



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ
IFCE CAMPUS FORTALEZA
PRÓ – REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA (PPGECM)

GEORGYANA GOMES CIDRÃO

DIDÁTICA PROFISSIONAL (DP) NA FORMAÇÃO INICIAL DOS
PROFESSORES DE MATEMÁTICA: O CASO DA CONSTRUÇÃO DOS
CONJUNTOS NUMÉRICOS

FORTALEZA

2020

GEORGYANA GOMES CIDRÃO

**DIDÁTICA PROFISSIONAL (DP) NA FORMAÇÃO INICIAL DOS
PROFESSORES DE MATEMÁTICA: O CASO DA CONSTRUÇÃO DOS
CONJUNTOS NUMÉRICOS**

Dissertação de Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática apresentada à banca examinadora do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Coorientadora: Profa. Dra. Maria Cleide da Silva Barroso

Área de Concentração: Ensino de Matemática

FORTALEZA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal do Ceará - IFCE
Sistema de Bibliotecas - SIBI
Ficha catalográfica elaborada pelo SIBI/IFCE, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- C565d Cidrão, Georgyana Gomes.
Didática Profissional (DP) na formação inicial dos professores de Matemática: o caso da construção dos conjuntos numéricos / Georgyana Gomes Cidrão. - 2020.
163 f. : il. color.
- Dissertação (Mestrado) - Instituto Federal do Ceará, Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Campus Fortaleza, 2020.
Orientação: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.
Coorientação: Profª. Dra. Maria Cleide da Silva Barroso.
1. Didática Profissional. 2. Conjuntos numéricos. 3. Engenharia Didática de Formação. I. Título.
CDD 510.07
-

GEORGYANA GOMES CIDRÃO

**DIDÁTICA PROFISSIONAL (DP) NA FORMAÇÃO INICIAL DOS
PROFESSORES DE MATEMÁTICA: O CASO DA CONSTRUÇÃO DOS
CONJUNTOS NUMÉRICOS**

Dissertação de Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática apresentada à banca examinadora do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Área de Concentração: Ensino de Matemática

Aprovado em: 05/02/2020.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves (Orientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE/PGECEM

Profa. Dra. Maria Cleide da Silva Barroso (Coorientadora)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE/PGECEM

Profa. Dra. Katia Vigo Ingar
Universidad Nacional del Callao (UNAC)

Profa. Dra. Maria José Costa dos Santos
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Olivier Allain
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina (IFSC)

Prof. Dr. Laerte Silva da Fonseca
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Sergipe (IFS)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a **Deus**, por me manter persistente.

Agradeço ao meu noivo **Joab Almeida**, por todo o apoio, carinho e compreensão nas decisões da minha vida.

Agradeço aos meus pais, irmãos, sobrinha: **Francisca, Jorge, Sophia, Robson, Heloísa**, por serem sempre minha base. E a **Nailê** (tia) pela convivência e apoio.

Expresso também, o meu agradecimento ao meu orientador **Francisco Régis Vieira Alves**, pela transposição de seus saberes e incentivo.

Agradeço a minha amiga e colega **Italândia Ferreira** pela partilha dos momentos nesse percurso de estudo.

Agradeço aos **professores** do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática que sempre acreditam na pesquisa e na Ciência.

“Il faut bien que je supporte deux ou trois chenilles si je veux connaître les papillons.”
(Antoine de Saint-Exupéry)

RESUMO

A formação de adultos no trabalho desde a década de 1960 tem sido objeto de investigação por vários especialistas. No entanto, nas décadas de 70 e 80, a relação entre treinamento e competência se estreitou. Assim, na década de 90, emerge um aspecto francês que analisa a relação entre: educação de adultos, aprendizagem no trabalho, desenvolvimento profissional e orientação para a competência profissional, sendo definida como Didática Profissional (DP). Além disso, a DP está presente na confluência de quatro correntes, consideradas: Conceitualização em Ação, Psicologia Ergonômica, Didática das Disciplinas e Engenharia de Treinamento. Portanto, nossa pesquisa escolheu interesse nesse aspecto para analisar o campo do trabalho de desenvolvimento inicial do professor de matemática. Para isso, estamos preocupados em usar uma metodologia adequada ao cenário de formação de professores, por isso escolhemos a Engenharia de Treinamento Didático (FED), que visa à formação inicial ou continuada de professores de matemática. Também escolhemos uma teoria educacional que embasou nossa metodologia, localizada em: Teoria das Situações Didáticas (TSD). Dessa forma, a EDF está localizada em quatro fases pertencentes à Engenharia Didática Clássica, portanto, na primeira fase, realiza a análise preliminar; na segunda, a análise e experimentação anteriores; na terceira, a análise posterior e, na última fase, a validação. Com base na metodologia, na primeira fase, fizemos uma análise do trabalho sobre a construção axiomática dos números. Na fase seguinte, realizamos a coleta de dados, previmos os obstáculos cognitivos dos sujeitos da pesquisa e montamos uma sequência de ensino baseada no TSD, contendo quatro fases: ação, formulação, validação e institucionalização. A coleta de dados ocorreu na disciplina opcional: Fundamentos de Análise e Cálculo, do curso de Matemática no IFCE Campus Fortaleza. Os registros obtidos na forma de entrevistas semiestruturadas foram analisados com base nos pressupostos da Didática Profissional. Diante dos obstáculos didáticos encontrados nesta pesquisa, constatamos que a formação inicial do professor de matemática e a construção axiomática dos números são relevantes para a superação dos problemas recorrentes, a aprendizagem do objeto matemático vinculado à competência profissional.

Palavras-chave: Didática Profissional. Conjuntos Numéricos. Engenharia Didática de Formação.

ABSTRACT

The training of adults on the job since the 1960s has been the subject of investigation by several specialists. However, in the 70s and 80s the relationship between training and competence became close. Thus, in the 90s, a French aspect emerges that analyzes the relationship between: adult education, learning at work, professional development, and guidance for professional competence, being defined as Professional Didactics (PD). Furthermore, PD is present at the confluence of four currents, considered as: Conceptualization in Action, Ergonomic Psychology, Didactics of Disciplines and Training Engineering. Therefore, our research chose interest in this aspect to analyze the field of initial development work of the mathematics teacher. For this, we are concerned with using a methodology appropriate to the scenario of teacher training, so we chose Didactic Training Engineering (EDF), such methodology aims at the initial or continued training of mathematics teachers. We also chose an educational theory that supported our methodology, located in: Theory of Didactic Situations (TSD). In this way, EDF is located in four phases belonging to Classical Didactic Engineering, so in the first phase it has the preliminary analysis, in the second phase the prior analysis and experimentation, in the third phase the posterior analysis and in the last phase the validation. Based on the methodology, in the first phase, we did a work analysis about the axiomatic construction of the numbers. In the next phase, we did a data collection, as well as, we foresaw the cognitive obstacles of the research subjects, and, we set up a teaching sequence based on the TSD, containing four phases: action, formulation, validation and institutionalization. Data collection took place in the optional discipline: Fundamentals of Analysis and Calculation, of the Mathematics Degree course at IFCE Campus Fortaleza. The records obtained in the form of semi-structured interviews were analyzed based on the assumptions of Professional Didactics. In view of the didactic obstacles found in this research, we found that the initial formation of the mathematics teacher and the axiomatic construction of the numbers is relevant for overcoming the recurring problems, the learning of the mathematical object linked to professional competence.

Keywords: Professional Didactics. Numerical sets. Didactic Engineering Training.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Fluxograma da DP sobre sua sustentação teórica e prática e alguns dos seus principais autores.....	23
Figura 2 - A relação entre sujeito, situação para a DP.....	29
Figura 3 - Divisão do termo profissão.....	30
Figura 4 - Função dos gestos no ambiente de trabalho.....	34
Figura 5 - Triângulo clássico da Didática da Matemática e o tetraedro para a formação do professor.....	38
Figura 6 - A competência vista a partir da união de algumas habilidades.....	44
Figura 7 - Competência de um profissional no trabalho.....	48
Figura 8 - O processo de desenvolvimento da Engenharia a partir dos anos 60.....	55
Figura 9 - Elementos do triângulo clássico.....	62
Figura 10 - Engenharia Didática de Formação e a Teoria das Situações Didáticas em função metodológica na pesquisa.....	65
Figura 11 - Definição para dois conjuntos serem subconjuntos.....	95
Figura 12 - Conjunto de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ como cópia algébrica.....	106
Figura 13 - Concepção do professor a respeito dos conjuntos numéricos no ensino básico.....	107
Figura 14 - Construção dos Reais via cortes de Dedekind.....	108
Figura 15 - Interpretação visual dos conjuntos numéricos.....	109
Figura 16 - Professor em formação no momento da validação fornecendo a visualização da questão.....	110
Figura 17 - Descrição da questão feita por um professor em formação.....	112
Figura 18 - Momento da formulação de um professor.....	112
Figura 19 - Momento da validação no quadro feito por um professor em formação.....	113
Figura 20 - Momento da situação da formulação de um sujeito da pesquisa.....	114
Figura 21 - Resolução de um professor em formação inicial.....	115
Figura 22 - Momento da validação do professor 1.....	116
Figura 23 - Momento da validação do professor 2.....	116
Figura 24 - Rascunho de uma professora em formação na situação IV.....	118
Figura 25 - Momento da formulação de um professor em formação.....	119
Figura 26 - Momento da validação de um professor em formação.....	120
Figura 27 - Momento da formulação de um professor à respeito da competência profissional de Matemática.....	123

Figura 28 - Momento da formulação de um sujeito da pesquisa.....	123
Figura 29 - Momento da formulação de um professor em formação descrevendo a competência de um professor.....	124

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Resultados encontrados na pesquisa.....	18
Quadro 2 - Autores que abordam a competência.....	42
Quadro 3 - Os três níveis da competência atrelado à SDP.....	51
Quadro 4 - Diferença entre as duas engenharias EDI e EDP.....	57
Quadro 5 - Elementos correlacionados entre a DP e DM.....	66
Quadro 6 - Descrição da aplicação da experimentação em sala de aula.....	91
Quadro 7 - Categorias criadas para analisar as entrevistas.....	127

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Critério gerenciado na revisão bibliográfica.....	19
--	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CIEAEM	<i>Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques</i>
CNE	Conselho Nacional de Educação
DP	Didática Profissional
DM	Didática da Matemática
EDD	Engenharia Didática de Desenvolvimento
EDF	Engenharia Didática de Formação
ED2G	Engenharia Didática de Segunda Geração
EF	Engenharia de Formação
IFCE	Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará
IREM	<i>Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques</i>
PCN's	Parâmetros Curriculares Nacionais
SDP	Situação Didática Profissional
TCC	Teoria dos Campos Conceituais
TSD	Teoria das Situações Didáticas

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	PROBLEMÁTICA	18
2.1	Revisão Bibliográfica	18
2.2	Justificativa do Tema da Pesquisa	21
2.3	Quadro Teórico	22
2.3.1	<i>Didática Profissional</i>	22
2.3.1.1	<i>Psicologia do Desenvolvimento (Piaget, Vygotski e Vergnaud)</i>	24
2.3.1.2	<i>Psicologia Ergonômica</i>	28
2.3.1.3	<i>Didática das Disciplinas</i>	36
2.3.1.3.1	Didática Profissional e Didática das Disciplinas	37
2.3.1.4	<i>Engenharia de Formação</i>	39
2.3.1.5	<i>Competência Profissional</i>	40
2.3.1.5.1	Três categorias de análise para a competência do professor de Matemática	45
2.4	Delimitação do problema	52
3	REFERENCIAL TEÓRICO METODOLOGICO	54
3.1	Metodologia da pesquisa	54
3.2	Engenharia Didática e seu Desenvolvimento	54
3.3	Teoria das Situações Didáticas (TSD)	60
3.4	Elementos complementares entre a Didática Profissional e a Didática da Matemática visando o uso da Engenharia de Formação	65
4	ANÁLISES PRELIMINARES DA ENGENHARIA DE FORMAÇÃO	69
4.1	Uma abordagem histórica sobre os conjuntos numéricos e seu desenvolvimento atual	69
4.1.1	<i>Campo epistêmico dos Naturais</i>	70
4.1.2	<i>Campo epistêmico dos Inteiros</i>	78

4.1.3	<i>Campo epistêmico dos Racionais</i>	85
5	EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISE A <i>PRIORI</i>	91
5.1	Lócus da investigação e os sujeitos da pesquisa	92
5.2	Análise <i>à priori</i>	93
5.2.1	<i>Construção e descrição das situações didáticas para o ensino dos conjuntos numéricos</i>	94
6	ANÁLISE A <i>POSTERIORI</i> E VALIDAÇÃO DA PESQUISA	105
6.1	Análise <i>a posteriori</i> da Situação Didática I	105
6.2	Análise <i>a posteriori</i> da Situação Didática II	111
6.3	Análise <i>a posteriori</i> da Situação Didática III	114
6.4	Análise <i>a posteriori</i> da Situação Didática IV	117
6.5	Análise <i>a posteriori</i> da Situação Didática V	121
6.6	Análise das entrevistas	125
6.7	Validação Interna e Externa	136
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	139
	REFERÊNCIAS	145
	APÊNDICE A	153
	APÊNDICE B	154
	APÊNDICE C	155
	ANEXO A	156
	ANEXO B	158
	ANEXO C	159

1 INTRODUÇÃO

Na presente investigação apresentamos uma preocupação no campo formativo inicial de trabalho do professor de matemática acerca da competência profissional. Não buscamos propor uma definição de competência para o professor. Sabemos que a definição de sujeito competente não é tão simples, requer uma série de habilidades.

Porém, denotamos que no campo de trabalho dos adultos a noção de competência permite que o professor passe a analisar o seu trabalho mediante as habilidades adquiridas nas situações de trabalho. Então, é trabalhando o conceito de competência que obtivemos interesse, em particular para o desenvolvimento de habilidades que o professor deve gerir em uma situação real de trabalho (em sala de aula).

A competência do professor de matemática se tornou o objeto investigativo da nossa pesquisa, assim, a partir dos compêndios da Didática Profissional compreendemos que a formação docente relacionada a uma análise de trabalho orientada desenvolve a competência profissional do professor.

Contudo, observamos que o professor no seu campo de trabalho está em constante formação, com isso, buscamos apoiar nossas concepções e trajetória de incursão na metodologia de pesquisa conhecida como: Engenharia Didática de Formação (EDF).

Seguimos a EDF partindo da Engenharia Didática (PERRIN-GLORIAN 2009; ALMOULDOUD, 2012). Para tanto, no decorrer da pesquisa nos apoiamos nas etapas sistemáticas clássicas desenvolvidas pela Engenharia Didática. De modo pormenorizado, nos atemos ao público alvo de nosso interesse, no caso, professores em formação inicial. Utilizamos essa metodologia, com interesse na evolução prática na situação de trabalho. Mediante o quadro de pesquisas que levantamos ficou nítido que durante o percurso da formação de professores de Matemática a importância da disciplina de análise real na formação do professor é muito importante para a sua vida profissional. Optamos em escolher trabalharmos a concepção dos professores em formação inicial para o ensino básico, em que se concerne à construção dos conjuntos numéricos.

Inicialmente, os elementos primordiais estão contidos na fase da análise prévia, primeira etapa da ED atrelando as dimensões epistemológicas, didáticas e cognitivas. A pesquisadora teve uma atenção maior voltado para o viés crítico e pormenorizado no ensino atual a respeito da construção dos conjuntos numéricos. De início, apreciamos o livro: A construção dos Números (FERREIRA, 2011) o livro aborda a construção dos conjuntos

numéricos de uma forma axiomática, mostrando de forma temporal o conjunto dos números naturais, inteiros, racionais, a construção dos reais via corte de Dedekind, como também o conjunto dos números complexos. Os professores em processo de formação impostos na graduação envolvem o contato inicial com as disciplinas de Cálculo que abordam de maneira superficial os conjuntos numéricos, através de gráficos, ou de maneira intuitiva. Somente a partir das últimas disciplinas na formação, os professores em processo de formação inicial mantêm um contato direto com a construção axiomática dos conjuntos numéricos, geralmente na disciplina de Análise ou disciplinas parecidas com ela.

O profissional deve passar por uma formação completa para atuar no Ensino Básico, os conteúdos relacionados à disciplina de Análise são fundamentais para o aprofundamento do conhecimento epistêmico do professor de Matemática. Os elementos da Didática Profissional relacionados à competência profissional permite-nos fazer uma relação com a formação do professor mediante a situação de trabalho.

Seguindo essa via argumentativa, enveredamos o desenvolvimento da nossa pesquisa acerca de uma investigação que englobe a formação do professor de Matemática para o ensino básico, atrelado às habilidades que o docente deve possuir no seu campo de trabalho, no caso, em sala de aula. Portanto, formulamos uma pergunta norteadora acerca da pesquisa:

Como um processo baseado no exame da competência profissional para o professor de Matemática melhoraria a formação inicial de professores no que se concerne à construção dos conjuntos numéricos?

A justificativa do nosso trabalho está no fato de averiguarmos em diversos trabalhos (REAIS, 2011; OTERO-GARCIA; CAMMAROTA, 2013; FERREIRA; MUNIZ, 2014) a preocupação da formação do professor de Matemática, visando os conceitos epistêmicos formalizados no repasse dos conteúdos matemáticos, refletindo isso na prática docente em sala de aula. Em trabalhos atuais que envolvem a DP no campo de trabalho do professor (ALVES, 2018; ALVES; JUCÁ, 2019, ALVES; CATARINO, 2019) revelam que a formação docente tem uma forte herança no campo epistêmico. De modo contrário, a DP preocupa-se com a aprendizagem dos adultos no trabalho, nos interessando a formação do professor de Matemática.

Dessa forma, compusemos a abordagem na nossa pesquisa pensando na formação do professor de Matemática, ao perceber que o profissional da Educação deve analisar seu trabalho visando à competência profissional nas situações profissionais de trabalho. Com isso, delineamos o nosso objetivo geral que está na análise dos elementos da Didática Profissional perante as situações didáticas no contexto da formação inicial dos professores de Matemática

no que se concerne aos conjuntos numéricos a partir das categorias de análises vislumbrando a competência profissional. Para alcançarmos esse objetivo, construímos os seguintes objetivos específicos:

- Identificar e registrar as concepções pragmáticas de futuros professores concernentes aos conjuntos numéricos;
- Elaborar situações didáticas que envolvam os conjuntos numéricos na formação inicial do professor de Matemática;
- Analisar as situações que permitam identificar a perspectiva de complementariedade entre a Didática Profissional e a Didática da Matemática.

Estruturamos a nossa pesquisa em sete capítulos. No **Capítulo 1** expomos o cenário da nossa pesquisa, apresentando o motivo da escolha do nosso tema, como a metodologia e os objetivos traçados.

No **Capítulo 2** abordamos a problemática acerca da formação do professor e a importância da disciplina de Análise na formação. A justificativa que nos levaram a desenvolver este trabalho visando à formação inicial dos professores. Como também, abordamos o quadro teórico da nossa pesquisa que recai sobre a DP, nele buscamos apresentar os principais elementos da vertente francesa incluindo seus principais autores (PASTRÉ; MAYEN; VERGNAUD, 2006; PASTRÉ, 2011; MAYEN, 2013; VERGNAUD 2001) conceitos e suas correntes teóricas e prática: conceituação na ação, psicologia ergonômica, didáticas das disciplinas, engenharia de formação. Dentre toda a construção desse capítulo, abordamos a parte essencial da pesquisa, acerca da competência profissional voltada para o campo de trabalho do professor de Matemática. De modo introdutório nas pesquisas brasileiras (ALVES; CATARINO, 2019; ALVES; JUCÁ, 2019) a Situação Didática Profissional é determinada a partir de três categorias (sala de aula, local de trabalho, instituição) que vislumbram a competência do professor.

No **Capítulo 3** apresentamos o referencial metodológico e teórico ao qual nos serviu de apoio para construir nossa investigação. Nessa parte, explanamos sobre a Engenharia Didática de Formação (EDF) que é a nossa metodologia de pesquisa, e como suporte para a nossa metodologia de pesquisa usamos a Teoria das Situações Didáticas (TSD) teoria de ensino que serve de embasamento para a EDF. Apresentamos a complementariedade entre a Didática da Matemática e a Didática Profissional ao alinhar alguns elementos da Didática da Matemática que retém a preocupação com a aprendizagem teórica, e a Didática Profissional que volta sua investigação para a aprendizagem no trabalho.

No **Capítulo 4** nos atemos às análises preliminares da pesquisa em volta da EDF depreciamos o livro: A construção dos números, sob perspectiva de analisar o material didático abordado na disciplina da formação dos professores. Nessa abordagem contém a construção dos números Naturais, Inteiros, Racionais. Levando em consideração como o nosso objeto matemático é explorado nesse material.

No **Capítulo 5** destinamos as análises *a priori* da nossa pesquisa, apresentando as situações didáticas ao qual foram trabalhadas, com a descrição da experimentação.

No **Capítulo 6** expomos as análises *a posteriori* das sequências que foram trabalhadas, como também estará discutido o meio da validação do nosso estudo, e a diferença entre ambas as validações (internas e externas).

O **Capítulo 7** é destinado às considerações finais da nossa pesquisa, expomos a relevância do tema da pesquisa, o conceito teórico e metodológico, como também as principais análises de dados e a percepção futura acerca da temática do nosso trabalho.

2 PROBLEMÁTICA

Neste capítulo, apresentamos a problemática da nossa pesquisa por meio do levantamento bibliográfico de algumas investigações em torno da relevância da construção dos conjuntos numéricos durante a formação do professor de matemática. Como, também, apresentamos a nossa proposta no interior do quadro teórico a respeito da Didática Profissional e os elementos que a compõe, tais como: Conceituação na ação, Psicologia Ergonômica, Didática das Disciplinas, Engenharia de Formação e a parte da Competência Profissional voltada para o professor de Matemática e a delimitação do nosso problema.

2.1 Revisão Bibliográfica

Realizamos uma revisão bibliográfica a respeito da relevância do ensino e aprendizagem na construção dos números sobre a formação de professores, bem como a importância das disciplinas que abrangem o objeto matemático. A respeito do assunto encontramos uma tese e três artigos que exibimos a seguir no Quadro 1.

Quadro 1- Resultados encontrados na pesquisa

Título	Autor	Ano
A tensão entre rigor e intuição no ensino de cálculo e análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos.	Reis	2001
Releituras de um estado do conhecimento do ensino de Análise a partir da Noção de Cognição Inventiva.	Otero-Garcia e Cammarota	2013
O ensino de análise: contribuições e perspectivas na formação do professor de matemática.	Ferreira e Muniz	2014
Quatro ou mais pontos de vista sobre o ensino de Análise Matemática.	Gomes; Otero; Baroni	2015

Fonte: Elaborada pelos autores

Após a realização de busca no Google Acadêmico e na plataforma Capes, os trabalhos selecionados seguiram um critério de seleção, conforme a quadro 2, e nos trabalhos selecionados obtivemos o título, os autores, e as discussões dos resultados, encontramos cerca de 14.900 resultados entre o período de 2001 até 2019, escolhemos no início do século XXI mediante as melhorias de formação inicial dos professores de Matemática.

Delineamos essa pesquisa para obter os materiais que seguissem o estudo acerca do ensino da construção axiomática dos números, como também a importância do curso de análise na formação dos professores.

Tabela 1- Critério gerenciado na revisão bibliográfica

Critérios utilizados	Descrição
As fontes selecionadas	Dados eletrônicos: Teses e Artigos
Palavras-chave	Formação de professores; Construção dos conjuntos numéricos; axiomatização; disciplina; Análise
Nível	Nacional
Listagem de fonte	Plataforma Capes; Google Acadêmico

Fonte: Elaborada pelos autores

A partir dos critérios exibidos na tabela anterior, os trabalhos escolhidos expostos na Tabela 1, foram analisados perante o objeto matemático de estudo que está acerca dessa pesquisa. Levando em consideração a relevância da formação inicial do professor de matemática no estudo da construção dos conjuntos numéricos.

Otero-Garcia e Cammarota (2013) ponderam uma análise acerca do Conselho Nacional de Educação (CNE), sobre os cursos de Licenciatura no Brasil, os autores discutem sobre o papel de algumas disciplinas importantes para a formação docente. Por conseguinte, os autores indagam sobre os conteúdos abordados na disciplina de Análise, sendo uma das disciplinas mais importantes na formação do professor de Matemática, pois a ligação da Análise está em conjunto com as demais disciplinas que fazem parte da matriz curricular do graduando, tais ligações se encontram nas demais disciplinas como o Cálculo diferencial.

Ainda encontramos no trabalho de Otero-Garcia e Cammarota (2013) o objetivo central da pesquisa, mapeando em nível nacional os trabalhos ligados ao ensino de Análise, buscando uma articulação entre as condições do processo de aprendizagem com o ensino de Análise e a formação do professor de Matemática. Por fim, os autores resumem a pesquisa na relevância das características “ético-estético-política” (OTERO-GARCIA; CAMMAROTA, 2013, p. 257) ao discutirem sobre o ensino e aprendizagem na formação do professor de matemática envolvendo a disciplina de Análise, por meio dos seus efeitos no âmbito educacional.

Ferreira e Muniz (2014) propuseram seus estudos sobre a disciplina de Análise da formação do professor, articulando a matemática pura e as disciplinas pedagógicas para uma

formação completa do professor. Dentre as várias discussões, observamos como os autores ponderam a ementa e a organização da matriz curricular. Portanto, Ferreira e Muniz (2014) observam como é o comportamento dos professores de Análise Real, na articulação entre a teoria e prática. A partir dessa observação, os autores levantam uma hipótese pautados na formação e prática do professor de matemática, observaram que existem disciplinas opoente uma da outra, ou seja, estão desarticuladas com prática do professor.

Ferreira e Muniz (2014, p. 131) também observaram que alguns conteúdos como “números reais e topologia na reta” estão interligados, assim, tendo uma conexão entre o Ensino Superior e a Educação Básica. Portanto, finalizam que não existe um resultado exato para a Análise na formação inicial, todavia, os conhecimentos matemáticos devem estar alinhados com a prática docente na escola.

Gomes, Otero e Baroni (2015) fizeram uma análise de alguns trabalhos, onde discutiram a importância da disciplina de análise na formação do professor para o conhecimento matemático e na formação da cultura matemática. Os autores ainda ponderam que a pesquisa propõe entender os componentes da disciplina ou os conteúdos necessários na formação do professor. E constaram que existem diversas nomenclaturas diferentes para as Disciplinas de Análise, e que, conseqüentemente, as matrizes dos cursos são diferentes, e que a disciplina geralmente é ofertada nos últimos anos da graduação.

Ainda, segundo Gomes, Otero e Baroni (2015) consideram importante os conteúdo acerca da disciplina, a atuação do professor e como a disciplina é repassada na licenciatura e no bacharelado. Em resumo, a pesquisa desses autores, fazem os leitores refletirem como a Análise Real é tratada desde o Ensino Superior até chegar na Educação Básica, de forma a intrigar o entendimento entre a prática na formação do professor de Matemática.

Reis (2001), fez uma pesquisa analisando as disciplinas de Análise 1 e Análise Real em território nacional, e constatou que as disciplinas são ofertadas como eletivas ou optativas, deixando o aluno escolher querê-la cursar. O autor chegou nesse resultado fazendo uma pesquisa à base de manuais didáticos e de entrevistas semi-estruturadas com professores pesquisadores que se enquadrassem nas disciplinas de Cálculo e Análise Real.

A partir da pesquisa de Reis (2001), o mesmo levanta uma série de questionamentos: O aluno passa a decidir a estudar a disciplina de Análise? A formação de um professor para o Ensino Básico é importante estudar a análise na graduação? Os professores da licenciatura não vêm mais importância na disciplina perante a graduação? Os alunos que não estudam análise possuem uma formação completa para lecionar?

Mediante os questionamentos levantados no parágrafo anterior, Reis (2001) deixa claro que é fundamental estudar Análise na graduação e ainda afirma: Antes de mais nada, gostaríamos de deixar claro nossa convicção de que Análise é uma disciplina / área fundamental para a formação do professor de Matemática, convicção esta proveniente de nossa prática pedagógica com formação de professores e que pretendemos reafirmar / reelaborar durante a análise das entrevistas, momento em que questionamos nossos entrevistados a respeito da importância do Cálculo e da Análise na formação do professor de Matemática (REIS, 2001, p. 80).

2.2 Justificativa do Tema da Pesquisa

Entender os números é fundamental para compreender toda a Matemática, e a sua construção axiomática é necessária para o professor de matemática lecionar no Ensino Básico se estendendo para o Ensino Superior. O reconhecimento dos números e das operações necessita a compreensão dos “[...] números naturais, do sistema de numeração decimal e pela identificação dos números inteiros e racionais em diferentes contextos” (BRASIL, 1998, p. 148).

Na ementa da Licenciatura de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) *campus* Fortaleza, as disciplinas que envolvem o objeto matemático (Números Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais e Reais) são: optativa 81 e Introdução à Análise, ambas resguardadas no final do curso, expomos no anexo A (p. 149).

Dessa forma, a construção dos conjuntos numéricos é visto no final da formação do professor de Matemática. As pesquisas de Moreira, Cury, e Viana (2005) em meio a 14 instituições brasileiras evidenciaram que a disciplina de Análise é tida como uma das principais no meio acadêmico da formação inicial do professor de Matemática.

Portanto, embasado em pesquisas a despeito da Análise ser uma disciplina que abarca os fundamentos da Matemática para a formação do professor, levando em consideração a relação entre o conteúdo teórico e a parte prática na atuação profissional no Ensino Básico.

Sob tal constatação, leva-nos a inferir que a formação de um professor de Matemática deve estar qualificado nos fundamentos da Matemática, ou seja, na parte da Análise. Sendo que de forma particular, nos interessa a pesquisa sobre a formação inicial do professor de Matemática voltada a axiomatização atuando com a competência da Didática Profissional.

No decorrer acerca das leituras em busca de pesquisas que compusessemos a nossa proposta, não identificamos nenhuma pesquisa que envolve a competência profissional aliada

a construção axiomática no decorrer da formação inicial do professor de Matemática. Fizemos a busca em nível nacional que tratasse da nossa proposta de pesquisa.

A competência profissional faz parte da Didática Profissional, uma premissa básica dessa vertente é que não é possível formar qualquer profissional sem antes conhecer à sua análise de trabalho. Outroassim, o professor precisa compreender o seu modo operatório mediante as situações de trabalho, observando a relação entre teoria e prática construída no trabalho, para orientação da sua competência.

Na próxima subseção, apresentamos melhor o quadro teórico que resguarda a Didática Profissional que sustenta a nossa pesquisa, contribuindo para a delimitação do nosso problema e formular a questão da nossa pesquisa, como também auxiliando nossos objetivos.

2.3 Quadro Teórico

Nessa parte da pesquisa apresentamos o quadro teórico que sustenta esta pesquisa, assim, antecipamos a apresentação da vertente francesa Didática Profissional, seus elementos tidos como: conceituação na ação, psicologia ergonômica, didática das disciplinas, engenharia de formação, a competência profissional refletindo nos planos da Situação Didática Profissional vislumbrando a formação profissional do professor de Matemática como veremos adiante.

2.3.1 Didática Profissional

A Didática Profissional (*Didactique professionnelle*) teve início na década de 1990 na França, em meio às ciências da educação (educação de adultos, engenharia de treinamento/formação), psicologia ocupacional (ergonomia francesa) e psicologia do desenvolvimento. É tida como uma disciplina científica recente e tem se mostrado relevante para investigações que englobam a formação dos adultos no campo de trabalho (PASTRÉ, 2007).

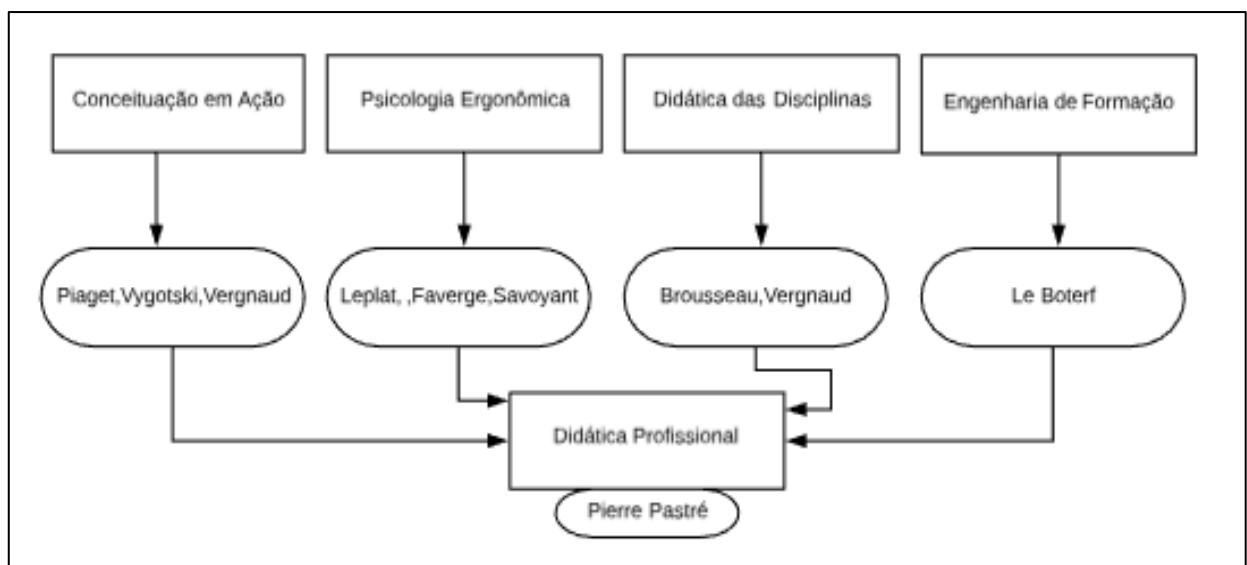
Pastré (2011) iniciou a investigação acerca da Didática Profissional (DP) apresentando-a em sua tese em 1992, voltando sua pesquisa em torno da atividade, aprendizagem e treinamento para a análise do trabalho nos adultos. Nessa perspectiva, de análise do trabalho se encontrava na supervisão de Vergnaud, que foi orientando de Piaget, no qual induziu a Pastré a trabalhar com conceitos da psicologia do desenvolvimento em virtude da compreensão da operacionalidade cognitiva do adulto.

O quadro de análise do trabalho, fez com que o campo do trabalho tomasse forma e a psicologia ergonômica estivesse presente na Didática Profissional. Dessa forma, observamos as contribuições dos ergonomos franceses: Leplat, Savoyant, Ombredane, dentre outros. Tais contribuições levando a DP ao campo de análise do trabalho dos adultos visando à competência profissional de trabalhadores (PASTRÉ, MAYEN, VERGNAUD, 2006).

No início as pesquisas da Didática Profissional tinham como tema central as aprendizagens de profissões operárias, agrícolas ou técnicas. E em seguida, atraiu outras profissões tidas como complexas¹: cirurgiões, médicos, pilotos de aviões, conselheiros agrícolas, dirigentes hospitalares (PASTRÉ, 1999, 2002; GENEST, 2009; SAVOYANT, 1979; MAYEN, 1999; TOURMEN, 2007; PARANGE; KERVERDO, 2008). Apenas recentemente a DP se dedicou em analisar a atividade do professor (PASTRÉ, 2011). O campo da DP se expandiu devido às análises feitas nas atividades complexas, dimensões sociais, cognitivas e identitárias que as caracterizam.

A DP se encontra na confluência de três correntes teóricas (conceituação da ação, psicologia ergonômica e didática das disciplinas), e uma no campo prático (engenharia de formação), conforme a Figura 1 apresenta.

Figura 1- Fluxograma da DP sobre sua sustentação teórica e prática e alguns dos seus principais autores.



Fonte: Elaborada pela autora, baseado em Pastré, Mayen e Vergnaud (2006).

Os fundadores da Didática Profissional ancoraram sua pesquisa em torno da psicologia ergonômica (França), notando que o método para analisar o trabalho se encontra nessa corrente para as situações reais de trabalho. Para tanto, também juntaram os métodos de

¹ Tais profissões são aquelas que os profissionais enfrentam o desconhecido e a mudança. Consequentemente, o aumento da complexidade dos problemas a serem tratados nas situações profissionais impostas pelo trabalho (LE BOTERF, 1995, 1997).

análise do trabalho as teorias de aprendizagens advindas das teorias piagetianas sobre o desenvolvimento da inteligência da criança (psicologia do desenvolvimento, construtivismo) e posteriormente Vergnaud (1996) transformou em teorias de aprendizagens profissionais, chamada de teoria dos “esquemas” ou “conceituação na ação”.

Contudo, o âmago da Didática Profissional centra-se nos princípios da aprendizagem, diferindo-se da Didática das Disciplinas (Didática das Ciências), centrando-se na teoria de Brousseau da aprendizagem, seus pressupostos está na aprendizagem conteudista, e a Didática Profissional está na aprendizagem dos adultos em formação. Quando os adultos estão em formação profissional contínua, falamos de Engenharia de Formação.

No que se concerne à formação existe uma relação com a sociedade, em especial nos aspectos sociais e econômicos que derivaram diversas modificações nas décadas atuais, assim desencadeando mudanças nos objetivos na formação. Podemos destacar inicialmente que o objetivo era corrigir algumas falhas no sistema educativo, propondo uma melhor qualificação nos operadores ativos no campo de trabalho, locais que apresentavam baixos níveis de formação escolar e profissional (PINHEIRO, 2001).

No parágrafo anterior, percebemos que a DP encontra-se acerca da formação profissional, sendo que essa formação ocorre tanto em âmbito formador quanto em âmbito individual de trabalho, analisadas a partir de uma operacionalização das tarefas em virtude de uma análise de trabalho.

Assim, a DP busca fortemente articular o quadro teórico (psicologia do desenvolvimento) e o quadro metodológico (psicologia do trabalho) como sendo uma das suas principais características (PASTRÉ; MAYEN; VERGNAUD, 2006). Passamos a ver isso nas seções subsequentes.

2.3.1.1 Psicologia do Desenvolvimento (Piaget, Vygotski e Vergnaud)

É necessário nos conceituarmos acerca das pesquisas dos psicólogos do desenvolvimento da década de 80, de Piaget e Vygotski para compreendermos como os adultos se desenvolvem no trabalho. Partindo desse pressuposto, Piaget tem como o tema central das suas pesquisas as aprendizagens das crianças. Cerca das três décadas passadas a relevância das pesquisas em torno da aprendizagem tinha como foco a criança. Posteriormente, foi tido a compreensão da história e do ambiente social, em que a criança se depararia com alguns obstáculos problemáticos, e que teria de se adaptar aos próprios problemas.

Dessa forma, Piaget trabalhou através do construtivismo à teoria em ação e o conhecimento vindo da ação. Na teoria existem dois termos que necessitamos expor, tidos como: acomodação e assimilação. Toda e qualquer atividade do sujeito envolve ambos os movimentos (PIAGET, 2007). Partindo delas surge a equilibração da atividade mental. A equilibração é importante para os esclarecimentos biológicos e psicológicos.

O indivíduo ao possuir suas necessidades biológicas tende a se adaptar ao meio para ter sua sobrevivência. A partir disso, ele procura modificar o meio transformado pela sua ação, quando o mesmo interage com o ambiente, Gomes e Ghedin (2012, p. 03) esclarecem melhor:

Entende-se então, que todo ser humano nasce com a capacidade de adaptar-se ao meio e de assimilar e acomodar os objetos externos em sua estrutura cognitiva na busca de um equilíbrio o que permite seu desenvolvimento a partir da evolução de sua inteligência. Desse modo, a criança ao se deparar com uma nova situação, procura inseri-la a conhecimentos anteriores (assimilação), mas muitas vezes nessa assimilação, é necessário certas modificações (acomodação) para uma verdadeira compreensão da situação encontrada.

Piaget (1986 p. 35) remete que a adaptação parte da inteligência, ele observava isso nas crianças, na seguinte situação: “A criança passa por vários estágios e nesses estágios observamos dois fenômenos: desenvolvimento cognitivo e adaptação”. Nesse momento, o autor introduz um conceito chave, atribuído de: esquema. A definição de esquema está no meio de assimilação a novos objetos, e o fato de acomodação, está na criação das novas propriedades que apresentam uma relação aos objetos anteriores assimilados.

Desse modo, Vygotski com sua abordagem socioconstrutivista, acompanha os trabalhos piagetinos, entretanto, seu foco encontra-se na aprendizagem mediada pela linguagem, chegando à conclusão que o conceito é a “significação das palavras” (PASTRÉ, MAYEN, VERGNAUD, 2006). Sua teoria desenvolve-se no que ele chama de: Zona de Desenvolvimento Proximal.

As pesquisas de Piaget e Vygotski permitiram que a DP entendesse como os adultos se desenvolvem no trabalho, a partir da compreensão acerca da forma operativa em meio às situações encontradas no trabalho. Os processos cognitivos não dizem respeito somente ao funcionamento em situações, mas também ao desenvolvimento dos trabalhadores no médio e longo prazo, ou seja, está acerca da evolução das competências e de suas relações no decorrer da sua experiência. Visto que a competência não consiste em repetir continuamente o mesmo modo cognitivo, mas sim, está centrada nos ajustes para guiar a ação e ela ser adaptada.

Os psicólogos do desenvolvimento permitiram que Vergnaud emergisse a aprendizagem profissional, voltada para a aprendizagem nos adultos em formação. Vergnaud (1996) modificou os dois principais conceitos de Piaget, conhecidos como: esquema e invariante operatório. Todavia, o invariante operatório que o mesmo investiga não é geral, e sim, Vergnaud (1994) procura por invariantes que representem uma classe de situações, que ele chama de Teoria do Campo Conceitual (TCC).

Vergnaud (1994) esteve centrado nas habilidades profissionais no percurso do trabalho profissional. Ele usa a TCC no trabalho e no treinamento, cujo objetivo é modelar a atividade dos profissionais a partir do esquema e do invariante operatório. Podemos afirmar, que a Teoria da Conceituação da Ação ou ainda Teoria dos esquemas, está na origem da DP, centrado em dois princípios:

- 1- É organizado (conceito de esquema);
- 2- Ele pode ser analisado em termos de organizar conceitos, ou seja, a origem pode ser pragmática ou epistêmica (invariante operativo).

As categorias bases criadas por Piaget tem um peso para o entendimento da aprendizagem no trabalho, partindo que inteligência é uma “adaptação às situações novas e é então uma construção contínua das estruturas” (BRINGUIER, 1993, p. 61). A representação de um esquema é “aquilo que é generalizável em uma determinada ação” (CHIAROTTINO, 2005, p. 18).

O esquema advindo de Piaget é findado por Vergnaud dessa forma:

[...] a organização invariante do comportamento para uma classe de situações dada. É nos esquemas que se devem pesquisar os conhecimentos-em-ação do estudante, isto é, os elementos cognitivos que fazem com que a ação do estudante seja operatória (VERGNAUD, 1993, p. 2).

Eis o motivo do conceito de esquema permitir organizar a atividade humana (VERGNAUD, 1990). Toda atividade humana tem uma organização invariável, para se adaptar a inúmeras situações. Assim, no campo profissional existem classes de situações que podem ser relacionadas para cada uma delas, fazendo a relação entre esquema-situação. As situações são estruturadas dessa forma:

- * Objetivos e antecipações – significa, por um lado, ter um objetivo final, e, por outro, atender os estados intermédios e às evoluções da situação (PASTRÉ, MAYEN, VERGNAUD, 2006);
- * Regras de ação - estabelecem a sequência das ações em uma situação (PASTRÉ, MAYEN, VERGNAUD, 2006);
- * Invariantes operatórios - correspondem a "conceitos em atos e teoremas em atos", que permitem selecionar a informação pertinente e ao proceder em seu tratamento. Os teoremas

em atos são proposições acerca do real, admitidas como verdadeiras, ainda que permaneçam totalmente implícitas. São elas que permitem as inferências (PASTRÉ, MAYEN, VERGNAUD, 2006);

* Inferências - fazem com que os esquemas não sejam estereótipos, mas antes pelo contrário, permitem certa adaptação da ação às circunstâncias, quer dizer, aos valores assumidos pelas variáveis em causa (PASTRÉ, MAYEN, VERGNAUD, 2006).

Essas classes de situações servem para identificar os conceitos de organização que algumas vezes são implícitos e guiam o adulto na ação em meio aos ajustes nas situações. Tomemos um exemplo de Audin (2004), ao notar em uma pesquisa sobre aprendizagem dos pilotos com níveis de experiência diferentes. Ao exibirem as habilidades de fazer o pouso do avião, ministrando a inclinação do plano ao solo, a velocidade, o arremetimento e etc. Na maior parte da aterrissagem, os pilotos não gostam arremeter, embora seja uma regra geral aplicar quando o piloto sentir dificuldade. Então, o piloto terá riscos ao assumir a situação, tendo a opção de seguir o que os instrutores impõem, ou seguirem a teoria.

Audin (2004) observou que todos os pilotos não respondem as condições previstas pelos procedimentos. Sobretudo os pilotos mais experientes dispõem de formas alternativas de organizar a atividade, pois a partir da experiência deles, os mesmos possuem uma liberdade em relação a tomar iniciativa em relação à inclinação, a manusear a velocidade. A partir das situações passadas, puderam permitir o gerenciamento do gradiente mediante o vento, presença das árvores, a vegetação e outros. É nessa perspectiva que notamos o esquema, passando a organizarem a atividade em meio à situação.

Nesse exemplo, é possível ver como age o modo operatório mediante a situação. As antecipações se concernem as diferentes fases da aterrissagem e às dimensões sincrônicas da ação e da busca de informações. Os conceitos em atos e os teoremas em atos estes concernem às relações entre os diferentes parâmetros recolhidos pelos instrumentos de bordo, no que diz a respeito as condições meteorológicas, as ações do piloto. Assim, os ajustes perante as ações dos pilotos seriam impossíveis sem as inferências.

Apesar de Piaget abordar os invariantes acerca da atividade a três quartos séculos passados, Vergnaud (1994) categorizou as classes de situações para analisar a atividade em quatro componentes se mostrando mais efetivas no campo de trabalho do adulto. Mas, nada impede a aproximação da noção de invariante operatório das situações.

Pastré (2011) aborda que a DP como disciplina precisou bastante da Teoria da Conceituação em Ação, mesmo entendendo que o conceito em ação é bastante teórico, vez ou

outra passa a existir uma interpretação confusa, ou errônea, da distinção entre os conceitos epistêmicos e conceitos pragmáticos, mais a frente explicaremos.

As contribuições das teorias de Piaget, Vygotsky e Vergnaud para a Didática Profissional tem o objetivo de compreender como desenvolvem os esquemas cognitivos e os invariantes operatórios dos adultos nas situações de trabalho. Para chegar na análise do trabalhos nos adultos, a DP busca relacionar a conceituação na ação com a psicologia ergonomica francesa.

2.3.1.2 Psicologia Cognitiva Ergonômica

A Didática Profissional constituiu seu progresso com a contribuição da Psicologia cognitiva ergonômica, nos estudos da Psicologia do Trabalho (ergonômica), e alguns elementos da Psicologia Russa, baseando-se no local de trabalho, visando à aprendizagem e a formação contínua dos adultos para uma análise do trabalho (MAYEN, 1998; PASTRÉ, 2002).

A psicologia do trabalho francesa fez com que a Didática Profissional enriquecesse mais seus estudos. Leplat (1991; 1997) afirma que a dimensão ergonômica trouxe a atenção para o desenvolvimento das competências no trabalho.

A partir de Gruber, Allain e Wollinger (2017), destacamos as contribuições que a ergonomia trouxe para a DP:

- 1) Distinção entre a tarefa prescrita e trabalho real;
- 2) Dimensão cognitiva presente em toda atividade de trabalho;
- 3) Divergência entre as imagens, tanto a cognitiva quanto a operativa;
- 4) Diversidade e dinamicidade evolutiva das situações.

A psicologia do trabalho introduziu técnicas e métodos para a análise do trabalho, “Mais importante, é que esta análise do trabalho forneceu para a didática profissional um estudo da dimensão profissional para a atividade profissional” (PASTRÉ, 2002, p. 11). A análise de trabalho está referenciada na ergonomia que é tida como a ciência do trabalho, reproduzida entre a organização e a gestão da produção. Dessa forma, passa a existir dois níveis na análise de trabalho:

- 1- Análise da tarefa são atividades que constituem no trabalho;
- 2- Análise dos procedimentos operacionais do indivíduo, podendo averiguar um conjunto de habilidades que culminam na realização de uma atividade.

“Analisar o trabalho é numa primeira fase, fazer a distinção entre trabalho prescrito e trabalho real” (MONTMOLLIN; DARSEES, 2011, p.52). Essa é a chave da Didática Profissional, como também a distinção entre alguns pressupostos advindos da ergonomia, como: atividade (*activité*), tarefa (*tâche*), trabalho (*travail*), profissão (*profession*), posto de trabalho (*poste de travail*).

Acompanhando os estudos ergonômicos a atividade (*activité*) é constituída pelo trabalho perante a duração da realização, vinculada também a execução efetiva e a correspondente representação mental.

A tarefa (*tâche*) é tida como “um conjunto de objetivos e procedimentos prescritos, diante de performances exigidas e da qualidade esperada” (TOURMEN, 2007, p. 516).

Na parte do trabalho (*travail*) Leplat (1985) e Faverge (1955), possuem trabalhos belíssimos, a ideia de ambos no que desrespeita ao trabalho é observada por comportamento, e neste ponto os indivíduos buscam se adaptar de acordo com as categorias das situações.

Leplat (1985; 2000) distingue o trabalho da relação entre a tarefa prescrita e atividade. A distinção entre tarefa está envolvida os objetivos que devem ser traçados, atendendo as condições que a tarefa se submete. Já a atividade se desenvolve assim como a tarefa, deve ser mobilizada e efetuada pelo sujeito (ALVES, 2018a). Assim, como exibe a figura 2.

Figura 2- A relação entre sujeito, situação e tarefa para a DP.



Fonte: Elaborada pelos autores, baseado em Pastré (2004).

A atividade real do sujeito ultrapassa a tarefa do praticante, assim a situação leva a várias situações. Reconfigurando a maneira de fazer as coisas, ajustando a ação profissional. Como supracitado Leplat diz que, “Há sempre mais no trabalho real do que na tarefa prescrita” (PASTRÉ, 2004, p. 11). De fato, a diferença entre tarefa prescrita e tarefa efetiva é muito importante perante a ergonomia, sendo assumida segundo Leplat (2004, p. 102) dessa forma:

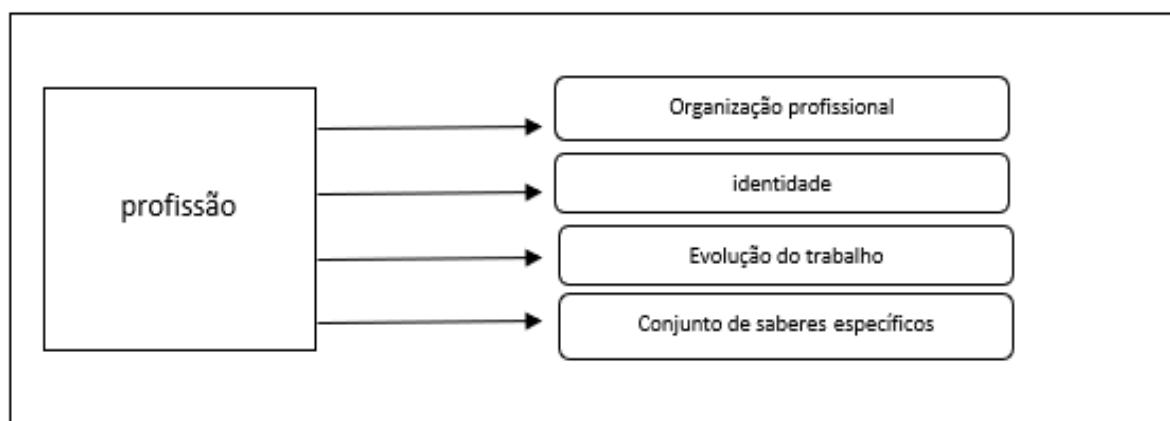
Como a tarefa efetiva não coincide, necessariamente, com a tarefa prescrita, as condições do trabalho tomadas em conta não coincidem, verdadeiramente, com as mesmas definidas pelos organizadores do trabalho. Em outros termos, é sempre necessário observar que uma condição observada no trabalho é, de fato, uma condição de trabalho, isto é, que a mesma desenvolve um papel na atividade do sujeito.

Na ergonomia é muito comum essa atribuição da atividade de trabalho na representação do trabalho real. Cujas é uma função integradora de “o elemento central que organiza e estrutura os componentes da situação de trabalho.” Outro ponto a destacar é que a atividade na análise do trabalho não pode ser confundida com a tarefa (trabalho prescrito).

A partir do excerto anterior pudemos constatar que para o trabalhador conseguir atingir determinados objetivos é necessário ter um conjunto de prescrições externas já definidas. Contudo, sendo “separada dele, é imposta. Todavia, na quase totalidade das situações de trabalho, esses constrangimentos são administrados ativamente pelos operadores” (GUÉRIN, *et al.*, 2001, pp. 25-26). A acoplação entre ambas as teorias recaem sobre o trabalho cognitivo e subjetivo do trabalhador na situação de trabalho (ou situação simulada).

Prosseguindo as distinções observamos agora a diferença entre *métier* e *profession* (de origem francesa), no Brasil define-se como profissão. Na ergonomia alguns autores definem a profissão como uma organização histórica e social. Desse modo, dividimos a profissão em quatro partes, como mostra a Figura 3.

Figura 3- Divisão do termo profissão



Fonte: Elaborada pelos autores

Como os elementos estão atribuídos na profissão (*métier*) “a partir do momento em que os atores ocupam certos postos de trabalho e se reagrupam para definir e defender, debater e estabilizar os conhecimentos da prática (*savoir-faire*) específica, reivindicando uma progressão ou identidade específica, falamos de *métier*” (TOURMEN, 2007, p. 519).

Chegamos ao termo “profissão” (*profession*), Tourmen (2007) a define como uma abordagem sociológica norte-americana das profissões, iniciada na década de 1940, se opondo

entre organização e associação profissional. Também, observamos uma possível distinção os termos *profession* e *métier*. Embora “a profissão seja socialmente necessária, seus membros sigam um código deontológico, respeitado pelo grupo” (TOURMEN, 2007, p. 519).

Contudo, observamos que a ergonomia possui uma relação enraizada no posto de trabalho (*poste de travail*), pois possui uma função definida e situada, segundo os interesses organizacionais declarados no trabalho (ALVES, 2018b).

Com base nesses conceitos exibidos, elucidamos a importância das distinções terminológicas da ergonomia francófona a fim de esclarecer outra definição muito relevante na Didática Profissional, observada no setor industrial, locais onde o trabalho era mais observado na década entre as décadas de 70 e 80. Pastré (2011) complementa a nossa ideia, ao abordar que a análise do trabalho não pode ser feita em escolas, por exemplo, mas sim, no local de trabalho.

A partir disso, percebemos que o local de trabalho é um ambiente fértil no quadro de desenvolvimento da DP, uma vez que essa vertente ocupa um lugar forte no que se concerne a elementos contidos no ambiente de trabalho, definidos em: desenvolvimento profissional, formação profissional, orientação da atividade, desenvolvimento de habilidades, aprendizagem no trabalho e etc.

A princípio, os especialistas tinham como alguns locais de observação para a investigação dos elementos citados no parágrafo anterior. No entanto, houve uma expansão nos locais de observação, se estendendo até o campo da Educação. Hoje quando falamos da Didática Profissional atrelada ao ambiente de formação do professor, podemos dizer que ela é uma teoria de ensino profissional, pois, ela ajuda na compreensão de fenômenos encontrados no processo formativo do professor, levando em consideração que a Didática da Matemática não pode elucidar, como Chevallard (2009, p. 85-86 *apud* ALMOULOUD; SILVA, 2012, p. 24-25) aponta,

[...] a constituição de uma engenharia didática profissional, cujo objetivo é utilizar a análise do trabalho para construir conteúdos e métodos, visando à formação das competências profissionais. Assim, até os anos 80, deixou-se para trás a necessidade de reconsiderar o ato didático, voltado para os adultos ao trabalho, em referência ao desenvolvimento das competências e da experiência profissional. Pode-se pensar [...] que esta questão voltada para a engenharia didática profissional tornou-se a urgência de hoje.

Diante disso, observamos o quanto a Didática Profissional é importante no ambiente formativo dos operários, em nosso caso, temos o professor como um sujeito trabalhador da educação. Porém, a análise da atividade do professor não é tão simples de ser analisada como Pastré, Mayen e Vergnaud (2006) afirmam. Então, a partir dos trabalhos de Vergnaud (1990,

1996) a DP permite a observação entre dois fenômenos encontrados em qualquer situação de trabalho: a passagem do conceito epistêmico para o pragmático.

Pastré (2002, p. 12) avalia que os conceitos pragmáticos (julgamento pragmático) quando posto a novas situações profissionais vislumbram objetivos e metas definidas. Assim, considera que nessa condição não se mostra no componente epistêmico (disciplinar) ou então ou os saberes científicos e técnicos, mas, está no seu pragmatismo.

A distinção entre os conceitos epistêmico e pragmático devem fazer parte da diferença entre atividade e tarefa. No campo pragmático, vamos levar com consideração o ponto de vista da tarefa e da atividade. Em observação da tarefa é necessário levar em conta a ação para o êxito. Iremos expor um exemplo, “ao dirigir uma máquina, avião, manutenção ou classe, todas essas ações exigem que certas características para ser eficaz, não importa como o assunto manipula a realização da sua ação” (PASTRÉ; MAYEN; VERGNAUD, 2006, p. 13).

Do ponto de vista da atividade, descrevemos que na realização de uma tarefa existem vários modos de fazer, incluindo o modo de se obter o êxito e não êxito. Assim, a tarefa sob viés pragmático circunscrita em certa situação remete a ideia de “estrutura conceito da situação” (PASTRÉ, 1999). No geral, os conceitos organizam a ação como também as orientam. Esses conceitos podem ser de origem pragmática ou epistêmica, o importante é que são alistados na ação, permitindo de modo singular a diagnóstico de situação.

Pastré (2002) identificou que os conceitos pragmáticos são de extrema relevância para a atividade no trabalho, e que se observarmos, em grande parte de nossas vidas, as escolhas que fazemos está na atitude imediata, tendo uma influência do pragmatismo nas situações do dia-a-dia.

Assim, vamos apresentar um exemplo que conceito pragmático inseridos na prática dos operadores de máquina por injeção em plásticos, geralmente os operadores que dirigem essas impressoras não possuem um conhecimento teórico, mas sim mais prático (PASTRÉ, 1994).

Nos operadores de máquinas a função dos trabalhadores é corrigir os defeitos nos produtos. E o funcionamento da máquina é simples o suficiente e modelável para que se construir um simulador. Pastré (2004) assumiu que as situações foram observadas por ele no simulador, onde pôde verificar a análise da atividade de doze operadores. E chegou a conclusão, que durante a operação de uma máquina, existem vários regimes operacionais tidos como “dieta normal” e “dieta compensada”. Quando exposto a uma análise precisa da estrutura conceitual da situação, faz uma distinção entre esses dois regimes está no “recheio”, definido como o estado de equilíbrio ou desequilíbrio entre a pressão exercida pela máquina e

a pressão de retorno do material. Quando existe o equilíbrio entre ambas pressões está no regime normal, e quando existe a pressão maior que a máquina está contida em um regime compensado.

Um conceito pragmático possui três propriedades retratada no ponto de vista de Pastré, Mayen e Vergnaud (2006):

1- Na origem da ação, ela não é teórica, mas prática. Não vem de um saber, mas da atividade. Portanto Vergnaud os definem como “conceitos em ação” e Vygotsky os definem como “conceitos do dia-a-dia” se o sujeito admitir que o trabalho é parte da esfera da vida do cotidiano.

2- Na visualização da função, um conceito pragmático é um conceito organizador da ação, na medida em que permita a identificação das classes de situações que um operador se encontra. É preciso fazer um diagnóstico que oriente a ação para que a mesma seja eficaz. Sendo que nem todos os conceitos organizadores da ação são necessariamente de origem pragmática. Exemplificando, as situações técnicas de trabalhos complexos como a operação das usinas nucleares, são conceitos científicos e em certos momentos se tornam pragmatizados para servir como diagnóstico. Já de origem pragmática, temos como exemplo da máquina de injeção que os conceitos de organização da ação.

3- Um conceito pragmático tem uma dimensão social, é reconhecido como um organizador da ação pela comunicação profissional. O recheio não é apenas um elemento conceitual implementado ação sem estar acompanhada de linguagem. Geralmente os mais velhos repassam os conhecimentos aos mais jovens e o termo “recheio” também vai incluso nesse repasse.

No excerto acima, foi explicitado as categorias do pragmatismo, e vamos enfatizar no terceiro, onde traz o comportamento de um operador de máquina de plásticos, que em determinado momento sob viés pragmático tende a ter uma observação minuciosa que só operadores experientes conseguem visualizar, os novatos não têm essa habilidade de percepção.

Na Didática Profissional trazendo para o contexto escolar a respeito de um fenômeno visto perante a formação do professor, se aplica no modelo de contágio profissional, onde frequentemente os profissionais mais experientes transmitem para os mais jovens através de um conjunto de concepções e noções pragmáticas (PASTRÉ, 2011).

A partir do excerto anterior, vamos apresentar o estudo de Leplat (2013) a respeito dos gestos que possuem características pragmáticas, sendo bastante utilizados nas situações de

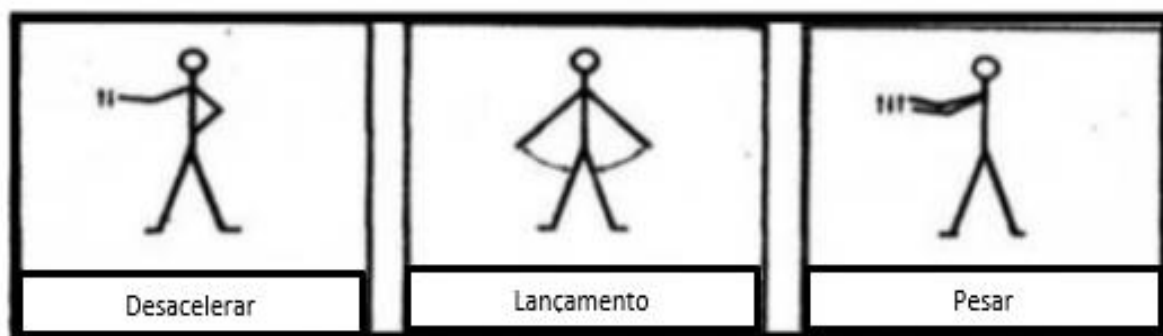
trabalho de certas profissões. Que “[...] o gesto é um movimento humano ao qual é atribuído uma significação” (LEPLAT, 2013, p. 03).

Pelo parágrafo anterior, propugnamos uma segunda definição: o “gesto” depende de um quadro de referência, Leplat (2013, p. 04) define uma categorização para a noção dos gestos, fazendo a distinção entre gesto-signo e gesto-ação. Para Leplat (2013, p. 4-5) os “[...] gestos signos são criados e explorados pelos operadores e organizam o trabalho sob a forma de códigos verbais e imaginários”.

Leplat (2013, p. 14) define que o gesto-ação exprime uma competência, e não uma finalidade própria. Pois, “[...] nos tempos antigos, onde a iniciação do debutante no trabalho se fazia, frequentemente, na confiança ao mais velho, se zombava, mais ou menos, do método empregado pelo mesmo, feito como princípio – faça como eu faço. [...] o papel da imitação depende da leitura, da interpretação que o sujeito realiza do gesto” (LEPLAT, 2013, p. 14).

Assim, podemos afirmar que a função dos gestos em algumas profissões desempenham um componente representativo para a execução das tarefas profissionais (SONNTAG, 2002; TERRANEO; AVVANZINO 2006; VEILLARD, 2012). Desse modo, observamos isso nas seguintes profissões: dançarinos, pintores, malabarista, motoristas, dentre outros. Como a Figura 4, mostra.

Figura 4- Função dos gestos no ambiente de trabalho.



Fonte: Leplat (adaptado, 2013, p. 35)

A despeito de sua função ou categorização, os gestos “[...] sugerem diretamente sua significação que pode ser compreendida antes mesmo de qualquer aprendizagem explícita” (LEPLAT, 2013, p. 06).

Observamos que o professor também utiliza a função dos gestos, na seguinte situação: os professores mais experientes perpassam seu saber para os mais novinhos através do gesto-ação e imitação. Quando direcionamos os gestos de modo coletivo, podemos compreender que “os gestos podem ser considerados como uma forma de linguagem: a linguagem gestual”

(LEPLAT, 2013, p. 06). Neste sentido, entendemos que os gestos em ação podem ser caracterizados como uma forma de aprendizagem.

A aprendizagem que envolve a linguagem gestual depende de uma coordenação e regulação de movimentos complexos realizados sobre o corpo todo. Bril (2012) detalha que o sujeito ao fazer um gesto precisa dominar o conhecimento, pois, a realização reflete em elementos, tidos: capacidade motora, capacidade adaptativa, planejamento e avaliação. Portanto, o desempenho de condução não pode ser aprendido por si só, mas, é considerado consequência do controle do meio ambiente para um propósito.

De fato, quando nos atemos ao contexto da aprendizagem profissional na qual a Didática Profissional se refere, percebemos que a direção não é ao gesto em si, mas sim, o modo de como o gesto organiza a ação. Evidenciamos que perante a base explicativa dos gestos a ação cognitivista exhibe como funcionam os esquemas cognitivos mediante a realização de determinada tarefa.

Leplat (2013, p. 16) considera que os gestos profissionais apresentam ambiguidades, mantendo suas características relevantes, “podem ser compreendidos como gestos próprios a uma atividade do domínio profissional”. O gesto também faz parte da noção de competência, pois, a ação e os esquemas cognitivos que os articulam indicam a competência do operador.

Contudo, a DP tem como um dos pressupostos a sua investigação acerca da análise da aprendizagem no trabalho, vislumbrando o desenvolvimento de competência nos operadores. Passando a ocorrer uma análise da coordenação das ações em indivíduos, suas nuances visíveis, locais e globais, micro regulações e substituição de rotinas profissionais, concorrem para um campo pragmático de avaliação das competências (ALVES, 2018a).

Uma das definições de competência é quando um operador se sobrasai de uma situação de trabalho inesperada de uma determinada tarefa complexa. Como supracitado, a Didática Profissional observa o modo de aprendizagem nos locais de trabalho através dos conceitos pragmáticos.

Observamos o fenômeno acerca da aprendizagem, em duas etapas: i) teoria; ii) prática. Sob tal explicação, exibimos a descrição de Ochanine (1981), um importante psicólogo russo que descreveu dois modelos explicativos, conhecidos por: modelo operacional e modelo cognitivo.

Ochanine (1981) definiu o conceito de imagem operativa e de imagem cognitiva. Este autor observou a capacidade profissional dos cirurgiões, através de duas classes. Assim, havia médicos experientes em realizações de cirurgias de tireoide e outros cirurgiões sem experiência (iniciantes no ofício). A partir disso, Ochanine propôs uma atividade a ambos,

onde os médicos teriam que representar a partir de seu conhecimento *a priori* como definir uma tireoide doente. Contudo, o resultado de ambos se mostrou oposto, Ochanine notou que os médicos inexperientes demonstram uma imagem exata do objeto, e os médicos experientes desenvolveram uma imagem concisa e distorcida.

Ochanine (1981) descobriu duas abordagens distintas em ambas as classes médicas (experientes e inexperientes) perante o diagnóstico dados por eles. O autor conclui então dois modos de representação: 1) Imagem cognitiva; 2) Imagem operativa. Dessa forma, listamos a descrição abaixo:

- 1- detalha o objeto e suas propriedades, não tendo relação com qualquer ação;
- 2- apresenta o objeto mediante a ação executada nele.

A partir disso, observamos uma distinção entre os profissionais inexperientes (novatos no ofício) e os profissionais experientes. Mostrando que os profissionais experientes extraem poucas informações sobre determinada situação e se atêm muito pouco aos detalhes da situação (FISHBEIN, 1987), ao contrário dos profissionais inexperientes, ao não possuírem essa capacidade. Podemos dizer que é assim que movem as representações da situação no campo do trabalho se baseando nos registros epistêmicos e pragmáticos.

O intuito da Psicologia Ergonômica juntamente a DP está acerca dos principais conceitos e métodos para a análise do trabalho (CLOT; LEPLAT, 2004), Pastré (2011, p.84) “acentua a necessidade de realizar uma análise do trabalho, como uma prévia necessária para toda formação profissional”. No entanto, a DP se preocupa com as situações profissionais, o contrário da Didática das Disciplinas que se preocupa com as situações didáticas. De forma oportuna, apresentamos na próxima subseção.

2.3.1.3 Didática das Disciplinas

A DP progrediu devida um avanço teórico da Didática da Matemática e Didática da Física nos anos 80, que por vez se beneficiou dos trabalhos de Guy Brousseau e Régine Douady. Particularmente nos conceitos de: situação didática, transposição, contrato, esquema e campo conceitual (PASTRÉ; MAYEN; VERGNAUD, 2006).

É comum ver a distinção entre as fases as situações de ação, situação de formulação e das situações de validação na Teoria das Situações Didáticas no trabalho de Brousseau (1986). Sua ideia é que existe um progresso na atividade, no decorrer do processo de cada uma dessas fases, independente das suas ligações.

A transposição didática é um termo discutido por Chevallard (2002) passando a discutir o ensino de matemática em dois processos: o primeiro é a transformação do saber a ensinar em saber ensinado. O segundo está na transformação de qualquer situação (científica, profissional) em uma situação de ensino ou de aprendizagem.

A ideia de contrato se aproxima do processo de ensino, passando a existir expectativas simultâneas tanto para o professor quanto para o aluno. No que se concerne ao esquema, temos uma organização acerca da atividade, por uma classe de situações que ajudam a ministrar a atividade operativa. Portanto, o campo conceitual está centrado no conceito está ligado a um sistema, ele se forma no decorrer da atividade e de uma experiência, no encontro com uma variedade de situações, cujas propriedades são diferentes.

2.3.1.3.1 Didática Profissional e Didática das Disciplinas

Para Vergnaud (1990), existe uma verossimilhança entre a Didática Profissional e a Didática das Disciplinas (DD), apesar de que as características de uma profissão são diferentes das características de uma disciplina. Sendo a principal diferença entre a DP a DD está nas situações do trabalho, e que se deve buscar uma estrutura conceitual para transpor, ao passo que, em uma disciplina está estabelecida. Existem conceitos inicialmente organizados, mesmo que essa organização precise ser revistada por razões didáticas, e que o obstáculo está em encená-los em situações apropriadas. Portanto, quando a DD se depara com as situações, a mesma, faz que inconscientemente a entregue para a psicologia ergonômica, que foca na atividade da situação.

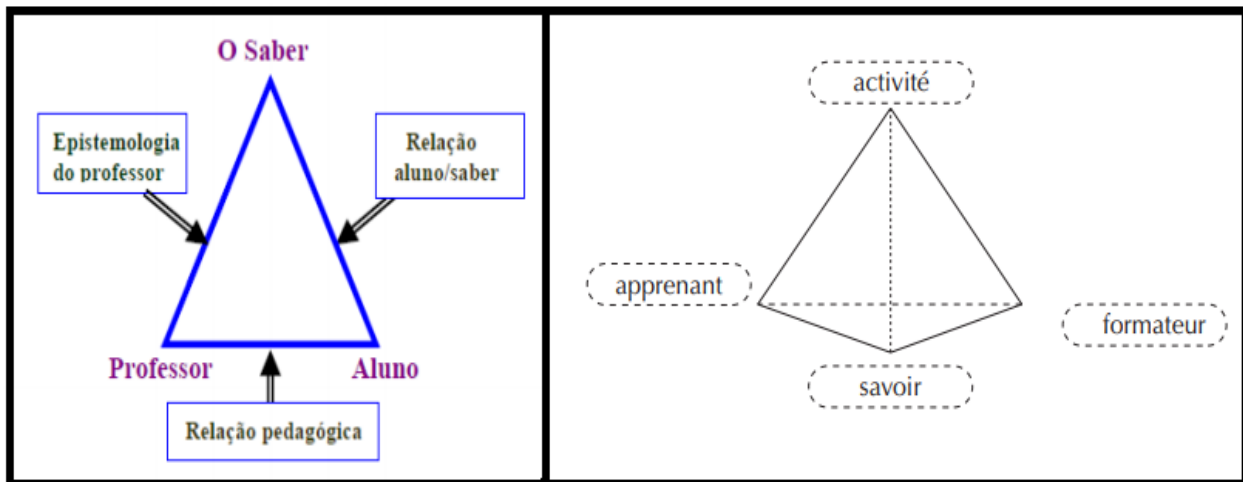
Pastré (2004) distingue a DP da DD, observando que a Didática Profissional se preocupa com as aprendizagens nas situações, sendo construída pelos conceitos pragmáticos. Entretanto, a DD enfatiza o aprendizado com um objetivo epistêmico de compreensão.

A Didática Profissional foca nas competências em ação visando às práticas educacionais, de modo contrário a disciplinar que foca em uma determinada disciplina (ROGALSKI; SAMURÇAY, 1994).

Dessa forma, a DD inspirada em Brousseau foca na aprendizagem dos alunos. Além do mais, Brousseau tem consciência que o professor é o mediador da situação didática, entretanto, a atividade do professor não é considerada em sua Teoria das Situações Didáticas (TSD).

Contudo, lendo o trabalho de Baudouin (1999) compreendemos o advertimento que ele propõe ao dizer que a TSD se torna insuficiente para analisar a atividade do professor. Na Figura 5 abordamos melhor essa distinção entre a DD e DP.

Figura 5- Triângulo clássico da Didática da Matemática e o tetraedro para a formação do professor.



Fonte: (BROUSSEAU, 1986, p.12); (BAUDOUIN, 1999, p. 154).

Na figura acima, do lado direito temos os elementos de Brousseau (professor, aluno, saber), um dos campos da Didática da didática das disciplinas, pois a mesma é formada pelo conjunto de teorias da DM (Teoria dos Campos Conceituais, Obstáculos Epistemológicos, Teoria das Situações Didáticas, Contrato Didático, e a Transposição Didática). No lado direito observamos os componentes que Baudouin (1999, p. 151) adverte: “a lógica do triângulo didático clássico – saber/aprendiz/formador – não é suficiente para caracterizar as situações de aprendizagem próprias de formação dos adultos”.

Acrescentando um pouco mais sobre essa distinção, Pastré (2011) informa mais a respeito da diferença entre ambas. Dessa forma, a DM está centralizada no campo epistêmico disciplinar, já a DP está interessada no uso de situações de trabalho como suporte para a aprendizagem do trabalhador (de nosso interesse, o professor) (ALVES; CATARINO, 2017a):

Da mesma forma, em seu ponto de partida, a Didática Profissional manifestou interesse em se diferenciar da Didática das Disciplinas que, por sua vez, se interessa pela transmissão e aquisição de saberes. A Didática Profissional se centra sobre a aprendizagem nas atividades. Ou, como veremos, ela assume como objeto não o saber, mas uma atividade que provoca consequências importantes. Podemos mencionar por último, um elemento para qualificar a Didática Profissional: ela assume como objeto o desenvolvimento dos adultos, agregado com a ideia forte de que a maior parte dos adultos encontram seu desenvolvimento no trabalho (PASTRÉ; 2011, p. 84).

A distinção entre a DP e a DD serve para compreender como ambas trabalham o professor, uma está ligada a formação do trabalho e a outra envolve o ambiente escolar.

2.3.1.4 Engenharia de Formação

De início, os pressupostos da Engenharia nos conduz a explicação que ela não está indexada a um conceito, ou então, relacionada às ciências físicas ou econômicas. É um conceito que está em processo de evolução, sempre se adaptando as questões e novos contextos.

A noção de engenharia se aderiu antes da Segunda Guerra Mundial nos países da Alemanha, Grã-Bretanha, e Estados Unidos. A partir disso, centralizou-se em atividades industriais, como por exemplo: Petróleo, Química, Mecânica e Armamento. No entanto, na França se instalou de fato na década de 1950, também na parte industrial (LE BOTERF, 1999).

A partir do seu desenvolvimento no campo de trabalho passou por uma evolução no campo da indústria, na parte tecnológica, das comunicações e serviços (educação, formação, redes...).

A Engenharia de Formação (EF) faz parte do cunho de treinamento que surgiu na França na década de 1960, tendo sua estrutura formada acerca de três fatores: as demandas dos países independentes, a entrada de engenheiros em formação, e educação continuada.

Observamos que a partir do seu envolvimento com os países independentes, após a criação de sistemas de formação profissional. O treinamento passou a ser alvo das procuras de formação dos operários no trabalho, inclusive no campo industrial. Este é o local onde a engenharia passa a se destacar, sendo observada no plano de massa, unidade de treinamento, e situação profissional real.

Pastré (2005) enfatizou que houve uma intensa procura no campo prático para as situações reais no trabalho ou situações de simulações, para analisar a fenomenologia em torno da aprendizagem. A aprendizagem medida através da simulação estimula o aprendizado por meio do fazer e imposto nas situações de trabalho.

Com a entrada de engenheiros no campo de trabalho sem dúvidas, este foi um fator fundamental para o desenvolvimento progressivo da engenharia de formação, pois, a partir da inserção do sistema tecnológico no trabalho, os trabalhadores deviam mover a inteligência no trabalho, ou seja, a conceituação nas situações de trabalho. Portanto, houve uma preocupação com o lado cognitivo do trabalhador.

O terceiro fator que observamos está na educação continuada, prevista pela Lei de 1971 na França, nessa Lei o operário passa a ter de fato uma formação continuada, como concorda Champy-Remoudssenard (2005, p. 11), ao dizer que as relações entre formação e

aperfeiçoamento embutida nas relações de trabalho assumiram uma preocupação acentuada. “A reflexão sobre um campo de práticas de formação de adultos, ao tempo de sua institucionalização pela Lei de 1971, dedicou a faculdade humana um lugar eminentemente estratégico no processo de formação.”

Contudo, a engenharia aderiu uma entrada para projetar diferentes dispositivos de treinamento definida por um conjunto coordenado de atividades voltado para o treinamento educacional, como Chevallard (2009, p. 85 *apud* ALMOULOU, 2012, p. 24) retrata:

A formação contínua tem uma tradição de engenharia de formação que é praticamente tão longa que a sua própria história analisa um pedido, analisar necessidades de construir dispositivos de formação proceder a sua avaliação: tantas atividades de engenharia que são um pouco as cartas de nobreza da formação profissional contínua. Porque esta é constituída historicamente como um campo de práticas, trata-se de práticas analisadas e bem pensadas, que é a própria área inventou e codificou.

Concluimos que a Engenharia de Treinamento não é caracterizada como uma ciência, nem como uma disciplina, ou técnica. É tida como um conjunto de práticas acerca do conhecimento, da experiência e de ferramentas de treinamento disponibilizadas no serviço dos operadores no campo da educação (BAILLEUL, 2015).

Assim, na década de 1980 com a evolução da engenharia de treinamento, ela passou a ser uma engenharia de habilidades, essa mudança ocorreu devido à competência profissional esperada pelos indivíduos.

A corrente prática que abordamos agora é ímpar para a DP. Dessa forma, os esquemas de formação profissional são concebidos com base na EF que é tido como um modelo de competência ou abordagem de competência (HÉRBARD, 2013).

2.3.1.5 Competência Profissional

Champy-Remoudssenard (2005) relata que na França, durante os anos de 1970 e 1980, as relações entre formação e aperfeiçoamento no que se concerne ao trabalho obtiveram uma atenção voltada. Dessa forma a competência passou a ser o centro nas investigações.

Na década de 70, a competência iniciou a partir de debates entre parceiros ao questionarem as relações de subordinação hierárquica e reivindicar a elevar o status dos empregados, consideremos que o desempenho não deve mais ser concebido como apenas execução de tarefas efetuadas, mas também, de habilidades pessoais.

Na década seguinte, a complexidade das situações de trabalho ligadas ao aumento da demanda pela competitividade produziu novas organizações de trabalho nas quais os valores

individuais são valorizados. Todavia, perante um processo de evolução das ações, o modelo individual progrediu para o interesse coletivo, com preocupação na transmissão de informações e da organização em grupo (SAVOYANT, 1974).

Nos últimos quarenta anos a noção de competência passou a ser discutida em ambientes de formação e Educação, devido “A reflexão sobre um campo de práticas de formação de adultos, ao tempo de sua institucionalização pela lei de 1971, dedicou à faculdade humana um lugar eminentemente estratégico no processo de formação” (CHAMPY-REMOUDSSENARD, 2005, p. 11).

Pastré (2004) informa que o período taylorismo fordismo favoreceu bastante a avaliação no trabalho, especialmente no setor industrial. Via-se a competência no desempenho efetuado. No período fordismo os operários competentes demonstravam suas habilidades no saber fazer. Todavia, devem-se entender dois aspectos das habilidades: “saiba o que fazer” e “seja capaz de fazê-lo”. O sujeito capaz de fazer é eficiente na ação, no entanto, o trabalhador que segue somente o plano de execução, pode apenas copiar a ação, sem de fato entender. “Compreensão e eficácia estão em um relacionamento complexo: não pode fazê-lo e, inversamente, a ação pode ser sucedida sem ser entendida” (VIDAL-GOMEL; ROGALSKI, 2007, p. 7).

No que se concerne à noção de competência na atualidade, podemos dizer que está inserida numa abordagem construtivista. Do ponto de vista da DP, Pastré (2011) afirma que toda prática do trabalho requer o uso de uma atividade intelectual, e não somente uma avaliação processual, ou seja, um profissional competente não demonstra as habilidades somente na execução da tarefa como era na década de 70.

Em resumo, podemos ver uma evolução da noção em relação às transformações de trabalho: há menos ênfase na aplicação dos procedimentos e mais sobre a inteligência envolvida da tarefa e a resolução de problemas com múltiplas dimensões. [...] porque para melhorar o profissionalismo desses atores, é necessário que seja capaz de analisar como sua ação é organizada, que conhecimento, quais estratégias elas mobilizam, que obstáculos eles envolvem. Em suma, devemos ser capazes de uma análise cognitiva de habilidades mobilizadas e seu desenvolvimento. (PASTRÉ, 2004, p. 214).

Contudo, sabemos que a competência está na capacidade de gerenciar o desenvolvimento cognitivo e progressivo na atividade em vistas o trabalho. Assim, trazemos alguns autores que definem o que é a competência, tais definições obedecem ao quadro de competência pós-período taylorismo fordismo. Como expomos no Quadro 2.

Quadro 2- Autores que abordam a competência

Autor(es)	Definição de Competência
Allal (2004, <i>apud</i>	“(...) organização dos saberes em um sistema funcional”. (...) suas principais

OLLIGNIER, 2004, p. 15)	dimensões são: a rede dos componentes cognitivos, afetivos, sociais e sensório motores, bem como sua aplicação a um grupo de situações e a orientação para uma determinada finalidade”.
Gillet (1991, op. Cit, p. 36)	“(…) sistema de conhecimentos, conceituais e procedimentais, organizados em esquemas operatórios, que permitem, em função de uma família de situações, identificar uma tarefa-problema e resolvê-la por meio de uma ação eficaz”.
Tardiff (1994, op. Cit, p. 36)	“(…) um sistema de conhecimentos, declarativos [...], condicionais [...] e procedimentais [...] organizados em esquemas operatórios que permitem a solução de problemas”.
Medef (2001, apud ZARIFIAN, p. 61)	“A competência profissional é uma combinação de conhecimentos, de saber-fazer, de experiências e comportamentos que se exerce em um contexto preciso. Ela é constatada quando de sua utilização em situação profissional, a partir da qual é passível de validação.”
Pastré (2011, p. 6)	“(…) distingue três formas ser competente: saber fazer, saber entender, saber combinar.”

Fonte: (MOURA, 2005, p. 64-65, adaptado)

É possível reconhecermos muitos dos termos expostos no Quadro anterior advindos dos conceitos neopiagetianos, como: esquema operatório, inteligência, adaptação às situações. Nessa perspectiva o conjunto de quadros piagetianos oferece para a DP que a competência ocorre de duas formas (PASTRÉ 2004):

- I) A competência se manifesta de modo intelectual na ação humana, ela está no sistema biológico do homem, antes de ser uma propriedade da cognição, ela está na adaptação operativa.
- II) A ação humana é organizada. Esta organização da ação é caracterizada através dos esquemas operatórios e da invariância da atividade mediante as situações.

Esses modelos vindos dos trabalhos de Piaget permitiram a análise da atividade no setor industrial, porém, sabe-se que o modelo de pesquisa acerca da inteligência piagetiana centralizava as representações infantis (conceito de permanência do objeto). No campo profissional, invariantes são relacionais: eles permitem identificar relações importantes entre um conjunto de variáveis que determina o funcionamento de um sistema (técnico, vivo ou por natureza social).

Temos que as classes de invariância no trabalho podem ser exemplificada no modelo de Pastré (1994) que deixamos em parágrafos passados, ao exemplificar a condução de máquinas por injeção plástica, por onde os trabalhadores passavam a organizar o conceito trazendo o “recheio” como o equilíbrio entre a pressão exercida pela máquina. A avaliação dos operadores sobre o termo “recheio” que criaram na ação do trabalho (pragmático) para diagnosticar a situação, isso faz com que as habilidades passem a ser construídas perante as situações. “Um elemento essencial no conceito da competência profissional é sua relação com

o desempenho da ação em uma situação de trabalho” (ROGALSKI; MARQUIÉ, 2004, p. 142).

Por ora, retornamos aos fundamentos iniciais da competência, sendo as habilidades construídas na ação. Nessa perspectiva, o aprendizado no trabalho desenvolve melhor nas habilidades de um trabalhador. Todavia, não é uma regra total, tem coisas que não se aprende somente no trabalho, particularmente mediante as situações, pois as situações requerem uma alta dosagem de diagnóstico. A Didática Profissional procura identificar a competência do trabalhador a partir do seu desenvolvimento no trabalho.

De início, não cabe definir a competência, pois, a habilidade é um conjunto de elementos, sem ter uma definição estabelecida. No entanto, indagamos: O que é um profissional competente? Vergnaud (2001, p. 2) nos ajuda a definir um profissional competente mediante quatro definições:

Definição 01: A é mais competente que B, se souber fazer algo que B não pode fazer;

Definição 02: A é mais competente que B, se o fizer de uma maneira melhor. A melhor comparação pressupõe critérios complementares (velocidade, confiabilidade, economia e etc);

Definição 03: A é mais competente se tiver um diretório de recursos alternativos que lhe permita usar um procedimento ou outro e, assim, adapta-se mais facilmente a diferentes cenários que possam surgir;

Definição 04: A é mais competente se souber lidar com uma nova situação de uma categoria nunca antes encontrada.

Essas perspectivas sobre um trabalhador ser competentes mencionadas por Vergnaud (2001) é ao mesmo tempo diferencial (entre duas pessoas) e desenvolvimentista (que difere perante o desenvolvimento). A definição um é, portanto, a mais utilizada, reduz a competência à uma performance, podendo ser julgada somente pelo resultado da atividade do trabalho. As demais definições (dois, três e quatro) remetem a ideia que a competência não deve estar centrada somente no resultado da atividade, mas sim, devem estar no seio da própria atividade.

Vamos compreender que essas definições para tal sujeito ser competente no trabalho, não é uma substância, mas, sim a relação dinâmica de um trabalhador com situações ou classe de situações. Consideremos que as situações encontradas no trabalho são únicas, contendo traços genéricos, mas todas são situações novas, e possibilita sua descrição (PASTRÉ, MAYEN, VERGNAUD, 2006).

Pode-se atribuir o termo profissional competente, quando uma pessoa pode dominar uma variedade de situações profissionais, e por extensão, classe de situações complexas,

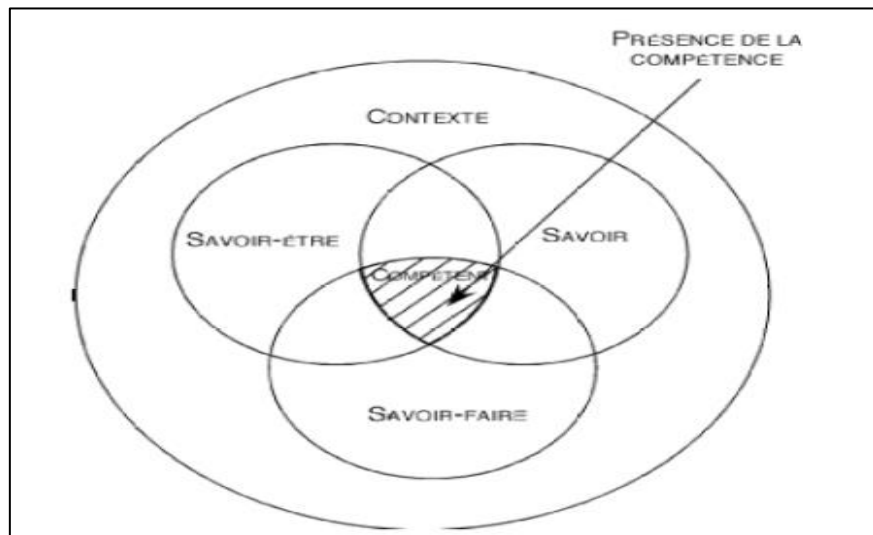
construídas no seu trabalho (LEPLAT, 1991; VERGNAUD, 1990; PASTRÉ, 2004). Pastré (2011) confirma que a competência está no seio das atividades de trabalho complexas, assim:

A didática profissional é uma abordagem que se baseia no estoque de situações problemáticas que podem ser encontradas em oficinas, escritórios e, em geral, em todas as atividades de trabalho, onde as pessoas são confrontadas (às vezes, não sempre) a problemas que não só precisam ser resolvidos, a aplicação de um procedimento bem conhecido, mas pressupõem um comportamento "inteligente" no sentido usual do termo. Requer habilidades (2011, p. 34).

Gillet (1971, p. 69) nos remete que existem algumas características que envolvem a competência em uma situação complexa. “As habilidades e conhecimentos necessários para resolver uma situação problema são as habilidades”.

Hérbrad (2013) ainda completa que a competência está associada ao operador quando exposto a determinada situação de trabalho, ou classes de situações que algumas vezes se revelam complexas, as competências terão características globais ou compostas, onde se integrem e combinem nos recursos (habilidades declarativas, atitudes, perceptivo-gestual) que poderão ser mobilizadas perante uma ação. A figura 6 mostrará como o conceito de competência se encaixa na integração do *savoir-être* (habilidades declaradas), *savoir* (conhecimento) e *savoir-faire* (saber fazer).

Figura 6- A competência vista a partir da união de algumas habilidades.



Fonte: Le Boterf (1999, p. 23)

Pastré (2011) argumenta que a competência de sujeito está por meio de três vias: saber entender, saber fazer e saber combinar. Portanto, o conjunto formado na figura ilustra um sistema no qual os componentes do conhecimento e o contexto progridem mediante as relações que o trabalho oferece.

Assim, vamos esclarecer que o conhecimento (*savoir*) é definido como o conjunto de conhecimentos empíricos (epistêmico). As habilidades (*savoir-être*) como um conjunto de

atitudes, padrões de percepção, ligados a um determinado contexto. O saber fazer (*savoir-faire*) como uma habilidade relacionada a experiência do trabalhador perante a ação da atividade profissional. O coração da competência está na intersecção de todos os elementos, ou seja, a competência não é algo para se aprender, mas sim, um conjunto de elementos que o sujeito deve desenvolver no contexto de trabalho (contexto socioprofissional²).

Outro meio de pensar na competência, é pensar na formação profissional, diferentemente da formação inicial. Na formação profissional, as correntes da Didática Profissional e a análise da atividade orientada para a formação tornam as situações de trabalho o objetivo e a origem da formação profissional (SARMURÇAY; ROGALSKI, 1993; MAYEN, 2007).

Assim, uma formação sem o saber fazer resultaria somente o conhecimento. Uma formação sem o conhecimento resultaria apenas na execução, e uma formação sem o saber fazer reproduziria apenas o conhecimento. Logo, a competência é o resultado de uma relação simultânea entre os elementos: habilidades declaradas, conhecimento e experiência. Cada elemento desse interligado, influência no contexto que o indivíduo está inserido (grupos sociais). Pastré (1992, p. 34) conclui que as competências uma vez identificadas “(...) consiste em construir formação a partir destas situações diretamente a partir da atividade profissional, transportando-as para as situações didáticas”.

Apresentamos o contexto da competência profissional apoiada da Didática Profissional, isto, nos leva a assegurar que os professores impostos na formação profissional desenvolvam sua própria competência didática. “O desenvolvimento das competências, ao decurso da formação inicial, a experiência e a formação contínua é um problema da sociedade, e não apenas um problema da didática” (VERGNAUD, 2001, p. 1).

2.3.1.5.1 Três categorias de análise para a competência do professor de Matemática

A competência profissional do professor não é algo simplista de ser avaliada. Pastré, Mayen e Vergnaud (2006) apontam que devido à procura de respostas, alguns pesquisadores em ciência da educação francófonos e europeus procuraram a ergonomia para analisarem o trabalho do professor.

Historicamente falando, Altet (2010) respalda que na França nos anos 90, alguns institutos de educação *Institut Universitaire de Formation des Maîtres* (IUFM); *Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques* (IREM) tomaram interesse em direcionar a

² O conjunto de circunstâncias em que as relações entre um indivíduo, às pessoas que trabalham com ele, seu ambiente de trabalho e seus deveres de trabalho estão situados.

formação dos professores, especialmente de Matemática. Tais buscas por uma formação melhor para o professor de Matemática implica em uma reforma no campo de trabalho e no ofício de trabalho do professor.

Com o estabelecimento do IUFM na França em 1991, foi uma questão de repensar na formação, e no quadro particular a do fluxo internacional de profissionalização, criando novas ligações entre teoria e prática. Na França o termo profissionalização de professores, atividades de ensino, formação de professores, aparecem no relatório da UITA, no relatório fundador D. Bancel (1989), que define a formação como uma elaboração conjunta de conhecimento teórico e prático de professores (ALTET, 2010, p. 118).

Percebemos que os elementos apontados na citação inferem às preocupações com o carácter de profissionalização de professores, como também aponta um aperfeiçoamento das atividades do ensino (conhecimento epistêmico e prático) voltadas para uma situação profissional e fundamentada na conceituação em ação.

Com isso, notamos que o quadro da Didática Profissional elenca contribuições para a prática dos professores (professores de Matemática), voltando para uma evolução e desenvolvimento de habilidades no trabalho.

Em sala de aula a competência profissional do professor de Matemática está atrelado as habilidades nas tarefas cotidianas exercidas em torno da profissão no processo de aprendizagem no trabalho. Portanto, Alves e Catarino (2019) assumem a existência de três categorias ou níveis, que gerenciam a aprendizagem do professor de Matemática, mediante as situações profissionais. Assim, as atividades profissionais do professor de Matemática devem atender aos planos de níveis: “(i) plano da sala de aula, (ii) plano do posto de trabalho, (iii) o plano geral da instituição de ensino, ou instituição escolar” (ALVES; CATARINO, 2019, p. 115).

Para iniciarmos o (i) plano (sala de aula), usaremos Durand (1998), que analisa a atividade docente tendo múltiplos propósitos, embutidos uns nos outros. Um objetivo que o professor deve ter é ter calma na sua classe (a disciplina) de modo a poder pôr os alunos para trabalhar, em seguinte, o professor deve provocar aprendizagens, finalizando com o desenvolvimento cognitivo de seus alunos.

Podemos complementar a análise de Durand (1998) distinguindo a atividade produtiva e a atividade construtiva. Nas situações habituais de trabalho, o professor trabalha com a atividade produtiva, ou seja, trabalha-se transformando o real, real material, social ou simbólico. No que se concerne a atividade construtiva (aprendizagem e desenvolvimento), é trabalhada com um efeito não intencional da atividade produtiva.

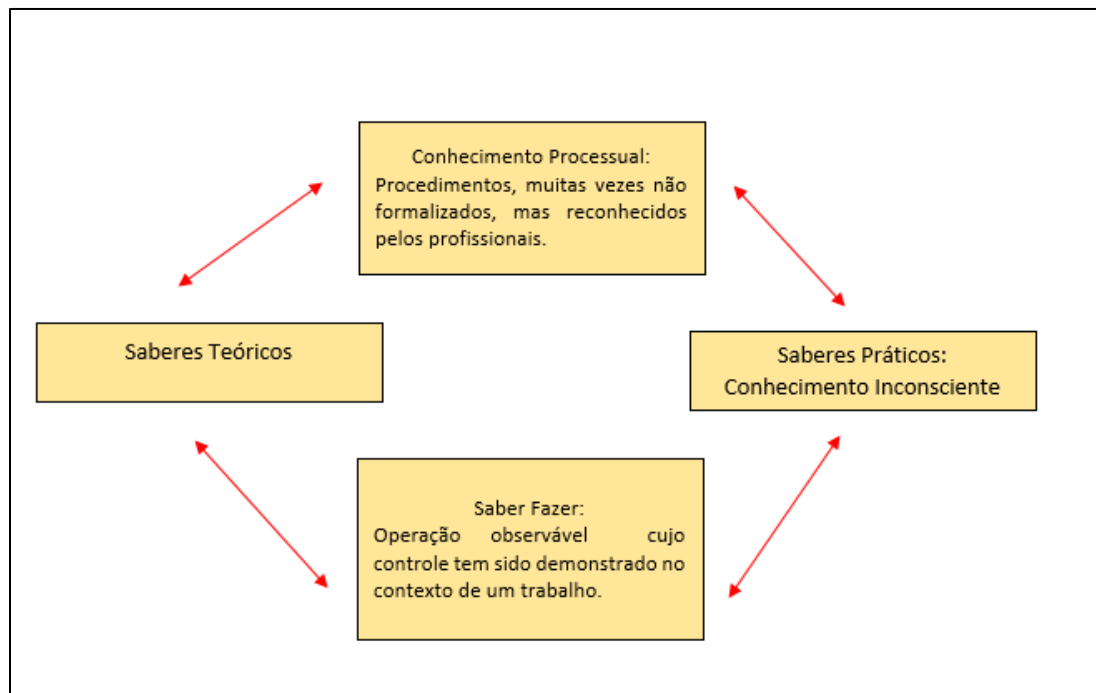
Por outro lado, a atividade humana é organizada e, portanto, analisável. Nesta organização, o papel da conceituação como adaptação do sujeito ao mundo é central. Em termos piagetianos, a conceituação não é primariamente a construção de um conhecimento teórico, mas sim, uma maneira de regular a ação de alguém e adaptá-la ao ambiente.

Portanto, compreendemos que a atividade laboral do professor se encontra em diversas análises mediante o posto de trabalho. Assim, entendemos que a eficiência ou competência do professor, se origina de uma capacidade, cada vez mais tácita e maior, de agir e adaptar-se às situações (problemas) escolares e erráticas (ALVES; JUCA, 2019) no interior da sala de aula. Sendo esse o coração da competência profissional, a capacidade de gerenciar as situações ineditas e não triviais. O objetivo do professor é então visar um objetivo de aprendizagem-desenvolvimento através de uma tarefa suscita.

A DP também gerencia o desenvolvimento da tarefa do professor, por meio da tarefa prescrita e tarefa efetiva. Assim, seguindo a psicologia do trabalho, em se tratando da tarefa, voltado para os planos de atuação do professor, seja sendo no plano da sala de aula, ou no plano do posto de trabalho, ou ainda no plano institucional, notamos “um conjunto de práticas requeridas, e por vezes descritas oficialmente por documentos oficiais e normativos do ofício do professor” (ALVES; JUCA, 2019, p. 8).

Sabe-se que um documento normativo oficial, não é suficiente para regular a atividade do professor, pois, nem sempre ocorrem caminhos exatos para chegar no sucesso da ação, ou meta. Assim, o professor (Matemática) se depara com uma meta estabelecida, cabendo a ele a cumprir, todavia, o professor se vê diante de um vasto conjunto de alternativas para atingir a meta. No entanto, o professor opta pela compatibilidade e uso de estratégias para compor a solução da situação problema. Pastré (1999) reforça ainda que mediante as prescrições das tarefas incompletas, uma tarefa efetiva do professor se efetua na ajuda nos elementos disponíveis e necessários em uma situação. Portanto, documentos que regem uma atividade de qualquer trabalhador, não garante uma solução para um determinado problema, assim, também valendo para o professor. Sabemos que a competência não se reduz à uma prática de ação, mas sim, ela está presente na inteligência profissional (PASTRÉ, 1999), conforme a Figura 7.

Figura 7- Competência de um profissional no trabalho.



Fonte: Elaboração dos autores, baseado em Alves 2018a

A competência está na articulação entre o conhecimento às ações, com isso construindo a experiência. Sabemos que o sistema de ensino não é trivial, eles são eminentemente complexos, e dependem da experiência do professor no campo de trabalho. Fazendo a Ergonomia cognitiva e a Ergonomia emergirem para regular as estratégias eficientes voltadas para a atividade do professor de Matemática.

No nível (ii), apresentamos a competência profissional do professor através do campo político e da negociação social classista. Nesse nível, de modo pormenorizado procuramos observar a evolução do professor de Matemática, especificamente no trabalho. Pastré (1999) recordáramo-nos que a avaliação de um indivíduo no posto de trabalho, não se dá perante um sistema de qualificação. Desse modo, o trabalho do professor não deve ser avaliado na tarefa prescrita, mas sim, o trabalho realizado na instituição.

Alves e Juca (2019) ponderam que a competência profissional atende uma homogeneidade das situações de trabalho, ou seja, o sistema escolar brasileiro é semelhante nas outras unidades de ensino, e que, nessas semelhanças permitem uma ligação entre si, por meio da competência e da qualificação (reconhecimento social da competência). Sabemos que o regime que compõe os conhecimentos teóricos possui um significado característico na competência, constatamos que os saberes epistêmicos matemáticos são oficialmente fornecidos pela instituição de ensino.

Desse modo, Pastré (1999, p. 113) fornece a opinião acerca da evolução do professor perante as situações de trabalho, assim, “se torna necessário para cada *métier* extrairmos um *corpus* estável de capacidades, que podem superar situações imprevistas e a evolução do trabalho”. No caso do professor de matemática é semelhante, o *corpus* de conhecimento preestabelecido mediante a instituição, ou documentos formativos se mostram necessários e fazem parte de uma habilidade compartilhada por um grupo docente de mesma área, sendo reconhecido socialmente pela execução da atividade no sistema escolar brasileiro (ALVES; JUCÁ, 2019).

Sabemos que qualquer profissão existe as condições salariais, implicando nas condições se adequam as ocupações/cargos de trabalho. Tal condição também se adequa ao trabalho do professor, na sua função social. Assim, o sistema de trabalho (escolar), sustenta-se em um conjunto de referências, regras e normas educacionais.

De modo particular, nos atemos à competência do professor de Matemática, atendendo a competência da DP, acentuando na habilidade de gerir situações novas e erráticas, de modo, a lidar com os problemas reais, ou de situações problemas não previstos pelo professor, inseridos no sistema de ensino e seguindo normas rígidas.

Logo, lembrar-nos-emos que a competência não é algo que se aprende, mas sim, é tida como um conjunto de habilidades que um profissional manifesta no campo de trabalho. Enfatizamos que a competência conduz um processo de avaliação individual e não se restringe somente ao campo de trabalho. Assim, trazendo para o caso do professor, podem existir dois profissionais de mesma qualificação profissional, porém, ambos apresentam características diferentes na competência. Contudo, as qualidades pessoais fazem a diferença no que se concerne a competência, que por vezes é vista somente a partir do conhecimento acadêmico que um professor possui. Sendo que, algumas habilidades são julgadas e reconhecidas por demais professores (colegas de trabalho).

Finalizamos, com o terceiro nível de análise para a competência do professor, neste (iii) nível a competência está vinculado ao modo cognitivista. A partir dos modelos socioconstruivistas e do construtivismo acentuado nos campos conceituais, a competência dos adultos é perspectivada no local de trabalho, passando a aprenderem no *lócus* de trabalho. Sendo assim, “[...] a competência profissional do professor se consubstancia por uma passagem progressiva e a coordenação das atividades de ação e de antecipação, construção e reconstrução de esquemas cognitivos, estruturados hierarquicamente por invariantes operatórios” (ALVES; JUCÁ, 2019, p. 12).

Sabemos que a conceituação antecede a ação, por esse motivo, a cognição vem antes de operarmos quaisquer ações. A partir desse pressuposto piagetiano, percebemos que a competência desenvolve a aprendizagem do professor no trabalho. A competência é um processo de aquisição de conhecimento e de ação profissional, o indivíduo utiliza o conhecimento para aprimorar sua competência. Temos que o núcleo fundamental e estruturante de um ofício está no modo de aprender nas situações que o trabalho desenvolve durante a ação do operário.

Portanto, o professor aprende por meio da prática no trabalho, agindo por um repertório de ações típicas do seu posto de trabalho, descritos por um regime de manuais normativos e oficiais que controlam a ação. Assim, a competência será organizada por um conjunto de habilidades, enfáticas em regras nem sempre explícitas, mas circunstanciadas e pragmáticas.

Na atividade profissional do professor de Matemática, os conceitos pragmáticos fazem parte da aprendizagem no trabalho. Sabemos que a competência, não é atrelada somente aos conhecimentos epistêmicos, mas sim, está no âmago do pragmatismo. Pastré (2002) endereça as principais características do pragmatismo no trabalho, que também se estende para a atividade do professor de Matemática.

Os conceitos pragmáticos possuem um duplo estatuto: eles apresentam objetos de mudança no quadro dos saberes da profissão e pertencem ao campo prescritivo, em um sentido ampliado. Eles são transmitidos dos mais velhos para os mais novos, por intermédio de uma mistura de verbalização e demonstração, de modo similar aos conceitos cotidianos de Vygotski. Mas, a transmissão não se mostra suficiente para possuir, verdadeiramente, um conceito. É necessário, ainda, que os conceitos pragmáticos sejam objeto de construção pelo sujeito. Podemos dizer que o que é transmitido é uma representação e que tal representação não se torna um conceito na condição à atividade construtiva do sujeito (2002, p. 13).

Tomamos os conceitos derivados da DP, perspectivados no construtivismo e nas classes dos profissionais de Ochanine (1981), assim a competência se origina nesse nível por dois pontos:

- 1- Transposição profissional;
- 2- Forma operatória.

No 1, a transmissão dos saberes profissionais, envolvendo duas classes de profissionais, os professores experientes e os professores com menos experiência, havendo uma transposição profissional³, ou seja, tem-se uma partilha de conhecimento profissional entre os professores experientes e inexperientes no ambiente de trabalho, de maneira

³ Binômio de profissionais (professor/ professores) juntos transmitem o conhecimento profissional na situação profissional, envolvendo professores experientes e professores em formação.

simplificada, sobre a transmissão de informações situacionais e pragmáticas durante o exercício da atividade, ou ainda então, mediante a situação complexa de resolução de problemas.

No ponto 2, há uma distinção entre os esquemas de ação do professor experiente e do professor iniciante, ambos de Matemática. “O professor experiente tem uma leitura mais globalizante das situações, com o escopo de tomar decisões e antever o potencial causal de suas escolhas” (ALVES; JUCÁ, 2019, p. 14). No professor novato (em formação) tendem a executar suas atribuições nos documentos escolares normativos da instituição.

Algumas pesquisas (ALVES, 2018a, 2018b, ALVES; JUCÁ 2019; ALVES; CATARINO 2019) acerca da atividade do professor de Matemática envolvendo os níveis (i), (ii), (iii) que a competência do professor se manifesta perante a Situação Didática Profissional (SDP), acerca da execução das atividades em sala de aula, no posto de trabalho que também discorre aos seus colegas de trabalho, e de um cenário que envolve o sistema de ensino, ou plano institucional. Dispomos no Quadro 3, como as categorias se adequam perante a situação didática profissional do professor de Matemática.

Quadro 3. Os três níveis da competência atrelado a SDP.

Situação Didática Profissional	Descrição e campo de aplicação
Determinada pelo plano da sala de aula (Binômio: professor – estudantes) (plano I)	Conjunto de situações profissionais características, fundamentais e determinantes para a aquisição de um conhecimento profissional pragmático e circunstanciado, e que proporciona, ainda, a compreensão e a modelização de esquemas de ação e de antecipação do professor mobilizado em sala de aula
Determinada pelo plano do posto de trabalho do professor de Matemática (Binômio: professor – professores, colegas do <i>métier</i>) (plano II)	Conjunto de situações profissionais características, fundamentais e determinantes para a aquisição de um conhecimento situado e circunstanciado no posto de trabalho, cujo núcleo estruturante envolve um conhecimento pragmático de ordem deodôntica, essencialmente compartilhado pelos seus pares e regras (explícitas ou não explícitas) definidas pelo grupo, condicionadas por documentos físicos oficiais e normativos.
Determinada pelo plano da instituição escolar e função executada pelo professor (Binômio: professor – instituição escola e sistema de ensino) (plano III)	Conjunto de situações profissionais características, fundamentais e determinantes para a aquisição de um conhecimento técnico situado no plano de atuação institucional (e escolar), diante de tarefas oficiais,

	exigências de documentos normativos, regras e determinantes do seu ofício e que deriva de um perfil de docente requerido pela sociedade.
--	--

Fonte: Alves; Catarino (2019, p. 118, adaptada)

Mediante o quadro acima, percebemos que os elementos apresentados estão presentes na DP, os níveis (i), (ii), (iii) ensejam que a atividade-aprendizagem do professor de Matemática estão presentes no trabalho e principalmente nas SDP. Nesse sentido Pastré (2007a, p. 83) reconhece que aprender recai sobre a atividade. “Certamente, pode-se distinguir a aprendizagem de uma atividade (principalmente aprendizado profissional) e a aprendizagem de um saber (principalmente a aprendizagem escolar). Mas mesmo quando você aprende um conhecimento, esse aprendizado é uma atividade”.

Pastré (2007b) ainda prossegue ao observar que todo aprendizado requer o registro do sucesso na tarefa, sendo assim chamado de pragmático, e o uso do registro do entendimento e conceituação (conhecimento epistêmico). Temos que os saberes epistêmicos são influenciados pelos saberes matemáticos, já os conceitos pragmáticos são compostos por uma atividade prática e compartilhada com os demais professores, construindo a experiência como uma espécie de identidade do professor de Matemática.

2.4 Delimitação do Problema

Nossa revisão bibliográfica nos fez perceber que na graduação uma das principais disciplinas que desenvolve a formação do professor está acerca da Análise Real e disciplinas derivadas dela. No que se concerne à base conteudista abordada nessa disciplina, ou seja, a construção axiomática dos conjuntos numéricos e também a construção geométrica dos conceitos aplicados aos teoremas e definições matemáticas.

Em uma das pesquisas analisadas, Ferreira e Muniz (2014) os autores discutem que os conteúdos trabalhados na disciplina são tidos como uma ponte entre a Educação Básica e o Ensino Superior, se mostrando relevante para a formação inicial do professor de Matemática. E que infelizmente a disciplina é vista somente no final do curso, e algumas vezes se torna até optativa para o aluno cursar.

Portanto, nos preocupamos com a formação profissional do professor de Matemática, e relacionamos a Didática Profissional com a formação do operário da Educação (professor). Analisamos alguns trabalhos (PASTRÉ, MAYEN, VERGNAUD, 2006; PASTRÉ, 2011; ALVES 2018a, 2018b, 2019) que cercam essa temática. Instigando a preocupação da

formação profissional contínua, envolvendo a análise do trabalho para a competência profissional em *locus* de trabalho.

Como estamos interessados na formação do professor de Matemática relacionamos a importância da construção dos conjuntos numéricos na formação inicial do professor de Matemática, e endereçamos a vertente francesa DP para entender como o profissional deve adequar sua competência no campo de trabalho perante os alunos, colegas de trabalho e órgão institucional.

Para alcançarmos o objetivo proposto, pretendemos seguir o modelo metodológico de Brousseau (1988) com a Teoria das Situações Didáticas (TSD) e de Perrin-Glorian e Bellemain (2015) com a Engenharia Didática de Desenvolvimento (EDD). A metodologia de pesquisa EDD aliada com o método de ensino da TSD permitem investigarmos os fenômenos desenvolvimentistas para a formação inicial do professor de Matemática.

3 REFERENCIAL TEÓRICO METODOLÓGICO

Neste capítulo, abordamos a escolha da nossa metodologia e sua respectiva abordagem na fundamentação teórica ao qual foi eleita pensando na formação inicial dos professores, tendo em vista como o professor em formação trabalha a parte axiomática dos conjuntos numéricos utilizando o campo epistêmico e pragmático no decorrer da sua profissionalização.

3.1 Metodologia de Pesquisa

Em nosso trabalho, utilizamos a Engenharia Didática de Desenvolvimento (EDD) ou então classificada como Engenharia Didática de segunda geração (ED2G), ou Engenharia Didática de Formação (EDF). Atualmente, quando se fala em formação de professores utiliza-se a EDF (LEGUY *et al*, 2005, p. 16-19 *apud* CHEVALLARD, 2009, p. 85).

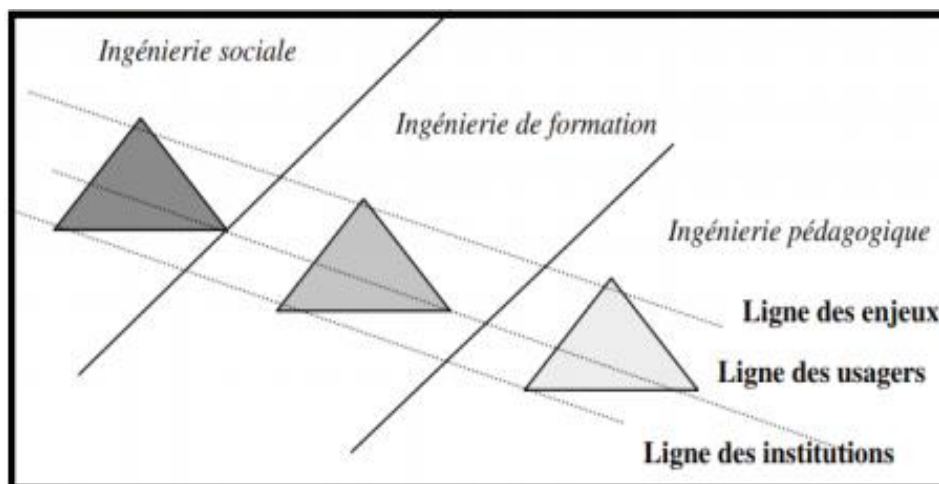
3.2 Engenharia Didática e seu Desenvolvimento

A Engenharia Didática (ED) teve uma evolução nas suas premissas, ela foi usada para designar/envolver um *modus operandi* nas investigações (ALVES; CATARINO, 2017a), ou pode ser definida como uma “metodologia para análise de situações didáticas” (ROBINET, 1983, p. 02).

Portanto, ao decorrer das suas reformas foi visto que precisava de um desenvolvimento no quadro teórico e conceitual da ED. Por essa perspectiva é que apresentaremos um quadro de adoção de novos paradigmas ocorridos na França, especialmente nas universidades.

Assim, levando em consideração a tradição francesa sob perspectiva da engenharia dos anos 60 até seu desenvolvimento, passou-se a ter várias noções sobre as engenharias (CHEVALLARD, 1982), como Leclercq (2002) apresentou-as como engenharias sociais, engenharias pedagógicas e a engenharia de formação. Iremos apresentar a Figura 8 para se ter um entendimento como está localizado essas engenharias.

Figura 8- O processo de desenvolvimento da engenharia a partir dos anos 60



Fonte: Leclercq (2002, p. 112)

É possível observarmos que a noção de engenharia de formação, derivou-se dos fundamentos da Didática voltados para a formação dos adultos. No caso, estamos focando na formação para o ensino.

Assim, na década de 1990, surgiram as investigações didáticas em torno da formação docente. Pois, perante a Engenharia Didática Clássica (ED) o professor não era o foco das pesquisas do IREM, assim, o aluno passava a ser o centro investigatório das pesquisas.

Indiscutivelmente, o cenário de investigação dos anos 90 era acerca do aluno, no entanto, devido à emergência da formação do professor de matemática não poder ser relativizada, as autoras Perrin-Glorian e Bellemain (2016) respaldam que,

O funcionamento da classe, o papel do professor diante de tal funcionamento, os conhecimentos reais dos estudantes se apresentam como variáveis impossíveis de se negligenciar. Nós fomos, então, escolher estudar, ao mesmo tempo, as características da classe e as características gerais do papel do professor, particularmente visível neste tipo de classe, aonde os estudantes partilham, mais dificilmente, a mesma intenção do professor e, também, porque a proposição do pesquisador de situações originadas de uma engenharia didática de pesquisa, relativamente a qual, não participaram, obrigava os professores em abandonar suas rotinas ou, ao menos, adaptá-las (2016, p. 36).

Devido o professor entrar em cena nas investigações didáticas como também o desenvolvimento das suas ações didáticas, surgiu em meados de 2009 durante a Escola de Verão de Didática da Matemática, uma discussão acerca da metodologia Engenharia Didática Segunda Geração (PERRIN-GLORIAN, 2009).

Destacamos que o progresso da Engenharia Didática de Formação esteve entre pesquisas e recursos para o ensino e a formação de professores. O desenvolvimento da ED está relacionada com a evolução da TSD, ou aplicação de modelos teóricos mais ou menos

derivados da TSD, como o caso da Teoria Antropológica da Didática. (CHEVALLARD, 1992), ou dos trabalhos realizados sobre a prática dos professores.

Iremos lembrar que a ED é uma metodologia de pesquisa que teve embasamento na TSD que é um método de ensino, e ambas são complementares, como Alves (2017b) afirma que:

[...] seguindo a tradição dos trabalhos da vertente da Didática da Matemática, o uso, em caráter de complementaridade, da ED com a TSD, visando a obtenção, acúmulo, constatação e determinação de conhecimentos técnicos, didáticos e metodológicos sobre uma prática controlada de transmissão e transposição didática (ALVES, 2017b, p. 102).

A partir de 1980 a institucionalização, última etapa da Teoria das Situações Didáticas (TSD) foi reformulada, assim como a existência de um contrato didático implícito. Desde 1982 a situação didática é observada como uma situação adidática imersa em um contrato didático, e ao mesmo tempo em que surge a noção de devolução. Porém a TSD se desenvolveu, preliminarmente em torno da caracterização de situações adidáticas em situações isoladas do professor.

No excerto acima vimos que o desenvolvimento da EDD se deu pela TSD, ao perceberem que o professor não estava incluso na teoria, pois atualmente a TSD aborda quatro fases onde são classificadas nas três primeiras fases são tidas como adidáticas e a última é didática. A última se destina ao professor. Mediante a isso, percebemos que antes da mudança da TSD a ED no seu início era centralizada nos aspectos matemáticos (epistemológicos e cognitivos), não explicitando o papel do professor, ao momento de mobilização das sequências em classes.

A Engenharia Didática de Desenvolvimento foi definida por Perrin-Glorian em 2011, sendo definida como uma Engenharia Didática que visa produzir recursos para o ensino regular com um objetivo na formação de professores e avaliar o impacto da pesquisa no ensino.

Segundo Perrin-Glorian (2009), a EDD objetiva desenvolver meios (objeto de aprendizagem) para o uso no ensino regular, ou, para a formação de professores. A Engenharia Didática Clássica virou a Engenharia Didática para a Investigação (EDI) e a Engenharia Didática de Segunda Geração virou a Engenharia Didática de Desenvolvimento (EDD). No Quadro 4, diferenciamos ambas as engenharias.

Quadro 4 - Diferença entre as duas (EDI) e (EDD).

EDI	EDD
• Faz emergir fenômenos didáticos para estudá-los; • Visa um avanço no resultado de investigação, fazendo uso de experimentações montadas em função da questão de pesquisa; • Não há a preocupação imediata em divulgar as situações utilizadas.	• Produzir recurso (s) para professores ou para a formação de professores. • Liberdade de ação para o professor • A investigação continua a ser essencial, mas, as questões de investigação não são motivadas, em primeiro lugar, pela ampliação dos quadros teóricos; • Baseia-se na engenharia de 1ª geração.

Fonte: Almouloud (2012, p. 46, adaptado)

Segundo Perrin-Glorian (2009), mesmo que os alunos sejam expostos a uma EDI ou EDD o conhecimento dos mesmos é controlado em ambos os casos. É importante salientar que a IDR é tida como uma variável indefinida, já a EDD é preciso ter um vislumbre que conote uma adaptação nas situações e na elaboração de meios para um transporte.

Chevallard (2009) acentua que de imediato percebe-se a distinção entre a EDI da EDD, e que em ambos os casos, existe uma tensão entre os dois polos, ao qual ele denomina como a Engenharia Didática para o uso e a Engenharia Didática para o conhecimento.

Perante a formação do professor, Perrin-Glorian (2009, *apud* ALMOULOU; SILVA, 2012, p.32) salienta que o uso da EDD deve concluído com êxito, todavia deve obedecer a três condições:

1. Deixar uma certa liberdade de ação ao professor: esta condição já é válida no primeiro nível, mas agora trata-se de definir a sequência de situações com o professor e analisar como o professor adapta o documento que lhe é fornecido.
2. Utilizando os documentos produzidos, os professores devem procurar não reproduzir história, mas as condições da aprendizagem, a questão essencial para a engenharia didática, sendo como identificar os elementos essenciais para a realização efetiva da atividade.
3. É necessário apoiar-se em uma engenharia didática de primeira geração que possibilite a construção de uma situação fundamental e sua análise.

Perrin-Glorian (2009) definiu a terminologia ED2G, porque a primórdio se baseia na Engenharia Didática Clássica, as fases da EDD são as mesmas da Engenharia Didática Clássica. Dessa forma, a ED clássica é voltada para os alunos, já a de segunda geração é voltada para a formação do professor.

A Engenharia Didática designa um conjunto de sequências de classes concebidas, organizadas e articuladas no tempo, de modo correto, por um professor-engenheiro, com o

fim de realizar um projeto de aprendizagem para um determinado público de alunos (DOUADY, 1995, p.62 *apud* ALVES; CATARINO 2017a).

A EDF perpassa pelas quatro fases: Análises preliminares, análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori*. Essas etapas não seguem exatamente uma linearidade, dependendo da pesquisa pode haver a necessidade de retomar as fases para assim, aperfeiçoá-las.

Logo alguns autores (ARTIGUE *et al*, 1995; ARTIGUE 1996; MACHADO, 2002; ALMOULOUUD; SILVA, 2012) definem as fases como:

1. análises preliminares “[...] a engenharia é concebida para provocar, de forma controlada, a evolução das concepções” (Artigue, 1996, p. 202), ela deve ter uma análise epistemológica do conteúdo contemplado no ensino (ARTIGUE, 1995), ou seja, aqui faremos uma análise bibliográfica de materiais como artigos, livros, dissertações e teses que envolvam a construção dos conjuntos numéricos (Naturais, Inteiros, Racionais, e Reais) vinculados a formação dos professores. Ainda é necessário que o pesquisador tenha alguns cuidados tomados em: estudar a organização matemática do objeto matemático, adotar uma abordagem histórica cronológica e analisar a organização didática do conteúdo através dos materiais.

Observando uma análise da educação tradicional e seus efeitos (ARTIGUE, 1995), por esse viés é visto como está os problemas mais pertinentes ao ensino e aprendizagem do objeto matemático escolhido. Também teremos a preocupação em ter uma análise das concepções dos professores, das dificuldades e obstáculos que determinam sua evolução.

A análise do campo de restrições onde será colocado a efetiva realização didática na Engenharia Didática (ARTIGUE, 1995), para tanto iremos perceber como o objeto matemático é trabalhado nas diferentes instituições de ensino.

Para tanto, ainda nessa fase é definida os objetivos tanto o objetivo geral quanto os objetivos específicos e a questão norteadora da pesquisa.

2. análise *a priori*: Machado (2002) ressalta que a pesquisa deve delimitar as variáveis de comando, que são atribuídas a duas: as variáveis *microdidáticas* e *macrodidáticas* pertinentes ao sistema didático (professor/ aluno/saber). Que segundo Artigue (1988 *apud* ALMOULOUUD, 2007, p. 175) as define como “as variáveis *microdidáticas* ou *globais* é relativa à organização global da engenharia, e as variáveis *microdidáticas* ou *locais*, relativas à organização de uma fase”.

Pondendo ser consideradas pelo pesquisador/professor para que sejam abordadas as várias sessões ou fases de uma engenharia didática, alguns pontos devem ser considerados, tais como Almouloud e Silva (2012, p. 27) determinaram que:

Descrever as escolhas feitas no nível local (relacionando-as eventualmente com as seleções globais) e as características da situação adidática desenvolvida;
 Analisar o que poderia estar em jogo nesta situação para o professor, em função das possibilidades de ação, seleção, decisão, controle e validação que o aluno/professor terá durante a experimentação;
 Prever campos de comportamentos possíveis e tentar demonstrar como a análise permite controlar seus significados e assegurar, particularmente, que se tais comportamentos esperados ocorreram, é por consequência do desenvolvimento visado pela aprendizagem.

Nessa fase é feito o planejamento das situações didáticas como também a elaboração das situações-problemas que serão empregadas. É importante possuir nessa etapa uma previsão circunstanciada nas atitudes que os alunos/professores terão formulando estratégias a fim de intervir no comportamento dos mesmos.

Assim, é possível ter nessa etapa, a metodologia empregada visando à transposição didática, os recursos didáticos que serão usados, como também o tempo para a realização das sequências didáticas, e a situação-problema que se adeque aos conhecimentos movidos para se ter a solução.

Uma característica também dessa fase é a elaboração das sequências de ensino, aplicados na experimentação. Portanto, o objetivo das atividades elaboradas está acerca dos professores em formação inicial discutirem a construção dos conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ relacionando com o conhecimento epistêmico e pragmático.

Conjecturamos a elaboração de cinco atividades, abordando os conjuntos Naturais, Inteiros Racionais e Reais. Aplicamos as atividades com duração de 120 minutos cada encontro, levando em conta que os alunos estão cursando uma disciplina pertencente ao final do curso, os mesmos devem possuir um conhecimento prévio do objeto matemático escolhido da pesquisa.

3. Experimentação: De acordo com Machado (2002) consiste basicamente no desenvolvimento da aplicação da Engenharia Didática, concebida a um grupo de alunos, objetivando verificar as ponderações levantadas na análise a priori. Logo, nessa fase encontra-se “a explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa; a população de alunos que participará da experimentação; o estabelecimento do contrato didático; a aplicação do instrumento de pesquisa; o registro das observações feitas durante a experimentação” (Machado, 2002, p. 206). Para tanto os registros devem ter aportes na utilização de determinados recursos, tais como vídeos, áudios, manuscritos dos alunos, registro fotográfico dentre outros (ALMOULOU, 2007).

O pesquisador deve apresentar os objetivos da pesquisa, deixando claro as condições para realização da pesquisa. Como também deve apresentar o contrato didático, que segundo

Brousseau (1996, p. 38) o definiu como “um conjunto de comportamentos (específicos) do professor que são esperados pelos alunos, e um conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor” mediado pelo saber. O contrato didático é como um conjunto de fatores que implicam na relação didática, a fim de estabelecer responsabilidades e comportamentos via professor para o outro professor impostos na prática em sala de aula, para a apropriação do saber. Tais responsabilidades ou comportamentos, são efetivadas de fato, através de regras específicas, e também por regras explícitas, objetivando orientar o processo de ensino e aprendizagem entre ambos.

Executamos nessa fase, as sequências didáticas planejadas na fase anterior (análise *a priori*) detalhados em parágrafos anteriores. Assim, aplicamos as cinco situações-problemas. Enfatizamos que antes de mencionarmos sobre as situações didáticas, conversamos com os professores em formação sobre os objetivos da nossa pesquisa abarca e como seria o desenvolvimento dessa fase. Exibimos como seria o papel de cada um dos participantes e como o papel da professora pesquisadora se sobressairia no desenvolvimento das atividades.

Logo, ainda no decorrer dessa fase é necessário possuir muita cautela na obtenção dos dados. Buscamos registrar até o momento as folhas com os registros cognitivos dos alunos em relação às situações-problemas resolvidas pelos professores em formação, como também registramos as entrevistas com eles.

4. Análise *a posteriori* e validação: Artigue (1996) conclui que a última fase, se apoia sobre o conjunto de dados obtidos ao longo da experimentação pelas observações do pesquisador, pelo registro sonoro ou através da produção escrita.

Aqui, o pesquisador deve analisar minuciosamente os dados colhidos perante a experimentação. Como também deve ter a validação da engenharia “mediante o confronto das considerações da análise *a priori*, e as observações da experimentação” (SANTOS; ALVES; VASCONCELOS, 2018, p. 214).

3.3 Teoria Das Situações Didáticas (TSD)

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) foi inserida na perspectiva da Didática da Matemática francesa (DM) que teve seu apogeu no século XX, desenvolvida por Brousseau. Emergiu para elucidar uma renovação no Ensino da Matemática, esse movimento de pré mudança iniciou-se na década de 1960, pelo *Commission internationale pour l'étude et*

l'amélioration de l'enseignement des mathématiques (CIEAEM)⁴, onde o intuito era de reestruturar o ensino da Matemática.

Com o intento da reestruturação da Matemática, criaram os Institutos de Pesquisa em Educação Matemática (IREM), onde se localizava em vários centros universitários espalhados, a fim de mudar o Movimento da Matemática Moderna⁵, de início os IREM tinha objetivo na “[...] produção de conhecimento para controlar e produzir [...] ações sobre o ensino” (GÁLVEZ, 1996, p. 26)

Podemos destacar Guy Brousseau como sendo um dos principais mentores do IREM, todavia resignou-se, e, posteriormente, criou o Centro de Observação e Pesquisa em Educação Matemática (COREM). Com o desenvolvimento do COREM, Brousseau (1988) desenvolveu a TSD.

Podemos destacar que a teoria de Brousseau tem um vínculo com a DM, pois permite a existência de um processo de aprendizagem através de uma sequência de situações didáticas, que evidenciam a evolução comportamental dos aprendizes. Brousseau elucidou que o objetivo da TSD é de impor reflexão sobre as relações entre os conteúdos de ensino e os métodos educacionais, deixando uma extensão maior em abordar a didática como campo de investigação no intento de impor a comunicação dos conhecimentos matemáticos e suas transformações (SILVA; FERREIRA; TOZETTI, 2015).

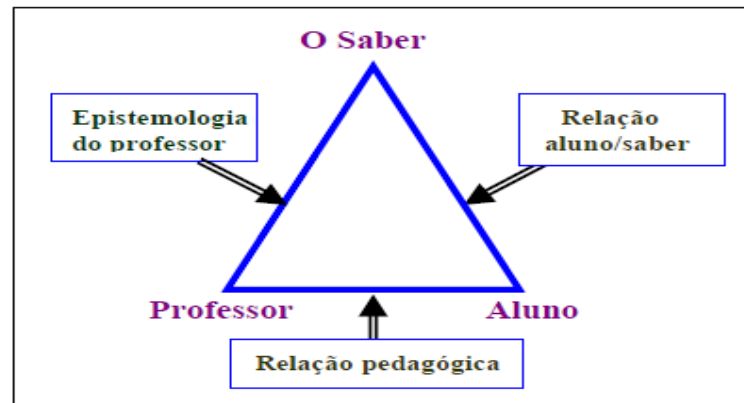
O foco principal da TSD é a situação didática com intuito de emergir a interação com o sistema didático (triângulo didático). As situações didáticas da década de 1970 estavam centradas somente no modo de ensino, não incluindo o professor, todavia, esse problema reverteu-se, e posteriormente o professor incluiu-se nas situações didáticas.

Nessa remodelagem Brousseau (1986) fez emergir na TSD o triângulo didático ou trinômio da aprendizagem, que é composto por três elementos essenciais: aluno, professor e o saber (POMMER, 2013), onde são partes constitutivas de uma relação dinâmica entre professor e aluno (elementos humanos) mediados pelo saber (elementos não humanos) (POMMER, 2013). Na Figura 9, estará disponível a estrutura do triângulo didático.

⁴ Comissão Internacional para o Estudo e Melhoria do Ensino de Matemática.

⁵ Movimento criado entre os anos 1950 e 1960 que pretendia aproximar a Matemática trabalhada na escola básica com a Matemática produzida pelos pesquisadores da área.

Figura 9- Elementos do triângulo didático



Fonte: Brousseau (1986, p. 12)

Explicitando a figura acima, a relação entre o saber e o professor é atribuída a “epistemologia do professor”, que abarca vários elementos que iremos listar alguns, tidos como:

- Concepção que o professor deve ter sobre o conhecimento que será ensinado;
- Metodologia perante a transposição do conteúdo mais singelo ao mais complexo;
- Compreender as habilidades cognitivas dos alunos;
- O método de abordagem de um determinado assunto respeitando a matriz curricular;
- O conhecimento que o professor deve possuir em relação ao contexto histórico do conteúdo dado.

Assim, Brousseau (1986) relata que o aluno, ao entrar em contato com o novo saber, se transformará em um pesquisador, pois terá a postura autônoma diante da situação nova, interagindo com o meio (*milieu*), fazendo uma reflexão solitária e se auto desenvolvendo.

Portanto, na relação estabelecida entre o saber e o aluno, deve respeitar os conhecimentos já prévios que os alunos possuem, para os mesmos possam formular hipóteses, testar conjecturas, para construir um novo conhecimento científico. Todavia, o aluno não pode perceber o professor embutido nas situações impostas a ele, para que o aluno possa atuar de forma ativa, mesmo sem compreender o que se esperará dele na aprendizagem, e no conteúdo que está sendo repassado.

Para tanto, na relação pedagógica, o professor terá o papel de mediador onde passe a criar situações de aprendizagem para os alunos, e que os discentes possam se aproximar do novo saber construído.

Salientamos que nas linhas passadas percebemos que a Teoria das Situações possui características antagônicas ao modelo de ensino herbartiano⁶, pois o intento da TSD é proporcionar situações de aprendizagem que aproxime o aluno do novo saber científico. Para Almouloud (2007) a TSD a princípio é baseada em três hipóteses:

- primeira hipótese, o aluno deverá ser capaz de adquirir um novo conhecimento a partir de uma adaptação de um meio contendo obstáculos e contradições.
- segunda hipótese o comportamento do aluno influencia o *milieu* e este deve ser modelado de modo a ser autônomo e antagônico ao sujeito.
- terceira hipótese o *milieu* deve estar em concordância com ambas às situações (didáticas e a-didáticas), ao planejar uma situação didática ela deve partir da situação a-didática.

Assim, Brousseau (1986) propôs duas classes de situações, classificando-as como: didáticas e adidáticas. Uma situação didática “[...] é todo o contexto que cerca o aluno, nele incluídos o professor, e o sistema educacional” (BROUSSEAU, 2008, p.10) uma situação adidática é voltada para o discente, quando ele for capaz de aplicá-lo por si próprio as situações com que se depara fora do contexto do ensino, e na ausência de qualquer indicação intencional (BROUSSEAU, 1996).

Em nossa pesquisa, trabalhamos acerca das sequências de ensino tanto didáticas quanto adidáticas damos enfoque nas situações didáticas, todavia as situações adidáticas também estarão presentes, pois, as duas estão vinculadas como vimos na definição do parágrafo anterior.

Silva (2008) enfatiza que Brousseau tencionou a situação didática, fazendo existir alguns momentos em que o discente se encontrará sozinho mediante o problema que ele deverá resolver isso sem o intermédio docente. Neste caso, fica perceptível a manifestação de uma situação adidática, pois o aluno solucionará o problema embasado no seu autoconhecimento, sem o educador intervir nas opções de respostas. Logo, tanto as situações didáticas e adidáticas existem de forma complementar (SILVA, 2008).

Uma situação didática segundo Brousseau (1996) é usada para descrever os modelos que esboçam as atividades do educador e do educando. É o todo que inclui o professor, o aluno e o sistema educacional. Portanto, Brousseau (1986) categoriza as quatro dialéticas embasadas nas situações didáticas verificadas em determinadas atividades acerca da

⁶ O modelo herbartiano é tido como o modelo de ensino tradicional, está centrado nas ações didáticas que o educador deve ter, tais como: preparação de aula, apresentação do conteúdo, associação, generalização e aplicação (Nogueira, 2010).

aprendizagem da matemática, sendo que as três primeiras situações são tidas como situações adidáticas, e a última fase tem caráter de uma situação didática, as quais são tidas como:

I) situação didática de ação: o aluno reflete e simula tentativas, ao eleger um procedimento de resolução dentro de um esquema de adaptação, por intermédio da interação com o *milieu*, tomando as decisões que faltam para organizar a resolução do problema (BROUSSEAU, 1986, *apud*, TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p. 165);

II) situação didática de formulação: ocorre troca de informação entre o aluno e o *milieu*, com a utilização de uma linguagem mais adequada, sem a obrigatoriedade do uso explícito de linguagem matemática formal, podendo ocorrer ambiguidade, redundância, uso de metáforas, criação de termos semiológicos novos, falta de pertinência e de eficácia na mensagem, dentro de retroações contínuas; os alunos procuram modificar a linguagem que utilizam (BROUSSEAU, 1986, *apud*, TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p. 165);

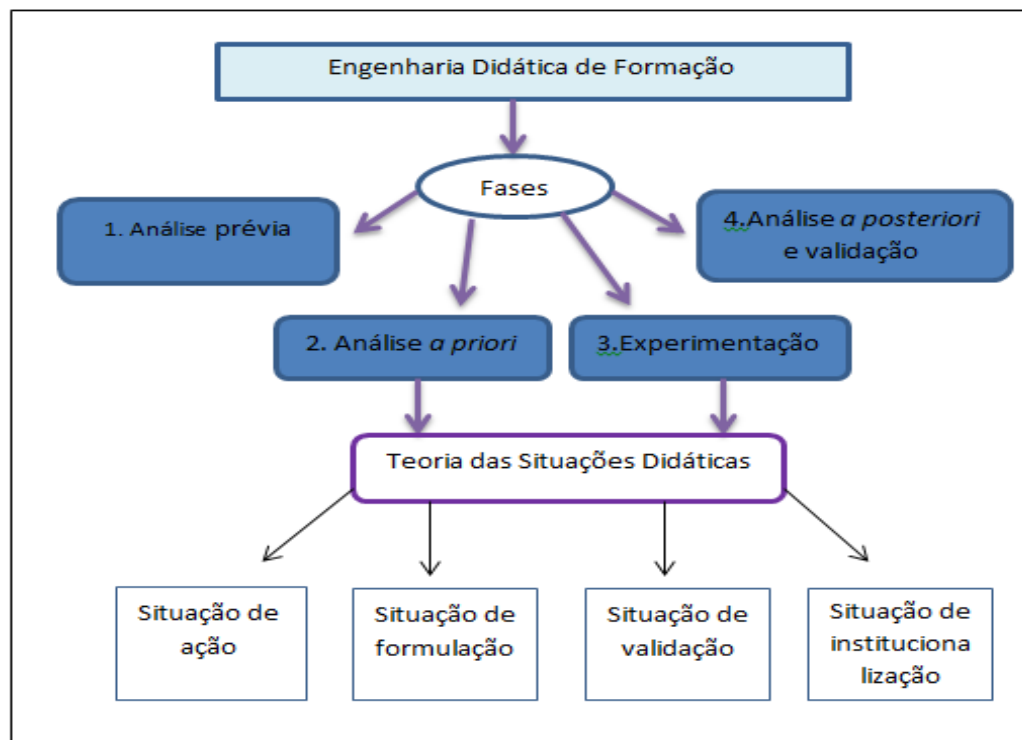
III) situação didática de validação: os alunos tentam convencer os interlocutores da veracidade das afirmações, utilizando uma linguagem matemática apropriada (demonstrações); as situações de devolução, ação, formulação e validação caracterizam a situação adidática, em que o professor permite ao aluno trilhar os caminhos da descoberta, sem revelar sua intenção didática, tendo somente o papel de mediador (BROUSSEAU, 1986, *apud*, TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p. 165-166);

IV) Institucionalização: o professor retoma a parte da responsabilidade cedida aos alunos, conferindo-lhes o estatuto de saber ou descartando algumas produções dos alunos e definindo, assim, os objetos de estudo por meio da formalização e da generalização. É na institucionalização que o papel explícito do professor é manifestado: o objeto é claramente oferecido ao aluno. Há, portanto, uma real aprendizagem, reconhecida pelo professor. (BROUSSEAU, 1986, *apud*, TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p. 165-166).

Na aplicação das nossas atividades experimentais ao nosso determinado público alvo, as fases em que compõem a TSD estarão incorporadas e vivenciadas pelos sujeitos da pesquisa.

Portanto, a TSD aliada a Engenharia Didática de Formação proporciona o entendimento dos fenômenos encontrados no interior da sala de aula, no que se concerne à aprendizagem do aluno e a formação do professor. Na Figura 10, esclarecemos como a EDF e a TSD se encaixam na nossa pesquisa.

Figura 10- Engenharia Didática de Formação e a Teoria das Situações Didáticas em função metodológica na pesquisa.



Fonte: Elaboração dos autores

Tanto a EDF e TSD podem ser utilizadas no processo investigativo de ensino e formação de professor. As fases da Engenharia Didática de Formação e da Teoria das Situações Didáticas auxiliaram as cinco situações didáticas criadas para os professores em formação de Matemática, como também acentuaremos a inserção da complementariedade da Didática Profissional e da Didática da Matemática, que será explicitado adiante.

3.4 Elementos complementares entre a Didática Profissional e a Didática da Matemática visando o uso da Engenharia Didática de Formação

A Didática Profissional e a Didática da Matemática são teorias diferentes, mas, ambas tem um ponto de interseção implicando na formação. Assim, a DP está na formação contínua no trabalho e a DM está pautada na TSD e EDF para a formação do professor de Matemática.

Nos trabalhos de Pastré (2002) é comum perceber o interesse da DP na TSD, o autor ainda esclarece que a DM não se preocupava com a formação do professor, e sim a acentuação das pesquisas estavam acerca do estudante (aluno). Todavia, os professores que escolhem as situações didáticas e ao mesmo tempo eles possuem uma

função mediadora na situação. Por essa questão foi desenvolvida a ED visando à formação do professor resultando na Engenharia Didática de Formação, desenvolvida por Perrin-Glorian (2011).

Neste ponto, originado do pensamento de Perrin-Glorian (2011) assumimos que a EDF se interessa no esquema definido por Tempier (2013, p. 187): pesquisa → engenharia → desenvolvimento → ensino, ou seja, a Engenharia Didática de Formação está no desenvolvimento do professor para o ensino. Esclarecemos que o aluno não deixou de ser o centro das pesquisas, mas, houve uma reestruturação no que se concerne a formação do professor. Obtendo um afastamento dos paradigmas neopiagentianos e bachelardiano construídos a base do construtivismo, repassando a hipótese que os conceitos não são transmitidos e sim construídos na ação.

Assim, para o desenvolvimento de uma EDF partindo dos pressupostos da DM e da DP observamos um cenário de complementariedade de alguns elementos derivados da DM correlacionados com a DP, surgindo assim elementos novos no cenário investigativo da formação inicial ou continuada do professor de Matemática (ALVES, 2018a; 2018b)

Neste trabalho acentuamos uma adoção investigativa voltada para a formação e desenvolvimento profissional do professor de Matemática e apresentamos alguns trabalhos (ALVES, 2018a; 2018b, ALVES; CATARINO, 2019, ALVES, 2019) tomados como inovadores na literatura acerca da formação do professor de Matemática, assim como a Situação Didática Profissional (SDP) apresentada em seções anteriores, existem novas definições acerca da atividade profissional do professor, atrelados a noção de obstáculos profissionais, noção de transposição profissional, contágio, institucionalização do saber profissional, contrato profissional e devolução profissional, conforme o Quadro 5.

Quadro 5- Elementos correlacionados entre a DM e DP.

Noção	(DM)	(DP)
Situação Didática (SD)	Situação Didática: “Es una situación que describe el entorno didáctico del alumno, comprende todo aquello que concurre para enseñarle algo. En este sentido, comprende al profesor, tanto si éste se manifiesta durante el desarrollo de la situación, como si no.” (BROUSSEAU, 2010, p. 21)	Situação Didática Profissional (SPD): Conjunto de situações ou situação característica, fundamental para o exercício efetivo do ofício do professor. Envolve elementos afeitos à modelização e teorização visando antever determinados obstáculos para a atividade sala de aula, para a atividade profissional no posto de trabalho e na própria instituição.
Situação Didática Profissional (SDP)		

Situação a-didática	Situação adidática: “[...] como parte essencial de uma situação didática, é uma situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor. (ALMOULOUD, 2007, p. 33)	Situação Profissional (SP): Conjunto de situações profissionais, recorrentes e no exercício cotidiano do <i>métier</i> , todavia, sem um interesse explícito ou intenção de modelização e a teorização objetivando o aprendizado do professor no e do trabalho.
Obstáculo Epistemológico Obstáculo Profissional	Obstáculo Epistemológico: “Os obstáculos epistemológicos são identificados nas dificuldades que os matemáticos encontraram, na história, para a compreensão e utilização desses conceitos”. (ALMOULOUD, 2007, p. 139)	Obstáculo Profissional: Constituem entraves, barreiras, situações profissionais típicas e recorrentes registradas no interior da atividade e na ação necessária do professor para o exercício do ofício e que produzem lentidões para sua realização, tendo em vista o alcance de um estágio perceptível e final da ação, e que corresponde com a expectativa da instituição.
Contágio	Contágio Epistemológico: Processo de alteração, modificação da mediação e atividade do professor derivada do saber matemático e de sua organização no sistema de ensino.	Contágio Profissional: Processo adaptativo e de incorporação de práticas preexistentes e que reforçam a uma identidade e estabilidade de ações no exercício do <i>metier</i> .
Institucionalização do saber matemático Institucionalização do conhecimento profissional	Institucionalização: As situações definidas como aquelas em que o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber matemático. (ALMOULOUD, 2007, p. 40)	Institucionalização profissional: Situações Profissionais em que o professor experiente ou os documentos normativos de uma instituição de ensino fixam e determinam o estatuto de relevância de um determinado conhecimento profissional necessário para a execução de tarefas e atividades.
Transposição didática Transposição profissional	Transposição didática: Conjunto de transformações envolvendo o <i>savoir savant au savoir enseigné</i> . (CHEVALLARD, 1991)	Transposição profissional: Conjunto de transformações sobre os conhecimentos pragmáticos caracterizando a transmissão de saberes pragmáticos entre professores experientes e professores inexperientes.
Devolução	Devolução do estudante: Ação pela qual o professor faz com o que o estudante aceite determinação situação de aprendizagem.	Devolução profissional: Ação pela qual a instituição de ensino confere um conjunto de regras (tarefas) que devem ser aceitas (cumpridas) pelo professor.

Fonte: Alves (2018, p. 16-17, tradução nossa)

Os elementos expostos no Quadro anterior representam a complementariedade entre alguns conceitos advindos da DM que estão relacionados com a formação profissional do professor de Matemática, desenvolvidos na DP.

Ademais, percebemos que todos os itens listados na tabela como: situação didática, situação adidática, obstáculo epistemológico, contágio epistemológico, institucionalização, transposição didática, devolução são inerentes da DM, propriamente desenvolvidos por Brousseau. Com isso, os novos itens tidos como: Situação Didática Profissional, situação

profissional, obstáculo profissional, institucionalização do saber profissional, transposição profissional e devolução profissional estão interligados com a DP visando à formação profissional contínua do professor de Matemática.

As definições dos elementos contidos na tabela anterior são relevantes para as avaliações dos dados coligidos na pesquisa, para atender os objetivos propostos na pesquisa. Por conseguinte, o design proposto na nossa pesquisa afetado pelo uso da complementariedade entre ambas as teorias francesas DM e DP objetiva a competência profissional do professor de Matemática pelos planos da SDP (Professor-Estudantes; Professor-Professores; Professor-Instituição) não tomando de forma isolada o plano individual, mas, da adequação das habilidades entre os planos situados na SDP, auxiliando a formação e treinamento do professor, como a sua análise de trabalho.

4 ANÁLISES PRELIMINARES DA ENGENHARIA DE FORMAÇÃO

Neste presente capítulo abordamos sobre o desenvolvimento histórico e temporal a respeito dos conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais). Embasamo-nos pelo livro didático: A construção dos números (FERREIRA, 2012), adotado na disciplina optativa 81, apesar do estudo ser acerca da construção dos conjuntos numéricos, não abordaremos o conjunto dos reais devido o material didático da disciplina conter a construção dos reais a partir dos cortes de Dedekind, reconhecemos que é de extrema relevância os cortes de Dedekind na formação do professor, todavia restringimos o nosso conceito epistêmico até a construção $\mathbb{Q}$. O intuito é de compreender como é feito a abordagem da construção dos conjuntos no ensino atual, oriundo da ordem sistemática da Engenharia Didática, levamos em consideração dois elementos evidenciados nas análises prévias que segundo Almouloud (2007) estão situados em: i) estudo da organização matemática, ii) análise didática do objeto matemático escolhido. Seguimos a definição de Almouloud (2007) cabendo aos itens I e II, temos que: i) se mostra em um estudo histórico acerca dos conjuntos numéricos, o livro da disciplina faz a construção histórica individual de cada conjunto, no item ii) fazemos uma análise perante o nosso objeto escolhido, ou seja, analisamos como os conjuntos são enunciados na formação inicial dos professores de Matemática.

4.1 Uma abordagem histórica sobre os conjuntos numéricos e seu desenvolvimento atual

De acordo com Ferreira (2012) a ideia de número foi o alavanque para o quadro atual da Matemática, a ideia intuitiva de contagem proporcionou um grande desenvolvimento para o entendimento da Matemática, sabendo que a “Ciência dos números” representa desde a antiguidade a atividade humana.

Sabemos que vários povos contribuíram para o progresso da Matemática, como os gregos antigos, os egípcios, os romanos, e etc. Atemo-nos aos marcos importante do desenvolvimento da Matemática, durante a construção do zero pelos Hindus, nesse quesito o desenvolvimento do sistema de numeração tomou-se pelo progresso, todavia, algumas civilizações ignoraram por milênios o zero atrasando algumas descobertas feitas em tempos seguintes.

O marco inicial dos números naturais esteve no século VI a.C na escola pitagórica, na seguinte passagem matemática “Dados dois segmentos de retas quaisquer, AB e CD seria sempre possível encontrar um terceiro segmento EF contido um número inteiro de vezes em

CD” (FERREIRA, 2011, p.3). Tal situação requer dizer que o segmento EF é um submúltiplo comum de AB e CD ou que AB e CD são comensuráveis. Com isso, percebemos a iniciação dos conjuntos numéricos entre os números naturais, conforme será apresentado na subseção posterior.

4.1.1 Campo Epistêmico em $\mathbb{N}$

Falando historicamente os números Naturais serviam apenas para contar, era concebido como uma “operação de correspondência” contar seria corresponder entre um para um, fazendo uma sucessão de números. Logo, passamos do 1 para o 2, do 2 para o 3, e assim sucessivamente. Apesar do conjunto dos naturais serem intuitivamente apresentados como $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ não são tão simplórios, e fez-se necessário formalizar sua definição.

Assim, temos que no final do século XIX os matemáticos George Cantor (1845-1916), Richard Dedekind (1831-1916) e Giuseppe Peano (1858-1932) coroaram a Matemática com seus trabalhos, influenciados pela era do Cálculo diferencial e integral de Isaac Newton (1645-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716).

Nos próximos parágrafos apresentamos de forma rigorosa a Matemática discutida nos séculos XIX e XX nos conjuntos numéricos entre os naturais, inteiros, racionais e reais de forma histórica e linear.

Para tratar dos conjuntos numéricos a relação de equivalência é fundamental, relacionado aos conjuntos, então, temos que: Se A é subconjunto de $\mathbb{R}_+$ A_+ denota o conjunto dos elementos não negativos de A e A_- dos elementos não positivos. Se B é um conjunto de números que contém o zero, então B^* denota $B \setminus \{0\}$.

Definição 1.1.1. Dado um conjunto A qualquer, o conjunto das partes de A, ou conjunto potência de A, denotado por $P(A)$, é o conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de A. Seguem alguns exemplos:

1. Se $A = \{a, b\}$, então $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}$;
2. Se $A = \{1, 2, 3\}$, então $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$;
3. Se $A = \emptyset$, então $P(A) = \{\emptyset\}$, pois o $\emptyset$ é o único subconjunto de A;
4. Se $A = P(\{1\})$, então $A = \{\emptyset, \{1\}\}$, logo, $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, A\}$.

Definição 1.1.2. Seja A um conjunto não vazio com $a, b \in A$. Definimos o par ordenado (a, b) como sendo o conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Notação: $(a, b) \in P(A)$. No Ensino Fundamental é definido um par ordenado como um par de objetos, diante disso, a ordem passa a ter uma maior significância. Assim, a Definição 1.1.2. formaliza matematicamente esta definição superficial.

Vamos apresentar um Teorema que mostra como entendemos intuitivamente a ideia contida no parágrafo anterior, do que se entende como par ordenado, porém, estará a rigor da Matemática.

Teorema 1.1.1. Seja A um conjunto onde $a, b, c, d \in A$. Temos que:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

Demonstração:

Se $a = c$ e $b = d$, temos então que $(a, b) = (c, d)$. Portanto, agora, $(a, b) = (c, d)$, isto é, $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Apresentamos os casos I e II:

I) $a = b$.

Nesta situação, $(a, b) = (a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$. Dessa forma, $\{\{a\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$, ou seja, $\{c\} = \{a\}$ e $\{c, d\} = \{a\}$. Assim, $c = a$ e $d = a$. Como $a = b$, obtemos $a = c = b = d$.

II) $a \neq b$.

Por hipótese $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Se $\{a, b\} = \{c\}$, então, $a = b = c$, contradizendo a hipótese $a \neq b$. Portanto, $\{a, b\} = \{c, d\}$, o que acarreta $c = d$. Contudo, concluímos que $\{a\}$ não pode ser igual a $\{c, d\}$, logo, $\{a\} = \{c\}$, ou seja, $a = c$. Por fim, $\{a, b\} = \{c, d\}$, $a = b$, $c = d$, de onde segue que $b = d$.

Seguimos apresentando na definição a seguir o produto cartesiano de dois pares ordenados por elementos. Assim, introduzimos a definição abaixo juntamente com dois exemplos para um melhor entendimento ao leitor:

Definição 1.1.3. Dado um conjunto A , o produto cartesiano de A por A , denotado por $A \times A$, é o conjunto de todos os pares ordenados compostos por elementos de A , isto é, $A \times A = \{(x, y) \mid x, y \in A\}$.

Exemplo 1.1.1

1) Seja $A = \{x\}$ e $B = \{y\}$. Temos que $A \times B = \{(x, y)\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ e $B \times A = \{(y, x)\} = \{\{y\}, \{y, x\}\}$. Para que $A \times B = B \times A$, precisaríamos que $\{x\} = \{y\}$ ou $\{x\} = \{x, y\}$, ou seja, $x = y$. Como x e y são quaisquer, não podemos dizer que $A \times B = B \times A$.

2) Sejam $A = \emptyset$ e B um conjunto qualquer. Suponhamos que exista $(x, y) \in A \times B$. Por definição de par ordenado, $x \in A$ e $y \in B$, o que é uma contradição, pois, por hipótese, $A = \emptyset$. Assim, não existe (x, y) pertencente a $A \times B$.

Sabemos que o conceito intuitivo de conjuntos numéricos está acerca das operações aritméticas, todavia, apenas duas operações são levadas em consideração, neste sentido a soma e o produto equivalem ao conceito de corpo para satisfazer o conjunto dos números naturais. Com isso, colocamos duas definições, uma que garante a relação binária entre um

conjunto, e a outra definição está na garantia que uma relação binária necessita atender algumas propriedades. Portanto, temos que:

Definição 1.1.4. Uma relação binária R num conjunto A é qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times A$, isto é, $R \subset A \times A$.

Definição 1.1.5. Seja dado um conjunto A e uma relação R sobre ele. Diz-se que R é uma relação de equivalência se possuir as seguintes propriedades:

1. Reflexiva: aRa , para todo $a \in A$;
2. Simétrica: se $a, b \in A$, e aRb , então bRa ;
3. Transitiva: para $a, b, c \in A$, se aRb e bRc , então aRc .

Abordamos de modo inicial o conceito de relação de equivalência, um conceito bastante importante para introduzimos definições sobre: par ordenado, operação, produto cartesiano e o conceito de relação. Trazemos agora a abordagem inicial do conjunto dos naturais, iniciamos com a formalização dos naturais através dos axiomas de Peano, seguindo a construção desenvolvida no século XIX sendo adaptada para o modelo de ensino atual.

Axioma 1.1.8. Existe um conjunto $\mathbb{N}$ e uma função $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ verificando:

A1) s é injetora;

A2) Existe um elemento em $\mathbb{N}$, que denotaremos por 0 , e chamaremos de zero, que não está na imagem de s , isto é, 0 não pertence a $\text{Im}(s)$;

A3) Se um subconjunto X de $\mathbb{N}$ satisfizer (1) e (2) logo abaixo, teremos então $X = \mathbb{N}$.

1) $0 \in X$;

2) Se $k \in X$, então $s(k) \in X$.

Então, a função s é chamada função sucessora, de modo que, se $x \in A$, então $s(x)$ é chamado sucessor de x . Os axiomas exibidos anteriormente nos dizem que cada x de A possui sucessor diferente e expressam, ainda, o fato de que 0 não é sucessor de nenhum elemento de A . Temos garantido que tal A é diferente de vazio, pelo segundo axioma de Peano. Como 0 não pertence $\text{Im}(s)$ e $s(0) \in \text{Im}(s)$, concluímos que $0 \neq s(0)$, logo A possui pelo menos dois elementos: 0 e $s(0)$. De forma semelhante podemos analisar que $s(s(0))$ é diferente de 0 , pois 0 não pertence $\text{Im}(s)$, e difere de $s(0)$, pois s é injetora, ou seja, $s(0) \neq s(s(0)) = s(0)$. Assim, A possui pelo menos três elementos: 0 , $s(0)$ e $s(s(0))$.

Tomando estes sucessores de forma semelhante, percebemos que cada elemento novo é diferente dos anteriores mencionados. Isto será provado posteriormente nos parágrafos seguintes. Assim, podemos considerar A como um conjunto infinito, que vamos deunir formalmente a seguir.

Definição 1.1.6. Um conjunto X diz-se infinito quando existe uma função injetora $f: \mathbb{N} \rightarrow X$. Um conjunto é dito finito quando não é infinito. Assim, podemos afirmar que um conjunto é dito infinito se tiver um subconjunto Y em bijeção com o conjunto dos naturais, que também equivale dizer que Y é equipotente a $\mathbb{N}$.

Existe também outra definição para conjunto infinito que é bem semelhante a que vimos no parágrafo anterior, definida por George Ludwig Philipp Cantor (1845- 1918) passando a definir um conjunto infinito quando existir uma bijeção entre ele e um subconjunto próprio dele. O terceiro axioma de Peano demonstra essa veracidade, sendo conhecido como “Princípio de Indução Finita” bastante utilizado para demonstração de propriedades no que se concerne ao conjunto dos números naturais. Continuando sobre os axiomas de Peano, notamos que o segundo remete que $0 \notin \text{Im}(s)$. O teorema seguinte nos informa quem é $\text{Im}(s)$.

Teorema 1.1.2. Se $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é a função sucessor, então, tem-se:

1. $s(n) \neq n$, para todo $n \in A$, ou seja, nenhum número de A é sucessor de si mesmo;
2. $\text{Im}(s) = A \setminus \{0\}$, isto é, 0 é o único elemento de A que não é sucessor de nenhum número natural.

Demonstração:

1) Consideremos um subconjunto B de A , constituído dos $n \in A$ tais que $s(n) \neq n$, isto é $B = \{n \in A \mid s(n) \neq n\}$. Vamos, demonstrar através do princípio de indução finita que $B = A$, isto é, $s(n) \neq n$, para todo $n \in A$ (a) Pelo axioma 2 de Peano, temos que $0 \notin \text{Im}(s)$, sendo assim, $0 \neq s(0)$, e, portanto, $0 \in B$; (b) Seja $k \in A$, ou seja, $k \neq s(k)$. Como, pelo axioma 1, s é injetora, obtemos que $s(k) \neq s(s(k))$ e, portanto, $s(k) \in B$. Assim, pelo princípio de indução finita, $B = A$.

2) Novamente usaremos o Princípio da indução no conjunto.

$A = \{0\} \cup \text{Im}(s)$: ($\subset \mathbb{N}$) Claramente, $0 \in A$; (b) Seja $k \in A$. Com isso $s(k) \in \text{Im}(s) \subset B$, daí, $s(k) \in B$. Portanto, $A = \mathbb{N}$. Temos que $0 \notin \text{Im}(s)$, concluímos que $\text{Im}(s) = A \setminus \{0\}$. Todo elemento de $A \setminus \{0\}$ é sucessor de um único elemento de A , que se chama seu antecessor.

Apresentamos as definições de infinitude e finitude no conjunto dos naturais, temos que quaisquer conjuntos $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})$ são tidos como infinitos. Prosseguimos adiante, apresentando as operações entre os naturais, ou seja, somente a adição e multiplicação formaliza esse conceito. Iniciamos com a operação de adição na seguinte definição:

Definição 1.1.7. A adição de dois números naturais m e n , é designada por $m+n$ e definida da seguinte maneira:

$$m+n = m;$$

$$m + s(n) = s(m+n).$$

Assim, a definição 1.1.10 nos assegura que a soma de um número arbitrário m com 0: $m + 0 = m$. Como também, ela nos assegura que $m + s(0) = s(m+0) = s(m)$.

Desse modo, abordaremos a próxima definição que afirma que os números naturais possuem um sucessor, de maneira particular essa definição é bastante familiarizada, pois, nas séries iniciais é abordado o conjunto $\mathbb{N}$ a partir dessa natureza.

Definição 1.1.8. O número natural 1 é sucessor de 0, temos que, $1 = s(0)$.

Proposição 1.1.1. Para todo $m \in A$, tem-se $s(m) = m + 1$ e $s(m) = 1 + m$. Portanto $m + 1 = 1 + m$.

Demonstramos as duas igualdades abaixo seguindo a proposição 1.1.12:

- 1) Temos que $m + 1 = m + s(0) = s(m + 0) = s(m)$, ou seja, $m + 1 = s(m)$;
- 2) Consideremos agora o conjunto $B = \{m \in A \mid s(m) = 1 + m\}$ e provemos por indução que $B = A$: 1. Claramente $1 + 0 = 1 = s(0)$, sendo assim, $s(0) = 1 + 0$ e, portanto, $0 \in B$. 2. Seja, agora, $m \in B$, isto é, $s(m) = 1 + m$. Daí $s(1+m) = s(s(m))$ e como $s(1+m) = 1 + s(m)$, obtemos que $s(s(m)) = 1 + s(m)$ e, portanto, $s(m) \in B$. Sendo assim, $B = A$.

Portanto, já obtivemos as notações 0 e $1 = s(0)$. Continuamos em: $s(1) = 2$ (dois), $s(2) = 3$ (três), $s(3) = 4$ (quatro), $s(4) = 5$ (cinco) e etc. Percebemos que esta é a notação indo-arábica de base dez para o conjunto $\mathbb{N}$. De tal modo que $\mathbb{N}$ contenha o seguinte conjunto: $\{0, s(0), s(s(0)), s(s(s(0))), \dots\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, o teorema seguinte apresenta essa ideia.

Teorema 1.1.3. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Demonstração:

Seja S o conjunto $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Informamos que S foi construído como um subconjunto de $\mathbb{N}$ que contém o 0 e também sucessor de qualquer elemento que nele esteja contido. O Princípio da Indução afirma isso, então, $S = \mathbb{N}$.

As propriedades da adição que costumamos ver no ensino básico, tidas como intuitivas, são demonstradas no próximo Teorema, estando de acordo com as propriedades da Matemática rigorosa.

Teorema 1.1.4. Se m , n e p são números naturais arbitrários, então as seguintes afirmações são verdadeiras:

1. Propriedade associativa da adição: $m + (n + p) = (m + n) + p$.
2. Propriedade comutativa da adição: $n + m = m + n$.
3. Lei do cancelamento da adição: $m + p = n + p \Rightarrow m = n$.

Demonstração:

1. Para esta prova, consideremos o conjunto $A_{(m,n)} = \{p \in \mathbb{N} \mid m + (n + p) = (m + n) + p\}$ com m e n naturais fixados arbitrariamente. Aplicaremos indução sobre este conjunto. (a) Temos que $m + (n + 0) = m + n = (m + n) + 0$, logo, $0 \in A_{(m,n)}$; (b) Suponhamos que $k \in A_{(m,n)}$, isto é, $m + (n + k) = (m + n) + k$. Assim, provaremos que $s(k) \in A_{(m,n)}$. Portanto, $(m + n) + s(k) = s((m + n) + k)$, e por hipótese, $(m + n) + s(k) = s(m + (n + k))$, daí, $(m + n) + s(k) = m + s(n + k)$, o que requer dizer que, $(m + n) + s(k) = m + (n + s(k))$, logo, $s(k) \in A_{(m,n)}$.
2. Vamos considerar o conjunto $A_n = \{m \in \mathbb{N} \mid n + m = m + n\}$, com n fixado e provaremos que $\mathbb{N} = A_n$. (a) Temos, pela proposição 2.2.10, que $n + 0 = 0 + n$, portanto, $0 \in A_n$; (b) Suponhamos que $k \in A_n$, ou seja, $n + k = k + n$, e provemos que $s(k) \in A_n$. De fato, $n + s(k) = s(n + k) = s(k + n) = (k + n) + 1$, daí, pelo primeiro item deste teorema, $n + s(k) = k + (n + 1)$, e pela proposição 2.2.4 obtemos $n + s(k) = k + (1 + n) = (k + 1) + n$ e assim, $n + s(k) = s(k) + n$, o que significa que $s(k) \in A_n$. Concluimos assim, por indução, que $A_n = \mathbb{N}$.
3. Consideremos o conjunto $A_{(m,n)} = \{p \in \mathbb{N} \mid m + p = n + p \Rightarrow m = n\}$. Provaremos que $A_{(m,n)} = \mathbb{N}$. (a) Sabe-se que $0 \in A_{(m,n)}$, pois $m + 0 = n + 0 \Rightarrow m = n$; (b) Suponhamos $k \in A_{(m,n)}$, isto é, $m + k = n + k \Rightarrow m = n$. Temos que $m + s(k) = n + s(k) \Rightarrow s(m + k) = s(n + k) \Rightarrow (m + k) + 1 = (n + k) + 1 \Rightarrow m + (1 + k) = n + (1 + k)$ pelos itens anteriores $\Rightarrow (m + 1) + k = (n + 1) + k \Rightarrow s(m) + k = s(n) + k \Rightarrow s(m) = s(n)$ por hipótese $\Rightarrow m + 1 = n + 1 \Rightarrow m = n$. Logo, $m + s(k) = n + s(k) \Rightarrow m = n$, ou seja, $s(k) \in A_{(m,n)}$. Damos como conclusão que $A_{(m,n)} = \mathbb{N}$.

No Teorema anterior apresentamos a relevância da Indução Finita perante as demonstrações, na operação da adição, dando prosseguimento a construção do conjunto $\mathbb{N}$, mostramos nos parágrafos posteriores a multiplicação de números naturais atendendo as definições e teoremas.

Definição 1.1.9. A multiplicação de dois números naturais, m e n , é designada por $m \cdot n$ e definida desse modo:

$$m \cdot 0 = 0;$$

$$m \cdot (n+1) = m \cdot n + m$$

Assim, ajustando a modo habitual, temos que: $m \cdot n = mn$.

Observemos que na definição da multiplicação no conjunto $\mathbb{N}$ estão cernes da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, assim como na adição dos naturais na multiplicação dos naturais atendem a algumas propriedades que exibiremos no Teorema seguinte.

Teorema 1.1.5. Para m, n e p naturais arbitrários, valem as proposições abaixo:

- 1) $mn \in \mathbb{N}$, isto é, a multiplicação de fato é uma operação em $\mathbb{N}$;

- 2) existência do elemento neutro multiplicativo: $1 \cdot n = n$, $1 = n$;
- 3) distributividade: $m(n+p) = mn + mp$ e $(m+n)p = mp + np$;
- 4) associatividade: $m(np) = (mn)p$;
- 5) $mn = 0 \rightarrow m = 0$ ou $n = 0$;
- 6) comutatividade: $nm = mn$.

De modo semelhante à adição, na multiplicação usa-se o Princípio da Indução para demonstrar todas as proposições acima, demonstraremos abaixo como o terceiro axioma de Peano é usado na multiplicação.

Demonstração:

1) Consideremos o conjunto $S_m = \{n \in \mathbb{N} \mid mn \text{ está definido}\}$ para $m \in \mathbb{N}$ fixado arbitrariamente. (a) $m \cdot 0 = 0$ está definido, logo, $0 \in S_m$; (b) Suponhamos $k \in \mathbb{N}$ e provemos que $s(k) \in \mathbb{N}$. De fato, $m \cdot s(k) = m(k+1) = mk + m$. Por hipótese de indução mk está definido e, como visto na seção anterior, a soma de quaisquer dois naturais também. Logo, $m \cdot s(k) = mk + m$ está definido, o que significa que $s(k) \in S_m$. Sendo assim, por indução $S_m = \mathbb{N}$. Como m foi fixado arbitrariamente, a igualdade vale para qualquer $m \in \mathbb{N}$.

2) Temos que $n \cdot 1 = n(0+1)$, e por definição $n(0+1) = n \cdot 0 + n = n$, logo, $n \cdot 1 = n$. Agora, para mostrar que $1 \cdot n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, consideremos o conjunto $S = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \cdot n = n\}$, e mostremos que $\mathbb{N} = S$.

(a) Temos que $1 \cdot 0 = 0$, por definição, logo, $0 \in S$; (b) Suponhamos que $k \in S$, ou seja, $1 \cdot k = k$. Sabemos que $1 \cdot (k+1) = 1 \cdot k + 1$, daí, por hipótese de indução, $1 \cdot (k+1) = k+1$. Portanto, $k+1 \in S$. Sendo assim, por indução $S = \mathbb{N}$.

3) Sejam m, n naturais fixados arbitrariamente e usemos indução sobre p . Seja $A_{m,n} = \{p \in \mathbb{N} \mid m(n+p) = mn + mp\}$. (a) De fato, $0 \in A_{m,n}$ pois $m(n+0) = mn$ e $mn + m \cdot 0 = mn$, ou seja, $m(n+0) = mn + m \cdot 0$; (b) Mostremos agora que, se $k \in A_{m,n}$, isto é, $m(n+k) = mn + mk$, então $(k+1) \in A_{m,n}$. Com efeito, $m(n + (k+1)) = m((n+k) + 1) = m(n+k) + m = (mn + mk) + m = mn + (mk + m) = mn + (m(k+1))$. Todas estas igualdades estão justificadas e embasadas nas propriedades estabelecidas anteriormente. Portanto, $(k+1) \in A_{m,n}$. Conclui-se por indução que $A_{m,n} = \mathbb{N}$.

4) Novamente, consideremos $m, n \in \mathbb{N}$ fixados arbitrariamente e apliquemos indução sobre p . Seja $S_{m,n} = \{p \in \mathbb{N} \mid m(np) = (mn)p\}$: (a) $m(n \cdot 0) = m \cdot 0 = 0$ e $(mn) \cdot 0 = 0$, logo, $m(n \cdot 0) = (mn) \cdot 0$. Assim, $0 \in S_{m,n}$; (b) Suponhamos que $k \in S_{m,n}$, isto é, $m(nk) = (mn)k$. Consideremos as seguintes igualdades: $m(n(k+1)) = m(nk + n) = m(nk) + mn = (mn)k + mn = (mn)(k+1)$. Dessa forma, $k+1 \in S_{m,n}$. Logo, $S_{m,n} = \mathbb{N}$.

5) Seja $mn = 0$. Suponhamos $n = 0$. Então $n = n_1 + 1$ para algum n_1 em $\mathbb{N}$. Assim, $mn = 0 \Rightarrow m(n_1 + 1) = 0 \Rightarrow mn_1 + m = 0$. De forma semelhante, supomos que $m = 0$, concluímos que $n = 0$.

6) Suponhamos que $S_m = \{n \in \mathbb{N} \mid mn = nm\}$, para um $m \in \mathbb{N}$ fixados. Mostraremos que $S_m = \mathbb{N}$:

(a) Por definição, $m \cdot 0 = 0$, isto é, $0 \in S_m$;

(b) Suponhamos $k \in S_m$, ou seja, $mk = km$. Temos que $m(k + 1) = mk + m = km + m$, por hipótese de indução, e ainda, $km + m = (k + 1)m$. Sendo assim, $m(k + 1) = (k + 1)m$, que significa $k + 1 \in S_m$.

Temos que por indução, $S_m = \mathbb{N}$. Como m é arbitrário, a igualdade equivale para todo m no conjunto $\mathbb{N}$.

Para finalizar o conjunto $\mathbb{N}$, temos que a relação de ordem se mostra importante, pois, trazemos a ideia de um número ser menor que outro desde os princípios do ensino fundamental, ou seja, a relação de ordem entre dizer que 0 é menor que 1 está formalizada no teorema seguinte.

Teorema 1.1.6. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Então $a < b$ se, e somente se, $a + 1 \leq b$.

Demonstração:

Trataremos a ida pelo caso (i) e a volta da demonstração pelo caso (ii),

(i) $a < b \Rightarrow b = a + p$, para algum $p \in \mathbb{N}$, $p \neq 0$.

Então: $p = s(q) = q + 1$, para um certo $q \in \mathbb{N}$, logo, $b = a + p = a + (q + 1) = (a + 1) + q \Rightarrow b \geq a + 1$.

(ii) $a + 1 \leq b \Rightarrow b = (a + 1) + p$, $p \in \mathbb{N} \Rightarrow b = a + (p + 1) \Rightarrow b = a + s(p)$. Sabemos que $s(p) \in \mathbb{N}^*$, logo, $b > a$, como procuramos. Concluímos da relação de ordem em $\mathbb{N}$ que, se $a \in \mathbb{N}$, então, $a < s(a)$, pois $s(a) = a + 1$. Dessa forma $0 < 1 < 2 < 3 < \dots$. Também concluímos que não existem naturais entre a e $s(a)$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

E para finalizar a construção axiomática do conjunto $\mathbb{N}$, apresentaremos o Teorema Princípio da Boa Ordem, ou, simplesmente PBO, sendo bastante conhecido desde o Ensino Fundamental. Neste teorema aborda que todo subconjunto não vazio em $\mathbb{N}$, possui um menor elemento.

Teorema 1.1.7. (PBO) Todo subconjunto não vazio de números naturais possui um menor elemento.

Demonstração:

Seja S um tal subconjunto de $\mathbb{N}$ e consideremos o conjunto $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x, \forall x \in S\}$. Claro que $0 \in M$. Como $S \neq \emptyset$, tomemos $s \in S$. Então $s + 1 \notin M$, pois $s + 1$ não é menor ou igual a s . Logo, $M \neq \mathbb{N}$. Como $0 \in M$ e $\mathbb{N} \neq M$, deve existir $m \in M$ tal que $m + 1 \notin M$, caso contrário, pelo princípio de indução, $M = \mathbb{N}$. Afirmamos que este k é o menor elemento de S , ou seja, $k = \min S$. Como $k \in M$, então $k \leq x, \forall x \in S$. Só falta provar que $k \in S$. Suponhamos que $k \notin S$. Então $k < x, \forall x \in S$. Pelo teorema que valida o $k + 1 \leq x, \forall x \in S$, implicando que $k + 1 \in M$, contradizendo a escolha de k . Portanto $k \in S$.

Finalizamos a construção do conjunto $\mathbb{N}$, seguindo os teoremas e definições acerca do conjunto, abordamos os axiomas de Peano, as operações do conjunto $\mathbb{N}$ no que se concerne a adição e multiplicação, a relação de ordem do conjunto e por último o PBO, enfatizamos o quão importante é o terceiro teorema de Peano, conhecido na formação dos professores como Princípio da Boa Ordem na construção do conjunto $\mathbb{N}$.

4.1.2 Campo Epistêmico em $\mathbb{Z}$

Dando prosseguimento na construção dos conjuntos numéricos, abordaremos agora o conjunto dos Inteiros, ou, somente $\mathbb{Z}$. A construção dos Inteiros se dá pela relação com o conjunto $\mathbb{N}$. Como demonstramos o conjunto $\mathbb{N}$ é definido por duas operações binárias, e assim no Ensino Fundamental é demonstrado os números negativos e esses é a essência dos inteiros, portanto, suas propriedades implicam na subtração, como: $3-5$, $2-9$ etc. O objetivo é construir a partir dos números negativos pela estrutura aritmética de $\mathbb{N}$ que apresentamos em parágrafos anteriores, ou seja, pela noção básica de Teoria dos Conjuntos e de relações de equivalência.

De início apresentaremos o Teorema 4.2.1 nele está definido como o conjunto $\mathbb{Z}$ é construído por classes de equivalência do conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, essa relação define $\mathbb{Z}$ falando matematicamente.

Teorema 1.1.8. A relação $\sim$ em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida por $(a,b) \sim (c,d)$ quando $a + b = b + c$ é de equivalência.

Esse teorema atende a algumas definições, tais como:

1. Reflexiva: Se $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, então $a + b = b + a$, por herança da comutativa em $\mathbb{N}$, logo, $(a, b) \sim (a, b)$.
2. Simétrica: Se $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $(a, b) \sim (c, d)$, então, $a + d = b + c$, e disso, $c + b = d + a$, que significa, $(c, d) \sim (a, b)$.

3. Transitiva: Se $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$, temos que, $a+d = b+c$ e $c+f = d+e$. Assim temos $a+d+e = b+c+e$ e $a+c+f = a+d+e$, daí, $b + c + e = a + c + f \Rightarrow b + e = a + f \Rightarrow a + f = b + e$. Logo, $(a, b) \sim (e, f)$.

Colocando de forma intuitiva, vamos considerar a subtração dos números inteiros, assim: $a + d = b + c$ equivale a: $a - b = c - d$, portanto, dois pares ordenados são equivalentes, segundo a definição posta, notamos que a diferença entre as coordenadas, na mesma ordem coincidem. Esta ordem foi encontrada pelos matemáticos do século XIX para construir o conjunto $\mathbb{Z}$, sem por a subtração, mas levando a sua essência, partindo do conjunto dos naturais e suas propriedades de operações. Denotamos por (a,b) a classe de equivalência do par ordenado (a,b) e pela relação $\sim$, assim, $(a,b) = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x, y) \sim (a, b)\}$.

Definição 1.1.10. O conjunto quociente $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$ constituído pelas classes de equivalência (a, b) será denota por $\mathbb{Z}$ e chamado de conjunto dos números inteiros. Assim, $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim = \{(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$.

A operação $(+)$ nos inteiros denominamos por adição, voltamos à nossa intuição, se (a,b) expressa a intuição da diferença $(a-b)$ e (c,d) expressa $(c-d)$, a matemática elementar nos dá $(a-b) + (c-d) = (a+c) - (b+d)$. Esta última expressão se traduz em $(a + c, b + d)$ é a motivação para a definição formal de $(a, b) + (c, d)$, que daremos a seguir.

Definição 1.1.11 Sejam $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}$. A soma $(a, b) + (c, d)$ é dada por $(a + c, b + d)$. Vamos mostrar a seguir que esta operação de adição está bem definida.

Para definir as classes de equivalência, é necessário verificarmos algumas definições, que independem das classes. Por exemplo: $(3,5) + (4,1) = (7,6)$. Todavia, $(2,4) = (3,5)$ e $(3,0) = (4,1)$, teríamos $(2,4) + (3,0) = (5,4)$ que, felizmente, é igual $(7,6)$. Com isso, percebemos que a definição 4.2.3 não depende das classes de equivalência, chegando a conclusão de que a adição está bem *definida*.

Teorema 1.1.9. Se $(a, b) = (a', b')$ e $(c, d) = (c', d')$, então, $(a, b) + (c, d) = (a', b') + (c', d')$, isto é, a adição de números inteiros está bem definida.

Demonstração: Como $(a, b) = (a', b')$, sabemos que, $(a, b) \sim (a', b')$, ou seja, $a + b' = b + a'$.

De modo semelhante, $(c,d) = (c',d')$, então $(c,d) \sim (c', d')$, isto é, $c+d' = d+c'$.

Temos que:

$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$ e $(a',b') + (c', d') = (a'+c', b'+c')$, com isso é determinado que os dois segundos membros coincidem entre si, de onde $(a+c) + (b'+d') = (a+b') + (c+d') = (b+a') + (d+c') = (b+d) + (a'+c')$, como procuramos. Incluiremos agora a parte na adição a associatividade $(0,0)$, no próximo teorema.

Teorema 1.1.10. A adição em $\mathbb{Z}$ é comutativa, associativa e tem $(0, 0)$ como elemento neutro e a lei do cancelamento.

Demonstração:

1. Comutativa: Mostramos que, dados (a, b) e (c, d) em $\mathbb{Z}$, temos $(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b)$. De fato, $(a + b) + (c + d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) + (a, b)$.
2. Associativa: Demonstramos que dados (a, b) , (c, d) e (e, f) em $\mathbb{Z}$, temos $(a, b) + ((c, d) + (e, f)) = ((a, b) + (c, d)) + (e, f)$. Assim, $(a, b) + ((c, d) + (e, f)) = (a, b) + ((c + e, d + f)) = (a + (c + e), b + (d + f)) = ((a + c) + e, (b + d) + f) = (a + c, b + d) + (e, f) = ((a, b) + (c, d)) + (e, f)$.
3. Elemento Neutro: Dado (a, b) e $(0, 0)$ em $\mathbb{Z}$. $(a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (0 + a, 0 + b) = (0, 0) + (a, b) = (a, b)$.
4. Lei do cancelamento da Adição: Dados $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ e $\alpha + \beta = \gamma + \beta$, então $\alpha = \gamma$. Assim, seja $\alpha = (a, b)$, $\beta = (c, d)$ e $\gamma = (e, f)$. Assim, $(a, b) + (c, d) = (e, f) + (c, d) \Rightarrow (a + c, b + d) = (e + c, f + d) \Rightarrow (a + c) + (f + d) = (b + d) + (e + c) \Rightarrow a + f = b + e \Rightarrow (a, b) = (e, f)$.

Apresentamos na próxima definição que prova a existência do elemento oposto, provando assim, que o elemento inverso da adição ou multiplicação na propriedade da associatividade é única. Destacamos que para possuímos o inverso aditivo, precisamos ter o elemento neutro.

Definição 1.1.12. Dado $\alpha \in \mathbb{Z}$, o único $\beta \in \mathbb{Z}$, tal que, $\alpha + \beta = (0, 0)$ chama-se simétrico de α (ou oposto de α , ou inverso aditivo de α). Sua unicidade permite a nomenclatura “menos alfa”, ou simbolicamente por $-\alpha$. De tal maneira que, $\alpha + (-\alpha) = (0, 0)$ e, como visto e provado pelo teorema 4.2.5 então, $-\alpha = (b, a)$.

A existência e unicidade de oposto de um número inteiro permite que definamos uma terceira operação em $\mathbb{Z}$, denominada subtração, exibiremos isso na definição seguinte.

Definição 1.1.13. A *Subtração* (ou $-$) é a operação definida da seguinte forma: se $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, então: $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$. Assim, a subtração $\alpha - \beta$ nada mais é do que a soma de α com simétrico de β .

Proposição 1.1.2. Para $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$, vale:

- i. $-(-\alpha) = \alpha$;
- ii. $-\alpha + \beta = \beta - \alpha$;
- iii. $\alpha - (-\beta) = \alpha + \beta$;
- iv. $-\alpha - \beta = -(\alpha + \beta)$;
- v. $\alpha - (\beta + \gamma) = \alpha - \beta - \gamma$;

Demonstração:

- i) Se $\alpha = (a, b)$, então, $-\alpha = (b, a)$, logo, $-(-\alpha) = -(b, a) = (a, b) = \alpha$.

- ii) Se $\alpha = (a, b)$ e $\beta = (c, d)$. Nitidamente, $-\alpha = (b, a)$. Temos: $-\alpha + \beta = (b, a) + (c, d) = (b + c, a + d) = (c + b, d + a) = (c, d) + (b, a) = \beta - \alpha$.
- iii) Seja $\alpha = (a, b)$ e $\beta = (c, d)$, portanto, $-\alpha = (b, a)$ e $-\beta = (d, c)$. $\alpha - (-\beta) = (a, b) - (d, c) = (a, b) + (c, d) = \alpha + \beta$.
- iv) Se $\alpha = (a, b)$ e $\beta = (c, d)$, temos, $-\alpha = (b, a)$ e $-\beta = (d, c)$, e assim: $-\alpha - \beta = (b, a) - (c, d) = (b, a) + (d, c) = (b + d, a + c) = -(a + c, b + d) = -((a, b) + (c, d)) = -(\alpha + \beta)$.
- v) Se $\alpha = (a, b)$, $\beta = (c, d)$ e $\gamma = (e, f)$, então, $-\alpha = (b, a)$, $-\beta = (d, c)$ e $-\gamma = (f, e)$ e assim: $\alpha - (\beta + \gamma) = (a, b) - ((c, d) + (e, f)) = (a, b) - (c + e, d + f) = (a, b) + (d + f, c + e) = (a, b) + (d, c) + (f, e) = \alpha - \beta - \gamma$.

De modo análogo, temos que na operação $\mathbb{Z}$ denotamos por multiplicação, ou simbolicamente por $(.)$ dessa maneira definimos a operação dessa maneira:

Definição 1.1.14. Dados (a, b) e (c, d) em $\mathbb{Z}$, definimos o produto $(a, b) \cdot (c, d)$ como sendo inteiro $(ac + bd + ad + bc)$.

Teorema 1.1.11. A multiplicação em $\mathbb{Z}$ está bem definida, isto é, se $(a, b) = (a', b')$ e $(c, d) = (c', d')$, então, $(a, b) \cdot (c, d) = (a', b') \cdot (c', d')$.

Demonstração:

Seja $(a, b) = (a', b')$, isto é, $a + b' = b + a'$, que nos fornece: $ca + cb' = cb + ca'$ e $da + b'$ (i) e (ii) $d = bd + a'$ d. Somando as equações (i) e (ii) obtemos $ac + bd + a' d + b' c = ad + bc + a' c + b' d$ $(ac + bd, ad + bc) = (a'c + b'd, a'd + b'c)$ $(a, b) \cdot (c, d) = (a', b') \cdot (c, d)$. Do mesmo modo, $(c, d) = (c', d') \Rightarrow c + d' = d + c'$, de onde obtemos: $a'c + a' d' = a' d + a' c'$ (iii) e $b' c + b' d' = b' d + b' c'$ (iv). Novamente somando as equações (iii) e (iv) obtemos $a' c + b' d + a' d' + b' c' = a' d + b' c + a' c' + b' d'$ $(a'c + b'd, a'd + b'c) = (a'c' + b'd', a'd' + b'c')$ $(a', b') \cdot (c, d) = (a', b') \cdot (c', d')$. (vi)

Dessa maneira, observando (iii) e (vi), obtemos que $(a, b) \cdot (c, d) = (a', b') \cdot (c', d')$, como queríamos.

Portanto, como no conjunto $\mathbb{N}$, o conjunto $\mathbb{Z}$ também abarca a relação de ordem, assim, a comparação entre os elementos por meio da relação de ordem. Com definições análogas as definições da adição e da multiplicação. Temos que a definição seguinte garante isso.

Definição 1.1.15. Dados os inteiros (a, b) e (c, d) , escrevemos $(a, b) \leq (c, d)$ é menor do que ou igual a (c, d) , quando $a + d \leq b + c$.

Admitimos que a simbologia: $\geq, >, <$ é de modo análogo à construção de relação de ordem no conjunto $\mathbb{N}$. Temos que no caso da adição e também da multiplicação a relação deve estar bem definida. O Teorema o seguinte mostra que as simbologias $(\geq, >, <)$ são semelhantes,

porém ambos os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ não são semelhantes, mas sim implica que em $\mathbb{Z}$ se propugna em uma extensão da ordem em $\mathbb{N}$.

Teorema 1.1.12. A relação $\leq$ definida acima é uma relação de ordem em $\mathbb{Z}$, ou seja, é reflexiva, antissimétrica e transitiva. Além disso, essa relação é compatível com as operações em $\mathbb{Z}$, ou seja, para $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$.

$$\text{i) } \alpha \leq \beta \rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma.$$

$$\text{ii) } \alpha \leq \beta \text{ e } \gamma \geq \overline{(0, 0)} \rightarrow \alpha\gamma \leq \beta\gamma.$$

iii) (Lei de tricotomia): Apenas uma das situações seguintes ocorre:

$$\alpha = \overline{(0, 0)} \text{ ou } \alpha < \overline{(0, 0)} \text{ ou } \alpha > \overline{(0, 0)}.$$

Demonstração:

i) vamos provar uma relação de ordem, ponhamos $\alpha = (a,b)$, $\beta = (c,d)$ e $\gamma = (e,f)$.

A hipótese se reescreve: $a + d \leq b + c$ e $f \leq e$.

Assim, existem $p, q \in \mathbb{N}$ tais que

$$b + c = a + d + p, \text{ e } e = f + q$$

De, obtemos:

$$be + ce = ae + de + pe \text{ e } bf + cf = af + df + pf.$$

$$\text{Segue que, } ae + de + pe + bf + cf = af + df + pf + be + ce.$$

De, obtemos:

$$pe = pf + pq.$$

Assim, em fornece:

$$Ae + de + pf + pq + bf + cf = af + df + pf + be + ce.$$

Obtemos:

$$pe = pf + pq.$$

Fornecendo:

$$ae + de + pf + pq + bf + cf = af + df + pf + be + ce.$$

Daí segue que $ae + de + bf + cf \leq af + df + be + ce$, que equivale a $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$.

Definição 1.1.16. Dado $\overline{(a, b)} \in \mathbb{Z}$, dizemos que:

1. $\overline{(a, b)}$ é positivo quando $\overline{(a, b)} > \overline{(0, 0)}$;
2. $\overline{(a, b)}$ é não negativo quando $\overline{(a, b)} \geq \overline{(0, 0)}$;
3. $\overline{(a, b)}$ é negativo quando $\overline{(a, b)} < \overline{(0, 0)}$;
4. $\overline{(a, b)}$ é não positivo quando $\overline{(a, b)} \leq \overline{(0, 0)}$;

Observemos que se $\overline{(a, b)} > \overline{(0, 0)}$ então $a > b$, e assim, existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $b + m = a$, que equivale $\overline{(a, b)} = \overline{(m, 0)}$. Analogamente, se $\overline{(a, b)} < \overline{(0, 0)}$, existe $m \in \mathbb{N}^*$, tal que $a + m = b$ e dessa forma, $\overline{(a, b)} = \overline{(0, m)}$. Dessa forma, temos que $\mathbb{Z} = \{\overline{(0, m)} \mid m \in \mathbb{N}^*\} \cup \{\overline{(0, 0)}\} \cup \{\overline{(m, 0)} \mid m \in \mathbb{N}^*\}$, onde esta união é disjunta. Além disso,

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_- &= \{\overline{(0, m)} \mid m \in \mathbb{N}^*\}, & \mathbb{Z}_- &= \{\overline{(0, m)} \mid m \in \mathbb{N}^*\} \cup \{\overline{(0, 0)}\} \\ \mathbb{Z}_+^* &= \{\overline{(m, 0)} \mid m \in \mathbb{N}^*\}, & \mathbb{Z}_+ &= \{\overline{(m, 0)} \mid m \in \mathbb{N}^*\} \cup \{\overline{(0, 0)}\} \end{aligned}$$

Notamos que $\mathbb{Z}_+$ está em bijeção com o conjunto $\mathbb{N}$, mostrando que $\mathbb{Z}_+$ é uma cópia algébrica de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$, como está descrito no seguinte teorema.

Teorema 1.1.13. Seja $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $f(m) = \overline{(m, 0)}$. Então f é injetora e valem as seguintes propriedades:

- 1) $f(m+n) = f(m) + f(n)$;
- 2) $f(mn) = f(m) \cdot f(n)$;
- 3) se $m \leq n$, então $f(m) \leq f(n)$.

Demonstração:

Iremos provar que f é injetora. De fato,

$$\text{De fato, } f(m) = f(n) \Rightarrow (m, 0) = (n, 0) \Rightarrow m + 0 = 0 + n \Rightarrow m = n.$$

Provaremos agora os três itens. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$.

1. $f(m + n) = (m + n, 0) = (m, 0) + (n, 0) = f(m) + f(n)$;
2. $f(mn, 0) = (mn, 0) = (m, 0) \cdot (n, 0) = f(m) f(n)$;
3. Se $m \leq n$, temos que, $(m, 0) \leq (n, 0)$, ou seja, $f(m) \leq f(n)$.

O teorema anterior nos garante que f é um homomorfismo injetor. Dessa forma, o conjunto $f(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}_+$, tem a mesma estrutura algébrica que $\mathbb{N}$. Por exemplo, $3 + 3 = 6$, corresponde, via f , a $(3, 0) + (3, 0) = (6, 0)$. Do mesmo modo, $2 \cdot 5 = 10$, corresponde, via f , a $(2, 0) \cdot (5, 0) = (10, 0)$. A relação $2 \leq 5$ se preserva, via f , como $(2, 0) \leq (5, 0)$, confirmando a ideia de que a ordem em $\mathbb{Z}$ é uma extensão da ordem em $\mathbb{N}$. Dizemos que $\mathbb{N}$ é um subconjunto de $\mathbb{Z}$. A função f descrita acima chama-se imersão de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$, o que mostra a definição seguinte, que $\mathbb{Z}$ é infinito, dado que f é injetora. Notemos que, se $m \in \mathbb{N}$, o simétrico de $(m, 0)$

é $(0, m)$, logo, se identificarmos $(m, 0)$ com m através de f , obtemos $-m = -(m, 0) = (0, m)$. Dessa forma, identificando $\mathbb{N}$ com $\mathbb{Z}_+$, via f , obtemos o que será definido a seguir.

Definição 1.1.17. Definimos o conjunto dos inteiros como:

$$\mathbb{Z} = \{-m \mid m \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}^* = \{\dots, -m, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, m, \dots\}.$$

Usamos, a partir de agora, esta identificação e, então, consideraremos $\mathbb{N}$ como um subconjunto de $\mathbb{Z}$. Podemos obter $a - b = (a, 0) - (b, 0) = (a, 0) + (-(b, 0)) = (a, 0) + (0, b) = (a, b)$ conforme nossas motivações intuitivas feitas anteriormente. Dessa forma, sendo x um inteiro qualquer, podemos identificar $-x$ por $(-1) \cdot x$, pois, sendo $x = (a, b)$, $(-1) \cdot x = (0, 1) \cdot (a, b) = (b, a) = -(a, b) = -x$.

Teorema 1.1.14. Se $x, y \in \mathbb{Z}$ temos:

1. Se $x > 0$ e $y > 0$, então $xy > 0$;
2. Se $x < 0$ e $y < 0$, então $xy > 0$;
3. Se $x < 0$ e $y > 0$, então $xy < 0$.

Demonstração:

1. como x e y são elementos positivos de $\mathbb{Z}$, podemos identifica-los por $x = \overline{(x, 0)}$ e $y = \overline{(y, 0)}$. Dessa forma, $xy = \overline{(x, 0)} \cdot \overline{(y, 0)} = \overline{(xy, 0)}$. Sabemos que $\overline{(xy, 0)} > \overline{(0, 0)}$, portanto $xy > 0$. Pelo, teorema apresentado em parágrafos anteriores $xy = \overline{(x, 0)} \cdot \overline{(y, 0)} = \overline{(xy, 0)}$ Sabemos que $\overline{(xy, 0)} > \overline{(0, 0)}$, assim $xy > 0$.

2. A existência de $x < 0 \Rightarrow -x > 0$ e $y < 0$ é garantida pelo teorema 4.2.13, sendo assim:

$$\begin{aligned} -x &= \overline{(-x, 0)} \Rightarrow x = -\overline{(-x, 0)} = \overline{(0, -x)} \\ &\quad \text{e} \\ -y &= \overline{(-y, 0)} \Rightarrow y = -\overline{(-y, 0)} = \overline{(0, -y)}. \end{aligned}$$

Temos que:

$$\begin{aligned} xy &= \overline{(0, -x)} \cdot \overline{(0, -y)} \\ &= \overline{((-x)(-y), 0)} \end{aligned}$$

Compreendemos que:

$$\overline{((-x)(-y), 0)} > \overline{(0, 0)},$$

3. O mesmo teorema utilizado anteriormente garante que $x < 0 \Rightarrow -x > 0$, sendo assim:

$$-x = \overline{(-x, 0)} \Rightarrow x = -\overline{(-x, 0)} = \overline{(0, -x)}.$$

Temos:

$$\begin{aligned} xy &= \overline{(0, -x)} \cdot \overline{(y, 0)} \\ &= \overline{(0, (-x)y)}. \end{aligned}$$

Sabemos que $\overline{(0, (-x)y)} < \overline{(0, 0)}$, entendemos que $xy < 0$.

Definição 1.1.18. Seja X um subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}$. Dizemos que X é limitado inferiormente se existe $\alpha \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha \leq x$, para todo $x \in X$. Tal α chama-se cota inferior de X . Dizemos que X é limitado superiormente se existir $\beta \in \mathbb{Z}$ tal que $x \leq \beta$ para todo $x \in X$. Tal β é chamado cota superior de X .

O próximo teorema que será apresentado vamos demonstrar como o PBO no conjunto $\mathbb{Z}$, assim como encontramos no conjunto $\mathbb{N}$.

Teorema 1.1.15. (Princípio da Boa Ordem para $\mathbb{Z}$) Seja $X \subset \mathbb{Z}$ não vazio e limitado inferiormente. Então X possui elemento mínimo.

Demonstração:

Seja α uma cota inferior de X , isto é, $\alpha \leq x$ para todo $x \in X$. Consideremos $X_0 = \{x - \alpha \mid x \in X\}$. Claramente, $X_0 \subset \mathbb{N}$ (identificado com $\mathbb{Z}^+$) e, pelo Princípio da Boa Ordem em $\mathbb{N}$, o conjunto X_0 possui elemento mínimo, digamos, m_0 . Assim, $m_0 \in X_0$ e $m_0 \leq y$ para todo $y \in X_0$. Como $m_0 \in X_0$, $m_0 = m - \alpha$, para algum $m \in X$. Armamos que $m = m_0 + \alpha$ é elemento mínimo de X . Só falta verificar que $m \leq x$ para todo $x \in X$, mas isso equivale a $m - \alpha \leq x - \alpha$ para todo $x \in X$, ou ainda, $m_0 \leq x - \alpha$, que é verdade, pela definição de $m_0 \leq y$. Logo, m é o mínimo de X .

Até aqui foi visto a construção dos números naturais, inteiros, as propriedades que cada conjunto possui, atribuído às operações binárias (adição, multiplicação) porém, no conjunto $\mathbb{Z}$ a construção da subtração também foi exposta mediante a existência dos teoremas que garantem isso. Portanto, na seção seguinte exploraremos como o conjunto $\mathbb{Q}$ é construído mediante as definições e teoremas.

4.1.3 Campo epistêmico em $\mathbb{Q}$

Sabemos que no Ensino Básico o número racional é apresentado como a ideia intuitiva da “divisão” entendemos que essa “divisão” é a razão entre dois números inteiros. Como foi apresentado que o conjunto $\mathbb{Z}$ é a extensão do conjunto $\mathbb{N}$, de modo análogo o conjunto $\mathbb{Q}$ também usaremos o conceito de relação de equivalência do conjunto $\mathbb{Z}$, mesmo conceito trabalhado em $\mathbb{N}$ para definir os inteiros, pois de modo particular na subtração temos que $a - b$ é definido por $a + (-b)$, sendo $-b$ simétrico de b . De modo semelhante poderíamos tentar fazer

uma divisão usando esse mesmo conceito, ou seja, $a:b = a.b^{-1}$, onde b^{-1} é o inverso multiplicativo de b . Mas, não faz sentido a definição de divisão acerca da definição rigorosa de número racional, por isso, usaremos o conceito de relação de equivalência.

Assim, consideremos o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\}$. Definiremos a relação $(a,b) \sim (c,d)$ quando $ad=bc$.

Teorema 1.1.16. A relação acima é de equivalência.

Demonstração:

1. Reflexiva: Temos que, se $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, $ab = ba$, portanto $(a, b) \sim (a, b)$.
2. Simétrica: Se $a, c \in \mathbb{Z}$, $b, d \in \mathbb{Z}^*$ e $(a, b) \sim (c, d)$, então, $ad = bc$, ou ainda, $cb = da$, isto é, $(c, d) \sim (a, b)$.
3. Transitiva: Se $a, c, e \in \mathbb{Z}$, $b, d, f \in \mathbb{Z}^*$, $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$, temos: $ad = bc \Rightarrow adf = bcf$ $cf = de \Rightarrow bcf = bde$. Dessa forma, $adf = bde$, como $d \neq 0$, $af = be$, que significa, $(a, b) \sim (e, f)$. Consideremos, por um momento, nossas noções intuitivas de números racionais. Temos que, $ad = bc \Leftrightarrow a/b = c/d$, ou seja, se as divisões de a por b e c por d coincidem, podemos afirmar que $(a, b) \sim (c, d)$.

Através da propriedade transitiva pudemos perceber que iniciamos por $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ e não por $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Exemplo 1.1.2. Temos:

- a) $(1,2) \sim (2,4) \sim (-31, -62)$;
- b) $(5,1) \sim (-10, 2)$.

Definição 1.1.19. Dado $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, denotamos por a/b (a sobre b) a classe de equivalência do par (a, b) pela relação $\sim$ acima. Assim, $a/b = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid (x, y) \sim (a, b)\}$.

Exemplo 1.1.3. $\frac{1}{2} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid (x,y) \sim (1,2)\} = \{(x,y) \mid \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid 2x=y\}$.

Assim, temos $(1,2) \in \frac{1}{2}$; $(-31, -62) \in \frac{1}{2}$; $(2,5) \notin \frac{1}{2}$.

Teorema 1.1.17. (Propriedade fundamental das frações) Se (a,b) e (c,d) são elementos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, então $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se, $ad = bc$.

Demonstração:

Pela existência do teorema 4.1.2, temos que: $ab = cd \Leftrightarrow (a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$, como queríamos.

Definição 1.1.20. Denotamos por $\mathbb{Q}$ e denominamos por conjunto dos números racionais, o conjunto quociente de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ pela relação de equivalência $\sim$, isto é, $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\}$ conforme é apresentado no Ensino Fundamental.

Apresentaremos agora as operações em $\mathbb{Q}$, oriundas das operações binárias. Contudo, no Ensino Fundamental aprendemos que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, e isso não faz o menor sentido perante as demonstrações matemáticas, pois os elementos de $\mathbb{Q}$ são classes de equivalência de pares de inteiros, mostrando serem diferentes da construção $\mathbb{Z}$. Todavia, veremos adiante que existe uma aplicação injetora de $\mathbb{Q}$ que “preserva” as operações aritméticas, isso quer dizer que a imagem de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$ por meio da aplicação injetora garante uma cópia algébrica de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$. Podemos afirmar que do ponto de vista algébrico $\mathbb{Z}$ é todo como um subconjunto de $\mathbb{Q}$, de modo parecido com a imersão de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$.

Definição 1.1.21. Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ números racionais, isto é, elementos de $\mathbb{Q}$. Definimos operações chamadas de adição e de multiplicação, respectivamente, por: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ e $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Denotaremos $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ por $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$.

Exemplo 1.1.4. Temos:

$$1) \frac{1}{5} + \frac{5}{3} = \frac{1 \cdot 3 + 5 \cdot 5}{2 \cdot 3} = \frac{13}{6}$$

Teorema 1.1.18. As operações em $\mathbb{Q}$ estão bem definidas, isto é, se $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ e $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, então,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}$$

Demonstração:

$$\text{Por hipótese, } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \text{ e } \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$$

Queremos provar que as duas somas são iguais, ou seja, que $(ad + bc) b'd' = (a'd' + b'c') bd$, isto é, $adb'd' + bcb'd' = a'd'bd + b'c'bd$, ou ainda, $(ab')(dd') + (cd')(bb') = (a'b)(dd') + (bb')(c'd)$, sendo exatamente isso, pois, $ab' = ba'$ e $cd' = dc'$. Também temos que: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ e $\frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'} = \frac{a'c'}{b'd'}$. De modo análogo, provaremos que $\frac{ac}{bd} = \frac{a'c'}{b'd'}$, ou seja, $acb' = bda'$, ou $(ab')(cd') = (dc')(a'b)$, sendo verdadeiro pela hipótese dada.

Teorema 1.1.19. O conjunto $\mathbb{Q}$, munido das operações binárias tem as propriedades algébricas de $\mathbb{Z}$, onde o elemento neutro aditivo é $\frac{0}{1}$ e o neutro multiplicativo é $\frac{1}{1}$. Além disso, dado um racional $\frac{a}{b} \neq \frac{0}{1}$, existe $\frac{c}{d}$ em $\mathbb{Q}$ tal que $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{1}{1}$, isto é, todo elemento não nulo de $\mathbb{Q}$ possui inverso multiplicativo.

Demonstração:

Sejam $r, s, t \in \mathbb{Q}$ com $r = \frac{a}{b}$, $s = \frac{c}{d}$ e $t = \frac{e}{f}$, vale para a: 1) Comutativa da Adição, 2) Associativa da Adição, 3) Elemento Neutro da Adição, 4) Elemento Simétrico, 5) Comutativa da Adição, 6) Associativa da Multiplicação, 7) Elemento Neutro da

Multiplicação, 8) Elemento Inverso, 9) Distributiva da Multiplicação em relação a adição, temos:

$$1) r+s = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\begin{aligned} 2) r+s) + t &= \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) + \frac{e}{f} = \frac{ad+bc}{bd} + \frac{e}{f} \\ &= \frac{(adf+bcf)+bde}{bdf} = \frac{adf+(bcf+bde)}{bdf} \\ &= \frac{a}{b} + \frac{cf+de}{df} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right) \\ &= r + (s+t) \end{aligned}$$

$$3) r + \frac{0}{1} = \frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a.1+0.1}{b.1} = \frac{a}{b} = r$$

$$4) \text{ Existe } r' \text{ tal que } r + r' = \frac{0}{1}. \text{ Seja } r' = \frac{-a}{b}.$$

$$r + r' = \frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{ab+(-ab)}{bb} = \frac{0}{bb} = \frac{0}{1}$$

$$5) rs = \frac{a}{b} \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{ca}{db} = \frac{c}{d} \frac{a}{b} = r$$

$$6) (rs) + t = \left(\frac{a}{b} \frac{c}{d} \right) \frac{e}{f} = \left(\frac{ac}{bd} \right) \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}$$

$$7) r. \frac{1}{1} = \frac{a}{b} \frac{1}{1} = \frac{a.1}{b.1} = r$$

$$8) \text{ Se } r \neq \frac{0}{1}, \text{ existe } r'' \text{ tal que } rr'' = \frac{1}{1}. \text{ Seja } r' = \frac{b}{a}:$$

$$\begin{aligned} rr' &= \frac{a}{b} \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{ab}{ab} = \frac{a}{a} \frac{b}{b} \\ &= \frac{1}{1} \frac{1}{1} \text{ pelo item anterior} \\ &= \frac{1}{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9) r(s+t) &= \frac{a}{b} \left(\frac{c}{d} \frac{e}{f} \right) = \frac{a}{b} \left(\frac{cf+dc}{df} \right) = \frac{a(cf+dc)}{b(df)} \\ &= \frac{acf+adc}{bdf} = \frac{fac+dac}{dbf} = \frac{b}{b} \frac{fac+dac}{dbf} = \frac{b(fac+dae)}{b(dbf)} \\ &= \frac{bfac+bdae}{bdbf} = \frac{ac}{bd} + \frac{ae}{bf} = \frac{a}{b} \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \frac{e}{f} = rs + rt \end{aligned}$$

Proposição 1.1.1. Para $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, mostre que: $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$.

Demonstração:

Para $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, herdada as propriedades dos inteiros temos:

$(-a)(-b) = ab = -a(-b) = -(-a)(b)$, que nos dá respectivamente

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} = -\frac{-a}{-b}$$

Portanto, devido a Proposição 4.3.12 se $a, b \in \mathbb{Q}$, então b pode ser tomado como positivo. Assim, devido essa proposição usaremos seus pressupostos para definir a relação de ordem em $\mathbb{Q}$ na seguinte definição:

Definição 1.1.22. Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ número racionais com $b, d > 0$. Escrevemos $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ quando $ad \leq bc$ e dizemos que $\frac{a}{b}$ é menor ou igual a $\frac{c}{d}$.

Teorema 4.3.14. A relação $\leq$ está bem definida e é uma relação de ordem em $\mathbb{Q}$.

Demonstração:

Vamos mostrar inicialmente que a relação está bem definida. Seja $a/b = a'/b'$, isto é, $ab' = a'b$.

b. Temos que $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Rightarrow ad \leq bc$, e, como $b' > 0$, obtemos $ab'd \leq bcb'$, daí, pela igualdade acima, $a'b'd \leq bcb'$, de onde concluímos que $a'd \leq cb'$, ou seja, $\frac{a'}{b'} \leq \frac{c}{d}$.

Do mesmo modo, como $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \Rightarrow cd' = dc'$,

$\frac{a'}{b'} \leq \frac{c}{d} \Rightarrow a'd \leq cb' \Rightarrow a'dd' \leq cb'd' \Rightarrow a'dd' \leq c'db' \Rightarrow a'd' \leq c'b' \Rightarrow \frac{a'}{b'} \leq \frac{c'}{d'}$.

Logo, como $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a'}{b'} \leq \frac{c}{d}$ e $\frac{a'}{b'} \leq \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a'}{b'} \leq \frac{c'}{d'}$, concluímos que $a/b \leq c/d \Rightarrow \frac{a'}{b'} \leq \frac{c'}{d'}$.

Vamos provar, que esta é uma relação de ordem:

1. Reflexiva: se $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, claramente, $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$, isto é, $\frac{a}{b} \leq \frac{a}{b}$;
2. Simétrica: se $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ e $\frac{c}{d} \leq \frac{a}{b}$, temos que $ad \leq bc$ e $cb \leq ad$, daí, pela tricotomia dos inteiros, obtemos, $ad = bc$, isto é ; $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
3. Transitiva: se $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$, $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ e $\frac{c}{d} \leq \frac{e}{f}$, temos $ad \leq bc$ e $cf \leq ed$. Multiplicando f na primeira e b na segunda desigualdade (podemos fazer isto, pois, $b, d > 0$), obtemos $adf \leq bcf$ e $bcf \leq bed$, daí, pela transitividade dos inteiros, obtemos, $adf \leq bed$, ou ainda, $af \leq be$ ($d > 0$), que significa, $\frac{a}{b} \leq \frac{e}{f}$.

Teorema 1.1.20. (Lei Tricotomia em $\mathbb{Q}$) Dados $r, s \in \mathbb{Q}$, uma, e apenas uma, das situações seguintes ocorre: ou $r = s$, ou $r < s$, ou $s < r$.

Demonstração:

Seja $r = \frac{a}{b}$ e $s = \frac{c}{d}$ com $b, d > 0$. Pela tricotomia em $\mathbb{Z}$, ou $ad = bc$, caso em que ocorre $r = s$, ou $ad < bc$, caso em que ocorre $r < s$, ou $bc < ad$, caso em que ocorre $s < r$. Portanto, só uma delas pode ocorrer. Exibiremos agora a função imersão de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$, a mesma que citamos, de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$, na construção dos inteiros.

Teorema 1.1.21. A função $i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$, definida por $i(n) = \frac{n}{1}$ é injetora. Além disso, ela preserva as operações e a relação de ordem de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$ no seguinte sentido:

1. $i(m + n) = i(m) + i(n)$;
2. $i(mn) = i(m)i(n)$;
3. Se $m \leq n$, então $i(m) \leq i(n)$.

Demonstração:

Provemos inicialmente que f é injetora. Se $i(m) = i(n)$, temos que $\frac{m}{1} = \frac{n}{1}$, isto é, $m \cdot 1 = n \cdot 1$, ou ainda, $m = n$, logo, $i(m) = i(n) \Rightarrow m = n$, portanto, i é injetora.

$$1. i(m + n) = \frac{m+n}{1} = \frac{1.m+1.n}{1.1} = \frac{m}{1} + \frac{n}{1} = i(m) + i(n);$$

$$2. i(mn) = \frac{mn}{1} = \frac{m.n}{1.1} = \frac{m}{1} \cdot \frac{n}{1} = i(m)i(n);$$

$$3. m \leq n \Rightarrow m \cdot 1 \leq n \cdot 1 \Rightarrow \frac{m}{1} \leq \frac{n}{1} \Rightarrow i(m) \leq i(n).$$

Logo, o conjunto $i(\mathbb{Z}) = \{\frac{n}{1} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ é uma cópia algébrica de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$. Assim, como existe uma cópia algébrica de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$, essa imersão de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$ significa dizer que $\mathbb{Q}$ é infinito. Portanto, para finalizar a construção em $\mathbb{Q}$, iremos demonstrar o teorema que garante que $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Teorema 1.1.22. $\mathbb{Q}_+^*$ é enumerável.

Demonstração:

Consideremos os números racionais escritos na forma irredutível, como no lema anterior. Seja $f: \mathbb{Q}_+^* \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(\frac{m}{n}) = 2^m \cdot 3^n$. Se $f(\frac{m}{n}) = f(\frac{m'}{n'})$, então, $2^m \cdot 3^n = 2^{m'} \cdot 3^{n'}$. Garantimos que pelo Teorema Fundamental da Aritmética e pela unicidade da representação de frações na forma irredutível, dada pela proposição acima, $2^m = 2^{m'}$ e $3^n = 3^{n'}$, ou seja, $m = m'$ e $n = n'$, que nos garante que, $m/n = m'/n'$. Assim, f é injetora e tem como imagem um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$.

Finalizamos o nosso estudo acerca do Livro “A construção dos Números” (FERREIRA, 2011) completando assim a primeira fase da Engenharia Didática, no que se concerne a exploração do objeto matemático no ensino atual, apresentamos a construção dos conjuntos numéricos embasado nas definições rigorosas da Matemática até o ensino atual, e como é abordado o material na formação inicial dos professores. Assim, subsequentemente damos o prosseguimento da nossa metodologia, na segunda fase, tida como *análise a priori*.

5 EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISE À PRIORI

Nesse capítulo, apresentamos as características do curso que concretizam o estudo e os sujeitos da pesquisa. Explicamos o processo de aplicação do nosso experimento, como também analisamos a sequência de atividades seguindo a Didática Profissional e a Engenharia Didática de Desenvolvimento.

Nesta pesquisa, abordamos epistemicamente a construção axiomática dos conjuntos numéricos Naturais, Inteiros, Racionais e Reais. A partir da construção das situações, observa-se que os alunos inclusos na pesquisa tenham os conhecimentos prévios de: relações de equivalência, axiomas de Peano, conjuntos finitos, relação de ordem dos Naturais, Inteiros e Racionais, operações dos Naturais, Inteiros e Racionais, Enumerabilidade dos Racionais. Ensejamos que os alunos da Disciplina Fundamentos da Análise e Cálculo sejam capacitados para participar da nossa pesquisa, levando em consideração que as noções exigidas tenham sido aplicadas de forma exitosa em sala de aula.

Assim, nossa pesquisa aconteceu em cinco encontros diferentes, podendo ser conferidos no apêndice A (p. 146) ansiamos a pesquisa objetivando o estudo acerca da compreensão dos professores na construção dos conjuntos Naturais, Inteiros, Racionais e Reais, como também a interpretação geométrica dos conjuntos numéricos, para os licenciandos em Matemática, além de estimular os conhecimentos já vistos em sala de aula, mirando a resolução das cinco situações didáticas, que dispomos no Quadro 6.

Quadro 6 – Descrição da aplicação da Experimentação em sala de aula

Números de encontros	Situação Didática	Duração dos encontros
1	Inclusão dos conjuntos numéricos ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$)	60 min
1	Imersão dos conjuntos $\mathbb{N}$	60 min
1	Relações de equivalência no conjunto $\mathbb{Z}$	60 min
1	Construção do conjunto $\mathbb{Q}$ no plano	60 min
1	Omissão em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$	60 min

Fonte: Elaboração dos autores

As situações didáticas atenderam de forma cronológica ao número de encontros, como também integraram de forma sequencial o campo epistêmico, e fizeram a mobilização dos saberes dos alunos em relação a noção de equivalência, infinitude dos conjuntos, construção axiomáticas dos conjuntos numéricos. Enfatizamos que nossa pesquisa atendeu a aprovação do Comitê de Ética, exposto no anexo B (p.151).

5.1 Lócus da investigação e os sujeitos da pesquisa

Nosso estudo está sendo desenvolvido em uma turma da disciplina de Fundamentos de Análise e Cálculo e implicações no ensino, é uma disciplina optativa 81 do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), *campus* Fortaleza.

O IFCE *campus* Fortaleza oferta cursos técnicos, superiores, pós-graduações e mestrados acadêmicos, e algumas modalidades à distância.

Os sujeitos da pesquisa são quatro alunos matriculados no curso de Licenciatura em Matemática do IFCE do oitavo semestre letivo 2019.1. De início, os alunos foram convidados a participar de forma voluntária, a respeito das sequências de ensino aplicadas na construção dos conjuntos naturais, inteiros, racionais e reais, deixamos claro no termo de consentimento livre entregue aos professores em formação inicial, exposto no anexo C (p.152).

De início comunicamos aos estudantes a nossa proposta para a pesquisa, explicamos os objetivos acerca da nossa investigação e posteriormente explicamos como iria ocorrer a execução das atividades propostas.

A turma escolhida era composta por 12 professores em formação, sendo que quatro desistiram da disciplina, optamos por escolher os professores que são caracterizados como professores novíços (inexperientes) tais professores já estão no plano de ação em sala de aula, de no mínimo um ano e máximo dois anos, conforme o apêndice B (p. 147). Os professores em formação são identificados por nomes fictícios, optamos por incluir os nomes não reais, a fim de preservar a identidade dos professores. Deliberamos essa turma, pois, os professores em formação se encontram no oitavo semestre e todos já demonstram contato com a profissão de professor.

Compusemos a analisar a pesquisa perante as sessões de ensino aplicadas em sala de aula vinculando a construção axiomática dos conjuntos numéricos. Para tanto, nossa ação estava caracterizada em construir, aplicar, coletar dados e interpretá-los a partir dos conjuntos numéricos.

Na subseção vindoura descreveremos as nossas situações-problema, aplicadas na fase da *análise a priori* e *a posteriori* das situações (I, II, III, IV, V) como também ocorreram às atividades do nosso experimento.

5.2 Análise *à priori*

Na presente seção, apresentamos as análises *a priori* das situações-problema construídas a partir das fases da Teoria das Situações Didáticas, usamos a TSD por ela proporcionar a interação entre os alunos e um meio que induz a aprendizagem. As situações proporcionam os alunos a construir um autoconhecimento. Assim, elaboramos cinco situações-problemas. Almouloud (2016) descreve que uma situação-problema faz parte de uma situação adidática, passando a ser construídas por um conjunto de questões abertas ou questões fechadas e formuladas em um contexto matemático. Uma das características é sua utilização implícita, e em seguida explícita, em cima dos novos objetos matemáticos perante a resolução de problema. Assim, Almouloud (2016) esclarece que,

Os alunos devem compreender os dados do problema e se engajar na sua resolução usando seus conhecimentos disponíveis. Essas situações devem colocar em jogo um campo conceitual que queremos efetivamente explorar e no qual o conhecimento visado está inserido. É imprescindível que o aluno perceba que seus conhecimentos antigos são insuficientes para a resolução imediata do problema. Além disso, os conhecimentos, objeto de aprendizagem, fornecem as ferramentas convenientes para obter a solução final (ALMOULOU, 2016, p. 116)

Portanto, analisamos as concepções dos professores em formação em relação a construção axiomática dos conjuntos numéricos, contendo o conjunto dos números Naturais, números Inteiros, números Racionais, e Números Reais, como também induzimos a concepção geométrica dos alunos em relação aos conjuntos numéricos.

O desenvolvimento das situações ocorreu em sala de aula pela professora investigadora, sendo entregue folhas que continham as situações a cada encontro, e a institucionalização das situações estavam no final de cada encontro. Ainda, a professora investigadora só intervia quando era solicitada pelos alunos a esclarecer as dúvidas em relação ao enunciado, ou então, a professora manifestava perguntas que abrangesse os conhecimentos prévios do aluno em relação ao objeto matemático. A professora investigadora, não intervia de forma direta para não induzir os alunos nas soluções esperadas.

É relevante recordar que Almouloud (2007) definiu que nessa fase é necessário escolher as variáveis de comando (*macrodidáticas* e *microdidáticas*). Portanto, nossa pesquisa elegeu as variáveis *microdidáticas*, elegemos essa variável que está relacionada à organização, planejamento e execução das sequências de ensino em sala de aula.

No presente trabalho, elucidamos como as variáveis *microdidáticas*, como também os elementos que organizam as sequências de ensino, o conhecimento de determinados obstáculos, a descrição do local de onde foi aplicado a pesquisa, como a instituição da amostra de sujeitos participantes da pesquisa. Na presente seção enfatizaremos uma

minuciosa discussão em torno dessas variáveis, para delinear a concepção das sequências de ensino para a construção dos axiomática dos números.

Ainda, no decorrer dessa seção detalhamos o desenvolvimento da experimentação das sequências de ensino aplicados ao público-alvo escolhido. Lembrando que na fase da experimentação é tido como o momento de execução do funcionamento escolhido do dispositivo desenvolvido, corrigindo-o em meio às análises locais do desenvolvimento experimental (ALMOULOU, 2007).

5.2.1 Construção e descrição das situações didáticas para o ensino dos conjuntos numéricos

Elaboramos cinco situações problemas mediante o objeto matemático eleito, no caso, os conjuntos numéricos. Em cada situação, abordamos os conjuntos de forma individual. Desenvolvemos as situações mediante as fases da Engenharia Didática de Formação e da Teoria das Situações Didáticas. Além do mais, adequamos a SDP mediante a obtenção dos dados.

I Situação-Problema⁷:

Como professor de Matemática, você acredita nas seguintes inclusões indicadas na cadeia de conjuntos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$? E de forma lúdica, como você aborda essa cadeia em sala de aula? Forneça uma interpretação visual de como seria.

O objetivo da situação-problema I foi levar o professor em formação discutir com base nos conhecimentos prévios adquiridos anteriormente o reconhecimento e a inclusão dos conjuntos numéricos, como também constatar a abordagem que ele tem sobre os conjuntos Naturais, Inteiros, Racionais e Reais no ensino básico. Além do mais, estimulamos a transposição algébrica para moldes visuais. Tomando como referência a estrutura do conhecimento, partindo da abstração estrutural em promover uma função cognitiva complexa. Temos que nesse modelo os objetos construídos são utilizados para um novo modelo de conhecimento. Ou seja, tomando como base esse modelo, os alunos passem a adquirir conceitos matemáticos por meio de uma imagem conceitual relacionada existente, desse modo, integrando “progressivamente imagens anteriores e/ ou inserindo um novo discurso que reestrutura as imagens existentes” (PINTO; SHEINER, 2015, p. 645).

⁷ Situação baseada no livro “A construção dos Números”, no que se concerne aos conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$. FERREIRA, 2012.

Situação de ação: De início os professores devem assumir a responsabilidade de resolverem a situação-problema 1. Logo, os professores devem estabelecer as relações de inclusões dos conjuntos. Portanto, os conjuntos numéricos são subconjuntos de uns dos outros, conforme a definição 3.2.1 explicitado na Figura 11. Dizemos que dois conjuntos são iguais se possuírem os mesmos elementos, ou seja, especificando $A \subset B$ e $B \subset A$. A partir desse conhecimento prévio sobre a relação de conjuntos, os professores em formação constroem as relações indiretas ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$) em sala de aula compreendendo as propriedades de inclusão:

1. Reflexiva: $(\forall A) (A \subset A)$

Dem.: Como $(\forall x) (x \in A \Rightarrow x \in A)$, então $A \subset A$;

2. Transitiva: $(\forall A, B, C) (A \subset B \text{ e } B \subset C \Rightarrow A \subset C)$

Dem.: $A \subset B$ e $B \subset C \Rightarrow (\forall x) (x \in A \Rightarrow x \in B)$ e $(\forall x) (x \in B \Rightarrow x \in C)$. Pela transitividade do bicondicional temos $(\forall x) (x \in A \Rightarrow x \in C) \Rightarrow A \subset C$;

3. Antissimétrica: $(\forall A, B) (A \subset B \text{ e } B \subset A \Rightarrow A = B)$

Dem.: Como $A \subset B$ e $B \subset A$, então $(\forall x) (x \in A \Rightarrow x \in B)$, e $(\forall x) (x \in B \Rightarrow x \in A)$. Como vale a implicação nas duas direções, isso é equivalente a dizer que $(\forall x) (x \in B \Leftrightarrow x \in A)$, ou seja, que $A = B$;

4. $(\forall A) (\emptyset \subset A)$, ou seja, o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.

Dem.: Suponha, por absurdo, que exista um conjunto A tal que $\emptyset \not\subset A$. Isso significa que existe pelo menos um elemento x tal que $x \in \emptyset$ e $x \notin A$. O que leva a uma contradição, pois o conjunto vazio não possui elementos. Logo a proposição $(\exists A) (\emptyset \not\subset A)$ é falsa, consequentemente a proposição $(\forall A) (\emptyset \subset A)$ é verdadeira.

Observação: Observe que a recíproca da antissimétrica é óbvia, ou seja, $A = B \Rightarrow A \subset B$ e $B \subset A$. Isso nos fornece um método eficiente para demonstrar da igualdade de dois conjuntos, denominado método da dupla inclusão, pois $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ e $B \subset A$. Os professores podem interpor uma estrutura interpretativa visual de como fazem essa relação de inclusão no posto de trabalho, de forma aborlativa do conhecimento epistêmico axiomático para uma interpretação ilustrativa.

Figura 11 - Definição para dois conjuntos serem subconjuntos.

Definição 3.2.1

Dizemos que A é subconjunto de B se todos os elementos de A são também elementos de B .

Situação de formulação: Nessa fase os professores em formação encontrarão através de uma linguagem matemática, ou própria uma explicação da inclusão dos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Assim, poderão reconhecer os teoremas de classe de equivalência. Iniciando com a relação dos $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, em seguida o conjunto $\mathbb{Z}$ será o conjunto das classes. Posteriormente, é necessário relacionar o $\mathbb{Z}$ com duas operações (adição e multiplicação) para assim, provar que o conjunto dos Inteiros possui uma cópia algébrica no conjunto dos Naturais. Em seguida, cada conjunto vai ter uma cópia algébrica se estendendo até os $\mathbb{R}$ para os $\mathbb{C}$.

Situação de Validação: A caracterização dessa fase se dá aos professores convencer os demais interlocutores dos seus argumentos exitosos usados para a resolução da situação-problema 1, ainda aqui os professores podem provar ou rejeitar as conjecturas construídas, passando a utilizar uma linguagem matemática. Portanto, os professores ainda devem compreender que existem os conjuntos dos números $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ existindo a relação de inclusão entre cada conjunto. Por exemplo: se $A \subset B$, $\forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$, ou seja, quando $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\forall x (x \in \mathbb{N} \rightarrow x \in \mathbb{Z})$ porém, tem-se que o conjunto $\mathbb{Z}$ possui o inverso aditivo, que resulta na cópia isomorfa em $\mathbb{N}$. Assim, finalmente o licenciando encontrará a relação de inclusão dos conjuntos numéricos.

Institucionalização local: Nessa fase o professor/pesquisador deve esclarecer a sua intenção, por meio da verificação das propriedades contruídas, a fim de verificar e sistematizar a transferência de saberes da matemática científica, assim formalizando o saber. Deste modo, a professora pesquisadora deve exibir os teoremas recorrentes à inclusão dos conjuntos numéricos.

Continuando, vamos apresentar a II situação-problema que foi desenvolvida no segundo encontro com os professores em formação.

II Situação-Problema⁸:

Explique em que sentido existe ou não existe uma imersão do conjunto dos números naturais dentro do conjunto dos inteiros.

O objetivo da situação-problema II é levar o professor em formação compreender que o conjunto dos números Naturais tem suas propriedades e construções a partir da

⁸ Situação baseada no livro “A construção dos Números”, livro adotado na disciplina da graduação, Ferreira, 2012, p. 25-28.

axiomatização de Peano, e o conjunto dos números Inteiros possuem propriedades diferentes dos Naturais. Assim, passando a existir uma cópia isomórfica dos $\mathbb{Z}$ nos $\mathbb{N}$.

Os professores em formação devem possuir os conhecimentos prévios sobre os axiomas de Peano, adição e multiplicação dos números Naturais, como também os conhecimentos acerca de classes de equivalência no conjunto dos números Inteiros. Esses conhecimentos são necessários para os professores encontrarem a solução da questão.

Situação na Ação: O professor em formação firmará a devolução, passará a aceitar o problema o resolvendo-o, embasado nos seus conhecimentos prévios. Assim, os alunos terão que conhecer as propriedades de ambos os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$. Dessa forma, os professores em formação terão que mobilizar os conhecimentos acerca da construção dos Naturais, pautando nos três conceitos primitivos de Peano, de modo pormenorizado: *zero*, o número *Natural* e a relação “*é sucessor de*”. Como também construir o conjunto dos números Inteiros, por pares ordenados e classes de equivalência.

Situação de formulação: Almouloud (2007, p. 38) enfatiza que, neste momento, é necessário ter uma troca de informações e mensagens entre os sujeitos da pesquisa. Deste modo, o resultado do debate produz “(...) um modelo explícito que pode ser formulado com sinais e regras comuns”. Dessa forma, os professores terão que dar exemplos intuitivos, correlacionados com os axiomas e definições. Partindo da construção no conjunto dos Naturais, a construção dos conjuntos Inteiros com as classes de equivalência. Desta maneira, pode-se deduzir que no conjunto dos Naturais é um subconjunto dos $\mathbb{Z}_+$ (cópia algébrica), de uma única maneira, assim, um número $n \in \mathbb{N}$, se relaciona com uma classe de equivalência determinada por um conjunto de par ordenado $(n,0)$, passando a ter uma função injetora entre os $\mathbb{N}$ e os $\mathbb{Z}$.

Situação de Validação: Lembremos que, nessa fase anterior é preciso “provar o que foi afirmado na fase anterior” (ARTIGUE, 1984, p. 8). Portanto, os professores em formação devem verificar pelos axiomas de Peano a existência dos $\mathbb{N}$, tendo a noção da adição e multiplicação, uma vez definida a adição nos $\mathbb{N}$, define-se a operação $\leq$ e a operação de subtração. Através dessas definições, os alunos explorarão a III propriedade do teorema

3.3.2⁹. Logo, a terceira propriedade diz que: Se $m \leq n$, então $f(m) \leq f(n)$. Se $m, n \in \mathbb{N}$ dizemos que $m \leq n \leftrightarrow n = m + u$ para algum $p \in \mathbb{N}$. Assumimos p por $n - m$.

Portanto, pelo teorema 3.3.2, os professores em formação, postularão o raciocínio semelhante nos inteiros, visto o comportamento da estrutura algébrica dos naturais. Especificando, $4+5=9$, em $\mathbb{N}$, temos que os pares ordenados na propriedade aditiva $(4,0) + (5,0) = (9,0)$ nos $\mathbb{Z}$, para a multiplicação, corresponde a função $(4,0) \cdot (5,0) = (20,0)$, desse modo, a relação $4 \leq 5$ é verdadeira. Por meio desse pensamento, temos que a ordem dos inteiros é uma extensão da ordem nos naturais.

Situação da institucionalização: Temos que na última etapa, perante a situação-problema II o professor retoma seu papel como um agente investigativo. Portanto, a professora pesquisadora será balizada nos pressupostos de Perrin-Glorian e Bellemain (2016, p. 13):

A necessidade de institucionalização foi formulada em 1980, assim como a existência de um contrato didático implícito; a situação didática é observada desde 1982, como uma situação a-didática imersa em um contrato didático e, ao mesmo tempo em que surge a noção de devolução. Todavia, a teoria das situações se desenvolveu, preliminarmente, em torno da caracterização de situações a-didáticas em situações quase isoladas do professor, o que constitui que a Engenharia Didática, no seu começo, era centrada sobre os aspectos matemáticos (epistemológicos) e cognitivos, não explicitados no papel do professor, ao momento de mobilização das sequências em classe.

Assim, temos que os conhecimentos mobilizados pelos professores em formação, nas fases da ação, formulação e validação (situações adidáticas), devem ser compreendidos como descobertas, para a estruturação formal da matemática, na qual o professor deve retomar nessa fase, então, a constituição do saber epistêmico deve a alguns teoremas e definições.

Teorema (1) - Existe um conjunto de $\mathbb{N}$ e uma função $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (FERREIRA, 2012, p. 20):

I) s é injetora;

II) Existe um elemento em $\mathbb{N}$, que denotaremos por 0 , e chamamos de zero, que não está na imagem de s , isto é, $0 \notin \text{Im}(s)$;

III) Se um subconjunto X de $\mathbb{N}$ satisfazer (1) e (2) logo abaixo, então $X = \mathbb{N}$:

(1) $0 \in X$;

(2) se $k \in X$, então $s(k) \in X$.

Demonstração: Para termos a ideia do que significa a função s , é tida como sucessor, sendo que se $x \in \mathbb{N}$, $s(x)$ será chamado de sucessor de x . Assim, no (I) remete que existe diferentes

⁹ **Teorema 3.3.2.** Seja $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $f(m) = (m,0)$. Então f é injetora (FERREIRA, 2012, p. 54).

elementos nos $\mathbb{N}$, e tais tem sucessores diferentes. No (II) indica que o número zero não é sucessor de nenhum elemento no conjunto dos naturais. Temos que o (III) é o princípio da indução finita.

Temos que, quando Peano criou os axiomas, o mesmo tomava que o número um é o primeiro natural, porém na atualidade mudou-se essa concepção, tendo o número 0 como o primeiro número Natural. Tomamos a escolha do 0, para iniciar os números Naturais. Portanto, admitimos o zero como um número natural. Se n é um número natural, ele tem um único sucessor, que este também se mostra um número natural. O zero não é sucessor de nenhum número natural. Assim, como dois números naturais que têm sucessores iguais, ambos são idênticos. Dessa forma, concebemos na Matemática os axiomas (I), (II), (III).

Teorema (2) - $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Demonstração: Seja S o conjunto $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Temos que S é construído como um subconjunto de $\mathbb{N}$ que contém o zero, como também o sucessor de qualquer elemento nele contido. O III axioma de Peano nos garante isso, $S = \mathbb{N}$.

Definição (1) – No conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definimos a seguinte relação binária $\sim$: $\forall (m, n), (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (m, n) \sim (p, q) \Leftrightarrow m + q = n + p$.

Prosseguimos, com a próxima descrição da situação problema, aplicada no terceiro encontro com os professores em formação.

III Situação-Problema¹⁰:

Consideremos a relação entre os pares (m, n) e (a, b) e que são equivalentes se, e somente se, ocorrer através da adição no conjunto dos Inteiros, em que $(m, n) \sim (a, b) \Leftrightarrow m + b' = n + a$. Opine sobre o significado de classe de equivalência, e forneça uma interpretação geométrica.

Na presente situação-problema, deixaremos como sugestão para o aluno formar pares ordenados, tendo como a definição do teorema 3.1.1, na adição dos números inteiros, como também os professores em formação devem fornecer a concepção de classe de equivalência e uma interpretação geométrica.

Teorema 3.1.1. A relação $\sim$ em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida por $(a, b) \sim (c, d)$ quando $a + d = b + c$ é de equivalência (FERREIRA, 2012, p. 44).

¹⁰ Situação criada a partir do livro “A construção dos Números”, Ferreira, 2012, p. 46-48.

Situação de ação: De acordo com Almouloud (2016), nessa fase os alunos devem ser impostos a um problema ou uma tarefa, todavia, não tem necessidade dos alunos compreenderem o significado das suas ações. A relevância se encontra no êxito da resolução da tarefa, através do desenvolvimento de conhecimentos prévios, que permitam o aluno agir, prever mediante a tarefa. A primórdio, deve ocorrer a devolução, no qual o professor deve impor o problema e o aluno deve aceitar, assim sendo, os alunos devem aceitar a responsabilidade de solucionar a situação-problema. Portanto, os professores em formação devem mover intuitivamente o conhecimento sobre par ordenado, pelo conhecimento prévio de $(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$. Acentuando tal raciocínio inicial para chegar na adição dos inteiros, seguindo o teorema 3.1.1. Os professores partirão de um saber axiomático, passando o significado para uma representação visual, que virão a desenhar.

Situação de formulação: Os professores terão que trocar informações ou estratégias em meio à resolução da atividade, assim reproduzindo ações com os demais professores (colegas) da sala de aula ou com a professora pesquisadora usando uma linguagem própria ou matemática, sem precisar justificá-la (ALMOULOU, 2016). Assim, os alunos desenvolverão a situação-problema através das definições das operações no conjunto dos números Inteiros a partir da relação de equivalência no conjunto dos Naturais, tendo a relação $\frac{N \times N}{\sim}$ pelos pares $(a, b) \sim (c, d)$ passando por $a + d = c + b$ é de equivalência.

Situação de Validação: Os professores nessa fase são levados a produzir os enunciados referente à tarefa, assim validando seu ponto de vista, ou seja, o professor em formação deverá argumentar, e convencer os demais com sua validação elaborada pelos seus conhecimentos prévios (ALMOULOU, 2016). Por conseguinte, o professor em formação terá que convencer os demais da sua verdade matemática, assim sendo, pode ocorrer debates, argumentações e apresentações de como ele chegou naquela conclusão.

Portanto, os professores em formação devem exhibir no quadro, suas resoluções, explicando como se constrói as classes de equivalência no conjunto dos números Inteiros. Em seguida, deverão expor cognitivamente como se comporta os pontos criados em escala geometricamente.

Situação de Institucionalização: Nessa fase, a professora pesquisadora tomará a responsabilidade de assumir o desenvolvimento formal da Matemática. Fazendo parte da situação didática, de acordo com Brousseau (1986), o aluno deve apreender da situação

global, e um estatuto social e científico, para posteriormente o aluno se aproprie do conhecimento epistêmico matemático para resolver futuramente novos problemas matemáticos. “Ou seja, conhecimentos que passam a fazer parte do *milieu* do aluno para resolução de novos problemas” (ALMOULOUD, 2016, p. 115).

É importante que a professora pesquisadora faça os alunos a expressar a equivalência no plano geométrico, instigando os alunos a notar como se comporta no plano os pares da relação de equivalência, e no campo axiomático.

Mais adiante apresentamos o que foi proposto na situação no quarto encontro com os professores em formação, atendendo as fases da Teoria das Situações Didáticas.

IV Situação-Problema¹¹:

Forneça uma interpretação dos racionais mediante a noção de classe de equivalência no plano.

O objetivo dessa situação problema está nos professores em formação terem o conhecimento de que os números racionais são construídos pelas classes de equivalência de pares ordenados dos números inteiros, e, posteriormente abordar uma interpretação cognitiva no plano cartesiano, a partir da ideia de classes de equivalência. Os conhecimentos prévios são gerados a partir da relação de equivalência nos racionais deve atender as propriedades: reflexiva, simétrica e transitiva.

Situação de ação: Os professores em formação deverão aceitar o problema mediante a devolução. Contudo, deve haver uma troca de informações não codificadas ou sem linguagem matemática constituídas nas ações e decisões (BROUSSEAU, 2008). Portanto, os alunos (professores em formação) devem possuir um conhecimento acerca da construção dos racionais, partindo da classe de equivalências, assim $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ pela relação de equivalência. Partindo desse pressuposto define-se um número racional, como o conjunto quociente de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / \sim$, isto é, $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*) / \sim \{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \}$.

Situação de formulação: “requer repertórios linguísticos para formular uma informação ou um debate” (BROUSSEAU, 2008 *apud* SULEIMAN, 2015, p. 202). Os professores em formação terão que trocar algumas noções matemáticas acerca do conjunto dos números racionais e

¹¹ Situação baseada no livro “A construção dos Números” a partir dos conjuntos dos números racionais, Ferreira, 2012, p. 66-69.

representarem no plano. Portanto, tem-se que os números racionais são tidos como $\frac{a}{b}$, seguindo pelo par (a,b) na classe de equivalência. Tomemos como exemplo, o par ordenado $(-12,3) \in \frac{-12}{3}$, $(-24, 6) \in \frac{-24}{6}$ $(-28, 7) \in \frac{-28}{7}$ são equivalentes $\sim$ pois seus quocientes resultam em -4, traçando infinitos pares, tem-se como resultado infinitos pontos no plano cartesiano.

Situação de validação: Os professores em formação terão que validar o que foi sustentado na fase anterior, ou seja, deve haver uma troca de opiniões entre os demais colegas. Assim, as sentenças devem exercer o papel da teoria (BROUSSEAU, 2008). Nessa fase, os alunos terão que convencer os alunos e professor da sua resolução da tarefa proposta. Temos que os professores em formação (alunos) deverão saber que a construção por $\mathbb{Q}$ é definido pelo conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / \sim$, isto é, $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / \sim$, posteriormente entende-se que após a definição, deve haver as operações: adição e subtração, como também, a multiplicação e divisão. Portanto, a criação dos racionais passou a ser constituída a partir dos números inteiros, e do pressuposto de resolver equação do tipo $a.x = b$, temos que perante uma equação do primeiro grau, tem solução no conjunto dos inteiros, quando a for múltiplo de b . Diante desse pressuposto, o professor tem conhecimento, por exemplo, que $\frac{1}{2} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid (x,y) \sim (1,2)\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid 2x = b\}$,

Situação de institucionalização: Nessa fase, é possível observar que o contrato didático se estende, voltando a responsabilidade para o professor, portanto, nas fases anteriores (situação da ação, situação de formulação, situação de validação) deve institucionalizar o saber (BROUSSEAU, 2008).

Portanto, a professora pesquisadora deve apresentar alguns conceitos matemáticos. Assim os teoremas auxiliarem na relação de classe de equivalência.

Teorema 1 - $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\}$, definimos ela como: $(a,b) \sim (c,d) \leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$ (FERREIRA, 2012, p. 66). Essa relação de $\sim$, atende as propriedades de uma relação de equivalência, existem as propriedades: reflexiva, simétrica e transitiva.

Teorema 2 – Se (a,b) e (c,d) são elementos $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, então $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se, $a \cdot d = b \cdot c$.

Demonstração:

Atendendo o teorema 1.2.2¹², a ii) propriedade, $\bar{a} = \bar{b} \leftrightarrow aRb$:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow (a,b) \sim (c,d) \leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

¹² Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A e a e b elementos quaisquer de A .

Prosseguindo, com a última situação-problema aplicada no quinto encontro com os professores em formação.

V Situação-Problema:

O que é omitido e explicitado no Ensino básico sobre a cadeia das inclusões: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e como o professor de Matemática relaciona a sua competência com a construção desses conjuntos?

O objetivo dessa situação-problema se encontra na concepção do professor em formação, ao formular a ideia do que deve ser concebido e rejeitado no ensino básico (Fundamental I, II e Ensino Médio) a respeito da construção dos conjuntos numéricos, relacionando com a sua percepção sobre como o professor de Matemática demonstra sua competência mediante o contexto de ensino.

Situação de ação: O aluno deve aceitar o problema proposto, assim, assumido a responsabilidade em resolver a atividade proposta pelo professor. Os professores em formação terão que opinar sobre o que deve ser omitido no contexto escolar ou adepto em sala de aula.

Asseguramo-nos que no curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) a matriz curricular do curso consta que os alunos passam a ter contato com o conjunto dos reais cursando a disciplina de Cálculo. Posteriormente, os licenciandos passam a cursar a disciplina optativa 81 e Análise Real. Sendo que essas duas últimas, o conjunto dos $\mathbb{R}$, passa a ser construído pelos cortes de Dedekind e pela sequência de Cauchy.

Situação de Formulação: Os professores em formação passam a criar condições em que construa, progressivamente, uma linguagem compreensível conforme a troca de informações com os demais colegas, considerando o que deve ser omitido e explanado no que se concerne à construção dos conjuntos numéricos.

Situação de Validação: Temos que os professores em formação devem validar sua concepção acerca do motivo do que não deve ser exposto no ensino básico, de forma axiomática e o que não deve ser omitido para os alunos em sala.

Situação de Institucionalização: o professor deve fixar o objeto matemático, explicitamente no estatuto cognitivo do saber. Desse modo, a professora pesquisadora, deve elucidar de forma cronológica como a construção dos números é relevante para compor o entendimento do professor no estado de formação.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) a construção dos conjuntos numéricos é visto na séries iniciais do Ensino Fundamental, se estendendo até o Ensino Médio. Assim, no Ensino Fundamental 6º e 7º ano (3º ciclo), 8º e 9º ano (4º ciclo) a noção de número e operações consta nos livros didáticos, desde o conjunto dos naturais, passando pelos inteiros, racionais, irracionais e reais. No Ensino Médio a noção de topologia dos números reais é pouco mencionada nos Parâmetros Curriculares no Ensino Médio (PCNEM). E na Licenciatura de Matemática o professor em formação deve possuir um entendimento aprofundado do conjunto dos reais, mesmo atendendo aos PCN's e PCNEM na Educação Básica (BRASIL, 1998).

6 ANÁLISES A POSTERIORI E VALIDAÇÃO DA PESQUISA

Neste capítulo, apresentamos e discutimos os dados mais pertinentes que colhemos durante o desenvolvimento das situações didáticas aplicadas com os professores em formação inicial durante a pesquisa. Dessa forma, analisamos os dados de acordo com o delineamento da ED, para que os resultados encontrados possam ser confrontados na fase da análise *a priori*, para ter uma relação com os objetivos definidos *a priori* (ALMOULOU, 2007).

Portanto, analisamos os dados sob perspectiva da ED, como também discutimos as situações didáticas aplicadas nos professores em formação inicial, em meio à retomada de previsões previstas nas análises *a priori* a fim de fazer uma comparação no resultado obtido. À posterior fazemos a validação da nossa pesquisa.

6.1 Análise *a posteriori* da Situação Didática I

A princípio os professores em formação iniciaram a leitura individual, após um momento, se agruparam e iniciaram a avaliação da situação problema, formulando estratégias e resoluções sobre o problema proposto, como havíamos previstos na análise *a priori*.

Dessa maneira, os professores (em formação) foram resolvendo com lápis e papel, a respeito da inclusão dos conjuntos numéricos. De acordo com a fase da formulação, os sujeitos da pesquisa devem trocar informações entre si, assim, os professores em formação argumentaram sobre a imersão dos conjuntos numéricos. Portanto, nesse momento observamos os diálogos entre os professores, a respeito da imersão entre o conjunto dos naturais e o conjunto dos números inteiros se estendendo ao conjunto dos racionais e reais.

Júlia: o conjunto dos naturais é construído pelos axiomas de Peano e através desses postulados definimos o produto entre os naturais.

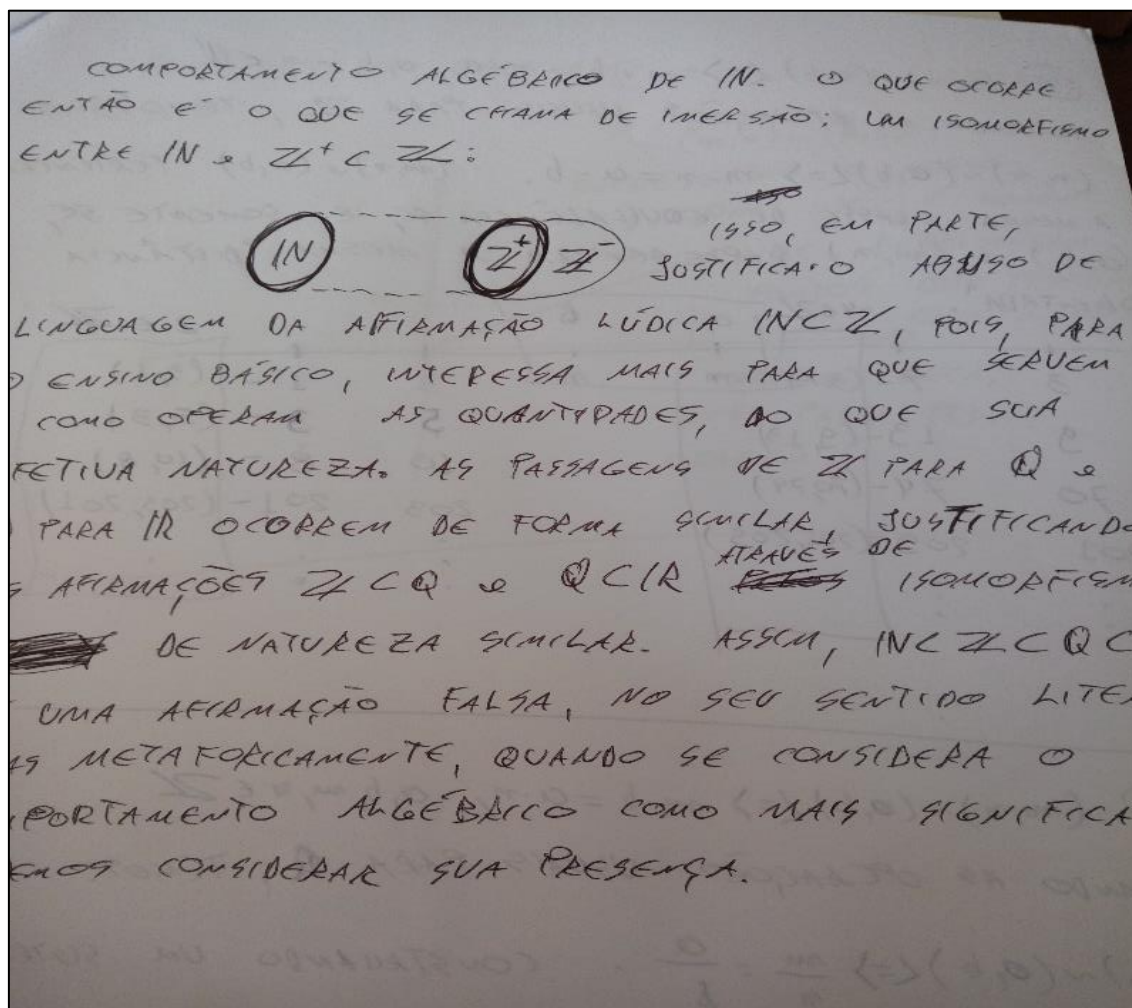
Afonso: Isso mesmo, o conjunto dos naturais é construído axiomáticamente, e, portanto, sabemos que o conjunto dos inteiros é definido pela relação de equivalência entre o conjunto dos naturais e inteiros.

Sara: Esse comportamento sobre as relações de equivalência vale para quaisquer conjuntos. Mas, é importante saber que cada conjunto tem suas particularidades, tiremos como exemplo, o conjunto dos números inteiros possui o inverso aditivo, que no conjunto dos naturais não possui essa propriedade.

Afonso: Verdade, por isso, que quando abordamos essa imersão dos conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ no Ensino básico muitas das vezes, dizemos que o conjunto dos números naturais é um subconjunto dos inteiros, como o conjunto dos números inteiros é subconjunto dos racionais e assim por diante até chegar nos reais. Porém, é uma falsa afirmação, pois cada conjunto tem uma propriedade diferente e por isso não são iguais.

Observamos o registro de um professor para a resolução, nesse caso, Afonso retratou o conjunto dos números inteiros como uma cópia algébrica dos conjuntos dos números naturais como mostra a Figura 12.

Figura 12– Conjunto dos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ como cópia algébrica.



Fonte: dados da pesquisa

Vamos prosseguir com a resolução da questão, no que se concerne a imersão dos conjuntos numéricos, a professora (em formação) Sara desenvolveu sua resolução (Figura 13) explicando que no ensino básico, é superficial a abordagem dos conjuntos naturais, inteiros, racionais e reais, todavia, não é simplória a abordagem puramente matemática, levando em consideração o conhecimento prévio dos alunos do ensino médio.

Figura 13- Concepção do professor a respeito dos conjuntos dos conjuntos numéricos no ensino básico.

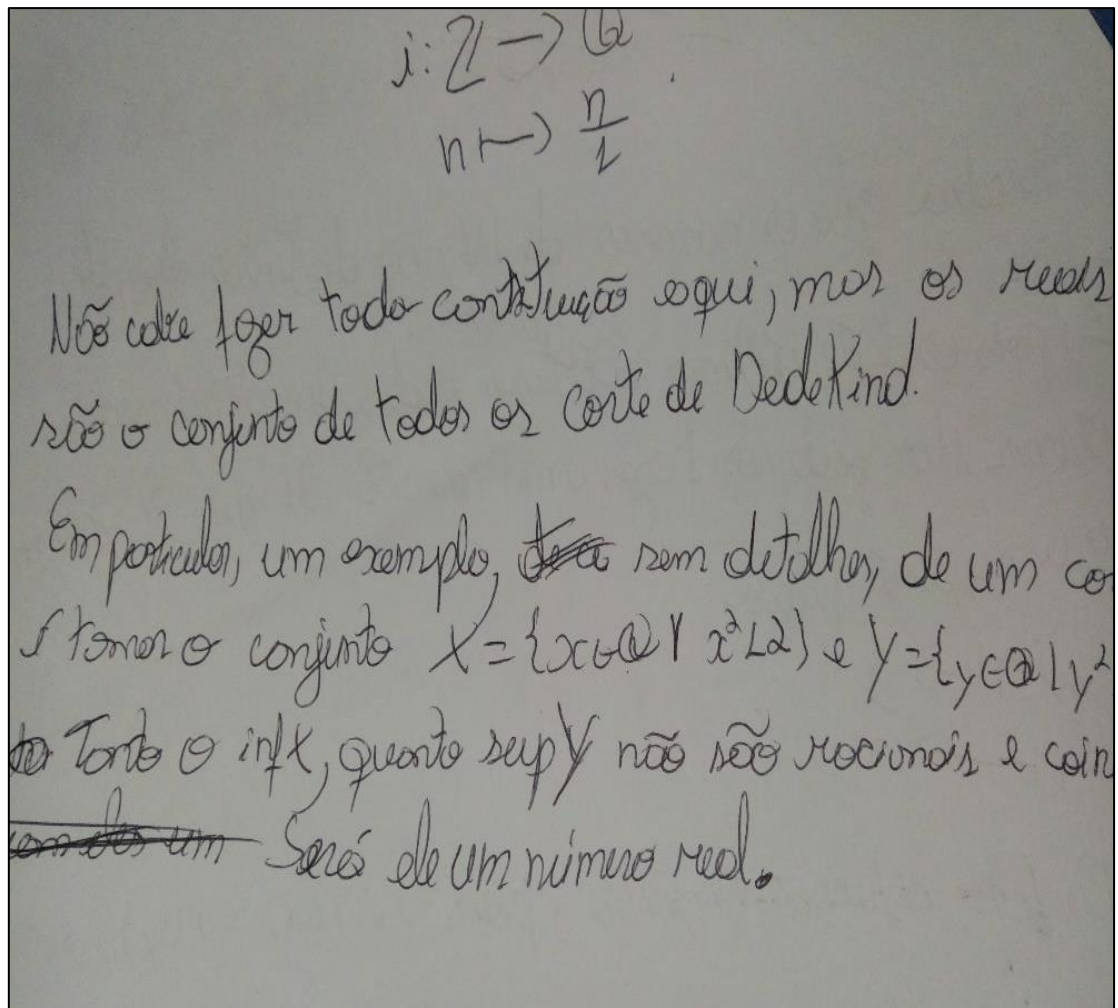
ANTES DISSO, OS ALUNOS JÁ ~~CONHECEM~~ CONHECEM AS
 FRAÇÕES $\frac{a}{b}$, ONDE a e b SÃO NATURAIS. NO
 ENSINO MÉDIO, OCORRE UM SALTO, ONDE NOS É
 APRESENTADO O DIAGRAMA ANTERIOR, COM A APARIÇÃO
 MÁGICA DE $\mathbb{R}$. ~~É~~ É DIFÍCIL EXPLICAR
 QUE NÚMERO IRRACIONAL NÃO É SOMENTE UM TIPO
 DE NÚMERO QUEBRADO. ASSIM DIZEMOS (INFELIZMENTE)
 QUE OS NÚMEROS REAIS É O CONJUNTO COM
 TODOS OS NÚMEROS.
 ASSIM OS CONJUNTOS SÃO EXPLICADOS COMO SE
 CONSTRUÍDOS POR ACRÉSCIMOS A CONJUNTOS JÁ
 EXISTENTES, FICANDO ASSIM JUSTIFICADA A ~~CONCLUSÃO~~
 AFIRMAÇÃO: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Fonte: Dados da pesquisa

Analisamos a transcrição do professor Henrique no papel e lápis (Figura 14), o mesmo expôs seu método de resolução, ao confirmar que os números reais fazem parte do conjunto do corte de Dedekind. O conjunto dos números reais pode ser demonstrado de várias formas, uma forma simples de ser demonstrada é através de propriedades do axioma fundamental¹³ (corpo ordenado e completo). Os conhecimentos prévios do professor (em formação) Henrique, respaldou que os cortes de Dedekind é uma extensão dos reais, a partir da noção das propriedades do axioma fundamental, e, sobretudo citou que no conjunto dos reais (não vazio), quando não limitado superiormente, possui supremo.

¹³ Axioma dos Reais: Existe um corpo ordenado e completo, tido por $\mathbb{R}$, chamado de o corpo dos números reais.

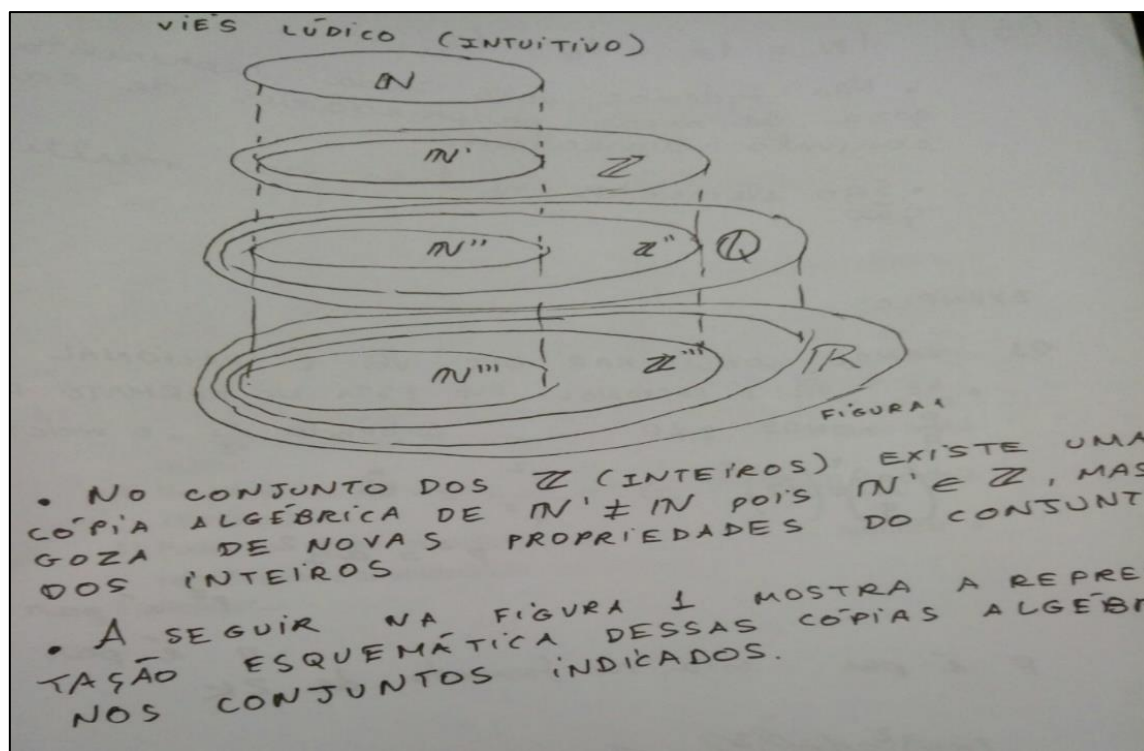
Figura 14- Construção dos Reais via corte de Dedekind



Fonte: Dados da pesquisa

Em relação à questão, a interpretação visual que o professor em formação expõe. Notemos que na Figura 15, existe uma passagem algébrica para a interpretação visual. Notemos que Afonso (professor em formação), forneceu uma interpretação de como a construção dos conjuntos é feita, através da cópia algébrica em cada conjunto, e que todo conjunto tem suas propriedades em particular.

Figura 15- Interpretação visual dos conjuntos numéricos

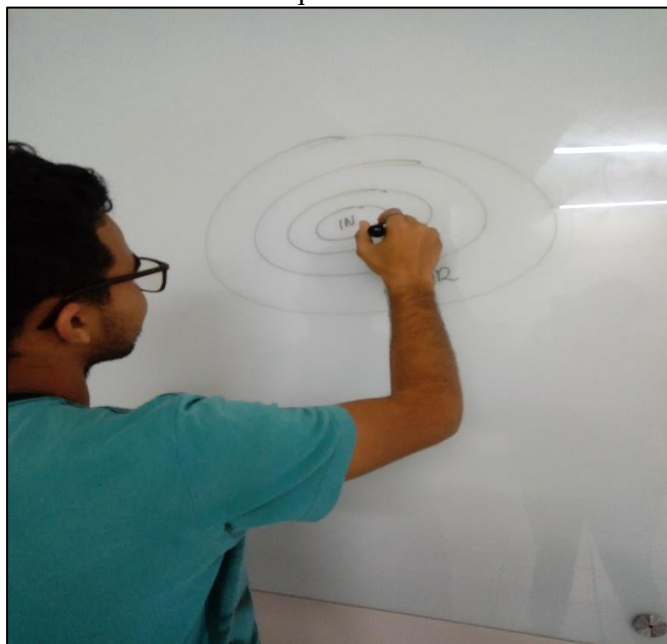


Fonte: Dados da pesquisa

Na Figura 16, outro professor em formação Henrique, buscou validar no quadro sua resposta, nos atemos ao que o Henrique explicou na formulação. Através de um áudio coletamos sua explicação, assim:

Henrique: De maneira interpretativa visual, no ensino básico a imersão dos conjuntos é feita "erroneamente", muitas das vezes nós professores temos o costume de fazer a relação: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, afirmando que os conjuntos fazem parte uns dos outros, ou seja, o conjunto dos números naturais faz parte dos números inteiros, o conjunto dos números inteiros faz parte dos números racionais, e o conjunto dos números reais abrange todos os demais conjuntos. Falando historicamente, o homem passou a utilizar o objeto de contagem e atribuímos aos naturais, o zero apareceu pelos Hindus, posteriormente, devido ao cálculo e a utilização no cotidiano, foi surgindo a subtração de objetos e introduzimos o conceito dos números inteiros, a repartição de um objeto na forma fracionária ao conjunto dos números racionais e os reais é o conjunto que aborda todos os números. Essa concepção explicativa que os alunos do ensino fundamental aderem. Todavia, de maneira axiomática, entendemos que cada conjunto atende a uma propriedade específica, e isso diferencia os conjuntos numéricos.

Figura 16 - Professor em formação no momento da validação fornecendo a visualização da questão



Fonte: dados da pesquisa

Os objetivos para essa situação didática foram alcançados. Os quatro professores em formação inicial: Sara, Henrique, Afonso e Júlia conseguiram compreender o que a questão solicitava. Usaram seus conhecimentos prévios acerca da imersão $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, e procuraram transpor a parte algébrica para a noção interpretativa visual, procurando explicar a abordagem dos conjuntos numéricos no ensino básico.

Percebemos também elementos da Situação Didática Profissional (SDP) determinada pelo plano da sala de aula, condicionadas por um conjunto de situações profissionais, determinada para a aquisição de um conhecimento profissional pragmático, construídos na ação da situação de trabalho. Elencamos tais pressupostos da SDP aos observarmos a partir do momento da validação dos professores em formação inicial, Henrique, Sara, Júlia e Afonso constroem os conceitos científicos pragmáticos em sala de aula na imersão dos conjuntos numéricos.

No que se concerne a Institucionalização, a professora pesquisadora validou a questão com os principais teoremas que comprovam a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Para o conjunto dos naturais os axiomas de Peano garantem a existência dos números, e a relação de ordem. O conjunto dos inteiros obedece a algumas propriedades, em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definindo uma relação de equivalência. O conjunto dos racionais a partir do $\mathbb{Z}$, com a estrutura algébrica nas operações binárias definindo um *corpo*. O conjunto dos reais como um conjunto estabelecido por axiomas que garantem a estrutura de um *corpo ordenado e completo*. Ainda, a professora

pesquisadora discutiu a relevância da formação dos professores estarem ligados a conteúdos da análise matemática, visto que alguns teoremas são fundamentais para manter a formação completa do professor de matemática, perante a vida profissional do professor.

6.2 Análise *a posteriori* da Situação Didática II

Na presente situação didática, de modo análogo à atividade passada, os professores em formação na fase da ação, reuniram-se e discutiam sobre a questão concerne à imersão do conjunto dos números naturais nos números inteiros. Assim, gravamos em forma de áudio com auxílio do smartphone a discussão dos professores.

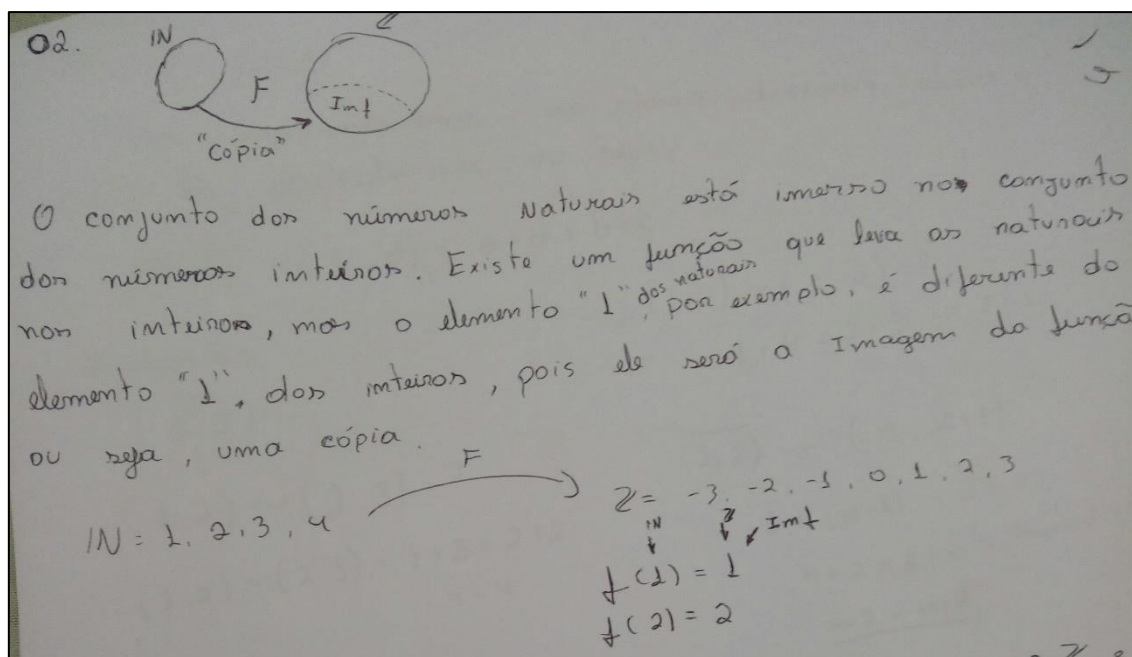
Júlia: Sabemos que os números naturais são construídos axiomáticamente falando pelos três postulados de Peano. Depois, fazendo a relação binária dos conjuntos, satisfazendo as propriedades da reflexão, transitividade e antissimetria, constrói-se o conjunto dos naturais. O conjunto dos inteiros é construído por uma relação de ordem entre os naturais.

Afonso: Isso é só o começo, pois, a inclusão dos conjuntos dos naturais e inteiros, está em cada conjunto manter suas propriedades, não podemos afirmar que um número que está no conjunto dos inteiros é o mesmo que está no conjunto dos naturais. Por isso, de um modo equivocado passamos a explicar os alunos do ensino médio que o conjunto dos naturais faz parte do conjunto dos inteiros.

Henrique: Observemos que um número que pertence ao conjunto dos naturais, não é o mesmo do conjunto dos inteiros. Então, para uma inclusão do conjunto dos naturais nos números inteiros, algumas propriedades são diferentes, no conjunto dos inteiros tem-se o elemento inverso aditivo, e eu não posso dizer que o número nove pertence ao conjunto dos naturais, sendo que o mesmo pertence ao conjunto dos inteiros, pois nove “menos” nove resulta em zero. Portanto, falando matematicamente o conjunto dos naturais não é um subconjunto dos inteiros, mas sim, o conjunto dos inteiros para estar contido nos naturais deve possuir uma espécie de cópia isomórfica nos números naturais.

Em relação à questão da situação didática, apresentamos a figura 17, do professor Henrique, o mesmo descreve que o conjunto dos naturais está sim imerso no conjunto dos inteiros, partindo do pressuposto da cópia algébrica de um conjunto no outro, uma ideia intuitiva por parte do professor manifestou-se pelos conhecimentos prévios que o mesmo discutiu na fase da ação com os demais colegas.

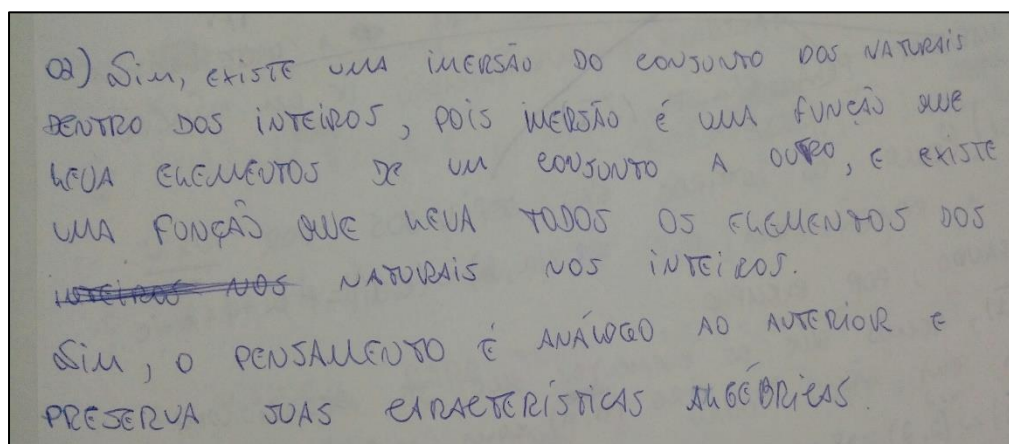
Figura 17- Descrição da questão, feita por um professor em formação.



Fonte: dados da pesquisa

Na Figura 18, o professor em formação indica que existe sim uma imersão do conjunto dos naturais, nos inteiros. A produção escrita do Afonso nos leva a compreender que por pensamento intuitivo, sem precisar demonstrar axiomáticamente que os conjuntos naturais e inteiros estão imersos, ou seja, não foi demonstrado que os naturais existem a partir dos axiomas de Peano, e que o conjunto dos inteiros é feito através de classes de equivalência. Todavia, o professor manifesta um certo conhecimento prévio que leva o mesmo a sentenciar a resposta como verdadeira.

Figura 18- Momento da formulação de um professor.



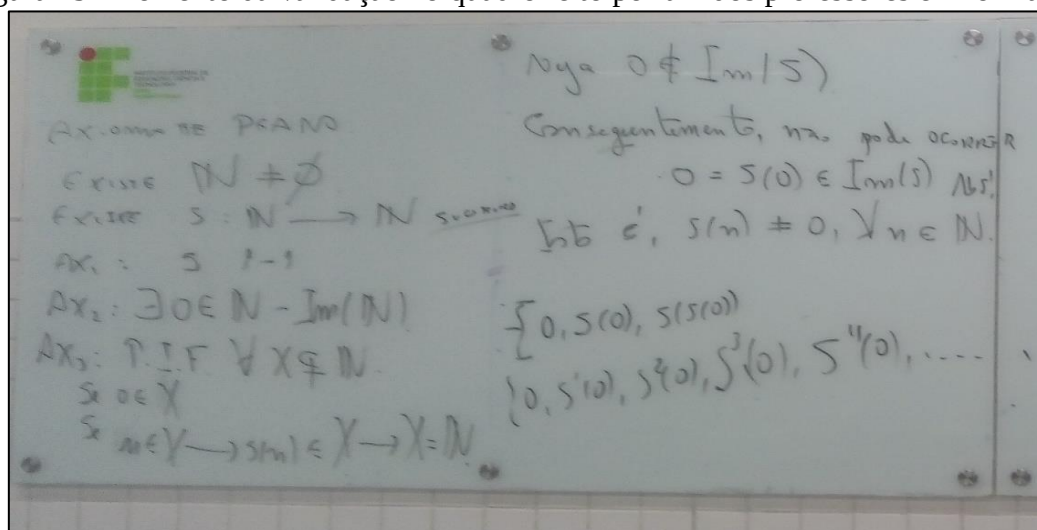
Fonte: dados da pesquisa

Na fase da validação temos que a professora Sara, representou no quadro a construção dos naturais (figura 19), levando em consideração os três axiomas de Peano, como previmos anteriormente. Coletamos o áudio através de um smartphone o que a professora explicou no momento da validação:

Pesquisadora/professora: Os axiomas de Peano que você traz, é base para demonstrar que o conjunto dos naturais existe?

Sara: Sim, os três postulados que Peano construiu é base para demonstrar que o conjunto existe. E, sabemos que o conjunto dos Inteiros é construído pela relação de equivalência no conjunto dos naturais, com isso afirmamos que existe sim uma imersão de um conjunto no outro.

Figura 19- Momento da validação no quadro feito por um dos professores em formação.



Fonte: dados da pesquisa

O objetivo da nossa situação didática foi atendida os professores em formação compreenderam a imersão dos conjuntos entre os naturais e inteiros, como também usaram axiomáticamente algumas propriedades que afirmavam a existência dos conjuntos. Assim, a partir de um conhecimento prévio, alguns professores em formação utilizaram somente o pensamento intuitivo argumentativo que os conjuntos possuem uma imersão.

Vislumbramos os objetivos da nossa pesquisa ao fazer a complementariedade da TSD com a DP, prosseguimos com a pesquisa ao observar que os professores em formação inicial atenderam que o aprendizado está relacionado com a atividade, pois, mediante a definição de Pastré (2007) o aprendizado de um conhecimento teórico converge para uma ação na atividade. Explicitamos que quando o sujeito aprende uma atividade, é preciso fazer a distinção entre a atividade destinada a ser aprendida e a atividade realizada no momento da aprendizagem.

Portanto, os professores em formação: Sara, Henrique, Júlia e Afonso utilizaram o conhecimento epistêmico na Situação Didática Profissional para uma maior compreensão da atividade-aprendizagem do professor de Matemática. Os professores em formação ao estarem mediante uma SDP e o *modus operandi* do aprendizado no trabalho funciona perante os dois registros: o registro do sucesso da tarefa (pragmático) e o registro da conceitualização (epistêmico).

6.3 Análise *a posteriori* da Situação Didática III

Nessa atividade os professores em formação na situação da ação, se agruparam para discutir sobre a noção de classes de equivalência. Conforme havíamos previstos nas análises *a priori*, os professores discutiram como os inteiros são construídos a partir das classes de equivalência, gravamos através do smartphone a discussão entre os sujeitos da pesquisa.

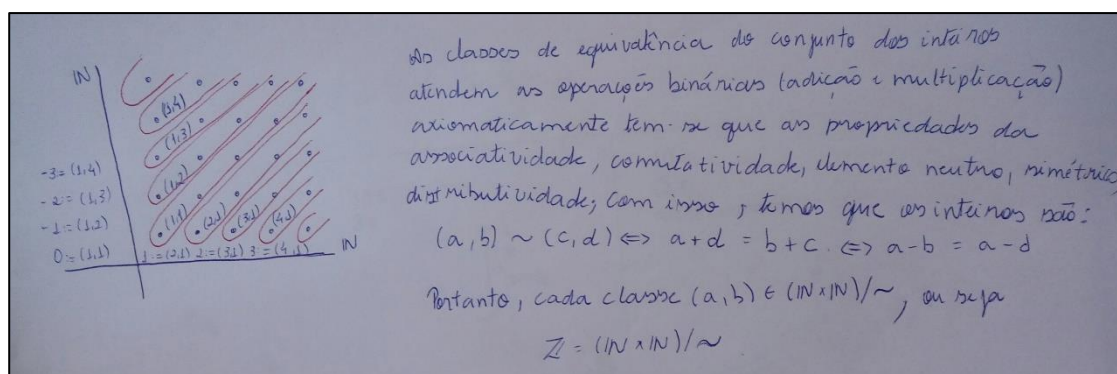
Afonso: A construção dos números inteiros está na relação dos conjuntos dos números naturais, atendendo a algumas definições, como transitividade, reflexibilidade e simetria.

Sara: Isso mesmo, mas não é só apenas isso que devemos entender. O importante é a relação de equivalência entre os conjuntos, tomando uma partição entre os naturais.

Júlia: As operações binárias atendem as classes de equivalência para construir o conjunto dos inteiros. Partindo do que a questão pede, para adição, então as propriedades devem ser atendidas para definir as classes de equivalência.

No momento da formulação, a professora (em formação) Júlia definiu sua resposta a base dos conhecimentos prévios que a mesma já possuía a respeito da formação de classes de equivalência no conjunto dos números inteiros, na Figura 20 apresentamos como a Júlia formulou sua resposta. Além do mais, a professora (em formação inicial) explicou de modo axiomático algumas propriedades da adição, como também interpretou a forma no plano.

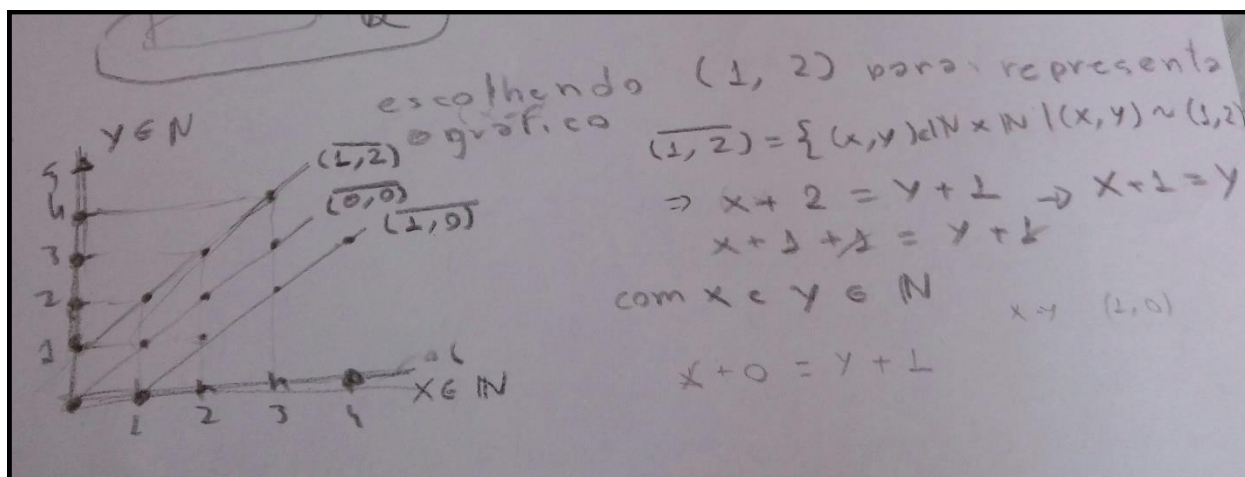
Figura 20- Momento da situação da formulação de um dos sujeitos da pesquisa.



Fonte: dados da pesquisa

Sabemos que as relações de equivalência são importantes. Ela junta elementos de um determinado conjunto, transformando em subconjuntos com elementos equivalentes ou que se relacionam entre si. Portanto, continuando as situações da TSD, o professor Henrique expôs sua resolução a respeito da classe de equivalência no conjunto dos números inteiros, conforme a Figura 21, o professor representou algebricamente e em seguida, transpôs para o registro gráfico.

Figura 21- Resolução de um professor em formação inicial.

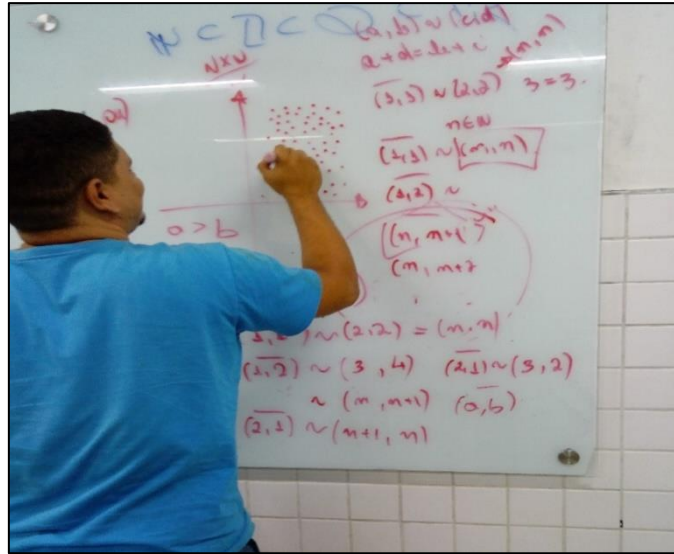


Fonte: dados da pesquisa

O professor (em formação inicial) Henrique da figura anterior escolheu dois elementos, atendendo a construção dos inteiros, tidos como: $\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, por uma classe de equivalência. Sabemos que na adição atende as propriedades, como o conjunto dos inteiros é definido como $[(a,b)] + [(c,d)] = [(a+c, b+d)]$.

Prosseguindo com os dados, na situação de validação, professores em formação tentaram confrontar os dados obtidos na produção algébrica feito na situação de formulação, como a produção algébrica através da construção do conjunto dos inteiros por meio das classes de equivalência, conforme as Figuras 22 e 23 mostram. Usamos o smartphone para gravar o áudio, visando o diálogo dos professores em formação manteve durante a validação.

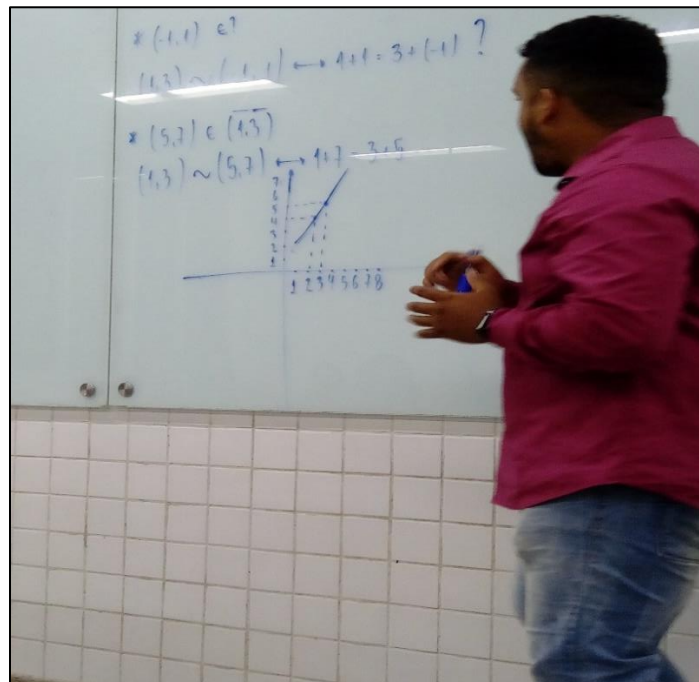
Figura 22- Momento da validação do professor 1 (Afonso).



Fonte: dados da pesquisa

Afonso: Sabemos que um conjunto é definido por duas operações binárias, e a partir desse pressuposto, devemos atender a alguns axiomas para definir o domínio de integridade do corpo. Sendo um corpo formado pelas operações de adição e multiplicação. Então, podemos falar de grosso modo que o conjunto dos números inteiros é formado, a partir do conjunto dos números naturais, pela ordem, e essa ordem expressada pela relação $a < b = b - a$, sendo que $a < b$ é derivado da existência do conjunto dos inteiros positivos, tidos como o conjunto dos números naturais. Pela relação de um conjunto entre o outro, formando classes de equivalência. Claramente, posso afirmar que $[(a,b)] + [(c,d)] = [(a+c, b+d)]$. Contudo, posso criar classes de equivalência, e mostrar os pares formados entre os infinitos pontos na parte dos inteiros $a > b$ (positivos).

Figura 23- Professor 2 (Henrique) no momento da validação mediante a situação problema.



Fonte: dados da pesquisa

Henrique: O conjunto dos inteiros, é definido como o conjunto de relação de equivalência $[(a,b)] \sim [(c,d)]$ nos números naturais. Atendemos a reflexibilidade, simetria e transitividade. Então, $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$ na operação de adição, temos que $[(a,b)] + [(c,d)] := [(a+c, b+d)]$. Portanto, eu posso escolher pares de números e fazer a relação entre ambos, isso significa que se eu escolher os pares ordenados (5,7) e (1,3), fazendo a relação entre ambos $(1,3) \sim (5,7)$ será $1+7 = 3+5$, assim comprovando que os pares são equivalentes, pois convergem para o mesmo resultado, e assim, escolhemos vários pares e nesses formaram pontos no plano cartesiano.

Assim, pelo desenvolvimento dos professores 1 e 2 em formação inicial, conforme apresentaram na fase da experimentação da atividade iii, no caso de ambos percebemos que obtiveram um bom desenvolvimento e compreensão perante a construção dos números inteiros, como também a passagem algébrica para a visualização no plano, comprovando que os conhecimentos prévios foram essenciais para o resultado da questão.

No momento da institucionalização a professora pesquisadora demonstrou que as operações binárias definem o corpo. E que nos números inteiros são criados a partir $\frac{(\mathbb{N} \times \mathbb{N})}{\sim}$, na operação da adição é definido $[(a,b)] + [(c,d)] = [(a+c, b+d)]$, demonstrando que $[(a,b)] = [(a', b'')]$ e $[(c,d)] = [(c', d'')]$. E que o conjunto dos Inteiros é construído como classes de equivalência.

Portanto, o que foi previsto nas análises *a priori*, foram atendidas em relação à resposta esperada dos professores em formação perante a pesquisa, como também as produções escritas foram satisfatórias para verificarmos o entendimento dos professores a respeito das classes de equivalência dos números inteiros.

Para concluir a presente situação, registramos que os professores em formação seguiram o plano da instituição perante a Situação Didática Profissional, assim, o conhecimento técnico usado na situação de validação transpareceu no plano de atuação institucional mediante as tarefas oficiais, exigidos por regras. No caso, os professores seguiram a norma da utilização dos conhecimentos prévios a respeito da construção das classes de equivalência dos números inteiros, situados nos livros didáticos, de modo particular, acentuado no livro: a construção dos números.

6.4 Análise *a posteriori* da Situação Didática IV

Na respectiva situação, dando prosseguimento a análise *a posteriori* na situação da ação, os professores em formação inicial, individualmente leram o enunciado da questão, e, em seguida se agruparam para discutir a questão sobre os números racionais. Assumimos que havíamos previsto esse comportamento na análise *a priori*, dessa forma, gravamos no

smartphone o áudio, onde eles discutiam entre si, lembrando que isso pode ocorrer no decorrer das situações adidáticas (formulação, validação).

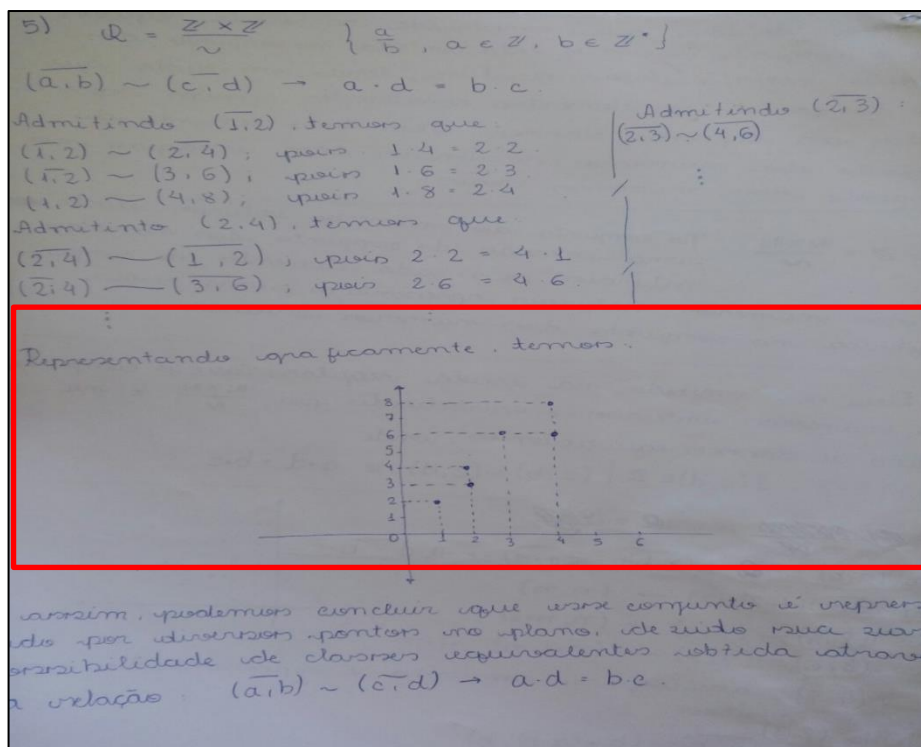
Afonso: Para construir o conjunto dos racionais, é necessário utilizar os conceitos de classes de equivalência a partir dos inteiros, que de modo análogo é definido a partir dos números naturais.

Júlia: Concordo com você, porém no ensino básico, a representação de um racional é tida pela razão entre dois números inteiros, e desta razão significa uma divisão, ou seja, $\frac{a}{b}$.

Henrique: A construção dos inteiros, racionais e reais, são todos formados por classes de equivalência, porém, todo conjunto possui uma singularidade. Os racionais, são formados por classes de equivalência dos inteiros, atendendo as operações binárias, no plano cartesiano, esses pares ordenados formam pontos.

Na formulação, encontramos na resposta da professora em formação inicial: Sara, ela dizia que os números racionais são formados pelo conjunto quociente entre os $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ pela relação de equivalência $\sim$, sendo assim, o conjunto $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*) / \sim$ resultando $\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \}$. Percebemos $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são considerados números racionais, ou seja, são elementos de $\mathbb{Q}$, a partir disso a professora em formação, a partir dos conhecimentos prévios define as operações binárias (adição e multiplicação) particularmente voltando para o produto, assim $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Na Figura 24, a professora Sara destaca sua interpretação algébrica, a partir das operações escolhendo pares de números em meio às classes de equivalência, criando pontos no gráfico.

Figura 24- Rascunho de uma professora em formação na situação IV.



Prosseguindo as análises, notamos que o professor em formação Henrique demonstrou em sua resposta o domínio prévio do conhecimento a respeito do conjunto dos racionais. Atendendo que a construção dos racionais está presente na classe de equivalência dos números inteiros. Na Figura 25, o professor detalhou os pares ordenados representantes, o professor ainda representou graficamente como os pontos formados pelos pares ordenados se comportam no plano cartesiano.

Figura 25- Momento da formulação de um professor em formação.

05. $\mathbb{Q} = \frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{\sim}$, em que $\frac{a}{b} = \{(a,b), \text{ com } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* / (a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a \cdot d = c \cdot b\}$

Veja bem, para tal interpretação, é necessário os casos iniciais, vamos verificar alguns:

$\frac{1}{2}, (1,2)$, quem são os representantes?

$(1,2) \sim (3,6) \Rightarrow 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \checkmark \quad | \quad (1,2) \sim (4,8) \Rightarrow 1 \cdot 8 = 2 \cdot 4 \checkmark$

Pois bem, a classe $(1,2)$ tem como representantes os pares ordenados da seguinte maneira $(n, 2n)$, pois $(1,2) \sim (n, 2n)$ com $n \in \mathbb{N}$.

Vamos verificar a classe $(1,1)$

$(1,1) \sim (2,2) \Rightarrow 1 \cdot 2 = 2 \cdot 1 \checkmark \quad | \quad (1,1) \sim (3,3) \Rightarrow 1 \cdot 3 = 3 \cdot 1 \checkmark$

Pois bem, os representantes da classe $(1,1)$ podem ser escritos da seguinte maneira (n,n) com $n \in \mathbb{N}$.

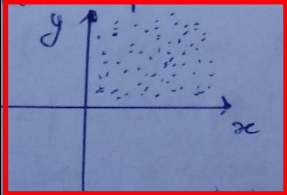
Vamos verificar a classe $(2,1)$

$(2,1) \sim (6,3) \Rightarrow 2 \cdot 3 = 6 \cdot 1 \checkmark \quad | \quad (2,1) \sim (8,4) \Rightarrow 2 \cdot 4 = 8 \cdot 1 \checkmark$

Pois bem, os representantes da classe $(2,1)$ podem ser escritos da seguinte maneira $(2n,n)$ com $n \in \mathbb{N}$.

Então disto, seguindo o raciocínio proposto, é possível verificar infinitos representantes.

Existem infinitos pontos, e o processo de tal construção é análogo ao já apresentado.

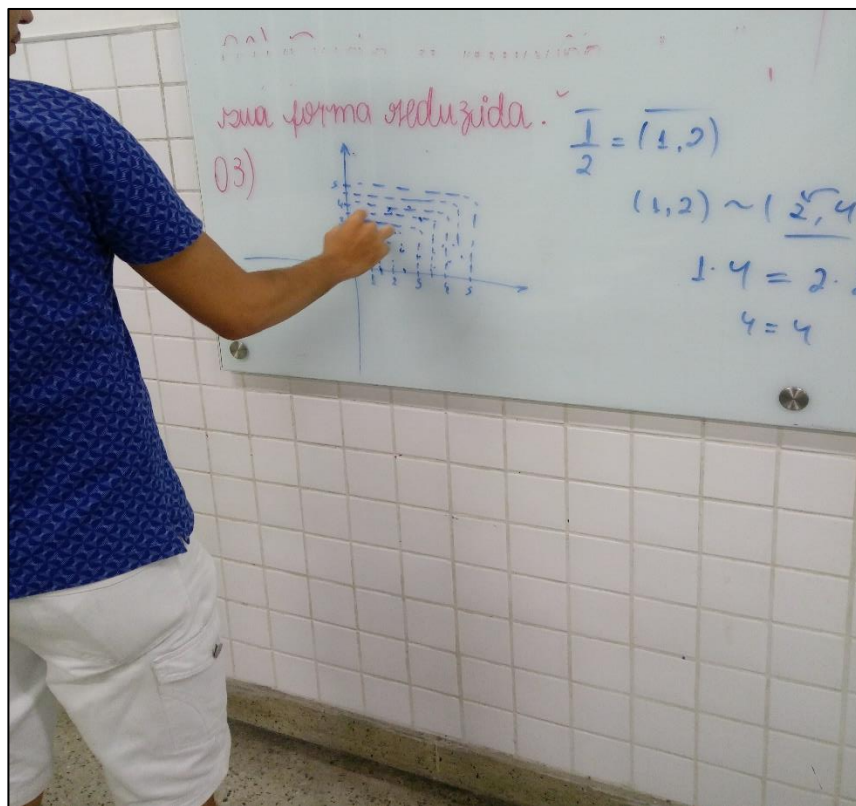


Fonte: dados da pesquisa

No momento da validação, temos que o professor Afonso foi para o quadro validar e confrontar os dados entre a produção algébrica e a produção gráfica. Gravamos através de um smartphone o áudio, e o professor em formação deduziu que:

Afonso: Consideremos a construção do conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \}$. Atribue-se uma relação de equivalência se atender a reflexibilidade, e simetria. Assim, na reflexiva, temos que, se $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$, $a.b = b.a$, então temos que $(a,b) \sim (a,b)$. Portanto, atendendo a simétrica da demonstração que $a, c \in \mathbb{Z}$, $b, d \in \mathbb{Z}^*$ e $(a,b) \sim (c,d)$, então, $a.d = b.c$, ou ainda, $cb = d.a$, ou seja, $c.b = d.a$, logo, $(c,d) \sim (a,b)$. E se $a, c, e \in \mathbb{Z}$, $b, d, f \in \mathbb{Z}^*$, temos que os pares $(a,b) \sim (c,d)$ e $(c,d) \sim (e,f)$, temos que: $a.d = bc \Rightarrow adf = bcf \Rightarrow cf = de \Rightarrow bcf = bde$. Dessa forma, $adf = bde$, como $d \neq 0$, $af = be$, que significa, $(a,b) \sim (e,f)$. Com isso, está provada a existência do conjunto dos Racionais, agora, podem-se escolher pares ordenados para formar pontos, por exemplo, eu escolho os pares $(1,2) = \frac{1}{2}$ e terá uma relação com o par $(2,4) = \frac{2}{4}$ assim, $(1,2) \sim (2,4) = 1.4 = 2.2$ será $4 = 4$, passando a criar vários pares para fazer a relação e a partir disso criar diversos pontos no plano cartesiano.

Figura 26- Momento da validação de um professor em formação.



Fonte: dados da pesquisa

Para a institucionalização a professora/pesquisadora utilizou a demonstração para provar que o conjunto dos racionais é feito a partir de classes de equivalência entre os números inteiros. Portanto, é sabido que para compor a construção, deve-se definir as operações binárias (adição e multiplicação), assim, foi definida bem o produto da operação, logo $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ e $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, então, $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'}$. Ao provar que, $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ e $\frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'} = \frac{a'c'}{b'd'}$. Por ora, a construção dos Racionais na multiplicação requer o uso do neutro multiplicativo $\frac{1}{1}$, assim,

dado um racional definido por $\frac{a}{b} \neq \frac{0}{1}$, existindo um $\frac{c}{d}$ em $\mathbb{Q}$ de tal forma que $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{1}{1}$, ou seja, todo elemento não nulo do conjunto dos racionais possui um inverso multiplicativo.

Visto que os professores mobilizaram os conhecimentos prévios a respeito do conjunto $\mathbb{Q}$, apesar de não demonstrarem axiomáticamente a construção com os pares ordenados na situação de formulação, todavia, os professores em formação atenderam o objetivo da presente situação-problema ao conseguirem explorar no plano cartesiano a partir das classes de equivalência do conjunto $\mathbb{Q}$.

No que se concerne a SDP os professores em formação seguiram o plano da sala de aula (binômio: professor-estudantes) caracterizado como um conjunto de situações profissionais, acentuadas no conhecimento pragmático profissional. Assim, durante a aplicação da situação problema notamos que na situação da ação os professores argumentaram entre si a partir da vivência e experiência conteudista sobre as classes de equivalência do conjunto $\mathbb{Q}$. Sabemos que o conceito teórico não mede conhecimento, todavia, o conceito teórico serve para orientar a ação na situação de trabalho. Portanto, os organizadores da atividade de trabalho são de natureza conceitual.

6.5 Análise *a posteriori* da Situação Didática V

Na atividade V, temos que na situação da ação os professores em formação inicial receberam a situação proposta aceitando-a, passando a trocar experiências pelas vivências passadas. Acentuamos que a situação requer a percepção do professor em formação inicial a respeito da competência profissional que o professor de Matemática demonstra no trabalho (sala de aula). Gravamos através de um smartphone a discussão entre os professores de formação:

Júlia: Uma possível omissão relacionada à competência do professor de matemática está na falta de conhecimento, pois, o professor poderá omitir tal conhecimento por não possuí-lo. Eu tiro como exemplo, no ensino fundamental ensinamos os alunos progressivamente a respeito dos conjuntos numéricos a cada série, e somente no ensino médio o aluno de fato vai compreender os conjuntos numéricos. E se porventura, tiver um professor que não souber de fato a construção dos conjuntos, levando em consideração a axiomatização ele não conseguirá ensinar o aluno o que dá para ser omitido e o que deve ser demonstrado.

Henrique: Isso é verdade, a competência de um professor está no domínio conteudista, e principalmente para o professor de matemática, irei administrar um exemplo, é comumente atribuído à omissão da “matemática pura” no ensino básico devido o entendimento dos alunos. A matéria é considerada uma das mais difíceis, imagine se demonstrássemos que o conjunto dos naturais é construído pelos axiomas de Peano e assim, para os demais conjuntos.

Sara: Na construção dos conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ algumas propriedades são omitidas devido o professor não poder repassar para os alunos de fato as demonstrações, a

competência de um professor deve estar presente nesse quesito, no mesmo criar soluções para os seus alunos mediante o conhecimento dele. Por exemplo, na construção dos inteiros, não podemos demonstrar que a criação advém de uma classe de equivalência, ou seja, a transposição do conhecimento do professor para o aluno é limitado.

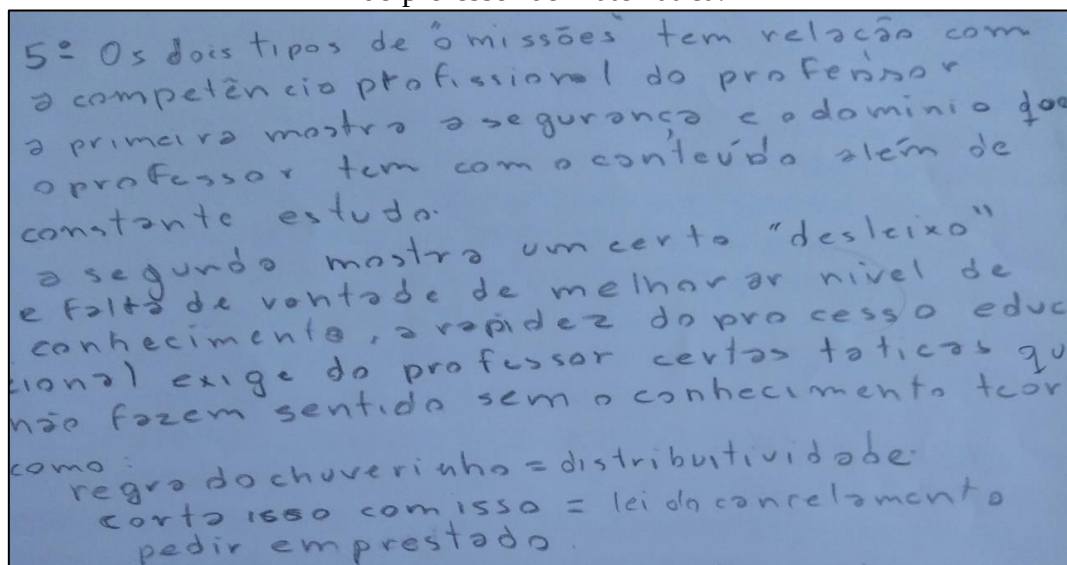
Afonso: Muitos professores omitem o salto entre os racionais e irracionais, adicionamos alguns conceitos para tornarmos a matemática mais compreensível, apesar de sabermos que estamos errados ao ensinarmos dessa forma, ensinamos que os conjuntos são diferentes e a construção $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}, \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ é totalmente diferente do que aprendemos durante a formação. E a competência do professor está em conhecer as propriedades fundamentais da Matemática e não de fato repassar como tal e qual aprenderam na faculdade, mas de introduzir de maneira correta aos alunos.

Os professores em formação conseguiram dialogar as conclusões acerca do modo operacional implicando na competência do professor de matemática a respeito dos conjuntos numéricos. Percebemos que na verbalização dos quatro professores todos discutem diretamente elementos da DP, dessa forma, Júlia e Henrique apresentaram em suas falas que o conhecimento epistêmico é um dos fatores que determinam a competência do professor. Todavia, a competência de um sujeito se mostra em habilidades, conhecimento, saber fazer, e na inteligência operacional no trabalho.

Identificamos, nos diálogos de Sara e Afonso que a competência está presente nas situações de trabalho que o professor toma de forma inesperada, ou seja, conforme o professor é confrontado com problemas novos, o mesmo consegue se adaptar pelo modo operatório (esquemas em ação) assim, conseguindo desenvolver uma aprendizagem profissional em sala de aula.

Na Figura 27, expomos a produção de um professor em formação Henrique respondeu a partir dos seus conhecimentos a respeito da competência do professor de matemática. Dessa forma, ficou explícito que na concepção do professor em formação, o sujeito (professor) mostra sua competência por meio do conhecimento epistêmico. De modo analítico e individual, na ação do trabalho a concepção da competência é atrelada ao conhecimento acadêmico. Todavia, segundo Vergnaud (2007) a competência se mostra a partir dos conceitos pragmáticos movidos pelos esquemas cognitivos mediante as situações de trabalho que um sujeito apresenta no trabalho.

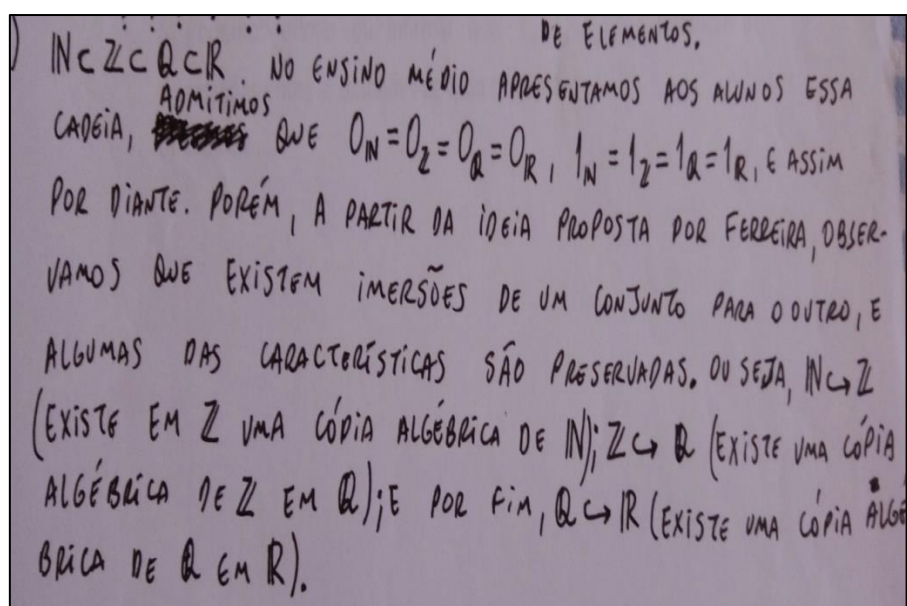
Figura 27- Momento de formulação de um professor a respeito da competência profissional do professor de Matemática.



Fonte: dados da pesquisa

Na produção escrita de outro professor em formação no processo de formulação, percebemos que na figura 28, Afonso descreveu que a inclusão dos conjuntos tem suas particularidades preservadas, porém, todo conjunto tem características semelhantes, como a preservação da cópia isomórfica. Identificamos que a Transposição Didática é fortemente preservada mediante a perspectiva dos professores em formação inicial, ou seja, perante a Didática Profissional o conceito epistêmico ainda se faz muito presente para identificar a competência de um sujeito no trabalho, todavia, a ação pragmática se acentua na Transposição Profissional (TP) na situação profissional do professor.

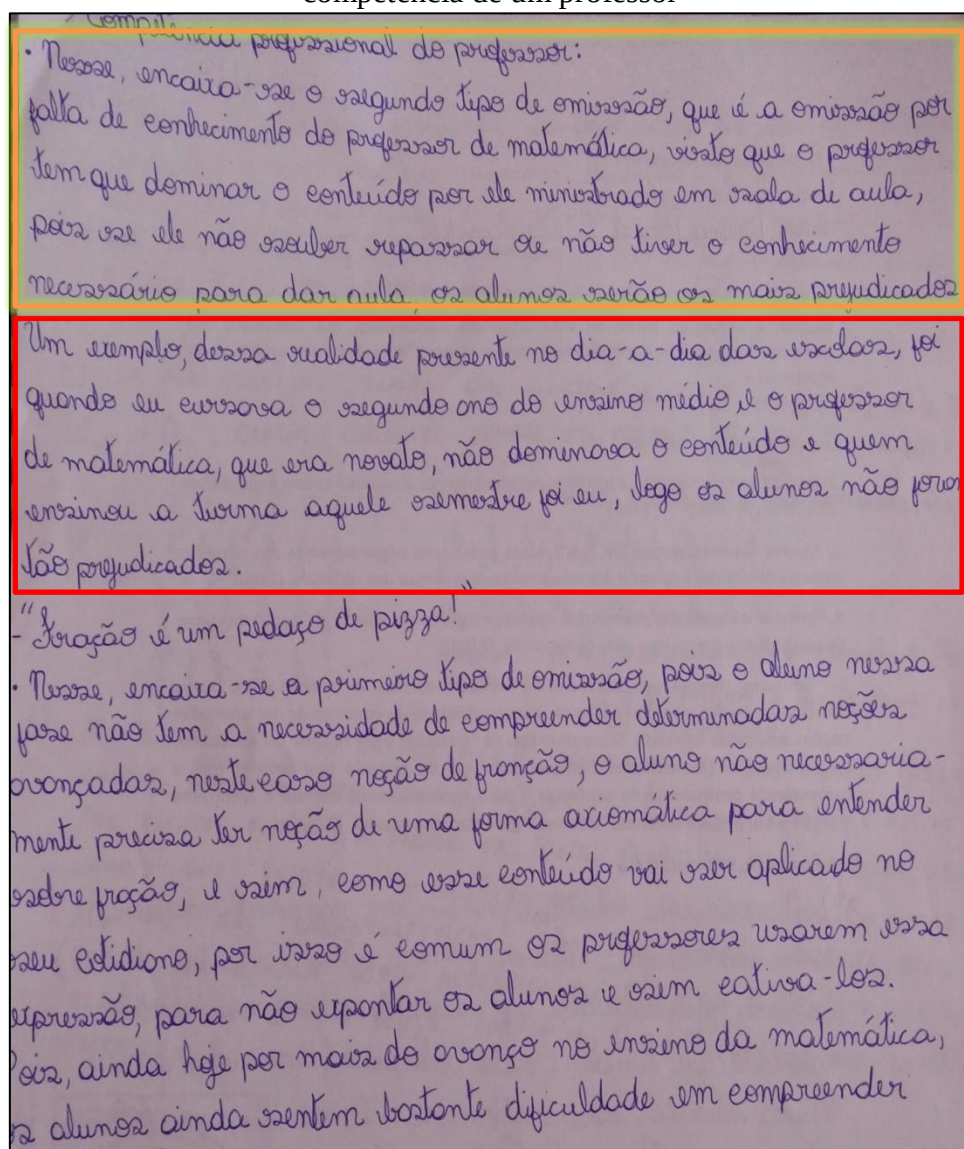
Figura 28- Momento da formulação de um sujeito da pesquisa



Fonte: dados da pesquisa

Portanto, ainda na situação da formulação uma professora em formação Júlia descreve que a competência de um professor se mostra no conhecimento matemático que o mesmo transpassa para seus alunos, ou seja, a competência recai sobre o conhecimento epistêmico (Figura 29). Porém, o conhecimento propriamente dito serve para organizar a ação do sujeito no trabalho, sendo assim, a atividade do professor deve ser orientada pelo conhecimento matemático que o mesmo possui, todavia a ação pragmatizada está presente na situação de trabalho real. Pastré (2011) certifica-se que alguns profissionais não seguem apenas às tarefas prescritas ou orientadas por regulamentos rígidos, eles quando são defrontados por situações de atividades reais manifestam decisões intuitivas adquiridas pelas experiências passadas e movidas pela ação pragmática.

Figura 29 – Momento da formulação de uma professora em formação descrevendo a competência de um professor



De modo prosaico, ainda é possível observar pela descrição da professora Júlia na Figura 29 que a TP está presente, sabendo que a dupla: professor – professores ou colegas de profissão, determinam um conjunto de transformações lidam com um certo conhecimento pragmático, condicionadas também por situações profissionais, determinada por professores experientes ou professores novatos.

Diferente das atividades anteriores, essa situação requereu dos alunos uma percepção sobre a competência do professor de Matemática, para acentuarmos os elementos da DP levando em consideração como as habilidades do professor de Matemática devem ser construídas perante a Situação Didática Profissional (SDP). Isso posto, assumimos que a competência de um professor não se mostra somente no saber, mas, no modo operatório e nas circunstâncias adaptativas perante a situação de trabalho. Portanto, a competência de um professor não se restringe somente no campo epistêmico clássico demonstrado pelo saber matemático.

Assim, os professores em formação representaram a percepção sobre o que omitiam no contexto escolar sobre a inclusão dos conjuntos, relacionando a importância do conhecimento epistêmico e pragmático na formação das habilidades do professor, porém, as análises mostram que perante SDP no plano posto de trabalho movidos pelo professor- colegas de profissão, os professores em processo de formação levaram em consideração que a competência de um professor está no saber (conhecimento científico).

Em seguida, institucionalizamos devido às contribuições dos professores em formação no processo de formulação, observamos a partir das respostas como os mesmos avaliavam o plano posto de trabalho entre professor-professores (colegas de trabalho), avaliando a competência do professor de Matemática no posto de trabalho, e fizemos uma relação com os pressupostos da DP mediante a situação de trabalho.

Na próxima seção, apresentamos as análises das entrevistas dos professores em formação inicial, apontaremos como a Didática Profissional relaciona-se com as perspectivas dos professores em formação.

6.6 Análise das entrevistas

Optamos realizar uma entrevista semiestruturada, com os mesmos professores apresentados anteriormente em formação inicial. Como realizamos uma entrevista semiestruturada as perguntas já estavam formuladas a respeito dos conjuntos numéricos ao

qual estamos investigando para adequar ao objetivo da pesquisa, articulando as concepções dos professores em formação junto com os elementos da DP, podendo ser conferido no Apêndice C (pág. 148). Alguns autores (TRIVIÑOS, 1987; MANZINI, 1991) caracterizam a entrevista semiestruturada, a partir de questionamentos básicos, que devem estar relacionados ao tema da pesquisa. Em nosso caso, as perguntas estavam acerca da DP para que pudéssemos compreender como o conceito dos conjuntos numéricos são construídos de forma conceitual através da formação inicial dos professores.

As entrevistas aconteceram sob duração de 180 minutos, e tal registro foi feito para analisar como os professores possuem o conhecimento sobre os conjuntos numéricos em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ a respeito da competência profissional do professor de Matemática, considerando que são professores em formação pela descrição do modelo cognitivo de Ochanine (1981) classificados como profissionais novatos (inexperientes).

Assim, de acordo com os autores Pastré, Mayen, Vergnaud (2006) a experiência no trabalho está de acordo com a situação vivida no trabalho, oportunizando a criação do pragmatismo decorrente do trabalho. Logo, como nossos sujeitos da pesquisa estão acerca de profissionais em formação inicial, admitimos que o processo das situações de trabalho que os envolvem estão sob-retorno da ação do aprendizado, da interpretação das situações. Acrescentamos ainda que a experiência faz parte da realização da ação construídas no trabalho, refletindo no campo pragmático.

Portanto, caracterizamos nossos professores em formação inicial por nomes fictícios, e classificados como profissionais inexperientes. Exibiremos a seguir as respostas dos mesmos mediante a série de perguntas que fizemos levando em consideração a um dos objetivos acerca da nossa pesquisa, na análise da DP perante o campo de trabalho do professor de Matemática, fazendo uma complementariedade dos conceitos da DP e DM, como também iremos encaixar nas categorias criadas a partir da DP.

Usamos a análise de categorias, e criamos quatro classes: i) perpassa do epistêmico para o pragmático, ii) habilidade no repasse do saber, iii) omissão do conhecimento epistêmico, iv) plano nos campos de competência do professor (SDP) . Para a construção de classes é necessário atender algumas regras (CARLOMAGNO; ROCHA, 2016, p. 185):

- a) é preciso existir regras claras sobre os limites e definição de cada categoria;
- b) as categorias devem ser mutuamente exclusivas;
- c) as categorias devem ser homogêneas;
- d) é preciso que as categorias esgotem o conteúdo possível;
- e) é preciso que a classificação seja objetiva, possibilitando a replicação do estudo.

Assim, a classe i) situa-se na competência do professor mediante os conceitos cognitivos serem mediados pela concentração epistêmica ou pragmática. A classe ii) se encontra na habilidade que o professor manifesta no repasse conteudista (conjuntos numéricos). Na classe iii) o professor seleciona a omissão de certos conceitos abstratos no ensino básico, por fim, a classe iv) situa a competência do professor perante a SDP (plano de sala de aula, plano posto de trabalho, plano instituição de ensino). Temos que essas categorias se mostram relevantes perante a análise das entrevistas. Iremos exibir o Quadro 7.

Quadro 7- Categorias criadas para analisar as entrevistas

classes categóricas	classe i	classe ii	classe iii	classe iv
descrição das categorias (i, ii, iii, iv)	i) Concentração do epistêmico ou pragmático	ii) repasse do saber matemático	iii) omissão conteudista	v) inserção da SDP

Fonte: Elaboração dos autores

Nas falas a seguir mostraremos as respostas dos professores em formação: Sara, Júlia, Afonso e Henrique, mediante a entrevista ocorrida a respeito da omissão do conjunto dos números naturais.

Professora pesquisadora: *Em sua opinião, o que é necessário omitir no contexto escolar (educação básica) sobre o conjunto dos números naturais?*

Afonso: *É necessário omitir a construção de Peano no ensino básico. Por exemplo a construção dos números naturais na ideia dos livros do Elon Lages o número um pertence aos naturais, sendo este o menor elemento do conjunto, conseqüentemente o número dois é sucessor do número anterior, no caso um. Por trás desse raciocínio é omitido vários teoremas. Nós professores trabalhamos superficialmente devido o pouco entendimento dos alunos no conteúdo matemático, e, portanto, temos que adequar o conhecimento que o aluno possui com o conteúdo a ser ensinado.*

Sara: *Devemos omitir algumas construções puramente matemáticas, sabe-se que o princípio da indução finita é super importante na construção do conjunto dos números naturais, porém, não podemos exibir tal demonstração aos alunos do ensino básico, os alunos não possuem “bagagem conteudista” para entenderem.*

Henrique: *Os teoremas de Peano, a construção finita e infinita e etc. Nós professores mostramos superficialmente alguns conceitos do conjunto dos naturais. Geralmente exibimos o conjunto, relatamos que cada número possui um sucessor, apresentamos a relação de ordem, mas, não aprofundamos muito no conteúdo matemático levando em consideração o aprendizado que o aluno traz.*

Júlia: *Nós professores de Matemática, sabemos que trabalhar com os conceitos abstratos da Matemática é complicado para um determinado público, principalmente se este determinado público não possui um conhecimento anterior que abarque o saber instantâneo. Os axiomas de Peano não podem ser repassados do mesmo jeito que visualizamos na formação, porém, o professor deve adaptar os conceitos para o aprendizado dos alunos do ensino básico. Acredito que o aluno possui uma ideia intuitiva do conjunto dos naturais, como: o conjunto dos números positivos na reta numérica, trabalhamos um pouco no ensino médio no conteúdo de*

funções. No entanto, não aprofundamos axiomáticamente o conjunto tanto pela abordagem do livro didático como pela falta de entendimento por parte do aluno.

Os professores em formação: Afonso, Sara, Henrique e Júlia manifestaram em suas falas a classe ii “repasso do saber matemático”, classe iii “omissão conteudista” e classe iv “Situação Didática Profissional nos planos: professor-estudante; professor-professores”.

O professor em formação inicial Afonso concluiu que o profissional da educação necessita omitir a construção do conhecimento epistêmico acerca do conjunto $\mathbb{N}$ se enquadrando na classe iii, como também afirmou que o professor deve possuir o conhecimento teórico ou conteudista estando apto para lecionar mesmo às vezes não ensinando de fato o conhecimento epistêmico (conjunto $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) com isso percebemos a classe ii. Assim, também percebemos o plano iv na SDP o plano: professor-estudantes movido pela situação profissional na sala de aula mobilizada pelos esquemas de ação do professor ao intervir e compreender que o aluno não possui um conhecimento prévio para a aplicação de um novo saber, mas, que adequa o conhecimento epistêmico a realidade do aluno, criando uma ação pragmática no trabalho.

A professora Sara, assim como o professor Afonso, manifestou as categorias ii, iii, e iv na sua representação verbal, a mesma explica que as omissões de determinados conteúdos matemáticos são necessários, prevendo que aquele aluno não possui o conhecimento prévio que garanta a aprendizagem daquele conteúdo matemático, a omissão conteudista adequa-se na classe iii, o repasse conteudista que o professor deve possuir na classe ii, e a SDP no plano: professor-estudantes ao compreender que o professor adapta o saber a realidade de conhecimento do aluno.

O professor Henrique da mesma forma, que os colegas anteriores, manifestou seu interesse verbal nas classes ii, iii, e iv (plano: professor-estudantes). Afirmando que alguns professores omitem a construção finita e infinita no conjunto $\mathbb{N}$, percebemos a classe iii. Mesmo ele não aplicando o conhecimento teórico acerca da construção axiomática do conjunto $\mathbb{N}$, ele deve saber do conhecimento epistêmico, levando em consideração a bagagem conteudista que o aluno traz. Percebemos o plano ii e iv em ação.

A professora Júlia assim como os demais colegas manifestou as classes ii, iii e iv (plano: professor-estudantes), porém ela interpretou duas categorias da SDP, planos: professor-alunos e professor-instituição. A mesma afirma que o professor de Matemática deve entender que o aluno do ensino básico não possui um conhecimento prévio que garanta a aprendizagem, por isso, ele deve omitir alguns conceitos em função dessa realidade e fazer uma modificação na transposição dos saberes. Percebemos a omissão conteudista, classe iii;

concentração do saber epistêmico, classe ii; adequação dos saberes e modificação, criando uma ação pragmática no trabalho, classe iv plano :Professor-alunos, além do mais no plano iv, percebemos que a Júlia manifestou a o plano: professor-instituição ao afirmar que os professores seguem o material didático, ou seja, no posto de trabalho existe um regime de regras que o professor deve seguir.

Continuando a entrevista a respeito das concepções dos professores sobre a omissão no contexto escolar no conjunto dos números inteiros.

Professora pesquisadora: *Você como professor de Matemática costuma omitir alguma construção do conjunto dos números inteiros?*

Júlia: *No contexto da educação básica a demonstração sobre o conjunto dos números inteiros a partir de classe de equivalência dada pela relação do conjunto dos naturais não pode ser exibida. De início a construção é muito complexa, sendo resguardada para ensino superior. Portanto, existe sim uma omissão para o conjunto dos números inteiros para o ensino básico.*

Afonso: *Durante a explicação da construção dos números inteiros geralmente omitimos muitos teoremas e demonstrações. Explicar para um aluno que o conjunto dos números inteiros é construído pela relação dos naturais e que possui uma cópia isomórfica que garante a existência do conjunto, é muito complexo. Um professor segue o material didático, aproveito para falar que os livros didáticos não abordam tão profundamente os conceitos da matemática pura, que são colocados em bacharelados e licenciaturas.*

Henrique: *Os alunos mantêm contato desde as séries iniciais sobre os conjuntos numéricos, no entanto, somente no Ensino Médio é que o aluno realmente tem um melhor entendimento a respeito dos conjuntos. Todavia, ainda é muito difícil o aluno compreender alguns teoremas que pertencem a Matemática Abstrata. Explicar para os alunos que o conjunto dos números inteiros é construído pela relação de equivalência do conjunto dos naturais e mostrar ainda as propriedades da adição e multiplicação é um desafio para o professor de Matemática.*

Sara: *A construção dos inteiros pela parte axiomática é muito difícil de explicar para os alunos, mas, isso não quer dizer que o professor deva omitir a construção inteira dos inteiros. Alguns conceitos os alunos não vão compreender pelo o uso dessa matemática abstrata. Primeiro, os livros não abordam tais conceitos de maneira aprofundada, já começa o problema daí, o professor se torna limitado para tais explanações em sala de aula. No entanto o professor deve instigar os alunos a compreenderem a construção dos inteiros por parte dos teoremas.*

A professora Júlia apresenta características em sua fala da classe iii, no que se concerne à omissão conteudista, pois, alguns conteúdos são resguardados apenas para o ensino superior, se mostrando irrelevante para o conhecimento do aluno no ensino básico.

O professor Afonso manifestou em sua fala a classe iii e classe iv (plano: professor-instituição) afirmando que existe uma omissão necessária para os alunos do ensino regular, pois os mesmos não possuem uma bagagem conteudista anterior que os façam compreender os conceitos tão abstratos. Como também manifestou a classe iv no seu relato, no plano: professor-instituição, afirmando que o professor segue o livro didático para dar suas aulas,

confirmando que o professor segue um plano institucional que regulariza o ofício do trabalho do professor de Matemática.

O professor Henrique manifestou a classe iii e a classe iv (plano: professor-estudantes). Afirmando que o professor precisa omitir alguns conceitos em função da não compreensão dos alunos, adequando a passagem verbal na classe iii. Na classe iv o professor Henrique concordou que o professor de Matemática possui desafios no trabalho, ou seja, o professor possui obstáculos profissionais e mesmo assim adequa o problema com a tarefa em execução, construindo o pragmatismo no trabalho.

A professora em formação Sara manifestou a classe iii e classe iv (plano: professor-instituição) mostrando em sua fala que o professor deve omitir alguns conceitos que no momento não servirão para o aprendizado dos alunos no ensino básico, atendendo a classe iii. Assim, na classe iv o professor se torna limitado também no seu campo de trabalho devido à abordagem dos livros diáticos, seguindo uma regra determinada pelo trabalho.

Dando prosseguimento as entrevistas, a pergunta desse questionamento está na omissão dos números dos números racionais e como o professor aborda tal questionamento na educação básica.

Professora pesquisadora: *Você costuma omitir algo na educação básica em relação ao conjunto dos números racionais, e como você aborda o conjunto $\mathbb{Q}$ no ensino regular?*

Henrique: *Não demonstro em sala as abordagens da matemática pura, como por exemplo, não demonstro a construção dos racionais sob as classes de equivalência, não uso tal demonstração, pois os alunos não possuem um conhecimento anterior que os façam entender. Eu apresento o conceito dos racionais adaptando o conhecimento teórico com o saber dos alunos.*

Sara: *Apesar dos racionais serem conhecidos apenas como “números fracionários” não demonstro a parte da relação de ordem, que cabe a flexibilidade, a simétrica e a parte transitiva. Abordo o conjunto Racional conforme o livro didático dos alunos. Não abordo algo que não esteja no livro.*

Júlia: *Nós professores sabemos que o conjunto $\mathbb{Q}$ é uma cópia algébrica em $\mathbb{Z}$ e esse comportamento também se repete dos inteiros nos naturais. Com essa demonstração sabemos que definimos o conceito de infinitude. Porém, eu não abordo esse conceito em sala de aula, e acredito que muito dos professores também omitem essa parte. Costumamos apresentar superficialmente que os números são infinitos para os alunos do Ensino Médio, não abordamos o conceito na “raiz do cálculo”.*

Afonso: *Os números racionais são conhecidos como os números de fração, porém, não costumo apresentar o teorema fundamental das frações, mesmo sendo simples, mas, no livro didático não abre espaço para demonstrações rigorosas das construções axiomáticas de quaisquer conjuntos. E nós professores seguimos o material didático, pois faz parte da escola regimentar o que deve ser dado em sala de aula.*

Compreendemos que os professores em formação: Henrique, Sara, Júlia e Afonso manifestaram as classes: iii e iv (no plano: professor-estudantes; professor-instituição) nas suas respectivas falas.

Assim, o professor Henrique manifestou a classe iii em sua verbalização, observamos que o professor em formação inicial falou que não demonstra alguns conceitos matemáticos a respeito do conjunto dos racionais devido os alunos não possuírem uma bagagem conteudista anterior, e na classe iv, Henrique se adequou no plano: professor-estudantes ao falar que o professor adequa o conhecimento epistêmico para uma abordagem que o discente entenda. Logo, o plano: professor-estudantes se enquadra no contexto, ao professor construir o pragmatismo.

A professora em formação Sara manifestou assim como o professor anterior a classe iii ao afirmar que omite alguns conceitos matemáticos, e para a classe iv manteve no plano professor-instituição, ao seguir a abordagem do livro didático, seguindo assim o regimento que a instituição estabelece.

A professora Júlia manifestou a classe iii ao assumir que omite alguns conceitos tipicamente da matemática pura no ensino básico. E costuma abordar o conjunto $\mathbb{Q}$ de forma superficial.

O professor Afonso manifestou as classes iii e iv no plano: professor-instituição. Na sua abordagem verbal ao afirmar que omite alguns conceitos, apesar se achar simplório, mas que segue o livro didático e que no material regimentado pela escola, não está exposto tais conceitos tão abstratos da matemática abstrata, portanto percebemos a classe iv em ação.

Ainda continuando sobre as entrevistas, na seguinte pergunta estava atrelada omissão dos números reais na educação básica. E como os professores em formação responderam o questionamento.

Professora pesquisadora: *No seu entendimento como professor, o que é necessário omitir no contexto escolar sobre a noção dos números reais?*

Júlia: *O professor de matemática, não pode levar a parte mais rigorosa para os alunos sobre os números reais, especificando a construção das sucessões de Cauchy por meio dos cortes de Dedekind. Seria interessante o professor levar para os alunos a ideia de existência do que na unicidade dos números reais, ou falar da completude dos números reais. Mas a ideia intuitiva partindo da reta é algo muito longo. O professor consegue repassar para os alunos do ensino básico tranquilamente até os números racionais, e se o professor conseguir repassar até depois dos racionais é um ótimo começo. Agora não dá para mostrar a ideia de um corpo, dá para o professor mostrar a existência e a definição.*

Afonso: *O professor de matemática não deve omitir nada na construção dos números reais no ensino básico, com exceção da construção dos cortes de Dedekind.*

Sara: O professor deve omitir a construção dos números reais e explicar o conceito básico do conjunto, levando em consideração o uso cotidiano dos discentes para tornar mais singelo à explicação dos números reais.

Henrique: O professor não deve levar a parte do corte de Dedekind na construção dos números reais e a parte axiomática, pois, os alunos não têm interesse em adquirir determinados assuntos complexos.

Os professores em formação: Júlia, Afonso, Sara e Henrique, manifestaram em seus discursos e percepções sobre o conjunto $\mathbb{R}$ a classe iii, ao afirmarem que os conceitos puramente matemáticos a respeito deste conjunto devem ser omitidos sim, devido aos alunos não possuírem um conhecimento prévio no Ensino básico.

Dando continuação as entrevistas, foi questionado agora movendo a compreensão dos alunos perante a competência do professor de matemática na construção dos conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

Professora pesquisadora: Explique como o professor de matemática faz uma relação da competência profissional com a construção dos conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$. Como também dê sua opinião entre a relação construída no trabalho entre professor, alunos, colegas de trabalho e instituição implicam na competência do professor de Matemática?

Sara: Primeiramente o professor competente deve ter domínio sobre os conteúdos. Principalmente no que concerne aos números reais, pois o professor insere esse saber matemático quase o ensino médio todo no ensino de funções. Apesar de que o professor não utilizar os conceitos vinculados a matemática pura, é preciso ter conhecimento para repassar um conteúdo de melhor qualidade para seus alunos, e adequar o ensino do livro para tornar entendível aos alunos. No campo de trabalho, geralmente o professor é visto competente pelos alunos na forma do repasse de conteúdo, para os colegas de trabalho o professor é visto competente quando o mesmo atende os requisitos na relação entre os colegas, ou quando, os professores percebem que os alunos estão tendo rendimento na aprendizagem. E para a instituição o professor é competente quando ele tras resultados para a escola, chega no horário, quando não tem reclamação e etc.

Afonso: O professor precisa ter os conhecimentos aprofundados na matemática para poder explicar a construção dos números e repassar de uma maneira mais simples para os alunos entenderem, ou, se porventura algum aluno levantar algum questionamento sobre a construção dos números, o professor deverá ter os conhecimentos devidos para responder devidamente o aluno. No que se desrespeita a competência do professor para os colegas de trabalho está nas referências dos alunos, de observar se o professor segue o regimento da escola ou instituição de ensino. E para a instituição o professor é competente pelas estatísticas do rendimento dos alunos, refletindo na nota.

Henrique: Deve fazer parte do professor esse conhecimento a respeito da construção numérica, ele deve possuir a base para ensinar os alunos. E deve ser competente ao repassar o conteúdo e explorar os alunos para influenciar a inclusão da construção dos números reais, naturais, racionais e reais. Para os colegas de profissão o professor é competente se tiver domínio de diversas situações advindas da sala de aula e ele conseguir se sobressair daqueles problemas. Para a instituição,

acredito que o professor seja avaliado como competente se não houver reclamações e se ele conseguir trazer resultados para a escola.

***Júlia:** Apesar da omissão de grande parte dos conteúdos um pouco mais complexos, o professor deverá mostrar sua competência ao entender a matemática rigorosa, mesmo sem utilizá-la em sala de aula. Para os alunos um professor competente é aquele que sabe repassar bem o conteúdo. Nós que estamos na graduação, somos ao mesmo tempo professores e alunos. Avaliamos os professores pelo repasse de conteúdo que reflete no aprendizado. Da mesma forma, quando vamos para a sala de aula, nossos alunos nos avaliam dessa mesma forma. Já para os colegas de trabalho, o professor é competente quando ele consegue seguir as regras da escola, quando consegue ter uma boa comunicação com os demais professores. Na instituição, acredito que o professor se mostra competente quando ele consegue demonstrar uma série de atribuições, ou seja, quando ele tem uma relação de compromisso com o aprendizado dos alunos, que respeita os colegas de trabalho, que segue o horário, e que acima de tudo “veste a camisa” da escola.*

Percebemos que nos trechos das falas de Sara, Júlia, Afonso e Henrique manifestam a categoria de classe i) “concentração do conhecimento epistêmico ou pragmático”, classe ii) “repasse conteudista” iii) “omissão conteudista” e a classe iv) SDP (planos: estudantes-professores; professor-professores; professor-instituição).

Na fala da professora Sara a mesma discorre sobre a competência do professor se manifesta no domínio conteudista (classe i). Ainda fala que o professor deve omitir alguns conceitos da Matemática devido os alunos não possuírem um conhecimento prévio que abarque o conteúdo axiomático (classe iii). E que a competência do professor perante a SDP nos três planos, professor-estudantes, é visto que os alunos determinam a competência do professor no conhecimento epistêmico e na transposição didática. No campo professor-professores o professor mostra sua competência na relação interpessoal com os demais colegas de *métier* compartilhando experiências de modo explícito ou implícito. Por fim, a professora em formação moveu a competência no plano professor-instituição é relacionado a uma série de habilidades que o mesmo deve possuir como chegar no horário, levar resultados positivos para a escola, isso implica na aquisição de características que determinam a competência derivadas do seu ofício no trabalho.

Na concordância do professor Afonso, o mesmo fala que a competência está situada no saber, ou seja, no domínio conteudista (classe i) apesar de não serem exatamente repassados ou ensinados no campo de atuação de trabalho (sala de aula), implicando na classe iii. Já o professor em formação fala que a competência perante os planos da SDP estão no plano professor-estudantes mediado pelos alunos compreenderem as aulas e os conteúdos, ou seja, movidos pela aquisição do conhecimento profissional pragmático, construído no ambiente de trabalho (sala de aula). No plano professor-professores Afonso aponta que está nas referências determinadas pelos alunos, ou seja, circunstanciada pelas situações

profissionais construídas em sala de aula e compartilhada. Portanto, o professor assume que no plano professor-instituição a competência no gerenciamento de habilidades que o mesmo deve possuir perante as normas de trabalho exigidas, como o sucesso da tarefa (ensinar) refletindo na nota dos alunos.

O professor em formação Henrique comenta verbalmente que a competência do professor deve estar atrelado a primórdio no saber, ou seja, no domínio de conteúdo (classe i) para o êxito no repasse conteudista (classe ii). Assim, no que concerne a competência aliada a SDP o professor no plano professor-estudantes, a habilidade em repassar o conteúdo e o aluno conseguir aprender (transposição didática). No plano professor-professores a competência do professor está na atuação de se sobressair das situações advindas do trabalho (obstáculo profissional) e, compartilhadas com os demais colegas. Finalmente, no plano professor-instituição a competência está no processo do regimento dos documentos oficiais da instituição de ensino, percebemos na fala “se não houver reclamações”, ou seja, que está tendo êxito na tarefa prescrita (ao ensinar).

A professora Júlia falou que a competência do professor deve estar presente no domínio conteudista (classe i) apesar da omissão dos conceitos abstratos perante a construção dos conjuntos numéricos (classe iii). A professora em formação ainda expressa em sua fala que no plano professor-estudantes a competência está atribuída no ensino e aprendizado. No plano professor-professores a competência está presente no modo inter-relação com os demais colegas no campo de trabalho, e também no que se concerne a seguir os ofícios do trabalho. Já no plano professor-instituição o professor é competente ao seguir as regras normatizadas no trabalho, Júlia discursa isso nas frases “respeitando os colegas”, “compromisso com o aprendizado dos alunos”, assim, o conhecimento técnico está situado na atuação de trabalho derivada pelo perfil docente requerido pela sociedade.

Por conseguinte, em processo contínuo das entrevistas, com o presente questionamento vinculado ao professor noviço e experiente refletindo na sua competência profissional.

Professora pesquisadora: Na sua opinião o que difere um professor experiente de um professor inexperiente e como mostra a competência dessas duas categorias de profissionais?

Henrique: um professor experiente tem uma abordagem conteudista diferenciada do professor inexperiente. O professor inexperiente tem um conceito mais teórico, diferente do professor experiente que já devido a sua prática transcorrida nos anos profissionais consegue abordar determinados conteúdos de maneira mais fácil. Portanto, a competência de um professor sem

experiência se mostra na capacidade da abordagem conteudista muito fiel ao material, diferente do professor experiente que não usa mais o material didático para dar suas aulas, o conteúdo já está “na veia” justamente pelas experiências passadas.

Júlia: *um professor experiente não é avaliado somente no seu domínio de conteudista, mas que consegue fazer uma adaptação do conteúdo mediante a turma. O professor experiente consegue perceber visualmente os obstáculos que os alunos terão mediante determinado conteúdo e que ele ao perceber essa implicação conseguirá deixar o conteúdo mais fácil para os alunos. Já o professor inexperiente, não consegue ter o mesmo nível do professor experiente, isso que difere as duas classes de profissionais.*

Sara: *Um professor experiente é aquele que consegue se sobressair das situações do seu trabalho, independente dos problemas externos que vierem a surgir. Um exemplo clássico que é vivenciado por qualquer professor é substituir um colega no trabalho que está ausente por algum motivo e tem que haver uma substituição. O professor inexperiente não consegue acompanhar a turma da substituição por não a conhecer, e a aula talvez não saia tão proveitosa. Já um professor experiente consegue sobressair desses acontecimentos por ter mais tempo no ambiente de trabalho e por passar por essas situações na carreira profissional, acredito que a competência de ambas as categorias se mostra exatamente nas situações que acabei de falar.*

Afonso: *Um professor inexperiente fica mais suscetível ao erro, tem uma abordagem conteudista muito similar na teoria da graduação. Já um professor experiente tem mais domínio no seu campo de trabalho. Isso implica na sua competência, a abordagem conteudista atrelada ao livro pertence ao professor sem experiência. Já o professor experiente consegue dominar uma classe de situações advindas do trabalho, por exemplo, é notório que os professores com experiência erram menos que os professores sem experiência e a competência está se mostra exatamente nesse ponto.*

Os professores em formação: Henrique, Júlia, Sara e Afonso, mobilizaram a categoria de classe i “competência mediante o pragmático ou científico”.

O professor em formação Henrique manifestou a classe i ao discorrer que o professor inexperiente tem uma abordagem conteudista fortemente expressiva no material didático e o professor experiente devido às experiências passadas sua prática é diferenciada pelas “vivências” durante as tarefas executadas anteriores. O campo epistêmico se mostra fortemente condicionado ao professor inexperiente, já o professor com experiência devido ao pragmatismo construído no trabalho é visto como um sujeito mais competente.

A professora Júlia manifestou que o professor com experiência se mostra mais habilidoso nas situações de trabalho que o mesmo manifestou devido às experiências construídas anterior no trabalho, assim o pragmatismo foi construído devido às ações e tarefas executadas com êxito ou sem êxito nessas experiências passadas (classe i). Diferente do

professor inexperiente que devido ter poucas experiências construídas no trabalho, não consegue ter uma conceituação operacional similar o do professor experiente.

A professora em formação Sara falou que o professor experiente consegue sobressair-se dos problemas oriundos do trabalho (obstáculos profissionais) melhor que um professor inexperiente. Essa diferença entre as classes de trabalho está presente no pragmatismo construído no trabalho (classe i) essa análise entre ambas procura identificar as habilidades construídas a partir das experiências passadas (eficiência durante a atividade de execução, adaptabilidade, esquemas operatórios).

O professor em formação Afonso declara que o professor inexperiente fica mais suscetível ao erro e o professor experiente devido às tarefas executadas nas atividades anteriores perante as situações profissionais produz menos erros que os profissionais iniciantes (classe i) devido às ações construídas no pragmatismo. Sabemos que um dos objetivos da DP está situado na aprendizagem da formação profissional no trabalho, portanto, em qualquer trabalho existe obstáculos condicionados no trabalho. Assim, para o professor o confronto em sala de aula e problemas advindos das situações no trabalho é comum, ele se adapta mediante o conhecimento na ação representando a construção da experiência.

Perante o quadro das entrevistas respondidas é perceptível a presença da Didática Profissional nas situações profissionais construídas no trabalho. Pelas classes i, ii, iii e iv percebemos que os professores de Matemática em formação estabelece a relação dos elementos oriundos da complementariedade da DP e DM na formação profissional inicial. De modo prosaico, na próxima subseção apresentaremos a validação da nossa pesquisa.

6.7 Validação da Pesquisa

Apresentamos na seção anterior os dados coligidos durante a nossa investigação, no momento das resoluções das situações-problemas. Portanto, apoiamos a nossa perspectiva de validação do estudo nos pressupostos de Laborde (1997, p.105) ao distinguir duas validações: 1. Validação interna: estudo da evolução dos professores em formação durante a experimentação e adequação da situação-problema. Como também escolher as “(...) situações particulares julgadas significativas na sequência, relativamente às quais as produções dos estudantes são produzidas”.

2. Validação externa: “Comparação dos estudantes antes e depois da aplicação da sequência, por meio de entrevista ou questionário. Comparação com as produções de estudantes externos ao tipo de experimentos e sequência estruturada”.

Em meio às duas validações tanto interna quanto a externa explicitada acima, esclarecemos que na nossa pesquisa, escolhemos a validação interna, pois, trabalhamos acerca das situações didáticas e também, o nosso público alvo (professores em formação inicial) estava limitado, como analisamos também somente as produções e desempenho dos professores em formação. Não usamos a validação externa, pois não comparamos os dados obtidos com nenhuma outra produção externa.

Ainda em consideração a validação interna é feito uma comparação entre a análise *a priori* e outra em relação à análise *à posteriori*, levando em consideração os dados obtidos. De maneira mais simplória, temos praticamente uma consequência entre a análise *posteriori* em relação aos dados que obtivemos durante a experimentação relacionada perante a construção das situações na análise *a priori*. Acrescentamos ainda que, durante a institucionalização a validação interna se torna exitosa, pois nesta etapa os professores constroem os conceitos epistêmicos dos conjuntos numéricos na sala de aula.

Contudo, observamos ainda que durante a aplicação das situações-problema houve obstáculos referentes à aprendizagem do professor em formação inicial, no caso, alguns obstáculos se mantinham a respeito dos teoremas inseridos na construção dos conjuntos numéricos, no que se concerne às demonstrações matemáticas. Nesse aspecto, recordamos alguns argumentos manifestados durante a pesquisa, desse modo os professores falavam que: “não é necessário explorar esse teorema a fundo, pois, esses conceitos são abstratos, não sendo usados no ensino básico”, “vendo a construção dos conjuntos numéricos de maneira axiomática é complicado aplicar no contexto da realidade dos alunos do ensino médio”. Todavia, esses obstáculos foram superados quando houve a troca de informações entre os demais professores em formação inicial e com intervenção da professora pesquisadora.

Portanto, enfatizamos que a relação entre a institucionalização e a validação interna é importante para observamos à construção cognitiva dos sujeitos da pesquisa durante as situações-didática. Temos que na (i) situação-problema os professores em formação conseguiram abordar como as relações de inclusão de cada conjunto se comportam, sabendo que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ possuem propriedades diferentes e isso garante que existe inclusão dos conjuntos numéricos, como também mostraram a visualização e como a abordagem se comporta no campo de trabalho, no caso na sala de aula. Na (ii) situação-problema observamos que os professores em formação distinguiram o conjunto $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, sabendo das

propriedades que cada um possui concluindo que em $\mathbb{Z}$ é tido como uma *extensão* do conjunto $\mathbb{N}$. Já na (iii) situação-problema durante a institucionalização os professores mostraram a relação de equivalência somente para a operação de adição, como também forneceram uma interpretação geométrica dessa relação de equivalência, junto com seus pares no plano. Na (iv) situação-problema os alunos exploraram o plano cartesiano conforme a construção de classe de equivalência no conjunto dos $\mathbb{Q}$, tomando o conhecimento prévio que o conjunto $\mathbb{Q}$ é construído pela relação dos pares em $\mathbb{Z}$. E no que se concerne à institucionalização da última (v) situação-problema é discutido como os professores em formação omitem o conhecimento epistêmico dos conjuntos numéricos na sala de aula, nesta situação-problema fica melhor compreensível como a SDP pode ser inclusa na análise do trabalho do professor de Matemática.

Por fim, os dados coletados nos permitiram compreender que os objetivos que traçamos foram alcançados, portanto, entende-se que a validação interna ocorreu. A validação interna dá-se primordialmente com a análise, ocorrida nas análises prévias da EDF, respaldadas no campo epistêmico axiomático dos conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$. Posteriormente, no momento da validação e institucionalização permitiu-nos efetivar os nossos três objetivos específicos, atribuídas na complementariedade da DP com a DM, competência profissional do professor, e da concepção pragmática construída durante o trabalho.

Portanto, na próxima seção o leitor encontra as considerações finais que fizemos em torno da nossa pesquisa, levando em consideração todo o percurso investigativo que levantamos acerca do objeto de pesquisa, no caso, a Didática Profissional e a aplicação da Engenharia Didática de Desenvolvimento em um curso de formação inicial de professores.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A disciplina de Análise é uma das mais importantes durante a graduação do professor de Matemática, o desenvolvimento do professor mediante os conceitos axiomáticos é fundamental para marcar a identidade do professor de Matemática, levando em consideração a construção e o entendimento dos conjuntos numéricos.

Com isso, destacamos os documentos que regem a educação brasileira, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) ao defenderem que a abordagem numérica deve fazer parte do saber do estudante da base comum, possibilitando a necessidade do aluno desenvolver-se e solucionar problemas do cotidiano a partir da própria Matemática. Além dos PCN's, observamos que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) indica que o aluno do Ensino Básico deve possuir a necessidade de compreensão e ampliação dos saberes acerca dos conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, como também o aluno precisa entender as propriedades e operações relacionadas aos conjuntos numéricos.

Portanto, o professor que está na formação inicial deve de fato compreender os conceitos abstratos da abordagem numérica para efetuar uma transposição de saberes eficiente no seu campo de trabalho. Assim, foi realizada uma revisão bibliográfica constatando que a disciplina de Análise (e derivadas) faz parte da construção do profissional do professor, e alerta que esta disciplina que se relaciona com as demais: Cálculo diferencial, Matemática Discreta, Variável Complexa dentre outras, está sendo deixada para o aluno optar estudar, ou ainda, que está resguardada somente no final da graduação do professor.

Visto por esse ângulo, percebemos que para a formação do professor de Matemática o desenvolvimento no local de trabalho é essencial, com isso, buscamos a Didática Profissional aliada a Didática da Matemática, no que se concerne a Engenharia Didática de Formação, aliadas a investigar a formação profissional do professor no conceito de construção dos conjuntos numéricos. Por meio das análises bibliográficas constatamos que o cenário dos elementos da Didática Profissional e Didática da Matemática visando à formação do professor de Matemática é de ínfimas pesquisas, e foi justamente esse cenário novo de pesquisas acerca da Didática Profissional e formação do professor na construção dos conjuntos numéricos que nos motivou a construir essa pesquisa.

Assim, em meio ao novo cenário de pesquisas brasileiras acerca da formação do professor de Matemática mediante a Situação Didática Profissional encontrada nos trabalhos de Alves (2018a, 2018b, 2019) acreditamos que os professores postos a formação inicial em contato com as situações encontradas no trabalho perante aos planos: professor-estudantes,

professor-professores, professor-instituição, se constituirão melhor nas situações profissionais complexas encontradas no trabalho.

A complementariedade entre a Didática da Matemática e a Didática Profissional nos proporcionou um melhor entendimento de como os elementos de uma teoria da aprendizagem no trabalho aliada a uma teoria de aprendizagem no saber se complementam para dar origem a fenômenos encontrados em *locus* de trabalho do professor de Matemática visando habilidades que o professor deve gerenciar na atividade real de trabalho.

Assim, as nossas considerações finais se encontraram na importância do quadro teórico da pesquisa, a parte metodológica, a experimental, a relevância dos resultados obtidos e a perspectiva futura dos estudos.

Assumimos que o quadro teórico foi fundamental para a consolidação dessa pesquisa, ao compreendermos que a Didática Profissional é uma vertente francesa que está presente nas investigações perante o quadro trabalhista há cerca de quase trinta anos. A DP esteve presente em vários setores de trabalho industriais, mas que, no quadro educacional ainda é pouco difundido.

Contudo, as correntes teóricas e metodológicas trabalhadas para a formação profissional da DP permitiu o entendimento de como o sujeito se desenvolve no trabalho, primeiramente analisando o trabalho, desenvolvendo-se no seio da atividade de trabalho e perspectivando a competência da execução exitosa na atividade de trabalho.

Como a modernização do termo “competente no trabalho” um sujeito se mostra habilidoso perante a situação de trabalho, principalmente as situações de trabalho complexas, que o mesmo deve sobressair-se, adaptar-se e situar a inteligência no trabalho movendo os esquemas operatórios. Para o professor essa realidade não é diferente, todavia, os planos da Situação Didática Profissional devem fazer parte da realidade do trabalho do professor, ou seja, em qualquer trabalho é comum ter um obstáculo que chamamos de obstáculo profissional e que no campo de trabalho o professor deve mover suas habilidades no campo da sala de aula (plano: professor-estudantes), no campo inter-relação humana (plano: professor-professores) e no campo de trabalho (professor-instituição) visando à formação do professor, inicial ou continuada.

Pensando na formação do professor de Matemática, entendemos que uma metodologia que se adequasse ao quadro investigativo nos auxiliaria na compreensão dos fenômenos encontrados no interior da sala de aula. Portanto, a Engenharia Didática de Formação tida como uma metodologia de pesquisa iniciada por Perrin-Glorian (2011) e na teoria de ensino

francesa Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1988) foi pertinente para a presente pesquisa.

Pela metodologia da EDF e da TSD organizamos as cinco situações didáticas acerca da formação inicial dos professores de Matemática, no que se concerne à estrutura conteudista das situações didáticas foram formuladas a base da construção dos conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, incluindo a passagem da parte algébrica para a parte geométrica. A resolução mediante as situações requereu dos professores um conhecimento prévio, tais como: Axioma de Peano, corpo ordenado, propriedade do elemento neutro.

As situações foram requeridas de forma algébrica e de forma geométrica. Encontradas nas situações didáticas: i e iii. Tais situações submetem uma explicação ao professor em formação inicial a respeito da forma algébrica a construção dos conjuntos, como também pede o fornecimento visual do professor mediante a situação problema.

Portanto, no registro algébrico os tratamentos se deram pelos teoremas e propriedades dos conjuntos numéricos, como também a inclusão dos conjuntos e as operações binárias. Além disso, na situação didática v a questão era aberta, ou seja, o professor em formação poderia expor livremente a sua opinião.

Contudo, exploramos as fases da Engenharia Didática de Formação nas situações didáticas a fim de investigarmos o objeto matemático eleito, no caso, os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ relacionando a competência profissional que o educador deve possuir no campo de trabalho. Como já mencionamos anteriormente, essa metodologia é diferenciada da Engenharia Didática Clássica, pois, assume a responsabilidade investigativa acerca do desenvolvimento do professor e na sua formação.

Assim, apresentamos de forma histórica o desenvolvimento dos conjuntos números até chegar ao quadro atual do ensino. Percebemos que alguns conceitos históricos foram fundamentais para a Matemática atual, exemplificamos esse fato, pela descoberta do zero pelos Hindus, esse marco foi muito importante para o quadro que hoje temos da Matemática. Como também apresentamos os trabalhos dos matemáticos do século XIX. Esses matemáticos: Dedekind (1831-1916), Cantor (1845-1916) e Peano (1858-1932) foram cruciais para o desenvolvimento dos conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

Observamos que a Matemática imposta nos teoremas e definições estão atreladas a parte algébrica, nesse sentido, sentimos a necessidade da visualização dos conceitos matemáticos acerca dos conjuntos numéricos. Portanto, algumas situações requereram dos professores em formação uma articulação ente registro algébrico e gráfico.

Seguimos as fases da EDF e na análise *a priori*, delineamos as variáveis microdidáticas, formulamos as possíveis ações, formulações e validação dos professores em formação inicial e por último fizemos a institucionalização. Logo, na análise *a posteriori* validamos a pesquisa.

No que se concerne os resultados, percebemos que os professores em formação inicial se envolveram perante as situações trabalhadas em sala de aula. Observamos ainda que durante as fases de ação e formulação a intensidade relacional entre eles era muito grande. E na fase da formulação da ação os professores manifestaram um conhecimento prévio anterior, para que pudessem responder a situação didática.

Na situação i, os professores em formação discutiram o entendimento dos conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ transcrevendo as respostas através de papel, lápis ou caneta a inclusão dos conjuntos numéricos que resulta no conceito algébrico, logo em seguida, os professores fizeram uma conversão do modelo algébrico para o modelo visual e como este conceito se aplica no ambiente de trabalho (sala de aula).

Na situação ii, os professores em formação moveram os conhecimentos sobre a relação entre o conjunto $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, sabendo que cada conjunto mantém sua própria identidade em relação as propriedades e passando a existir uma cópia algébrica de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{N}$. Na situação de formulação os professores em formação construíram a relação de equivalência entre os conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$.

Na situação iii, os professores em formação compreenderam que os pares ordenados fornecem uma relação de equivalência, atendendo as propriedades binárias (adição e multiplicação), porém, a situação requereu somente a compreensão da parte aditiva. Nessa situação também houve a conversão da parte algébrica para a parte geométrica.

Na situação iv, assim como a anterior requereu os professores em formação a parte algébrica e geométrica, como também a explicação de classe de equivalência, mas, o conjunto $\mathbb{Q}$ é diferente dos outros ($\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$). Assim, os professores em formação construíram o conjunto $\mathbb{Q}$ pela relação do conjunto $\mathbb{Z}$, isso faz ambos se relacionarem resultando na classe de equivalência. Portanto, na situação da formulação os professores partiram do pressuposto da classe de equivalência e definiram o conjunto $\mathbb{Q}$ por pares ordenados, explicando a parte fracionária. E pondo no plano cartesiano, geraram infinitos pontos durante as resoluções.

Na quinta e última situação, se mostrou diferenciada das demais, o professor em formação teria que expor seus conceitos acerca da sua própria opinião sobre a omissão dos conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ trabalhados no ensino básico. E como o professor gerencia a importância da construção desses conjuntos implicados na competência do professor. Os

professores em formação mobilizaram seus conceitos a base da experiência e vivência em sala de aula nessa situação v.

Analizamos no interior de cada situação (i, ii, iii, iv e v) o encaixe da SDP nos planos inseridos visando à mobilização de gerir no campo de trabalho os pares: professor-estudantes, professor-professores, professor-instituição, esses planos auxiliou o nosso entendimento nos fenômenos que implicam na competência do professor de Matemática.

A partir da SDP, criamos categorias para analisar o restante dos dados metodológico da EDF, a parte das entrevistas. Criamos quatro de classes e as mobilizamos perante as respostas dos professores em formação. Fizemos uma listagem de perguntas semiestruturadas, para atender uma parte dos nossos objetivos. As classes criadas foram: concentração do saber epistêmico ou pragmático (i), repasse do saber matemático (ii), omissão conteudista (iii) e inserção da SDP (iv).

Assim, as perguntas estavam acerca da omissão dos conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, sobre a competência do professor de Matemática, como também a diferença entre os profissionais experientes e inexperientes. Os professores em formação teriam que expor a conceituação em torno das perguntas.

Logo, na pergunta 1 a omissão estavam no conjunto $\mathbb{N}$, e os professores mobilizaram as classes ii, iii e iv. Na pergunta 2 a omissão estava no conjunto $\mathbb{Z}$, e os professores mobilizaram as classes iii e iv. Na pergunta 3 a omissão estava no conjunto $\mathbb{Q}$, e os professores mobilizaram as classes iii e iv. Na pergunta 4, a omissão estava no conjunto $\mathbb{R}$, e os professores mobilizaram a classe iii. Na pergunta 5 estava atrelado a omissão dos conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ relacionando a competência do professor de Matemática, portanto os professores mobilizaram a classe i e iii. E finalmente na pergunta 6, pedia esclarecimento do professor experiente e inexperiente, e os professores em formação mobilizaram a classe i.

Por conseguinte, fizemos a validação da nossa pesquisa, assim, escolhemos a validação interna, onde fizemos um confronto entre o que foi previsto na análise *a priori* e o que foi de fato obtido na análise *a posteriori*, dando ênfase aos nossos objetivos traçados.

Esta pesquisa revelou que o quadro da Didática Profissional relacionada a Didática da Matemática permite que o profissional da educação, em nosso caso, professor de Matemática analise o seu local de trabalho, e gerencie suas habilidades perante a construção do pragmatismo em *locus* de trabalho, como também situar a requerida atividade real no seio da competência profissional.

Constatamos que a base conteudista encontrada na matriz curricular da disciplina vinculada a Análise é de extrema importância para a formação do professor de Matemática.

Portanto, as investigações acerca da Engenharia Didática de Formação, Situação Didática Profissional, Didática Profissional e Formação do professor de matemática devem possuir uma atenção especial incorporado à formação profissional do Professor.

Ainda mais, acrescentamos que as pesquisas brasileiras devem considerar mais o quadro investigativo acerca da competência profissional do professor de Matemática, sendo investigada a partir dos pressupostos da DP. Para que assim, futuramente possamos ter mais categorias além do professor-estudantes, professor-professores, professor-instituição, sendo que, apesar da DP está há quase 30 anos na perspectiva de desenvolvimento profissional na França, ao contrário observamos no Brasil, passando a existir até uma escassez investigativa.

REFERÊNCIAS

- ALLAIN, O. GRUBER, C. A análise do trabalho em Didática Profissional. **Revista Brasileira de Estudo em Pedagogia**. v. 98, n. 250, pp. 624-637, 2017.
- ALLAL, L. The assessment of learning dispositions in the classroom. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, v. 9, n. 1, p. 55-58, 2002.
- ALMOULOUD, S. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Editora UFPR, 2007.
- ALMOULOUD, S.; SILVA, M. Engenharia didática: evolução e diversidade. **REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, pp. 22-52, 2012.
- ALMOULOUD, S. Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. **REVEMAT**. v. 11, n. 2, pp. 109-141, 2016.
- ALVES, F. R. V; CATARINO, P. M. M. C. Engenharia Didática de Formação (EDF): repercussões para a formação do professor de matemática no Brasil. **Educação Matemática em Revista**. v. 02, n. 18, pp. 121-137, 2017. Disponível em: <p>. Acessado em: 20 de Nov, 2018.
- ALVES, F. R. V; CATARINO, P. M. M. C. Situação Didática Profissional: um exemplo de aplicação da Didática Profissional para a pesquisa objetivando a atividade do professor de Matemática no Brasil. **Indagatio Didactica**. v. 11, n. 1, pp. 103-120, 2019.
- ALVES, F.R.V. Engenharia Didática para a s-Sequência Generalizada de Jacobsthal e a (s,t)-Sequência Generalizada de Jacobsthal: análises preliminares e a priori. Unión: **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 51, pp.83-106, (2017b). Acessado em: 01 de set, 2018a. Disponível em: <http://www.fisem.org/www/union/revistas/2017/51/04.pdf>
- ALVES, F. R. V. Didática das Ciências e Matemática (DCEM): surgimento e implicações para a formação do professor. **Investigações em Ensino de Ciências**. v. 22, n. 03, pp. 291-320, 2018b.
- ALVES, F. R.V. Didactique Professionnelle (DP) et la Théorie des Situations Didactiques (TSD): les cas de la notion d'obstacle et l' activité de professeur. EM TEIA: **Revista de educação matemática e tecnológica ibero-americana**, v. 09, n. 02, pp. 1-25, 2018c.
- ALVES, F. R. V. The professional didactics (PD) and didactiques of sciences (DS) in Brazil: some implications for the professionalizatin of the Science teacher. **Acta Didactica Naposcencia**, v. 11, n. 02, pp. 105-120, 2018d.
- ARTIGUE, M. **Modélisation et reproductibilité en Didactique des Mathématiques**. Les Cahier Rouge, nº 8, 1 – 22, 1984.
- ARTIGUE, M; DOUADY, R. MORENO, L. **Ingeniería Didáctica en Educación Matemática**. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.

ARTIGUE, M. **Engenharia Didática**. In: BRUN, J. Didática das Matemáticas. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, Cap. 4. p. 193-217, 1996.

BAILLEUL, M. Engenharia de Formação: o exemplo do treinamento de estudantes de treinamento em formação de professores. **Educação, Matemática e Pesquisa de São Paulo**, v. 17, n. 01, pp. 137-161, 2015.

BAUDOUIN, Jean. M. La compétence et le thème de l'activité: vers une nouvelle conceptualization didactique de la formation. **Raison éducative**. 2(2), 149 – 168, 1999.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parametros curriculares nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC /SEF, 1998.

BRIL, B. "Aprendizagem de gestos técnicos", em E. BOURGEOIS e M. DURAND (dir.). **Aprender a trabalhar**. Paris, Presses Universitaires de France, p. 141-152, 2012.

BRINGUIER, J. C. **Conversando com Piaget**. 2ªEd. Tradução: Maria José Guedes. Rio de Janeiro: Bertrand, 210p, 1993.

BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v.7, n. 2, pp.33-116, 1986.

BROUSSEAU, G. Les différents rôles du maître. Bulletin de l' A.M.Q., **Montréal**, n. 23, p.14-24. 1988.

BROUSSEAU, G. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, C.; SAIZ, I. **Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas**: Conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

BOTERF, G. L. Les défis posés à l'ingénierie de formation et à la production des expertises collective. Quelles Evolution pendre em compte? Quelles consequence pratiques. **Journée d'Étude ingéniere dispositifs de formation à l'international**. November, Montpellier, 1999.

CARLOMAGNO, M., ROCHA, L. C. Fazer análise de conteúdo: Uma questão metodológica. **Revista Eletrônica de Ciência Política**. v. 7, n. 1, p. 173- 186, 2016.

CLOT, Y; LEPLAT, J. La méthode clinique en ergonomie et en psychologie du travail. **Le travail humain**. 68(3), 289 – 316, 2004.

CHAMPY-REMOUSSENARD, P. Les théories de l'activité entre travail et formation, 9 – 50. In: Harmattan, L. Analyse de l'activité et formation. **Revue Savoirs**, 2005. Acesso em: 10 de out, 2018. Disponível em:< <https://www.cairn.info/revue-savoirs-2005-2-page-9.htm>>

CHEVALLARD, Y. La **Transposition Didactique**: du savior savant au savior enseigné. 1.ed. Paris: La Pensée Sauvage, 1982.

CHEVALLARD. Y. **La transposition didactique**. Paris: La Pensée Sauvage Édition, 1992.

CHEVALLARD, Y. **Organizer l'Etude 1. Structures & Fonctions**. 2002. Disponível em: <yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organiser_1_etude_3.pdf>. Acesso em: 30/05/2019.

CHEVALLARD, Y. La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponses à partir de la TAD. In: Margolinas et al.(org.) : Enamont et en aval des ingénieries didactiques, XV^a École d'Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme). *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage, 1, 81-108, 2009.

CHIAROTTINO, Z. P. Os “estágios” do desenvolvimento da inteligência. **Revista Viver: mente e cérebro**. Coleção Memória da Pedagogia: Jean Piaget, Ediouro: Rio de Janeiro, n.1, p.16-23, 2005.

DURAND, T. **Forms of incompetence**. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPETENCE-BASED MANAGEMENT, 4., 1998, Oslo. Proceedings... Oslo : Norwegian School of Management, 1998.

FAVERGE, J.-M. **L'analyse du travail**, Paris, Presses universitaires de France, 1955.

FERREIRA, J. **A construção dos números**. Editora: SBEM, 2011.

FERREIRA, M. S; MUNIZ, T. O. M. O ensino de análise: contribuições e perspectivas na formação do professor de Matemática. **Simpósio Educação Matemática em Debate**. v. 1, 2014.

FISCHBEIN, E. **Intuition in Science and mathematics: an educational approach**. Netherlands: D. Reidel Public, Mathematics Educational Library, 1987.

FLEURY, M.T.L. FLEURY, A. Construindo o conceito de competência. **Revista de Administração contemporânea**. v.05, p.183-196, 2001. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1415-65552001000500010&script=sci_abstract> Acessado em: 12 de jul, 2018.

GÁLVEZ, G. A Didática da Matemática. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (org). **Didática da Matemática: Reflexões Psicológicas**. Porto Alegre: Artes Médicas, Cap. 2, 26-35, 1996.

GILLET, P. **Construire la formation**. Paris : ESF, 1971.

GOMES, R. C. S; GHEDIN, E. **Teorias Psicopedagógicas do Ensino Aprendizagem**. O desenvolvimento cognitivo na visão de Jean Piaget. Boa Vista: UERR Editora p. 215- 232, 2012.

GOMES, D. N; OTERO-GARCIA, S. C; BARONI, R. L. S. Quatro ou mais pontos de vista sobre o ensino de Análise matemática. **BOLEMA**, v. 29, n. 53, pp. 1242-1267, 2015.

GONÇALVES, T. O. **Formação e Desenvolvimento Profissional de Formadores de Professores**: O caso dos professores de Matemática da UFPa. Tese de Doutorado. UNICAMP – Campinas, 2000.

GRUBER, C; ALLAIN, O; WOLLINGER, P. R. Contribuições da Didática Profissional Francesa para a Educação Profissional. **Seminário Nacional de Educação Profissional e Tecnológica** – SENEPT. v. 05, 2017.

GUÉRIN, F. et al. **Compreender o trabalho para transformá-lo: a prática da ergonomia**. São Paulo: Edgar Blucher, 2001.

HÉBRARD, Pierre. Qual abordagem de competências e quais as normas para a formação profissional nas profissões da relação humana? **Arquivos de Ciências da Educação**. v. 30, pp. 17-34, 2013. Disponível: < <http://journals.openedition.org/dse/189>; DOI: 10.4000 / dse.189>. Acessado em: 20 de nov, 2018.

LABORDE, C. Affronter la complexité des situations didactiques d'apprentissage des mathématiques en classe: défis et tentatives. **DIDASKALIA**, v. 10, n.1, p. 97 – 112, 1997.

LECLERCQ, G. Quelques usages de l'activité d'ingénierie de formation. *Revue Savoirs*. v. 2, n.2, p.71-104, 2002.

LEPLAT, J. **Erreur humaine, i abilité humaine dans le travail**, Paris, Armand Colin, 1985

LEPLAT, J. **Compétence et ergonomie**, in R. Amalberti, M. de Montmollin et l. h eureau (dirr.), *Modèles en analyse du travail*, Bruxelles, Mardaga, pp. 263-278, 1991.

LEPLAT, J. **Regards sur l'activité en situation de travail. Contribution à la psychologie ergonomique**, Paris, Presses universitaires de France, 1997.

LEPLAT, J. **L'analyse psychologique de l'activité en ergonomie**, Toulouse, Octarès Éditions, 2000.

LEPLAT, J. **Aspectos da complexidade em ergonomia**. In: DANIELLOU, F. (COORD.). *A ergonomia em busca de seus princípios: debates epistemológicos*. São Paulo: Edgard Blücher, 2004. p. 57-78.

LEPLAT, Jaques. Les compétence dans l'activité et leur analyse. **Psychology of Human Ressource Journal**. v. 2, n. 04, pp. – 143-154, 2008.

LEPLAT, J. Gestos na Atividade no Local de Trabalho. **Perspectivas Interdisciplinares sobre Trabalho e Saúde**. v. 15, n. 01. 2013.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: MACHADO, S. D. A. **Educação Matemática: Uma introdução**. 2 ed. São Paulo: Educ, 197-208, 2002.

MANZINI, E. J. **A entrevista na pesquisa social**. *Didática*, São Paulo, v. 26/27, p. 149-158, 1990/1991.

MAYEN, P. **Evolutions in the professional course and process of transformation of expertsite**. In acts symposium of the french-speaking ergonomics society (SELF). Paris: Self, 1998.

MAYEN, P. Dix développements sur la didactique professionnelle et le développement. In : Y. Lenoir et P. Pastré (Eds.), **Didactique des disciplines, didactique professionnelle**,

didactique des savoirs professionnels, quels enjeux pour la formation des enseignants ? (109-125). Toulouse, Octarès, 2007.

MÉLIET, E. A. A evolução dos ofícios da engenharia educacional: qual é a correspondência entre as novas necessidades e a formação oferecida?. **Distâncias e Mediações do Conhecimento**. v. 18, 2017. Disponível em: <<http://journals.openedition.org/dms/1881>>. Acessado em: 21 de nov, 2018.

MONTMOLLIN, M; DARSEES, F. **A ergonomia** (2 ed.). Lisboa: Instituto Piaget, 2011.

MOREIRA, P. C.; CURY, H. N.; VIANNA, C. R. Por que a Análise Real na Licenciatura? **Zetetiké**, Campinas, v. 13, n. 23, p. 11-42, 2005.

MOURA, G. A **A hominização da linguagem do professor de LE: da pratica funcional à práxis comunicacional**. Dissertação de mestrado. Universidade de Brasília. Departamento de línguas estrangeiras e tradução, 2005.

NOGUEIRA, M. A. Proposta da série Formação cultural de professores. In: **BRASIL. Ministério da Educação**. Salto para o futuro - Formação cultural de professores. Ano XX, boletim 07, jun 2010. Acesso em: 03 de junho, 2018. Disponível em: <http://www.tvbrasil.org.br/fotos/salto/series/10343907-formacaocultural.pdf>

OCHANINE, D. **L'image opérative**. Paris: recueil de textes, doc ronéo, Laboratoire de Psychologie du Travail, 1981.

ORTEGA, R. B. **Contexte professionnel, contexte de la formation technologique supérieur: Approche didactique**. Les cas l' apprentissage des systèmes d'Information Géographique. 2001.

OTERO-GARCIA, S. C; CAMMAROTA, G. Releituras de um estudo do conhecimento do Ensino de Análise a partir da noção de cognição inventiva. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**. v. 6, n. 1, 2013.

PASTRÉ, P. L' analyse du travail et didactique professionnalle. **Revue Française de Pédagogie**. v. 3, n. 138, pp. 9-17, 2002.

PASTRÉ, P. **Genèse et identité**. In: RABARDEL, P. & PASTRÉ, P. Modèles du sujet pour la conception; dialectiques activités développement. Paris: Octarès, pp. 231-260, 2005

PASTRÉ, Pierre. La conceptualisation dans l'action: bilan et nouvelles perspectives. **Education Permanente**, Paris, n. 139, p. 13-36, 1999.

PASTRÉ, P. Le rôle des schèmes et des concepts dans la formation des compétences. **Performances Humaines et Techniques**, n. 71, p. 21-28, 1994.

PASTRÉ, P. Les compétence professionnelles et leur développement, pp. 213-231. In: Faizon, P. **Ergonomie**. Paris: PUF, 2004.

PASTRÉ, P; MAYEN, P; VERGNAUD, G. La didactique professionnelle. **Revue française de pédagogie**. n. 154, pp. 145-196, 2006.

PASTRÉ, P. Analyse du travail et formation. In: Fabre, M. **Apprentissage et développement: apprendre, se former et agir**. Recherche en Education, nº 4, October. 23 – 29, 2007a. Acesso em: 23 de out, 2018. Disponível em: < <http://www.recherches-en-education.net/IMG/pdf/REE-no4.pdf> >

PASTRÉ, P. La Didactique Professionnelle. **Education, Sciences & Society**, 2(1), 83 – 95, 2011. Acesso em: 15 de out, 2018. Disponível em: <https://riviste.unimc.it/index.php/es_s/article/view/136/65>

PIAGET, J. **O nascimento da inteligência da criança**. Editora Crítica: São Paulo, 1986.

PIAGET, J. **Epistemologia Genética**. Tradução: Álvaro Cabral. 3ª ed. Martins Fontes: São Paulo, 2007.

PINHEIRO, J.F. **Psicologia do Trabalho, Didactica Profissional e Formação**. Dissertação (Mestre em Psicologia do trabalho) Faculdade em Psicologia e de Ciências da Educação Universidade do Porto. Portugal, 2001.

PINTO, A; SHEINER, F. Visualização e Ensino de Análise Matemática. **Educação Matemática em Pesquisa**. v. 17, n. 3, pp. 637-654, 2015. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/25675/pdf>> Acesso em: 7 de Jul, 2019.

PERRIN-GLORIAN, M. J. **L'ingénierie didactique a l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement des ressources et formação des enseignants**. in Margolinas et all.(org.): En amont et en aval des ingénieries didactiques, XVª École d'Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (PUY-de-Dôme). Recherches em Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1, 57-78, 2009.

PERRIN-GLORIAN, M. J. L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. In: MARGOLINAS, C. et al. (Eds.). **En amont et en aval des ingénieries didactiques**, 57-78. Grenoble: La Pensée sauvage, 2011.

PERRIN-GLORIAN, M. J.; BELLEMAIN, P. M. B. L'ingenierie didactique entre recherche et ressource pour l'enseignement et la formation des maîtres. **I Seminário Latino-Americano de Didática da Matemática – LADIMA**, p.1-51, 2016.

POMMER, W.M. **A Engenharia Ddática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as equações Diofantinas Lineares**. Dissertação de Mestrado, São Paulo, SP, Brasil, 2013.

REIS, F. S. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de cálculo e análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos**. 2001. 604 f. (Tese de doutorado em Educação) - FE/Unicamp, Campinas (SP), 2001.

ROBINET, J. De l'ingénierie didactique. **Les Cahiers Blancs**, v.1, n. 1, pp. 1-11, 1983.

ROGALSKI, J; SAMURÇAY, R. **Modélisation d'un savoir de référence et transposition didactique dans la formation professionnelle de haut niveau**, in G. Arsac, Y. Chevallard, J.-L. Martinand, A. Tiberghien (dirr.), *La transposition didactique à l'épreuve*, Grenoble, La pensée sauvage, pp. 35-71, 1994.

SAVOYANT, A. Eléments pour un cadre d'analyse des situations de résolution de problèmes par des équipes de travail. In: **L'année psychologique** 74(1), 219-237, 1974. Acesso em: 22 de out, 2018. Disponível em: <http://www.persee.fr/doc/psy_0003-5033_1974_num_74_1_28036>

SANTOS, A.A; ALVES, F. R. V; VASCONCELOS, F. H. L. **A Engenharia Didática em completude com a Teoria das Situações Didáticas como percurso metodológico**. Ensino de Ciências e Matemática: Experiências da formação continuada de professores na Pós-graduação do IFCE. 1ª ed. Pontes Editores: Campinas SP, 2018.

SAVOYANT, A. Une approche cognitive de l'alternance. **Thésaurus CEReq Bréf.** v. 1, n.118, pp. 1 – 4, 1979. Acesso em: 17 de out, 2018. Disponível em: <http://pmb.cereq.fr/index.php?lvl=notice_display&id=41584>

SILVA, M. **As relações didático-pedagógicas no ensino de Geometria com o software Cabre Geometre**. Curitiba, 2008. Acesso em: 23 de jun, 2018. Disponível em: www.portaleducacao.com.br/educacao/artigos/48778/a-situacao-a-didatica-proposta-porbrousseau

SONNTAG, Michel. Le schéma d'action: outil de figuration des représentations dans l'analyse des pratiques professionnelles. **Revue Française de Pédagogie**. v. 4, n.138, pp. 29 – 38, 2002. Disponível em: http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/revue-francaise-de-pedagogie/INRP_RF138_4.pdf

SULEIMAN, A. R. Introdução ao estudo das Situações Didáticas: conteúdos e métodos de ensino. **Educação: teoria e prática**. v. 25, n. 48, pp. 200-206, 2015.

TEMPIER, Frédérick. New perspectives for didactical engineering: An example for the development of a resource for teaching decimal number system. **Journal of Mathematical Teacher Education**. v. 19, n.1, p.261-276. 2016.

TOURMEN, C *et al.* **The Piagetian Schème: a Framework to Study Professional Learning Through Conceptualization**. *Vocations And Learning*, [s.l.], p.1-22, 10 mar. 2007. Springer Nature. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s12186-017-9174-y>

TEIXEIRA, P.G.M.; Passos, C.C.M. Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau. **Zetetiké**, v.21, n.39. p.155- 168, 2013.

TERRANEO, F.; AVVANZINO, N. (2006). Le concept de compétence en regard de l'évolution du travail: définitions et perspectives. **Recherche en soins infirmiers**. v. 5, n. 87, pp. 16 – 24, 2006. Disponível em: <https://www.cairn.info/revue-recherche-en-soins-infirmiers-2006-4-page-16.htm>

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação**. São Paulo: Atlas, 1987.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. In Nasser, L. (Ed.) **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro**. p. 1-26, 1993.

VERGNAUD, G. **Multiplicative conceptual field: what and why?** In Guershon, H. and Confrey, J. (1994). (Eds.) The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics. Albany, N.Y.: State University of New York Press. pp. 41-59, 1994.

VERGNAUD, G. **A Teoria dos Campos Conceituais**. In: BRUN, J. Didáctica das matemáticas. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, p. 155-191, 1996.

VERGNAUD, G. Que devient la didactisation dans l'apprentissage des situations professionnelles? In Y. Lenoir, M.-H. Bouillier-Oudot (dirr.), **Savoirs professionnels et curriculum de formation de professionnels**, Québec, Presses de l'Université Laval, pp. 321-344, 2006.

VERGNAUD, G. O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. **Educar em Revista**, n. Especial 1/2011, Editora UFPR: Curitiba, p.15-27, 2011.

VEILLARD, L. Construire des curriculums d'apprentissage en situation de travail. **Éducation & Didactique**. v. 6; n. 01, pp. 47 – 68, 2012. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00952255>

VIDAL-GOMEL, C. ROGALSKI, J. La conceptualisation et la place des concepts pragmatiques dans l'activité professionnelle et le développement des compétences. **Activités**. v. 4, n. 1, pp. 49-84, 2007.

APÊNDICE A- QUESTIONÁRIO: SITUAÇÕES-PROBLEMAS NOS ENCONTROS

QUESTIONÁRIO: SITUAÇÕES- PROBLEMAS
CONSTRUÇÃO DOS CONJUNTOS NUMÉRICOS N , Z , Q e R

Local de Aplicação: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
campus Fortaleza

Disciplina de Aplicação: Optativa 81

Professora Pesquisadora: Georgyana Gomes Cidrão

Orientador: Francisco Régis Vieira Alves

Situação-problema (1): Como professor de Matemática, você acredita nas seguintes inclusões indicadas na cadeia de conjuntos $N \subset Z \subset Q \subset R$? E de forma lúdica, como você aborda essa cadeia em sala de aula? Forneça uma interpretação visual de como seria.

Situação-problema (2): Explique em que sentido existe ou não existe uma imersão do conjunto dos números naturais dentro do conjunto dos inteiros.

Situação-problema (3): Consideremos a relação entre os pares (m,n) e (a, b) e que são equivalentes se, e somente se, ocorrer através da adição no conjunto dos Inteiros, em que $(m,n) \sim (a, b) \leftrightarrow m+b' = n+a$. Opine sobre o significado de classe de equivalência, e forneça uma interpretação geométrica.

Situação-problema (4): Forneça uma interpretação dos racionais mediante a noção de classe de equivalência no plano.

Situação-problema (5): O que é omitido e explicitado no Ensino básico sobre a cadeia das inclusões: $N \subset Z \subset Q \subset R$ e como o professor de Matemática relaciona a sua competência com a construção desses conjuntos?

**APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO ABORDADO PARA OS ALUNOS DA
LICENCIATURA EM VIRTUDE DA EXPERIÊNCIA EM SALA DE AULA**



**PROGRAMA DE POS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA (PPGECM)**

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Ensino de Matemática

Apresentação do Questionário

Neste questionário buscamos conhecer a vida profissional do estudante da licenciatura de Matemática como também saber da sua experiência em sala de aula.

Identificação do entrevistado (a), professor(a) em formação

Nome: _____

Idade: _____ Sexo: F () M ()

1- Qual período você se encontra na Licenciatura em Matemática?

2- Você é bolsista de algum programa institucional? S () N () S-sim, N-não

3- Se for bolsista, qual programa institucional?

4 - Você possui alguma experiência profissional na sala de aula além dos estágios (i, ii, iii)?

5- Se você já atua como professor de Matemática marque o período de atuação na sala de aula:

() 1 ano

() 2 anos

() outros*1 _____

* 1 - Informe a variação entre 1 ano e 2 anos, em meses.

APÊNDICE C- DOCUMENTO ELABORADO PARA A ENTREVISTA



Documento da Pesquisa

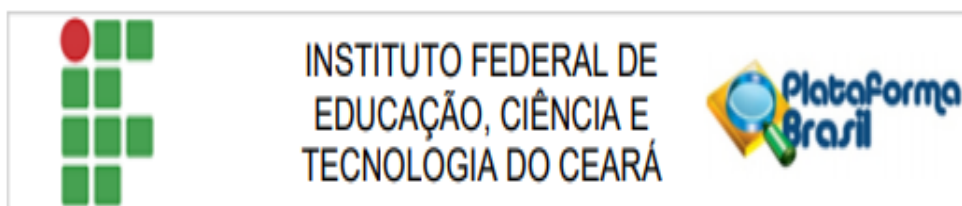
Tipo: Entrevista semiestruturada

Feita em professores no processo de formação inicial de Matemática

- 1) Em sua opinião, o que é necessário omitir no contexto escolar (educação básica) sobre o conjunto dos números naturais?
- 2) Você como professor de Matemática costuma omitir alguma construção em $\mathbb{Z}$?
- 3) Você costuma omitir algo na educação básica em relação ao conjunto dos números racionais e como você aborda o conjunto $\mathbb{Q}$ no ensino regular?
- 4) No seu entendimento como professor o que é necessário omitir no contexto escolar sobre a noção dos números reais?
- 5) Explique como o professor de Matemática faz uma relação da competência profissional com a construção dos conjuntos numéricos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$. Como também, manifeste sua opinião sobre a relação construída no trabalho entre: professor, aluno, colegas de trabalho e instituição de ensino (ou escolar) implicam na competência profissional do professor de matemática?
- 6) Em sua opinião, o que difere um professor experiente de um professor inexperiente? E como esses profissionais mostram sua competência mediante a experiência e inexperiência numa determinada situação de trabalho?

ANEXO A- MATRIZ CURRICULAR DO CURSO LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DO IFCE *campus* FORTALEZA

		INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ DIRETORIA DE ENSINO Matrizes Curriculares						
Matriz		3908 - Licenciatura em Matemática IV (2012/1)						
Curso		01402 - Licenciatura em Matemática						
Nível	Periodicidade	Regime	Situação	Per. Letivo Inicial	C.H. Disciplinas			
Superior	Período	Não-seriado	Matriz em Vigor	2012/1	3000			
Per.	Componentes Curriculares			Co-Requisitos				Carga Horária
	Código	Descrição	Núcleo	OPT	Hab.	Cred.		
1	01.402.01	GEOMETRIA PLANA E CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS	COM	N	57	4	0	80
1	01.402.02	MATEMÁTICA DISCRETA	COM	N	57	4	0	80
1	01.402.03	MATEMÁTICA ELEMENTAR I	COM	N	57	4	0	80
1	01.402.04	HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO NO BRASIL	COM	N	57	2	0	40
1	01.402.05	COMUNICAÇÃO E LINGUAGEM	COM	N	57	3	0	60
1	01.402.06	INICIAÇÃO A FILOSOFIA	COM	N	57	3	0	60
2	01.402.07	CÁLCULO I	COM	N	57	4	0	80
2	01.402.08	LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA	COM	N	57	2	0	40
2	01.402.09	MATEMÁTICA ELEMENTAR II	COM	N	57	4	0	80
2	01.402.10	FUNDAMENTOS SOCIOFILOSÓFICOS DA EDUCAÇÃO	COM	N	57	4	0	80
2	01.402.11	PSICOLOGIA DO DESENVOLVIMENTO	COM	N	57	2	0	40
2	01.402.12	LIBRAS	COM	N	57	2	0	40
2	01.402.13	METODOLOGIA DO TRABALHO CIENTÍFICO I	COM	N	57	2	0	40
3	01.402.14	ÁLGEBRA LINEAR	COM	N	57	4	0	80
3	01.402.15	CÁLCULO II	COM	N	57	4	0	80
3	01.402.16	INFORMÁTICA APLICADA AO ENSINO DA MATEMÁTICA	COM	N	57	4	0	80
3	01.402.17	PROJETOS SOCIAIS	COM	N	57	2	0	40
3	01.402.18	POLÍTICAS EDUCACIONAIS	COM	N	57	3	0	60
3	01.402.19	PSICOLOGIA DA APRENDIZAGEM	COM	N	57	3	0	60

ANEXO B- COMPROVANTE DE ENVIO A PLATAFORMA BRASIL E ACEITE**COMPROVANTE DE ENVIO DO PROJETO****DADOS DO PROJETO DE PESQUISA**

Título da Pesquisa: ENGENHARIA DE FORMAÇÃO: ANÁLISE DAS CONCEPÇÕES DE PROFESSORES SOBRE A CONSTRUÇÃO AXIOMÁTICA DOS NÚMEROS

Pesquisador: GEORGYANA GOMES CIDRAO

Versão: 1

CAAE: 08720919.1.0000.5589

Instituição Proponente: INSTITUTO FEDERAL DE EDUCACAO, CIENCIA E TECNOLOGIA DO CEARA

DADOS DO COMPROVANTE

Número do Comprovante: 017224/2019

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

Informamos que o projeto ENGENHARIA DE FORMAÇÃO: ANÁLISE DAS CONCEPÇÕES DE PROFESSORES SOBRE A CONSTRUÇÃO AXIOMÁTICA DOS NÚMEROS que tem como pesquisador responsável GEORGYANA GOMES CIDRAO, foi recebido para análise ética no CEP Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará em 27/02/2019 às 11:05.

ANEXO C- TERMO CONSENTIMENTO LIVRE PARA OS SUJEITOS DA PESQUISA



**INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Ceará**

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

"Engenharia de Formação: análise das concepções de professores sobre a construção axiomática dos números"

Profa. Georgyana Gomes Cidrão

Você está sendo convidado a participar como voluntário de uma pesquisa. Este documento, chamado Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, visa assegurar seus direitos como participante e é elaborado em duas vias, uma que deverá ficar com você e outra com a pesquisadora.

Por favor, leia atentadamente, aproveitando para esclarecer suas dúvidas. Se houver perguntas antes ou mesmo depois de assiná-lo, você poderá esclarecê-las com a pesquisadora. Se preferir, pode levar este Termo para sua residência e consultar seus familiares ou outras pessoas antes de decidir participar. Não haverá nenhum tipo de penalização ou prejuízo se você não aceitar participar ou retirar sua autorização em qualquer momento.

Justificativa e objetivos:

Este estudo tem como questionamento norteador: Como verificar a competência profissional dos "operadores da educação", embasado na Engenharia Didática Profissional? Com isto essa pesquisa tem objeto de estudo a abordagem da Didática Profissional com a Engenharia de Formação visando a competência profissional aplicado na formação de professores de Matemática.

Objetivo Geral da pesquisa:

Aplicar os elementos da DP visando a compreensão da noção de competência profissional no contexto da aprendizagem dos conjuntos numéricos.

Objetivo Específicos:

Descrever uma proposta de complementariedade para DP com a Teoria das Situações Didáticas;
Identificar concepções pragmáticas de professores relativas a noção de competência profissional;
Identificar as concepções pragmáticas concementes aos números Reais.

Procedimentos:

Participando do estudo você está sendo convidado(a) a: assistir e participar ativamente da aula, sendo constantemente convidado(a) a responder os problemas e desafios propostos em aula, por meio de questionários impressos e/ou exposição em quadro branco.

Observações:

- Solicitamos que os aluno(a)s participantes mantenham o máximo de assiduidade e pontualidade possível, atentando para o horário normal de aulas. Faltas frequentes ou atrasos podem comprometer os trabalhos em sala de aula, a coleta de dados ou mesmo a aprendizagem dos participantes.

Rubrica do pesquisador: _____

Rubrica do participante: _____



INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Ceará

- Eventualmente, sob permissão expressa dos participantes, realizaremos coleta de imagem e áudio via equipamentos eletrônico apropriado (celular, câmera fotográfica ou de vídeo, gravador de áudio), com o intuito de auxiliar e fundamentar a análise dos exercícios e problemas presentes nos questionários impressos.

Desconfortos e riscos:

Você não deve participar desta pesquisa se lhe trazer desconforto perante a participação das entrevistas, ou de possuir impossibilidade de seguir as orientações da pesquisadora.

- Riscos:

Essa pesquisa poderá trazer risco psicológico caso o participante não tenha uma dedicação pretendida para a pesquisa. Ou ainda poderá trazer à memória experiências ou situações vividas que causem o participante um sofrimento psíquico.

Para diminuir o efeito dos riscos o participante deve seguir as orientações da pesquisadora:

- Explicar o livro didático
- Relatar dúvidas durante a pesquisa acerca da parte axiomática dos conjuntos numéricos.

Benefícios:

Esta pesquisa procura realizar uma contribuição incremental ao conhecimento relativo a construção numérica, utilizando como catalisador o objeto matemático os axiomas numéricos dos conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e reais. Esta construção dos conjuntos numéricos se mostra relevante acerca do desenvolvimento cognitivo dos professores em formação. Ao participar dessa pesquisa, os participantes estarão colaborando tanto para uma melhor compreensão dos aspectos relativos ao ensino de matemática para professores em formação inicial, como também terão a oportunidade de apreender conhecimentos poucos abordados nos cursos de licenciatura, enriquecendo assim a própria formação profissional.

Acompanhamento e assistência:

O acompanhamento didático/pedagógico decorrente de eventuais dificuldades surgidas na aula será efetuado preferencialmente no locus da aula e durante a mesma, se restringindo a dificuldades relativas ao processo de ensino dos assuntos que serão abordados. Alternativamente, caso se mostre conveniente ou necessário, a pesquisadora poderá oferecer suporte à distância, através do uso de tecnologias digitais de comunicação, através unicamente da rede mundial de computadores.

Sigilo e privacidade:

Você tem a garantia de que sua identidade será mantida em sigilo e nenhuma informação será dada a outras pessoas que não façam parte da equipe de

Rubrica do pesquisador: _____

Rubrica do participante: _____



INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Ceará

pesquisadores. Na divulgação dos resultados desse estudo, seu nome não será citado e informações contendo imagens e áudio serão devidamente tratadas para evitar identificação.

Ressarcimento e indenização:

Você terá direito ao ressarcimento das despesas diretamente decorrentes de sua participação na pesquisa e à indenização pelos danos resultantes desta, nos termos da Lei.

Contato:

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, você poderá entrar em contato com a pesquisadora.

- Profa. Georgyana Gomes Cidrão
e-mail: georgyanacidrao28@gmail.com

Em caso de denúncias ou reclamações sobre sua participação e sobre questões éticas do estudo, você poderá entrar em contato com a secretaria do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) do IFCE das 08:00hs às 12:00hs e das 13:00hs às 17:00hs no IFCE Reitoria - R. Jorge Dumar, 1703 - Jardim América, Fortaleza - CE, 60410-426; fone (85) 34012332 e-mail: cep@ifce.edu.br

Consentimento livre e esclarecido:

Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais riscos e o incômodo que esta possa acarretar, aceito participar e declaro estar recebendo uma via original deste documento assinada pelo pesquisador e por mim, tendo todas as folhas por nós rubricadas:

Nome do(a) participante:

e-mail (opcional):

(Assinatura do participante ou nome e assinatura do seu RESPONSÁVEL LEGAL)

Data: ____/____/____.

Responsabilidade do Pesquisador:

Asseguro ter cumprido as exigências da resolução 466/2012 CNS/MS e complementares na elaboração do protocolo e na obtenção deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Asseguro, também, ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Informo que o estudo foi aprovado pelo CEP perante o qual o projeto foi apresentado e pela CONEP, quando pertinente.

Rubrica do pesquisador: _____

Rubrica do participante: _____



INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Ceará

Comprometo-me a utilizar o material e os dados obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

Profa. Georgyana Gomes Cidrão

Data: ____/____/____.

Rubrica do pesquisador: _____

Rubrica do participante: _____