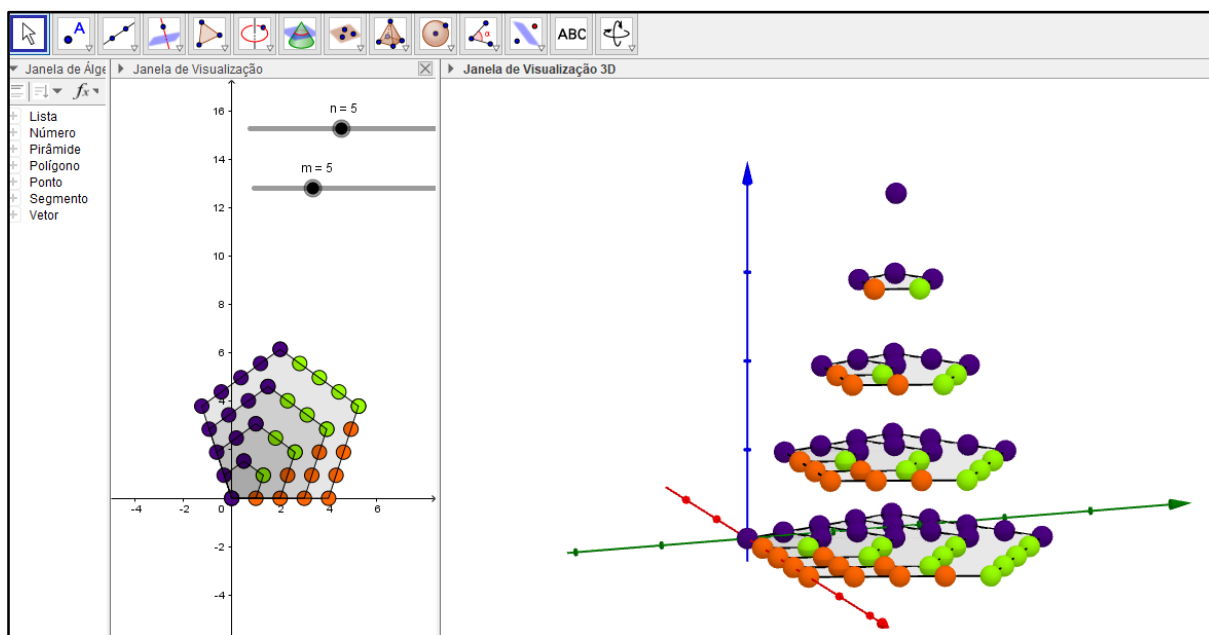
De acordo com o que já foi apresentado anteriormente, um número piramidal pode ser escrito segundo a fórmula $P_m^3(n) = \frac{n(n+1)((m-2)n-m+5)}{6}$ ou seja, um número piramidal

pentagonal tem como fórmula para um termo qualquer $P_5^3(n) = \frac{n(n+1)(3n)}{6}$ usando números tetraédrico de modo que $S_5^3(n) = S_3^3(n) + 2S_3^3(n-1)$ de fato temos que:

$$\begin{aligned} S_5^3(n) &= S_3^3(n) + 2S_3^3(n-1) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{2(n-1)(n)(n+1)}{6} \\ &= \frac{(n(n+1))(n+2+2n-2)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(3n)}{6} \end{aligned}$$

As figuras a seguir, apresentam a união das listas de números tetraédricos dentro de uma base pentagonal, de fato os números formados, de acordo com as fórmulas usadas, são números piramidais pentagonais.

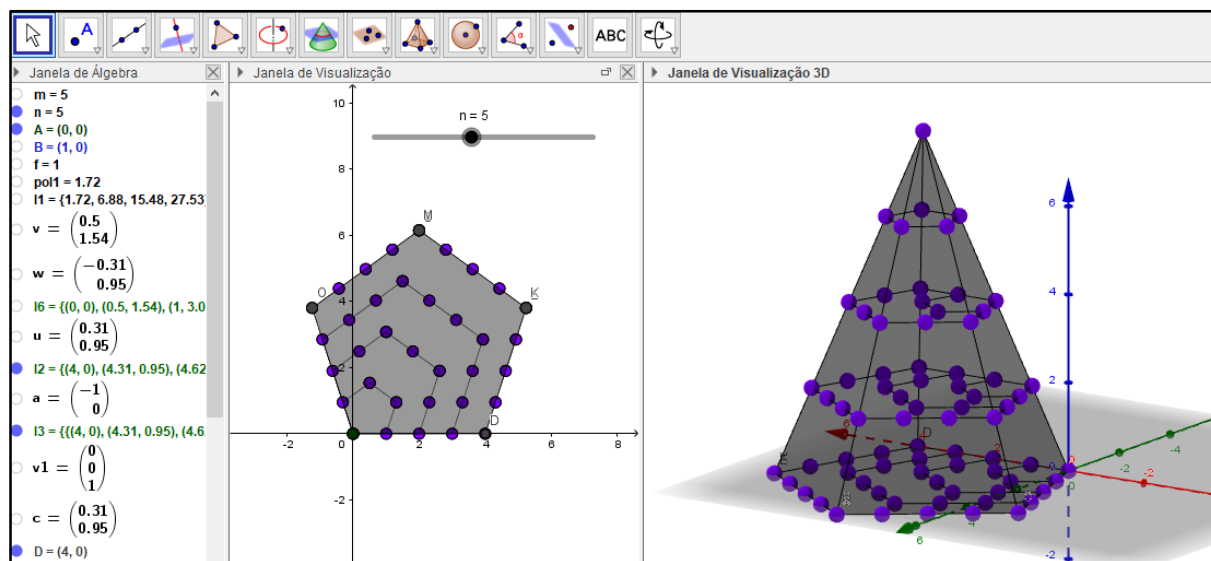
Figura 88 - Quinto número piramidal pentagonal, e sua relação com números tetraédricos



Fonte: elaboração do autor

A seguir a figura apresenta a mesma pirâmide de pontos, porém com os pentágonos desenhados para dar a ideia que esses números são formados a partir do somatório dos números pentagonais.

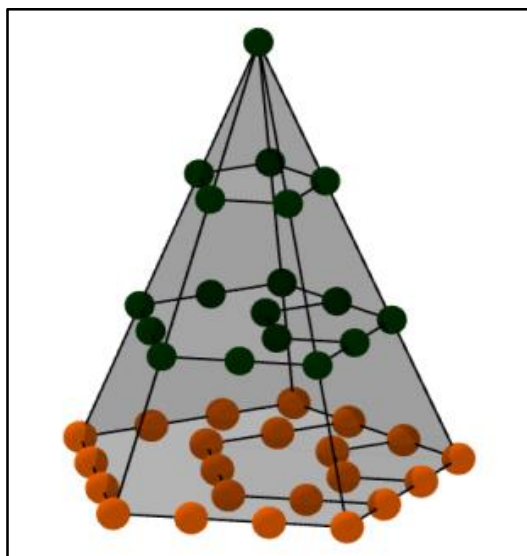
Figura 89 - Outra apresentação dos números piramidais pentagonais no software GeoGebra



Fonte: elaboração do autor

Nas figuras acima, as pirâmides de números pentagonais, que formam os números piramidais pentagonais podem ser observados de duas maneiras, na primeira, é possível observar que as listas de números tetraédricos vistos com cores diferentes, na segunda figura as listas estão da mesma cor, pois apresenta a pirâmide como um somatório de n -ésimos números pentagonais. Ainda é possível observar a recorrência de números piramidais, como mostra a figura a seguir:

Figura 90 - número piramidal pentagonal com ênfase na recorrência



Fonte: autor

Desta forma podemos encontrar a forma de relaciona os números piramidais e os números tetraédricos da seguinte maneira:

$$S_m^3(n) = S_3^3(n) + (m-3)S_3^3(n-1)$$

Segue que:

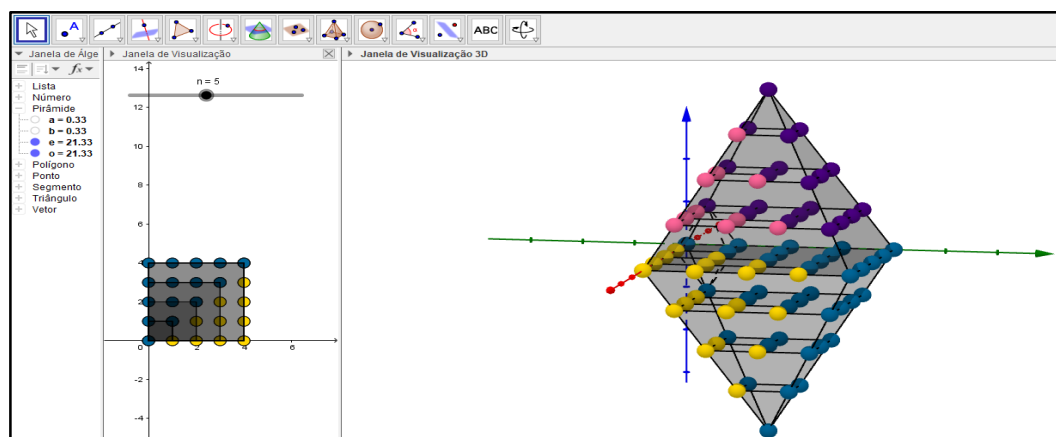
$$\begin{aligned} S_m^3(n) &= S_3^3(n) + (m-3)S_3^3(n-1) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + (m-3)\frac{(n-1)n(n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2+mn-3n-m+3)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(mn-2n-m+5)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)((m-2)n-m+5)}{6} \end{aligned}$$

Para os números octaédricos, $O(n) = \frac{n(2n^2+1)}{3}$, $O(1)=1$, podemos formá-los usando o software geogebra, usando duas pirâmides de base quadrada, como já temos estes números, poderemos formar os seguintes usando a seguinte proposição: o n -ésimo número octaédrico, é formado pela soma do n -ésimo número piramidal quadrado com o $(n-1)$ -ésimo número piramidal quadrado, temos:

$$\begin{aligned} O(n) &= \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} + \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = \frac{n(2n^2-3n+1+2n^2+3n+1)}{6} = \frac{n(4n^2+2)}{6} \\ O(n) &= \frac{n(2n^2+1)}{3} \end{aligned}$$

Usando os comandos das pirâmides de base quadradas usadas anteriormente para construir números piramidais, podemos construir números octaédrico no GeoGebra como mostra a figura.

Figura 91 - Quinto número octaédrico



Fonte: elaboração do autor

A figura representa a projeção 3D dos números octaédricos como duas construções de números piramidais invertidos e unidos pela base de modo que a mesma seja comum as duas pirâmides, deste modo uma podemos ter as duas pirâmides constituídas de números piramidais quadrados seguidos.

Para a construção dos números cúbicos a partir de números tetraédricos podemos realizar o preenchimento de um cubo com tetraedros de modo que nenhuma face de tetraedro se sobreponha a outra em um tetraedro vizinho, a partir disso podemos montar os números cúbico e formular uma proposição, para isso, apresentaremos os números cúbicos que formam a sequência (1,8,27,64,...) e chamaremos de $C_1=1, C_2=8, C_3=27, ..., C_n=n^3$, sendo assim, temos que:

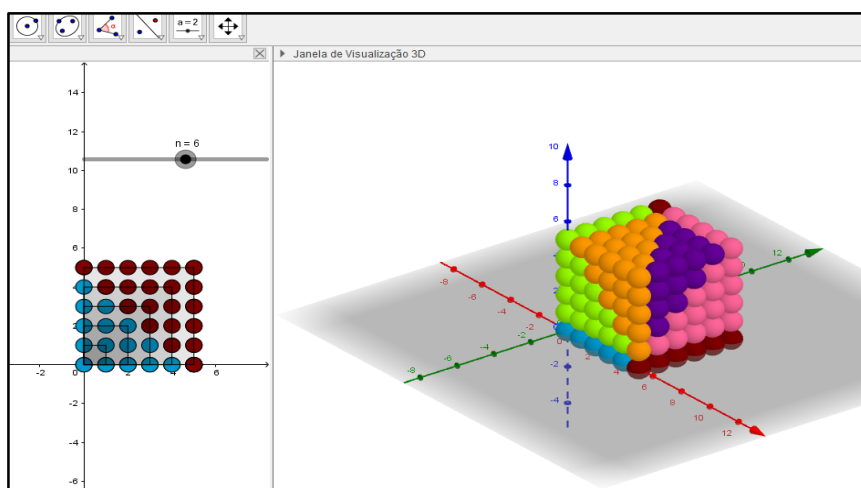
Proposição 4: o n -ésimo número cúbico é formado pela soma do n -ésimo, mais quatro vezes o $(n-1)$ -ésimo, mais o $(n-2)$ -ésimo número tetraédrico.

Prova:

$$\begin{aligned}
 S_3^3(n) + 4S_3^3(n-1) + S_3^3(n-2) &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{4(n-1)(n)(n+1)}{6} + \frac{(n-2)(n-1)(n)}{6} \\
 &= \frac{n}{6}((n+1)(n+2) + 4(n-1)(n+1) + (n-2)(n-1)) \\
 &= \frac{n}{6}(n^2 + 3n + 2 + 4n^2 - 4 + n^2 - 3n + 2) \\
 &= \frac{n}{6}(6n^2) = n^3 = C(n)
 \end{aligned}$$

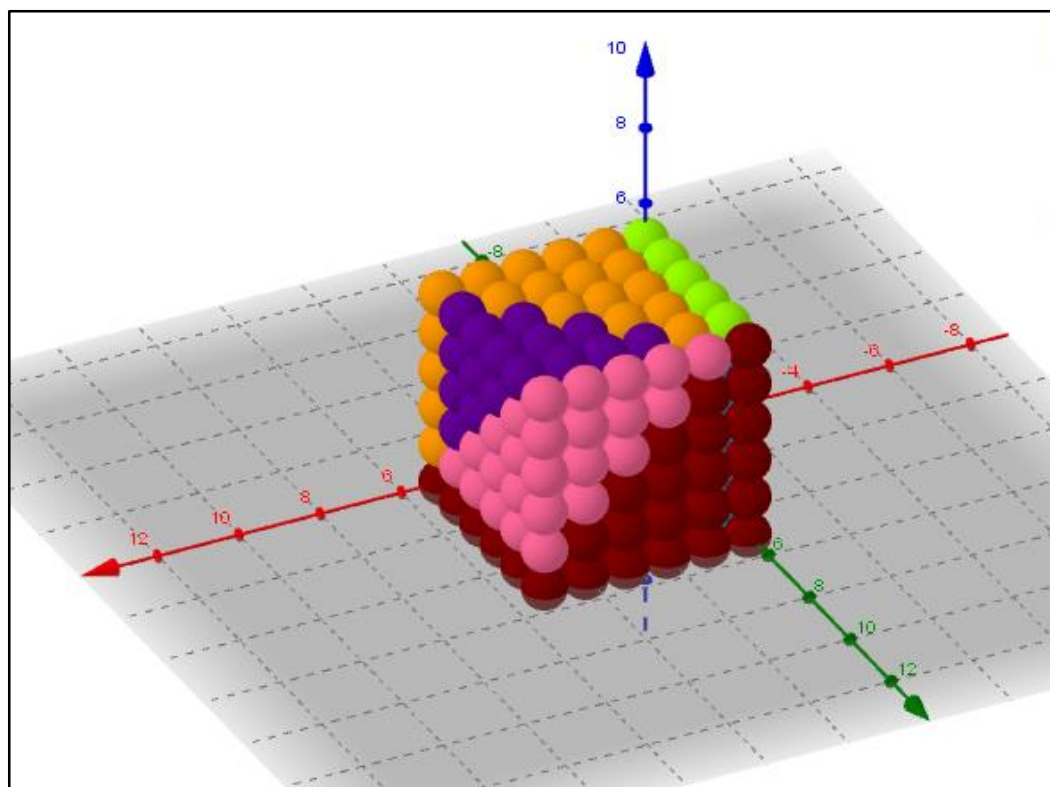
As duas figura a seguir, representam um cubo formado com números tetraédricos, é possível, com a separação das cores de cada ponto, perceber pirâmides de pontos em diferentes direções, completando cada parte do cubo.

Figura 92 - Quinto número cúbico construído com números tetraédricos



Fonte: elaboração do autor

Figura 93 - Visão aproximada de um número cúbico



Fonte: elaboração do autor

Podemos encontrar uma relação entre os números platônicos e os números tetraédricos, desde que observemos como se preenche com números tetraédricos para se construir o poliedro desejado, por exemplo, para construir os números cúbicos, primeiro se divide o poliedro em pirâmides, em seguida constrói-se as listas de números piramidais triangulares dentro destas pirâmides, observe então que:

1. O primeiro ponto pertence ao primeiro tetraedro, por isso sempre existirá apenas um número tetraédrico n para um número platônico n , os outros serão construídos a partir do segundo número platônico
2. No segundo número platônico, deve se retirar aqueles pontos que pertencem ao segundo número tetraédrico, construído anteriormente, no restante de pontos são construídos outros números tetraédricos
3. O procedimento deve ser seguido até que o número de números tetraédricos seja igual ao número de faces do poliedro que foram separados em triângulos, lembrando que como são construções de pirâmides a partir de um ponto, esta pirâmide não poderá ser construída as faces que possuem este ponto como um de seus vértices.

Assim, o mesmo procedimento para os números cúbicos ficaria da seguinte maneira:

1. Um n -ésimo números tetraédrico
2. Como o segundo número cúbico é 8 e 4 destes já pertencem ao agora segundo número tetraédrico, então outros 4 números tetraédrico $n-1$ serão formados aqui
3. Visto que o cubo possui seis faces quadradas, desta três contém o ponto inicial então as outras três são divididas em triângulos, formando assim seis triângulos, ainda precisamos de um número tetraédrico que será construído no próximo números cúbico, por isso é um número do tipo $n-2$, formando assim a relação vista anteriormente.

Perceba ainda que o terceiro número dodecaedral é 84, sendo 10 do terceiro número tetraédrico, 64 referente a $16 \cdot S_3^3(2) = 16 \cdot 4$ e os 10 pontos restantes. A relação então será:

$$D(n) = S_3^3(n) + 16S_3^3(n-1) + 10S_3^3(n-2), n > 2, D(1) = 1, D(2) = 20$$

Assim, os números platônicos dodecaedrais que possui os primeiros termos (1, 20, 84, 220, 455,...) podem ser escritos segundo a fórmula:

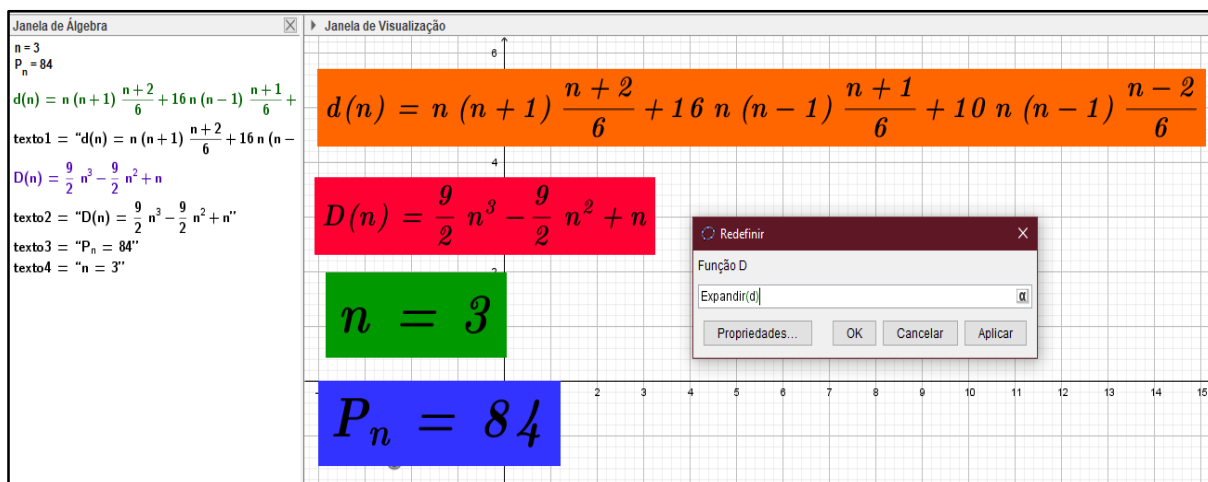
1. Um número tetraédrico $S_3^3(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$
2. Dezesesseis números tetraédricos $S_3^3(n-1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$
3. Retirando-se as três faces do dodecaedro que contém o ponto inicial as outras nove serão multiplicadas por três, visto que suas faces são pentagonais e assim formadas por três triângulos, resultando em 27 “faces”. Como já temos dezessete, nos restam dez listas do tipo $S_3^3(n-2) = \frac{(n-2)(n-1)n}{6}$

Perceba ainda que o terceiro número dodecaedral é 84, sendo 10 do terceiro número tetraédrico, 64 referente a $16 \cdot S_3^3(2) = 16 \cdot 4$ e os 10 pontos restantes. A relação então será:

$$D(n) = S_3^3(n) + 16S_3^3(n-1) + 10S_3^3(n-2), n > 2, D(1) = 1, D(2) = 20$$

Usando o SG para resolvermos esta expressão, chegamos a figura a seguir:

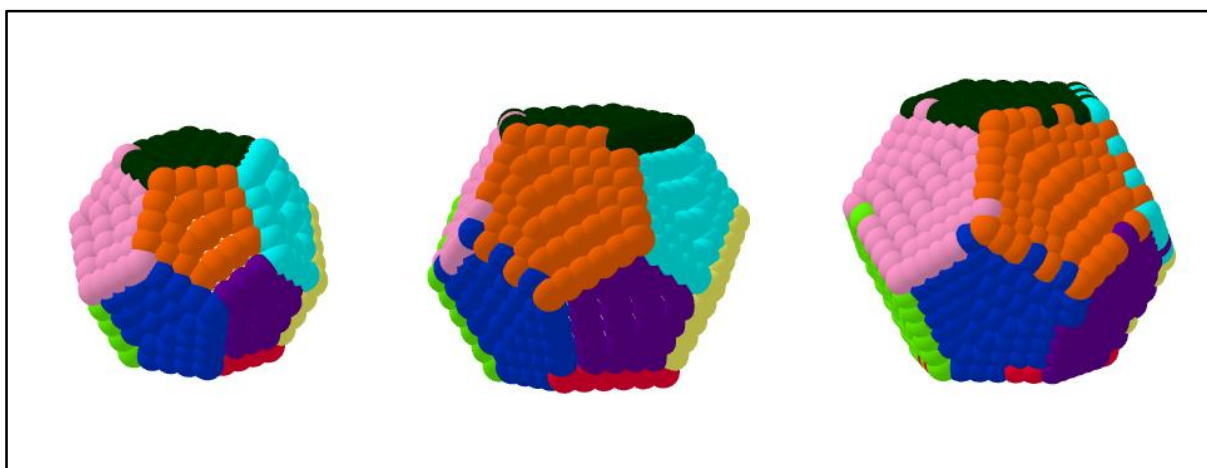
Figura 94 - resolução da relação entre os números dodecaedrais e tetraédricos no SG



Fonte: autor

A representação destes números no SG segue a seguir:

Figura 95 - 5º, 6º e 7º números dodecaedrais



Fonte: elaboração do autor

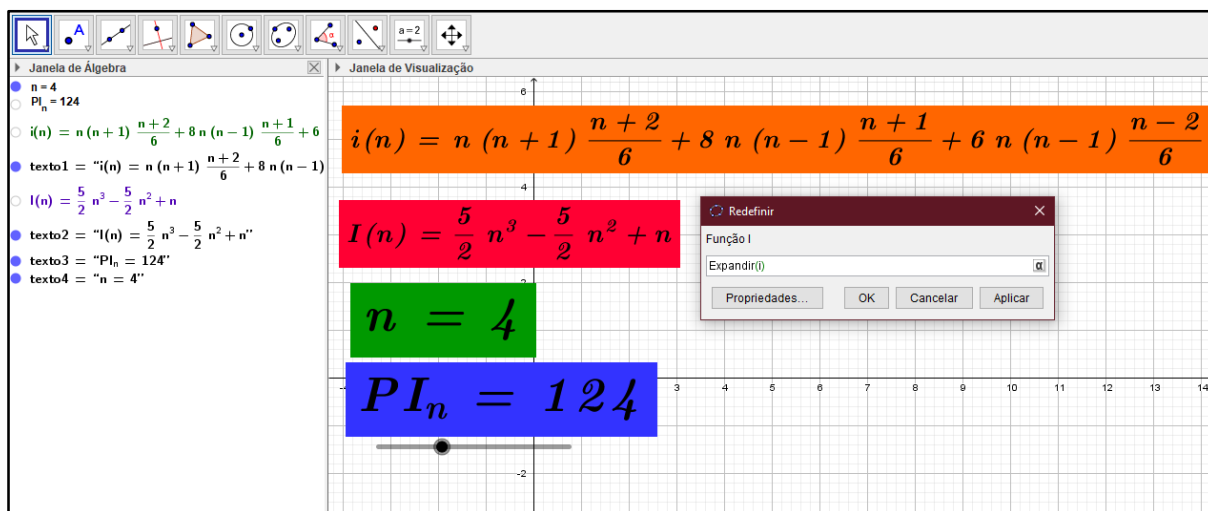
A figura apresenta alguns números dodecaedrais, na medida que os valores aumenta o SG apresenta um certo erro nas cores porém pode-se perceber que a construção foi feita a partir de pirâmides de números.

Seguindo os mesmos passos para os números icosaedrais, temos a relação:

$$I(n) = S_3^3(n) + 8S_3^3(n-1) + 6S_3^3(n-2), n > 2, I(1) = 1, I(2) = 12$$

Usando os mesmos recursos pelo SG, constatamos que a forma é válida, vejamos a figura a seguir:

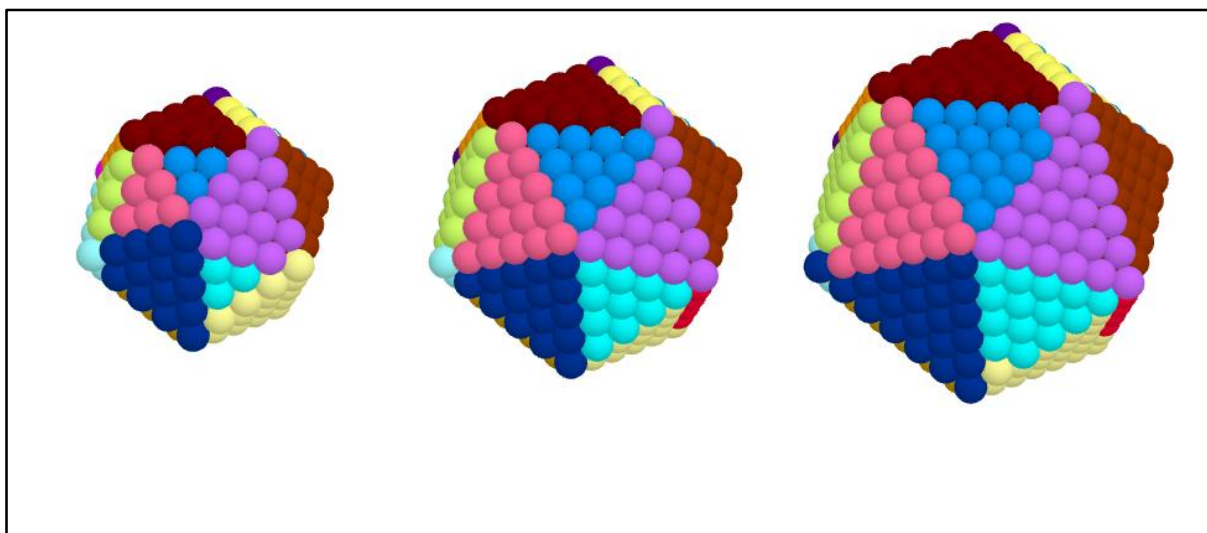
Figura 96 - constatação da relação entre números icosaédrais e tetraédrico no SG



Fonte: elaboração do autor

A representação no SG usando esta propriedade se encontra na figura a seguir:

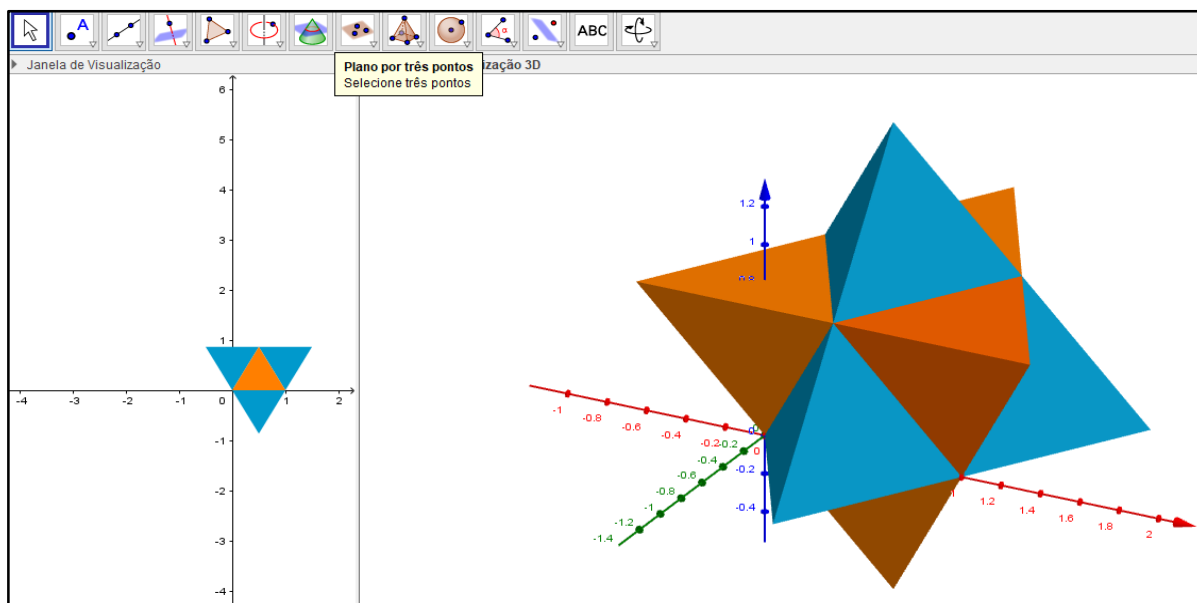
Figura 97 - 5º, 6º e 7º números icosaedrais.



Fonte: autor

O próximo número figurado, representa uma estrela 3D, esta figura, pode ser construída com a interseção de dois tetraedros ou com um octaedro em que cada face triangular é construída um tetraedro com um ponto externo a esse octaedro, desta forma temos a figura a seguir para explicar o poliedro em que se baseia os números da stella octangula.

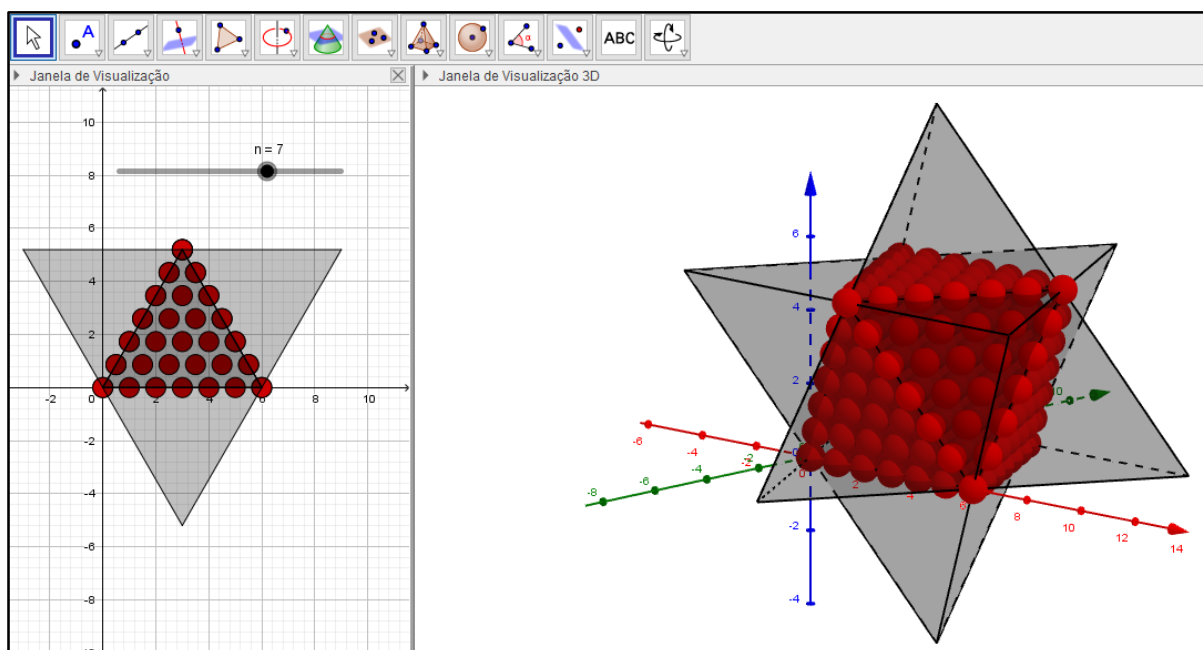
Figura 98 - Stella octangula construída com dois tetraedros



Fonte: elaboração do autor

Na figura, pode ser observado dois tetraedros invertidos, o octaedro que se concentra no núcleo desta figura pode ser preenchido com os números octaédricos, de cada face do octaedro, partem outros tetraedros menores, que geram a stella octangula, neste caso como estamos falando de números figurados, os números da stella octangula ou números da estrela de oito braços, com fórmula de termo geral, segundo Deza e Deza (2012), $SO(n) = n(2n^2 - 1)$.

Figura 99 - Números octaédricos construídos no núcleo de uma stella octangula



Fonte: elaboração do autor

A figura acima, mostra o octaedro que está no centro, é necessário essa observação pois depois de construído a figura por completo, é difícil perceber este poliedro. Da construção com o uso do geogebra, temos duas proposições sobre os números da stella octangula:

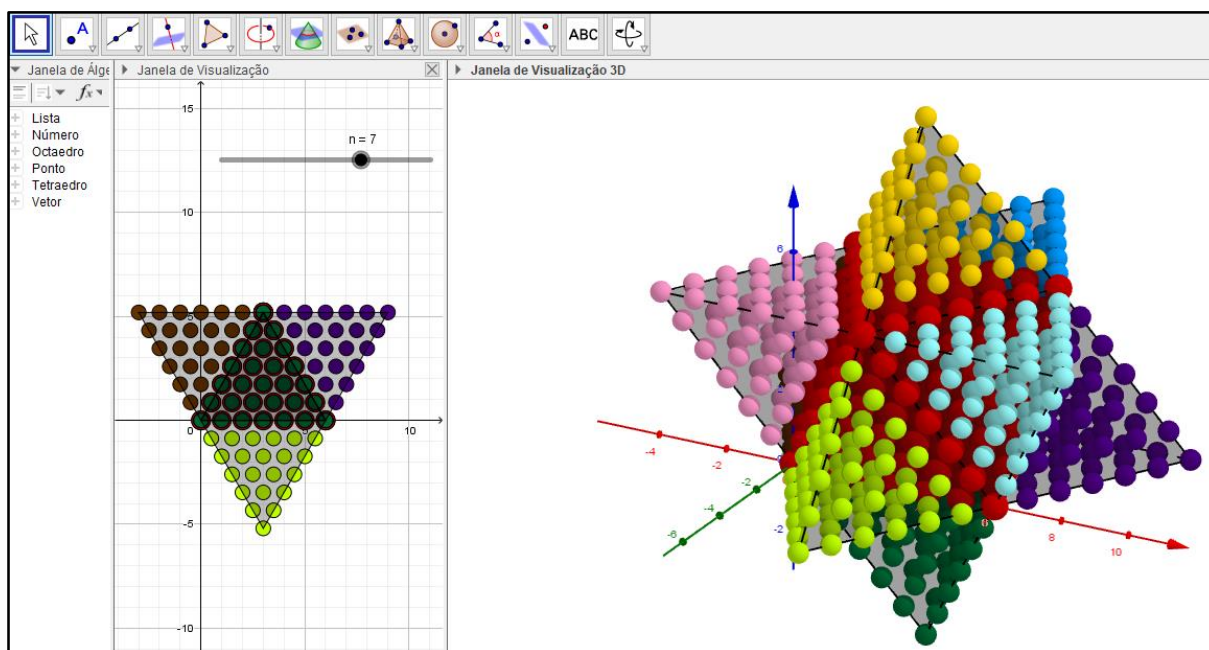
Proposição 4; o n -ésimo número da stella octangula é constituído da soma do n -ésimo número octaédrico adicionado a oito vezes o $(n-1)$ -ésimo número tetraédrico.

Prova:

$$\begin{aligned}
 SO(n) &= O(n) + 8S_3(n-1) \\
 &= \frac{n(2n^2 + 1)}{3} + \frac{8(n-1)n(n+1)}{6} \\
 &= \frac{2n(2n^2 + 1)}{6} + \frac{8(n-1)n(n+1)}{6} \\
 &= \frac{2n(2n^2 + 1 + 4(n-1)(n+1))}{6} \\
 &= \frac{2n(2n^2 + 1 + 4n^2 - 4)}{6} \\
 &= \frac{2n(6n^2 - 3)}{6} \\
 &= n(2n^2 - 1)
 \end{aligned}$$

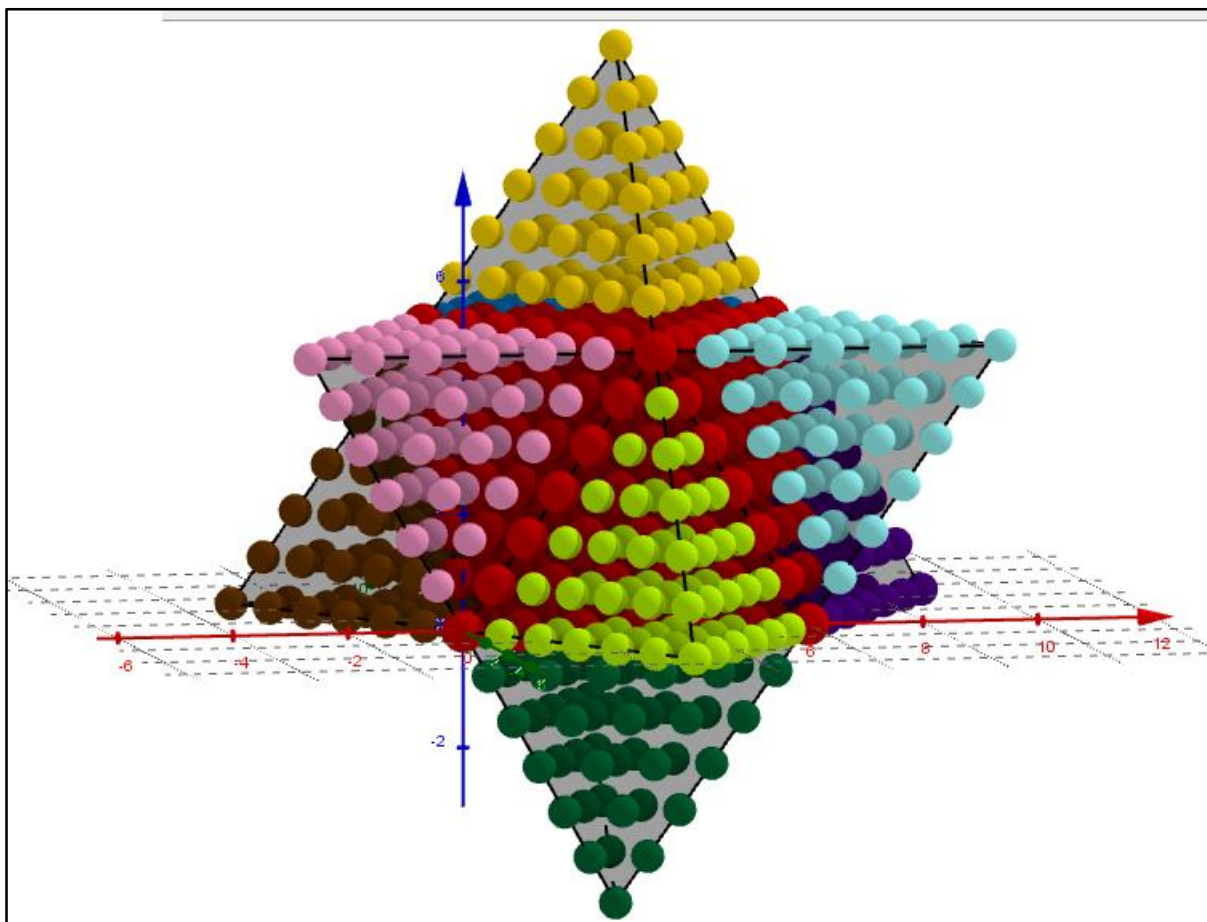
A construção dos números da stella octangula estão representados nas duas figuras a seguir:

Figura 100 - Sétimo número da stella octangula



Fonte: elaboração dos autores

Figura 101 - Visão aproximada de um número da stella octangula



Fonte: elaboração do autor

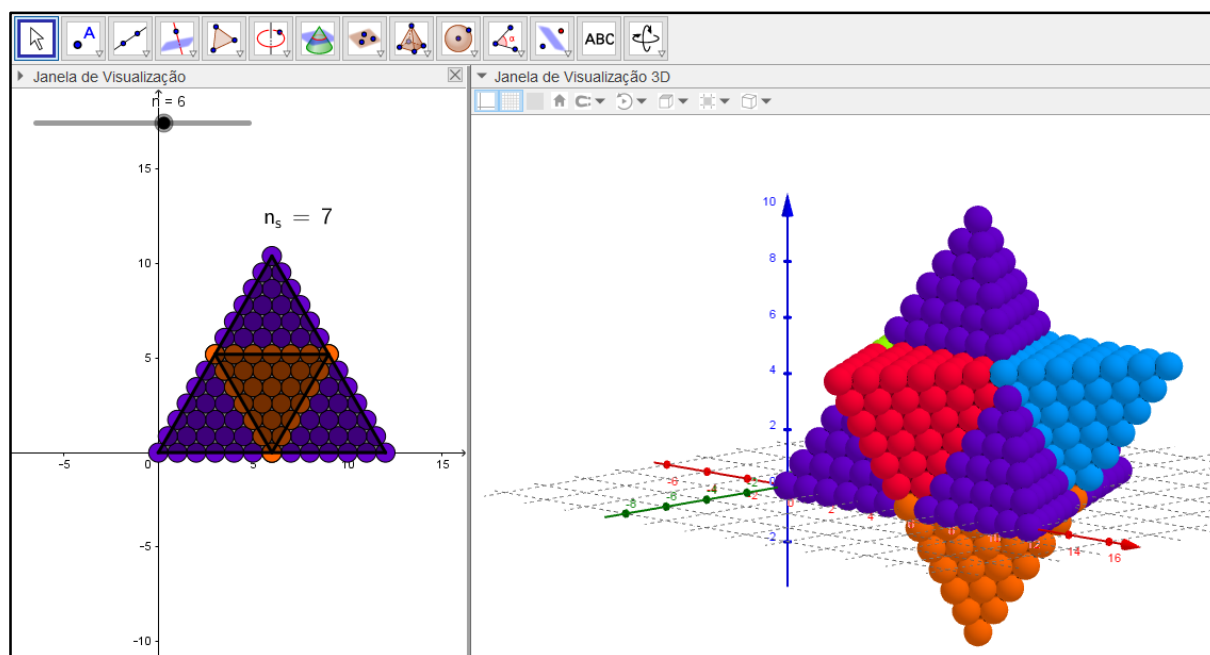
As duas figuras mostram os números da stella octangula de dois ângulos diferentes para que se perceba seus oito “braços”, destacados de cores diferentes, em uma das figuras é possível observar a janela 2D do GeoGebra e perceber que também podemos formar a os números da stella octangula usando apenas números tetraédricos, com o primeiro sendo uma unidade menor que o dobro dos demais, pelo fato do ponto central conforme a figura mostra, servirá de vértice para outro número tetraédrico enquanto o $n-1$ pontos que o dividem, serão as bases para os outros números tetraédricos, desta forma temos que $SO(n) = S_3^3(2n+1) + 4S_3^3(n+1)$, de fato:

$$\begin{aligned}
 SO(n) &= S_3^3(2n-1) + 4S_3^3(n-1) \\
 &= \frac{(2n-1)(2n-1+1)(2n-1+2)}{6} + \frac{4(n-1)n(n+1)}{6} \\
 &= \frac{(2n-1)(2n)(2n+1) + 4(n-1)n(n+1)}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2n(4n^2 - 1 + 2(n^2 - 1))}{6} \\
 &= \frac{2n(6n^2 - 3)}{6} \\
 &= n(2n^2 - 1)
 \end{aligned}$$

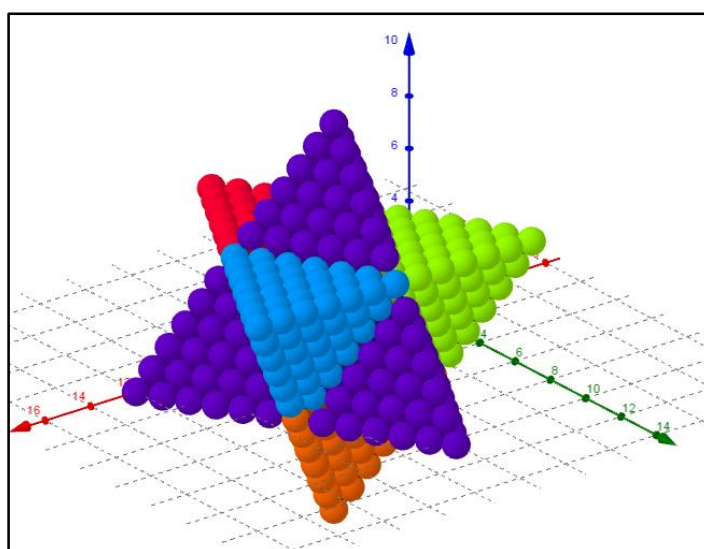
As figuras a seguir, apresentam esta construção com ênfase nas cores para diferenciar o tetraedro maior dos demais, assim poderemos observar facilmente a propriedade empregada.

Figura 102 - Outra construção para os números da stella octangula



Fonte: elaboração do autor

Figura 103 - Visão aumentada para a segunda construção dos números da stella octangula



Fonte: elaboração do autor

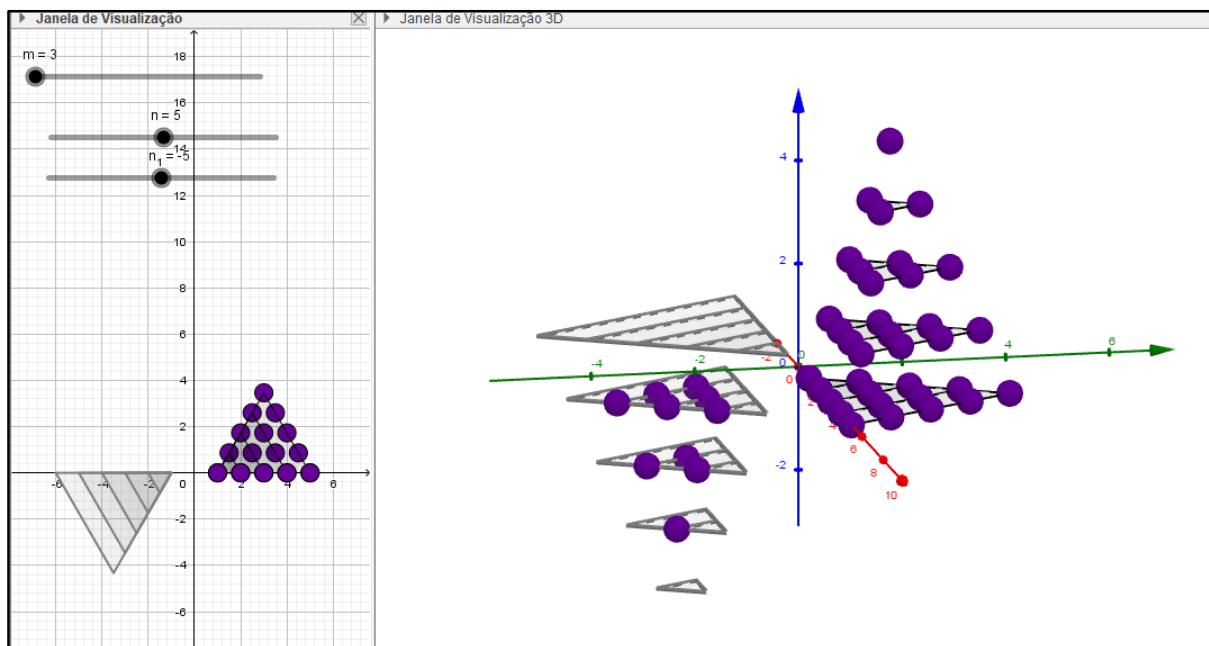
Estas figuras apresentadas nesta seção, foram obtidas com base apenas em números tetraédrico, sendo possível apresentar propriedades que os relacionam. Desta maneira podemos formar todos os números figurados tridimensionais, observamos ainda que esses números tetraédricos são formados com base nos números triangulares, sendo estes últimos necessários para toda as estruturas citadas.

A presente seção apresentou a possibilidade de usar o software GeoGebra como recurso para descobrir propriedades de vários números figurados, sejam bidimensionais ou tridimensionais, o escrito seguiu o percurso de apresentar relações de números triangulares com outros números figurados e mostrando que esta sequência é fundamental para a construção das demais, outras possibilidades podem ser mostradas desde que se tenha a estrutura do polítopo onde serão construídas e transladadas as listas, ademais, existe a possibilidade de representar inclusive, formas em 4D ou qualquer sequência dentro dos números figurados.

3.7.4 Visualização dos números piramidais com extensão para índices negativos.

Nesta seção, apresentaremos uma possível construção para números piramidais, descritos como $S_m^3(n)$, com índices negativos, ou seja $S_m^3(-n)$, com $n \in \mathbb{N}$, baseados em seus análogos com índices positivos e tendo $S_m^3(0) = 0$. Esta construção será possível de maneira semelhante a realizada na seção anterior em que os números poligonais foram construídos usando números triangulares, porém utilizaremos aqui os números tetraédricos que são formados pela soma do n primeiros números triangulares em uma representação 3D, ademais devemos deixar claro que, ao contrário dos números poligonais com índices negativos, os números piramidais com índices negativos também são números negativos, assim, a representação por pontos que estiverem abaixo de eixo z nas figuras que se seguirão, na verdade representam números negativos. Dada esta breve observação, apresentaremos agora os números tetraédricos e seus análogos com índices negativos.

Figura 104 - números tetraédricos de índices positivo e negativos



Fonte: elaboração do autor

A figura apresenta duas pirâmides de pontos, as que estão na parte superior representa o quinto número tetraédrico ou seja $S_3^3(5)$ e a que está na parte inferior representa $S_3^3(-5)$.

Temos $S_3^3(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ com $S_3^3(1) = 1$ e os primeiros termos (1, 4, 10, 20, 35, 56, ...) sendo estes números formados pela soma dos n primeiros números triangulares.

Para fazermos a extensão para os negativos, tomemos $S_3^3(0) = 0$ e então temos que

$$S_3^3(-n) = \frac{-n(-n+1)(-n+2)}{6} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \quad \text{organizando estes termos temos}$$

$$S_3^3(-n) = -\left(\frac{(n-2)(n-1)n}{6}\right) = -S_3^3(n-2) \quad \text{com } S_3^3(0) = S_3^3(-1) = S_3^3(-2) = 0. \text{ Em geral, Deza}$$

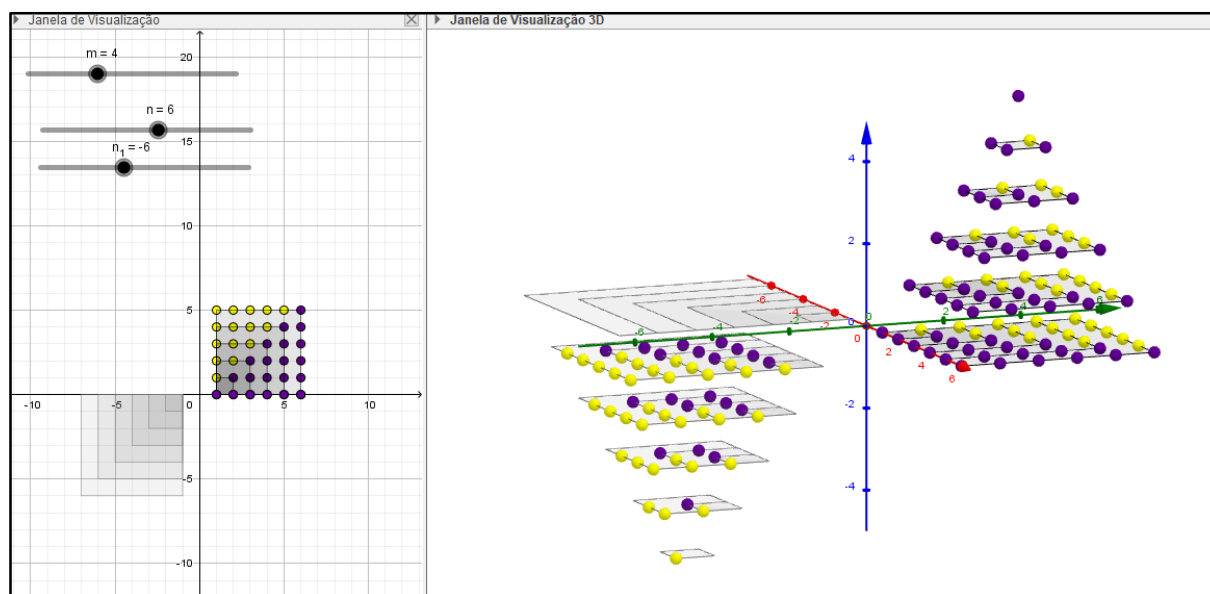
& Deza (2012) descreve os números piramidais com índices positivos com a fórmula

$$S_m^3(n) = \frac{n(n+1)((m-2)n-m+5)}{6} \quad \text{e com índices negativos com a fórmula}$$

$$S_m^3(-n) = -\frac{n(n-1)((m-2)n+m-5)}{6} \quad \text{e deveremos estabelecer uma forma de encontrar estas}$$

fórmulas usando composições de números tetraédricos com o auxílio do software GeoGebra. Observemos então a figura que formam os números piramidais quadrados a seguir:

Figura 105- números piramidais quadrados e sua relação com os números tetraédricos



Fonte: elaboração do autor

Para iniciarmos observamos que as duas figuras apresentas nesta seção não apresentam termos na base da pirâmide do números piramidais negativo, isto ocorre pois a fórmula para os números citados com índices negativos são de forma que $S_m^3(-1) = 0$, isto pode ser comprovado pela fórmula do termo geral. Agora, ao analisarmos os números piramidais quadrados de índices negativos, com base na figura, percebemos que se trata do número $S_4^3(6)$, esta informação nos é dada por causa da outra pirâmide de índice positivo que tem seis camadas de números quadrados, percebemos ainda que $S_4^3(-6) = -(S_3^3(5) + S_3^3(4))$ e lembramos que o sinal de negativo se dá por conta dos números piramidais de índices negativos serem também números negativos, visto isso temos que $S_4^3(-6) = -(S_3^3(5) + S_3^3(4)) = -(35 + 20) = -55$ e pela fórmula temos $S_m^3(-6) = \frac{6(6-1)((4-2)6 + 4-5)}{6} = 5 \cdot (2 \cdot 6 - 1) = 55$ ou seja a fórmula para os números

$S_4^3(-n)$ pode ser escrita como $S_4^3(-n) = -(S_3^3(n-1) + S_3^3(n-2))$, segue que:

$$\begin{aligned} S_4^3(-n) &= -(S_3^3(n-1) + S_3^3(n-2)) \\ &= -\frac{(n-1)n(n+1) + (n-2)(n-1)n}{6} \\ &= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \end{aligned}$$

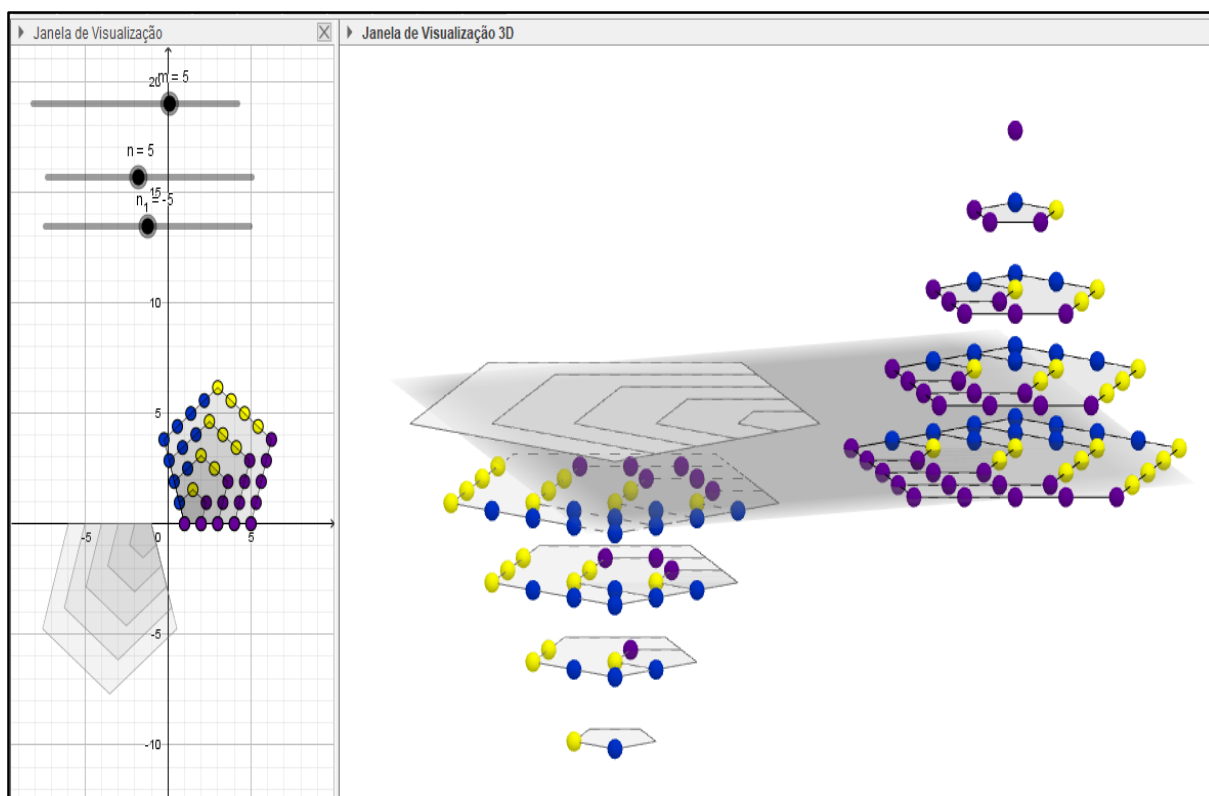
Que corresponde, de fato a fórmula correspondente ao números piramidais quadrados com índices negativos. Além disso temos a relação com os próprios números tetraédrico com índices negativos de acordo com a relação entre números tetraédrico de índices positivos e

negativos, assim; $S_4^3(-n) = S_3^3(-n) + S_3^3(-n-1)$. Por fim, se observarmos a composição de números tetraédricos que formam os números piramidais quadrados, pela figura, temos:

$$\begin{aligned} S_4^3(n) &= S_3^3(n) + S_3^3(n-1) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2) + (n-1)n(n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

A formula obtida é a mesma dos números piramidais quadrados pela fórmula geral apresentada antes. A seguir, apresentaremos os números piramidais pentagonais compostos com pirâmides de números tetraédricos, conforme a figura a seguir:

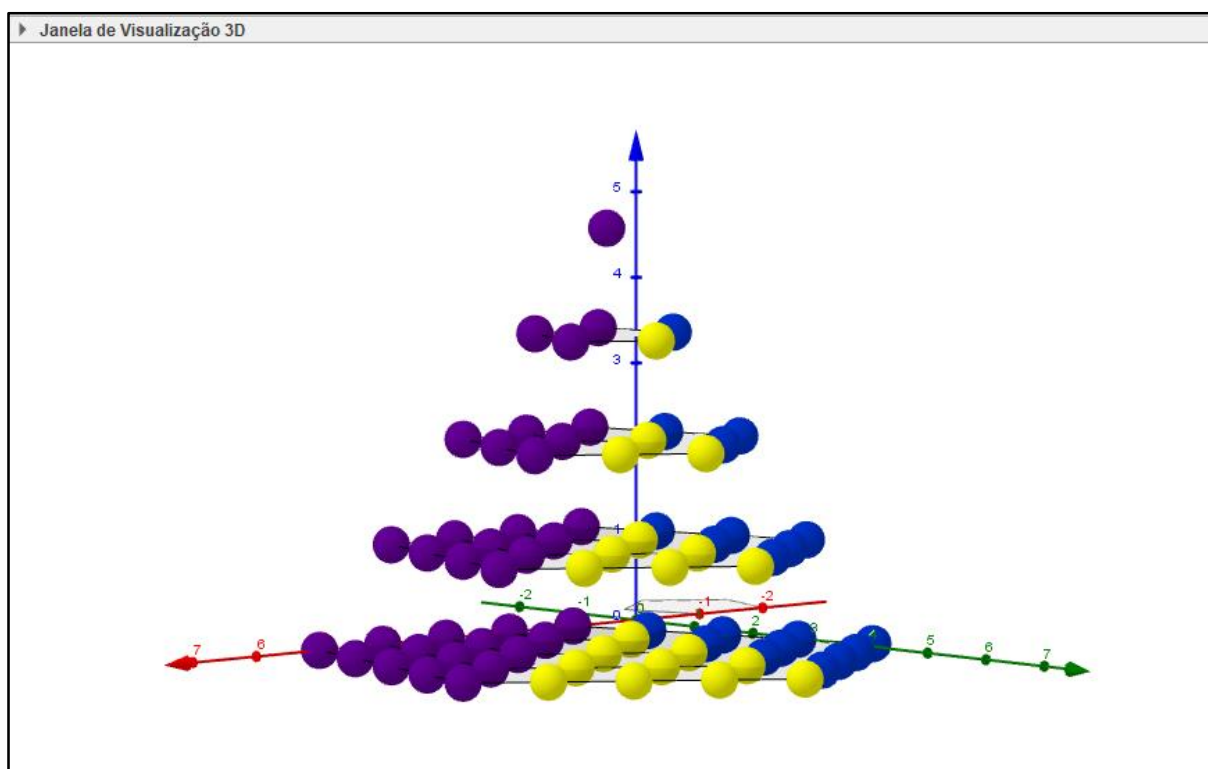
Figura 106 - quinto número piramidal pentagonal, seu análogo negativo e a relação com tetraédricos



Fonte: elaboração do autor

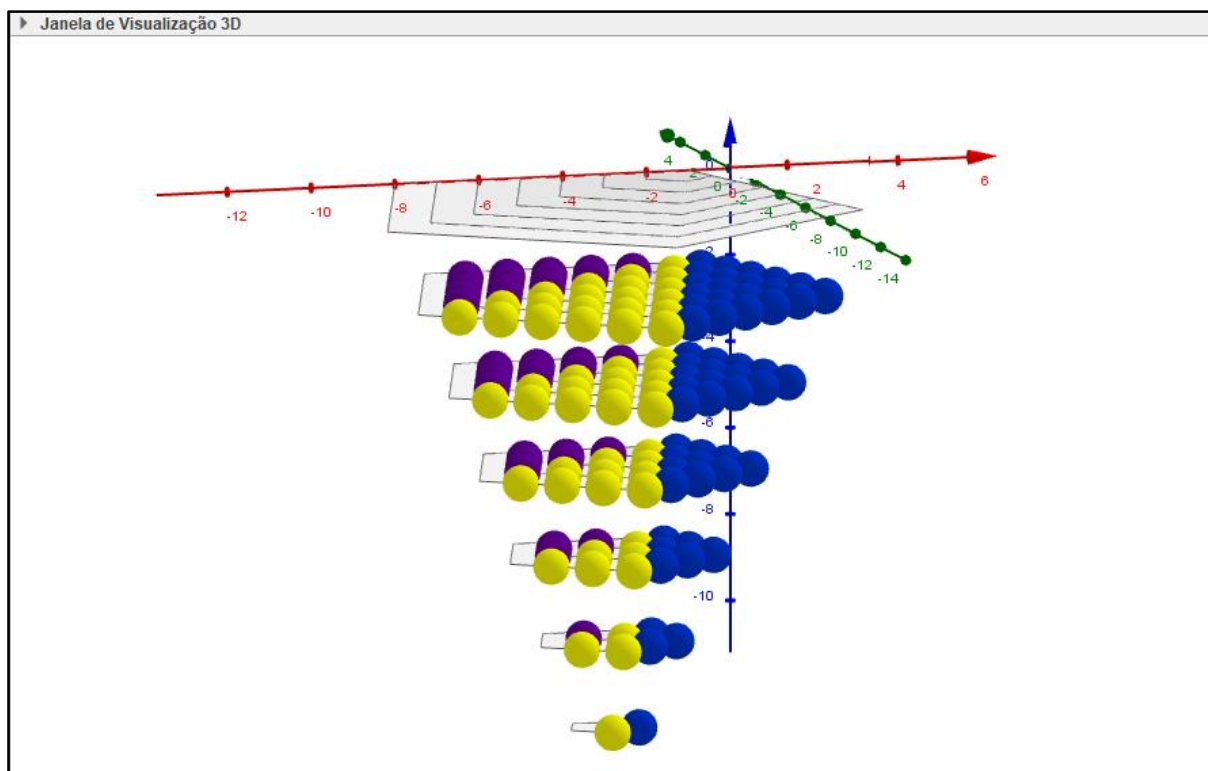
A figura apresenta as duas pirâmides com os valores de seus índices simétricos, este arranjo de pontos pode não ser perceptível, por isso apresentaremos outras duas figuras com as mesmas pirâmides separadas.

Figura 107- quinto número piramidal pentagonal



Fonte: elaboração do autor

Figura 108- número piramidal pentagonal com $n=-5$



Fonte: elaboração do autor

No caso das figuras apresentadas, temos o quinto número piramidal, como já foi dito, é possível saber que número é este por causa das camadas de números pentagonais da pirâmide que representa o índice positivo.

Pela composição dos números da pirâmide positiva da figura, podemos perceber que $S_5^3(5) = S_3^3(5) + 2S_3^3(4)$, no geral percebemos que $S_5^3(n) = S_3^3(n) + 2S_3^3(n-1)$ pois:

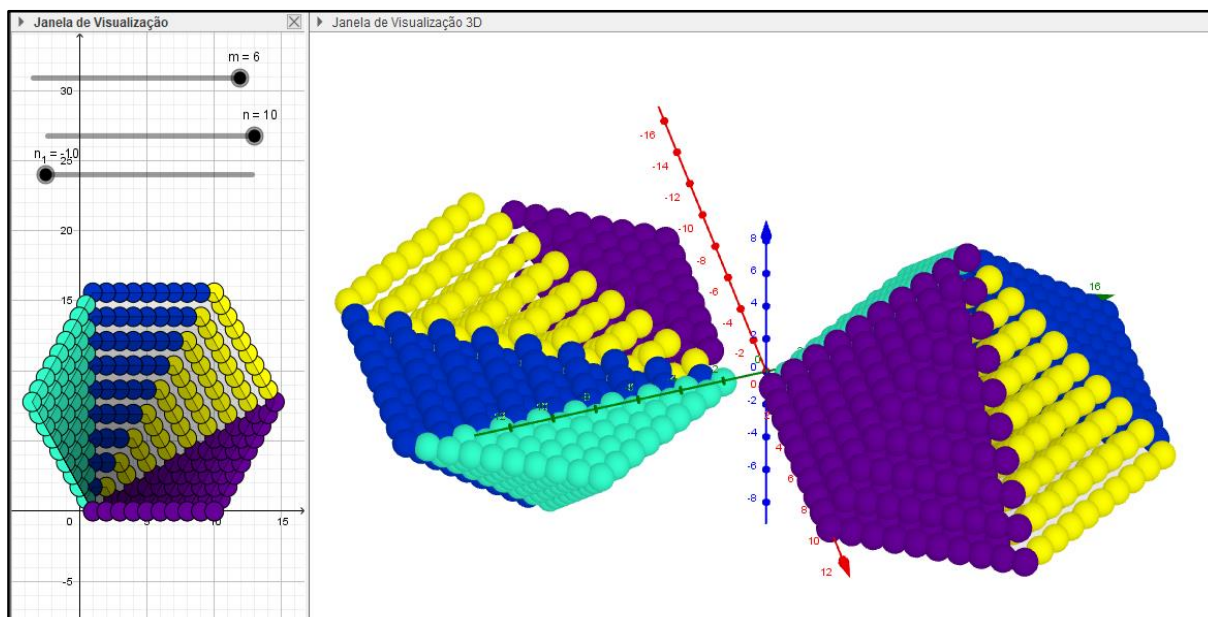
$$\begin{aligned}
 S_5^3(n) &= S_3^3(n) + 2S_3^3(n-1) \\
 &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{2(n-1)n(n+1)}{6} \\
 &= \frac{n(n+1)(n+2+2n-2)}{6} \\
 &= \frac{n(n+1)3n}{6} \\
 &= \frac{n^2(n+1)}{2}
 \end{aligned}$$

Pela fórmula geral percebemos que esta relação entre números piramidais pentagonais e números tetraédricos de fato é verdadeira, porém o que nos fornece a pirâmide de índices negativos pela figura é uma propriedade que tem uma relação entre as pirâmides de índices positivos e negativos, perceba que a pirâmide negativa da figura nos fornece $S_5^3(-5) = S_3^3(-5) + 2S_3^3(-6)$ o que sugere que $S_5^3(-n) = S_3^3(-n) + 2S_3^3(-n-1)$ este fato é verdadeiro pois:

$$\begin{aligned}
 S_5^3(-n) &= S_3^3(-n) + 2S_3^3(-n-1) \\
 &= -\left(\frac{(n-2)(n-1)n + 2(n-1)n(n+1)}{6}\right) \\
 &= -\left(\frac{n(n-1)(n-2+2n+2)}{6}\right) \\
 &= -\frac{n(n-1)3n}{6} \\
 &= -\frac{n^2(n-1)}{2}
 \end{aligned}$$

Observando os números piramidais hexagonais conforme a figura a seguir, temos esta relação presente.

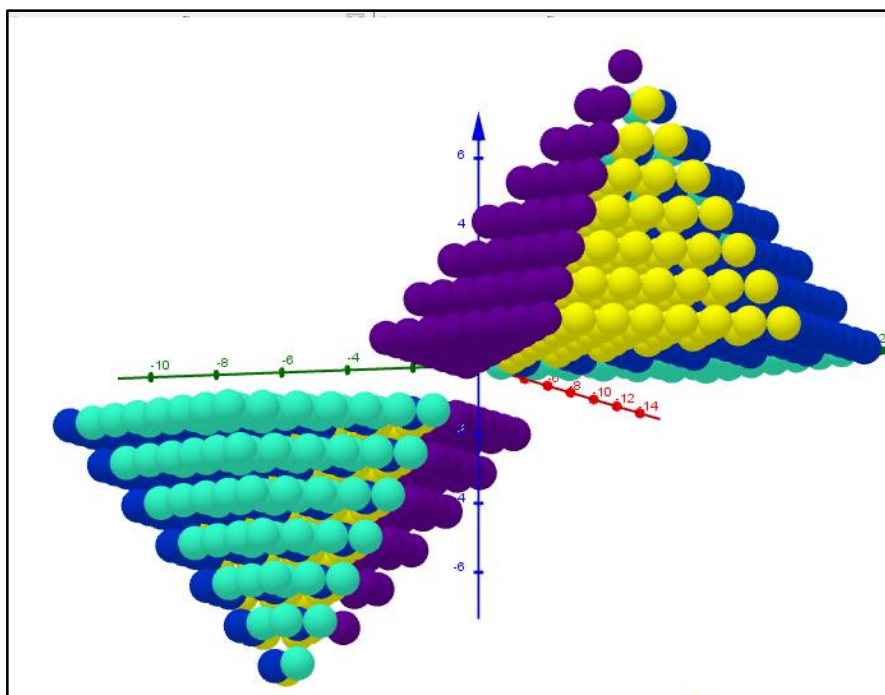
Figura 109- números piramidais hexagonais com $n=-5$ e $n=5$



Fonte: elaboração do autor

Nesta figura, podemos analisar a quantidade de números tetraédricos observando a base de cada pirâmide, também podemos observar a relação através da altura da pirâmide, conforme a próxima figura:

Figura 110- vista 3D de números piramidais hexagonais de índices opostos

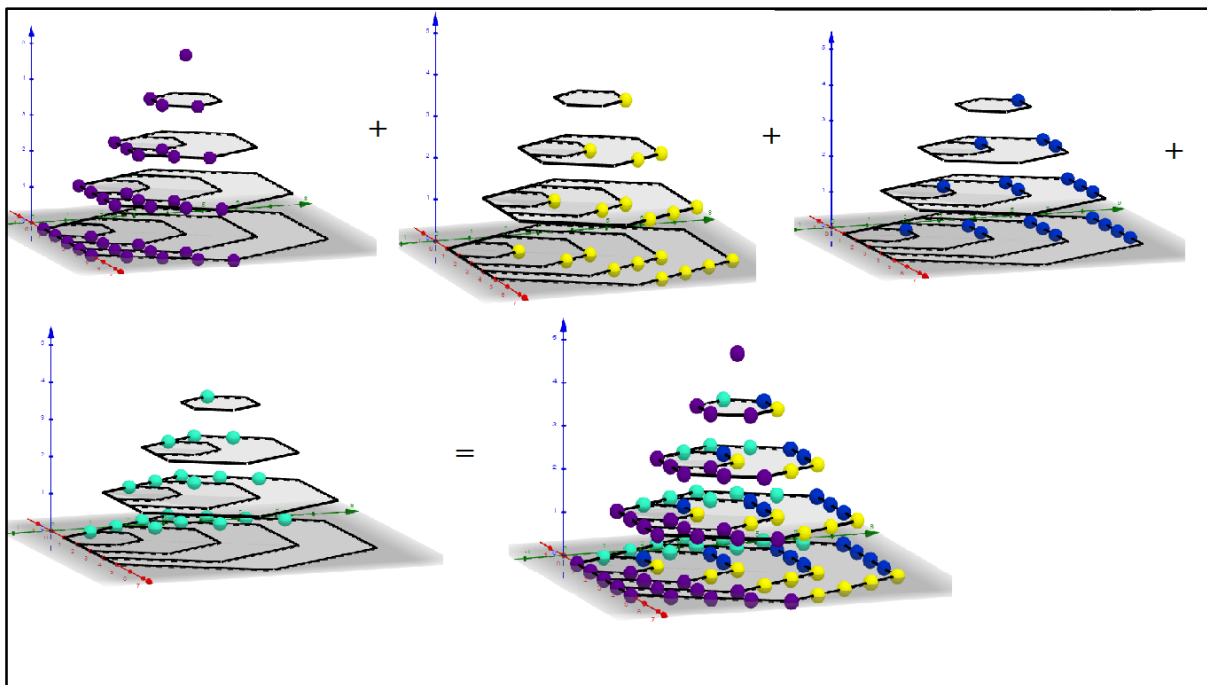


Fonte: elaboração do autor

Para que se possa observar melhor a relação, apresentaremos uma figura com a decomposição por números tetraédricos para formar um números piramidal hexagonais e assim

poderemos apresentar uma possível relação entre estes. As figuras a seguir, mostra esta decomposição para as pirâmides positivas e negativas, respectivamente.

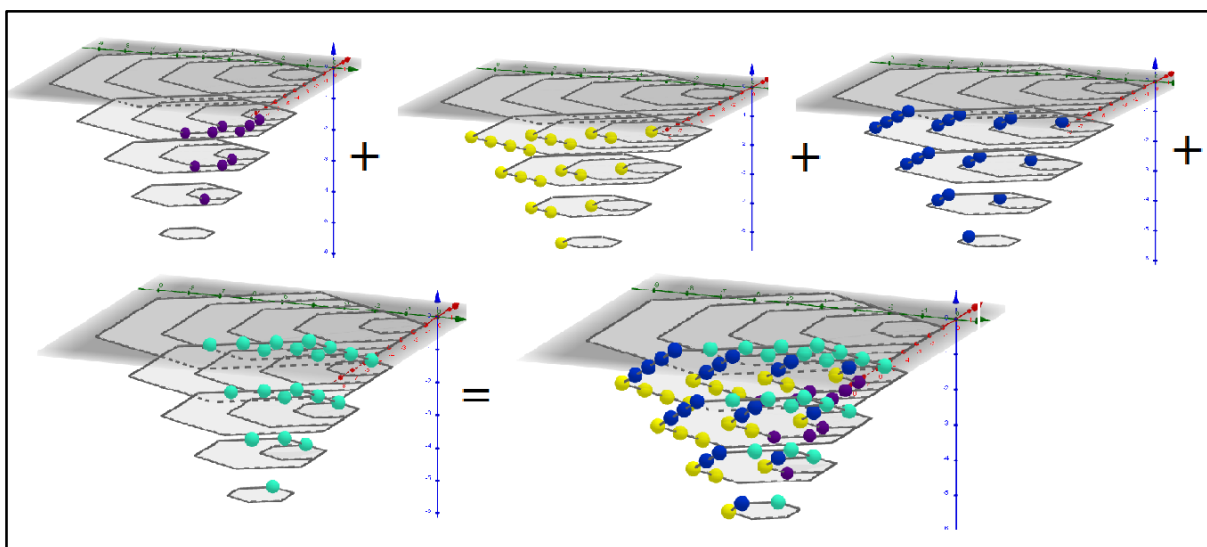
Figura 111- composição de um número piramidal hexagonal através de números tetraédricos



Fonte: elaboração do autor

Para as pirâmides com índices negativos, devemos observar que os números tetraédricos usados também são os de índices negativos, por isso vale a relação entre tetraédricos de índices positivos e negativos para identificarmos que número tetraédrico usamos para formar a pirâmide. Observemos então a próxima figura:

Figura 112- composição de um número piramidal hexagonal com índice negativo com números tetraédricos também de índices negativos



Fonte: dos autores

Percebemos que existe um padrão que nos permite encontrar uma relação entre os números piramidais *m-gonais* de índices positivos e seus análogos com índices negativos. Perceba que, pelas figuras apresentadas até o momento, para que se construa a *n-ésima* pirâmide de pontos com o polígono da base tendo *m* lados, é preciso usar:

$$\text{Para índices positivos: } S_m^3(n) = S_3^3(n) + (m-3)S_3^3(n-1)$$

Prova:

$$\begin{aligned} S_m^3(n) &= S_3^3(n) + (m-3)S_3^3(n-1) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2) + (m-3)(n-1)n(n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(mn - m - 3n + 3 + n + 2)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(mn - m - 2n + 5)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)((m-2)n - m + 5)}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Para índices negativos: } S_m^3(-n) = S_3^3(-n) + (m-3)S_3^3(-n-1)$$

Prova:

$$\begin{aligned} S_m^3(-n) &= S_3^3(-n) + (m-3)S_3^3(-n-1) \\ &= -\left(\frac{(n-2)(n-1)n + (m-3)(n-1)n(n+1)}{6} \right) \\ &= -\frac{n(n-1)(mn + m - 3n - 3 + n - 2)}{6} \\ &= -\frac{n(n-1)((m-2)n + m - 5)}{6} \end{aligned}$$

Assim, apresentamos a fórmula para os números piramidais com índices negativos através de números tetraédricos, mostrando a relação existente com seus análogos de índices positivos. Ademais, esta propriedade foi descoberta com o auxílio da visualização por meio do software GeoGebra, sem o qual ficaria um tanto quando difícil perceber tal relação.

4 VISUALIZAÇÃO DOS NÚMEROS FIGURADOS COM O ARRIMO DO SOFTWARE GEOGEBRA: ELABORANDO SITUAÇÕES DIDÁTICAS PARA O ENSINO

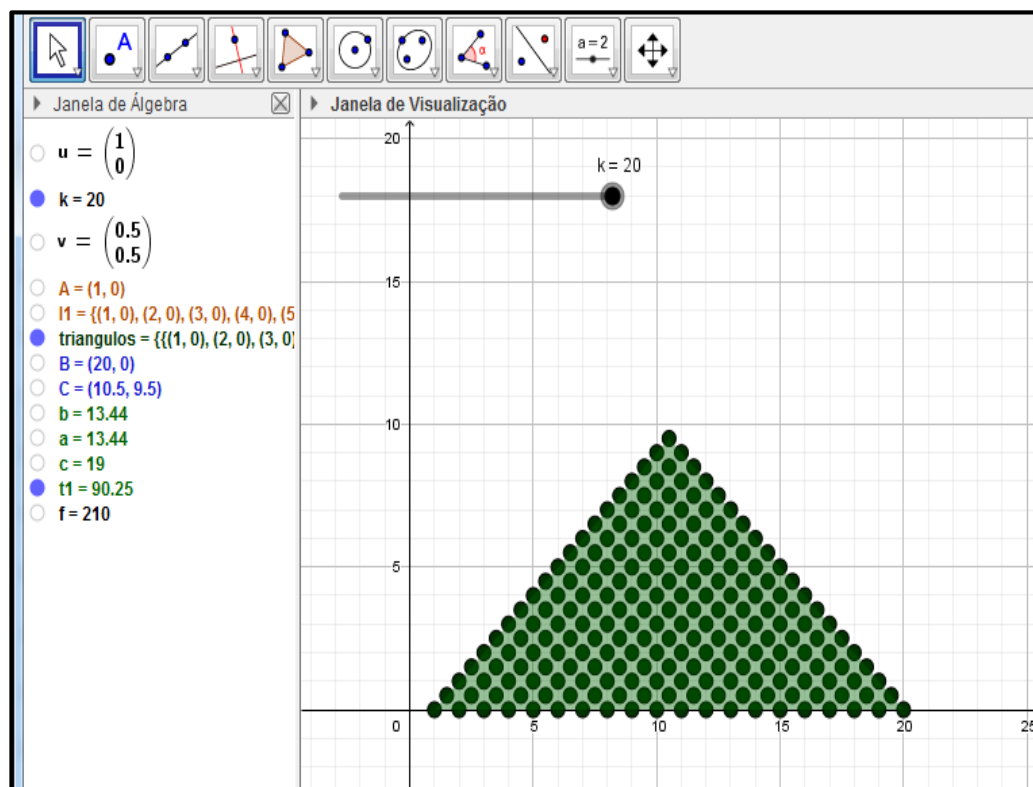
Para esta etapa, foram pensadas, situações didáticas que pudessem relacionar todos os temas principais deste trabalho, ou seja, formas de termo geral, recorrência e função geradora de alguns números figurados, generalização da classe de números simplexos, propriedades de NF com o arrimo do SG e por fim, relação entre números figurados também com o auxílio da visualização pelo SG, as situações foram criadas para a aplicação em uma turma de história da matemática do curso de licenciatura em matemática, do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia – IFCE – campus Fortaleza –CE no semestre 2020.1. A referida turma possui oito alunos que serão chamados aqui de A1, A2, ..., A8, a escolha dos números não teve relação com participação, acertos ou erros, e sim por sorteio. Os estudantes assinaram um termo de consentimento sobre a pesquisa e estão cientes que seus rostos não aparecerão na pesquisa, apenas seus escritos, os dados serão guardados pelo autor por um período de dois anos e os tramites do comitê de ética e pesquisa se encontram nos anexos deste escrito.

Dado este breve esclarecimento, seguiremos para a descrição das situações didáticas e o que se pretende, segundo a fase de análise *a priori* da Engenharia Didática

4.1 Situação didática 1: encontrar a fórmula para o n -ésimo número poligonal m -gonal.

Este tópico consiste em explicar como a visualização dos números figurados através do software geogebra, pode facilitar a obtenção de fórmulas de recorrência, termo geral e até funções geradoras, para isso os estudantes precisam entender como se deu a montagem das figuras e, principalmente observar padrões que seriam difíceis sem a visualização da figura, além do fato do software ter algumas funções que fazem com que as figuras apresente os termos desejados da sequência, diferentemente de uma figura que não pode ser editada, sendo assim, para o início da situação, será apresentada uma figura que corresponde aos números triangulares, conforme mostra a figura a seguir.

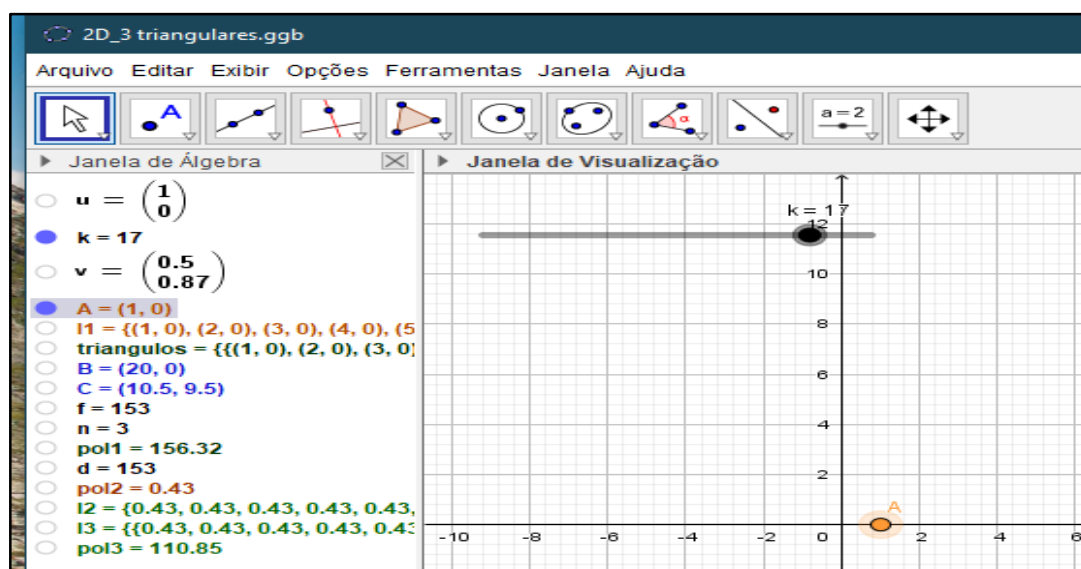
Figura 113 - números triangulares no software geogebra



Fonte: elaboração do autor

Os números triangulares são os primeiros estudados para visualização no software GeoGebra, isso porque também os primeiros apresentados na lista dos números figurados. Estes números são formados por uma sequência criada através de um ponto dado, esta sequência segue no eixo x ponto a ponto conforme a sequência vai aumentando

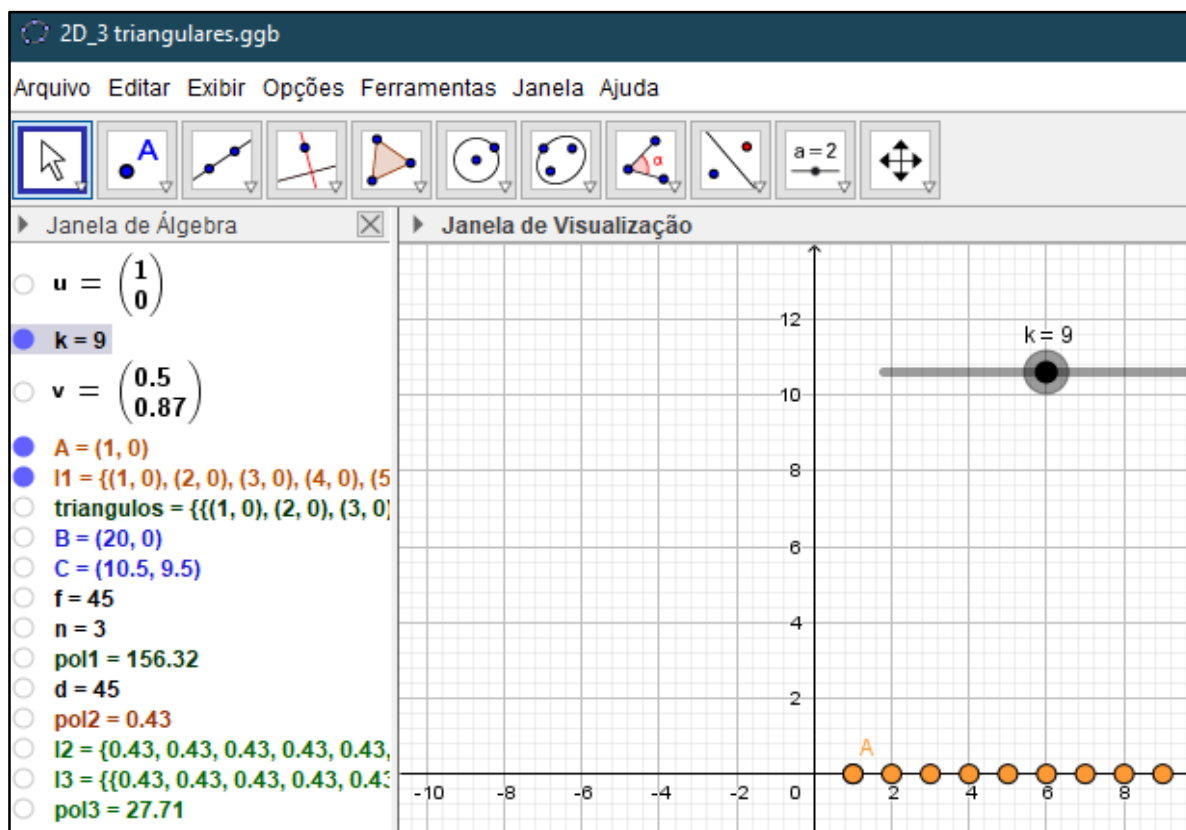
Figura 114 - ponto A dos números triangulares no software GeoGebra



Fonte: elaboração do autor

A figura apresenta o ponto A, este ponto é criado para que através dele, crie-se uma sequência de outros pontos que serão a base para os números triangulares, percebemos que o ponto A está marcado para que apenas este apareça no software, a seguir, apresentaremos a sequência construída através deste ponto dado.

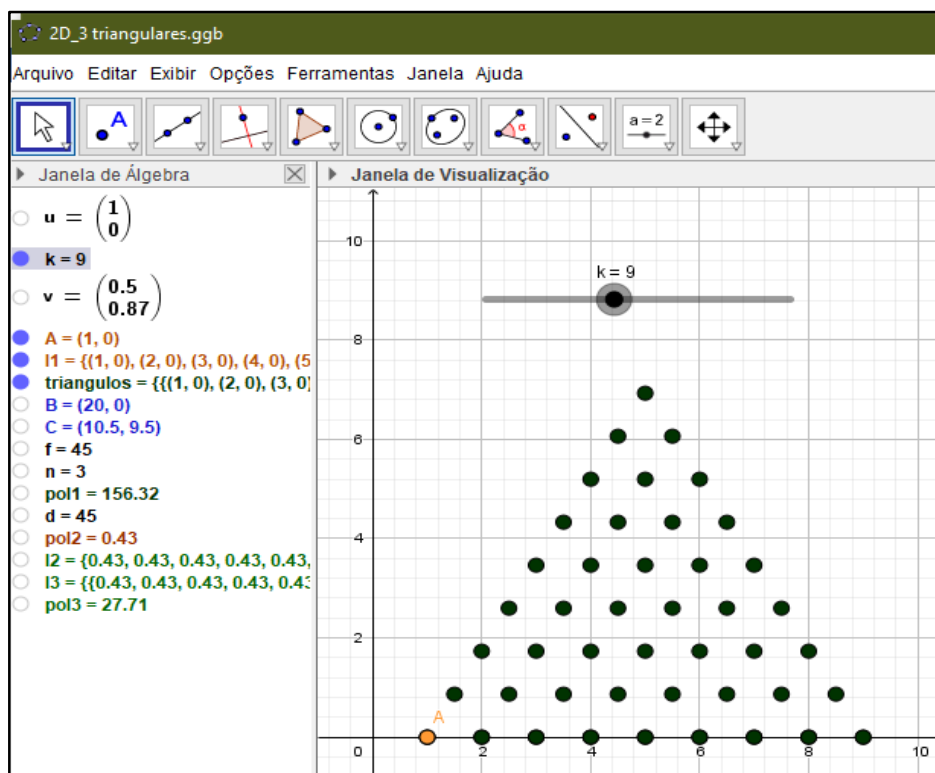
Figura 115 - lista de pontos dos números triangulares



Fonte: elaboração do autor

A figura apresentada, mostra a sequência gerada através do ponto a, esta lista recebe o nome de l1 ou seja, lista 1. Percebemos que precisamos criar outra sequência para que estes pontos formem triângulos, no entanto se esta sequência for formada da mesma maneira que formamos a primeira, a figura apresentada formará um quadrado e não um triângulo como pretendemos mostrar. Assim a próxima sequência precisa ser apenas de parte da lista 1, ou seja diminuindo um ponto a cada lista que surge no eixo y, a partir daí, temos um triângulos formados por pontos que formam os números triangulares conforme a figura a seguir

Figura 116 - sequência completa dos números triangulares no software GeoGebra

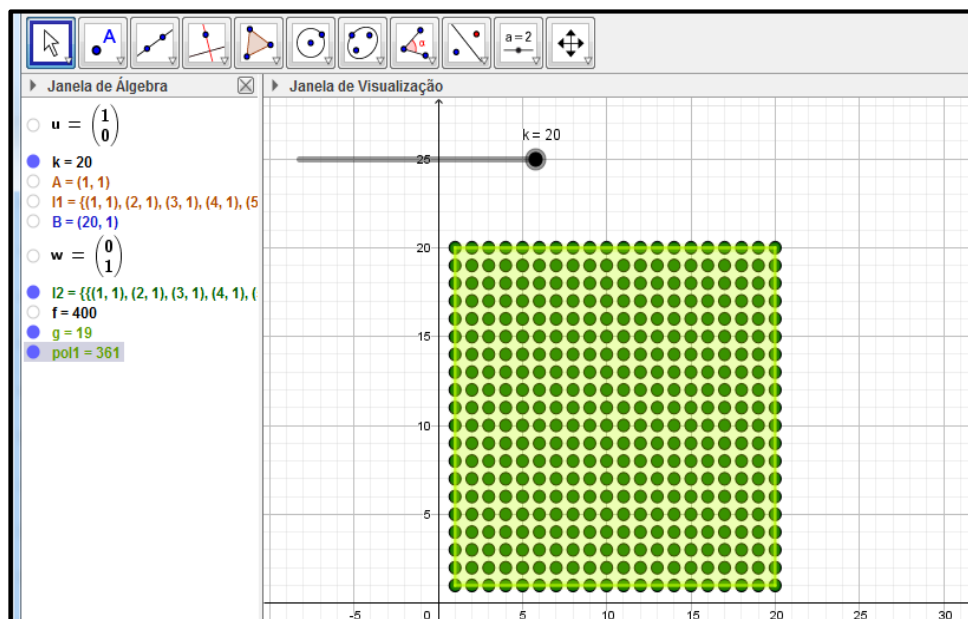


Fonte: elaboração do autor

Com isso, temos os números triangulares mostrados a partir de um recurso computacional, o que facilita a visualização além de apresentar possíveis passos para a obtenção da fórmula do termo geral para estes números, uma vez que a montagem desta sequência no software, exige que se procure por uma fórmula que adicione números naturais consecutivos, ou seja $1 + 2 + 3 + \dots + (n - 2) + (n - 1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$, como já foi demonstrado.

Para os números quadrados, o procedimento é similar, porém mais simples e pode surgir indutivamente a partir dos números triangulares, uma vez que não há a necessidade de que a lista criada seja apenas uma parte da lista 1, isto quer dizer que os números quadrados tem sua fórmula do termo geral $S_4(n) = n^2$, expressa na figura, ficando para o estudante apenas a demonstração por indução, o que se exige apenas conhecimentos matemáticos adquiridos no curso de licenciatura em matemática. Sendo assim, a figura apresentada por meio do software usado é mostrada a seguir:

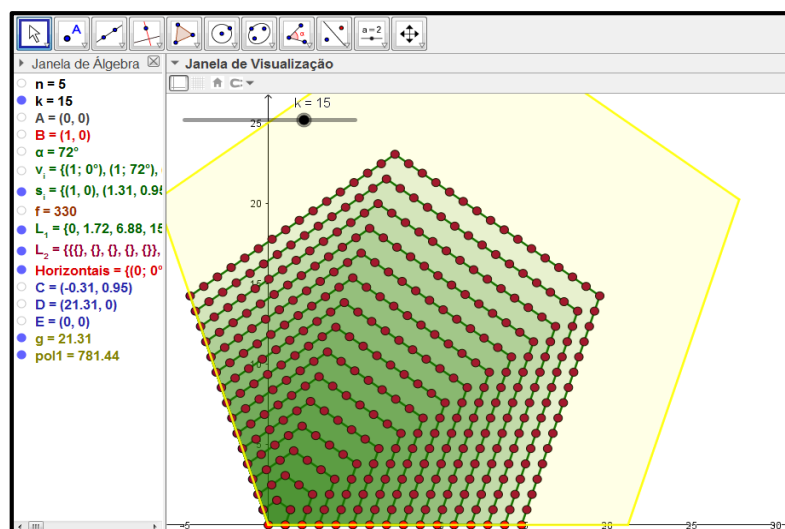
Figura 117 - números quadrados a partir do software GeoGebra



Fonte: elaboração do autor

Em uma situação didática proposta, a visualização deste número através do geogebra juntamente com os números triangulares mostrados anteriormente, apresentam um conjunto que pode facilitar a obtenção da recorrência e do termo geral, além de mostrar uma possível solução para a generalização dos números poligonais. Em resumo, são apresentados também os números pentagonais no software geogebra, para que os estudantes possam visualizar os números a procura de padrões que os ajudem a encontrar a recorrência para os números poligonais, os números pentagonais podem ser vistos na figura seguinte:

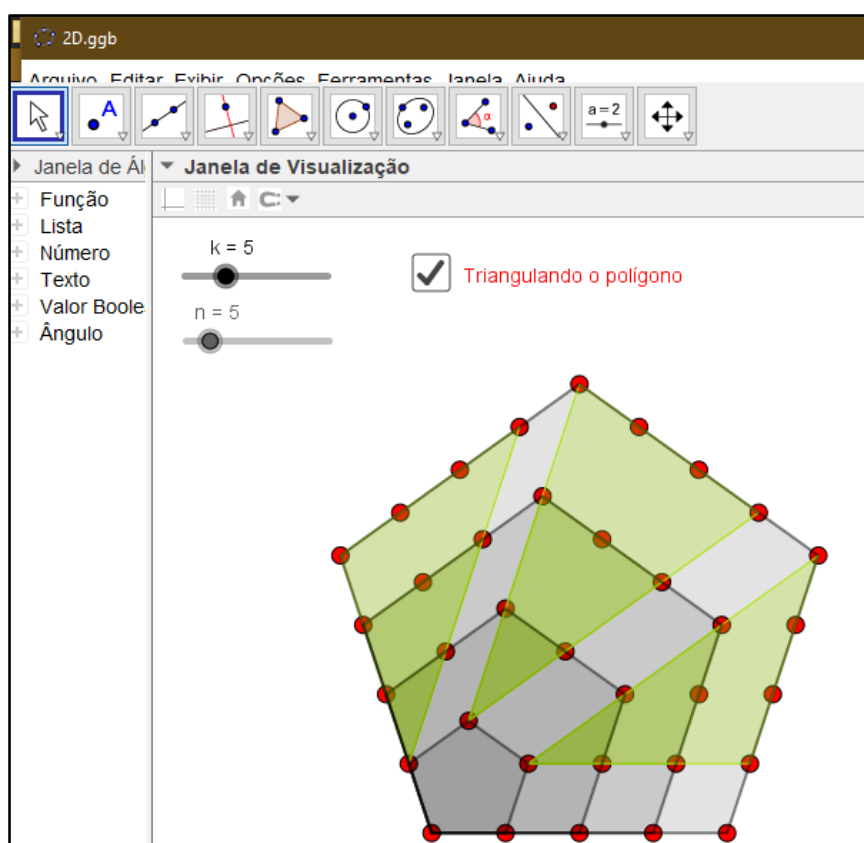
Figura 118 - números pentagonais no software GeoGebra



Fonte: elaboração do autor

Observe que quando estes números são apresentados no software para a visualização, o estudante pode perceber um padrão presente em todos os números poligonais, o fato deles serem formados basicamente por conjunto de números triangulares, desta maneira o estudante pode formular uma hipótese de indução que pode ser provada para um polígono de lado n . Observe a afirmação a partir da figura a seguir, lembrando que esta figura não deve ser mostrada para o aluno, pois este deverá constatar esta afirmação.

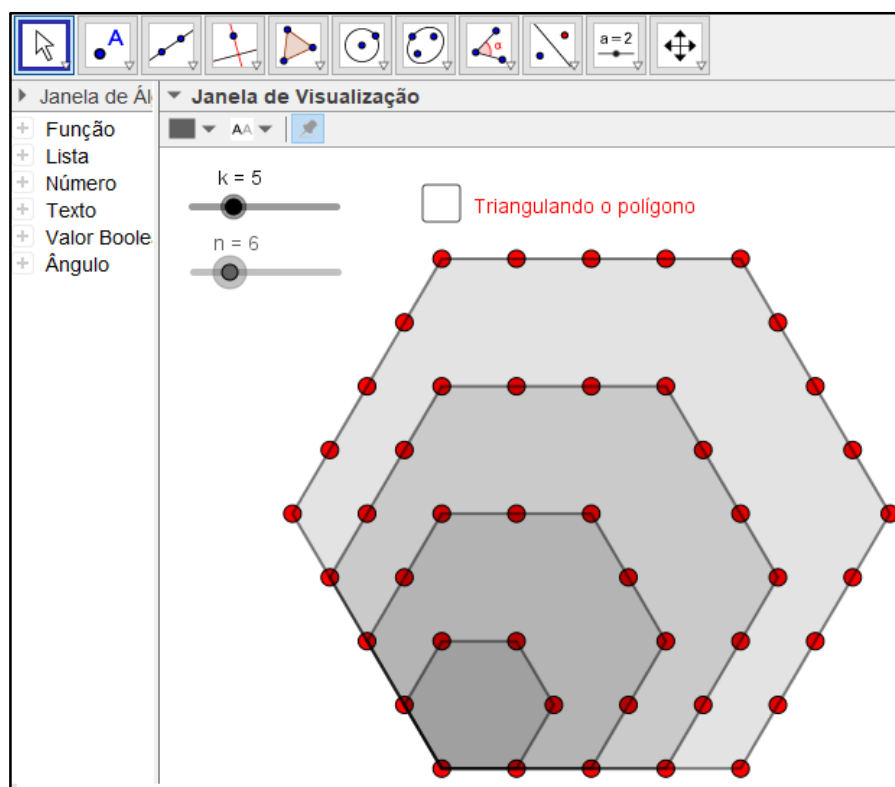
Figura 119 - números pentagonais triangulados



Fonte: elaboração do autor

Se o estudante perceber tal propriedade, é provável que consiga encontrar uma das maneiras de se provar a fórmula do termo geral para o n -ésimo número m -gonal, caso seja necessário, o professor deve apresentar também os números hexagonais, heptagonais e assim por diante. Perceba que se o estudante suspeitar da triangulação dos números poligonais e pedir para observar os próximos números, provavelmente vai ter certeza que este padrão é válido

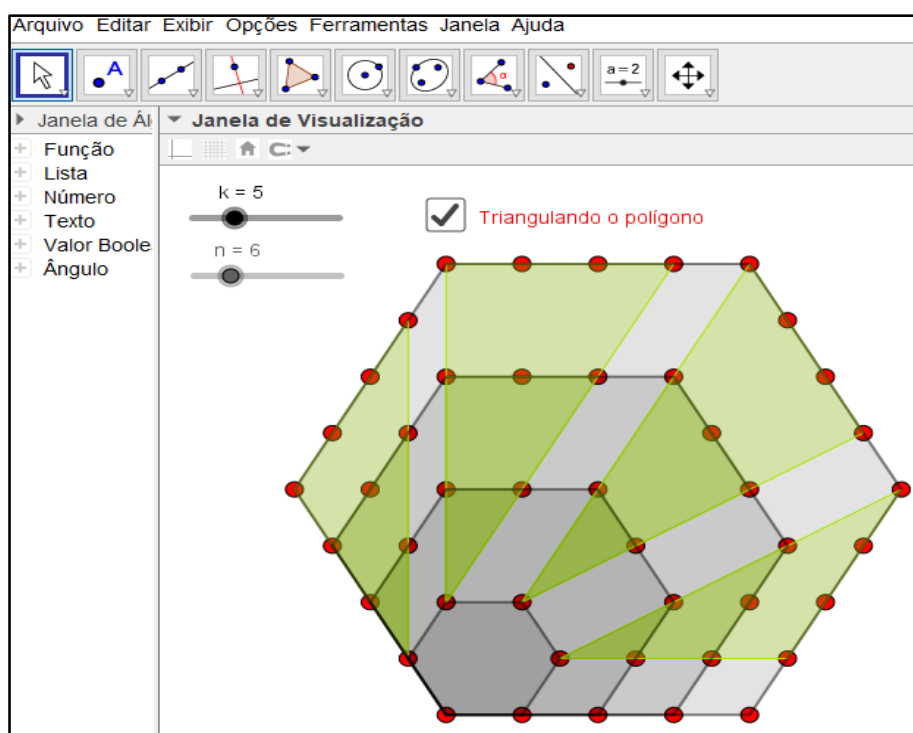
Figura 120 - números hexagonais com software GeoGebra



Fonte: elaboração do autor

O próprio estudante pode então desenhar os possíveis triângulos e constatar sua suspeita, o desenho obtido deverá ser o da figura a seguir:

Figura 121 - números hexagonais com triângulos



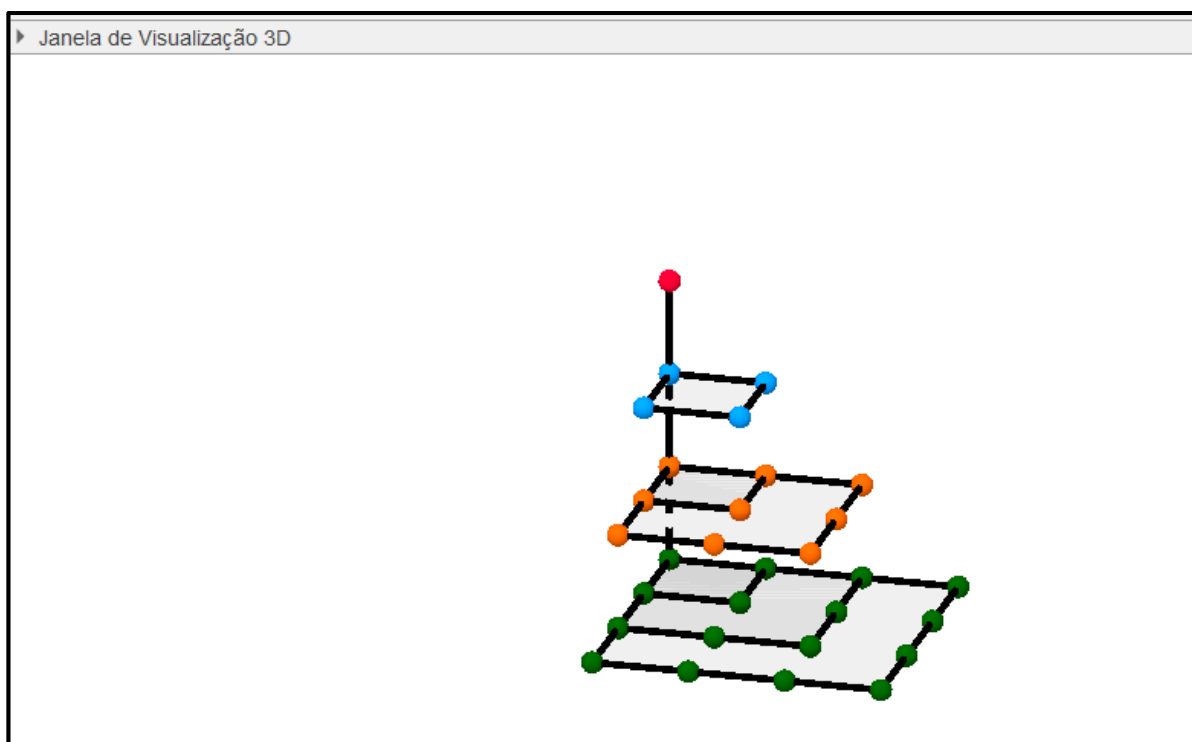
Fonte: elaboração do autor

Fonte: elaboração do autor

A visualização deste número figurado apresenta camadas de números triangulares seguidos, ou seja, é esperado que o estudante perceba pelo software que é possível formar números piramidais a partir de um somatório de números triangulares, o mesmo deve acontecer para os demais números piramidais em relação ao número poligonal correspondente.

Na medida em que o estudante estará formulando sua hipótese, pode ser necessário que se apresente outras pirâmides, no entanto é provável que ele perceba na primeira que basta somar números m -gonais consecutivos para se obter um número piramidal m -gonal, o professor pode apresentar um número piramidal, pentagonal, hexagonal e assim sucessivamente, a seguir, uma figura de um número piramidal quadrado e outra de um número piramidal hexagonal para que o estudante constate alguma possível hipótese que esteja formulando.

Figura 123 - número piramidais quadrados no SG



Fonte: elaboração do autor

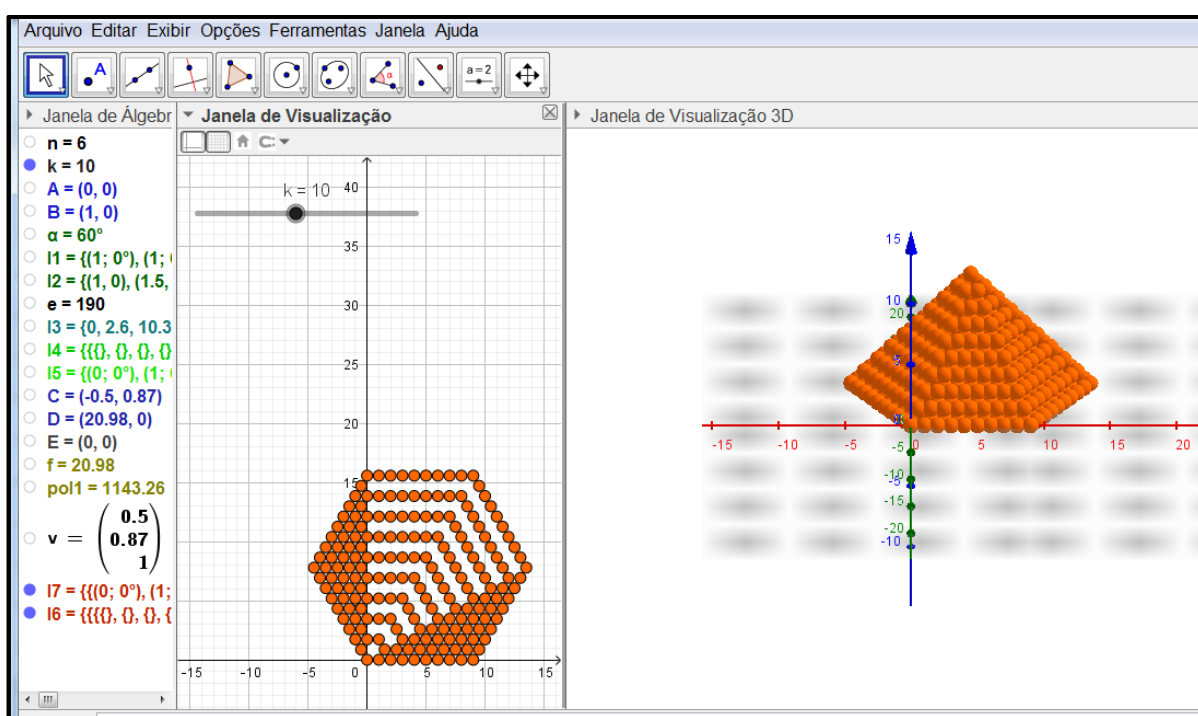
Percebemos que a figura acima possui cores destacadas, o que também é possível fazer no SG, para facilitar a visualização, esta figura também possui um espaço maior entre as camadas para que se perceba que se trata de uma soma de números quadrados consecutivos.

Esta figura será apresentada caso algum aluno queira visualizar uma propriedade que possa relacionar números piramidais. Vale lembrar que existem algumas maneiras de se encontrar a fórmula desejada, principalmente se o aluno desenvolve este pensamento utilizando o SG, estas maneiras são:

1. por meio do somatório de números m -gonais
2. utilizando propriedades de relacionam números piramidais triangulares
3. de forma algébrica, percebendo as relações existentes na forma geral dos números piramidais de base triangular, quadrado e pentagonal.

Algumas outras figuras podem ser disponibilizadas, somente se o estudante requisitar para tirar suas conclusões, como é o caso dos número piramidais hexagonais presentes na figura a seguir:

Figura 124 - números piramidais hexagonais no SG

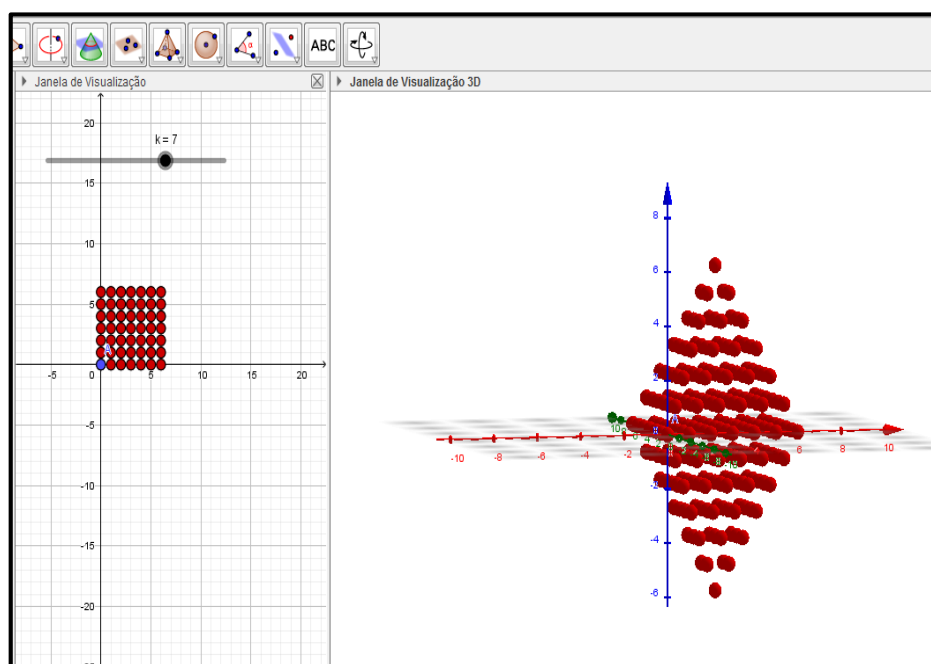


Fonte: elaboração do autor

A figura apresentada indica o mesmo que os números piramidais triangulares, porém pode haver a necessidade de visualização por algum estudante ainda não convicto de suas descobertas.

Partindo destas descobertas os estudantes deverão estar preparados para encontrar a forma geral dos números platônicos que possuem uma forma própria, já descrita anteriormente, porém muito difícil de ser encontrada em apenas uma aula. O SG fornece uma visualização que pode descrever de maneira mais rápida esta fórmula, por meio da composição de números tetraédricos, neste momento os estudantes já devem saber que qualquer número 3D pode ser formado usando números tetraédricos, assim apresentamos a próxima figura:

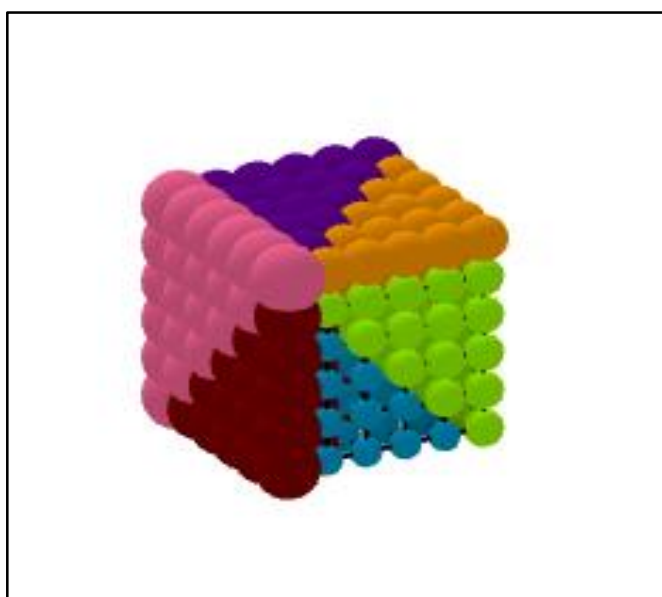
Figura 125 - números octaedrais no SG



Fonte: elaboração do autor

A visualização dos números octaedrais pode ajudar o estudante em constatar que se trata de dois números piramidais quadrados consecutivos, tal fato pode não ser perceptível apenas com o conhecimento de um octaedro pois pode trazer a confusão de são, na verdade a soma de dois números piramidais quadrados iguais. Se esta visualização não for suficiente (e provavelmente não será) os alunos podem observar como se forma um número cúbico através de composição de números tetraédricos, conforme a figura:

Figura 126 - número cúbico separado em pirâmides triangulares



Fonte: elaboração do autor

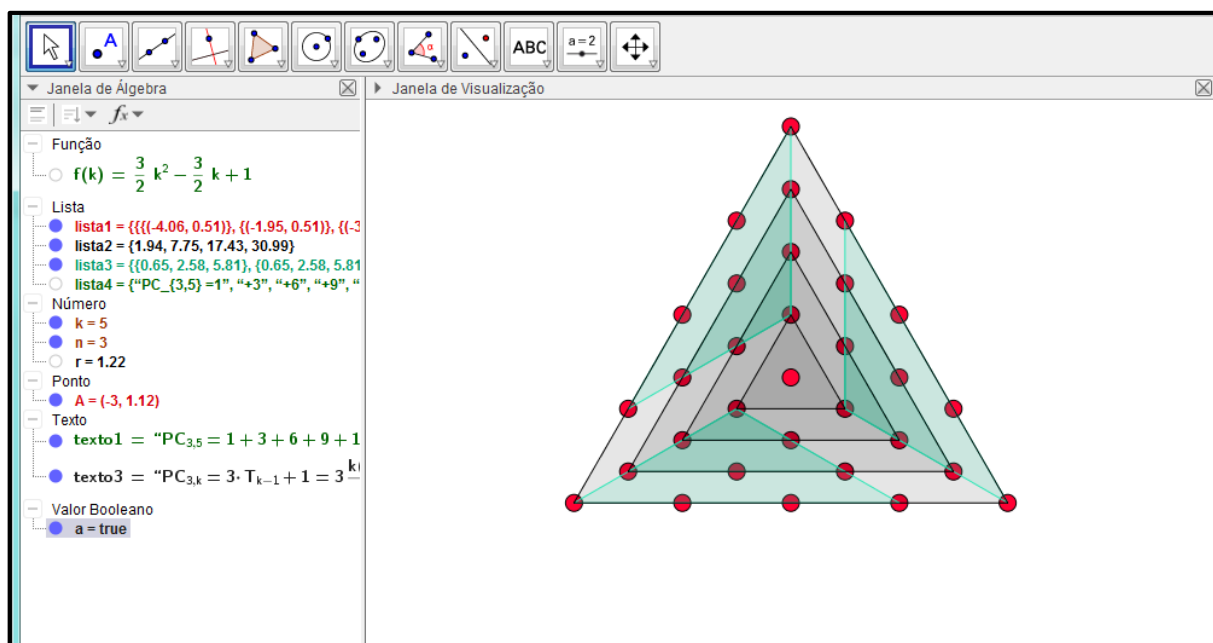
Neste momento os estudantes já podem perceber que os números figurados vistos como composição de outros são mais simples para descrever suas formas gerais, então podemos partir para a terceira situação, que não envolve a visualização de figuras, porém a noção de formação de números figurados a partir de outros.

Sobre os possíveis obstáculos que poderão ser encontrados nesta situação, destacaremos que os estudantes podem não perceber que a propriedade apresentada do início, se refere aos números piramidais quadrados, a figura da pirâmide quadrada só será apresentada caso algum estudante faça essa afirmação, pois essa visualização certamente os levaria a formular rapidamente a uma forma apenas por meio da visualização, e a situação é mais voltada para a parte algébrica. De modo que se os estudantes não compreenderem ou não conseguirem encontrar a fórmula que generaliza os números piramidais *m-gonais*, a solução será partir para a terceira situação, onde a visualização será o ponto principal, tal fato pode realmente mostrar o quanto a visualização facilita na procura pelas fórmulas desejadas, a princípio a próxima situação seria para encontrar relações entre números figurados planos, estrelados e piramidais centralizados, porém se não for possível generalizar os números *m-gonais* e platônicos de forma algébrica na situação 2, esta serão repassadas para a situação 3 e serão resolvidas por meio da visualização pelo SG

4.3 Situação didática 3: propriedades de números figurados

Esta situação tem como objetivo principal, explorar as funcionalidades do SG, através de figuras já construídas, os estudantes encontrarão algumas propriedades apenas de maneira visual, porém estas servirão de base para outras propriedades, um exemplo, a medida em que eles forem descobrindo propriedades com o auxílio do SG, surgirão perguntas de possíveis generalizações de modo que a visualização apresente tal caminho, serão lançadas uma série de perguntas em relação aos números poligonais, poligonais centralizados, piramidais e platônicos, e a construção será dada com uma montagem de números figurados a partir de números simplexos, ou seja, para números planos os alunos deverão encontrar as propriedades que os relacionam com números triangulares, para números piramidais e platônicos, os relacionados serão os números tetraédricos, a figura a seguir apresenta um número triangular centralizado, formado a partir de números tetraédricos

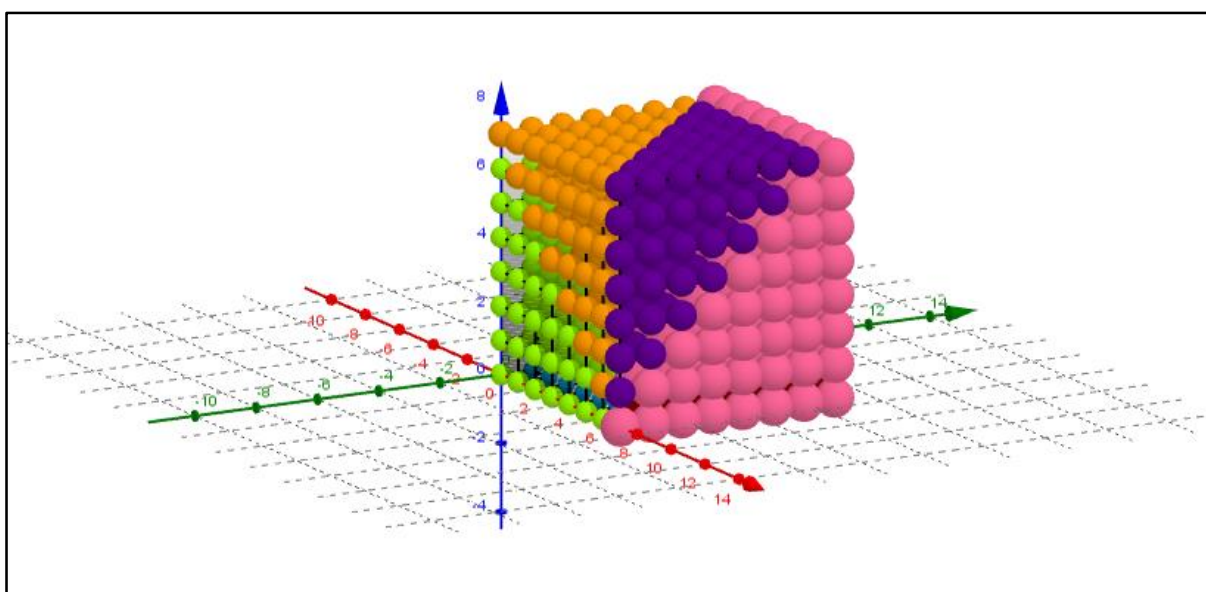
Figura 127 - números triangulares centralizados com triângulos



Fonte: elaboração do autor

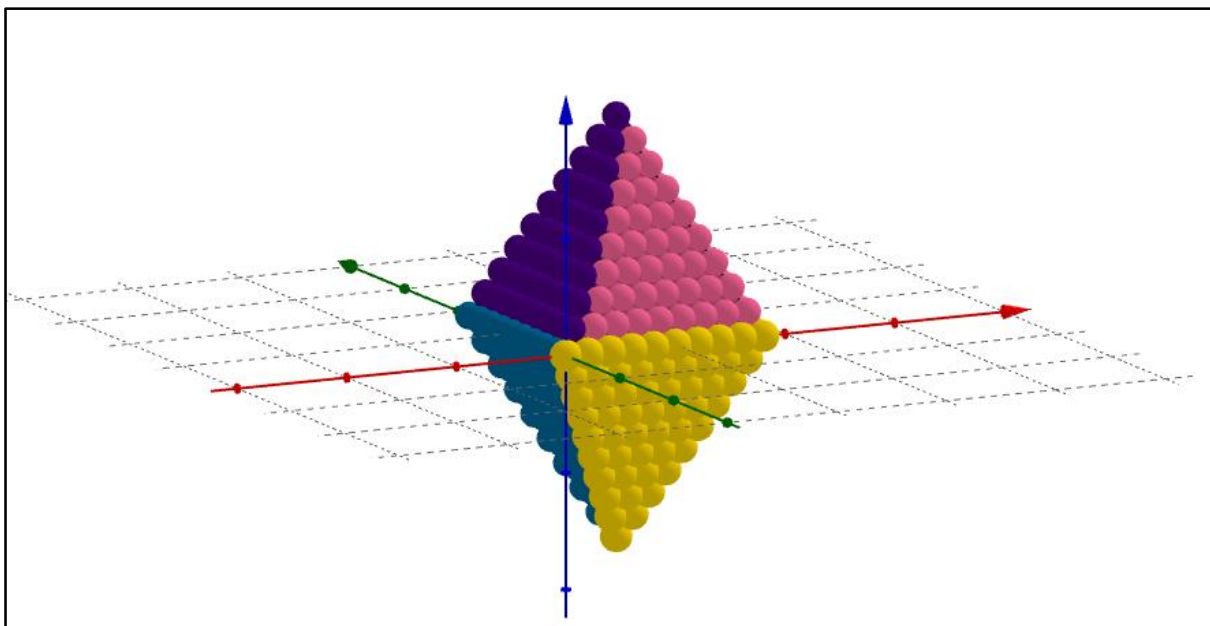
Esta figura representa um número triangular centralizado e sua relação com os números triangulares comuns, tal relação é fundamental para se determinar a fórmula do termo geral para esta sequência, bem como uma formalização para números poligonais centralizados, da mesma forma podemos escrever uma formalização de números platônicos a partir de figuras de números cúbicos e octaédrais formados a partir de números tetraédricos, conforme as figura a seguir:

Figura 128 - números cúbicos a partir de númros tetraédricos



Fonte: elaboração do autor

Figura 129 - números octaédrais a partir de números tetraédricos



Fonte: do autor

Os estudantes devem ser capazes de, a partir destas figuras formalizarem uma proposta para generalizar números platônicos e o mesmo pode ser visto para números piramidais. Esta situação apresenta uma outra maneira de encontrar fórmulas de números platônicos exclusiva deste trabalho e sua resolução se encontra na seção que trata das propriedades de números figurados

Vale lembrar que os estudantes já devem ter estas fórmulas para os números platônicos da situação 2, porém se eles não a tiverem, elas serão apresentadas para que eles confirmem por meio da visualização no SG

4.4 Situação didática 4: descrever a função geradora dos números poligonais e simplexos

Esta situação tem o objetivo de explorar a visualização de propriedades porém sem a visualização da figura, pois as FG são descritas como termos algébricos, contudo sua composição pode ser feita utilizando propriedades já exploradas. Nesta situação, o estudante deverá ser capaz de encontrar funções geradoras para alguns números figurados a partir da FG dos números lineares e triangulares, tais formas serão apresentadas juntas para que os estudantes encontrem as relações entre as funções e possam relacionar com outras utilizando as propriedades já vistas, para relembrar, as funções geradoras dos números lineares e triangulares são, respectivamente: $G[S_3^1(n), x] = \frac{x}{(1-x)^2}, |x| < 1$ e $G[S_3(n), x] = \frac{x}{(1-x)^3}, |x| < 1$, estas possuem

uma diferença apenas no expoente do denominador, pois os números triangulares são o somatório dos números naturais, assim os estudantes serão levados a concluir que para a classe de números simplexos podemos apenas adicionar unidades no expoente do denominador a medida que a dimensão aumenta, eles serão levados a crer que a FG dos números simplexos k -dimensionais podem ser representados pela função geradora $G[S_3^k(n), x] = \frac{x}{(1-x)^{k+1}}, |x| < 1$

esse fato pode ser provado como já foi visto, porém os alunos deverão apresentar tal prova no momento de validação.

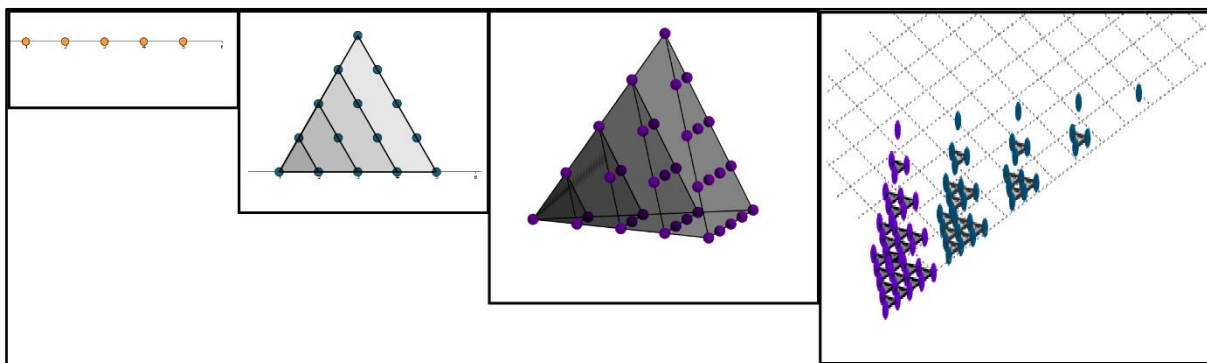
Para a FG dos números poligonais, os estudantes deverão ser capazes de enxergar as propriedades já vistas anteriormente e relacioná-las com as funções geradoras, um exemplo é a FG dos números quadrados que podem ser encontradas a partir da soma de duas FG de números triangulares bem como a propriedade de números quadrados seguinte $S_4(n) = S_3(n) + S_3(n-1)$ os estudantes deverão encontrar uma função geradora que possa apresentar os termos dos números triangulares de modo que corresponda a sequência do $(n-1)$ -ésimo número triangular, depois apresentarão as formas dadas para que seja mostrada no SG. Vale lembrar que os estudantes deverão apresentar a prova de tais descobertas, porém também serão aceitas as respostas testadas no SG uma vez que o conteúdo explora a visualização das propriedades.

4.5 Situação didática 5: forma geral dos números simplexos

Diante de todas as situações propostas, devemos supor que os estudantes tenham condições de descrever a forma geral e recorrência de uma classe de números, no caso os números simplexos, estes números são, junto com os ortoplexos e hipercubos, as generalizações da presente pesquisa, porém optamos por usar apenas esta classe como situação para generalização, deixando as outras duas apenas como informações adicionais na pesquisa.

Para a apresentação da situação, será mostrado aos estudantes, forma geral, recorrência e visualização dos números simplexos de desde a primeira a quarta dimensão, vale lembrar que estas são as possibilidades de visualização no SG, por isso não poderemos apresentar outras caso os estudantes precisem, porém acreditamos não ser necessário uma vez que quadro dimensões serão suficientes para que os alunos encontrem a regularidade necessária e assim, generalizar a classe, na imagem a seguir é possível observar tais representações.

Figura 130 - crescimento dimensional dos números simplexos



Fonte: autor

As perguntas seguirão a lógica das dimensões com uma possível relação entre a primeira e a segunda através da recorrência, logo a seguir usar a mesma relação da segunda para a terceira e assim por diante, tal generalização já fora apresentada no tópico que trata da classe dos simplexos, os obstáculos encontrados deverão ser do tipo algébrico ou a não relação com o aumento da dimensão, porém superado estes obstáculos espera-se que os alunos consigam apresentar a prova, vale lembrar que o uso da visualização não irá contribuir de maneira significativa para a conclusão da situação, mas servirá de base para que os estudantes tenham uma representação k -dimensional dos números simplexos.

5 DISCUSSÃO DOS DADOS

De acordo com a Engenharia Didática, na quarta fase acontece a análise *a posteriori*, em que os dados são analisados para uma melhor compreensão das consequências da intervenção da ED no estudante, tal análise sugere que a situação foi útil para a aprendizagem do conteúdo ou se foram observadas falhas que comprometeram a situação proposta, com base na validação interna dos dados. Neste sentido, discutiremos nessa seção, observações relevantes acerca das observações feitas durante a validação e como estas nos conduzirão para um melhor entendimento das situações didáticas elaboradas. Vale lembrar que foram abordados em sala apenas uma parte dos números figurados estudados em seu crescimento dimensional, no nosso caso os simplexos, outras discussões foram feitas com base nesse crescimento para que pudesse ser feita uma base para uma possível discussão do crescimento dimensional dos demais números figurados e suas representações.

O crescimento dimensional dos números simplexos, dentro das situações, são distribuídos nas suas respectivas dimensões, juntamente com outras duas classe dos números figurados, a classe dos números poligonais e a classe dos números piramidais, no processo de descrição dos números figurados da classe simplex, começa pela apresentação dos números triangulares, abordando o *gnômon* como ente na composição do próximo número triangular, a partir dessa definição os estudantes são desafiados a encontrar os números quadrados e seu *gnômon*, e assim, definimos números figurados de duas dimensões até que os estudantes percebam que podemos generalizar para uma fórmula fechada, uma recorrência e uma função geradora para os números poligonais em geral, a figura que representa o mapa mental do crescimento dos números simplexos se encontra no apêndice A desta pesquisa.

Para estas situações devemos ressaltar que sempre que é proposta uma sequência, é pedido para que os alunos encontrem uma recorrência, a fórmula do termo geral e que esta seja provada por meio da indução finita, bem como a função geradora para cada sequência, em alguns casos é necessário também analisar possíveis relações entre os números para que as propriedades encontradas possam ajudar na próxima sequência.

5.1 Validação interna e a análise *a posteriori*

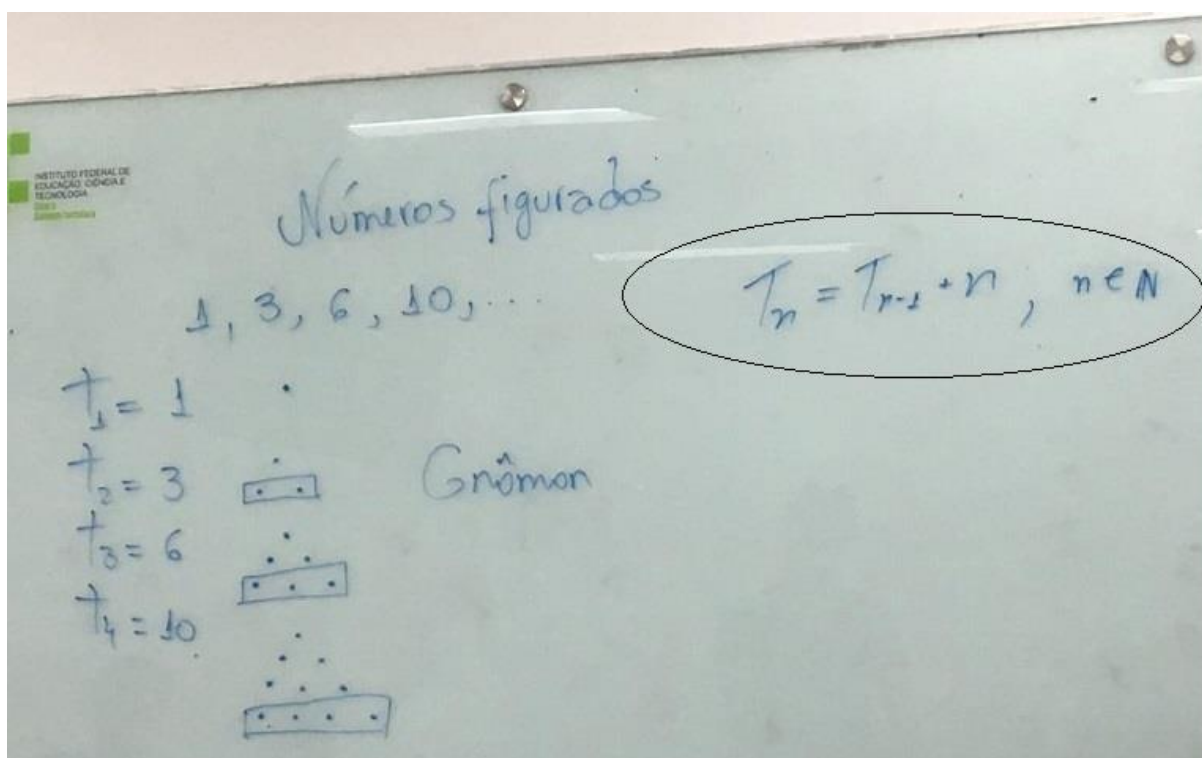
Para analisar a validação interna das situações propostas, foram pensados em atividades que instigassem os estudantes a procurar generalizar todas as sequências a partir da ideia deixada de uma sequência anterior, para tanto apresentamos como primeira situação a definição de números triangulares, bem como seu surgimento pelos pitagóricos, a definição desses

números nos permitiu questionar como encontrar uma fórmula para definir os números triangulares por meio de uma recorrência.

5.1.1 Validação da situação 1: encontrar a recorrência e termo geral para os números poligonais

Para esta situação didática, foram criadas alguns questionamentos que giravam em torno de: determinar a forma geral e recorrência dos números triangulares, analisar o *gnômon* dos números poligonais e relacionar números poligonais a progressões aritméticas. Estes questionamentos colocaram os estudantes no que chamamos de fase de ação da TSD, pois os alunos são colocados diante de problemas e procuram analisá-los em busca da resolução, diante disso, foi apresentado aos estudantes os primeiros números triangulares, e uma forma de organizá-los usando pontos, conforme a figura a seguir:

Figura 131 - apresentação dos números triangulares



Fonte: dados da pesquisa

A figura apresenta as primeiras definições dos números figurados triangulares e a montagem por pontos feitas para que se perceba a recorrência da sequência, o Aluno A2 escreveu a sua percepção de como estava enxergando essa recorrência na lousa, mostrando que a fase da ação e da formulação da ideia foram simultâneas. A parte circulada na figura apresenta a resposta do estudante A2 para a recorrência dos números triangulares de maneira imediata a pergunta feita, dando fim ao primeiro questionamento e deixando uma margem para a

apresentação do segundo que seria encontrar uma fórmula fechada que nos permitisse encontrar qualquer número triangular se a necessidade do anterior. Vale lembrar que a validação foi dada pelo próprio professor por se tratar de uma definição relativamente simples, em seguida apresentaremos as próximas figuras para mostrar as frases de ação, formulação e validação do próximo questionamento que trata da fórmula fechada para os números triangulares, também conhecida como fórmula para o termo geral.

Para isto os estudantes já estavam em posse do conhecimento passado pelo aluno A2, então e perceberam quase que instantaneamente que os números triangulares poderiam ser colocados como “a soma dos n primeiros números naturais” (Aluno A5) então a estudante em questão apresentou os cálculos contidos na figura a seguir:

Figura 132 - termo geral para os números triangulares (Aluna A5 situação de ação)

The image shows a whiteboard with the following handwritten content:

- A boxed title: Soma da PA
- The first formula: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i$
- The second formula: $1 + 2 + \dots + (n-1) + n$
- The third formula: $1 + 2 + \dots + n$

Fonte: dados da pesquisa

Na figura acima, podemos observar a fase de ação de um dos estudantes na montagem de uma fórmula fechada para os números triangulares como soma de termos ou dos seus *gnômons*. A relação que foi dada foi a soma de uma P.A dada como uma informação para que os estudantes pudessem estabelecer uma relação entre as somas das progressões aritméticas

com os números poligonais, em seguida a aluna A5 propõe uma fórmula que poderá representar um número triangular sem a necessidade do seu anterior. Vale lembrar que para que a fórmula seja válida é preciso provar pelo método da indução finita.

Figura 133 - fórmula fechada dos números triangulares (Aluna A5 - fase de validação)

Soma da P.A.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i$$

$$1 + 2 + \dots + (n-1) + n$$

$$T_n = \frac{(n+1) \cdot n}{2}$$

Fonte: dados da pesquisa

Para que essa fórmula seja validada, os estudantes foram questionados sobre como poderíamos considerar que pudesse ser válida para um certo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, deste modo podemos identificar mais uma vez, os estudantes na fase de formulação com base na próxima figura.

Figura 134 - fase de formulação para a prova de indução dos números triangulares (Aluno A6)

1. prove que a fórmula do n -ésimo número triangular é válida para $n+1$.

$$T_n = \frac{(n+1) \cdot n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

então supomos para $n+1$

$$T_{n+1} = \frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2}$$

$$T_{n+1} = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$$

Simétrico entre as sequências estudadas.

Fonte: dados da pesquisa

Na figura acima, podemos perceber um dos alunos na fase de ação, percebemos que o mesmo não utiliza a prova por indução de maneira correta, pois já parte da prova feita. Ao continuar o cálculo, o estudante não consegue desenvolver o raciocínio em busca do resultado, o que nos permite uma interferência com a finalidade de sanar quaisquer dúvidas, é válido

deixar que o aluno erre para que a correção da questão estabeleça nele um percurso de ações destinadas a encontrar onde ocorreu tal erro, o mesmo aluno propõe como resposta final, após a intervenção do professor mesmo que este não tenha lhe dado nenhuma resposta, a expressão contida na figura a seguir:

Figura 135 - fase de formulação do aluno A6 depois da intervenção

Handwritten mathematical work by student A6. The text includes "triangular é válida para $n+1$." and "suponha para $n+1$ ". The formula $T_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ is written. A diagram shows a triangular arrangement of dots. The expression $(n+1) \cdot \frac{n}{2} + n+1$ is circled in black.

Fonte: dados da pesquisa

Percebemos que mesmo que o aluno não tenha chegado a resposta, as constantes posições assumidas durante a fase de ação, lhe permite recomeçar, desta vez com uma análise correta da prova por indução. A seguir, uma resposta proposta com o segundo passo da indução. Figura 136 - segundo passo da indução (Aluno A2 - fase de validação)

Handwritten mathematical work by student A2. It shows a sequence of diagrams representing triangular numbers (1 dot, 3 dots, 6 dots, 10 dots, 15 dots). Below the diagrams, the text "Atividade:" is followed by "1. prove que a fórmula do n -ésimo número triangular é válida para $n+1$." The formula $T_n = \frac{(n+1) \cdot n}{2}$ is written. The formula $T_{n+1} = \frac{(n+1) \cdot n}{2} + n+1$ is written. The formula $T_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ is written. The formula $T_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ is written.

Fonte: dados da pesquisa

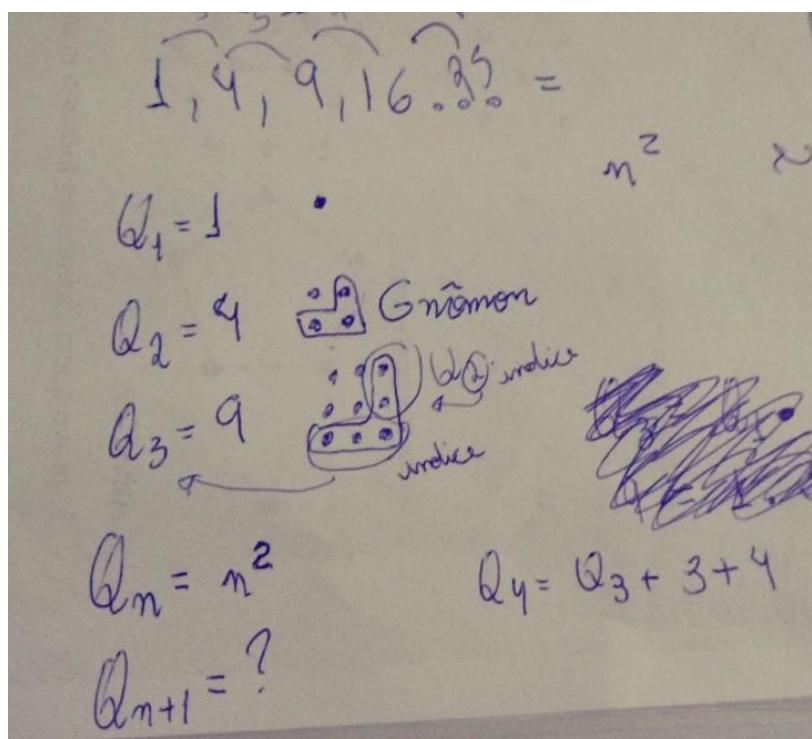
Para comparar com o aluno A6, o aluno A2 propôs corretamente a prova de indução, porém não conferiu para $n=1$, ou seja, não está completa embora segunda parte esteja bem desenvolvida.

Para a continuação da situação, pedimos que os alunos descrevessem o comportamento para os números quadrados, vale lembrar que a situação didática propõe uma forma de determinar os números poligonais, para isto os alunos precisariam descrever números

triangulares, quadrados, pentagonais, e ainda que não fosse visualizada uma possível solução, seria necessário descrever outros números.

Para a fase de ação dessa segunda questão, os estudantes se depararam com a sequência e fizeram os primeiros procedimentos comparando com a sequência dos números triangulares. É importante lembrar que como se trata de números que podem ser representados como figuras, as fases de ação e formulação aconteçam justamente usando-as, para tanto, observamos na figura seguinte que o aluno A2 recorre a figura de números quadrados bem como o *gnômon* para as primeiras análises sobre a sequência.

Figura 137 - Aluno A2 na fase de ação para a sequência dos números quadrados



Fonte: dados da pesquisa

Percebemos que o mesmo, formula sem qualquer outra análise que a fórmula para o termo geral de um número quadrado é n^2 , tal afirmação é comum na fase de ação e formulação visto que o aluno percebe que existe essa relação por se tratar de números que formam quadrados, porém para que esta análise se torne validada, é necessário uma prova. É necessário também que o estudante encontre uma recorrência, esta não tão imediata quanto a fórmula para o termo geral e neste momento é que acontece as fases de formulação e validação da situação didática proposta.

Figura 138 - Aluno A2 fase de formulação para determinar a recorrência dos números quadrados

The image shows handwritten mathematical work on a piece of paper. At the top, there is a scribbled-out area. Below it, the formula $a_{n+1} = a_n + n + n + 1$ is written, with a vertical line and the expression $\frac{1+2+\dots+n}{2}$ to its right. Below this, the recurrence formula $a_{n+1} = a_n + 2n + 1, n \in \mathbb{N}$ is written.

Fonte: dados da pesquisa

Com a ajuda das figuras o aluno A2 consegue formular uma recorrência, e então podemos esperar a validação dos dados, pois é esperado que os estudantes sigam os mesmos passos usados na obtenção da sequência anterior, deste modo podemos observar o aluno A5 com suas conclusões.

Figura 139 - Aluno A5 fase de validação para a sequência dos números quadrados

The image shows handwritten mathematical work on a piece of paper. At the top, it says "1º quadrado:" followed by a box containing $G_n = 2n - 1$ and $G_n = 2n - 1$. Below this, the sequence $1, 4, 9, \dots$ is written. Then, the formula $a_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 3) + (2n - 1)$ is written, followed by $a_n = (2n - 1) + (2n - 3) + \dots + 3 + 1$. Below this, the formula $2a_n = 2n \cdot n$ is written, followed by $a_n = \frac{2n^2}{2}$. Finally, the formula $a_n = n^2$ is written and circled. At the bottom, it says "Prova:" followed by $a_{n+1} = n^2 + 2n + 1$ and $a_{n+1} = (n+1)^2$.

Fonte: dados da pesquisa

A figura acima mostra o aluno A5 apresentou uma resposta para a prova de indução desde o modelo obtido na recorrência, passando pela soma de termos para se formular uma hipótese de indução até a prova para $n+1$, contudo o estudante não apresentou o fato da hipótese valer para $n=1$, o que compromete a análise da questão, mesmo que apresente a prova válida para a situação dada.

Para a fase de institucionalização, como os estudantes debatem antes de divulgarem seus dados, esta é feita por meio de um debate rápido, apenas citando os passos tomados desde a apresentação do problema até a validação por parte de algum dos estudantes com a devida explicação.

Para concluir a situação, tivemos que definir uma fórmula para qualquer número poligonal, com base nas fórmulas já encontradas buscando-se uma relação entre elas. Para a fase de ação, os estudantes observaram as fórmulas do termo geral dos números triangulares e quadrados, que a princípio não apresentavam nenhum padrão entre si. Na fase de formulação os estudante A1 apresentou uma fórmula que seria válida para os números triangulares e quadrados, as fórmulas apresentadas estão na figura a seguir:

Figura 140 - fórmula válida para os números triangulares e quadrados

$$F_{l,n} = \frac{(l-2)n^2 + (-l+4)n}{2}$$

$$F_{3,n} = \frac{(3-2)n^2 + (-3+4)n}{2}$$

$$F_{3,n} = \frac{n^2 + n}{2}$$

$$F_{4,n} = \frac{(4-2)n^2 + (-4+4)n}{2}$$

$$F_{4,n} = \frac{2n^2}{2} = n^2$$

Fonte: dados da pesquisa

Na figura acima, o estudante usou uma possível fórmula que seria válida tanto para os números quadrados quanto para os números triangulares, modificando apenas alguns números

e obteve o resultado esperado, ainda na figura, o “F” significa “números figurados”, “n” se refere ao termo encontrado enquanto “l” representa o número de lados da figura que está gerando a sequência dada, repare que para a fase de formulação, será necessário que se prove que esta fórmula será válida para qualquer número figurado poligonal, mais umas vez questionados sobre como fazer isso, os estudantes entenderam que precisavam novamente partir para o método de indução e que os testes para os primeiros números figurados já haviam sido feitos, com isso alguns alunos validaram a prova para $n+1$, segundo a figura a seguir:

Figura 141 - fórmula válida para os números triangulares e quadrados

$$F_{l,n+1} = \frac{(l-2)n^2 + (-l+4)n}{2}$$

$$F_{l,n+1} = \frac{(l-2)(n+1)^2 + (-l+4)(n+1)}{2}$$

$$F_{l,n} = \frac{(l-2)T_{n-1} + n}{2}$$

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

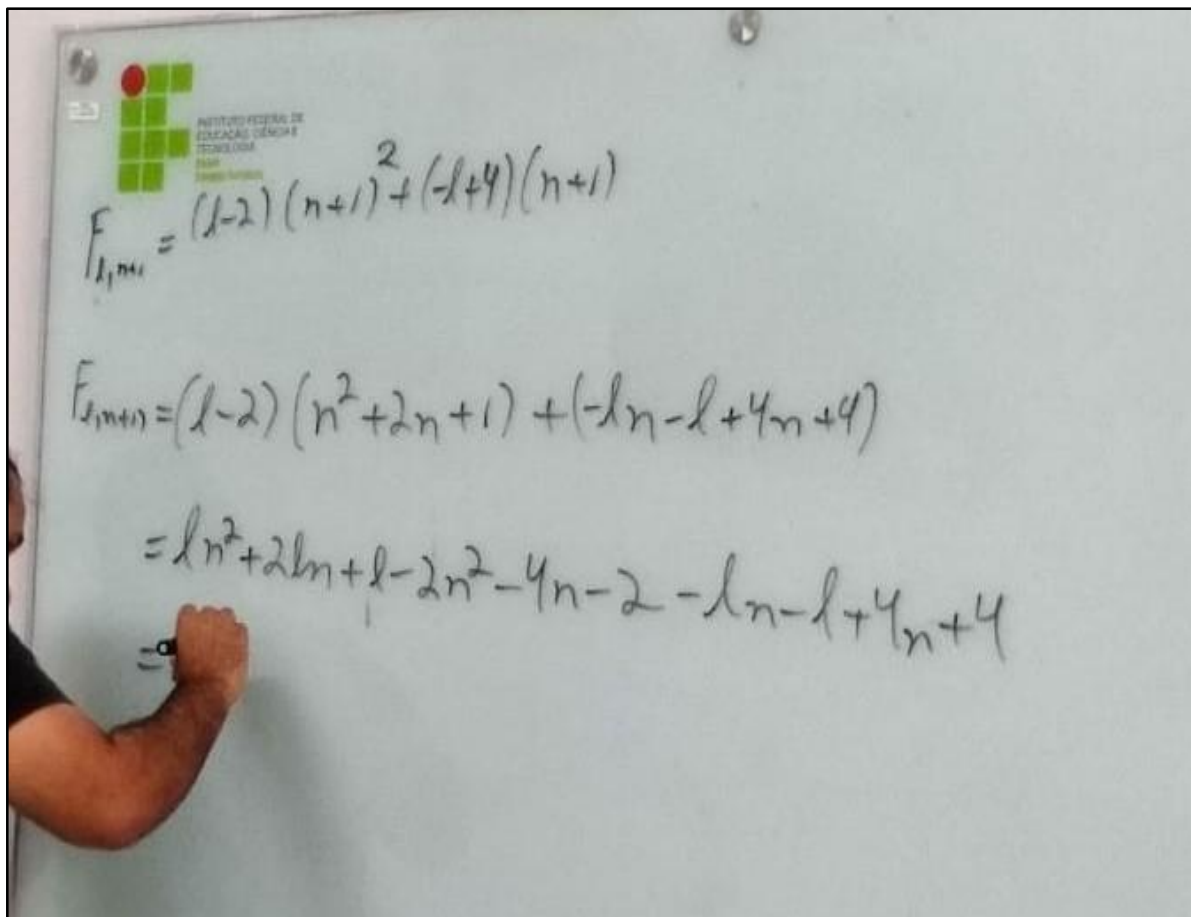
$$T_{n-1} = \frac{(n-1)(n-1+1)}{2}$$

Fonte: dados da pesquisa

Observamos na figura acima que a aluna A4 buscava formular sua hipótese, porém não seguiu o caminho da indução finita e tentou relacionar os números triangulares, porém a estudante não conseguiu concluir o pensamento, assim não se tratava de uma fase de validação e sim formulação uma vez que ainda haviam problemas a serem resolvidos na situação dada.

Assim, o aluno A1 foi o primeiro a apresentar a validação para a situação, conforme a figura a seguir:

Figura 142 - aluno A1 na fase de formulação



$$F_{l,n+1} = (l-2)(n+1)^2 + (-l+4)(n+1)$$

$$F_{l,n+1} = (l-2)(n^2 + 2n + 1) + (-ln - l + 4n + 4)$$

$$= ln^2 + 2ln + l - 2n^2 - 4n - 2 - ln - l + 4n + 4$$

Fonte: dados da pesquisa

Na figura, podemos ver o aluno em sua fase de formulação, apresentado o argumento de que se adicionarmos a fórmula dada o valor que corresponde ao *gnômon* de um número poligonal, poderíamos obter a fórmula para $n+1$ assim como já havia sido feito nos números triangulares e quadrados, vale lembrar que o *gnômon* dos números triangulares são dados pela fórmula $S_3^1(n+1) = n+1$ e os números quadrados tem o seu *gnômon* dado pela fórmula $S_4^1(n+1) = 2n+1$, então para um certo número poligonal, seu *gnômon* será dado por $S_m^1(n+1) = (m-2)n+1$, no caso o aluno A1 substitui a letra m por l .

Figura 143 - validação feita pelo aluno A1

Handwritten mathematical work on a whiteboard showing the validation of a formula for polygonal numbers. The student uses algebraic manipulation to show that the formula for $F_{l,n+1}$ is equivalent to the formula for $F_{l,n}$ with n replaced by $n+1$.

$$F_{l,n} = (l-2)n^2 + (-l+4)n$$

$$F_{l,n+1} = (l-2)(n+1)^2 + (-l+4)(n+1)$$

$$F_{l,n+1} = (l-2)(n^2 + 2n + 1) + (-ln - l + 4n + 4)$$

$$= ln^2 + 2ln + l - 2n^2 - 4n - 2 - ln - l + 4n + 4$$

$$= \frac{(l-2)n^2 + ln + 2}{2}$$

$$F_{l,n} = (l-2)n^2 + (-l+4)n$$

$$= \frac{ln^2 - 2n^2 - ln + 4n + ln - 2n + 1}{2}$$

$$= \frac{(l-2)n^2 - ln + 4n + 2ln - 4n + 2}{2}$$

$$= \frac{(l-2)n^2 + ln + 2}{2}$$

Fonte: dados da pesquisa

Para o aluno em questão bastava mostrar que partindo de n e $n+1$ na fórmula dada, os resultados seriam os mesmos, desde que se acrescentasse na fórmula que possuía o n , um termo que representaria o *gnômon* de um número poligonal qualquer, como mostra a figura, o que de fato é verdadeiro, ou seja, o estudante conseguiu validar sua hipótese. Posteriormente, na fase de institucionalização, foram refeitos os cálculos com algumas correções para que fossem tiradas algumas partes que não necessitam para a explicação da questão.

Desta maneira a situação 1 foi encerrada, na qual tinha como objetivo generalizar a fórmula para os números poligonais, começando pelos números triangulares e quadrados e usando a noção de *gnômon*.

5.1.2 Validação da situação 2 – forma geral e recorrência dos números piramidais e platônicos

Dada a resolução da situação 1, esperamos que esta segunda situação seja rapidamente resolvida, pois se tratam de definições que possuem muitas relações com a primeira e, deveremos deixar algumas dúvidas para que os estudantes possam lidar com a situação 3 de maneira a usar esta situação como um elo entre as situações 1 e 3. A necessidade desta situação está no fato de os estudantes precisarem ter contato com configurações 3D e se familiarizarem

antes de relacionar propriedades, como entendemos que são configurações de muita importância dentro dos NF, separamos uma situação para ela, porém poderia muito bem estar dentro da S3. Dada esta breve explicação, seguiremos para a validação desta situação

De início, a situação foi montada com três questionamento

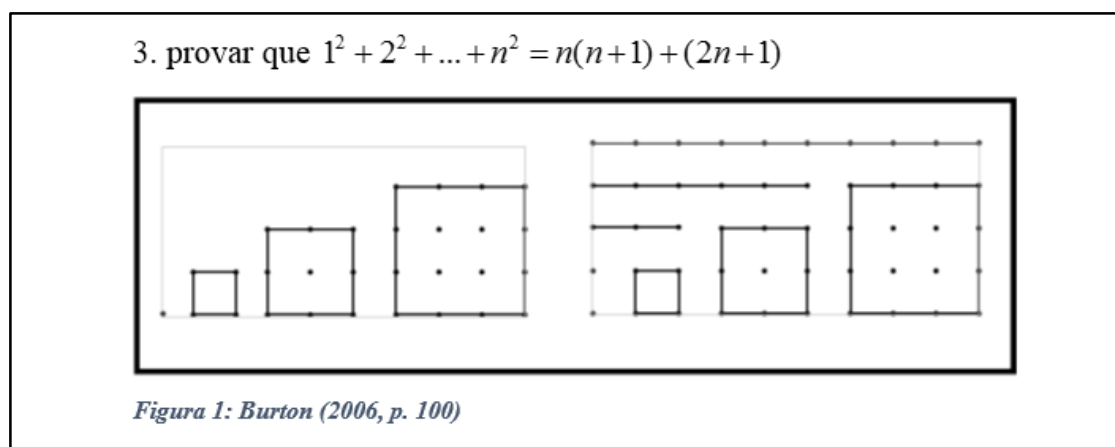
1 – qual a forma geral e recorrência para os números piramidais triangulares (tetraédricos)

2 – qual a forma geral e recorrência para os números piramidais pentagonais

3 – encontre uma relação entre as fórmulas encontradas e encontre uma que represente os números piramidais *m-gonais*

De início foi apresentada a resolução parcial da soma dos números quadrados, propriedade importante que nos ajuda a construir os números piramidais triangulares, esta questão foi resolvida de início pelo professor e foi pedido para que os alunos desenvolvessem o restante da questão, como meio para que eles pudessem concluir que ela poderia servir de base para os números tetraédricos porém optamos por não revelar isto no momento, foi apresentada a seguinte questão para os alunos:

Figura 144 - questão apresentada pelo professor para provar a soma de números quadrados



Fonte: questão proposta na pesquisa

Os alunos também deveriam perceber que a soma de números quadrados representam os números piramidais quadrados, porém esta percepção não foi imediata. A figura 93 foi apresentada e a observação dos alunos representa a fase de ação, eles ficaram por um tempo buscando a relação entre a figura e a prova, como o objetivo inicial seria apresentar a resolução, o professor tratou de escrever o início da resolução na lousa, e logo os alunos quiseram concluir pois seria apenas usar regras matemática simples para eles. Segue a foto do início da explicação e a continuação feita pelo aluno A6:

Figura 145 - aluno A6 continuando a questão proposta

Handwritten mathematical derivation on a whiteboard. The student is deriving the formula for the sum of squares, $S = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$. The derivation uses a telescoping series method. The first line shows the sum of squares plus the sum of the first n natural numbers, which equals the product of $(n+1)$ and the sum of the first n natural numbers. The second line shows the sum S as the difference between the product of $(n+1)$ and the sum of the first n natural numbers, and the sum of the first n natural numbers multiplied by $(n+1)$. The third line shows the sum S as the difference between the product of $(n+1)$ and the sum of the first n natural numbers, and the sum of the first n natural numbers multiplied by $(n+1)$.

$$S = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (1 + 3 + 5 + \dots + n) = (n+1) \cdot (1 + 2 + \dots + n)$$

$$S = (1 + 2 + \dots + n) \cdot (n+1) - \left(\frac{1 \cdot (1+1)}{2} + \frac{2 \cdot (2+1)}{2} + \dots + \frac{n \cdot (n+1)}{2} \right)$$

$$= \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n+1)}{2} - \left(\frac{1 \cdot (1+1)}{2} + \frac{2 \cdot (2+1)}{2} + \dots + \frac{n \cdot (n+1)}{2} \right)$$

Fonte: dados da pesquisa

Percebemos o aluno A6 na fase de formulação dentro do que foi proposto, logo após analisar a figura proposta na atividade, ele explicou que ainda sentia dificuldades, e por isso retornou a lista de atividades, depois de algum tempo o mesmo aluno apresentou a questão, conforme a figura a seguir:

Figura 146 - aluno A6 apresentando a questão devidamente resolvida

Handwritten mathematical derivation on a piece of paper. The student is deriving the formula for the sum of squares, $S = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$. The derivation uses a telescoping series method. The first line shows the sum of squares plus the sum of the first n natural numbers, which equals the product of $(n+1)$ and the sum of the first n natural numbers. The second line shows the sum S as the difference between the product of $(n+1)$ and the sum of the first n natural numbers, and the sum of the first n natural numbers multiplied by $(n+1)$. The third line shows the sum S as the difference between the product of $(n+1)$ and the sum of the first n natural numbers, and the sum of the first n natural numbers multiplied by $(n+1)$. The fourth line shows the sum S as the difference between the product of $(n+1)$ and the sum of the first n natural numbers, and the sum of the first n natural numbers multiplied by $(n+1)$. The fifth line shows the sum S as the difference between the product of $(n+1)$ and the sum of the first n natural numbers, and the sum of the first n natural numbers multiplied by $(n+1)$. The sixth line shows the sum S as the difference between the product of $(n+1)$ and the sum of the first n natural numbers, and the sum of the first n natural numbers multiplied by $(n+1)$. The seventh line shows the sum S as the difference between the product of $(n+1)$ and the sum of the first n natural numbers, and the sum of the first n natural numbers multiplied by $(n+1)$. The eighth line shows the sum S as the difference between the product of $(n+1)$ and the sum of the first n natural numbers, and the sum of the first n natural numbers multiplied by $(n+1)$. The ninth line shows the sum S as the difference between the product of $(n+1)$ and the sum of the first n natural numbers, and the sum of the first n natural numbers multiplied by $(n+1)$. The tenth line shows the sum S as the difference between the product of $(n+1)$ and the sum of the first n natural numbers, and the sum of the first n natural numbers multiplied by $(n+1)$.

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)$$

$$\underbrace{(1^2 + 2^2 + \dots + n^2)}_S + (1 + 3 + 5 + \dots + n) = (n+1) \cdot (1 + 2 + \dots + n)$$

$$S = (1 + 2 + \dots + n) \cdot (n+1) - \left[\frac{1 \cdot (1+1)}{2} + \frac{2 \cdot (2+1)}{2} + \dots + \frac{n \cdot (n+1)}{2} \right]$$

$$S = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n+1)}{2} - \frac{1}{2} \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + 1 + 2 + 3 + \dots + n \right)$$

$$S = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n+1)}{2} - \frac{1}{2} \left(S + \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$S + \frac{1}{2}S = \frac{2n(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)}{4}$$

$$\frac{3S}{2} = \frac{(n+1)n}{4} (2(n+1) - 1)$$

$$\frac{3S}{2} = \frac{(n+1)n(2n+1)}{4}$$

$$S = \frac{2(n+1)n(2n+1)}{4 \cdot 3} \Rightarrow S = \frac{(n+1)n(2n+1)}{6}$$

Fonte: dados da pesquisa

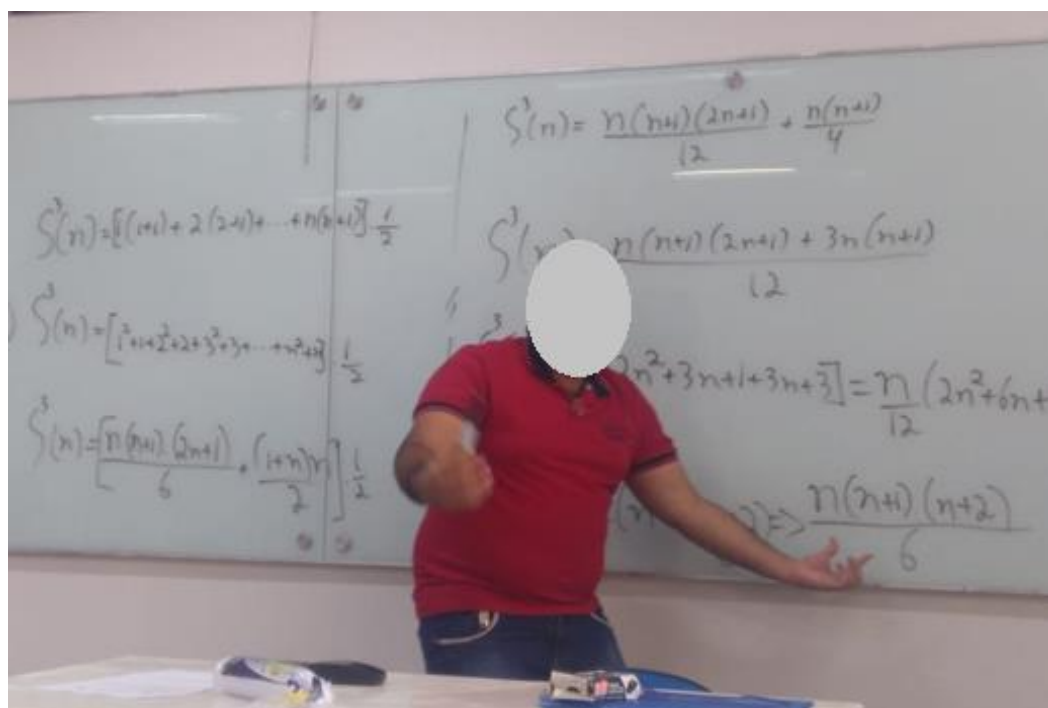
A figura acima apresenta uma questão bem complexa se comparada as outras, porém como os alunos poderiam se ajudar algumas informações foram sendo cruzadas para que a questão fosse solucionada, alguns alunos não entenderam a resolução, este observaram a resolução feita por A6 e então podemos continuar, vale lembrar que todas esta resolução pertence a fase de formulação da situação didática que tem como objetivo encontrar a forma geral para os números piramidais.

O próximo passo foi questionar os estudantes se poderíamos a partir do que já temos, encontrar a forma geral dos números tetraédricos e como isso poderia nos ajudar a encontra a forma geral para os números piramidais, então o aluno A1 respondeu:

“Assim como fizemos com os números poligonais poderemos encontrar a forma geral dos tetraédricos, piramidais quadrados, pentagonais e assim por diante, não?” (aluno A1)

Diante disto e visto que os alunos já estavam bem familiarizados com as resoluções, pois são em sua maioria continuações de regularidades observadas para encontrar outros números figurados, e também por ser apenas manuseio de propriedades algébricas já conhecidas por eles, o aluno A1, depois de um breve período, levou a resolução até a lousa. A foto que segue traz de forma completa a formula para os números tetraédricos e indica a fase de formulação da situação visto que os estudantes estavam procurando relações que pudessem os levar a resolver a situação.

Figura 147 - aluno A1 apresentando a fórmula para os números tetraédricos



Fonte: dados da pesquisa

Esta fórmula é válida e não pedimos para os alunos provarem por meio de indução pois prolongaria a situação e poderia fazer com que os estudantes esquecessem o objetivo da questão e entendessem que esse seria o final da situação quando ainda se tratava do início dela.

Logo em seguida questionamos sobre a segunda pergunta da situação, ou seja, se com o que temos até agora, poderíamos encontrar a forma dos números piramidais pentagonais. Nós saltamos a forma dos números piramidais quadrados, pois eles já tinham visto no início da situação, mesmo assim, ainda nesse momento nenhum aluno conseguiu relacionar a soma de números quadrados vista no início com a fórmula dos números piramidais quadrados, e assim, tivemos de deixar que eles observassem por mais tempo as questões, pois perceber esta fórmula seria fundamental para a continuação da situação.

Ainda assim, os estudantes tiveram muito tempo sem que percebessem tal propriedade, essa reação apesar de prevista na fase de elaboração das situações não era esperada por se tratar de uma relação simples e de fácil percepção, atribui-se o fato da não observação da relação pelo fato de os estudantes estarem tendo contato com muitas fórmulas e em uma certa hora isso poderia de fato acontecer.

Percebemos que esta situação didática não seguiu os caminhos desejados porém previstos por conta de problemas algébricos, se entendermos a situação como um elo entre a primeira e terceira situação, esta teve sua importância, pois os estudantes encontraram a fórmula geral dos números tetraédricos, estes, base para a construção de qualquer número tridimensional pelo SG, ainda se realinhássemos a situação 2 apenas para a obtenção da fórmula de números tetraédricos, poderia ser encontradas todas as fases da TSD, assim, seguiremos para a validação interna da situação 3

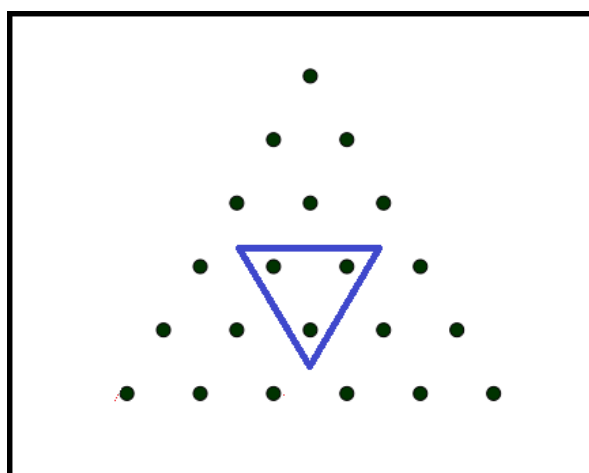
5.1.3 Validação da situação 3 – com base na visualização dos números figurados, definir e provar possíveis propriedade e relações entre eles.

Para falarmos da validação interna da situação 3, antes devemos informar que esta aplicação ocorreu nos durante o mês de março de 2020 e deveria terminar em meados do mês de abril do mesmo ano, porém, devido a pandemia do novo coronavírus, que teve como consequência o isolamento social e a paralização de vários serviços e setores, o IFCE também teve que cumprir tais medidas e por isso as aulas foram suspensas e, devido a isso, a aplicação das situações teve que ser adiada para setembro de 2020, de forma remota através da plataforma *google meet*. Desse modo em alguns pontos da coleta é possível observar as respostas por meio

mensagens pela plataforma, bem como figuras e escritas digitadas e não escritas a mão como se pretendia. Dada esta breve explicação, partiremos para a validação interna da S3

Nesta situação foram apresentadas figuras e foi pedido para que os estudantes observassem qual a relação existente e se seria possível generalizar para qualquer valor, seu objetivo é que se fosse observado que a partir de sequência que formam a classe dos simplexos seria possível formar qualquer outra sequência, pretendemos apresentar apenas figuras 2D e 3D e a situação estará solucionada quando os estudantes forem capazes de encontrar qualquer sequência pedida, apenas pela visualização, lembramos que apesar de importante, não pediremos para que os estudantes provem estas fórmulas encontradas por meio do princípio de indução, apenas comparamos as formulas obtidas com as que já foram encontradas na literatura. A primeira figura apresenta um número triangular com outro triângulo no seu interior conforme mostra a figura a seguir:

Figura 148 - relação entre números triangulares

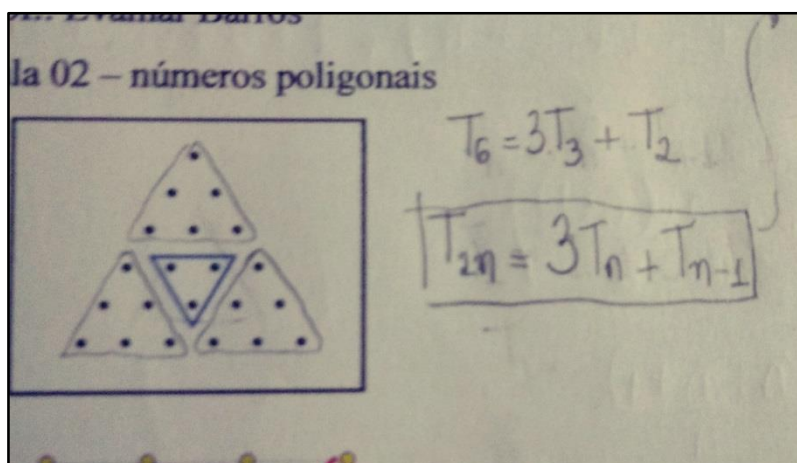


Fonte: elaboração do autor

Para a fase de ação os estudantes tiveram uma breve explicação do que seria pedido e observaram quais das figuras seriam mais simples, não foi exigido que se fizesse na ordem as questões, porém todas apresentavam um nível de dificuldade maior em relação à anterior, o aluno poderia começar qualquer questão com qual se identificasse e as fases da TSD seria observada em cada estudante dentro de cada questão. De um modo geral os estudantes se sentiram bem com as figuras para ajudar, teve-se uma adesão maior por parte dos alunos no que se refere a participações. Estas são as primeiras conclusões que nos mostra que a visualização de fato ajuda de maneira significativa

Dito isto, na fase de formulação para a figura dada observamos que alguns estudantes não sabiam como relacionar o triângulo maior com o menor, contudo, alguns conseguiram relacionar, conforme a figura a seguir.

Figura 149 - aluno A2 na fase de formulação



Fonte: dados da pesquisa

Podemos perceber que a figura ajudou o aluno a perceber tal propriedade, porém para que essa afirmação seja validada será preciso provar. Por se tratar de uma questão relativamente simples, a maioria dos estudantes conseguiu resolver, incluindo o aluno A2 como mostra a próxima figura:

Figura 150- aluno A2 na fase de validação

The image shows a piece of paper with logos at the top (Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Ceará and PGECM) and handwritten mathematical derivations. The first line is $T_{2n} = 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n-1}{2}(n+1-1)$. The second line is $T_{2n} = 3 \cdot \left[\frac{n^2+n}{2} \right] + \frac{n^2-n}{2}$. The third line is $T_{2n} = \frac{3n^2+3n}{2} + \frac{n^2-n}{2} = \frac{4n^2+2n}{2}$. To the right, the final simplified formula $T_{2n} = \frac{2n(2n+1)}{2}$ is boxed.

Fonte: dados da pesquisa

A figura mostra que para provar que a propriedade é válida basta desenvolver a expressão encontrada mostrando que de fato, um número triangular de ordem par possui a seguinte relação $S_3(2n) = 3S_3(n) + S_3(n-1)$ para $n \geq 1$, em seguida, uma validação feita na lousa para que os alunos entendessem melhor, evitando assim a necessidade da fase de institucionalização:

Figura 151 - aluna A3 na fase de validação

$$T_{2n} = \frac{3n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2}$$

$$T_{2n} = \frac{3n^2 + 3n + n^2 - n}{2}$$

$$T_{2n} = \frac{4n^2 + 2n}{2}$$

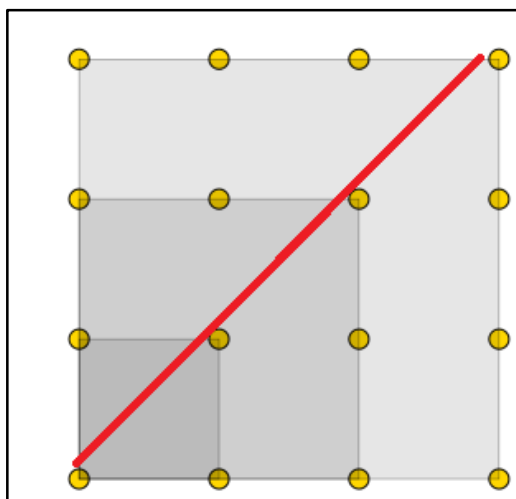
$$T_{2n} = \frac{2n(2n+1)}{2}$$

Fonte: dados da pesquisa

Para a fase de validação, feita na lousa, vale lembrar que os alunos explicavam passo a passo da resolução tornando desnecessário que haja a fase de institucionalização, uma vez que as partes desnecessárias da explicação já haviam sido retiradas.

A segunda figura que possui uma propriedade sobre os números figurados triangulares, a princípio pode parecer mais simples que a primeira, porém se torna um pouco mais complicada porque relaciona não só números triangulares como também os números quadrados, a próxima figura representa uma relação entre números quadrados e triangulares, uma propriedade que já foi provada nos capítulos anteriores.

Figura 152 - relação dos números quadrados com os números triangulares



Fonte: elaboração do autor

A figura mostra a propriedade dos números quadrados que diz que: todo número quadrado é a soma de dois números triangulares, a princípio os alunos não conseguiam enxergar a presença de números triangulares na figura o que dificultou na fase de ação, pois mesmo que eles pudessem trocar algumas ideias, não houve nenhum aluno que percebesse a relação. Porém, tão logo foram surgindo os argumentos, os estudantes seguiram o modelo anterior, o que tornou a resolução mais rápida que da questão anterior, a seguir a figura mostra uma resolução completa da questão.

Figura 153 - aluno A2 fase de ação/formulação

Handwritten mathematical work by student A2. On the left, a 4x4 grid of dots is shown with a diagonal line of dots highlighted. The grid is labeled with T_2 and T_3 . The student has written the formula $Q_n = T_n + T_{n-1}$ and the final result $Q_n = n^2$.

Fonte: dados da pesquisa

A figura apresenta um aluno na fase de ação e formulação, já com a prova da propriedade válida para os números quadrados, a partir daí, faz-se necessário a explicação na lousa para a fase de validação que se for bem explicada, dispensa a fase de institucionalização, a seguir, o aluno A4 na fase de validação na lousa.

Figura 154 - aluna A4 na fase de validação

Handwritten mathematical work by student A4 on a chalkboard. The student has written the formula $Q_n = T_n + T_{n-1}$ and the final result $Q_n = n^2$. The derivation is shown as follows:

$$Q_n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2}$$

$$Q_n = \frac{n^2 + n}{2} + \frac{n^2 - n}{2}$$

$$Q_n = \frac{2n^2}{2}$$

$$Q_n = n^2$$

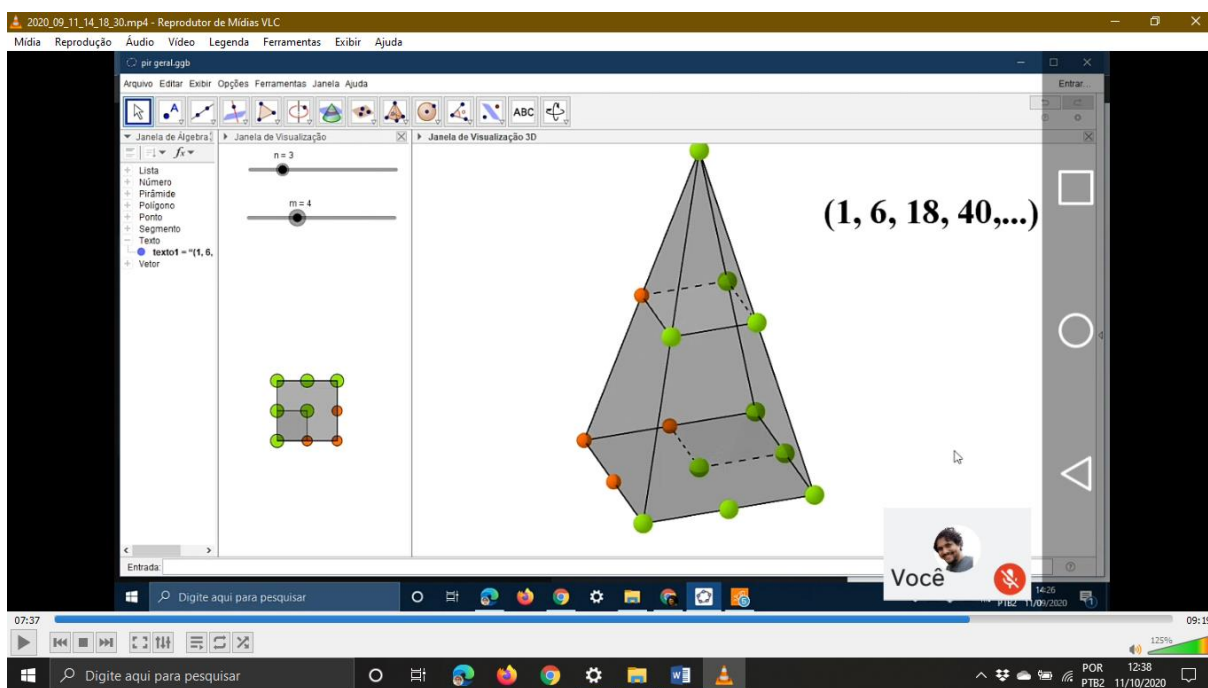
Fonte: dados da pesquisa

Até esse momento ainda não era esperado que os estudantes relacionassem as fórmulas com o uso dos números triangulares, e nem um estudante ainda havia dito nada a respeito.

Prosseguindo com as situações didáticas para encontrar propriedades, introduzimos então as figuras que representam as sequências de NF em 3D. Neste momento, a nossa pesquisa já tinha passado para a forma remota, por isso as fotos que serão apresentadas a seguir são capturas de telas. Vale lembrar que para essa situação onde a visualização é o ponto mais importante, o formato das aulas não prejudicou o desenvolvimento da situação.

A primeira figura apresentada foi de um número piramidal, para isto apresentamos a figura e forma geral dos números tetraédricos, para que os estudantes conseguissem uma forma que fosse geral a todos os piramidais, perceba que esta seria uma situação bem trabalhosa, e exigiria vários cálculos até se chegar a uma forma geral, inclusive na S2, os estudantes não conseguiram encontrar tal forma, desta vez apresentamos a visualização de modo a incentivá-los a encontrar a fórmula geral dos números piramidais por meio das relações com números tetraédricos, foi a partir desta situação que os estudantes começaram a relacionar os números figurados como formações de números a partir de sequências da família dos simplexos.

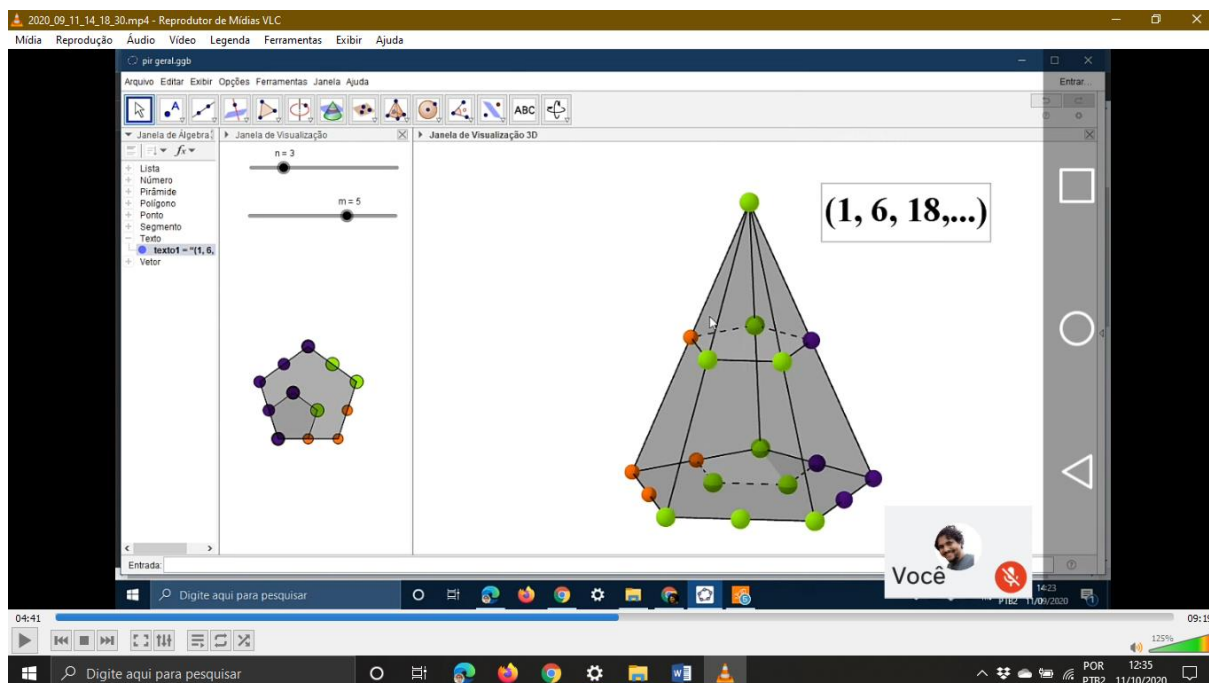
Figura 155 - apresentação dos números piramidais quadrados



Fonte: dados da pesquisa

A figura acima apresenta a primeira sequência que foi pedida aos alunos, eles deveriam perceber que esta pirâmide é formada por números tetraédricos, a seguir foi apresentada outra figura:

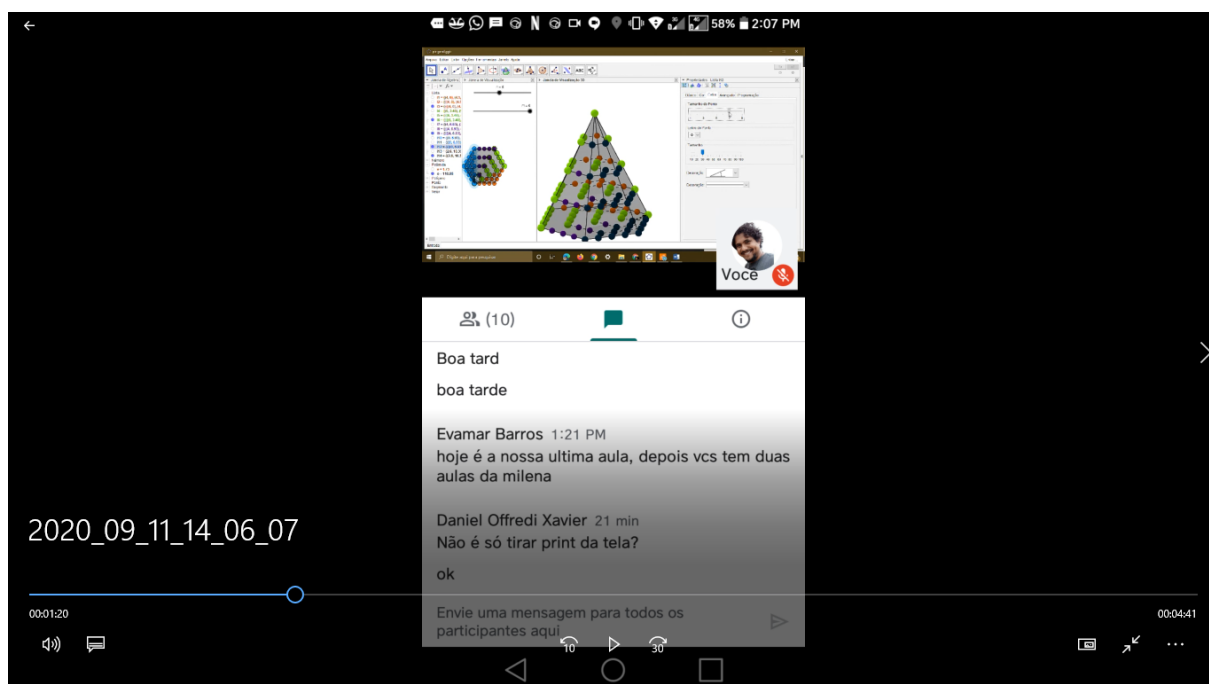
Figura 156 - apresentação dos números piramidais pentagonais



Fonte: dados da pesquisa

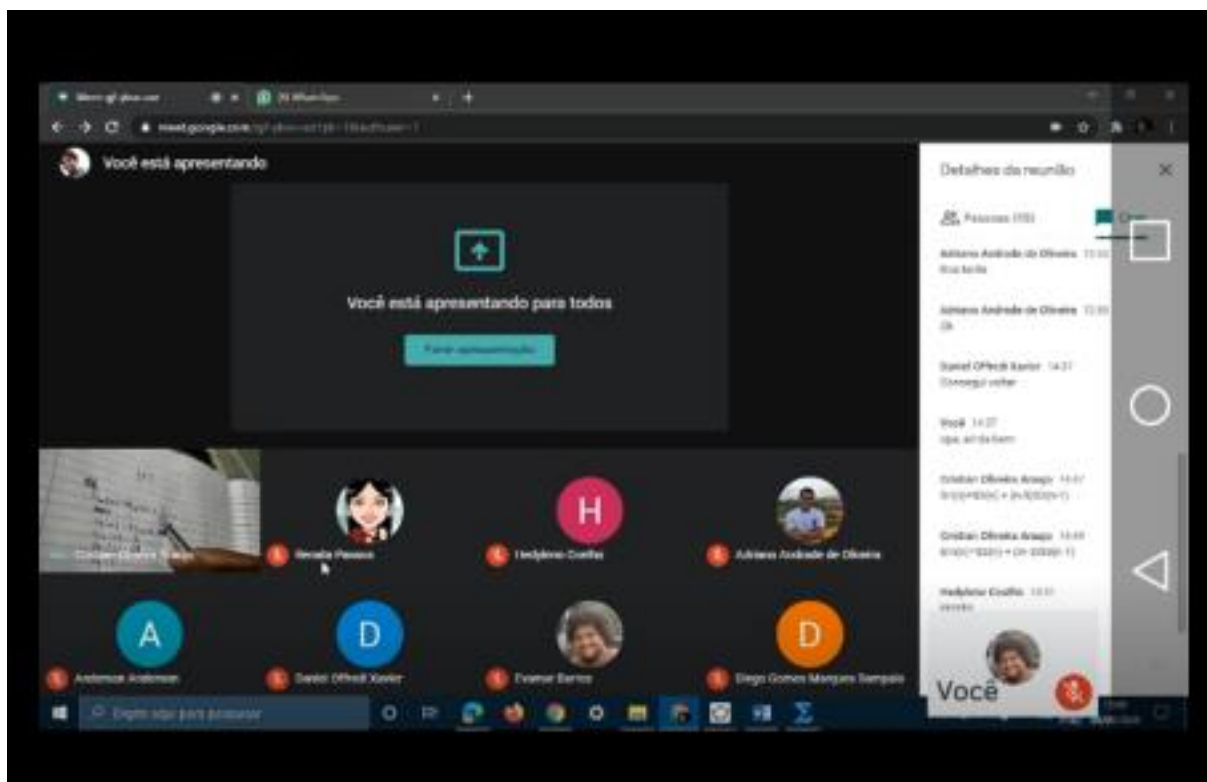
A figura acima apresenta os números piramidais pentagonais, acompanhado de seus primeiros termos, este representa o momento de ação, pois foi pedido que os alunos observassem a figura e tentassem encontrar uma forma que representasse qualquer número piramidal, depois de algum tempo o aluno A8 pede que eu apresente a figura com os números piramidais hexagonais, a fase de formulação pode ser vista na figura a seguir.

Figura 157 - apresentação dos números piramidais hexagonais



Fonte: dados da pesquisa

Figura 158 - fase de formulação do estudante A8



Fonte: dados da pesquisa

Podemos observar nas duas figuras acima, que após apresentar a figura para os números piramidais de base hexagonal, o estudante A8 fez conjecturas, procurou e apresentou seus cálculos, e logo enviou a sua resolução, já validada, a figura a seguir apresenta a fase de validação da questão feita pelo estudante A8 pois ele observou a formação de números tetraédricos.

Figura 159 - fase de validação feita pelo aluno A8

• Pirâmides

1 a) $P_{\triangle} \rightarrow (1, 4, 10, 20, \dots)$
 $P_{\blacksquare} \rightarrow (1, 5, 15, 35, \dots)$
 $P_{\bullet} \rightarrow (1, 6, 18, 40, \dots)$

Processo análogo:

$$S_4(n) = (4-3)S_3(n-1) + S_3(n)$$

$$S_5(n) = (5-3)S_3(n-1) + S_3(n)$$

$$S_3(n) = (3-3)S_3(n-1) + S_3(n)$$

Logo concluímos: $S_m(n) = (m-3)S_3(n-1) + S_3(n)$

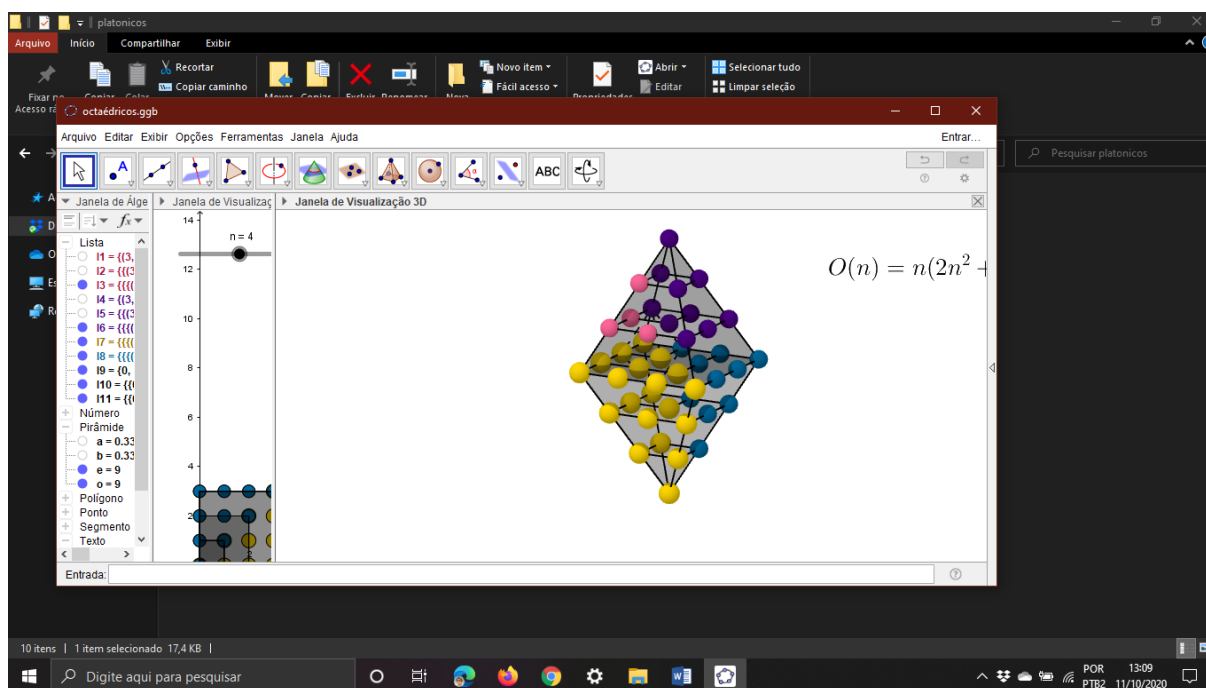
• $S_m(n) = \frac{(m-3)(n-1)(n)(n+1)}{6} + \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

$\Rightarrow \frac{n(n+1)}{6} [(m-3)(n-1) + (n+2)] = S_m(n)$

Fonte: dados da pesquisa

A fórmula apresentada acima, é uma propriedade que relaciona números piramidais aos números tetraédricos, o aluno A8 percebeu de forma rápida com o auxílio da visualização, fato que não ocorreu na S2. Esta situação conclui que, de fato, a visualização deixa a percepção da propriedade tão aparente que uma questão que antes se mostrava difícil agora foi descrita agora como simples. Também podemos concluir que podemos também apresentar os números platônicos ou pelo menos parte deles, por isso a próxima figura apresentada será dos números octaédrais.

Figura 160 - apresentação dos números octaédrais



Fonte: dados da pesquisa

A partir da figura acima apresentada, foi explicada que eles deveriam encontrar a forma geral desses números e que eles pertencem a família de números platônicos juntamente com os tetraédricos, cúbicos, dodecaedrais e icosaédrais, os estudantes tiveram um contato por alguns minutos e em seguida eles pediram o que se esperava, outra figura que também pertença a família de números platônicos, então apresentamos os números cúbicos, este momento representa a fase de ação, e o fato dos estudantes pedirem por outra figura significa que eles querem, além de encontrar a fórmula para os números octaédrais, eles também sabem que podem generalizar a família.

Para esta questão, os estudantes foram bem mais rápidos, pois já relacionaram com a questão anterior, a fase da formulação não pôde ser observada por conta da rapidez e logo o aluno A8 apresentou seus resultados o que constitui a fase de validação da questão, ou seja, as fórmulas para os números octaédrais e cúbicos.

Figura 161 - fase de validação da fórmula dos números octaédricos pelo aluno A8

b) OBSERVANDO AS FIGURAS TEMOS: • OCTAÉDRICOS

$$O(n) = S_3(n) + 2S_3(n-1) + S_3(n-2)$$

$$O(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + 2 \frac{(n-1)(n)(n+1)}{6} + \frac{(n-2)(n-1)(n)}{6}$$

$$O(n) = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} + \frac{2n^3 - 2n}{6} + \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{6}$$

$$O(n) = \frac{4n^3 + 2n}{6} = \frac{n(4n^2 + 2)}{6} = \frac{n(2n^2 + 1)}{3}$$

Fonte: dados da pesquisa

Como podemos observar a fórmula foi descrita partindo dos números tetraédricos, o mesmo acontece com a forma para os números cúbicos.

Figura 162 - fase de validação dos números cúbicos, aluno A8

① b) • CÚBICOS $C(n) = S_3^3(n)$

1 = 1

8 = 4 + 4 · 1

27 = 10 + 4 · 4 + 1

64 = 20 + 4 · 10 + 4

• $C(n) = S_3^3(n) + 4S_3^3(n-1) + S_3^3(n-2)$

$$C(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{4(n-1)(n)(n+1)}{6} + \frac{(n-2)(n-1)(n)}{6}$$

$$C(n) = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} + \frac{4n^3 - 4n}{6} + \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{6}$$

$$C(n) = \frac{6n^3}{6} = n^3$$

Fonte: dados da pesquisa

Para a fase de institucionalização da situação, apresentamos novamente todas as figuras e explicamos suas relações com números da família dos simplexos, os alunos puderam perceber que qualquer visualização feita no SG, pode ser construída utilizando-se números triangulares e seus análogos das dimensões superiores, o objetivo da situação foi alcançado e não pedimos

para que os alunos descrevessem os outros números platônicos pois eles já haviam percebido a relação que pretendíamos apresentar, também não pedimos para que as fórmulas fossem provadas pois demandaria tempo, em vez disso, mostramos as fórmulas no livro sobre números figurados em que todas as fórmulas já estão descritas, entendemos que como as fórmulas pedidas foram encontradas, o objetivo da questão fora alcançado e podemos finalizar.

5.1.4 Validação da situação 4 – a função geradora dos números poligonais, poligonais centralizados e simplexos

A situação 4 foi planejada para que os estudantes conseguissem fazer uma ligação com a S3, isto porque, partindo da função geradora dos números triangulares, seria possível formar outras funções geradoras, assim, definir a FG dos números poligonais seria intuitivo, bem como a FG dos poligonais centralizados, também seria possível perceber que funções geradoras possuem uma semelhança entre uma sequência S e a sequência formada pelo somatório de S , ou seja, seria possível perceber que a FG dos números simplexos seria simples, bastando assim, perceber tais relações.

Novamente tivemos nessa situação, a interrupção por conta do isolamento causado pela pandemia de covid-19, o que ocasionou em uma situação inteiramente remota, com algumas dificuldades por conta de não termos como explicar e tirar as dúvidas como se pretendia de forma presencial, também pelo fato dessa situação não ser tão focada na visualização, os problemas encontrados foram, em sua maioria, por causa da falta de uma explicação mais próxima, eu sua sala de aula, disto isto, descreveremos agora toda a situação.

Para começar apresentamos o conceito de FG, já descrito aqui em seções anteriores, bem como a função geradora dos números triangulares, foi apresentada também a função geradora dos números lineares e da sequência em que todos os termos são 1.

Para esta situação, a resposta foi rápida e os alunos responderam quase que instantaneamente, que a função geradora dos simplexos se daria por

$$F[S_3^k(n), x] = \frac{x}{(1-x)^{k+1}}, |x| < 1, k \in \mathbb{N}$$

Então o que havia sido planejado para a situação em que poderia ser possível observar as fases da TSD, não aconteceu, o motivo desta situação não ter saído como o planejado está no fato de as informações iniciais dadas aos alunos serem suficientes para que se constatasse essa FG, não pedimos para que os estudantes provassem esta fórmula pois o objetivo já havia sido alcançado e não registramos esse fato com fotos, pois a situação não foi desenvolvida como o planejado, por isso partimos para a segunda fase da situação, ou seja descrevemos a FG dos

números poligonais e poligonais centralizados, assim, inicialmente foi lançada a seguinte pergunta

- como podemos encontrar a FG dos números poligonais utilizando as propriedades vistas na aula passada?

Diante desta indagação, e algumas construções na tela, alguns alunos iniciaram suas investigações, pois o problema todo estava em representar uma FG de um número triangular n e outra para um número triangular $n-1$, ou seja:

$$G[S_3(n), x] = S_3(1)x + S_3(2)x^2 + \dots + S_3(n)x^n \quad [I]$$

$$G[S_3(n-1), x] = S_3(1)x^2 + S_3(2)x^3 + \dots + S_3(n-1)x^n \quad [II]$$

Porém, como era esperado, os estudantes tiveram alguma dificuldade para encontrar a função geradora representada por II, como esperado também eles rapidamente descobriram a relação, faltava apenas a função, então o aluno A6 disse:

- deveríamos dividir a função geradora dos triangulares por x (aluno A6)

Apesar de ser um erro, é comum pensar assim, então deixamos que seguissem pois levaria a uma função que não representaria os números m -gonais porém deixaria claro o que deveria de fato acontecer.

Figura 163 - FG a partir da descrição de A6

$$G[S_3(n), x] = \frac{x}{(1-x)^3} = x + 3x^2 + 6x^3 + 10x^4 + \dots$$

$$G[S_3(n-1), x] = \frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \dots$$

Fonte: dados da pesquisa

A figura acima apresenta a descrição que o estudante A6 fez em relação a FG dos números triangulares do tipo $S_3(n-1)$. Então, esta constitui a fase de ação da situação, posteriormente a fase de formulação também foi feita pelo estudante A6 que apresentou os cálculos para a FG dos números quadrados e pentagonais, para os números quadrados o erro não seria perceptível, pois a FG dos números quadrados é dada por

$F[S_4(n), x] = F[S_3(n), x] + F[S_3(n-1), x]$ assim, o problema da FG dos pentagonais pode ser notado na figura a seguir

Figura 164 - apresentação da FG dos números pentagonais por A6

Handwritten work showing the generating function for pentagonal numbers:

$$G[S_5(n), x] = G[S_3(n), x] + 2G[S_3(n-1), x]$$

$$G[S_5(n), x] = \frac{x}{(1-x)^3} + \frac{2}{(1-x)^3} =$$

$$x + 3x^2 + 6x^3 + 10x^4 + \dots + 2 + 6x + 12x^2 + 20x^3 + \dots =$$

$$= 2 + 7x + 15x^2 + 26x^3 + \dots$$

Fonte: dados da pesquisa

Podemos perceber que durante a fase de formulação o estudante tinha ideia do que queria fazer mas um cálculo errado foi suficiente para que a FG descrita não fosse a procurada, como todas as funções poderiam ser testadas de forma computacional através do SG, então tivemos que tentar encontrar a segunda função geradora a dos números poligonais centralizados, que aparentemente não apresentava nenhum erro e fora construída usando as mesmas regras, vale lembrar que tudo isso ainda faz parte da fase de formulação da questão.

Figura 165 - solução apresentada por A6 para a FG dos números pentagonais centralizados

Handwritten work showing the generating function for central pentagonal numbers:

$$G[TC(n), x] = G[S_3(n), x] + G[S_3(n-1), x] + G[S_3(n-2), x]$$

$$G[TC(n), x] = \frac{x}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{1}{x(1-x)^3} = \frac{x^2 + x + 1}{x(1-x)^3}$$

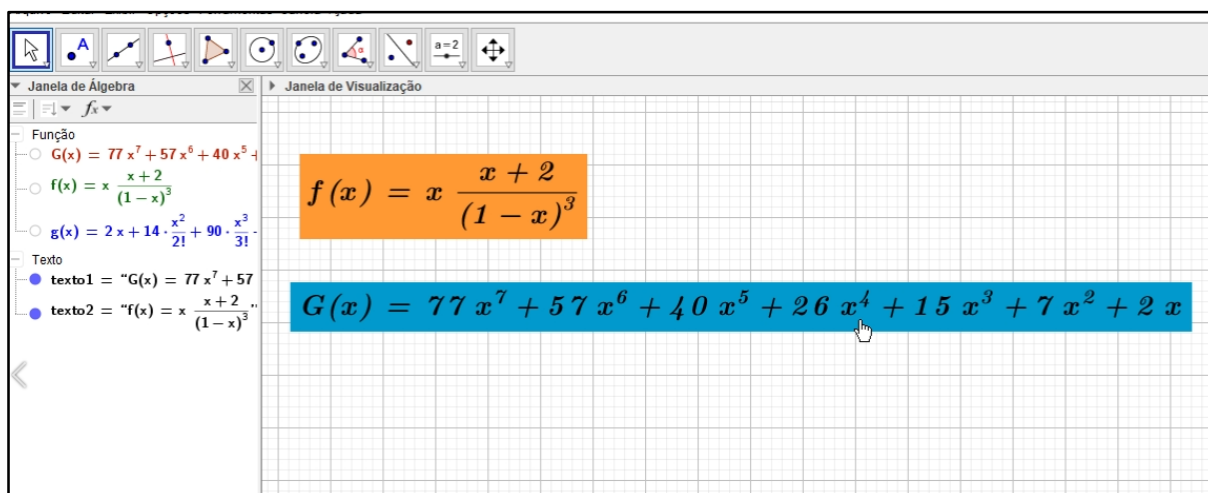
$$= x + 3x^2 + 6x^3 + \dots + 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \dots + x^{-1} + 3 + 6x + 10x^2 + \dots$$

$$= x^{-1} + 4 + 10x + 19x^2 + \dots$$

Fonte: dados da pesquisa

Na figura acima é possível encontrar os termos da sequência dos números pentagonais centralizados, porém com o expoente de x com valores diferentes dos corretos, o que levou ao questionamento de alguns estudantes, conferimos no SG e as figuras a seguir, comprovam que, de fato, o estudante cometeu algum erro.

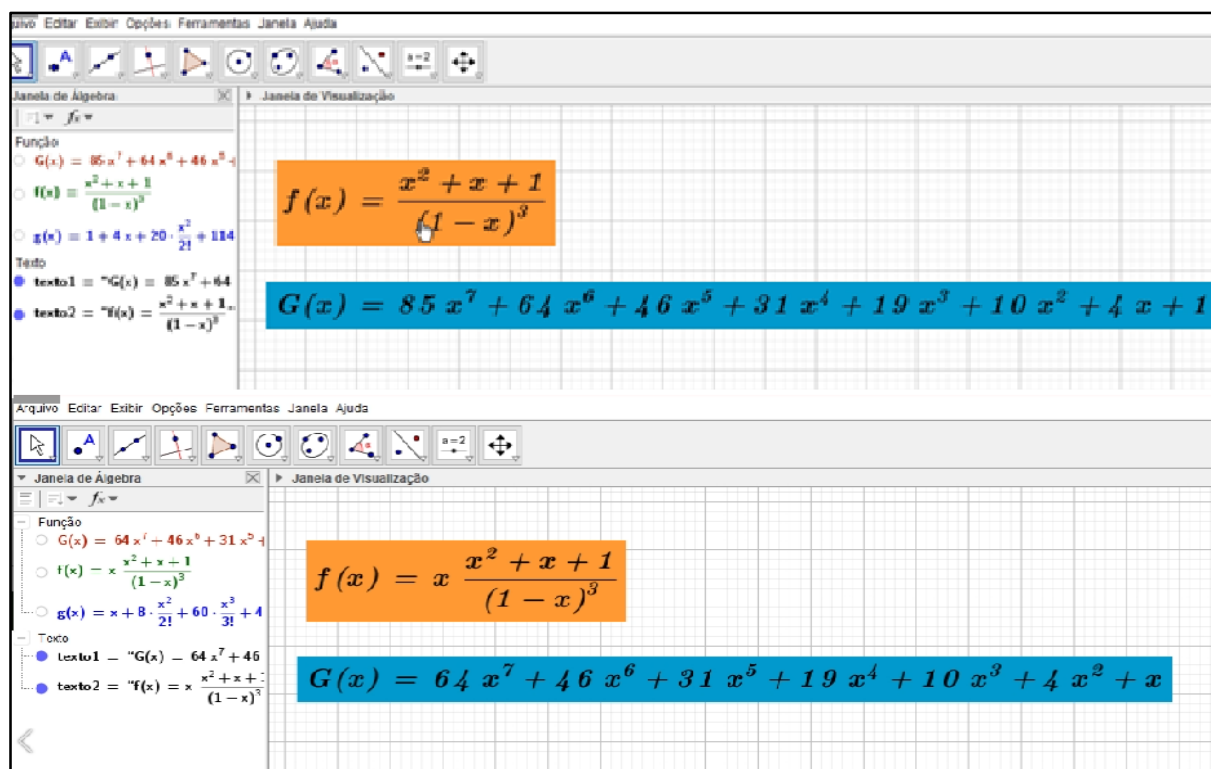
Figura 166 - fórmula encontrada por A6 no SG



Fonte: dados da pesquisa

De fato, mesmo com algumas mudanças a FG não foi a esperada, já a função dos números pentagonais centralizados poderia ser modificada para que se chegasse a desejada, conforme a figura a seguir:

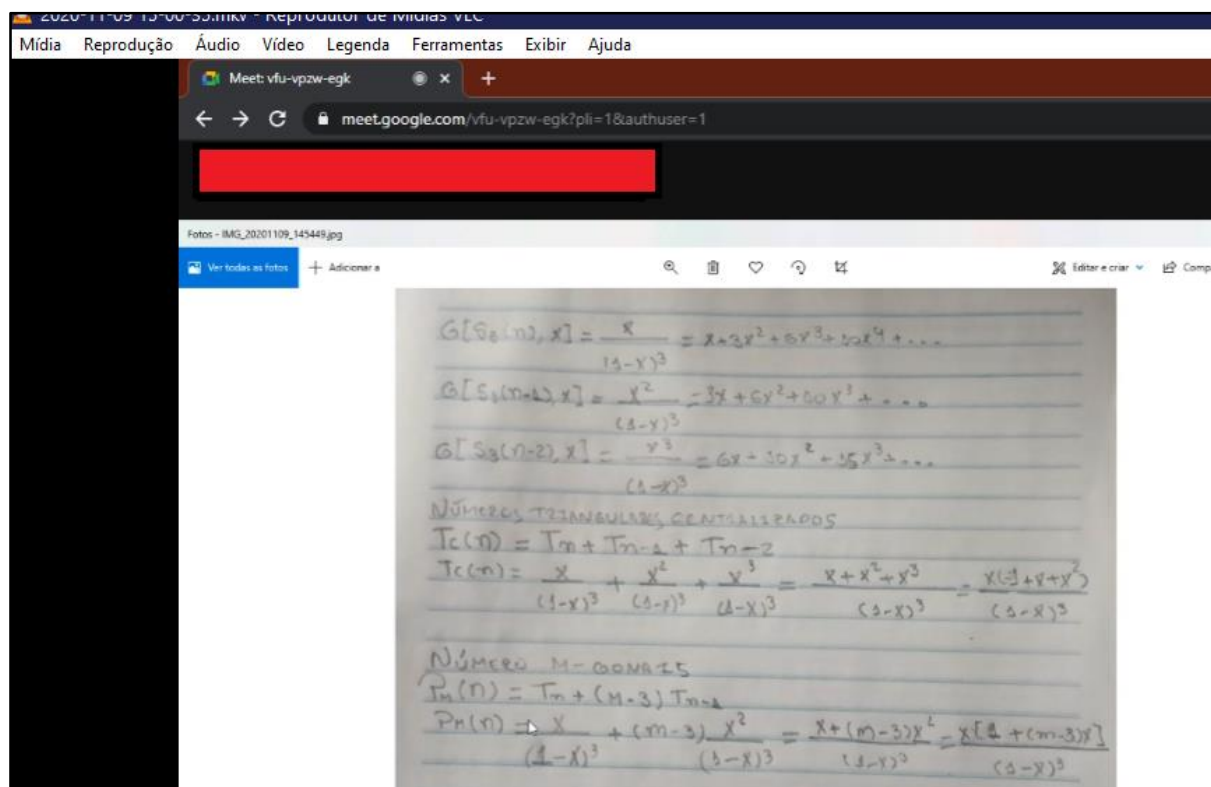
Figura 167 - FG dos números pentagonais centralizados



Fonte: dados da pesquisa

Logo os alunos voltaram a tentar encontrar a fórmula e eles sabiam que resolvido este problema logo as questões estariam resolvidas. Depois de um tempo o aluno A5 levantou uma questão importante, sobre a fórmula que A6 havia encontrado, ele disse: “se os valores dos expoentes de x fossem duas unidades maior, a fórmula seria correta”. O estudante formalizou essa afirmação e validou seus resultados, a questão pode ser vista conforme a figura a seguir:

Figura 168 - fase de validação da S4



Fonte: dados da pesquisa

Na figura pode ser vista toda a resolução em que o estudante encontra a forma para a função geradora dos números poligonais e triangulares centralizados, na explicação ele disse: “Com essa composição de funções geradoras e visualização é possível encontrar a função geradora de qualquer número figurado” (Aluno A5)

De fato, na fase de institucionalização, foi apresentado todo o percurso, retirando-se os erros que não seriam importantes e os estudantes comprovaram que sabendo das formas corretas, seria possível formar FG de números figurados assim como pode se encontrar as fórmulas gerais, para encerrarmos a aplicação dos números figurados, deveríamos definir a forma geral e recorrência de uma classe de NF, e decidimos, por ser a classe base para todos os outros, a dos simplexos, com as formulas de números triangulares e tetraédricos, esta foi a situação didática de número cinco, e será vista no próximo tópico.

5.1.5 *Validação da situação 5 – forma geral dos números simplexos*

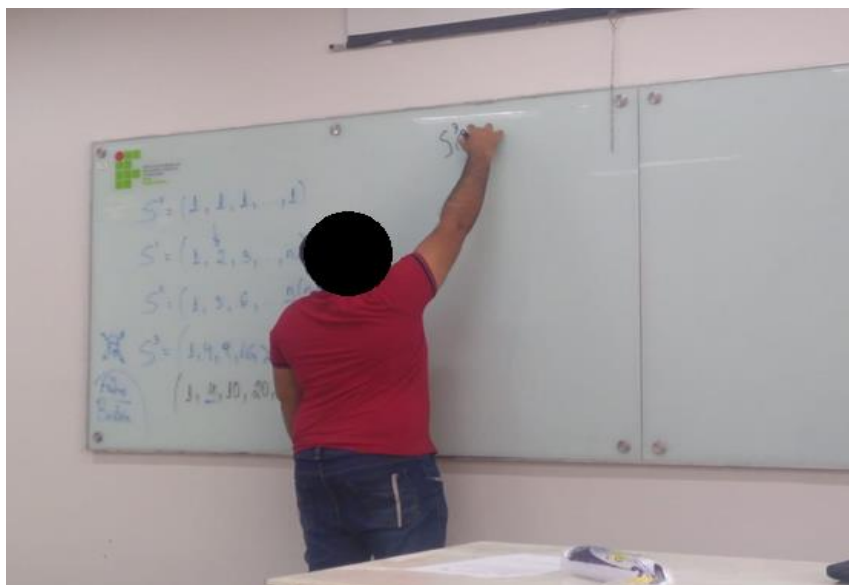
Diante das situações já apresentadas, deveremos discutir agora a apresentação de uma generalização de uma classe de números figurados, falaremos dos números simplexos em que a primeira dimensão é representada pelos números lineares, a segunda é formada pelos números triangulares, a terceira formada pelos números tetraédricos, a quarta dimensão é formada pelos números de pentatope e assim por diante.

Estes números possuem uma característica comum, todos são formados pelo somatório da sequência imediatamente inferior, e com a S4, seria possível os estudantes terem esse contato, porém a situação 5 acabou sendo desenvolvida antes da S4 devido a problemas de tempo e a incerteza devido ao período de isolamento que estávamos passando, sendo assim a S5 foi aplicada de forma presencial e os alunos tiveram como suporte apenas as formas desenvolvidas nos números poligonais e tetraédricos.

Para iniciarmos a aula, lembramos aos alunos a família dos números poligonais e em especial os números triangulares, depois foi explicado aos alunos que estes possuem uma relação com os números piramidais, pois estes segundos são formados usando o somatório dos primeiros e enfim apresentamos os números de pentatope, e, diante disto foi lançada a seguinte pergunta: qual a forma geral para os números da classe simplexos? O estudante A1, que era o mais familiarizado com os números poligonais pediu para ir para a lousa realizar alguns cálculos. Constatamos aqui a fase de ação realizada pelo aluno A1, em que o mesmo resolveu fazer um resumo do que havia estudado e qual a relação que poderia o ajudar a encontrar a fórmula desejada.

Neste momento, ficou claro que a situação poderia ser resolvida rapidamente a depender da relação encontrada, o estudante sabia os caminhos a seguir, ou seja, fase de formulação e validação aparentemente rápidos pois os argumentos usando eram os mesmo de situações anteriores, porém o estudante não lembrou da recorrência, que é a fórmula fundamental para se provar a forma geral por meio de indução, sem esta, não seria possível provar a fórmula, e os alunos ficaram por um tempo pensando em possíveis propriedades, lembrando o que fora estudado anteriormente e levantando hipóteses, neste momento, foi possível ver a turma na fase de ação, procurando soluções, e o estudante A1 ainda na lousa em busca de respostas, a figura a seguir, apresenta a relação escrita pelo professor, na lousa e o aluno A1 depois de um tempo, ainda sem respostas enquanto os estudantes tentavam encontrar uma solução, o momento foi registrado como a fase de ação.

Figura 169 - aluno A1 na fase de ação da S5

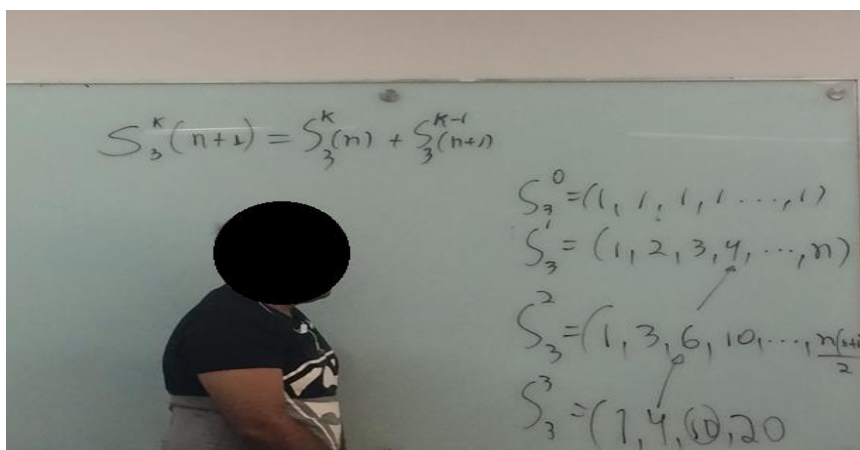


Fonte: dados da pesquisa

Na figura acima, podemos perceber que as informações contidas são apenas referentes aos termos da sequência, o estudante A1, mesmo sem ter ainda ideia do que poderia fazer para encontrar a forma dos pentatopes ou dos simplexos em geral, resolveu procurar com a ajuda dos colegas, então o aluno A2 lembrou que sempre que tentamos procurar alguma relação entre NF devemos ter sua recorrência, logo a turma procurou qualquer relação porém não encontraram, a aula terminou e então procuramos retomar na próxima aula.

Pensamos para a próxima aula, que seria necessário apresentar uma figura que possa trazer alguma ajuda para os estudantes, porém o aluno A1, repensa sua estratégia tomada na aula passada, então de imediato o aluno A1 pediu para ir para a lousa e apresentou a seguinte relação.

Figura 170 - relação de recorrência encontrada pelo aluno A1, fase de formulação



Fonte: dados da pesquisa

Esta relação está correta, e o estudante A1 conseguiu estabelecer a relação com a ajuda do estudante A2, vale lembrar que estes dois alunos se destacaram durante as aulas por conseguirem estabelecer relações de recorrência e termo geral, enquanto os outros se destacaram em visualizações de funções geradoras, por isso, estes alunos ficaram responsáveis por terminar a questão enquanto os outros ajudaram no suporte.

O estudante A1 observou as relações existentes nos números triangulares e tetraédricos e percebeu que a fórmula dos números simplexos seguem a seguinte configuração:

$$\begin{aligned}
 S_3^1(n) &= n = \frac{n}{1!} \\
 S_3^2(n) &= \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2!} \\
 S_3^3(n) &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} \\
 &\vdots \\
 S_3^k(n) &= \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}{k!}
 \end{aligned}$$

O mesmo estudante A1 então propõe a fórmula que se encontra na próxima figura, vale informar que o mesmo estudante, sempre retornava ao seu acento e voltava a lousa sempre que tinha uma nova ideia, nesta situação a fase de formulação da TSD ficou bastante evidente, sempre por parte do aluno A1, o mesmo constatou que sempre que uma sequência de simplexos é escrita em uma dimensão, seu denominador é o valor da dimensão em fatorial, porém esta observação foi feita em parte pelo professor, através da conversa:

“Professor: observem os valores, o que muda de uma dimensão para outra?”

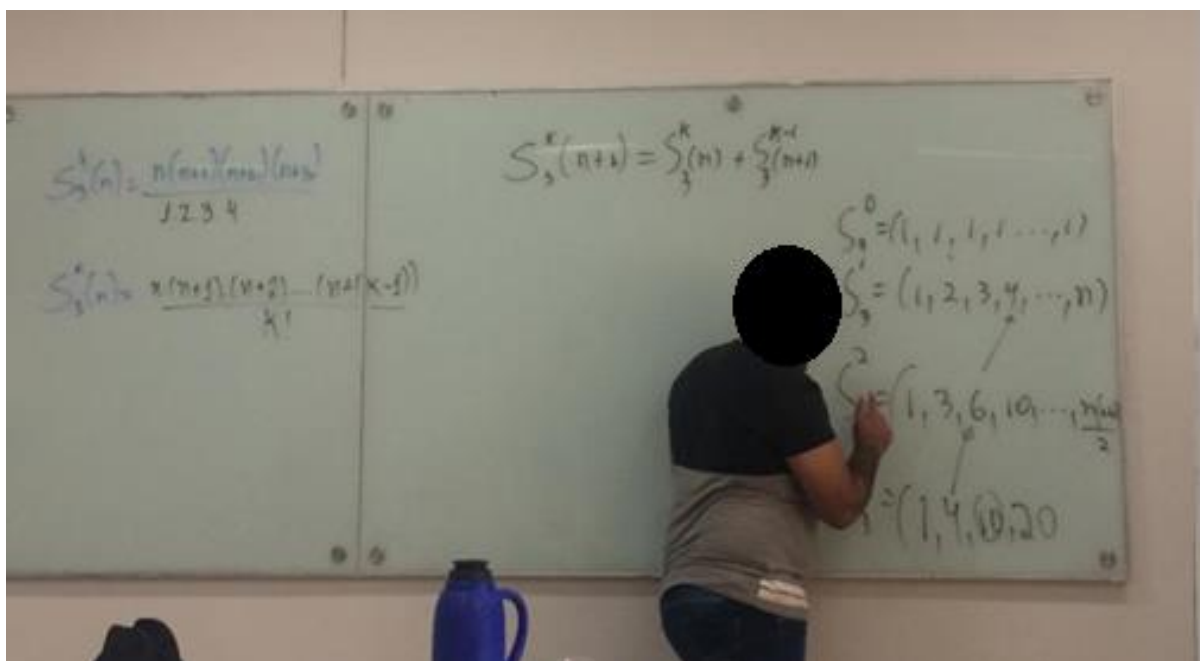
“Aluno A1: eu sei que deve haver uma sequência para determinar o denominador”

“Professor: não poderia ser outra relação, operação, ou só sequência?”

“Aluno A1: ah! Claro, um fatorial!”

Com a constatação, o estudante então escreveu a relação que consta na figura a seguir:

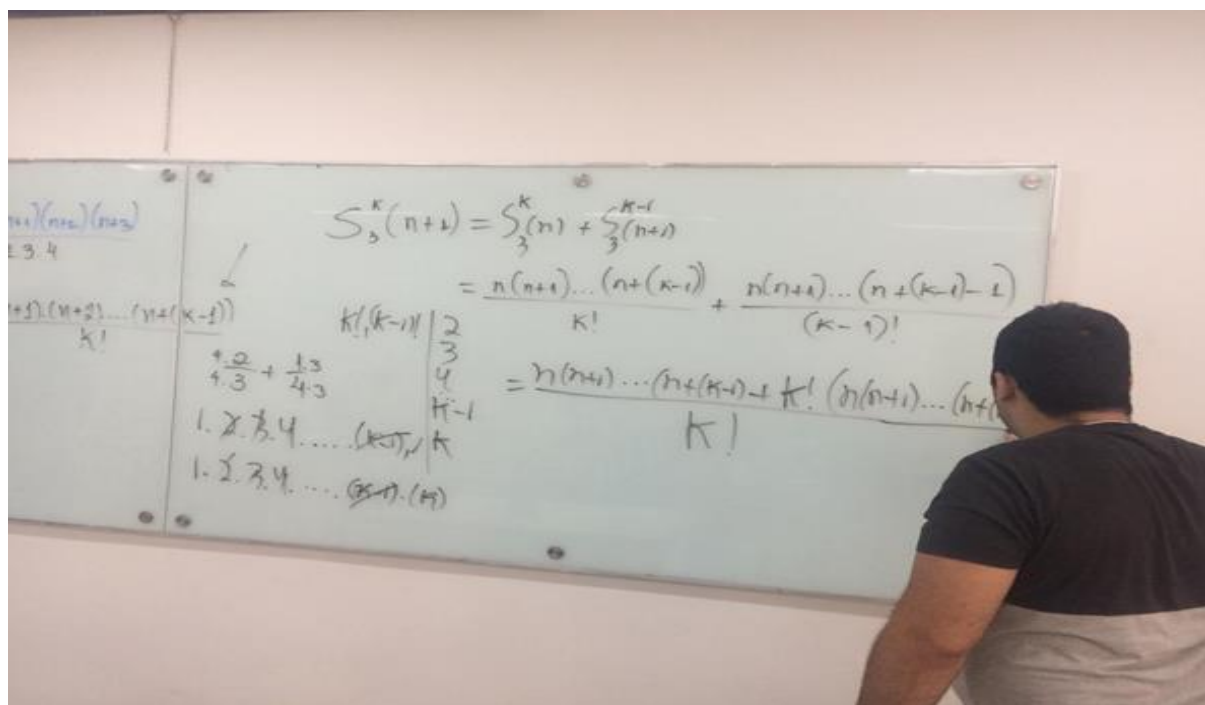
Figura 171 - relação encontrada pelo aluno A1 na S5



Fonte: dados da pesquisa

Após esta constatação ficou simples provar, os alunos precisavam apenas usar recursos algébricos ao utilizar o princípio da indução finita, a fase que se encontra nas figuras que seguirão representam a fase de validação, já que o estudante tinha a certeza que poderia realizar o cálculo.

Figura 172 - aluno A1 na fase de validação de S5



Fonte: dados da pesquisa

A figura acima apresenta a resolução feita por A1 com a prova por indução para os números simplexos k -dimensionais. É válido explicar que essa questão foi exigida que os alunos provassem pois não poderia ser feito o uso de recursos computacionais, como neste instante a aula estava próximo do encerramento, foi pedido aos alunos, principalmente a A1 que pudesse apresentar este último cálculo de forma completa, para que não ficasse nenhuma dúvida quanto ao seu entendimento da questão, mesmo que o mais importante não seja a resolução em si mas sim os caminhos que o levaram a ela. Desta forma, o estudante em questão apresentou o cálculo de forma mais clara em seu caderno, que foi registrado para que pudesse compor a fase de validação da situação cinco, a resolução se encontra na figura seguinte:

Figura 173 - fase de validação feita por A1 na S5

The image shows a handwritten mathematical proof on lined paper. The proof uses induction to show that the formula for the sum of k -dimensional simplexes, $S_3^k(n)$, holds for $n+1$ by assuming it holds for n .

$$\begin{aligned}
 S_3^k(n+1) &= S_3^k(n) + S_3^{k-1}(n+1) = \\
 &= \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!} + \frac{(n+1)\dots(n+1+k-2)}{(k-1)!} \\
 &= \frac{n(n+1)\dots(n+k-1) + k(n+1)\dots(n+k-1)}{k!} \\
 &= \frac{(n+1)\dots(n+k-1)(n+k)}{k!} = \frac{(n+1)\dots(n+(k-1)+1)}{k!}
 \end{aligned}$$

Fonte: dados da pesquisa

Desta forma, podemos observar que as fases da TSD foram observadas e registradas em todas as situações criadas, algumas situações não tiveram o desfecho esperado, mesmo que previstos, o que nos permitiu contornar e obter as respostas pretendidas na situação seguinte, destacamos também alguns problemas que não estavam previstos, como o período de isolamento, o que fez com que algumas situações tivessem que ser aplicadas de forma presencial e terminadas de forma remota, e no caso da situação didática 4, que tratava de funções geradoras, os resultados não foram os esperados pois não foi possível observar com tanta precisão todas as fases da TSD, de todo modo a situação pode ser vista como bem elaborada pois os estudantes compreenderam e apresentaram as respostas desejadas.

Durante algumas vezes tivemos que voltar da análise *a posteriori* para a análise *a priori*, mas consideramos que os objetivos específicos foram obtidos pois a maior parte do que foi pensando durante a análise *a priori* pôde ser constatado na análise *a posteriori*, mesmo porque as maiores dificuldades estavam relacionadas ao tempo que os estudantes demoravam para apresentar algum resultados e as dificuldades em manusear a álgebra, algo que mesmo imaginado não se pode ter ao certo uma fórmula que nos permita controlar o tempo ao nosso favor, fazendo com que algumas situações não pudessem ser completadas na mesma aula e tendo que retornar na próxima, teria que haver uma explicação breve tanto para os faltantes como para os alunos que estavam presentes pudesse retomar o pensamento.

Diante de todos essas observações podemos constatar que as fases da TSD foram bem descritas e observadas dentro das situações propostas e todas obstáculos que foram encontrados foram previstos e estes tinham outros meios de serem superados, consideramos assim finalizada a nossa validação interna da pesquisa com um aproveitamento desejável diante das situações propostas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa apresentou uma abordagem diferenciada acerca dos números figurados que tiveram sua origem pelos pitagóricos e evoluíram para diversas áreas da matemática com o passar dos anos. O estudo teve como base o processo de evolução histórica, relações de recorrência, termo geral, função geradora e a visualização das figuras geradas pelo arranjo das configurações por meio do software GeoGebra, que se mostrou como um poderoso recurso para se entender o crescimento das figuras tanto dentro de uma dada dimensão, que aqui chamamos de família de números, como seu crescimento de uma dimensão para outra, denominada de classe de números figurados.

Para o início, a pesquisa foi estruturada segundo a teoria de pesquisa denominada Engenharia Didática (ED), suas etapas nos permitiu organizar os estudos e aplicação bem como a organização das ideias para que este conteúdo pudesse ser bem explorado, para a primeira fase da ED denominada de *análise prévias*, foi realizado um estudo histórico e matemático em relação aos NF, com base em artigos, dissertações e livros, como estes números representam figuras geométricas quando representados por pontos, também foi necessário um estudo paralelo sobre a geometria k – dimensional, para entender como os politopos se comportam quanto aos seus análogos multidimensionais, bem como a exploração do SG que nos daria suporte na construção destas estruturas geométricas.

Na Segunda etapa de ED, denominada de análises *a priori*, foi preciso analisar as possibilidades na abordagem desses números em sala, visto que a disciplina dentro do curso de licenciatura em matemática que aborda tais números, é a história da matemática, porém nesta disciplina é comum abordar apenas o contexto histórico em que estes surgiram, bem como a importância da escola pitagórica com outras diversas descobertas matemáticas, deixando de lado a importância destes números em particular para tratar de outras descobertas mais conhecidas por Pitágoras e seus seguidores, como por exemplo o estudo das triplas pitagóricas. Diante disto, foi preciso aproximar o estudo das sequências dos números figurados sempre com uma abordagem histórica, para que não houvessem questionamentos quanto ao conteúdo matemático desenvolvido.

A estratégia de aproximar um conteúdo matemático para repassar de uma forma didática, está previsto dentro da teoria de ensino que foi estudada para se aplicar algumas das fases da (ED), esta teoria, intitulada Teoria das situações Didática (TSD), se mostrou de fundamental ajuda para que pudéssemos entender alguns comportamentos em sala, e como poderíamos levar o assunto abordado de maneira puramente matemática, como um conteúdo

aplicável em sala de aula, traçar objetivos e criar situações de ensino com a finalidade de prevê alguns resultados na fase de aplicação da pesquisa. Juntamente com a ED, a TSD nos norteou durante toda a pesquisa de modo a alcançar os objetivos traçados no início deste trabalho.

Na fase de experimentação, que constitui a terceira fase metodologia de pesquisa, foram aplicados os conteúdos que foram desenvolvidos na fase anterior, sempre amparados pelas previsões feitas na análise *a priori*, em um primeiro momento fora realizado um estudo em uma turma anterior ao estudo aplicado deste trabalho, afim de encontrar possíveis erros cometidos durante a fase anterior, de fato foram detectados alguns erros que poderiam comprometer a experimentação, porém estes foram corrigidos, e como dispúnhamos de poucas aulas no semestre subsequente, este estudo piloto foi de grande importância para o andamento da pesquisa, como este não teve análise sobre o comportamento dos estudantes e só abordou as falhas cometidas pelo pesquisador durante a fase da ED, optamos por não incluí-lo neste trabalho.

Para a aplicação na turma de HM que compõe esta pesquisa, foram necessários alguns documentos submetidos ao comitê de ética e pesquisa para que a aplicação contasse também com um amparo legal, já que a pesquisa ocorre com pessoa. Neste contexto, as situações foram aplicadas e registradas por meio de fotos, gravações de áudio e vídeo, bem como anotações dos estudantes nas listas disponibilizadas em cada aula, foram abordadas cinco situações didáticas, uma situação a cada duas aulas, totalizando dez aulas, nos meses de março de 2020 e setembro do mesmo ano, sendo seis aulas no mês de março e as outras quatro aulas no mês de setembro.

Devemos ressaltar que neste último mês as aulas tiveram que ocorrer no sistema remoto por conta da pandemia de covid-19 que fez com que adotássemos o isolamento social e portanto as aulas não poderiam acontecer de forma presencial, neste caso as anotações foram feitas com gravação de tela, capturas de telas e envio de atividades por aplicativos de mensagens, porém mesmo com este obstáculo, que não pôde ser previsto durante a concepção das situações, a aplicação contou com a ajuda dos estudantes, os resultados previstos foram realmente apresentados, pois os questionamentos dos alunos e seus desenvolvimentos estavam registrados como havíamos descritos na fase anterior.

Para o registro e a análise posterior que deveria ser feita, as fotos, vídeos e áudios, foram organizadas segundo a TSD, com situações de ação, formulação, validação e institucionalização. Esta organização trouxe uma importância muito significativa na pesquisa, pois permitiu que esta fosse analisada de forma separada, contando o desenvolvimento em cada situação e a evolução de uma fase para a outra dentro da TSD.

Desse modo, a quarta etapa da pesquisa, em que analisamos as situações didáticas empregadas com base na TSD nos revelou que os estudos em relação a ED, TSD e números figurados, apresentou um nível satisfatório de resultados, pois, diante da metodologia de pesquisa empregada, a pesquisa pôde ser bem estruturada de modo a considerar as especificações de cada etapa, dentro da análise das situações foi percebido que a maioria das situações foram bem desenvolvidas e as que não tiveram um rendimento satisfatório, pôde ser feita um elo entre esta situação e outra de modo que não houvesse perda de conteúdo, este ele já havia sido previsto na fase de análise prévias, mostra o sucesso na implementação da ED também nos casos em que a situação foge ao planejando anteriormente. Em relação ao conteúdo matemático, a análise de dados revelou que os estudantes entenderam a evolução tanto histórica quanto matemática dos NF pois precisava-se desse entendimento para que o conteúdo pudesse ter uma continuidade dentro das situações de ensino.

Por fim destacamos que este estudo foi importante para todas as partes envolvidas pois para os aluno e possíveis futuros professores, trouxe uma formação inicial votada para um conteúdo matemático puro mostrado em forma de situação de ensino privilegiando assim a matemática juntamente com a didática em sala, para o pesquisador, a pesquisa trouxe a oportunidade de explorar, dentro da matemática pura, um estudo metodológico sobre as teorias descritas tão importante para a formação continuada, aumentando as referências de pesquisa relacionada ao ensino e a possibilidade de estudos futuros dentro do campo matemático e didático, e, para a comunidade acadêmica, esperamos que este estudo sirva de oportunidade para relacionar conteúdo dentro dos números figurados, sequências numéricas, geometria ou uso de softwares no ensino com o uso da Engenharia Didática e Teoria da Situações Didáticas.

REFERÊNCIAS

- ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. Engenharia didática: evolução e diversidade. **Revemat: revista eletrônica de educação matemática**, v. 07, n. 2, p. 22–52, 2012.
- ALMOULOUD, S. A. Diálogos da didática da matemática com outras tendências da educação matemática. **Caminhos da Educação Matemática em Revista (Online)**, v. 9, n. 1, 2018.
- ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 3, n. 1, p. 62-77, 2008.
- ALMEIDA, M. C. **Platão Redimido - A Teoria dos Números Figurados na Ciência Antiga & Moderna**. 1ª ed. Curitiba: 2002.
- ALVES, F. R. V.; DIAS, M. A. Engenharia Didática para o Teorema de Binet, ou Lamé, ou de De Moivre: Análises Preliminares e a Priori. **Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas**, v. 19, n. 2, p. 103, 2018.
- ALVES, F. R. V; BARROS, F. E. Plane and Space Figurate Numbers: Visualization with the GeoGebra's Help. **Acta Didactica Napocensia**, v. 12, n. 1, p. 57-74, 2019.
- ALVES, F. R. V. Didática de matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. **Interfaces da Educação**, v. 7, n. 21, p. 131-150, 2016.
- ALVES, F. R. V. Engenharia Didática para a generalização da sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura Didactical Engineering for the generalization of Fibonacci's sequence: an experience in a graduate course. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 18, n. 1, 2016.
- ALVES, F. R. V. Engenharia Didática para o Teorema da Função Implícita: análises preliminares e a priori. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 7, n. 3, 2014.
- ALVES, F. R. V.; NETO, H. B. Engenharia Didática para a exploração didática da tecnologia no ensino no caso da Regra de L'Hopital. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 14, n. 2, p. 337-367.
- ALVES, F. R. V.; NETO, H. B; M, J. A. D. História da matemática: os números figurais em 2D e 3D. **Revista Conexões Ciência e Tecnologia**, v. 6, n. 2, p. 40-56, 2012.
- ARTIGUE, M. et al. **A enseñanza dos princípios do cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos e didáticos**. Ingeniería didáctica en educación matemática , v. 1, 1995.

ARTIGUE, M. et al. **Ingenieria Didactica en Educación Matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.** [S.l.]: Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, 1995.

BEHERA, A.; PANDA, G. K. On the square roots of triangular numbers. **Fibonacci Quarterly**, v. 37, n. 2, p. 98–105, 1999.

BELL, Jordan. **Euler and the pentagonal number theorem.** arXiv preprint math/0510054, 2005.

BROUSSEAU, G. **Theorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques.** Tese (Doutorado) — These état, Université de Bordeaux I, 1986.

BROUSSEAU, G. **Teory of didactical situations in mathematics: didatique des mathématiques.** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.

BURTON, David M. **The history of mathematics: An introduction.** Group, v. 3, n. 3, p. 35, 1985.

CHIPATALA, O. **Polygonal Numbers.** (Master in Science), Kansas State University, 2016

CONWAY, J. H.; BURGIEL, H.; GOODMAN-STRAUSS, C. **The symmetries of things.** AK Peters/CRC Press, 2016.

COTA, A. C. da S. **Euler e os números pentagonais.** 2011. 105 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade federal do rio grande do norte, Natal, 2011.

COXETER, H. S. M. **Introduction to Geometry.** 2th. ed. New York: John Wiley & Sons, 1969.

COXETER, H. S. M. **Regular polytopes.** 3th. ed. New York: Dover Publications, 1973.

DA SILVA NUNES, R; NUNES, J. M. V. Modelos constitutivos de sequências didáticas: enfoque na teoria das situações didáticas. **Revista Exitus**, v. 9, n. 1, p. 148-174, 2019.

DE LIMA, M. V. M; ALVES, F. R. V. Engenharia Didática com o tema Integrais Dependentes de Parâmetros–IDP's. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática.** ISSN 2238-8044, v. 5, n. 1/2.

DEZA, E; DEZA, M. M. **Figurate numbers.** World Scientific, 2012.

D'OOGHE, M. L; ROBBINS, F. E.; KARPINSKI, L. C. **Nicomachus of Gerasa. Introduction to Arithmetic.** New York, 1926.

DOS SANTOS, A. A; ALVES, F. R. V. A Engenharia Didática em articulação com a Teoria das Situações Didáticas como percurso metodológico ao estudo e ensino de Matemática. **Acta Scientiae**, v. 19, n. 3, 2017.

EVES, H. **An introduction to the History of Mathematics**. 3. ed. Chicago: Holt, Reinhardt and Wilson ltd, 1969.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues, Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011

GARCIA, V. C. V. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. **Zetetiké**. Campinas. Vol. 13, n. 1 (jan./jun. 2005), p. 87-119, 2005.

GONÇALVES, A. M. L. **Politopos convexos regulares**. Dissertação de mestrado. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2000.

GOPALAN et al. On pairs of Special Polygonal numbers with Unit difference. **Ijmer**, v. 3, n. 3, p. 1520–1522, 2013.

GOPALAN, M. A.; SOMANATH, M.; GEETHA, K. Observations on Icosagonal number. **International Journal of Computational Engineering Research**||Vol, v. 03, n. 7, p. 32–37, 2013.

GUPTA, A. K. The General formula to find the sum of first n K th Dimensional S sided polygonal numbers and a simple way to find the n-th term of polynomial sequences. **IOSR Journal of Mathematics**, v. 8, n. 3, p. 01–10, 2013.

KENNY, B. P. Pythagoras, the Tetraktys and the Masonic Compasses and Square. **Delivered at Oracle Lodge** 1003, Dublin, 8th, 2004.

KIM, H. On regular polytope numbers. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 131, n. 1, p. 65-75, 2003.

KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas numbers with applications**. New York: Wiley Interscience, 2001.

KOSHY, T. **Elementary number theory with applications**. Academic press, 2002.

MACHADO, C. R. Teorias de pesquisa em educação matemática: a influência dos franceses. http://www.mat.ufrgs.br/vclotilde/disciplinas/pesquisa/CLAUDIA_FRANCESES.DOC.pdf. Acesso em 03/11/2019, v. 15, p. 12, 2016.

MANSOUR, T. A formula for the generating functions of powers of Horadam's sequence. **Australasian J. Combinatorics**, v. 30, p. 207-212, 2004.

MOL, R. S. **Introdução à História da Matemática**, Editora CAED-UFMG, Belo Horizonte, 2013.

NORMAN, F. A. Figurate numbers in the classroom. **National Council of Teachers of Mathematics**, v. 38, n. 7, p. 42–45, 2019.

OLIVEIRA, R. R. de. **Engenharia Didática sobre o Modelo de Complexificação da Sequência Generalizada de Fibonacci: Relações Recorrentes N-dimensionais e Representações Polinomiais e Matriciais**. Dissertação (Mestrado) — Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE), 2018.

PENGELLEY, D. Figurate numbers and sums of numerical powers: Fermat, Pascal, Bernoulli. **Amc** **10**, p. 1–29, 2013.

PEREIRA, M. V. **Recorrências – Problemas e Aplicações**. 2014. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Universidade de Brasília, Brasília, DF, 2014.

PETERSEN, T. K. **Eulerian numbers**. Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher, 2015.

POMMER, W. M. A Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares. **São Paulo**, 2013.

PRASAD, V. S. R; RAO, B. S. Pentagonal Numbers in the Pell Sequence and Diophantine Equations $2x^2 = y^2 (3y-1)^2 \pm 2$. **Fibonacci Quarterly**, v. 40, n. 3, p. 233-241, 2002.

ROQUE, T. **História da matemática**. Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2012.

SANTOS, A. A. dos. **Engenharia Didática sobre o Estudo e Ensino da Fórmula de Binet como modelo de generalização e extensão da Sequência de Fibonacci**. Dissertação (Mestrado) — Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE), 2017.

SANTOS, A. dos; ALVES, F. R. V. A engenharia didática em articulação com a teoria das situações didáticas como percurso metodológico ao estudo e ensino de matemática. **Acta Scientiae**, v. 19, n. 3, p. 447–465, maio/jun 2017.

SILVA, I. C. da. **Recorrências: uma abordagem sobre sequências recursivas para aplicações no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado) — Mestrado Profissional em Matemática - Universidade de Brasília, 2015.

SUN, Zhi-Wei. On universal sums of polygonal numbers. **Science China Mathematics**, v. 58, n. 7, p. 1367-1396, 2015.

TATTERSALL, James J. **Elementary number theory in nine chapters**. Cambridge University Press, 2005.

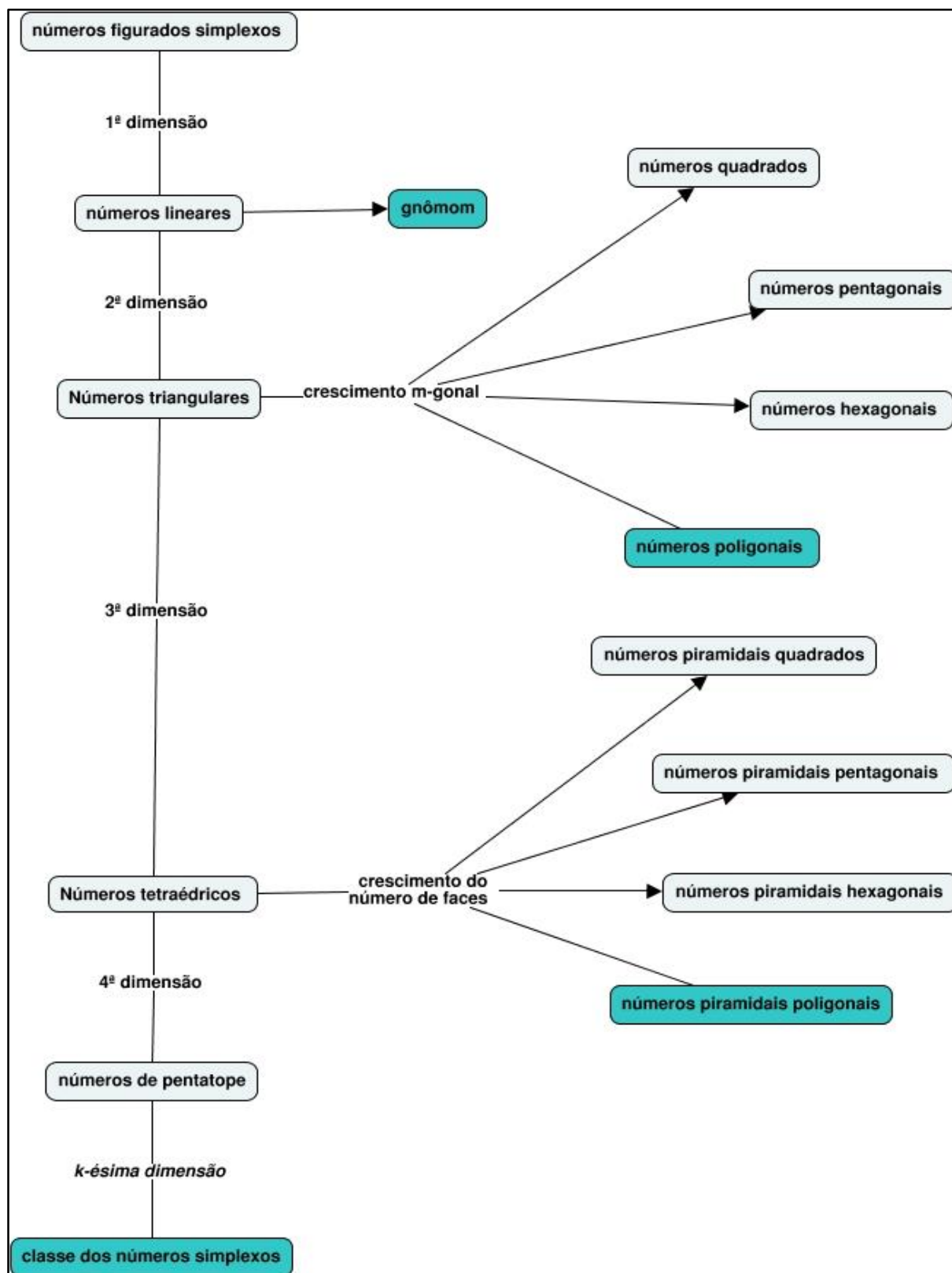
TEIXEIRA, P. J. M; PASSOS, C. C. M. Um pouco da Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau. **Zetetike**, v. 21, n. 1, p. 155-168, 2013.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. Propriedades das extensões da Sequência de Padovan. **C.Q.D.– Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 15, p. 24-40, jul. 2019. Edição Iniciação Científica.

WILF, Herbert Saul. **Generatingfunctionology**. San Diego, Californi: Academic Press, 1994. 2 ed.

APÊNDICE A – MAPA MENTAL DA CLASSE DOS NÚMEROS SIMPLEXOS

Figura 174 – crescimentos dos números simplexos



Fonte: autor

APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)**TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO****ENGENHARIA DIDÁTICA SOBRE OS NÚMEROS FIGURADOS K-DIMENSIONAIS: RELAÇÕES RECORRENTES, TERMO GERAL, FUNÇÃO GERADORA E REPRESENTAÇÃO POR MEIO DE RECURSOS COMPUTACIONAIS**

Francisco Evamar Barros
Francisco Régis Vieira Alves

Você está sendo convidado a participar como voluntário de uma pesquisa. Este documento, chamado Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, visa assegurar seus direitos como participante e é elaborado em duas vias, uma que deverá ficar com você e outra com o pesquisador.

Por favor, leia com atenção e calma, aproveitando para esclarecer suas dúvidas. Se houver perguntas antes ou mesmo depois de assiná-lo, você poderá esclarecê-las com o pesquisador. Se preferir, pode levar este Termo para casa e consultar seus familiares ou outras pessoas antes de decidir participar. Não haverá nenhum tipo de penalização ou prejuízo se você não aceitar participar ou retirar sua autorização em qualquer momento.

Justificativa e objetivos:

Este estudo faz parte do curso de mestrado em ciências e matemática do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Ceará (IFCE) – campus Fortaleza e tem como objetivo descrever as fórmulas de recorrência, termo geral e função geradora dos números figurados, bem como seu percurso histórico por meio de situações didáticas propostas.

Procedimentos:

Participando do estudo você está sendo convidado a: resolver as situações didáticas propostas e ter os dados dos seus cálculos registrados por meio de: gravações de áudio e vídeo, fotos e coleta de material manuscrito

Observações:

- Seus dados coletados não serão divulgados com seu nome ou imagem, toda a pesquisa contará com a descrição de sua identidade

Benefícios:

**INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA**
Ceará

A pesquisa traz um percurso histórico-matemático de muita importância para a disciplina de história da matemática, uma vez que descreve situações didáticas com a base matemática exigidas para um futuro professor de matemática

Sigilo e privacidade:

Você tem a garantia de que sua identidade será mantida em sigilo e nenhuma informação será dada a outras pessoas que não façam parte da equipe de pesquisadores. Na divulgação dos resultados desse estudo, seu nome não será citado.

Contato:

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, você poderá entrar em contato com os pesquisadores: Francisco Evamar Barros, e-mail: evamar_barros@hotmail.com, fone: (85) 998053395 e Francisco Régis Vieira Alves, e-mail: fregis@gmx.fr

Em caso de denúncias ou reclamações sobre sua participação e sobre questões éticas do estudo, você poderá entrar em contato com a secretaria do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) do IFCE das 08:00hs às 12:00hs e das 13:00hs as 17:00hs no IFCE Reitoria - R. Jorge Dumar, 1703 - Jardim América, Fortaleza - CE, 60410-426; fone (85) 34012332 e-mail: cep@ifce.edu.br

Consentimento livre e esclarecido:

Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais riscos e o incômodo que esta possa acarretar, aceito participar e declaro estar recebendo uma via original deste documento assinada pelo pesquisador e por mim, tendo todas as folhas por nós rubricadas:

Nome do(a) participante:

Contato telefônico (opcional):

e-mail (opcional):



**INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA**
Ceará

(Assinatura do participante ou nome e assinatura do seu RESPONSÁVEL LEGAL)

Data: ____/____/____.

Responsabilidade do Pesquisador:

Asseguro ter cumprido as exigências da resolução 466/2012 CNS/MS e complementares na elaboração do protocolo e na obtenção deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Asseguo, também, ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Informo que o estudo foi aprovado pelo CEP perante o qual o projeto foi apresentado. Comprometo-me a utilizar o material e os dados obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

Nome do(a) pesquisador(a):

[Assinatura do(a) pesquisador(a)]

Data: ____/____/____.

APÊNDICE C – QUESTIONÁRIOS



Números figurados

Prof.: Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Mestrando: prof. Francisco Evamar Barros

Data / /2020

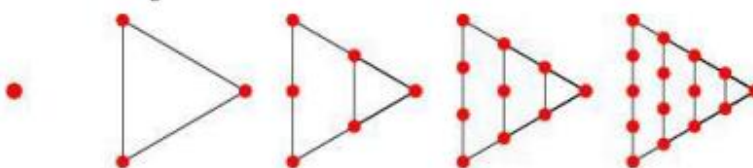
Aula 01 – apresentação

Um breve histórico

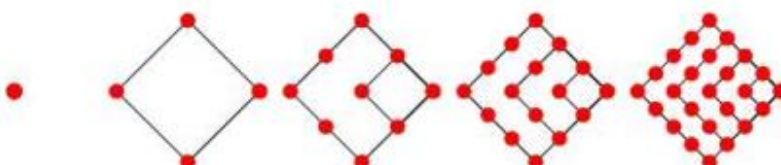
Os números figurados, bem como a maioria das classes de números especiais, tem uma longa e rica história. Eles foram introduzidos na escola Pitagórica (século VI a.C.) como uma tentativa de conectar Geometria e Aritmética. Os pitagóricos, seguindo seu credo "tudo é número", consideravam qualquer inteiro positivo como um conjunto de pontos no plano. (Deza e Deza, 2012, p.xv)

Números figurados poligonais

Números triangulares:



Números quadrados:



Números pentagonais:



Atividade:

1. Através da visualização pelo GeoGebra, encontre uma fórmula que relacione números triangulares, quadrados e pentagonais.
2. Prove a existência de uma forma geral para qualquer número poligonal



Números figurados

26/10/2020

Prof. Dr.: Francisco Régis Vieira Alves

Mestrando: Francisco Evamar Barros

Nome: _____

Aula 02 – números poligonais centralizados.

Os números figurados são a família de sequências em que os números quando representados por pontos, formam configurações geométricas, essas configurações podem ser construídas partindo de um vértice, formando uma configuração comum, como mostra a figura:

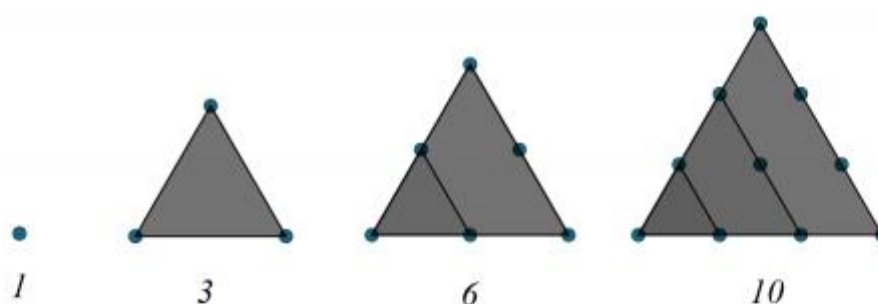


Figura 1 - os quatro primeiros números triangulares

Ou partindo do centro da figura, formando assim uma configuração centralizada, como mostra a figura 2:

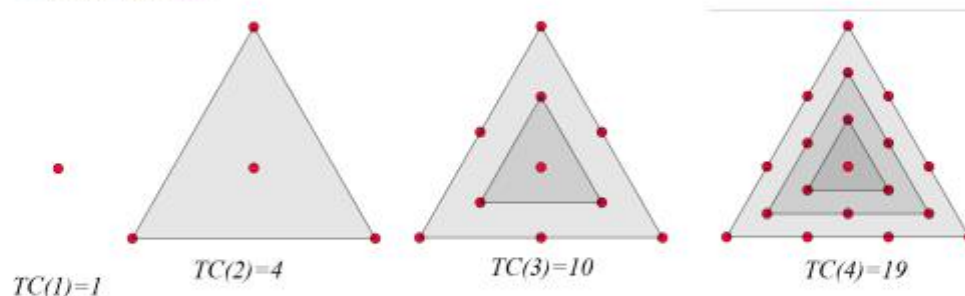


Figura 2 - os quatro primeiros números triangulares centralizados

Nesta aula, encontraremos algumas propriedades que relacionam números triangulares comuns com números poligonais centralizados a partir da visualização produzida pelo



software GeoGebra e a forma geral dos números triangulares. As figuras que representam alguns números figurados centralizados estão listadas a seguir:

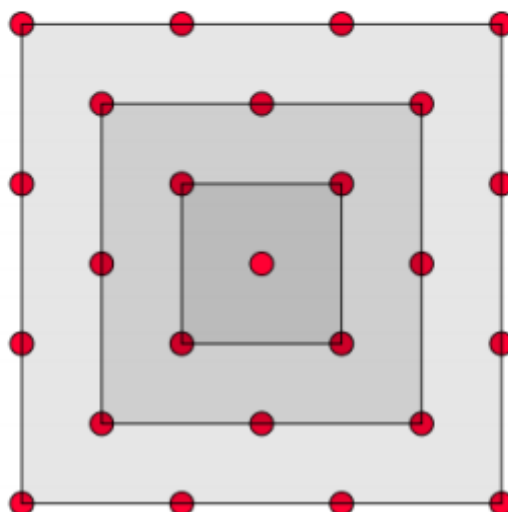


Figura 3 - quarto número quadrado centralizado

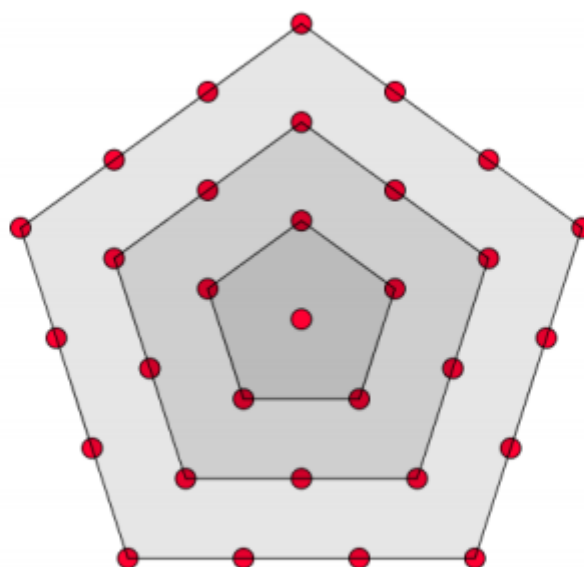


Figura 4 - quarto número pentagonal centralizado



A partir dessas imagens desenvolva as seguintes questões.

1. Encontre a forma geral dos números triangulares centralizados, quadrados centralizados e pentagonais centralizados, usando as figura como base para apresentar sua relação com números triangulares. Obs: sua resposta deve conter um desenho apresentando a relação, e o desenvolvimento da forma geral dos triangulares até obter uma formula geral para cada um dos números pedidos.
2. Prove por meio do princípio de indução que existe uma forma que generaliza os números poligonais centralizados a partir dos triangulares de configuração comum. Obs: apresente esquemas de figuras se necessário.



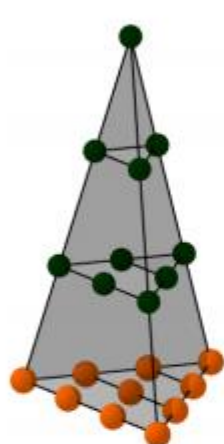
Números figurados

Prof.: Francisco Evamar Barros

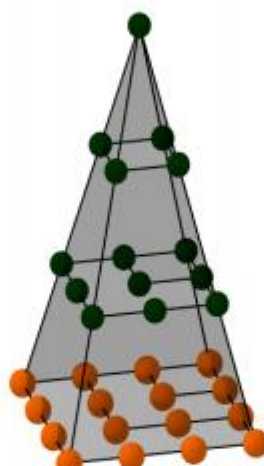
Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Aula 03 – números piramidais

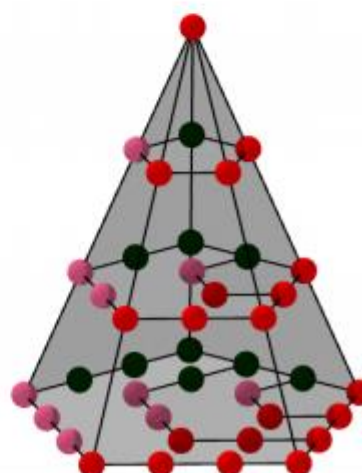
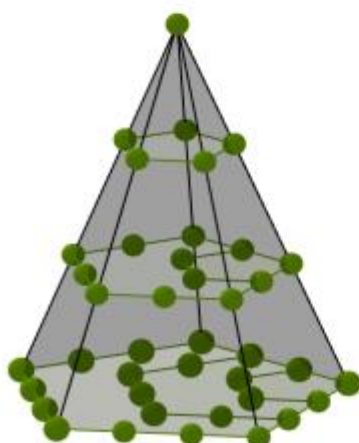
Os números piramidais são sequências numéricas que quando representados por pontos, formam pirâmides, são classificados de acordo com o polígono da base e são formados pelo empilhamento de números poligonais, conforme a figura:



$(1, 4, 10, 20, \dots)$

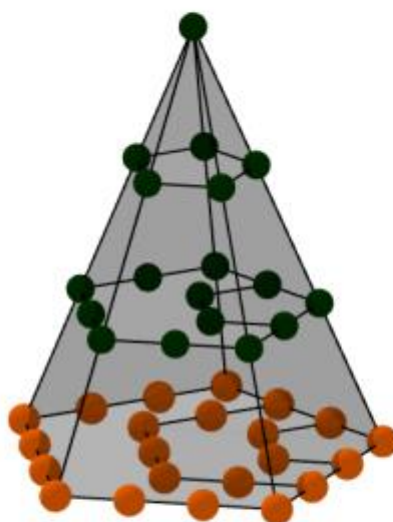


$(1, 5, 14, 30, \dots)$





PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE
CIÊNCIAS E MATEMÁTICA



1. Encontrar a recorrência e forma geral dos números piramidais, usando a visualização.

Números figurados

Mestrando: Evamar Barros, Orientador: prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Aula 04 – Função geradora

Nome:

Função geradora dos números poligonais

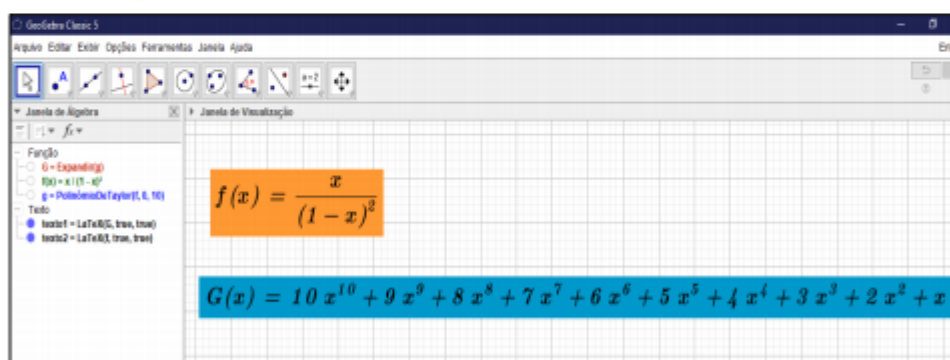
Definição: função geradora de uma sequência recorrente, é toda função do tipo

$G(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$ com $|x| < 1$ em que $c_0, c_1, c_2, \dots$ são os termos de uma sequência recorrente

Algumas funções geradoras conhecidas:

$$G[1, x] = \frac{1}{(1-x)}, G[n, x] = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ e } G[S_3(n), x] = \frac{1}{(1-x)^3}, |x| < 1$$

Visualização por meio do GeoGebra:



1. De acordo com as definições e visualização dos números poligonais, encontre a FG dos:
 - a) Números pentagonais



b) Números triangulares centralizados

c) Números *m-gonais*



Números figurados

Mestrando: Evamar Barros, Orientador: prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Aula 05 – Números simplexos

Nome:

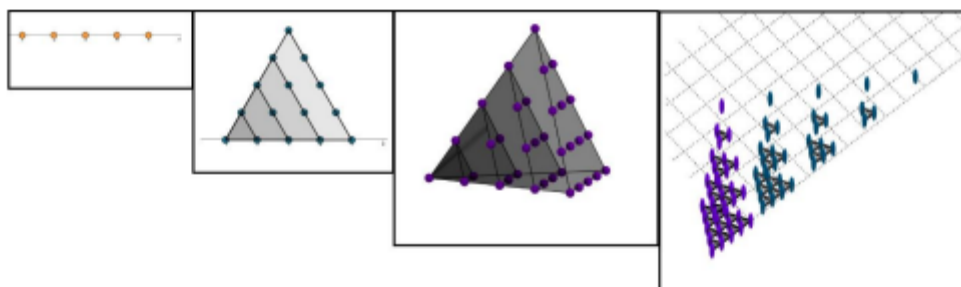
Os números simplexos são a classe de sequências dos análogos dos números triangulares em outras dimensões, ou seja, são os números que formam os politopos mais simples em uma dimensão k , assim, temos:

Para $k = 1$ temos a sequência dos números lineares $S_1^1(n) = (1, 2, 3, 4, \dots, n)$

Para $k = 2$ temos os números triangulares $S_2^1(n) = \left(1, 3, 6, \dots, \frac{n(n+1)}{2}\right)$

Para $k = 3$ temos os números tetraédricos $S_3^1(n) = \left(1, 4, 10, \dots, \frac{n(n+1)(n+2)}{6}\right)$

As figuras a seguir representam estes números:



Com base nestas informações e visualização, responda:

1. Encontre a função geradora dos números simplexos k -dimensionais
2. Prove que existe uma forma geral para qualquer número simplex.

ANEXO A – GRADE CURRICULAR DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA – IFCE – CAMPUS FORTALEZA



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ
DIRETORIA DE ENSINO
Matrizes Curriculares

-Matriz-											
3908 - Licenciatura em Matemática IV (2012/1)											
-Curso-											
01402 - Licenciatura em Matemática											
Nível	Periodicidade	Regime	Situação	Per. Letivo Inicial	C.H. Disciplinas						
Graduação	Semestral	Não Seriado	Matriz em Vigor	2012/1	3440						
Per.	Componentes Curriculares							Carga Hor.	Co-Requisitos	Pré-requisitos	Equivalentes
	Código	Descrição	Núcleo	Opt	Hab.	Cred.	Cred. Nec.				
1	01.402.06	INICIAÇÃO À FILOSOFIA	COM	N	57	3	0	60			MAT018g1
1	01.402.01	GEOMETRIA PLANA E CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS	COM	N	57	4	0	80			MAT008g1 + SAN011g1
1	01.402.02	MATEMÁTICA DISCRETA	COM	N	57	4	0	80			TELM.003g1 + 01.LMA.03g2 + MAT002g2
1	01.402.03	MATEMÁTICA ELEMENTAR I	COM	N	57	4	0	80			MAT003g1
1	01.402.04	HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO NO BRASIL	COM	N	57	2	0	40			CLF1.005g1 + MAT025g2 + MAT016g3
1	01.402.05	COMUNICAÇÃO E LINGUAGEM	COM	N	57	3	0	60			MAT009g1
2	01.402.07	CÁLCULO I	COM	N	57	4	0	80		01.402.03	CLF1.004g1 + PQU001g2 + MAT002g3 + TELM.005g4
2	01.402.08	LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA	COM	N	57	2	0	40			
2	01.402.09	MATEMÁTICA ELEMENTAR II	COM	N	57	4	0	80		01.402.01 + 01.402.02	MAT021g1 + 01.LMA.09g2
2	01.402.13	METODOLOGIA DO TRABALHO CIENTÍFICO I	COM	N	57	2	0	40			CLF1.008g1 + MAT034g2
2	01.402.10	FUNDAMENTOS SOCIOFILOSÓFICOS DA EDUCAÇÃO	COM	N	57	4	0	80			MAT019g1 + 01.405.02g2
2	01.402.11	PSICOLOGIA DO DESENVOLVIMENTO	COM	N	57	2	0	40			MAT041g1
2	01.402.12	LIBRAS	COM	N	57	2	0	40			CLF1.017g1 + 01.308.29g10 + 01.504.53g1 + 01.505.58g2 + 01.802.48g13 + 01.903.61g14 + CPQJ.006g2 + LLA.007g3 + 01.405.19g4 + 01.LAV.040g5 + 01.404.23g6 + MAT.031g7 + MAT.036g8 + 01.316.33g9
3	01.402.14	ÁLGEBRA LINEAR	COM	N	57	4	0	80		01.402.09	MAT001g1 + TELM.116g2 + IND.009g3
3	01.402.15	CÁLCULO II	COM	N	57	4	0	80		01.402.07	CLF1.007g1 + TELM.010g2 + TELM.065g3 + MAT003g4 + UAC005g5 + 01.505.08g6 + PQU002g7 + 01.902.58g8
3	01.402.16	INFORMÁTICA APLICADA AO ENSINO DA MATEMÁTICA	COM	N	57	4	0	80		01.402.01 + 01.402.07	01.LMA.018g1
3	01.402.17	PROJETOS SOCIAIS	COM	N	57	2	0	40			TELM023g1 + 01.LAV.051g2 + 01.903.44g3 + 01.502.59g4



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ
DIRETORIA DE ENSINO
Matrizes Curriculares

Matriz											
3908 - Licenciatura em Matemática IV (2012/1)											
Curso											
01402 - Licenciatura em Matemática											
Nível	Graduação	Periodicidade	Semestral	Regime	Não Seriado	Situação	Matriz em Vigor	Per. Letivo Inicial	2012/1	C.H. Disciplinas	3440
Per.	Código	Descrição	Núcleo	Opt	Hab.	Cred.	Cred. Nec.	Carga Hor.	Co-Requisitos	Pré-requisitos	Equivalentes
3	01.402.19	PSICOLOGIA DA APRENDIZAGEM	COM	N	57	3	0	60		01.402.11	MA104g1 + 01.404.17g2 + 01.405.52g3
3	01.402.18	POLÍTICAS EDUCACIONAIS	COM	N	57	3	0	60			MA108g1 + 01.LAV.031g2
4	01.402.24	DIDÁTICA GERAL	COM	N	57	4	0	80			CLF1.008g1 + 01.LMA.08g2 + MA109g3
4	01.402.20	CÁLCULO III	COM	N	57	4	0	80		01.402.14 + 01.402.15	CLF1.010g1 + 01.505.19g2
4	01.402.21	GEOMETRIA ESPACIAL E PROJETIVA	COM	N	57	4	0	80		01.402.01 + 01.402.14	MA102g1
4	01.402.22	METODOLOGIA DO ENSINO DA MATEMÁTICA	COM	N	57	4	0	80		01.402.08 + 01.402.16	MA103g1
4	01.402.23	TEORIA DOS NÚMEROS	COM	N	57	4	0	80		01.402.02	MA104g1
5	01.402.25	CÁLCULO IV	COM	N	57	4	0	80		01.402.20	CLF1.014g1
5	01.402.26	ESTRUTURAS ALGÉBRICAS	COM	N	57	4	0	80		01.402.14 + 01.402.23	MA101g1
5	01.402.27	CURRÍCULOS E PRÁTICAS EDUCATIVAS	COM	N	57	3	0	60			MA100g1 + 01.LMA.12g2 + CLF1.041g3
5	01.402.28	MECÂNICA NEWTONIANA	COM	N	57	4	0	80		01.402.15	0200g1 + 01.503.8g2 + CPQU.067g3 + F4Q.19g4
5	01.402.29	ESTÁGIO I	COM	N	EST	5	0	100			MA101g1 + CLF1.012g2
5	01.402.45	PROGRAMA RESIDÊNCIA PEDAGÓGICA	COM	N	PRP	22	0	440			
6	01.402.30	EDO E SÉRIES	COM	N	57	4	0	80			TELM.060g1
6	01.402.31	HISTÓRIA DA MATEMÁTICA	COM	N	57	4	0	80		01.402.01 + 01.402.15 + 01.402.23	MA102g1
6	01.402.32	ELETRICIDADE E MAGNETISMO	COM	N	57	4	0	80		01.402.25 + 01.402.28	CLF1.037g1 + CEME.190g2
6	01.402.33	ESTÁGIO II	COM	N	EST	8	0	160			
7	01.402.34	CÁLCULO NUMÉRICO	COM	N	57	4	0	80		01.402.20	IND.024g1 + MA100g2

04/09/2020 19:08

Página: 2



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ
DIRETORIA DE ENSINO
Matrizes Curriculares

Matriz											
3908 - Licenciatura em Matemática IV (2012/1)											
Curso											
01402 - Licenciatura em Matemática											
Nível	Graduação	Periodicidade	Semestral	Regime	Não Seriado	Situação	Matriz em Vigor	Per. Letivo Inicial	2012/1	C.H. Disciplinas	3440
Per.	Código	Descrição	Núcleo	Opt	Hab.	Cred.	Cred. Nec.	Carga Hor.	Co-Requisitos	Pré-requisitos	Equivalentes
7	01.402.35	FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA	COM	N	57	4	0	80		01.402.25 + 01.402.30	
7	01.402.36	METODOLOGIA DO TRABALHO CIENTÍFICO II	COM	N	57	2	0	40		01.402.13	
7	01.402.38	OPTATIVA 71	COM	S	57	3	0	60			
7	01.402.37	ESTÁGIO III	COM	N	EST	7	0	140			
8	01.402.39	INTRODUÇÃO À ANÁLISE	COM	N	57	4	0	80			
8	01.402.40	PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	COM	N	57	4	0	80		01.402.02 + 01.402.15	MA101g1 + MA100g1 + TELM.060g2
8	01.402.41	PROGRESSÕES E MATEMÁTICA FINANCEIRA	COM	N	57	3	0	60			01.LMA.14g1 + MA103g2
8	01.402.43	TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO	COM	N	57	2	0	40			
8	01.402.42	OPTATIVA 81	COM	S	57	4	0	80			FIS.002g1 + 01.505.11g2
Código	Sigla	Habilitação	Básica					Carga Horária			
57	57	DISCIPLINAS BÁSICAS	Sim	0	0	0	0	140	0	200	0
7839	EST	ESTÁGIO	Não	0	0	0	0	140	0	200	0
7840	PRP	PROGRAMA RESIDÊNCIA PEDAGÓGICA	Não	0	440	0	0	140	0	200	0

04/09/2020 19:08

Página: 3

**ANEXO B – PROGRAMA DE UNIDADE DIDÁTICA – PUD DA DISCIPLINA
DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA - IFCE**

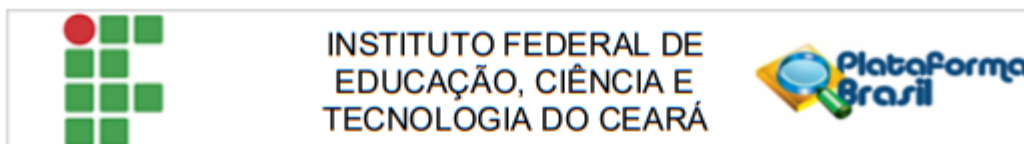


**INSTITUTO FEDERAL DO CEARÁ-IFCE
CAMPUS FORTALEZA
DIRETORIA DE ENSINO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

DISCIPLINA: HISTÓRIA DA MATEMÁTICA		
Código:		
Carga Horária Total: 80 h	Teórica: 70 h	Prática Como Componente Curricular:
Número de Créditos:		4
Código pré-requisito:	Geo Plana e Cons. Geom, Cálculo II e Teoria dos	
Semestre:	6º	
Nível:	Graduação	
EMENTA		
Estudo do conceito, desenvolvimento histórico e representações do número. O desenvolvimento da Matemática nas diversas civilizações ao longo da história. Vida obra e contexto histórico dos principais matemáticos e suas contribuições para o desenvolvimento da Matemática. História da Matemática no Brasil.		
OBJETIVO		
- Levar o aluno a compreender o desenvolvimento da Matemática de acordo com o contexto histórico e social e fazer conexões com as metodologias de ensino e propostas curriculares; - Conhecer os principais matemáticos e suas principais contribuições no desenvolvimento do conhecimento matemático ao longo da história; - Utilizar o conhecimento da História da Matemática para aprimorar o ensino de forma crítica e contextualizada; - Entender o desenvolvimento da História da Matemática no Brasil.		
PROGRAMA		
1. O conceito de número e os sistemas de numeração. 2. O desenvolvimento histórico da álgebra, Geometria e Aritmética nas diferentes épocas e civilizações. 3. Principais matemáticos da história e suas contribuições para o desenvolvimento da Matemática. 4. História da Matemática no Brasil.		
METODOLOGIA DE ENSINO		
Aulas expositivas, seminários, debates, apresentação de vídeos e pesquisa.		
AVALIAÇÃO		

Provas, trabalhos, seminários e avaliação contínua.	
BIBLIOGRAFIA BÁSICA	
- EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. Campinas-SP: Editora Unicamp, 2004. - BOYER, Carl B. História da Matemática. 2ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006. - D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Uma História Concisa da Matemática no Brasil. Petrópolis-RJ: Vozes, 2008.	
BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR	
- MENDES, I. A. O uso da História no Ensino da Matemática: reflexões teóricas e experiências. Belém: EDUEPA, 2001. - MIGUEL, Antônio <i>et. al.</i> História da Matemática em Atividades Didáticas. São Paulo: Livraria da Física Editora, 2009.	
Coordenador do Curso _____	Setor Pedagógico _____

ANEXO C – PARECER DO COMITÊ DE ÉTICA E PESQUISA



PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: ENGENHARIA DIDÁTICA PARA OS NÚMEROS FIGURADOS: RECORRÊNCIA, TERMO GERAL E FUNÇÕES GERADORAS

Pesquisador: FRANCISCO EVAMAR BARROS

Área Temática:

Versão: 2

CAAE: 30340220.5.0000.5589

Instituição Proponente: INSTITUTO FEDERAL DE EDUCACAO, CIENCIA E TECNOLOGIA DO CEARA

Patrocinador Principal: INSTITUTO FEDERAL DE EDUCACAO, CIENCIA E TECNOLOGIA DO CEARA

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 4.141.855

Apresentação do Projeto:

O projeto "ENGENHARIA DIDÁTICA PARA OS NÚMEROS FIGURADOS: RECORRÊNCIA, TERMO GERAL E FUNÇÕES GERADORAS" propõe descrever as fases da metodologia de pesquisa intitulada Engenharia Didática na aplicação de números figurados gregos e o seu percurso histórico-matemático no que diz respeito a sua evolução no estudo das recorrência, termo geral e funções geradoras, bem como sua visualização por meio de softwares matemáticos.

Objetivo da Pesquisa:

Realizar uma Engenharia Didática da generalização das sequências dos números figurados Kdimensionais, ou seja, desenvolver um estudo sobre as relações entre os números figurados por meio de situações didáticas que possibilitem a adequação do conhecimento científico com as possibilidades cognitivas dos estudantes.

Objetivo Secundário:

1. Investigar os teoremas e propriedades específicos dos números figurados: relações de recorrência e generalização para o n-ésimo termo de um número figurado m-gonal e k-dimensional.
2. Explorar, em situações didáticas, funções geradoras, extensão para índices inteiros e a visualização por meio de recursos computacionais como o software geogebra e o máxima.
3. Realizar um estudo histórico sobre a evolução epistêmico-matemática dos números figurados

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703

Bairro: Jardim América

UF: CE

Município: FORTALEZA

Telefone: (85)3401-2332

CEP: 60.410-426

E-mail: cep@ifce.edu.br



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA DO CEARÁ



Continuação do Parecer: 4.141.855

dentro da proposta das situações didáticas em sala.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

Os riscos da pesquisa são considerados moderados e mínimos. O pesquisador cita que os participantes da pesquisa estarão expostos aos riscos de origem psicológica, intelectual ou emocional, e mostra as formas de minimizar-los.

Benefícios:

O estudo traz uma análise sobre a prática do professor em sala de aula e de como realizar previsões acerca de possíveis obstáculos metodológicos encontrados pelos estudantes, desse modo a prática do professor passa a ser mais voltada para o planejamento de aula e em como essa fase se relaciona com a aplicação em sala, fazendo com que o professor reconheça exatamente em que fase da aplicação, seu estudante encontrou dificuldades e assim podendo contornar situações em que o aluno desista ou fique desestimulado com o conteúdo prendido. Esta pesquisa também tem como foco o aprendizado todo centrado no alunos visto que o professor entra com o papel de mediador entre o alunos e o conhecimento.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

A pesquisa é de extrema relevância para a área a qual pertence. A formulação do estudo respeita os requisitos éticos exigidos para este tipo de pesquisa.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

Todos os termos foram apresentados.

Recomendações:

Acrescentar na parte de "Acompanhamento e Assistência", na linha 4, a palavra não, para que a frase tenha o verdadeiro sentido.

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

Sem inadequações e/ou pendências.

Considerações Finais a critério do CEP:

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_1511155.pdf	11/06/2020 18:24:46		Aceito

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703

Bairro: Jardim América

CEP: 60.410-426

UF: CE

Município: FORTALEZA

Telefone: (85)3401-2332

E-mail: cep@ifce.edu.br



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA DO CEARÁ



Continuação do Parecer: 4.141.855

Projeto Detalhado / Brochura Investigador	projeto.pdf	11/06/2020 18:24:20	FRANCISCO EVAMAR BARROS	Aceito
Cronograma	cronograma.pdf	11/06/2020 18:23:47	FRANCISCO EVAMAR BARROS	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE.pdf	19/05/2020 18:40:47	FRANCISCO EVAMAR BARROS	Aceito
Declaração de Pesquisadores	pesquisadores.pdf	24/03/2020 13:48:55	FRANCISCO EVAMAR BARROS	Aceito
Declaração de concordância	compromisso.pdf	24/03/2020 13:47:13	FRANCISCO EVAMAR BARROS	Aceito
Orçamento	orcamento.pdf	24/03/2020 13:38:13	FRANCISCO EVAMAR BARROS	Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	infr.pdf	24/03/2020 13:26:36	FRANCISCO EVAMAR BARROS	Aceito
Folha de Rosto	FR.pdf	24/03/2020 13:20:26	FRANCISCO EVAMAR BARROS	Aceito

Situação do Parecer:

Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:

Não

FORTALEZA, 08 de Julho de 2020

Assinado por:

PAULO HENRIQUE NOBRE PARENTE
(Coordenador(a))

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703

Bairro: Jardim América

UF: CE

Município: FORTALEZA

CEP: 60.410-426

Telefone: (85)3401-2332

E-mail: cep@ifce.edu.br