



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ
IFCE *CAMPUS* FORTALEZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
- PGECM

ROSALIDE CARVALHO DE SOUSA

ENGENHARIA DIDÁTICA DE FORMAÇÃO: UMA APLICAÇÃO DO GEOGEBRA
COM OS ALUNOS DA UNIVERSIDADE ESTADUAL VALE DO ACARAÚ NO
ENSINO DO CONCEITO DE VOLUME

FORTALEZA

2021

ROSALIDE CARVALHO DE SOUSA

ENGENHARIA DIDÁTICA DE FORMAÇÃO: UMA APLICAÇÃO DO GEOGEBRA
COM OS ALUNOS DA UNIVERSIDADE ESTADUAL VALE DO ACARAÚ NO
ENSINO DO CONCEITO DE VOLUME

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) - *Campus* Fortaleza, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.

Coorientadora: Profa. Dra. Francisca Cláudia Fernandes Fontenele.

FORTALEZA

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal do Ceará - IFCE
Sistema de Bibliotecas - SIBI
Ficha catalográfica elaborada pelo SIBI/IFCE, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- S725e Sousa, Rosalide Carvalho de.
 ENGENHARIA DIDÁTICA DE FORMAÇÃO : UMA APLICAÇÃO DO GEOGEBRA COM OS
 ALUNOS DA UNIVERSIDADE ESTADUAL VALE DO ACARAÚ NO ENSINO DO CONCEITO DE
 VOLUME / Rosalide Carvalho de Sousa. - 2020.
 283 f. : il. color.
- Dissertação (Mestrado) - Instituto Federal do Ceará, Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática,
 Campus Fortaleza, 2020.
 Orientação: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.
 Coorientação: Profa. Dra. Francisca Cláudia Fernandes Fontenele.
1. Engenharia Didática de Formação. 2. Exame Nacional do Ensino Médio. 3. GeoGebra. 4. Teoria das
 Situações Didáticas. 5. Ensino de Volume. I. Título.

CDD 510.07

ROSALIDE CARVALHO DE SOUSA

ENGENHARIA DIDÁTICA DE FORMAÇÃO: UMA APLICAÇÃO DO GEOGEBRA
COM OS ALUNOS DA UNIVERSIDADE ESTADUAL VALE DO ACARAÚ NO ENSINO
DO CONCEITO DE VOLUME

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) - *Campus* Fortaleza, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovado (a) em: ____ / ____ / ____.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves (Orientador)

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) – *Campus* Fortaleza

Profa. Dra. Francisca Cláudia Fernandes Fontenele (Coorientadora)

Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA)

Profa. Dra. Maria José Araújo Sousa

Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA)

Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes
Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA)

Profa. Dra. Marlene Alves Dias
Universidade Bandeirante de São Paulo (UNIBAN)

Prof. Dr. Laerte Silva da Fonseca
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Sergipe - IFS

A minha família e amigos, pelo incentivo, paciência, dedicação e carinho que sempre me foram dispensados em todas as circunstâncias da vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por abençoar-me com o dom da vida e por proporcionar-me uma família e amigos que caminham comigo e estendem-me a mão sempre que a vida me passa uma rasteira; vocês são o alicerce que me dá força e sustentação.

Ao meu orientador, Dr. Francisco Régis Vieira Alves, pela oportunidade e confiança depositadas em mim e principalmente por compartilhar seus muitos conhecimentos e experiências, valores que contribuíram para a realização deste trabalho e para meu crescimento profissional. Além do mais, expresso minha admiração e respeito.

À minha coorientadora, Dra. Francisca Cláudia Fernandes Fontenele, pela paciência, dedicação, disponibilidade e ensinamentos, essenciais para o amadurecimento e produção dessa pesquisa e de todas as outras publicações.

Aos professores da minha banca de defesa, Dr. Daniel Brandão Menezes, Dra. Maria José Araújo Sousa, Dr. Laerte Silva da Fonseca, Dra. Marlene Alves Dias, pelas valiosas contribuições e disponibilidade em ler esta pesquisa e promover sugestões para aperfeiçoá-la.

Aos professores do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática do IFCE, campus Fortaleza, pela dedicação e competência com que se propõem a realizar esse trabalho, agregando valores e conhecimentos a nossa carreira profissional.

Aos amigos do mestrado, em especial ao grupo da matemática, pela generosidade, disponibilidade, respeito e, principalmente, pelos momentos de descontração, combustível necessário para manter a sanidade. Vocês são simplesmente fantásticos.

À minha irmã Célia Carvalho, por dedicar tempo para corrigir a gramática e a concordância deste trabalho e de todos os outros, ao longo dessa jornada.

À Universidade Estadual Vale do Acaraú, por permitir-me realizar essa pesquisa e proporcionar-me totais condições de aplicá-la.

Aos alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú, que se disponibilizaram em fazer parte desta investigação e que foram essenciais para obtenção dos resultados.

Ao meu amigo Juan Martins de Medeiros, pela disponibilidade e assessoria nas minhas construções no GeoGebra.

A diretora da escola em que trabalho Maria Nágila Mendes Coelho, pelo apoio, compreensão e por não medir esforços para me permitir prosseguir com os estudos.

E, por fim, à Secretaria de Educação do Ceará, por proporcionar meu afastamento para dedicação exclusiva a essa pesquisa.

“Educar verdadeiramente não é ensinar fatos novos ou enumerar fórmulas prontas, mas sim preparar a mente para pensar”.

Albert Einstein

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo central a compreensão de aspectos didáticos relativos ao ensino do conceito de volume, alicerçados na Teoria das Situações Didáticas e Engenharia Didática de Formação e aprimorados com o suporte do *software* GeoGebra. A metodologia de pesquisa foi a Engenharia Didática, com ênfase na Engenharia Didática de Formação, pois os sujeitos envolvidos na pesquisa eram professores em formação inicial. No momento da experimentação, foi desenvolvido um curso de formação de cinco encontros de duas horas, totalmente online, através da ferramenta *Google Meet*. Os dez participantes foram convidados de acordo com alguns critérios: serem alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú, em Sobral, terem cursado a disciplina de Didática da Matemática e serem integrantes de um grupo de pesquisa do referido curso. Os instrumentos de coleta de dados foram: registros fotográficos, gravações audiovisuais, produções escritas, observações, questionários de pesquisa e também *screenshot* das conversas nos grupos de *WhatsApp*. No decorrer do curso de formação, foram trabalhadas onze situações didáticas do Exame Nacional do Ensino Médio, com o intuito de observar as ações dos futuros professores, no momento da formulação das estratégias de resolução dos problemas. É importante salientar que a intenção foi identificar os conhecimentos pragmáticos acionados frente a situações complexas que possibilitassem vivenciar ações práticas do exercício da docência. Nos resultados, observou-se o desenvolvimento dos participantes ao confrontarem-se com situações mais complexas encontradas nos problemas do Exame Nacional do Ensino Médio e como usaram o GeoGebra para mobilizarem diferentes conhecimentos epistêmicos e pragmáticos para sobressaírem-se dessas situações, transcendendo o trato analítico para elaborar suas próprias conjecturas. Esses resultados foram analisados a partir da utilização da Teoria das Situações Didáticas na experimentação e dos pressupostos da Engenharia Didática de Formação. Espera-se que essa pesquisa possa contribuir com a formação inicial dos professores de matemática, como também apresentar uma proposta metodológica que desenvolva o raciocínio geométrico, promovendo o aperfeiçoamento e o melhoramento do ensino de Volumes nas escolas.

Palavras-chave: Engenharia Didática de Formação. Exame Nacional do Ensino Médio. GeoGebra. Teoria das Situações Didáticas. Ensino de Volume.

ABSTRACT

This work has as main objective the understanding of didactic aspects related to the teaching of the concept of volume, based on the Theory of Didactic Situations and Didactic Engineering of Training and improved with the support of the GeoGebra software. The research methodology was Didactic Engineering, with emphasis on Didactic Engineering of Formation, because the subjects involved in the research were teachers in initial formation. At the time of experimentation, a training course of five two-hour meetings was developed, completely online, using the Google Meet tool. The ten participants were invited according to some criteria: to be students of the Mathematics Degree course at the Universidade Estadual Vale do Acaraú, in Sobral, to have taken the subject of Didactics of Mathematics and to be members of a research group of that course. The data collection instruments were: photographic records, audiovisual recordings, written productions, observations, research questionnaires and also screenshots of the conversations in the WhatsApp groups. During the training course, eleven didactic situations from the National High School Exam were worked out, in order to observe the actions of future teachers, when formulating the strategies for solving problems. It is important to note that the intention was to identify the pragmatic knowledge triggered in the face of complex situations that would allow to experience practical actions of teaching. In the results, the development of the participants was observed when confronted with more complex situations found in the problems of the National High School Exam and how they used GeoGebra to mobilize different epistemic and pragmatic knowledge to stand out from these situations, transcending the analytical treatment to develop their own conjectures. These results were analyzed using the Theory of Didactic Situations in experimentation and the assumptions of Didactic Engineering of Training. It is hoped that this research can contribute to the initial training of mathematics teachers, as well as to present a methodological proposal that develops geometric reasoning, promoting the improvement and improvement of the teaching of Volumes in schools.

Keywords: Didactic Engineering Training. National High School Exam. GeoGebra. Theory of Didactic Situations. Volume Teaching.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Margolinas (2015) descreve a dialética entre <i>savoir/connaisance</i> e seu importante papel para a Didática da Matemática.....	46
Figura 2 - Cubo unitário	49
Figura 3 - Boaventura Francesco Cavalieri (1598-1647)	49
Figura 4 - Pilha de Papel.....	50
Figura 5 - Interseção do plano π com os sólidos A e B.....	50
Figura 6 - Demonstração do Teorema 1.....	52
Figura 7 - Cilindro C.....	53
Figura 8 - Razão das áreas de dois cones.....	54
Figura 9 - Demonstração do volume do cone.....	54
Figura 10 - Demonstração do Teorema 4.....	55
Figura 11 - Demonstração do Princípio de Cavalieri do prisma.....	56
Figura 12 - Pirâmide seccionada por um plano paralelo.....	57
Figura 13 - Demonstração do Teorema 6.....	58
Figura 14 - Visualização 2D/3D construída pelo software GeoGebra correspondente a Questão1.....	80
Figura 15 - Visualização 2D/3D proporcionada pelo GeoGebra correspondente a Questão1.	80
Figura 16 - Visualização 2D/3D proporcionada pelo <i>software</i> GeoGebra correspondente a Questão 1	82
Figura 17 - Construção no GeoGebra da situação didática 2	84
Figura 18 - Movimentação dos controles deslizantes no GeoGebra da situação didática 2.....	84
Figura 19 - Modelização da redução da porcentagem da situação didática 2 no GeoGebra	85
Figura 20 - Construção corresponde a situação didática 2 no GeoGebra.....	86
Figura 21 - Modelização da situação didática 3 no software GeoGebra	88
Figura 22 - Modelização das dimensões de resolução da caixa 1	89
Figura 23 - Simulação de uma possível resolução para a situação didática 3 no GeoGebra....	89
Figura 24 - Simulação de resolução para caixa 5 no GeoGebra.....	90
Figura 25 - Construção no GeoGebra da situação didática 4	92
Figura 26 - Construção da situação didática 4 no software GeoGebra	93

Figura 27 - Construção referente a situação didática 4 no <i>software</i> GeoGebra	93
Figura 28 - Construção no GeoGebra correspondente a situação didática 4.....	94
Figura 29 - Construção correspondente a situação didática 5 no <i>software</i> GeoGebra	96
Figura 30 - Construção no GeoGebra correspondente ao enunciado da Questão 5	97
Figura 31 - Construção no GeoGebra referente a situação didática 5	97
Figura 32 - Construção correspondente do <i>software</i> GeoGebra do problema 1 do ENEM ...	100
Figura 33 - Construção correspondente do <i>software</i> GeoGebra do problema 1 do ENEM ...	101
Figura 34 - Construção correspondente do <i>software</i> GeoGebra do problema 1 do ENEM ...	101
Figura 35 - Construção correspondente do <i>software</i> GeoGebra do problema 7 do ENEM ...	104
Figura 36 - Construção correspondente do <i>software</i> GeoGebra do problema 7 do ENEM ...	105
Figura 37 - Construção correspondente do <i>software</i> GeoGebra do problema 7 do ENEM ...	106
Figura 38 - Construção correspondente do <i>software</i> GeoGebra do problema 7 do ENEM ...	107
Figura 39 - Visualização da situação didática 8 no <i>software</i> GeoGebra	109
Figura 40 - Construção corresponde a situação didática 8 no <i>software</i> GeoGebra.....	110
Figura 41 - Visualização de um possível modelo de resolução da situação didática 8 no GeoGebra.....	110
Figura 42 - Modelagem de resolução da situação didática 8 no GeoGebra	111
Figura 43 - Construção correspondente do <i>software</i> GeoGebra do problema 9 do ENEM ...	114
Figura 44 - Construção correspondente do <i>software</i> GeoGebra do problema 9 do ENEM ...	114
Figura 45 - Construção correspondente do <i>software</i> GeoGebra do problema 9 do ENEM ...	115
Figura 46 - Construção correspondente do <i>software</i> GeoGebra do problema 10 do ENEM .	118
Figura 47 - Construção correspondente do <i>software</i> GeoGebra do problema 10 do ENEM .	119
Figura 48 - Construção correspondente do <i>software</i> GeoGebra do problema 10 do ENEM .	119
Figura 49 - Construção correspondente do <i>software</i> GeoGebra do problema 10 do ENEM .	121
Figura 50 - Construção correspondente a situação didática 11 no GeoGebra.....	123
Figura 51 - Construção da situação didática 11 no <i>software</i> GeoGebra	123
Figura 52 - Explorando a construção da situação da situação didática 11 no GeoGebra.....	123
Figura 53 - Construção corresponde ao modelo de resolução da situação 11	124
Figura 54 - Construção da estratégia de resolução da situação didática 11 no GeoGebra	126
Figura 55 - Momento inicial da Situação Didática.....	136
Figura 56 - Momento em que o acadêmico inicia a ação de modelização no GeoGebra.....	136
Figura 57 - Formulação da situação didática 1 pelo Grupo 1.....	137
Figura 58 - Resolução da situação didática 1 apresentada pelo Grupo 1	137
Figura 59 - Dialética da validação do Grupo 1.....	138

Figura 60 - Explorando a construção no GeoGebra	139
Figura 61 - Modelização da situação didática 1 no GeoGebra.....	139
Figura 62 - Formalização de resolução do Grupo 2	140
Figura 63 - Momento de formulação do Grupo 3.....	141
Figura 64 - Grupo 3 formalizando a resolução da situação didática 1	141
Figura 65 - Uso do <i>software</i> GeoGebra na dialética da institucionalização.....	143
Figura 66 - Momento da formulação dos participantes do Grupo 1.....	144
Figura 67 - Construção no GeoGebra da Situação Didática 2 do ENEM	145
Figura 68 - Modelização de resolução do Grupo 1	146
Figura 69 - Dialética da validação do Grupo 1.....	147
Figura 70 - Dialética de formulação do Grupo 2.....	148
Figura 71 - Manipulação no GeoGebra da questão 2 no celular pelo Grupo 2	148
Figura 72 - Registro algébrico da solução da situação didática 2 pelo Grupo 2	149
Figura 73 - Solução apresentada pelo Grupo 3.....	150
Figura 74 - Acesso inicial a construção do GeoGebra para modelização da questão 3 do ENEM.....	153
Figura 75 - Modelo algébrico de resolução da situação didática 3 do Grupo 1	154
Figura 76 - Dialética de validação das estratégias de resolução do Grupo 1	155
Figura 77 - Dialética da formulação da situação didática 3 promovida pelo Grupo 2	156
Figura 78 - Formulação de resolução do Grupo 2	156
Figura 79 - Interação do representante do Grupo 3 com a construção no GeoGebra.....	157
Figura 80 - Modelização Matemática do Grupo 3 no momento da formulação.....	158
Figura 81 - Dialética da institucionalização mediada pela pesquisadora	159
Figura 82 - Situações didáticas disponibilizadas para os participantes	160
Figura 83 - Exploração da construção no computador.....	160
Figura 84 - Solução algébrica da situação 4 do Grupo 1	161
Figura 85 - Dialética da formulação da situação didática 4 do Grupo 2.....	163
Figura 86 - Manipulação do GeoGebra no celular pelo Grupo 2	163
Figura 87 - Modelização algébrica para situação didática 4 do Grupo 2	164
Figura 88 - Apresentação da solução da situação 4 pelo Grupo 2.....	165
Figura 89 - Construção da modelagem matemática da situação 4 pelo Grupo 2	166
Figura 90 - Resolução algébrica da situação 4 pelo Grupo 3	167
Figura 91 - Construção da situação didática 5 do ENEM no GeoGebra.....	168
Figura 92 - Manipulação da situação didática 5 no GeoGebra pelo Grupo 1	169

Figura 93 - Solução algébrica da situação didática 5 do Grupo 1	170
Figura 94 - Dialética da formulação do Grupo 2	171
Figura 95 - Modelização matemática de solução da situação 5 pelo Grupo 2	172
Figura 96 - Resolução algébrica da situação didática 5 do Grupo 3	174
Figura 97 - Quarto encontro da aplicação das situações didáticas no Google Meet	175
Figura 98 - Construção no GeoGebra da situação 6.....	176
Figura 99 - Dialética da formulação do Grupo 1	176
Figura 100 - Manipulação da construção no GeoGebra da situação didática 6 pelo Grupo 1	177
Figura 101 - Modelização algébrica da situação didática 6 do Grupo 1	178
Figura 102 - Dialética de validação por meio do GeoGebra pelo Grupo 1	179
Figura 103 - Solução algébrica da situação didática 6 pelo Grupo 1	179
Figura 104 - Dialética da formulação entre os professores em formação do Grupo 2	180
Figura 105 - Modelização algébrica da situação didática 6 pelo Grupo 2	181
Figura 106 - Solução da situação 6 apresentada pelo Grupo 3.....	182
Figura 107 - Dialética da institucionalização da situação didática 6.....	183
Figura 108 - Apresentação do Princípio de Cavalieri durante a institucionalização.....	184
Figura 109 - Situação didática do ENEM apresentada aos participantes	184
Figura 110 - Momento de formalização do Grupo 1	185
Figura 111 - Modelização da situação didática 7 através do GeoGebra	186
Figura 112 - Formulação da escrita matemática da situação didática 7 pelo Grupo 1	186
Figura 113 - Validação do Grupo 1 no Google Meet	187
Figura 114 - Exposição de P4 no momento da validação da situação 7 do ENEM	188
Figura 115 - Dialética da formulação desenvolvida pelo Grupo 2.....	189
Figura 116 - Solução da situação didática 7 apresentada pelo Grupo 2	189
Figura 117 - Demonstração da solução por meio da construção no GeoGebra pelo Grupo 2	190
Figura 118 - Modelização algébrica da solução da situação 7 do Grupo 3	191
Figura 119 - Institucionalização da situação didática 7 com o GeoGebra	192
Figura 120 - Modelização através do <i>software</i> GeoGebra da situação didática 8.....	193
Figura 121 - Dialética da formulação pelos participantes do Grupo 1	194
Figura 122 - Resolução da situação didática 8 exibida pelo Grupo 1	194
Figura 123 - Apresentação da situação didática 8 no <i>Google Meet</i> pelo Grupo 1	195
Figura 124 - Dialética da formulação do Grupo 2.....	196
Figura 125 - Modelização da situação didática 8 apresentada pelo Grupo 2	197
Figura 126 - Dialética da validação com exploração do GeoGebra pelo Grupo 2.....	197

Figura 127 - Explicação da escrita matemática de resolução do Grupo 2.....	198
Figura 128 - Modelo generalizado pelo participante do Grupo 3.....	199
Figura 129 - Construção da situação didática 9 no software GeoGebra	201
Figura 130 - Dialética da formulação dos participantes do Grupo 1	202
Figura 131 - Solução algébrica da situação didática 9 apresentada pelo Grupo 1	203
Figura 132 - Exploração do GeoGebra na dialética da validação pelo Grupo 1	204
Figura 133 - Dialética de validação no ambiente do lápis e papel exibidos pelo Grupo 1....	205
Figura 134 - Exploração do GeoGebra na dialética de formulação do Grupo 2	206
Figura 135 - Dialética de validação do Grupo 2.....	207
Figura 136 - Apresentação do modelo matemático para a questão 9 do Grupo 3.....	208
Figura 137 - Momento de validação do Grupo 3.....	209
Figura 138 - Dialética da institucionalização da situação didática 9.....	211
Figura 139 - Interação com a construção no GeoGebra pelo Grupo 1	211
Figura 140 - Formulação das estratégias de resolução do Grupo 1.....	212
Figura 141 - Representação algébrica da solução da situação 10.....	213
Figura 142 - Dialética da formulação do Grupo 2.....	214
Figura 143 - Exposição da estratégia de resolução do Grupo 2	215
Figura 144 - Validação do modelo algébrico apresentado pelo Grupo 2	216
Figura 145 - Solução algébrica da situação didática 10 do Grupo 3	218
Figura 146 - Dialética da institucionalização da situação didática 10.....	219
Figura 147 - Construção da situação didática 11 no <i>software</i> GeoGebra	220
Figura 148 - Dialética da formulação promovida pelo Grupo 1.....	221
Figura 149 - Modelo matemático de resolução da situação didática 11 do Grupo 1	221
Figura 150 - Validação da resolução do Grupo 1	222
Figura 151 - Estratégia de resolução promovida pelo Grupo 2.....	223
Figura 152 - Exploração da situação didática 11 no recurso tecnológico do GeoGebra.....	224
Figura 153 - Solução algébrica da situação didática 11, apresentada pelo Grupo 2	225
Figura 154 - Dialética da validação da situação didática 11 do Grupo 2	225
Figura 155 - Solução da situação didática 11 do participante P10.....	227
Figura 156 - Institucionalização do conceito de volume da pirâmide no <i>software</i> GeoGebra.....	228
Figura 157 - Gráfico referente as respostas da 1ª Questão	230
Figura 158 - Gráfico referente as respostas da segunda Questão	230
Figura 159 - Gráfico referente as respostas da terceira questão	231

Figura 160 - Gráfico referente as respostas da quarta questão	231
Figura 161 - Códigos das Atividades 1 e 2, respectivamente.....	261
Figura 162 - Códigos das Questões 1 e 2, respectivamente	261
Figura 163 - Códigos das Atividades 3, 4 e 5, respectivamente.....	261
Figura 164 - Códigos das Questões 3, 4 e 5, respectivamente	261
Figura 165 - Códigos das Atividades 6, 7 e 8, respectivamente.....	262
Figura 166 - Códigos das Questões 6, 7 e 8, respectivamente	262
Figura 167 - Códigos das Atividades 9, 10 e 11, respectivamente.....	262
Figura 168 - Códigos das Questões 9, 10 e 11, respectivamente	262

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Análise de trabalhos acadêmicos relacionados com a pesquisa.....	68
Quadro 2 - Análise de livros com foco na abordagem do conteúdo de Volume.....	73
Quadro 3 - Descrição dos Encontros da Formação	129
Quadro 4 - Características dos Participantes da Pesquisa	131
Quadro 5 - Distribuição dos participantes em grupos	132

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Relações de Medidas de comprimento a partir das construções com o <i>software</i> GeoGebra.....	81
--	----

LISTA DE SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
ED	Engenharia Didática
EDF	Engenharia Didática de Formação
IREM	Institutos de Pesquisa em Educação Matemática
LDB	Lei de Diretrizes e Bases
MEC	Ministério da Educação
NEaD	Núcleo de Educação a Distância
OCN	Orientações Curriculares Nacionais
OBM	Olimpíada Brasileira de Matemática
PNLD	Plano Nacional do Livro Didático
SDO	Situações Didáticas Olímpicas
TICs	Tecnologias da Informação e Comunicação
TSD	Teoria das Situações Didáticas
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
UVA	Universidade Estadual Vale do Acaraú

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	22
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	31
2.1 Engenharia Didática de Primeira Geração	31
2.1.1 Análises Preliminares.....	33
2.1.2 Concepção e Análise a Priori das Situações Didáticas.....	33
2.1.3 Experimentação.....	35
2.1.4 Análise a Posteriori e Validação (Interna e Externa).....	36
2.2 Engenharia Didática de Formação.....	37
2.3 Teoria das Situações Didáticas	39
2.3.1 Situação de Ação	42
2.3.2 Situação de Formulação	43
2.3.3 Situação de Validação	44
2.3.4 Situação de Institucionalização	44
3 NOÇÕES DE VOLUME.....	47
3.1 Uma síntese histórica do Conceito de Volume	47
3.2 Noção Intuitiva de Volume.....	48
3.3 Princípio de Cavalieri.....	49
3.4 Conceito Básico de Área.....	51
3.5 Volume do Paralelepípedo	51
3.6 Volume do Cilindro.....	52
3.7 Volume do Cone	53
3.8 Volume da Esfera.....	55
3.9 Volume do Prisma.....	56
3.10 Volume da Pirâmide	57

4 O ENSINO E A APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE VOLUME.....	59
4.1 O Ensino e a Aprendizagem de Volume	59
4.2 Formação Docente	63
4.3 Tecnologia e a Mídia Digital na Educação Matemática	64
5 PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA.....	67
5.1 Análises Preliminares da Engenharia Didática.....	67
5.1.1 Análises de dissertações em trabalhos correlatos com a pesquisa	68
5.1.2 O objeto matemático em livros didáticos	72
5.1.3 Análise de publicações correlatas com a pesquisa	74
6 ANÁLISE A PRIORI	76
6.1 Análise a Priori e Concepções das Situações Didáticas do ENEM	76
6.2 Concepção e descrição das situações didáticas.....	77
6.2.1 Situação Didática 1	78
6.2.2 Situação Didática 2	83
6.2.3 Situação Didática 3	87
6.2.4 Situação Didática 4	91
6.2.5 Situação Didática 5	95
6.2.6 Situação Didática 6	99
6.2.7 Situação Didática 7	103
6.2.8 Situação Didática 8	108
6.2.9 Situação Didática 9	112
6.2.10 Situação Didática 10	117
6.2.11 Situação Didática 11	122
7 EXPERIMENTAÇÃO	127
7.1 O lócus e os sujeitos da Pesquisa	130
8 ANÁLISE POSTERIORI E VALIDAÇÃO DA ENGENHARIA.....	134

8.1 Análise a posteriori e validação das Situações Didáticas do ENEM aplicadas no segundo encontro	134
8.1.1 Análise a posteriori e validação da situação didática 1	135
8.1.2 Análise a posteriori e validação da situação didática 2	143
8.2 Terceiro encontro: Análise a posteriori e validação das Situações Didáticas do ENEM.....	152
8.2.1 Análise a posteriori e validação da situação didática 3	152
8.2.2 Análise a posteriori e validação da situação didática 4	160
8.2.3 Análise a posteriori e validação da situação didática 5	168
8.3 Quarto encontro: Análise a posteriori e validação das Situações Didáticas do ENEM.....	175
8.3.1 Análise a posteriori e validação da situação didática 6	176
8.3.2 Análise a posteriori e validação da situação didática 7	184
8.3.3 Análise a posteriori e validação da situação didática 8	193
8.4 Quinto encontro: Análise a posteriori e validação das Situações Didáticas do ENEM.....	201
8.4.1 Análise a posteriori e validação da situação didática 9	201
8.4.2 Análise a posteriori e validação da situação didática 10	211
8.4.3 Análise a posteriori e validação da situação didática 11	219
8.5 Aplicação e análise do questionário C.....	229
9 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	235
REFERÊNCIAS.....	240
APÊNDICE A – SITUAÇÕES DIDÁTICAS	249
APÊNDICE B – ATIVIDADES DE PESQUISA - APLICAÇÕES.....	260
APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO DE PESQUISA: AVALIAÇÃO FINAL.....	263
ANEXO A — MATRIZ CURRICULAR DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE ESTADUAL VALE DO ACARAÚ	265
ANEXO B — PARECER DO COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA	268

ANEXO C — TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	278
---	------------

1 INTRODUÇÃO

Discutir situações que envolvem o ensino de Geometria Espacial é uma questão que há muito tempo provoca inquietação entre os pesquisadores e educadores matemáticos. Autores como Lorenzato (1995) e Pavanello (1991) já vêm demonstrando preocupação com o ensino dos conteúdos geométricos, desde os anos de 1990, e alertando para a necessidade de mudança no currículo de formação do professor de matemática. Entre os vários problemas que provocam tal inquietude, há indicadores que mostram um quadro completamente desfavorável à formação docente, como mostra Corrêa *et al.* (2019, p. 57) ao escrever que “muitos dos problemas no ensino de Geometria ocorrem devido ao próprio processo de formação do professor” pois este não estabelece uma relação entre aquilo que ensina e o mundo concreto, na tentativa de associar teoria à prática, apesar dos muitos esforços em ampliar-se o número de pesquisas com o intuito de superar os obstáculos inerentes ao ensino de Geometria.

Decorridos quase 30 anos das investigações apresentados por Lorenzato e Pavanello, ainda se discutem os mesmos problemas relacionados ao ensino e à aprendizagem de Geometria Espacial. Nessa perspectiva, este trabalho faz um estudo sobre um assunto de Geometria Espacial, o conteúdo de Volume, constatando que na maioria das instituições escolares ainda persiste o ensino tradicional, com aulas expositivas no quadro, a memorização de fórmulas prontas e cálculos mecanizados relacionados à geometria. Siqueira (2013, p. 22) reforça tal fato, ao ressaltar que “[...] a maioria dos professores de matemática de agora sempre tiveram a maioria de suas aulas dentro da metodologia tradicional: expositiva, o cálculo pelo cálculo, a fórmula decorada, porque iria cair na prova”.

Dentro do contexto da Geometria Espacial, o tema grandezas e medidas revelou sua importância muito cedo, constituindo-se nas primeiras noções geométricas de interesse da humanidade. De acordo com Lima (1991), os povos egípcios já calculavam o volume de depósitos de grãos, ao nível de comércio, mostrando que o cálculo de área e volume é um assunto milenar. Tal relevância se dá não apenas por fazer parte do currículo escolar, mas também por estarem presentes em assuntos do cotidiano essenciais ao meio social de um indivíduo.

Pelo exposto, percebe-se que o conceito de volume não pode ser excluído da formação inicial de professores, muito menos da educação escolar, pois configuram-se como saberes que permitem a interpretação de elementos essenciais para o homem viver em sociedade. Segundo, Barros (2002), as grandezas geométricas no ensino e aprendizagem da Matemática

estabelecem relações com inúmeros campos da ciência, tais como: números, geometria, álgebra, tratamento de informação, entre outros.

Ademais, ressalta-se também, a importância de relacionar a matemática presente no cotidiano aos saberes escolares, e que em muito facilita a vida do ser humano, quer seja nas compras nos supermercados: somando, multiplicando, dividindo, calculando descontos; nos afazeres domésticos: fazendo receitas, calculando peso, medida, quantidade, etc.; para se locomover: calculando distâncias, o consumo de combustível, o valor que se gasta, enfim, em muitas outras situações do dia a dia.

Assim, é inegável a necessidade de fazer uma reflexão sobre o ensino e a aprendizagem de geometria, no sentido de buscar um melhor desenvolvimento das práticas didáticas, no caso dessa pesquisa, de conceito de Volume, mas com potencial para estender-se para outros conceitos geométricos.

Considerando o progresso tecnológico atual, destaca-se também a importância de adequar-se o uso das tecnologias digitais ao ensino de Geometria Espacial, consubstanciando uma aprendizagem capaz de práticas concretas que possibilitem ao aluno ver e movimentar o objeto de estudo de vários modos diferentes, ajudando-o a desenvolver o raciocínio necessário para a construção da resolução de problemas que seriam praticamente impossíveis de obter no tradicional uso do caderno.

No que se refere ao ensino de Geometria nas escolas brasileiras, ele passou por várias fases. De acordo com Santos e Nacarato (2014), na década de 1960, era norteadas pelos estudos de Euclides. Entre a década de 1970 e 1980, sofreu uma forte influência do Movimento da Matemática Moderna, cujo ensino priorizava a linguagem formal da matemática, o que suscitou grandes dificuldades na compreensão de conceitos. Ademais, os docentes também encontravam obstáculos no repasse dos conteúdos geométricos, aliados à falta de estrutura dos livros didáticos que impunham à geometria, a última seção do livro, contribuindo para que tais assuntos não fossem contemplados nas aulas de matemática, tornando assim o ensino insatisfatório e, conseqüentemente, seu abandono pelas escolas.

Tal abandono provocou também a omissão na formação inicial dos professores, causando uma falha na construção dos conceitos de geometria na escolarização dos discentes. De acordo com Meneses (2007), isso se evidenciou quando foi,

[...] percebido principalmente durante os anos de 1960 a 1990, também refletiu nos cursos de graduação de professores e nos cursos de magistério, pois esses cursos não tinham preocupação e nem um currículo voltado ao ensino de geometria, fato esse que foi responsável pela geração de inúmeros professores órfãos dessa formação e,

consequentemente, sem a consciência da importância da aprendizagem desse conteúdo (MENESES, 2007, p. 4).

Com isso, observa-se um período de declínio no ensino de Geometria, resultando na diminuição, e em alguns casos até na retirada desses conteúdos dos currículos escolares, o que poder ter provocado um déficit no desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo de uma geração inteira.

Outro ponto relevante refere-se à metodologia aplicada nessas aulas. Segundo Santos e Nacarato (2014), muitas vezes, produzia um ensino reducionista, pautado na exposição de figuras geométricas planas, em que praticamente se enfatizava sua classificação, sem explorar outras propriedades, como suas diferenças e semelhanças. Tal fato mostrou que existia pouquíssimo contato do docente com o conteúdo de geometria, culminando em uma prática ineficiente e que, ainda hoje, se faz presente nas aulas de matemática.

Ademais, de acordo com Manrique, Silva e Almouloud (2002), existem vários fatores que originaram as dificuldades do processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos geométricos, entre eles destacam-se: i) a formação precária do professor em relação à geometria; ii) a formação inicial do docente não propicia uma reflexão profunda a respeito do ensino de geometria; iii) os problemas propostos dão ênfase as resoluções algébricas, em detrimento do raciocínio lógico dedutivo e das demonstrações; iv) a transposição da geometria empírica para a geometria dedutiva é quase inexistente e v) poucos trabalhos propõem a leitura e a interpretação de textos matemáticos.

No entanto, a geometria é tida por muitos pesquisadores e educadores matemáticos como uma ferramenta que liga o homem ao espaço em que vive, pois, de acordo com Passos (2005, p. 17), ela “pode ser considerada a parte da matemática mais intuitiva, concreta e ligada à realidade”. Assim, o estudo de geometria exerce uma importância essencial para desenvolver-se o raciocínio lógico espacial e a compreensão dos problemas práticos do cotidiano. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) também chama atenção para tal fato, ao afirmar que:

A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamento no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes (BRASIL, 2017, p. 269).

Assim, evidencia-se que para ter-se uma evolução na aprendizagem, faz-se essencial o desenvolvimento de conceitos geométricos. Nesse sentido, Santos e Nacarato (2014) ressaltam a importância das tarefas propostas pelo professor, almejando promover a elaboração do movimento conceitual por parte dos alunos. Para as autoras, os significados e os sentidos devem circular pelas diferentes esferas da comunicação na sala de aula. As tarefas e as intervenções realizadas pelo docente, no processo de construção do saber, devem propiciar a evolução do aprendiz, caracterizando-se como ferramentas e ações potencializadoras dos processos de significação.

Em se tratando do campo da geometria e medidas, Van Der Mer (2017, p. 5) salienta que, apesar do tema está presente em diversas situações do cotidiano, ainda se verifica que os alunos apresentam dificuldades em solucionar problemas simples que envolvem volumes de figuras geométricas, “em muitos casos, os alunos utilizam mecanicamente fórmulas sem demonstrar real entendimento do conceito”. O que nos leva a refletir também, sobre a necessidade das formações contínuas com os professores, sendo considerada dentro da carga horária dos mesmos, haja visto os docentes já sofrerem com a sobrecarga de trabalho, dificultando assim, o acesso a pesquisas e metodologias que podem auxiliar em suas práticas de ensino.

Assim, pesquisadores de vários países têm procurado promover uma maior importância às grandezas geométricas de áreas e volumes, haja vista na literatura ainda se apresentar um número reduzido de publicações relacionadas ao tema, realizando trabalhos investigativos, na tentativa de responder questionamentos relacionados ao ensino e à aprendizagem de matemática, dentre eles as dificuldades de apropriação do conceito de volume. Autores como Figueiredo, Bellemain e Teles (2012) apresentam um trabalho com grandezas geométricas em que relatam que, durante muito tempo, o ensino de geometria foi marcado pelo uso exagerado de fórmulas e conversão de unidades para trabalhar áreas, comprimento e volume. Apesar de valorizar o uso da fórmula para o cálculo de volume e outras grandezas geométricas, alertam para o fato de que seu uso mecânico e exagerado, sem um melhor entendimento de seu significado para a compreensão de tais grandezas, mostra-se ineficaz e torna-se obstáculo para o uso adequado da unidade de volume.

Convém ressaltar que, nos livros didáticos, o conceito de volume também é abordado, priorizando fórmulas e cálculos sintetizados, conforme relata Figueiredo, Bellemain e Teles (2012) ao observarem, nas análises de coleções do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD), que os problemas que envolvem o conteúdo enfatizam as aplicações de álgebra, o que limita a visualização espacial do aluno, essencial para a compreensão de tal conceito. Ademais, em se

tratando de pesquisa, Barros (2002, p. 16) chama atenção para o fato de que, nos últimos anos, no ensino escolar, as grandezas geométricas nem sempre recebem “um tratamento compatível com seu importante papel, seja nos estudos científico-tecnológicos, seja na formação da competência básica para medir grandezas na vida cotidiana”.

Desse modo, buscou-se direcionar uma investigação de elementos didáticos, numa vertente da evolução do ensino e aprendizagem do conceito de volume. Pôde-se observar a existência de uma modelização direcionada ao processo de inserção de novas propostas metodológicas de ensino e aprendizagem da geometria espacial e de outros conteúdos contemplados na matemática, uma vez que o baixo rendimento apresentado pelos estudantes em assuntos relacionados à geometria espacial é discutido há bastante tempo na literatura da Didática da Matemática. De acordo com Passos (2005, p. 29), estudos revelam que o baixo conhecimento dos professores em relação aos conteúdos geométricos, “poderia ser um dos fatores do baixo desempenho dos alunos em geometria”. Ainda segundo a autora, nas avaliações de desempenho realizadas pelos órgãos responsáveis pela educação dos Estados brasileiros ou diretamente pelo Ministério da Educação (MEC), os estudantes em matemática e em geometria têm apresentado ausência de conexão entre as propostas de ensino governamentais e os resultados obtidos nas escolas.

Diante desse cenário, esta pesquisa propõe uma alternativa para trabalhar com os alunos em licenciatura de matemática (professores em formação), situações-problemas relacionadas ao ensino e aprendizagem do cálculo de volumes, estruturadas na Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau (1986). Essa teoria de ensino proporciona a criação de um modelo que permite a interação entre o aprendiz, o saber e o meio no qual ocorrerá a aprendizagem. Ademais, destacou-se a Engenharia Didática de Formação (EDF) para fundamentar esta atividade investigativa, utilizando o *software* GeoGebra para a exploração visual e a percepção das relações entre os elementos das figuras e suas propriedades matemáticas.

Esta pesquisa justificou-se no fato de que desenvolver competências que possibilitem a transposição de alguns conteúdos aos modos operandi de resoluções matemáticas, perpassa pela capacidade do professor de planejar e intermediar ações pedagógicas que possam promover mecanismos que facilitem essa transposição para o contexto escolar do estudante. Como também, se exige mais conhecimento matemático, incluindo questões epistemológicas, institucionais, cognitivas e de restrições, além de novas metodologias e recursos didáticos pedagógicos que possam ser inseridos no trabalho com a matemática. Pais (2015) reforça essa concepção ao relatar que se pode analisar a transposição como uma aprendizagem específica

que pode ser dominada com o objetivo de caracterizar o fluxo cognitivo da evolução do conhecimento de um sujeito. Assim, a concretização dessa transposição proporciona um processo para aprendizagem de um novo conhecimento.

Ademais, é importante ressaltar que dentro da formação docente a integração entre escola e universidade se constitui um papel importante para o professor realizar pesquisas, conforme se verifica nas discussões apresentadas pelo Instituto de Pesquisas em Educação Matemática (IREM), que foram criados para reestruturar a Matemática e mudar o Movimento da Matemática Moderna¹. De acordo com Pommer (2008), o IREM buscava desenvolver trabalhos que complementavam a formação dos professores de matemática e também na concepção de materiais pedagógicos que serviam de apoio para aulas. Desse modo, favoreceu “a evolução para o estudo do ensino da matemática que permitiram a produção de conhecimento para controlar e produzir ações sobre o ensino” (POMMER, p. 1). Assim, considera-se a relevância desse contexto para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem que valorize a didática e a pedagogia para a construção dos saberes matemáticos.

Partindo disso, esta pesquisa foi norteada pela seguinte questão: **De que maneira conceber um recurso didático que permita melhorar o ensino de volume, por meio da formação inicial de professores?**

Assim, apresenta-se como objetivo geral compreender aspectos didáticos relativos ao ensino do conceito de volume, alicerçados na TSD e EDF e aprimorados com o suporte do *software* GeoGebra. Dessa forma, para alcançar o objetivo geral, apresentam-se ainda os seguintes objetivos específicos:

- Desenvolver uma proposta de EDF, a partir de situações didáticas para o ensino do conceito de Volume no contexto do ENEM, com ênfase na TSD;
- Estruturar Situações Didáticas para o ensino do conceito de volume que possam ser visualizadas por meio de uma modelagem no *software* GeoGebra;
- Aplicar situações didáticas aos professores de matemática em formação inicial que possibilite a compreensão de conceitos geométricos e a formulação de estratégias para resolução de problemas.

As análises prévias desta pesquisa foram realizadas com base nas etapas da Engenharia Didática (ED). Assim, esse processo foi organizado em duas etapas. Na primeira, foi realizada uma revisão bibliográfica sobre a metodologia de pesquisa, a teoria de ensino, o

¹ Movimento internacional do ensino de matemática surgido na década de 1960. Para maiores informações consultar site de Brousseau disponível em <https://guy-brousseau.com/> e Burigo (2006).

conteúdo de Volume e, o *software* GeoGebra. Na outra etapa, foi feita uma descrição da abordagem didática e cognitiva do ensino e aprendizagem do conceito de volume relacionada ao contexto preterido para aplicação e desenvolvimento da pesquisa.

Esta pesquisa é de cunho qualitativa, na qual se utilizou como metodologia de pesquisa a ED, com ênfase na EDF, segundo as propostas de Perrin-Glorian (2009) e Tempier (2014), uma vez que elas apresentam estudos relacionados à formação de professores. Fundamentou-se a investigação na TSD como complementariedade à EDF, relacionando elementos advindos da resolução de problemas do ENEM e, da formação do docente de matemática.

Os referenciais teóricos do estudo, no que tange ao ensino e à aprendizagem do conceito de volume foram: Vergnaud *et al.* (1983), Figueiredo, Bellemain, Teles (2012), Douady e Perrin-Glorian (1989), Awila (2017), Figueiredo (2013), Barros (2002), Moraes (2013) e Lima (1991). Neste trabalho, utilizam-se problemas selecionados das avaliações do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), por tratar-se de uma prova que apresenta uma grande variedade de questões que abordam esse tema, além de ser um exame com grande impacto na educação brasileira, uma vez que se propõe avaliar o desempenho do aluno ao término do Ensino Médio.

Ressalta-se, também, o aporte tecnológico do *software* GeoGebra que foi utilizado como recurso digital para a construção de um modelo matemático que propicie a visualização e a compreensão de propriedades geométricas na aplicação da pesquisa. De acordo com Alves (2019, p. 115), o GeoGebra tem potencial para propiciar ao professor, incentivar os estudantes a participarem da “exploração dinâmica das propriedades numéricas e geométricas, de modo que a visualização, percepção e intuição desempenhe um papel essencial para a evolução da aprendizagem de todos os envolvidos em cada situação didática”. Percebe-se assim, a importância da utilização de *softwares* educacionais em aulas de Geometria, pois é um recurso didático com o qual o aluno pode manusear e, portanto, manifestar a criatividade na elaboração das estratégias para resolução dos problemas propostos.

Para a ED e EDF, direcionaram-se os estudos de Artigue (1995, 2011, 2015), Tempier (2012, 2013, 2016), Perrin-Glorian (2009, 2010, 2019), Perrin-Glorian e Bellemain (2016, 2019), Almouloud (2007, 2019), Almouloud e Silva (2012), Machado (2015), Alves (2016a, 2016b, 2016c, 2017, 2018, 2019), Santos e Alves (2017) e Alves e Catarino (2017). Para a TSD, utilizaram-se estudos de Brousseau (1986, 1995, 1998, 2008).

Para aplicação, foram escolhidos como sujeitos da pesquisa, alunos da graduação do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA),

localizada no município de Sobral, no estado do Ceará, estabelecendo um elo desse estudo com o grupo de estudantes em formação inicial, o que constitui o propósito da pesquisa, além de desenvolver um trabalho na comunidade na qual exerço a profissão docente.

Com isso, constatou-se que trabalhar conceito geométrico sobre Volume, com o aporte de tecnologias e de problemas selecionados das provas do ENEM, teve uma fácil aceitação por parte dos discentes, pois trata-se de atividades amplamente discutidas nas escolas e nas comunidades acadêmicas de todo país. Além do mais, a utilização do *software* GeoGebra desperta tanto a curiosidade quanto a vontade de utilizar mecanismos que possibilitem uma aprendizagem significativa e modelizadora, através de novas metodologias de ensino.

Dando início a discussão dessa pesquisa, apresenta-se a descrição dos elementos que constituem e dão embasamentos científicos a essa investigação. Nesse sentido, essa pesquisa está estruturada em nove capítulos.

No primeiro, tem-se a Introdução, em que se apresenta a justificativa, a problemática, os objetivos e a relevância da pesquisa por meios dos embasamentos teóricos e a descrição sobre a estrutura do trabalho.

O segundo capítulo traz a fundamentação teórica que está dividida em seções.

Inicialmente se discutiram as noções da ‘ED’, em que são explicitadas suas quatro fases (análises preliminares, análise *a priori*, experimentação e validação) que serviram de embasamento teórico para sustentar e validar esta investigação, em complementariedade com a EDF.

Em seguida, traz-se um estudo sobre a ‘EDF’, ressaltando que essa metodologia se apresenta na interface entre a pesquisa e o ensino, destacando sua relevância na aplicação para o desenvolvimento de um recurso ou objeto de aprendizagem que tanto pode ser usado para o ensino regular quanto para a formação de professores. Apresentou-se ainda a ‘TSD’, relacionando-a com o meio (*milieu*), as situações didáticas e a-didáticas, na qual estão pautados o saber a ser ensinado e o conhecimento a ser aprendido.

No terceiro módulo efetivou-se um estudo específico do conceito de ‘Volume’, em que se apresenta uma ‘Síntese histórica do conceito de Volume’, ressaltando sua importância ao contexto da educação. Num segundo momento, abordou-se o ‘Princípio de Cavalieri’, trazendo um pouco da história, os conceitos intuitivos de Volume, associando com sua definição geral e com o ‘Conceito Básico de Área’, em que se relacionam as propriedades intuitivas da área para polígonos. Finalizando o capítulo com o conceito de volume dos sólidos que foram abordados nas situações didáticas da pesquisa: Paralelepípedo, Cilindro, Cone, Esfera, Prisma e Pirâmide.

No quarto capítulo, faz-se um apanhado epistemológico sobre ‘O ensino e a aprendizagem do conceito de volume’, da ‘Formação Docente’ e do uso de ‘Tecnologia e a Mídia Digital na Educação Matemática’, mostrando a relevância da abordagem desses conceitos na formação inicial do professor de matemática.

O próximo capítulo trata do ‘Percurso Metodológico da Pesquisa’, descrevendo-se os caminhos utilizados durante a investigação e a seção da ‘Análise Preliminar’, na qual foi feito um apanhado de trabalhos referentes ao tema e uma análise epistemológica sobre os problemas inerentes ao ensino e à aprendizagem de volume.

No sexto capítulo, dá-se prosseguimento à metodologia da pesquisa, por meio da ‘Análise *a Priori* e Concepções das Situações Didáticas do ENEM’, fazendo uma descrição da concepção das situações didáticas do ENEM, relacionando-as com as percepções dos professores de matemática em formação inicial.

No capítulo posterior, tem-se a parte da ‘Experimentação’, na qual se descrevem o lócus da pesquisa, os participantes e os procedimentos usados na coleta de dados.

A discussão e o detalhamento da análise de dados, coletados durante a aplicação das situações didáticas, serão abordados no penúltimo capítulo, referente à ‘Análise *a Posteriori* e Validação da Engenharia’. Nele, expõem-se as vivências das sequências didáticas com os acadêmicos de licenciatura em matemática, pelo confronto da análise *a priori* e da análise *a posteriori* de cada situação.

As conclusões são apresentadas no nono capítulo, em que são mostrados os resultados mais relevantes deste estudo e, sugerem-se elementos que podem ser aplicados em futuras pesquisas na área.

Desse modo, finalizou-se a pesquisa, debatendo-se tópicos relevantes, gerados da prática vivenciada na experimentação e do convívio com os participantes, apresentando respostas promissoras no campo do ensino e aprendizagem do conceito de Volume.

A seguir, será discutido o subsídio teórico desta pesquisa, o qual é composto pela metodologia de pesquisa ED e EDF e pela teoria de ensino da TSD.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, apresenta-se a fundamentação teórica que norteou esta pesquisa, a qual foi estruturada seguindo as etapas clássicas da ED, mas tendo em vista a formação inicial de professores em complementariedade com a EDF, visando ao ensino com ênfase na evolução e ao aperfeiçoamento da formação das práticas profissionais do docente. Também apresenta-se a TSD, que foi utilizada com o intuito de fundamentar aspectos da discussão de elementos que necessitam serem incorporados à prática do professor de matemática.

2.1 Engenharia Didática de Primeira Geração

Com o intuito de responder à questão norteadora desta pesquisa e alcançar os objetivos, utilizou-se a ED como metodologia de pesquisa, com ênfase na EDF, constituindo-se como um desenvolvimento da ED; no entanto, direcionada para a formação de professores e para a concepção de recursos didáticos. Essa metodologia foi adotada para elaboração das situações didáticas e, na aplicação do curso de formação que foi o meio principal para coletar os dados inerentes à percepção dos docentes em formação inicial.

Segundo Artigue (1995), a ED é uma metodologia de pesquisa que propicia ao professor formular um plano de ensino que objetiva a formação, realização, observação e a análise das situações didáticas disponibilizadas para o planejamento da ação docente. Artigue (1995) define como ED:

[...] uma sequência de aula(s) concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo, de forma coerente, por um professor-engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para uma certa população de alunos. No decurso das trocas entre professor e alunos, o projeto evolui sob as reações dos alunos e em função das escolhas e decisões do professor (ARTIGUE, 1995, p. 61, tradução nossa).

Recorda-se que a metodologia da ED teve sua origem já na década de 60, com a publicação do trabalho de Brousseau (1965) sobre a Matemática do curso preparatório, sendo amplamente difundida no decorrer dos anos 80 por Chevallard (1982), discípulo de Brousseau, por Artigue (1989), além do próprio Brousseau. Surgiu como uma metodologia de pesquisa capaz de propiciar fenômenos didáticos que mais se aproximassem das condições de funcionamento de uma sala de aula. Almouloud e Coutinho (2008) explicam que o termo ED deu-se pela comparação do pesquisador didático com o trabalho de um engenheiro quanto ao

momento da realização de um projeto que necessita de concepção, elaboração e execução, além da utilização de um modelo teórico para a implementação de seus projetos.

De acordo com Artigue (1995), a metodologia da ED se caracteriza por um esquema experimental baseado nas realizações didáticas sobre as situações de ensino em sala de aula, na qual se observa a concepção, realização e as análises do processo de ensino e aprendizagem. Assim, segundo Pais (2015, p. 77), “a utilização de uma engenharia didática reforça a confiabilidade da pesquisa e sua potencialidade se deve à defesa do vínculo com a realidade da sala de aula”.

Pommer (2013) reforça que no contexto da sala de aula, as atividades que serão propostas aos alunos devem ser planejadas e organizadas, pensando em uma situação de aprendizagem, o que requer do professor a estimulação e o encorajamento do aluno para o desenvolvimento de ações e utilização de seus conhecimentos prévios para determinar a solução do problema.

Deste modo, segundo Brousseau (1996), cabe ao professor alinhar seu trabalho de maneira que, ao estudante, sejam propostas situações de aprendizagens em que seus conhecimentos sejam elaborados como uma resposta pessoal a uma pergunta, modificando-os ou fazendo-os funcionar como solução às exigências do meio, e não ao desejo do docente.

Ademais, de acordo com Alves (2016a), a metodologia de pesquisa concebida pela ED organiza-se em dois níveis: a microengenharia, cujo interesse é investigar os fenômenos relacionado à sala de aula, e a macroengenharia, que investiga as dificuldades de ordem metodológica e/ou institucionais concernentes ao processo de ensino e aprendizagem.

Assim, segundo Artigue (1995), uma pesquisa seguindo os princípios de uma ED, compõe-se de quatro fases: a 1ª fase, das análises preliminares, a 2ª fase, da concepção e da análise *a priori*, a 3ª fase, da experimentação e a 4ª fase, da análise *a posteriori* e validação. Ressalta-se que a experimentação desta pesquisa consubstanciou-se na TSD com o intuito de instigar o aluno ao fazer uso de sua intuição, na busca do raciocínio necessário para construção de conceitos e relações matemáticas.

Além disso, Artigue (1995) descreve como objetivo da análise *a priori*, determinar de que maneira as escolhas das variáveis didáticas feitas podem prever o comportamento dos alunos na aprendizagem. Na análise *a posteriori*, é feita a comparação entre os objetivos definidos pela aplicação da metodologia e o desempenho dos alunos durante o desenvolvimento da situação de ensino, objetivando a validação das hipóteses didáticas estabelecidas *a priori*.

Pais (2015) nos remete à vertente francesa da metodologia da ED de Artigue (1996) que possibilita uma melhor organização metodológica para pôr em prática uma pesquisa voltada para o ensino de matemática, com o intuito de aliar teoria e prática, acentuando a valorização da articulação entre a pesquisa e a ação pedagógica, na investigação dos fenômenos didáticos. Portanto, como relata Pommer (2013), ao elaborar-se uma ED, faz-se necessário, em determinados momentos, articular, antecipar e até mesmo acumular elementos que caracterizam essas quatro fases. A seguir, descrever-se-á abaixo o trabalho pautado nas fases da ED.

2.1.1 Análises Preliminares

Na primeira fase, como descreve Machado (1999), nas análises preliminares são feitas um apanhado do quadro teórico didático geral e dos conhecimentos específicos envolvendo o assunto da pesquisa.

Na análise preliminar é feito um levantamento bibliográfico sobre os vários níveis de produção de conceitos matemáticos que se pretende pesquisar, assim como uma “análise epistemológica do ensino atual e seus efeitos, das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos, e análise do campo das restrições e exigências no qual vai se situar a efetiva realização didática” (ALMOULOU; SILVA, 2012, p. 26).

Todos os passos descritos no trecho anterior remetem aos objetivos específicos da pesquisa, o que determinará quantos e quais deles ocorreram durante o desenvolvimento do projeto. Segundo Machado (1999), é nesta fase da pesquisa que ocorrem os embasamentos das ideias da engenharia presentes e constantemente retomadas, durante toda a aplicação do projeto. No entanto, não se pode esquivar de um ponto primordial desta fase, que consiste na criação “das concepções dos estudantes, das dificuldades e dos erros mais frequentes. Assim, a ED se desenha para provocar, de maneira controlada, a evolução das concepções” (ARTIGUE, 1995, p. 42).

2.1.2 Concepção e Análise a Priori das Situações Didáticas

Durante o processo de concepções que ocorre nesta etapa, o professor determina as variáveis que vão atuar no ensino, denominada por Artigue (1995) de variáveis de comando, e que são diferenciadas de duas maneiras, com o intuito de facilitar a análise da ED. “As variáveis macro-didáticas ou globais, concernentes à organização global da engenharia e as

variáveis micro-didáticas ou locais, concernentes a organização local da engenharia, quer dizer, organização de uma sequência ou de uma fase” (ARTIGUE, 1995, p. 42). Isto nos remete a Pommer (2013, p. 23) que define variáveis didáticas como sendo “aquelas para as quais as escolhas de valores provocam modificações nas estratégias de resolução de problemas, de modo a fazer evoluir o desempenho dos alunos”.

Vale salientar que, de acordo com Machado (1999), as variáveis de comando (microdidáticas e macrodidáticas) embora se apresentem separadas, elas não são independentes, como corrobora Brousseau (1981), é necessário um cuidado constante na concepção geral para que ela permita o desenvolvimento das situações locais, ou seja, as variáveis macrodidáticas precedem as variáveis microdidáticas com a qual o professor pode organizar cada sessão didática. Assim Artigue (1995) relata que:

Estas análises *a priori* se deve conceber como uma análise de controle de significado. Isto quer dizer, de formar muito esquemática, que se a teoria construtivista sente o princípio da participação do estudante na construção de seus conhecimentos para através da interação com o meio determinado, a teoria das situações didáticas que serve de referência para a metodologia da engenharia tem pretendido, desde sua origem, constituir-se em uma teoria de controle das relações entre o significado e as situações (ARTIGUE, 1995, p. 44-45, grifo do autor, tradução nossa).

Assim como qualquer teoria que se pretende aplicar para uma investigação didática, não se pode furtar de descrever o objetivo central da análise *a priori* que consiste, segundo Artigue (1995), em se apropriar de um conjunto de hipóteses que foram determinadas a partir de seleções feitas, que possibilite certo domínio sobre os comportamentos dos alunos e de seu significado. A partir deste ponto, procede-se à validação das hipóteses levantadas pelos discentes que se apresentam de forma indireta no jogo da confrontação que ocorre na quarta fase, entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*.

Assim, fazem-se necessárias algumas ações para que os objetivos da pesquisa sejam atingidos. É o que Machado (1999) descreve ao relatar que a análise *a priori* necessita de duas partes para aplicar-se com os alunos: uma de natureza descritiva e outra de previsão, as quais estão embasadas nas características de uma situação a-didática, visadas pela experimentação. Para nortear as definições das variáveis da pesquisa, deve-se:

- Descrever as escolhas feitas no nível local (relacionando-as eventualmente com as seleções globais) e as características da situação a-didática desenvolvida;
- Analisar o que poderia estar em jogo nesta situação para o aluno, em função das possibilidades de ação, seleção, decisão, controle e validação que o aluno terá durante a experimentação.

- Prever campos de comportamentos possíveis e tentar demonstrar como a análise permite controlar seus significados e assegurar, particularmente, que se tais comportamentos esperados ocorrerem, é por consequência do desenvolvimento visado pela aprendizagem. (ALMOULOU; SILVA, 2012, p. 27).

Nesta fase, o professor deve perceber que se podem transformar os conhecimentos científicos em assuntos que podem ser ensinados e concebidos para elaboração das situações-problema, com a qual os alunos irão se confrontar. De acordo com Machado (1999), tradicionalmente, nesta etapa, o aluno põe-se a analisar o problema sem a intervenção do professor que aparece somente no momento do aspecto descritivo.

Desse modo, Pais (2015) enfatiza que no momento em que o aluno está envolvido em uma situação de pesquisa para determinar a solução de um problema, ele se depara com uma variedade de procedimentos de raciocínio, no qual o professor não tem nenhum controle, o que gera uma riqueza de ideias oriundas do imaginário do estudante que, na verdade, nada mais é do que uma síntese da busca da solução do problema. Durante o procedimento da realização das tarefas escolares, o estudante deve encontrar condições que favoreçam a busca pela resolução sem a intervenção do professor, o que resultará em estímulos para que ele, por seu próprio mérito e esforço, possa superar os obstáculos e encontrar o raciocínio ideal para a condução necessária à aprendizagem em questão.

Vale ressaltar aqui as considerações de Brousseau (2008) ao descrever que para uma aprendizagem ser alcançada, o sujeito precisa interagir com o meio, adaptando-se e assimilando as situações que se apresentam para o real desenvolvimento das situações problemas, na qual se podem utilizar as fases da TSD (ação, formulação e validação) para corroborar as resoluções apontadas pelos alunos.

2.1.3 Experimentação

A experimentação é conhecida como a fase clássica da ED. Trata-se de uma complementação da análise *a priori*. De acordo com Machado (1999), esta etapa se dá no momento do contato pesquisador/professor com os alunos selecionados para aplicação do projeto; portanto, “é o momento de se colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade” (ALMOULOU, 2007, p. 177). Assim a experimentação, segundo Machado (1999) supõe:

- a explicação dos objetivos e condições de realização da pesquisa à população de alunos que participará da experimentação;
- o estabelecimento do contrato didático;
- a aplicação dos instrumentos de pesquisa;
- o registro das observações feitas durante a experimentação (observação cuidadosa descrita em relatório, transcrição dos registros audiovisuais, etc.) (MACHADO, 1999, p. 206).

Segundo Almouloud e Silva (2012), a experimentação se constitui na aplicação de uma sequência didática que se caracteriza pela apresentação dos objetivos da pesquisa e em quais condições ela será realizada. Este também é o momento em que se efetiva o contrato didático e faz-se o registro do que foi observado, durante o período da experimentação. Durante a fase da experimentação, propõe-se utilizar as fases da TSD para consolidar a validação das situações-problema. Portanto, pretende-se incentivar o aluno a participar das atividades propostas pelo projeto, com o intuito de obter-se total colaboração dos discentes na resolução das situações-problema. Para isso, utilizar-se-á o contrato didático para nortear as regras do desenvolvimento da pesquisa.

2.1.4 Análise a Posteriori e Validação (Interna e Externa)

Segundo Artigue (1995), esta é a fase em que se analisa os dados colhidos durante a fase da experimentação, resultantes das observações feitas durante as aplicações das sessões didáticas, como também todas as produções dos alunos dentro e fora da sala. Esse momento deve ser registrado por meio de produções escritas pelos alunos, registro fotográficos, relato das observações e registros audiovisuais. Assim, a análise *a posteriori* é definida por Pommer (2013):

[...] esta fase se caracteriza pelo tratamento dos dados colhidos e a confrontação com a análise *a priori*, permitindo a interpretação dos resultados e em que condições as questões levantadas foram respondidas. Assim, é possível analisar se ocorrem e quais são as contribuições para a superação do problema, caracterizando a generalização local que permitirá a validação interna do objetivo da pesquisa (POMMER, 2013, p. 26).

Após a análise *a posteriori*, deve-se realizar a fase da validação que, segundo os autores, se dá através da comparação dos resultados coletados na realização didática que foi estabelecida, durante a análise *a priori*, com o intuito de validar ou refutar as hipóteses obtidas durante a investigação. No entanto, a ED compreende dois tipos de validação: interna e externa.

A validação externa se dá mediante a comparação das produções do aluno antes, durante e após a fase da experimentação de uma sequência, por meio de questionários ou entrevistas que poderão ser realizadas individualmente ou em grupo. Também pode ocorrer por meio da comparação das produções externas de outros alunos que não participaram da mesma sequência estruturada nesse contexto didático (LABORDE, 1997, p. 105).

De acordo com Araújo e Iglioni (2012), a validação interna é uma característica essencialmente da ED, na qual se procura determinar se um tratamento aplicado a um grupo de pesquisa pode influenciar o resultado de um estudo em Didática da Matemática. Assim Laborde (1997) esclarece que ela ocorre mediante uma descrição genérica dos estudantes ou de uma classe, em que são observadas suas condutas, evoluções e os tipos de produção majoritárias da turma, assim como a verificação das situações específicas que se adequem aos alunos e que possam contribuir de forma significativa para validar a pesquisa.

2.2 Engenharia Didática de Formação

Na visão de Perrin-Glorian (2009 *apud* ALMOULOU; SILVA, 2012), a ED estabelece uma relação entre a pesquisa e o ensino regular; portanto, essas primeiras engenharias didáticas tinham por objetivo principal propor o estudo e, conseqüentemente, a elaboração de uma transposição didática para o ensino, ao mesmo tempo que se estudava também o desenvolvimento de outros fenômenos didáticos mais gerais, o que permitiram o enriquecimento e a ampliação das teorias já conhecidas.

Uma EDF, também conhecida como ED de Segunda Geração, apresenta, de acordo com Perrin-Glorian (2009, *apud* ALMOULOU; SILVA, 2012, p. 28), “por primeiro objetivo o desenvolvimento de recursos (ou objeto de aprendizagem) para o ensino regular, ou a formação de professores”. O que pode constituir-se de vários níveis de construção, inclusive situações de sala de aula em que o professor/pesquisador é conduzido a descrever as ações tomadas para intermediar o ensino. Neste trecho, evidencia-se o papel do professor como mediador da aprendizagem para a qual é preciso planejar e antever os obstáculos que podem surgir no decorrer do desenvolvimento das situações, com o intuito de facilitar a condução do processo de construção do conhecimento por parte do aluno.

Corroborando com o escopo anterior, Alves (2018) relata que a EDF tem um grau de complementariedade com a ED de Primeira Geração, o que, segundo Almouloud (2011), procura aproveitar o que foi produzido na primeira geração, adequando-as às características e às necessidades do professor, em outras palavras. Durante a ED se estudam as hipóteses, as

dificuldades e o local dos problemas, enquanto que na EDF se apontam as possíveis soluções para resolvê-los, gerando assim uma estratégia que pode ser adaptada e utilizada por outros docentes, em novas situações didáticas, além de produzir novos conhecimentos que podem subsidiar novas produções que poderão servir de referências aos pesquisadores em educação matemática. Isto remete a Artigue (1995), ao descrever a função da ED, coadunando com as palavras do autor no trecho acima:

E efetivamente, a noção de engenharia didática traçou seu caminho no edifício da didática com esta dupla função. Ela chega a significar tanto as produções para o ensino, baseadas em resultados de investigações que se tem utilizado metodologias externas a da classe, como uma metodologia de investigação específica (ARTIGUE, 1995, p. 36, tradução nossa).

Machado (2015) descreve que na EDF a validação é do tipo externa, pois os métodos por ela utilizados para legitimar os resultados da pesquisa são do tipo comparativo-estatístico entre os grupos controle e experimentais. Porém, nessa pesquisa foi utilizada a validação interna, característica da ED, considerando que esta abordou uma quantidade pequena de alunos participantes (11 alunos) e que suas produções não serão comparadas a produções externas à referida pesquisa. Convém lembrar que todos os membros participantes desta investigação encontram-se matriculados em um curso de Licenciatura em Matemática, dos quais 01(um) já atua como docente.

Então, de acordo com Almouloud e Silva (2012), evidencia-se que a EDF se liga às investigações dos saberes matemáticos que podem auxiliar os professores no ensino de matemática, criando, desse modo, o elo com a formação. Assim, Almouloud e Silva (2012) descrevem três condições para a realização de uma pesquisa da EDF:

1. Deixar uma certa liberdade de ação ao professor: esta condição já é válida no primeiro nível, mas agora trata-se de definir a sequência de situações com o professor e analisar como o professor adapta o documento que lhe é fornecido.
2. Utilizando os documentos produzidos, os professores devem procurar não reproduzir a história, mas as condições da aprendizagem, a questão essencial para a engenharia didática, sendo como identificar os elementos essenciais para a realização efetiva da atividade.
3. É necessário apoiar-se em uma engenharia de primeira geração que possibilite a construção de uma situação fundamental e sua análise (ALMOULOUD; SILVA, 2012, p. 32).

Além disso, os autores ressaltam a importância do tamanho das engenharias para o desenvolvimento e produção de recursos que podem ser utilizados em uma pesquisa aplicada em uma situação. Portanto, já que se fez alusão às condições para desenvolver-se uma pesquisa em ED, convém salientar também qual característica é relevante em uma

investigação pautada nesta metodologia de pesquisa. Assim, Alves e Catarino (2017, p. 133) descrevem de que modo tal característica se processa:

[...] o design de investigação característico de uma ED possibilita uma prática de intervenção controlada, assumindo a relevância do entendimento pormenorizado dos fenômenos ensino-aprendizagem. Ademais, a despeito de que a primeira geração das engenharias desenvolvidas na França desenvolveram maior atenção concernente à modelização das ações dos estudantes, no caso das engenharias da segunda geração, observou-se um esforço dos especialistas com o interesse de modelizar e compreender, prever e antever a função do professor em todo o processo e sistema educativo (ALVES; CATARINO, 2017, p. 133).

Portanto, evidenciou-se que uma pesquisa balizada nos elementos de uma EDF pode constituir-se uma interligação do plano teórico ao experimental da prática educativa, possibilitando sistematizar a metodologia aplicada na pesquisa, corroborando a escolha na condução desta pesquisa. De acordo com Macedo (2018), ao desenvolver uma pesquisa voltada para o ensino-aprendizagem em que se envolve aluno e formação inicial ou continuada de professor, a ED proporciona um excelente suporte como princípio metodológico, pois consegue estabelecer uma articulação com a construção do saber e a prática investigativa reflexiva, por meio da experimentação de uma sequência didática.

A seguir, serão discutidos os fundamentos da TSD como complementariedade da ED e da EDF, com o intuito de compreender como tais aspectos podem ser inseridos e colaborar no processo de ensino da Matemática.

2.3 Teoria das Situações Didáticas

A perspectiva em utilizar-se a situação didática é propor um modelo que pode auxiliar o professor no processo ensino-aprendizagem em matemática que, segundo Machado (1999), representa uma referência no processo de aprendizagem de conceitos matemáticos dentro da sala de aula, buscando realizar uma educação matemática mais significativa para o discente, por meio da interação professor, aluno e conhecimento. Tais pressupostos servirão como suporte para nortear a pesquisa, haja vista que a estrutura das situações-problema foi aplicada na investigação nas etapas da TSD, com o intuito de investigar o comportamento do aluno na construção da resolução.

A TSD é um modelo teórico de origem Francesa, desenvolvida por Brousseau (1986), e caracteriza-se por uma série de situações didáticas que podem ser aplicadas em sala de aula para modificar vários dos comportamentos dos alunos. De acordo com Almouloud (2007, p.

31-32) “O objeto central de estudo nessa teoria não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática na qual são identificadas as interações estabelecidas entre professor, aluno e saber” (ALMOULOUD, 2007, p. 31-32). Assim, Brousseau (1986, *apud* FREITAS, 2015) define:

Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a possibilidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição (...) o trabalho do aluno deveria, pelo menos em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos pertinentes. (BROUSSEAU, 1986, p.8 *apud* FREITAS, 2015, p. 80).

Além disso, na teoria de Brousseau (2008), ele explica que o aluno pode adquirir conhecimento, adaptando-se a um meio, através de suas interações e experiências, mesmo que este meio não seja planejado para fins didáticos, manifestando novas repostas e gerando então uma aprendizagem. O autor denominou este meio de *milieu*, o qual deve ser planejado pelo professor, objetivando que o conhecimento ocorra embasado pela influência dos desequilíbrios, acomodações e assimilações que o *milieu* pode exercer num sujeito. Assim, de acordo com Silva, Ferreira e Tozetti (2015):

O *milieu*, em uma situação didática, deve ser planejado a partir de uma situação a-didática. Na situação a-didática, o aluno sabe que o problema foi escolhido para fazer com que ele adquira um conhecimento novo. Esse conhecimento é justificado pela lógica da situação e prescinde das razões didáticas para construí-lo. Como o aluno não pode resolvê-lo “de pronto”, o professor apresenta situações a-didática que ele seja capaz de solucionar com a bagagem de conhecimento que possui (SILVA; FERREIRA; TOZETTI, 2015, p. 19 953, grifos do autor).

A TSD foi desenvolvida por meio de três dialéticas fundamentadas no *milieu*, ao qual se relaciona o saber com o comportamento em jogo. Assim, Almouloud (2007, p. 37) as destaca em: “trocas diretas por uma ação ou uma tomada de decisões, trocas de informações numa linguagem codificada, trocas dos argumentos”. Com isso, percebe-se a TSD procurar os aspetos que podem exercer influências sobre o ensino e a aprendizagem matemática, possibilitando oferecer subsídios ao docente, com o intuito de elaborar e realizar situações didáticas, haja vista tratar-se de um contexto em que ocorre o envolvimento do professor, aluno e do sistema educacional.

Brousseau (2008) ressalta que uma situação pode fazer com que o aluno progrida e, conseqüentemente, tal situação também evolua, de maneira que a origem de um conhecimento pode ser resultado de uma sucessão espontânea, ou não, de perguntas e respostas novas, na

qual o autor nomeou de dialética. Assim, as sucessões das etapas da ação, formulação e validação podem funcionar como combustível para acelerar as aprendizagens dos discentes.

Outro ponto importante que convém ressaltar na TSD diz respeito as mais diversas variáveis que podem influenciar o percurso, na busca da construção do saber, sobre o qual o professor não tem controle algum que, de acordo com Brousseau (2008), denomina-se situação a-didática, cuja característica é o fato de apresentar determinados momentos em que o aluno consegue produzir conhecimento sem a interferência do professor; no entanto, o docente deve apontar o aluno na direção pretendida para alcançar o conhecimento. Deste modo Freitas (1999) ressalta que:

Desta forma o professor e o aluno estão implicados num conjunto de relações, que+ envolvem uma diversidade de conceitos, em busca da síntese de um determinado conhecimento. Assim, entre as diversas situações a-didáticas existentes, uma se caracteriza como sendo do conhecimento. Toda a atividade pedagógica deve ser planejada pelo professor no sentido de direcionar o aluno para o principal que é a situação a-didática. (FREITAS, 1999, p. 70, grifo do autor)

Segundo Almouloud (2007, p. 36), “Brousseau modela as situações a-didáticas em termos de jogo”, ou seja, caracteriza-se por uma situação que pode provocar uma aprendizagem no aluno de maneira que ele possa se utilizar das estratégias de que dispõe para iniciar o jogo. Assim, Brousseau (2008) ressalta que na situação a-didática:

O aluno sabe que o problema foi escolhido para fazer com que ele adquira um conhecimento novo, mas precisa saber, também, que esse conhecimento é inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que pode prescindir das razões didáticas para construí-lo. Não só pode como deve, pois não terá adquirido, de fato, esse saber até que o consiga usar fora do contexto de ensino e sem nenhuma indicação intencional. [...] Essa situação – ou problema – escolhida pelo professor o envolve em um jogo com o sistema de interações do aluno e seu meio. Esse jogo mais amplo é a *situação didática* (BROUSSEAU, 2008, p. 35-36, grifo do autor).

As situações a-didáticas representam, portanto, o momento mais importante da aprendizagem, uma vez que, para que o aluno consiga ultrapassar os obstáculos do meio para conseguir gerar conhecimento por seu próprio mérito, deverá receber o estímulo do professor para esforçar-se e superar seus limites, adquirindo, portanto, novas competências necessárias para a resolução de problemas.

Já uma situação didática, segundo Almouloud (2007), caracteriza-se pelo *milieu*, o qual é organizado através das escolhas de variáveis didáticas, gerando diferentes valores que podem provocar mudanças de estratégias, tornando-a um ponto primordial de modelos de aprendizagem, acarretando mudanças qualitativas nas estratégias de resolução de problemas.

Assim, de acordo com Brousseau (2008), uma situação didática surge por meio de situações fundamentais, advindas de um jogo de variantes, de variáveis e de suas cotas.

Como o aluno não pode resolver, de pronto, qualquer situação a-didática, o professor apresenta as que ele é capaz de solucionar. As situações a-didáticas com fins didáticos determinam o conhecimento transmitido em um determinado momento e o sentido particular que ele assumirá, em razão das restrições e deformações adicionadas à situação fundamental.

Essa situação – ou problema – escolhida pelo professor o envolve em um jogo com o sistema de interações do aluno e seu meio. Esse jogo mais amplo é a situação didática (BROUSSEAU, 2008, p. 35-36, grifo do autor).

A situação didática, segundo Almouloud (2007), caracteriza-se pela relação do aluno com os problemas propostos pelo docente em situação de jogo, em que a maneira de propô-las é chamada de devolução, cujo objetivo é provocar uma situação em que o estudante consiga desenvolver-se de maneira autônoma. Embora de imediato seja difícil ao discente diferenciar uma situação didática de uma situação a-didática.

Em seguida, abordar-se-á a classificação da TSD que se divide em quatro etapas distintas, possuindo funções diferentes que procuram organizar a interação do aluno com o saber. São elas: situação de ação, situação de formulação, situação de validação e situação de institucionalização.

2.3.1 Situação de Ação

Nesta fase, o aluno se confronta com o problema, toma decisões e desenvolve estratégias para resolvê-lo. De acordo com Pais (2015), é nesse momento que são feitos os procedimentos iniciais para a resolução de uma situação que pode gerar um conhecimento mais imediato que se origina de maneira mais experimental e intuitiva do que teórica.

Brousseau (2008) ressalta que, neste momento, o discente se utiliza de estratégias que vão sendo descartadas, intuitiva ou racionalmente, à medida que não produzem os resultados desejados, adotando-se uma nova, com a qual poderá ou não obter a resposta do problema. Estas sucessões de situações de ação comporão o processo que o aluno percorrerá para aprender um método de resolução de uma situação problema.

Em situação de ação, o aluno estabelece regras que o ajudam a tomar decisões, sem ter consciência delas, e depois formulá-las, que Brousseau (2008) denominou de modelo implícito. Assim o autor denomina que o sujeito só atua mediante a escolha do meio que se apresenta contrário as suas motivações. A regularidade do meio pode proporcionar que o

sujeito relacione determinadas informações às suas decisões, num *feedback* que ajuda a antever as respostas nas tomadas de futuras decisões.

Desse modo, para que a aprendizagem aconteça, evidencia-se a necessidade de lançar mão de estratégias que sejam capazes de fornecer mecanismos ao aluno que lhe proporcionem interagir com o meio, para que, diante de um problema, possa encontrar uma solução desejável. Almouloud (2007) ressalta que esta fase é essencial para que o aluno, por meio de suas ações, possa expressar suas escolhas e decisões sobre o *milieu*, porque assim as relações estarão centradas na tomada de decisões. Mesmo que ocorra troca de informações, quando se trabalha em grupo, os conhecimentos partilhados por seus membros fazem parte do *milieu* de cada um, o que proporcionará retroações que independem das ações, pois os alunos dispõem das mesmas informações e, portanto, suas decisões são direcionadas pelas retroações do *milieu*.

2.3.2 Situação de Formulação

Nesta fase se apresenta uma estratégia da solução do problema que foi elaborada a partir de conhecimentos, prévios ou novos, adquiridos pelo aluno em suas vivências escolares ou sociais. Almouloud (2007, p. 38) retrata que este é o momento em que “o aluno ou grupo de alunos explicita, por escrito ou oralmente, as ferramentas que utilizou e a solução encontrada”. Assim:

O objetivo da dialética da formulação é a troca de informações. Por exemplo, se o aluno deve agir e não dispõe de toda a informação e seu parceiro de jogo dispõe as informações que lhe faltam, pode haver, nessas trocas, julgamentos, debates de validade, sem que isto constitua necessariamente uma situação de formulação (ALMOULOU, 2007, p. 38).

Portanto, é o momento em que se faz presente o colega ou o professor. Em virtude disto, Pais (2015) evidencia que o aluno passa a utilizar um esquema mais elaborado, de natureza teórico, na resolução da situação proposta, além de utilizar uma linguagem mais apropriada na justificativa teórica.

De acordo com Brousseau (2008), neste momento, o aluno deve ser capaz de se comunicar com os colegas para ter condições de apresentar sua proposta de estratégia, uma vez que esta constitui a maneira mais propícia para atuar neste tipo de situação. Tal comunicação pode ocorrer de duas maneiras distintas: A primeira de forma imediata, em que

os colegas poderão concordar ou discordar da proposta, e a segunda, mediante ao meio, em que ao aplicar a tática pré-estabelecida possa resultar numa ação vencedora ou não.

2.3.3 Situação de Validação

Na situação de validação, o aluno já deve ser capaz de utilizar-se de mecanismos que possam comprovar sua solução e que o saber por ele adquirido é usado para esta finalidade. Neste momento, o professor deve estimular os alunos a realizarem atividades com o intuito de encontrar uma fórmula que possibilite a indução de argumentos racionais para corroborar o conhecimento formulado e adquirido que pode se dá através de explicação, prova, demonstrações e outros. Nesta fase, é necessário provar o que foi inferido na fase anterior, assim o professor poderá estimular atividades comprobatórias que possam demonstrar os dados coletados na etapa anterior. Almouloud (2007, p. 40) descreve “o objetivo é a validação das asserções que foram formuladas nos momentos de ação e de formulação, podendo se referir a diferentes níveis de validade: sintática, semântica ou mesmo pragmática (relativa à eficácia do texto)”.

Tais situações se relacionam às argumentações racionais concernentes a tornar verdadeiro um conhecimento. Brousseau (2008) descreve assim uma situação de validação:

Nesse novo tipo de situação, os alunos organizam enunciados em demonstrações, constroem teorias – na qualidade de conjuntos de enunciados de referência – e tanto aprendem a convencer os demais alunos como a se deixarem convencer sem ceder a argumentos retóricos, à autoridade, à sedução, à soberba, a intimidações etc. As razões que um aluno possa fornecer para convencer o outro, ou as que possam aceitar para mudar de opinião, serão progressivamente elucidadas, construídas, testadas, debatidas e acordadas. O aluno não só deve comunicar uma informação, como também precisa afirmar que o que diz é verdadeiro dentro de um sistema determinado. Deve sustentar sua opinião ou apresentar uma demonstração (BROUSSEAU, 2008, p. 27).

Dessa forma, como ressalta Oliveira (2018, p. 33), “a situação de validação consiste em convencer o interlocutor de que os argumentos utilizados na resolução do problema, são válidos, isto é, as conjecturas são julgadas”. Durante este período, espera-se que o aluno consiga formular sequências oriundas dos argumentos coletados na fase anterior para chegar à estruturação de uma solução desejável.

2.3.4 Situação de Institucionalização

Nesta fase, o docente pode exercer a mediação para formalizar as ações e procedimentos encontrados pelos discentes nas fases anteriores e, assim, valorizar suas soluções, confrontando-as com a estrutura formal. De acordo com Brousseau (2008), nesta etapa o professor analisa as produções dos alunos, descreve os fatos observados e o modo como estão vinculados ao conhecimento em questão, objetivando universalizar o conhecimento adquirido pelo aluno.

Almouloud (2007, p. 40) define uma situação de institucionalização como “aquelas em que o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber. Uma vez construído e validado, o novo conhecimento vai fazer parte do patrimônio matemático da classe [...]”. Portanto, é o momento em que, sob a mediação do professor, se busca transpor o conhecimento do plano individual para o saber científico.

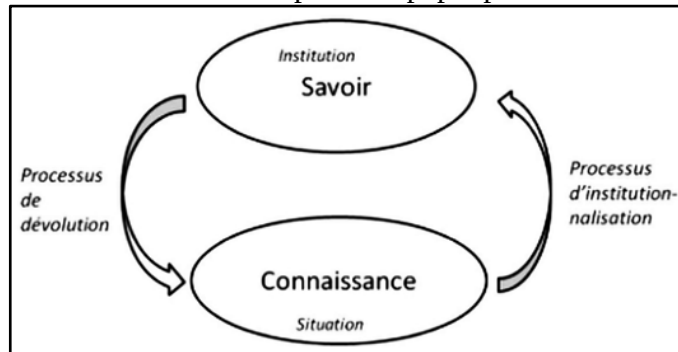
A necessidade de tais situações é justificada pelo fato de ser preciso a fixação cognitiva de um determinado conhecimento, além de demonstrar sua funcionalidade nas situações posteriores. Assim, Machado (1999), esclarece que:

[...] cabe ao professor organizar essa síntese do conhecimento procurando elevá-lo a um status de saber que não dependa mais dos aspectos subjetivos e particulares. Se faz necessário igualmente estabelecer as devidas correlações com outros saberes, essas sínteses são necessárias para que possam ser reinvestidas em outras situações. Ao visar a institucionalização de determinados saberes que considera importantes, o professor seleciona questões essenciais para a aprovação de um saber formal a ser incorporado como patrimônio cultural (MACHADO, 1999, p. 83, grifo do autor).

Enfim, neste momento, a situação assume um caráter somente didático, uma vez que ao professor é atribuído o papel organizacional do processo do conhecimento, procurando promovê-lo a um saber independente dos aspectos subjetivos e particulares. Como ressalta Almouloud (2007), depois que o professor realiza a institucionalização da situação, o saber assume caráter oficial e os alunos passam a incorporá-lo nos esquemas mentais, disponibilizando para serem utilizados na resolução de problemas matemáticos. A Figura 1 mostra a relação entre a intenção de ensinar e o processo de transmissão do conhecimento.

Assim, a representação do esquema (Figura 1) tem a intenção de mostrar a atividade de solução de problemas pelos alunos e a atividade de elaboração e construção de situações-problemas. Ademais, de acordo com Pais (2015), a institucionalização só passa a fazer sentido quando o discente consegue compreender o conteúdo, por meio de seu significado, e vislumbra a possível integração de seu conhecimento com uma teoria mais ampla, pois ao realizar uma atividade, o professor coleta aspectos formais do conteúdo, valorizando-os culturalmente como um saber mais alcançável ao aluno.

Figura 1 - Margolinas (2015) descreve a dialética entre *savoir/connaissance* e seu importante papel para a Didática da Matemática



Fonte: Margolinas (2015).

Portanto, a TSD assume o caráter de fundamentar a concepção e proposição das situações-problema que comporão a realização didática. Também servirá para validar as estratégias de resolução apresentadas pelos alunos, de acordo com as quatro fases da TSD: ação, formulação, validação e institucionalização.

3 NOÇÕES DE VOLUME

Neste capítulo, traz-se uma discussão sobre os aspectos epistemológicos e conceituais de volume. Apresenta-se também um pouco da história do conceito de volume, embasadas em informações do livro *História da Matemática* de Carl Boyer (BOYER, 1974).

3.1 Uma síntese histórica do conceito de Volume

Os conceitos de grandezas e medidas já se fazem presentes desde as civilizações antigas. Os egípcios já calculavam o volume de depósitos de grãos para efeito de comércio, revelando que o cálculo de área e volumes é um assunto milenar, constituindo-se nas primeiras noções geométricas de interesse do homem.

Descobertas históricas contidas no *Papiro* de Moscou (aproximadamente 1890 a.C.) revelam que os egípcios já usavam fórmulas para calcular o volume do tronco de uma pirâmide de base quadrada.

A matemática grega ganhou destaque em parte pelos trabalhos de Arquimedes (287-212 a.C.) que, embasados pelos estudos de Eudoxo e seus seguidores, utilizava fórmula para calcular o volume da esfera. A *História da Matemática* revela que ninguém havia determinado o cálculo do volume da esfera com tamanho rigor, antes de Arquimedes.

Os problemas identificados nos papiros apresentavam uma diversidade de medidas, utilizando o corpo humano como padrão para medir comprimento, área e volume. Uma outra característica, presente nestes achados antigos, revelam que os egípcios supervalorizavam os números, no que diz respeito a comparações de volumes, embasados por fórmulas implícitas para confirmar os resultados.

Foi na escola pitagórica que se deu o auge dessa supervalorização. No entanto, como já mencionado, foi a partir de Arquimedes que as discussões relacionadas a demonstrações de fórmulas seriam aprofundadas, revelando a demonstração da fórmula do volume da pirâmide, realizada por Demócrito, apresentando, para tal, cálculos conceituais considerados muito avançados para a época, provocando assim uma discussão sobre as contribuições de Arquimedes aos conhecimentos egípcios, como se evidencia nas palavras de Boyer (1974):

Os egípcios, por exemplo, sabiam que o volume da pirâmide é um terço da base vezes a altura, mas uma prova disto quase certamente estava acima de suas possibilidades, pois exige um ponto de vista equivalente ao do cálculo de integral. Arquimedes mais tarde escreveu que esse resultado era devido a Demócrito, mas que esse não o provou rigorosamente. Isso cria um enigma, pois, se Demócrito

acrescentou alguma coisa ao conhecimento egípcio aqui, só pode ter sido alguma espécie de prova, ainda que inadequada. Talvez Demócrito tenha mostrado que um prisma triangular pode ser dividido em três pirâmides triangulares que são, duas a duas, de mesma altura e de áreas da base iguais e depois deduziu, assumindo que pirâmides de mesma altura e bases iguais são iguais, o teorema egípcio familiar. Essa preposição só pode ser justificada por aplicação de técnicas infinitesimais (BOYER, 1974, p. 59).

Pelo exposto, percebe-se certas dificuldades na elaboração de fórmulas algébricas que possibilitassem sua utilização em práticas cotidianas. Assim, as resoluções de problemas apresentadas pelos egípcios não tinham demonstrações conhecidas; tratavam-se de regras que simplesmente funcionavam.

Já em meados de nosso tempo, no século XVII, Boaventura Francesco Cavalieri (1598-1647), religioso italiano e discípulo de Galileu², apresenta grandes avanços no cálculo de volumes, cujos resultados são utilizados até hoje, principalmente no ensino de geometria das escolas públicas brasileiras. Desse modo, mais adiante, abordar-se-á um pouco mais sobre as descobertas desse matemático.

O século XVIII é marcado pelos notáveis avanços que o estudo de volume alcançou, motivados pelas pesquisas promovidas por Newton e Leibniz para o desenvolvimento do Cálculo Infinitesimal.

Portanto, a história do conceito de volume apresenta três importantes trabalhos que se constituíram em divisores de água para a evolução deste conceito, a saber: a apresentação clássica de Arquimedes, o Princípio de Cavalieri e o Cálculo Infinitesimal (BARROS, 2002).

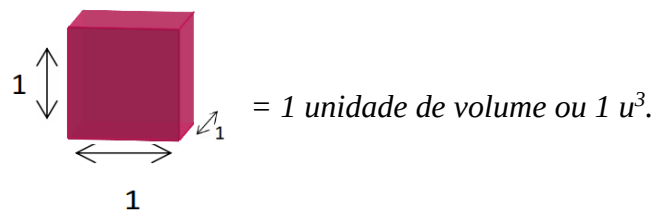
3.2 Noção Intuitiva de Volume

A ideia intuitiva do volume de um sólido, é a quantidade de espaço por ele ocupada. Essa grandeza “volume” pode ser medida e deve ser comparada com uma unidade, resultando em um número que é a medida do volume (LIMA, 1991).

Para determinar o volume de um sólido por meio de um número, toma-se uma unidade padrão, geralmente um cubo cuja aresta mede uma unidade de comprimento, o qual será denominado de cubo unitário. Por definição, seu volume será igual a 1 (Figura 2).

² Galileu Galilei (1564-1642) foi físico, matemático e astrônomo de origem italiana. Fez descobertas, estudos e ideias que são atualmente importantíssimas para a ciência.

Figura 2 - Cubo unitário



Fonte: Elaboração da autora.

Desse modo, é possível verificar que o volume de um sólido é um número que exprime quantas vezes nesse sólido pode conter um cubo unitário. Como é possível que um sólido tenha uma forma bastante irregular, essa exatidão da quantidade de vezes que o cubo caberá num determinado sólido não pode ser expressa com exatidão. Aparecendo novamente a ideia intuitiva, a qual deve ser usada como guia e em que se pode atribuir um significado preciso.

3.3 Princípio de Cavalieri

Professor da Universidade de Bolonha, Cavalieri (Figura 3) publicou em 1635 sua obra intitulada Teoria do Indivisível, contendo o que hoje se conhece como “Princípio de Cavalieri”. No entanto, embora essa teoria permitisse encontrar com exatidão, e de maneira bem rápida, a área e o volume de várias figuras geométricas, recebeu duras críticas, por não apresentar o rigor teórico que a matemática exigia na época. Em 1647, publicou a obra *Exercitationes geometricae sex*, na qual Cavalieri apresentou de modo claro sua teoria. O referido livro transformou-se em uma importante fonte para os matemáticos do século XVII. Cavalieri também escreveu sobre Astronomia e Óptica (DANTE, 2016).

Figura 3 - Boaventura Francesco Cavalieri
(1598-1647)

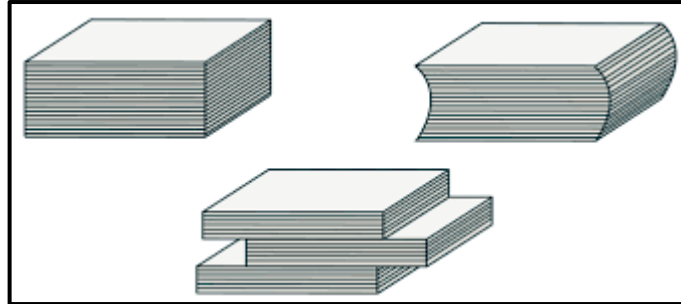


Fonte: ChronoMath (2020).

Antes de aprofundar o Princípio de Cavalieri, apresenta-se um exemplo de maneira a proporcionar uma melhor compreensão deste princípio ao colocar-se em uma superfície plana,

três pilhas de papel com o mesmo número de folhas, porém empilhadas de formas diferentes, como indicado na Figura 4.

Figura 4 – Pilha de papel

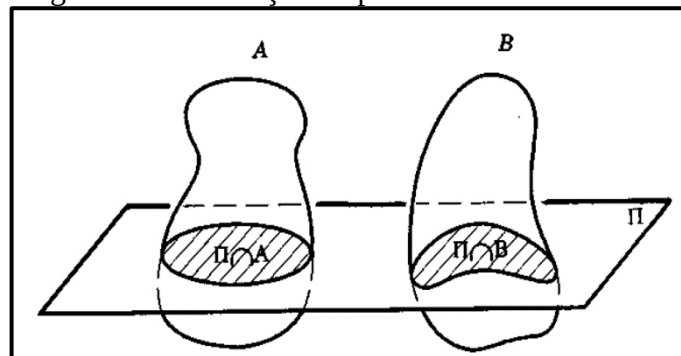


Fonte: Dante (2016, p. 184).

Observa-se que as pilhas estão arrumadas verticalmente, formando um paralelepípedo retângulo, podendo-se calcular facilmente seu volume. Mesmo modificando seu formato, nota-se que os espaços ocupados pelas resmas de papel são iguais; portanto, qualquer plano horizontal que seccione as três pilhas terá intersecção de mesma área e também mesmo volume.

De modo semelhante, tem-se a mesma ideia aplicada na ilustração da Figura 5. Se, dado um plano horizontal π que ao seccionar os sólidos A e B , suas secções $\pi \cap A$ e $\pi \cap B$ tiverem áreas iguais, então os sólidos A e B também terão volumes iguais.

Figura 5 – Intersecção do plano π com os sólidos A e B



Fonte: Lima (2011, p. 70).

Sendo assim, os exemplos mostrados de modo intuitivo são formalizados pelo Princípio de Cavalieri, como segue:

Princípio de Cavalieri: *Sejam A e B dois sólidos e um plano π . Se qualquer plano horizontal π' paralelo ao plano π secciona A e B , segundo figuras planas de mesma área, então, esses sólidos têm volumes iguais (LIMA, 1991).*

O Princípio de Cavalieri reduz o cálculo de volumes ao cálculo de áreas. Os trechos seguintes mostrarão o conceito básico de área para, logo em seguida, apresentar como ele pode ser aplicado para o cálculo de volume.

3.4 Conceito Básico de Área

Muniz Neto (2013) apresenta um conceito intuitivo de área de uma região no plano como um número positivo em que tal área seja associada e que sirva para quantificar o espaço por ela ocupado. Entretanto, para que um conceito qualquer de área para polígonos seja útil, postula-se que algumas propriedades intuitivas sejam válidas:

1. Polígonos congruentes têm área iguais.
2. Se um polígono convexo é decomposto em um número finito de outros polígonos convexos (isto é, se o polígono é a união de um número finito de outros polígonos convexos, os quais não têm pontos interiores comuns), então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores.
3. Se um polígono (maior) contém outro (menor) em seu interior, então a área do polígono maior é maior que a área do polígono menor.
4. A área de um quadrado de lado 1cm é igual a 1cm^2 .

Desse modo, assumindo o Princípio de Cavalieri, como já mencionado aqui, as fórmulas para o cálculo de volume dos sólidos prismas, cilindro, cone e esfera constituem-se em teoremas e, como tal, podem ser demonstrados por meio da utilização deste princípio como ferramenta. No escopo seguinte, são apresentadas estas demonstrações, embasadas em informações de Lima (1991).

3.5 Volume Paralelepípedo

De acordo com Lima (1991), a definição de paralelepípedo pode ser descrita do seguinte modo:

Definição 1. *Um paralelepípedo é um sólido limitado por 6 paralelogramos: suas faces. Estas faces agrupam-se em 3 pares; em cada par as 2 faces são paralelas, congruentes, e dizem-se opostas. Quando se toma uma das faces do paralelepípedo como base, a altura correspondente é a distância entre esta face e sua oposta, ou seja, é o comprimento da perpendicular baixada de um ponto da face sobre o plano da base.*

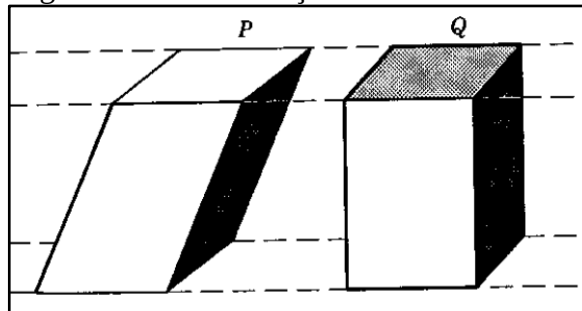
Para calcular o volume de um paralelepípedo qualquer, utiliza-se o seguinte teorema:

Teorema 1. *O volume de um paralelepípedo é o produto da área da base pela altura.*

Demonstração. Para a demonstração deste teorema (ver Figura 6), utiliza-se o Princípio de Cavalieri, tomando como base uma das faces do paralelepípedo P ; o plano que a contém será nomeado de plano horizontal, tomando um retângulo sobre este plano, cuja área a

seja igual à área do paralelogramo que serve de base ao paralelepípedo dado, com altura h igual à do paralelepípedo, construindo-se um bloco retangular B , tendo por base o retângulo recém-obtido. Como se sabe que o $\text{vol}(B) = a \cdot h$, conclui-se que $\text{vol}(P) = a \cdot h$.

Figura 6 – Demonstração do Teorema 1



Fonte: Lima (1991, p. 72).

O paralelepípedo P e o bloco retangular B têm a mesma altura h e suas bases têm a mesma área a . Ora, dado qualquer plano horizontal π , a seção plana $\pi \cap P$ é um paralelogramo congruente à base de P , enquanto $\pi \cap B$ é um retângulo congruente à base de B . (Têm-se aqui, e no Teorema 2, o fato de que se π e π' são planos paralelos e R é uma reta não paralela a eles, então a projeção $\sigma: \pi \rightarrow \pi'$, paralela a R é uma isometria. Assim, $\pi \cap P$ e $\pi \cap B$ têm a mesma área, independente de qual seja o plano horizontal π . Portanto, pelo Princípio de Cavalieri, conclui-se que,

$$\text{vol}(P) = \text{vol}(B) = a \cdot h.$$

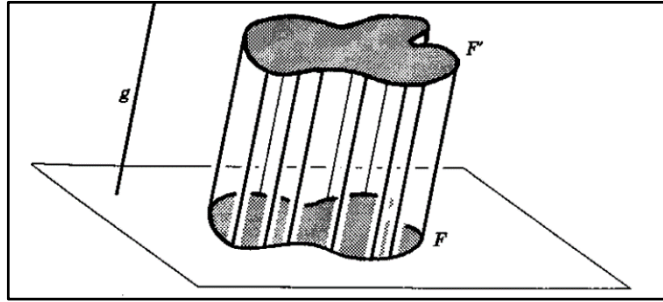
Então, isto comprova a demonstração.

3.6 Volume do Cilindro

O argumento apresentado no trecho anterior pode ser generalizado, com o intuito de fornecer a fórmula para o volume de um cilindro.

Definição 2. Dada uma figura plana F , chamada de base do cilindro, toma-se um plano F como horizontal. O cilindro fica determinado por sua base F e por um segmento de reta g , não paralelo ao plano horizontal, chamado geratriz do cilindro; da seguinte maneira, por cada ponto de F , levantando um segmento de reta paralelo a g , e de mesmo comprimento que g . A reunião desses segmentos é o cilindro C (Figura 7), de base F e geratriz g .

Figura 7 – Cilindro C



Fonte: Lima (1991, p. 73).

Percebe-se, na imagem da Figura 7, que as extremidades não pertencentes à base F dos segmentos que geram o cilindro C , formam uma figura plana F' , a qual está contida em um plano paralelo ao plano F . A distância entre estes planos, ou seja, o comprimento da perpendicular baixada de um ponto de F' sobre o plano de F , chama-se de *altura* do cilindro C . Assim, tem-se o teorema para o cálculo do volume de um cilindro.

Teorema 2. *O volume de um cilindro é igual ao produto da área da base pela altura.*

Demonstração. Para demonstração, foi construído no plano que contém F , um retângulo cuja área a seja igual à área de F , desse modo, tendo este retângulo como base, foi construído um bloco retangular B cuja altura h seja igual à altura do cilindro C . Para qualquer plano horizontal π , a seção $\pi \cap C$ é uma figura plana congruente a F , enquanto $\pi \cap B$ é um retângulo congruente à base de B . Então, se $\pi \cap C$ e $\pi \cap B$ têm a mesma área, independente de qual seja o plano horizontal π . Então, seguindo o Princípio de Cavalieri, conclui-se que:

$$vol(C) = vol(B) = a \cdot h.$$

Demonstra-se assim, o Teorema 2.

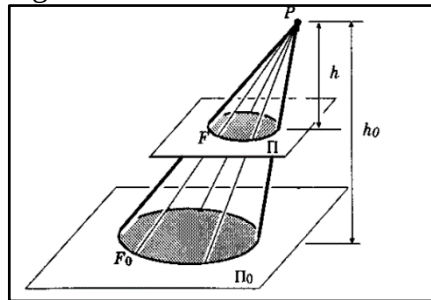
3.7 Volume do Cone

Definição 3. *Um cone k , tendo como base uma figura plana F , e como vértice um ponto P a todos os pontos de F , e como vértice um ponto P situado fora do plano de F , é a reunião dos segmentos de reta que ligam o ponto P a todos os pontos de F .*

O plano que contém a base F do cone K será considerado horizontal. A distância do vértice P , a este plano, ou seja, o comprimento da perpendicular baixada de P sobre o plano será chamada de altura do cone. Assim, se um cone K , com vértice P , altura h_0 e base F_0 situada no plano horizontal π_0 . Indicando-se com F a seção $\pi \cap K$ e com h a distância entre P e π , ou seja, é a altura do cone de base F e vértice P . Tem-se assim a razão entre as áreas de F e F_0 (Figura 8) que é igual ao quadrado da razão entre as alturas h e h_0 . Assim,

$$\frac{\text{área}(F_0)}{\text{área}(F)} = \left(\frac{h_0}{h}\right)^2.$$

Figura 8 – Razão das áreas de dois cones



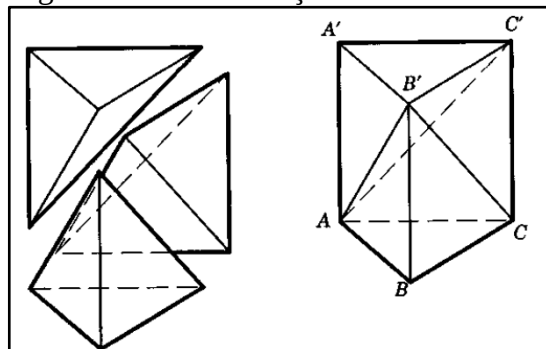
Fonte: Lima (1991, p. 75).

Assim, pelo Princípio de Cavalieri, se as áreas de F e F_0 são iguais, os volumes dos dois sólidos também são iguais. Então tem-se o seguinte Teorema para o volume do cone:

Teorema 3. *O volume de um cone é igual a um terço do produto da altura pela área da base.*

Demonstração. Para sua demonstração, compara-se o volume do cone ao de uma pirâmide, pois de acordo com Lima (1991), um cone com base poligonal é chamado de pirâmide, cuja base é um triângulo ABC (Figura 9), que tem área igual à da base do cone e cujo vértice B' é tal que o segmento $B'B$ perpendicular ao plano ABC , tendo comprimento igual à $ABCB'$ igual a um terço do produto da área da base ABC pela altura BB' .

Figura 9 – Demonstração do volume do cone



Fonte: Lima (1991, p. 77).

Observa-se, na imagem acima, que o prisma à direita foi decomposto em três pirâmides $ABCB'$, $A'B'C'$ e $ACC'B'$ de volumes iguais, a partir do mesmo vértice B' . Para tal, levanta-se AA' e CC' , perpendiculares ao plano ABC , de comprimentos iguais ao de BB' . Obtêm-se, assim, um prisma reto de base ABC e $A'B'C'$. Como o volume desse prisma é igual ao produto da área da base pela altura, basta mostrar que ele pode ser decomposto em 3 pirâmides, cada uma delas com volume igual ao da pirâmide $ABCB'$. Ora, as 3 pirâmides são a própria $ABCB'$, a pirâmide $A'B'C'A$ (com base congruente à base da primeira e com mesma altura) e a pirâmide $ACC'B'$, em que a base ACC' é congruente à base $AA'C'$ da segunda e

cuja altura, a partir do vértice B' , é igual à altura da segunda pirâmide, $AA'C'B'$, a partir do mesmo vértice B' .

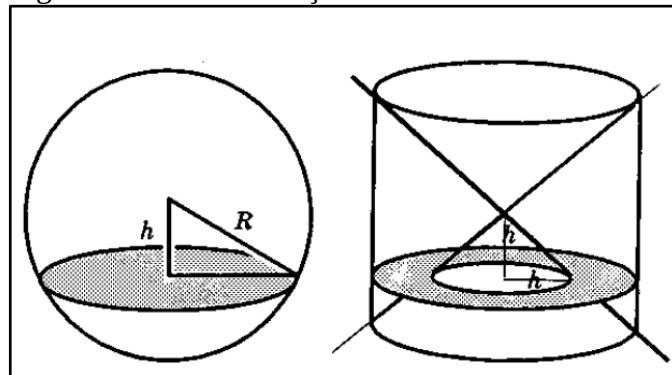
3.8 Volume da Esfera

Definição 4. A esfera de centro num ponto O e raio R é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao ponto O é menor do que ou igual a R . Em outras palavras, tal esfera é a reunião de todos os segmentos de reta de origem em O e comprimento igual a R .

Teorema 4. O volume de uma esfera de raio R é igual a $\frac{4}{3} \pi R^3$.

Demonstração. Considerando-se um cilindro reto cuja base é um círculo de raio R e altura medindo $2R$. Imagine que a esfera dada repouse sobre o plano horizontal, no qual está contida a base do cilindro (Figura 10).

Figura 10 – Demonstração do Teorema 4



Fonte: Lima (1991, p. 78).

Observa-se, na imagem acima, que ao cortar a esfera por um plano horizontal que dista h do centro, obtêm-se assim, um círculo cuja área mede $\pi(R^2 - h^2)$. O mesmo plano determina (entre as paredes do cone e do cilindro, à direita) um anel circular cuja área também mede $\pi(R^2 - h^2)$.

Na imagem do lado direito, vê-se que o vértice, no ponto médio do segmento, que liga os centros dos dois círculos básicos, (superior e inferior) do cilindro, forma dois cones, interiores ao cilindro, com bases naqueles dois círculos que limitam o cilindro. Considere o sólido T que é limitado exteriormente pela superfície lateral do cilindro e, interiormente, pelos 2 cones. O volume desse sólido T é igual à diferença entre o volume do cilindro ($2\pi R^3$) e o volume dos dois cones ($2\pi R^3/3$), ou seja,

$$\text{vol}(T) = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Portanto, o Teorema 4 estará demonstrado assim que se provar que o volume da esfera é igual ao volume do sólido T . Para isso, de acordo com o Princípio de Cavalieri, é suficiente

mostrar que a esfera S e o sólido T determinam seções $\pi \cap S$ e $\pi \cap T$, de áreas iguais, em cada plano horizontal π . Dado o plano π , seja h sua distância ao centro da esfera ou (o que é o mesmo) ao vértice comum dos dois cones. Então $\pi \cap S$ é um círculo de raio

$$\sqrt{R^2 - h^2},$$

enquanto $\pi \cap T$ é uma coroa circular cujo raio externo é igual a R e raio interno igual a h . Segue-se que:

$$\text{área}(\pi \cap S) = \pi(R^2 - h^2),$$

e

$$\text{área}(\pi \cap T) = \pi(R^2 - h^2).$$

Isto conclui a demonstração do Teorema 4.

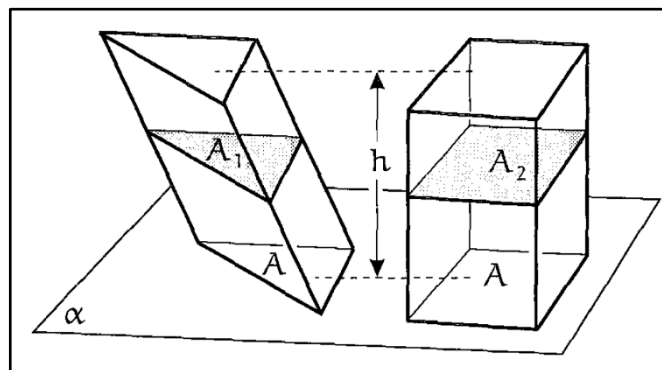
3.9 Volume do Prisma

Caso particular: De acordo com a definição de cilindro dada por Lima (1991), inclui-se como caso particular, a possibilidade de ser a base F um polígono. Quando isso ocorre, o sólido C fica limitado por faces planas, sendo nominados de *prismas*. Assim, tem-se sua definição do seguinte modo:

Definição 5. *Prisma é um cilindro cujas bases são polígonos.*

Verifica-se, assim, que um paralelepípedo é um prisma, haja vista que qualquer uma de suas faces podem servir de base. Portanto, o Teorema 1 é um caso particular do Teorema 2. Sendo assim, suas demonstrações são semelhantes (Figura 11).

Figura 11 – Demonstração do Princípio de Cavalieri do prisma



Fonte: Lima *et al.* (1998, p. 258).

Ressalta-se, ainda, alguns casos de um cilindro: i) no caso em que a geratriz do cilindro é perpendicular ao plano da base, este é chamado de *cilindro reto*; ii) no caso da base ser um polígono, este passa a ser chamado de *prisma reto*; iii) um paralelepípedo reto cuja base é um retângulo é simplesmente um bloco retangular.

Percebe-se também que, como consequência do Teorema 1, qualquer que seja a face do paralelepípedo que se tenha como base, o produto de sua área pela altura correspondente é o mesmo. Assim, de acordo com Lima *et al.* (1998), tem-se a definição do Teorema 5.

Teorema 5. *O volume do prisma é igual ao produto da área da base pela altura.*

Demonstração. Semelhante à demonstração do Teorema 1.

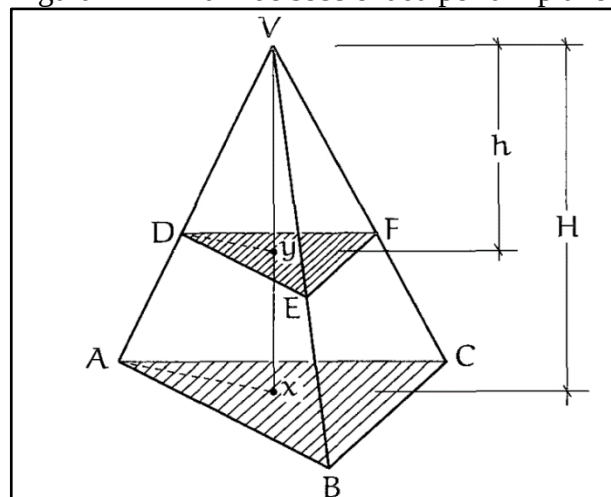
3.10 Volume da Pirâmide

Nesse momento, utilizou-se a publicação de Lima *et al.* (1998) para expor o Teorema do volume da pirâmide, haja vista que Lima (1991) define prisma como sólido cilíndrico e pirâmide como sólido cônico, ambos com bases poligonais, porém não aprofundando a discussão.

O volume da pirâmide necessita de resultados adicionais para sua determinação. Desse modo, é importante certificar-se de que se o vértice de uma pirâmide se move em um plano paralelo à base, o volume dessa pirâmide não se altera. Para tal, detalha-se o que ocorre quando uma pirâmide é seccionada por um plano paralelo à sua base.

Supõe-se uma pirâmide de vértice V , base ABC e altura H (Figura 12). Um plano paralelo a ABC , distando h do vértice V , produziu nessa pirâmide uma seção DEF .

Figura 12 – Pirâmide seccionada por um plano paralelo



Fonte: Lima *et al.* (1998, p. 259).

Dois fatos merecem destaque com relação à situação acima.

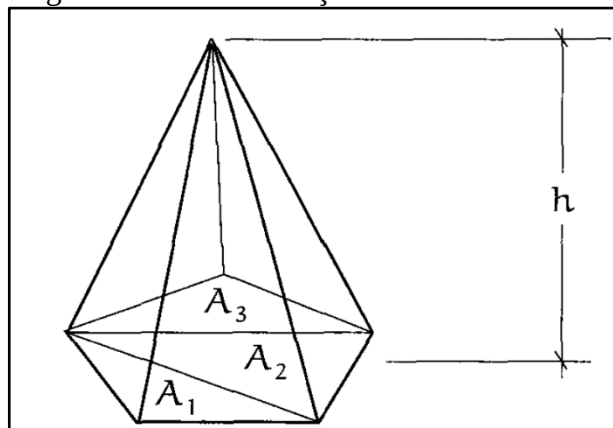
1. A seção e a base da pirâmide são figuras semelhantes e a razão de semelhança é $\frac{h}{H}$.
2. A razão entre as áreas de figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança.

Estas situações já foram demonstradas no trecho que trata do volume do cone. Portanto, para obter-se a generalização do volume de uma pirâmide qualquer, recorre-se ao seguinte teorema:

Teorema 6. *O volume de qualquer pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela altura.*

Demonstração. Ao observar a imagem da Figura 13, verifica-se que qualquer pirâmide pode ser dividida em pirâmides de base triangular. Tal divisão é feita ao dividir-se a base em triângulos justapostos através de diagonais e definindo cada plano de divisão da pirâmide por uma dessas diagonais da base e pelo vértice da pirâmide.

Figura 13 – Demonstração do Teorema 6



Fonte: Lima *et al.* (1998, p. 263).

Supondo-se que a pirâmide tenha altura h e que sua base, de área A , tenha sido dividida em n triângulos de áreas: $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Sabendo-se que o volume da pirâmide é a soma dos volumes das pirâmides triangulares, tem-se que seu volume é:

$$V = \frac{1}{3} A_1 h + \frac{1}{3} A_2 h + \dots + \frac{1}{3} A_n h$$

$$V = \frac{1}{3} (A_1 + A_2 + \dots + A_n) h$$

$$V = \frac{1}{3} A h$$

Comprova-se assim, a demonstração do Teorema 6.

4 O ENSINO E A APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE VOLUME

Neste capítulo, traz-se uma síntese sobre os aspectos didáticos e metodológicos do conceito de volume, como também aspectos matemáticos e estudos referentes ao ensino e à aprendizagem desse conteúdo.

4.1 O Ensino e a Aprendizagem de Volume

A presença de grandezas e medidas em situações cotidianas exerce um papel importante em diversas profissões como: agricultura, construção civil, artes, medicina, engenharia, entre outras. Assim, ressalta-se a importância de relacionar a matemática com outras áreas do conhecimento e com o entorno social, ou seja, articular os saberes intra e extramatemáticos³. Nesse sentido, destacam-se as grandezas geométricas referentes ao comprimento, área e volume, pois apresentam conhecimentos relevantes às vivências de um indivíduo em sociedade, além de promover a articulação com outros campos da matemática, como números e operações, espaço e forma, álgebra, entre outros, justificando-se assim a importância desse assunto no processo de ensino e aprendizagem da educação básica, pois de acordo com Barros (2002),

o tema grandezas geométricas no ensino/aprendizagem da Matemática tem sua importância assegurada pelas inúmeras articulações com outros campos da ciência – números, geometria, álgebra, tratamento da informação – e, também, por se constituir uma ponte privilegiada entre o conhecimento matemático e o de outras disciplinas escolares (BARROS, 2002, p. 15).

Ademais, as instruções normativas presentes nas Orientações Curriculares Nacionais (OCN) para o ensino Médio (BRASIL, 2006) são tomadas como referência para nortear a elaboração das propostas curriculares das escolas brasileiras, seguindo a seguinte recomendação:

O estudo de Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática

³ As palavras intra e extramatemática já são autoexplicativas: a primeira diz respeito a articulação dos conteúdos matemáticos entre si, e a segunda, exprime suas relações externas com outras áreas do conhecimento. Para maiores informações consultar Sousa *et al* (2019).

que trata de teoremas e argumentações dedutivas. Esse estudo apresenta dois aspectos – a geometria que leva à trigonometria e a geometria para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes (BRASIL, 2006, p. 75).

Assim, o ensino de “Volume” assume uma importância ainda maior no cenário escolar. No entanto, o tema não é tratado com a mesma relevância dentro das práticas docentes, haja vista o assunto geralmente ser trabalhado de forma bastante superficial dentro das escolas, embasados somente em lista de fórmulas, denominações e resoluções de exercícios, não apresentando um significado real ao aprendiz. De acordo com Costa, Bermejo e Moraes (2009, p. 2), diante da realidade que a sala de aula apresenta no ensino de Geometria Espacial, “observamos que os discentes estão presos a fórmulas” o que na maioria das vezes dificulta que o aluno relacione conceitos, identifique elementos de sólidos geométricos ou ainda impedem de estabelecer relações entre dois sólidos; tudo isso acarreta em impactos negativos na aprendizagem desse conteúdo.

O modo como o tema “Volumes” é apresentado aos discentes pelos professores é motivo de inquietação entre os estudiosos e pesquisadores da educação há bastante tempo. Um dos motivos que podem ser relacionados para tal, são as deficiências apresentadas pelos aprendizes no que tange aos conceitos básicos da Geometria Plana. Outro fato que não se pode negligenciar nesse processo são as dificuldades conceituais dos próprios professores em conceitos básicos da Geometria Plana e Geometria Espacial (COSTA; BERMEJO; MORAES, 2009).

O desgaste no ensino de Geometria Espacial se observa com mais ênfase nas escolas da rede pública; no entanto, a rede privada também apresenta deficiência, uma vez que, em geral, adia sua explanação para o Ensino Médio. Ademais, a partir de experiências práticas em instituições de ensino, percebeu-se que alguns professores evitam trabalhar os conceitos geométricos em suas aulas por não dominarem os assuntos, fato que prejudica a formação básica dos discentes, haja vista que tais conteúdos são de grande relevância para a compreensão das vivências práticas do cotidiano, conforme se atesta no trabalho de Souza e Bulos (2011):

Além disso, alguns professores evitam ensinar os conceitos de geometria, pois não tem domínio do assunto, não tiveram acesso na sua formação inicial ou, se tiveram, não foi suficiente, então acabam alegando que os alunos não tem base, encerrando mais um ano letivo sem trabalhar os conteúdos de geometria (SOUZA; BULOS, 2011, p. 4).

Situações como essas levam à reflexão sobre a formação dos professores de matemática, pois de acordo com Pavanello (2001, p. 183), ao ensinar Geometria o professor não atenta para necessidade de “[...] trabalhar relações existentes entre figuras, fato esse que não auxilia o aluno a progredir para um nível superior de compreensão de conceitos.” Isso pode dificultar a aquisição de conhecimentos geométricos por parte dos alunos, inviabilizando a consolidação das habilidades e competências de tais conceitos, necessários para a preparação do educando ao prosseguimento dos estudos, assim como ao exercício do trabalho e cidadania.

Em Barros (2002) e Moraes (2013), elencam-se falhas cometidas entre a abordagem do conceito de “Volume” no Ensino Fundamental e no Ensino Médio relacionados à compreensão do princípio da conservação do volume, da diferença entre volume e capacidade e entre massa e peso, além de verificar-se o uso exagerado de fórmulas prontas para o cálculo de volume. Vuelma, Garcia e Trevisan (2011), ao refletirem sobre suas práticas, percebem que não existe, por parte do aluno, compreensão para o cálculo de Áreas, na Geometria Plana, refletindo negativamente, mais tarde, no cálculo de Volumes, contemplados na Geometria Espacial.

Ainda de acordo com os autores, eles observaram que os alunos possuem poucos conhecimentos geométricos, pois mesmo reconhecendo figuras planas, aplicam as fórmulas com dificuldades, não conseguindo identificar aquelas que devem ser usadas no problema e muito menos reconhecendo nas figuras, as medidas que são importantes para o cálculo. Desse modo, relataram que:

Os cálculos de áreas são feitos com base numa lista de fórmulas dadas, não deduzidas, nem explicadas, e sobre figuras prototípicas. [...] Com esse hábito, não conseguem visualizar figuras não pertencentes à lista, nem aplicar fórmulas em novas situações, nem fazer relações geométricas com a realidade que os cerca, pois, em geral, no mundo, os objetos não estão na posição estática com que são representados na lista ou nos livros didáticos. Por isso, quando se trata do cálculo de volume, na geometria espacial, o aluno não consegue visualizar as diferentes figuras planas encontradas nos desenhos (estão em perspectiva, como identifica-las?) e tampouco selecionar a fórmula correta a ser aplicada. Os alunos parecem “viciados” na lista, sem qualquer autonomia na resolução dos exercícios (VUELMA; GARCIA; TREVISAN, 2011, p. 200-201).

Diante do exposto, percebe-se que existem deficiências no processo de ensino e aprendizagem do conceito de “Volume” que estão intrinsicamente ligadas ao descaso do ensino de geometria, a saber: ausência de atividades com Geometria de posição e com Desenho Geométrico; desvalorização das representações bidimensionais e tridimensionais das figuras geométricas, por parte dos professores; valorização mecanizada dos conceitos

geométricos; ausência de trabalhos com a Geometria Espacial Métrica; ausência de um trabalho com a percepção, dificultando a representação mental de objetos (COSTA; BERMEJO; MORAES, 2009).

Portanto, verifica-se que pouca coisa mudou na metodologia empregada para o ensino do conteúdo de “Volumes”, resultando numa aprendizagem deficiente de tais conceitos. Assim, é notório que mudanças precisam ocorrer no processo de ensino e de aprendizagem e que elas perpassam diretamente pela formação de professores.

Nesse momento, convém destacar a relevância da BNCC para esse processo de reformulação do ensino de Geometria Espacial, uma vez que o documento tem como finalidade nortear e estruturar os currículos escolares. Assim, o documento propõe que a Geometria seja apresentada do seguinte modo:

Em relação ao pensamento geométrico, eles desenvolvem habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras. Além disso, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança.

No que se refere a grandezas e medidas, os estudantes constroem e ampliam a noção de medida, pelo estudo de diferentes grandezas, e obtêm-se expressões para o cálculo da medida da área de superfícies planas e da medida de volume de alguns sólidos geométricos (BRASIL, 2018, P. 527).

Observou-se, no texto anterior, que houve uma mudança na nomenclatura do eixo de Espaço e Forma, restringido apenas à Geometria, o que pode causar certas confusões a educadores e instituições escolares, pois há necessidade de explicitar que o pensamento geométrico abrange espaço e forma.

De acordo com Nacarato (2016), a BNCC ainda deixa muitas lacunas no que concerne aos objetivos e integrações dos eixos temáticos; não apresenta nenhuma discussão sobre a natureza do conhecimento matemático e, muito menos, do conhecimento matemático escolar e do papel que o docente deve desempenhar no processo de aprendizagem do aluno (NACARATO, 2016). Assim, evidencia-se que, mesmo com a formulação de novas diretrizes, o ensino de Geometria Espacial ainda apresenta muitas falhas, principalmente nas orientações para os professores que necessitam de subsídios que os auxiliem no planejamento e na execução de suas práticas. Desse modo, no escopo seguinte, traz-se uma reflexão sobre a importância da formação docente e da necessidade de manter-se atualizado no exercício da docência.

4.2 Formação Docente

Há muito, tem-se falado da necessidade de mudanças nas estratégias de ensino de Geometria Espacial. Nesse sentido, a formação de professores é tida como essencial para almejar-se uma educação matemática de qualidade, pois é nesse momento que os futuros professores têm sua carreira profissional moldada e, para tal, necessitam se apropriarem de questões tanto de conteúdo, quanto didáticas. No entanto, esse cenário não é muito promissor, uma vez que “desde o início do século XX, o Brasil segue um modelo para os cursos de licenciatura, no qual os conteúdos específicos não dialogam com os conteúdos didáticos-pedagógicos” (PINHEIRO; ALBRECHT, 2017, p. 58).

Nesse sentido, é essencial fazer-se uma reflexão sobre o ensino de Geometria no cerne da formação dos professores de matemática, haja vista que muitos desses docentes apresentam inseguranças ao trabalharem os conceitos geométricos, refletindo negativamente na aprendizagem dos alunos da educação básica, conforme atestam Souza e Bulos (2011):

Pesquisas apontam que os alunos que concluem o Ensino Médio, no Brasil, apresentam dificuldades nos conceitos de geometria. Tais dificuldades são reveladas através do desempenho dos alunos em avaliações externas à escola, como ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) e processos seletivos de acesso ao ensino superior. Este fato é justificado, por educadores matemáticos, pelas dificuldades dos professores com os conteúdos geométricos, o que contribui para que muitos alunos concluam o Ensino Médio com algumas lacunas na aprendizagem de geometria (SOUZA; BULOS, 2011, p.1).

Tudo isso remete ao famoso “círculo vicioso”, no qual o aluno se forma sem os conhecimentos geométricos básicos, ingressam na faculdade, formam-se e acabam exercendo a docência sem saber os conteúdos de geometria. Assim, verifica-se a importância do processo de ensino e aprendizagem de geometria nos cursos de formação docente, com o intuito de atribuir um maior significado destes conceitos aos futuros docentes.

Nesse sentido, é primordial repensar o modo como a geometria está sendo repassada aos alunos, por meio de intervenções nos cursos de formação inicial e continuada de professores de matemática, além da necessidade de inserir nos currículos de formação docente disciplinas que proporcione a reflexão sobre o ensino de geometria na educação básica, de forma mais integrada (SOUZA; BULOS, 2011).

Uma análise mais detalhada, envolvendo a geometria, revelam fatores que podem ser apontados como percussores das dificuldades no processo de ensino e aprendizagem de

conceitos geométricos. Tais dificuldades possuem relação direta com a formação dos professores de matemática, a saber:

- Possuem uma formação muito precária em geometria;
- Os cursos de formação inicial não integram suficientemente uma reflexão profunda a respeito do ensino de geometria;
- As modalidades de formação contínua não estão ainda atendendo os objetivos em relação à geometria (MANRIQUE; SILVA; ALMOULoud, 2002, p. 1).

Portanto, evidencia-se que as deficiências de aprendizagem desse conteúdo, na educação básica, estão em consonância com o modo pelo qual tais conceitos são trabalhados nos cursos de licenciatura. Assim, Oliveira (2017) chama atenção para a necessidade de um maior aprofundamento de questões relativas ao processo formativo do professor de Matemática, almejando a uma postura mais reflexiva dos futuros docentes, para que assim eles tenham condições de conceber mudanças no desenvolvimento de habilidades essenciais para o exercício da profissão.

Outro ponto que convém ressaltar, nesse contexto, são as situações didáticas apresentadas para o ensino de geometria presentes nos livros didáticos e que são utilizadas por grande parte dos professores em suas aulas. Assim, Manrique, Silva e Almouloud (2002) apresentam algumas das características dessas situações de ensino, do seguinte modo: Ausência de coordenação no registro de representações semióticas; Descaso com a importância da visualização das figuras, durante as fases de exploração. Como a política geral da educação permite que cada escola defina os conteúdos que considera necessários para a formação dos alunos, geralmente a geometria é deixada de lado; pouca ênfase na passagem da geometria empírica para a geometria dedutiva.

Diante do exposto, verifica-se também a necessidade de adequar novos recursos ao processo de ensino e aprendizagem de Geometria e demais conteúdos Matemáticos. Assim, expõe-se no próximo tópico a relevância do uso da tecnologia na educação matemática.

4.3 Tecnologia e a Mídia Digital na Educação Matemática

Há muito se tem falado na inserção de tecnologias na educação e, diante do cenário atual, ela nunca foi tão necessária. No entanto, o que se viu nesse momento foi um despreparo generalizado de escolas e professores, no que diz respeito ao uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs), no ensino remoto. Partindo dessa premissa, cabe ao professor e a escola criarem meios de adequar-se às novas metodologias e buscar recursos

digitais que favoreçam a construção do saber para o aluno, promovendo situações de aprendizagem que aproxime a teoria da prática.

Nesse sentido, inserir ferramentas pedagógicas ao ensino de Matemática pode se constituir em uma importante aliada para facilitar a aprendizagem de tais conteúdos, haja vista que eles exigem um poder de abstração e formalização muito grande. Assim, implementar ferramentas tecnológicas como: computador, *smartphone*, *tablets* e outros, pode contribuir para aproximar os conceitos matemáticos da realidade do aluno. De acordo com Oliveira (2019):

[...] pode-se utilizar a tecnologia para abordar as várias temáticas apresentadas nesse conteúdo, principalmente a Geometria, criando, assim, oportunidades de dinamizar a aprendizagem. Dessa forma, ao mesmo tempo em que se ensinam conteúdos básicos da Matemática, é possível que a prática do que foi visto aconteça de forma divertida, atraente, agradável e diferente da convencional (OLIVEIRA, 2019, p. 40).

Inserir a escola na era digital é um desafio; porém, um processo inevitável e que não pode mais ser protelado. Atualmente, existe à disposição dos professores inúmeras ferramentas interativas, que agrupam sistemas dinâmicos de representação na forma de objetos concretos e abstratos. São concretos, pois se apresentam na tela do computador e podem ser manipulados, ao mesmo tempo que são considerados abstratos, por responderem a nossas elaborações e construções mentais (OLIVEIRA, 2019).

Nesse momento, é importante fazer um alerta para o fato de que o professor deve ser um mediador entre as atividades e os alunos, permitindo que os discentes possam participar ativamente da construção do saber, conforme salienta Oliveira (2017):

As TIC desenvolvem papel de ferramenta auxiliadora, dessa maneira deve ser usada de modo que seja capaz de propiciar liberdade e criatividade para os alunos e professores, e não simplesmente manter aquela visão, comum a muitos docentes, de que o simples o uso dessas ferramentas em sala de aula já é suficiente para resolver todos os problemas presentes no processo de ensino-aprendizagem (OLIVEIRA, 2017, p 31).

Ainda de acordo com o autor, merecem destaque, os *softwares* educativos, pois estes são capazes de modificar a relação com objetos matemáticos, em especial os geométricos e seus conceitos, por permitir que as figuras sejam movimentadas de modo interativa. Desse modo, dar-se ênfase ao *software* GeoGebra, pois esta ferramenta foi utilizada como suporte desta pesquisa. A escolha se deu pelo fato do referido software apresentar uma variedade de possibilidades para sua utilização que vão desde o ensino fundamental até o nível superior.

Além de ser um *software* de livre acesso e poder ser utilizado em computadores, *tablets* e celulares. Macedo (2018) descreve-o como,

um *software* que vai além da Geometria Dinâmica, mas é classificado como um *software* de Matemática Dinâmica. Trata-se de um *software* desenvolvido por Markus Horenwarter e Judith Preiner, com início do projeto em 2001 na *University of Salzburg* e tem continuado o desenvolvimento na *Florida Atlantic University* e destinado a ser utilizado, sobretudo, no ensino e aprendizagem de Matemática nas escolas básicas, podendo ser usado também em nível superior (MACEDO, 2018, p. 37).

Com o GeoGebra, podem-se trabalhar a Geometria, o Cálculo e a Álgebra. Sua interface possibilita fácil manuseio e permite a construção de figuras extremamente precisas, que podem ser movimentadas, alteradas e animadas, e ainda propicia uma exploração visual por vários ângulos, incluindo em terceira dimensão. De acordo com o objetivo desta pesquisa, enfatiza-se o ensino de Volumes de sólidos geométricos, utilizando a interface e os recursos das dimensões 2D e 3D.

Uma das grandes vantagens de usar *softwares* em aulas de Geometria, é o desenvolvimento do pensamento visual, pois caracteriza-se como fonte rica em imagens virtuais que privilegiam a compreensão de conceitos matemáticos que seriam de difícil compreensão sem esse recurso (MACEDO, 2018).

Portanto, espera-se que a utilização de um *software* que possibilita construções geométricas, possa aproximar o aluno do objeto matemático de estudo, de maneira que possibilite superar as dificuldades e limitações que os professores encontram na exposição desses conteúdos em sala de aula, potencializando uma aprendizagem mais significativa aos discentes.

5 PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA

Neste capítulo, serão apresentados os procedimentos metodológicos, almejando responder à questão desta pesquisa e alcançar os objetivos traçados. Escolheu-se a ED como metodologia de pesquisa, com ênfase na EDF, também conhecida como ED de Segunda Geração, sendo esta uma generalização da ED de Primeira Geração; no entanto, com foco na formação de professores e concepção de material didático. Essa metodologia foi utilizada na elaboração das situações didáticas e na aplicação do curso de formação, executada durante a etapa da experimentação da presente pesquisa, constituindo-se como o principal método da coleta de dados sobre as percepções dos professores em formação inicial. Trata-se também, neste capítulo, sobre a validação interna e sua justificativa.

Desse modo, para desenvolver qualquer trabalho de pesquisa acadêmica é essencial um referencial teórico que dê sustentação aos argumentos aferidos na investigação. Sendo assim, buscou-se as contribuições de Artigue (1988, 1995), Perrin-Glorian (2009, 2011, 2019), Perrin-Glorian e Bellemain (2016, 2019), Almouloud (2007), Almouloud e Silva (2012), Alves (2017, 2018, 2019), Alves e Catarino (2017), Douady e Perrin-Glorian (1989) e Tempier (2012, 2013, 2014) para estruturar um ambiente de formação e investigação para os acadêmicos de Licenciatura em Matemática. Ressalta-se que os dados gerais dos participantes são apresentados no capítulo 7 desse trabalho.

Assim, a metodologia de pesquisa da EDF acompanha o roteiro da ED da Primeira Geração, que foi detalhada e explicada no capítulo 2, seguindo cada fase dessa metodologia para organizar e estruturar o processo de aplicação desta investigação.

5.1 Análises Preliminares da Engenharia Didática

Na primeira fase da ED, ressalta-se a importância de fazer uma investigação voltada para a identificação dos problemas inerentes ao ensino e à aprendizagem do objeto de estudo, cuja finalidade é fundamentar e estruturar as questões, as hipóteses e os aspectos teóricos e metodológicos da pesquisa. Com o propósito de determinar a problemática, os objetivos e o objeto deste estudo, foi feito um levantamento bibliográfico de artigos, banco de questões do ENEM, dissertações e livros que abordam o conteúdo de Volume, ED da Primeira Geração, EDF e TSD. Ademais, procurou-se identificar quais os tipos de questões que seriam mais adequadas para o uso do *software* GeoGebra como mecanismo que servisse de auxílio ao

aprendiz na ação de resolução das situações-problema e que permitisse a modelagem através da TSD.

5.1.1 Análises de dissertações em trabalhos correlatos com a pesquisa

Para coletar informações referentes ao ensino e à aprendizagem do conteúdo de Volume, com ênfase na utilização de recursos didáticos em aulas de Geometria Espacial, processo de estudo dos alunos e preparação pelos professores da educação regular, realizou-se uma busca de materiais acadêmicos na plataforma Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), com a intenção de identificar trabalhos acadêmicos que apresentassem similaridades com o tema abordado nesta pesquisa e que pudessem contribuir com este estudo.

Para esse levantamento, utilizou-se uma sequência de palavras-chave, a saber: “Ensino e Aprendizagem de Volume”, “GeoGebra”, “ED”, “EDF”, “TSD”, “Geometria Espacial”. Com o intuito de limitar a busca, concentrou-se em trabalhos que tratassem do tema Volume, objeto matemático dessa pesquisa, GeoGebra, e usassem as metodologias de pesquisa e ensino da ED e da TSD. Dessa forma, realizaram-se algumas análises, o que resultou na escolha de nove dissertações de quatro programas de Pós-Graduação diferentes. Veja, no Quadro 1, os trabalhos que foram selecionados.

Quadro 1 - Análise de trabalhos acadêmicos relacionados com a pesquisa

PROGRAMA	AUTOR(A)/ANO	TÍTULO
UFPE	José Severino de Barros (2002)	Investigando o conceito de Volume no ensino fundamental: um estudo exploratório.
	Leonardo Bernardo de Moraes (2013)	Análise da abordagem da Grandeza Volume em livros didáticos de Matemática no Ensino Médio.
	Ana Paula Nunes Braz Figueiredo (2013)	Resolução de problemas sobre a grandeza volume por alunos do ensino médio: um estudo sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais.
PGECM/IFCE	Ana Paula Rodrigues Alves dos Santos (2018)	Situações Didáticas Olímpicas (SDO): um contributo da ED Clássica no ensino de olimpíadas.
	Aline de Alencar Macedo (2018)	ED de Segunda Geração: um referencial para ação investigativa na formação inicial dos professores de Física.
UFMS	Hakel Fernandes de Awila (2017)	Uma análise da contribuição do GeoGebra como recurso interativo para o estudo de áreas e volumes.
PROFMAT	Patrícia Barretto Santos Souza (2015)	O <i>software</i> GeoGebra atrelado ao princípio de Cavalieri como mediador no estudo do cálculo do volume dos sólidos geométricos.
	Francisco Rafael de Freitas Cavalcante (2016).	Ensino de Geometria Espacial: uma proposta de atividades com o uso do GeoGebra.
	Leonice Ludwig Rabaiolli (2013)	Geometria nos anos iniciais: uma proposta de formação de professores em cenários para investigação.

Fonte: Elaboração da autora.

Os trabalhos acadêmicos, discutidos agora, apresentam o mesmo objeto de estudo da pesquisa realizada, como também algumas características da metodologia de pesquisa da ED.

No trabalho de Barros (2002), traz uma investigação aplicada em uma escola municipal da cidade de Recife, estado de Pernambuco, para identificar conceitos e procedimentos mobilizados pelos alunos, mediante atividades envolvendo volume ou capacidade de sólidos geométricos. Teve como objetivo principal investigar noções, invariantes operatórios (conceitos em ação e teoremas em ação) e as principais estratégias utilizadas por alunos de uma turma da 7ª série, do Ensino Fundamental, diante de situações de sala de aula, envolvendo os conceitos de volume e capacidade. Essa dissertação não adotou a metodologia da ED em sua totalidade, limitando-se a fazer uso somente das etapas de análises preliminares, em que foi realizada a concepção de uma sequência de atividades e as análises *a priori* e *a posteriori* dessas atividades, e teve como público-alvo, 45 alunos do ensino fundamental II. O experimento constituiu-se na aplicação de atividades em uma única seção, na qual foram respondidos sete problemas e uma pergunta aberta. Os alunos faziam as resoluções das questões, estas eram observadas e depois recolhidas para análise do pesquisador que, após suas análises *a posteriori*, constatou que os participantes revelaram uma compreensão insuficiente de volume como grandeza, pois eles tinham dificuldades de articularem/dissociarem os elementos: número, sólido e grandeza.

Na pesquisa de Moraes (2013), teve como objetivo caracterizar a abordagem da grandeza volume em sete coleções de livros didáticos de Matemática, no ensino médio, aprovados no PNLD 2012. A análise dos livros didáticos foi norteada por três critérios, agrupados em três categorias: descrição da abordagem de volume, volume como conceito e componente do campo conceitual das grandezas geométricas e fórmulas de volume. O Princípio de Cavalieri é apresentado em todas as coleções analisadas como ferramenta para construção das fórmulas de volume. A metodologia de pesquisa recorreu a elementos da Análise de Conteúdo (BARDIN, 2011) para aferir os resultados. Este trabalho apresentou como os livros didáticos abordam o conteúdo de Volume, elencando elementos que os aproximam das metodologias aplicadas nas escolas para o ensino desse conteúdo.

Já em Figueiredo (2013), tem-se um estudo exploratório sobre o modo como os alunos do ensino médio lidam com problemas sobre volume. A parte experimental deste trabalho ocorreu a partir da aplicação de teste de sondagem e de entrevistas com alunos de terceiro ano de três instituições de ensino de rede privada, pública federal e pública estadual da cidade de Recife, do estado de Pernambuco, e apresentou algumas características da ED, pois utilizou as fases da análise *a priori*, no teste de sondagem e a confrontação da análise *a priori* com as

respostas obtidas dos alunos. O público-alvo foi selecionado do seguinte modo: 16 alunos da rede estadual, 18 alunos da rede privada e 17 alunos da rede federal, destes foram escolhidos 10 alunos para a entrevista, de acordo com o seguinte critério: alunos que deixaram respostas incompletas ou que apresentaram dificuldades diante de situações que exigiam a articulação e a distinção entre os quadros numérico, geométrico e das grandezas e que não apresentaram justificativas nas respostas. Este trabalho apresenta também uma análise de pesquisas que mostram aspectos entre o ensino e a aprendizagem de Volume, o que também é de interesse no trabalho aqui proposto.

Os trabalhos acadêmicos, a seguir, utilizam-se da mesma fundamentação teórica e metodológica de investigação, ou seja, usam a ED como metodologia de pesquisa e a TSD como teoria de ensino, muito embora alguns autores também a considerem como metodologia de ensino. As diferenças apresentadas entre as pesquisas referem-se ao objeto matemático em estudo e ao público-alvo.

O trabalho de Santos (2018) utilizou a ED clássica para estruturar a pesquisa, seguindo as quatro etapas dessa metodologia. Ademais, apresenta a resolução dos problemas, seguindo as sequências didáticas embasadas nas quatro fases da TSD de Brousseau. O trabalho traz SDO como proposta alternativa para aulas direcionadas às olimpíadas de matemática, ampliando a participação para alunos que são avessos a matemática. Para tanto, utilizou o *software* GeoGebra para proceder a transposição didática das situações didática olímpicas aplicadas na pesquisa. Teve como público-alvo, cinco alunos dos 8º e 9º anos do ensino fundamental de uma escola privada de Fortaleza, no estado do Ceará, que desejava preparar seus alunos para a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM).

Em Macedo (2018), o público-alvo foram 12 alunos do 8º semestre do curso de Licenciatura em Física da Universidade Regional do Cariri, durante a disciplina de Estágio Supervisionado, e teve como objetivo geral, analisar a ED de Segunda Geração na formação inicial para professores de Física. A coleta de dados ocorreu do seguinte modo: por meio das observações realizadas, durante os momentos de aplicação da sequência didática planejada; das respostas aos questionários e das listas de exercício dos alunos, nos protocolos de aplicação; das falas dos alunos sobre os textos I e II que foram lidos, estudados e debatidos, bem como filmagens de vídeo e registros fotográficos. As aplicações foram executadas em quatro encontros, de uma hora e cinquenta minutos cada, tendo os alunos trabalhado em equipe, em que foi escolhida uma sequência didática para aplicar o conceito de inércia. A metodologia de pesquisa aplicada foi a ED de Segunda Geração (que visa à construção de matérias didáticos e formação de professores), com o intuito de conduzir o trabalho

experimental a partir de sequências de ensino. Portanto, este trabalho também apresenta semelhanças com a investigação realizada, sendo elas: a formação inicial de professores e metodologia de pesquisa voltada para formação de professores.

Em Awila (2017), traz, como sujeitos da pesquisa, calouros do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Santa Maria, no Rio Grande do Sul, com um total de 11 acadêmicos. O trabalho partiu do objetivo de investigar e verificar o quanto *applets* produzidos com o *software* GeoGebra podem contribuir para tornar mais fácil o cálculo de área e volume das principais figuras estudadas no decorrer da Educação Básica. Houve um total de 7 encontros, com duração média de duas horas cada, em que se executou uma sequência didática, segundo os pressupostos de Zabala (1998), constituída por *applets* que foram produzidos com o *software* GeoGebra em que se abordou os conteúdos de área e volume, combinando as teorias de aprendizagem significativa e da carga cognitiva. Para tanto, a sequência didática foi constituída por perguntas que permitissem reflexões a respeito de como argumentar a validade de algumas sentenças matemáticas expressarem o valor de áreas e volumes, por meio da interação com as construções do GeoGebra. Assim, observou-se semelhanças desta pesquisa com este trabalho de investigação, a saber: o objeto matemático de estudo e a utilização do *software* GeoGebra para modelar as situações didáticas utilizada durante a aplicação da pesquisa.

Em Souza (2015), tem-se uma proposta de estudo para alunos do 3º ano do Ensino Médio, com o objetivo de oferecer maior significado ao estudo do cálculo dos volumes dos sólidos geométricos. Para tal, utilizou-se o Princípio de Cavalieri aliado ao uso do *software* GeoGebra. O público-alvo se constituiu de dez alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola estadual localizada em Santo Antônio de Jesus-BA, em que se buscou proporcionar estratégias para uma melhor compreensão do cálculo do volume de sólidos geométricos por meio da geometria dinâmica no *software* GeoGebra. Para coleta dos dados da pesquisa, foram propostas oficinas, em que foram apresentadas questões de exames do ENEM, vestibulares e que foram resolvidas com o auxílio do recurso tecnológico do *software* GeoGebra. Desse modo, este trabalho também trouxe semelhanças com a investigação realizada: o objeto matemático do conteúdo de volume, o uso do *software* GeoGebra e a questões do ENEM para modelar as atividades propostas na investigação.

Cavalcante (2016) trouxe uma proposta educacional para o ensino de geometria espacial, a partir da proposição de atividades de construção, compreensão e cálculos métricos de sólidos geométricos, utilizando o *software* GeoGebra. Embora esse trabalho não apresente uma parte empírica, teve a intenção de levar reflexões sobre a prática didático-pedagógica nas

aulas de matemática e, de modo especial, nas aulas de geometria espacial, levando os docentes a buscarem metodologias e recursos didáticos que possam ser utilizados para o ensino e a aprendizagem de tais assuntos. Com relação ao trabalho de investigação, o que despertou o interesse desta pesquisadora foram as semelhanças no objeto matemático, no uso tecnológico do *software* GeoGebra e na preocupação com o a ação docente.

Em Rabaiolle (2013), tem-se um estudo de cunho qualitativo, em que se utilizou a entrevista individual semiestruturada com professoras da Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, além da coordenadora pedagógica, totalizando cinco participantes de uma escola da rede privada em Lajeado, Rio Grande do Sul. As entrevistas foram o ponto de partida da investigação, sendo realizadas oralmente e de modo individual. Em um segundo momento, o grupo participou de cinco encontros, com duração de quatro horas cada, buscando a formação de um grupo de estudos, utilizando um cenário de investigação pautado nos pressupostos Skovsmose (2008), na tentativa de promover um ambiente de aprendizagem que desse suporte a investigação. Em cada encontro, foram desenvolvidas atividades teóricas e práticas, referentes ao ensino de geometria nos anos iniciais, como também a problematização da prática docente em relação ao ensino de geometria. Assim, essa investigação apresentou semelhança com o presente trabalho por tratar-se de um estudo que relaciona a Geometria Espacial à formação docente e ao ensino desses assuntos geométricos.

Observou-se, nos trabalhos selecionados, que ainda existem muitas lacunas no modo como o conteúdo de volume é trabalhado nas escolas. Alguns autores apontam que são deixados de lado conceitos relevantes, como é o caso das noções intuitivas de área, necessários para uma melhor compreensão sobre o tema. Segundo os autores, tais deficiências perpassam pela formação inicial do professor de matemática, que não recebem uma preparação adequada para os conceitos de Geometria Espacial, como também nas abordagens dos livros didáticos, culminando num ensino pautado em fórmulas e exercícios prontos que não trabalham a compreensão desses assuntos, mas a memorização de fórmulas.

Desse modo, propôs-se, nesse trabalho, apresentar sugestões metodológicas que podem trazer contribuições importantes às práticas docentes, como também promover um ensino, no qual o aluno seja capaz de apropriar-se de saberes geométricos que permitam melhor entendimento do conteúdo de Volume e, conseqüentemente, a construção de um conhecimento novo.

5.1.2 O objeto matemático em livros didáticos

A seguir, no Quadro 2, apresenta-se o resultado da análise de três livros didáticos inscritos no PNLD que foram selecionados por tratar-se de obras que foram adotadas pelas últimas escolas em que lecionei. Analisou-se somente o segundo volume de cada coleção por contemplar o objeto matemático desta pesquisa.

Quadro 2 - Análise de livros do ensino médio com foco na abordagem do conteúdo de Volume

LIVRO	AUTOR/ANO	DESCRIÇÃO
Matemática: Paiva.	Manoel Paiva (2013)	Este livro está dividido em 14 capítulos, em que os três últimos são referentes à Geometria Espacial. Os conteúdos contemplados nesta obra referem-se a Trigonometria, Matrizes e Determinantes, Análise combinatória, Probabilidade e Geometria Espacial. Todos os capítulos trazem exemplos, exercícios resolvidos e exercícios propostos, listados em nível crescente de dificuldades. Os exercícios, porém, não proporcionam muita oportunidade para o aluno desenvolver a capacidade de modelar situações concretas em linguagem matemática, pois as questões já deixam implícito qual o modelo matemático deve ser utilizado. Ao final de cada capítulo, ainda é disponibilizada uma lista de exercícios complementares, em que se contemplam problemas de avaliações externas como ENEM e vestibulares.
Matemática: Contexto & Aplicações	Luiz Roberto Dante (2016)	Este livro foi organizado em 10 capítulos, sendo os capítulos 7 e 8 destinados à Geometria Espacial. São abordados os principais conteúdos nos campos da Álgebra, Geometria, Grandeza e Medidas, Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade. O exemplar traz exercício resolvidos, como modelo para embasar a resolução do aluno, seguida de uma lista de exercício proposto para serem desenvolvidas pelos discentes. Ao final de cada capítulo, ainda apresenta uma relação de exercícios extras que contempla questões do ENEM e vestibulares.
Matemática: ciência e aplicações	Gelson Iezzi; Osvaldo Dolce; David Degenszajn; Roberto Périco; Nilze de Almeida (2017).	Neste livro, seus conteúdos foram distribuídos em 11 capítulos, sendo os capítulos 7, 8 e 9 reservados à Geometria Espacial. Os capítulos foram organizados de modo a apresentar o desenvolvimento teórico, intercalando-os às definições, exemplos, propriedades e exercícios. Em geral, as séries de exercícios de cada capítulo são precedidas de exemplos e exercícios resolvidos. Os exercícios propostos são organizados em ordem crescente de dificuldades. De um modo geral, são exercícios que envolvem relações mais simples. Este exemplar, ao contrário dos outros dois, não traz exercícios complementares que contemplem as avaliações externas.

Fonte: Elaboração da autora.

Com relação aos livros analisados, verificou-se uma grande similaridade entre eles, referente à apresentação e disposição dos conteúdos, em que os autores seguem uma mesma sequência didática: teoria e demonstração, exercícios, geralmente pautados em fórmulas, sem o desenvolvimento das noções intuitivas de conceitos geométricos, com exceção de Dante (2016) que, após fazer uma breve introdução ao conteúdo de “Áreas: medidas e superfícies”, propõe uma noção intuitiva de áreas. Verificou-se também que os exercícios e exemplos contemplados nos livros não articulam o novo saber com os conhecimentos prévios dos alunos, pois não relacionam a matemática dos anos iniciais àquelas apresentadas no ensino médio.

No que concerne aos conteúdos geométricos, percebeu-se que os livros didáticos expõem o cálculo de área de figura poligonais bem explicitado, as fórmulas são deduzidas e bem explicadas; no entanto, no momento da ação docente, o ensino é conduzido por meio de listas de fórmulas, esperando-se que o aluno apenas memorize. Outro fator, que é bastante comum nas coletâneas, é o fato do estudo de áreas de figuras geométricas bidimensionais anteceder aos objetos tridimensionais, não contribuindo para o desenvolvimento da visualização e do raciocínio virtual, pois mesmo quando destacam o estudo de vértice, arestas e faces dos sólidos geométricos, eles partem da planificação para, em seguida, propor o cálculo de área da superfície, seguida do volume dos poliedros.

5.1.3 Análise de publicações correlatas com a pesquisa

Também foram pesquisadas definições, relações, propriedades e fórmulas matemáticas com ênfase no cálculo de volumes. Inicialmente, foram estudados a noção intuitiva de volumes, definição geral, princípio de Cavalieri, volume do paralelepípedo, cubo, pirâmide, esfera, cilindro, cone e o ensino de áreas e volume presentes no livro de Lima (1991).

Ainda nesse contexto, fez-se um estudo dos trabalhos de Vergnaud *et al.* (1983) referente à análise de aspectos didático-cognitivos de conceitos de volume; Figueiredo, Bellemain e Teles (2012), que fazem uma investigação sobre o conceito de volume estimulados por alunos, no ensino médio, como um dos componentes no campo conceitual das grandezas geométricas; Douady e Perrin-Glorian (1989), que propõem um modelo didático para o conteúdo de área de superfície plana; Vuelma, Garcia e Trevisan (2011) apresentam um estudo sobre o ensino de Áreas e Volumes, propondo uma articulação dos objetos geométricos e suas representações com o mundo físico. Essas publicações expõem estudos no sentido de impulsionar melhorias para aquisição de saberes de grandezas

geométricas, tanto para a formação de professores, quanto para a aprendizagem dos alunos na educação básica.

Buscou-se, ainda, estudo sobre a geometria aplicada com o auxílio do GeoGebra e embasado pela metodologia de pesquisa da ED e/ou da TSD, abordadas nos artigos de Leivas e Gobbi (2014), Ferreira e Scortegagna (2018), Volpato, Fortes e Silveira (2018), Azevedo e Alves (2018), Pereira *et al.* (2017), Santos e Alves (2018), Ferreira, Barros e Santos (2010), Ribeiro, Siebra e Silva (2018), Souza e Bulos (2011) e Costa, Bermejo e Moraes (2009).

Ademais, foram analisadas questões de geometria espacial encontradas nas avaliações do ENEM, compreendidas entre os anos de 1999 a 2019, com potencial para serem desenvolvidas com o *software* GeoGebra e que abordassem o conteúdo de Volume.

A seguir no capítulo 6, aborda-se a segunda fase prevista na ED, análise *a priori*, etapa em que se concebem as situações didáticas que, nesse estudo, perspectivam construir metodologias alternativas para o ensino de Geometria Espacial, no contexto do conteúdo de Volume, mediante a seleção de problemas de provas anteriores do ENEM, disponível no banco de questão do MEC.

6 ANÁLISE A PRIORI

Aqui é apresentada uma descrição sobre o planejamento das situações didáticas do ENEM, assim como a caracterização do local de desenvolvimento dessa investigação, como também, os sujeitos envolvidos na pesquisa.

6.1 Análise a *Priori* e Concepções das Situações Didáticas do ENEM

Ressalta-se que este estudo enfatiza o conteúdo de volume, que é parte integrante da Geometria Espacial. As situações didáticas elaboradas para este projeto de pesquisa objetivam estimular o estudante a utilizar os conhecimentos prévios adquiridos ao longo de suas vivências, haja vista ser comum eles se depararem com situações-problema, nas quais não conseguem identificar os conceitos necessários para a resolução da questão, sendo necessário recorrer aos conhecimentos estudados em anos anteriores para a elaboração das hipóteses e validação das ações utilizadas para resolver o problema. Assim, espera-se que os alunos utilizem seus conhecimentos para estimular o raciocínio geométrico necessário para resolver as situações didáticas sobre volumes no viés do ENEM.

Descrever-se-ão, neste trecho, algumas situações que poderão ocorrer durante a aplicação da pesquisa (onze situações didáticas) que foram realizadas na UVA, em Sobral, no Estado do Ceará, com um total de dez alunos do curso de Licenciatura em Matemática, com o intuito de identificar a classe intuitiva e a forma empírica que alicerçaram a ação para a resolução das situações didáticas que envolvem o conceito de volume.

Os discentes trabalham com a manipulação do *software* GeoGebra para realizar simulações no computador que auxiliem a solucionar as questões previamente elaboradas pelo professor. Autores como Gravina e Basso (2012, p. 27) descrevem o potencial de *softwares* para o estudo de geometria espacial, especialmente nos problemas de cálculos de volume, “uma das dificuldades que se apresenta para os alunos é quanto ao entendimento de um objeto tridimensional que está sendo representado em desenho bidimensional”. Por tratar-se de um desenho estático no plano bidimensional, torna-se pobre se comparado a uma construção no plano tridimensional, cuja dinâmica permite a manipulação na tela do computador, contribuindo para o desenvolvimento de habilidades de visualização espacial essenciais para uma melhor solução de problemas que envolvem cálculos de volumes.

Convém salientar que o GeoGebra será utilizado também como ferramenta que auxilie na transposição didática de um conhecimento do contexto científico para o escolar, pois de acordo com Chevallard (1991), o professor exerce a função de mediação entre o saber acadêmico e o contexto escolar, ao planejar a maneira que um saber específico (saber ensinar) deve ser apresentado, de modo que possa contribuir para melhor assimilação e fixação dos conceitos acadêmicos, transformando o saber ensinar em saber ensinado e podendo, assim, alcançar as expectativas institucionais sobre o saber aprendido. Portanto, tendo por embasamento os pressupostos de Chevallard (1991), utilizar-se-á o *software* GeoGebra para apoiar a visualização da Geometria Espacial. A duração de cada sessão didática foi de aproximadamente 120 minutos.

6.2 Concepção e descrição das situações didáticas

Nesta seção, apresentam-se onze situações didáticas do ENEM com ênfase no conteúdo de Volumes. Tais situações foram propostas com o propósito de estimular os participantes a apropriarem-se de novos saberes matemáticos, a partir de seus conhecimentos prévios, pois de acordo com Brousseau (2008, p. 34), “o aluno aprende adaptando-se a um meio que é fator de contradições, dificuldades, desequilíbrios. Esse saber, fruto de sua adaptação, manifesta-se por intermédio de novas respostas, que são a marca da aprendizagem”.

É nessa etapa que o pesquisador deve elaborar, produzir e analisar uma sequência de situações problemas, que almeje responder às questões aplicadas, e validar os prognósticos determinados na etapa anterior. Assim, embasados nos estudos realizados na etapa anterior, análises preliminares, optou-se por selecionar e/ou adaptar problemas originados de edições anteriores das provas do ENEM que abordassem o conteúdo de Volume e que apresentassem características, como as descritas por Brousseau (2008):

Tais problemas, escolhidos de modo que estudante os possa aceitar, devem fazer, pela própria dinâmica, com que o aluno atue, fale, reflita e evolua. Do momento em que o aluno aceita o problema como seu até aquele em que se produz a resposta, o professor se recusa a intervir como fornecedor dos conhecimentos que quer ver surgir. O aluno sabe que o problema foi escolhido para fazer com que ele adquira um conhecimento novo, mas precisa saber, também, que esse conhecimento é inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que pode prescindir das razões didáticas para construí-lo. Não só pode como deve, pois não terá adquirido, de fato, esse saber até que o consiga usar fora do contexto de ensino e sem nenhuma indicação intencional (BROUSSEAU, 2008, p. 35).

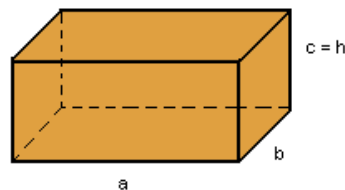
Com o intuito de ampliar o campo de visão espacial no momento das formulações das estratégias de resolução dos problemas, propôs-se a utilização do *software* GeoGebra aos participantes, pois esse recurso permite realizar simulações que aproximam a transposição do saber científico para o contexto escolar, promovendo uma maior assimilação dos conceitos matemáticos implícitos nas situações didáticas propostas.

Desse modo, apresenta-se, as situações didáticas, na qual se descrevem as fases da TSD de ação, formulação, validação e institucionalização que proporcionam uma dialética entre o professor/pesquisador e o grupo de participantes, manifestando habilidades matemáticas dos futuros professores envolvidos nos problemas investigados. Ressalta-se que essa descrição é de grande relevância, pois nela trazem-se pressupostos dos possíveis comportamentos dos participantes no momento da ação dispensada para resolverem cada situação.

6.2.1 Situação Didática 1

Problema do ENEM 2014 – Adaptada - Caderno Azul – Questão 156

O condomínio de um edifício permite que cada proprietário de apartamento construa um armário em sua vaga de garagem. O projeto da garagem, na escala 1:100, foi disponibilizado aos interessados já com as especificações das dimensões do armário, que deveria ter o formato de um paralelepípedo retângulo reto, com dimensões, no projeto, igual a 3 cm, 1 cm e 2 cm.



Qual será o volume real do armário, em centímetros cúbicos?

O objetivo dessa situação é levar o aprendiz a fazer uso do raciocínio intuitivo para estimular a abstração relacionada a noção de escala, na tentativa de solucionar o problema proposto. Para tanto, são necessários conhecimentos prévios do conceito de volume de um paralelepípedo ou a noção intuitiva de volume de um bloco retangular, como também da razão entre duas grandezas e sistema de unidades de medidas.

Acredita-se que os participantes tenham conhecimento desses conteúdos matemáticos. Sendo assim, a intenção é analisar as ações destinadas a formular as estratégias de resolução para determinar a resposta do problema proposto, além de verificar como eles se comportam

mediante as situações didáticas aplicadas, haja vista eles não terem vivências referentes a esse tipo de situação.

Apresenta-se, a seguir, a solução do problema, a partir dos pressupostos das ações relacionadas às formulações das estratégias de resolução e dos conhecimentos referentes ao assunto matemático abordado na questão. Caso haja necessidade, pode-se usar o recurso tecnológico do *software* GeoGebra, para melhor visualização e compreensão da questão, como também para validar a resolução encontrada.

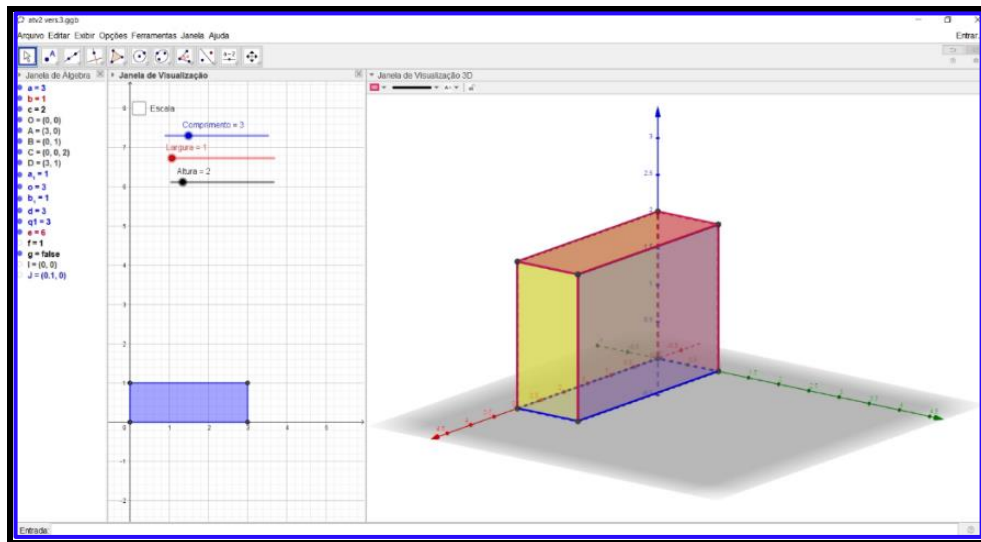
As quatro fases da TSD (ação, formulação, validação e institucionalização) foram usadas para estruturar as situações problemas e acompanhar o processo de aquisição de um novo conhecimento. Entende-se que essas quatro fases da solução podem acontecer simultaneamente, separadamente ou até mesmo deixar de acontecer durante a tentativa de solucionar a questão, haja vista que nem toda situação didática propicia a identificação das quatro dialéticas da TSD. No entanto, para esse problema, achou-se por bem prever ações para todas elas, como segue:

Dialética da Ação: Nessa fase, espera-se que os futuros professores, ao confrontarem-se com os dados do problema, percebam aspectos numéricos e geométricos presentes no enunciado da questão, assim como as relações das dimensões do armário especificadas no problema com a noção de escala, já que o enunciado faz um comparativo entre seu tamanho real e o tamanho virtual.

Inicialmente, anseia-se que eles percebam como a escala interfere em cada comprimento do paralelepípedo, associando a escala da garagem às medidas do paralelepípedo e, assim, verificando que a altura, o comprimento e a largura do retângulo estão relacionados, visto que, à medida que um dos lados aumenta ou diminui, o formato do paralelepípedo se modifica e, conseqüentemente, seu volume sofre alteração.

Assim, nessa fase, a professora (pesquisadora) deve estimular o debate científico entre os estudantes, enfatizando que, por meio da exploração das simulações realizadas com a manipulação da construção obtida com o *software* GeoGebra, seja possível perceber a existência de relações entre elementos matemáticos que podem ser visualizadas na Figura 14.

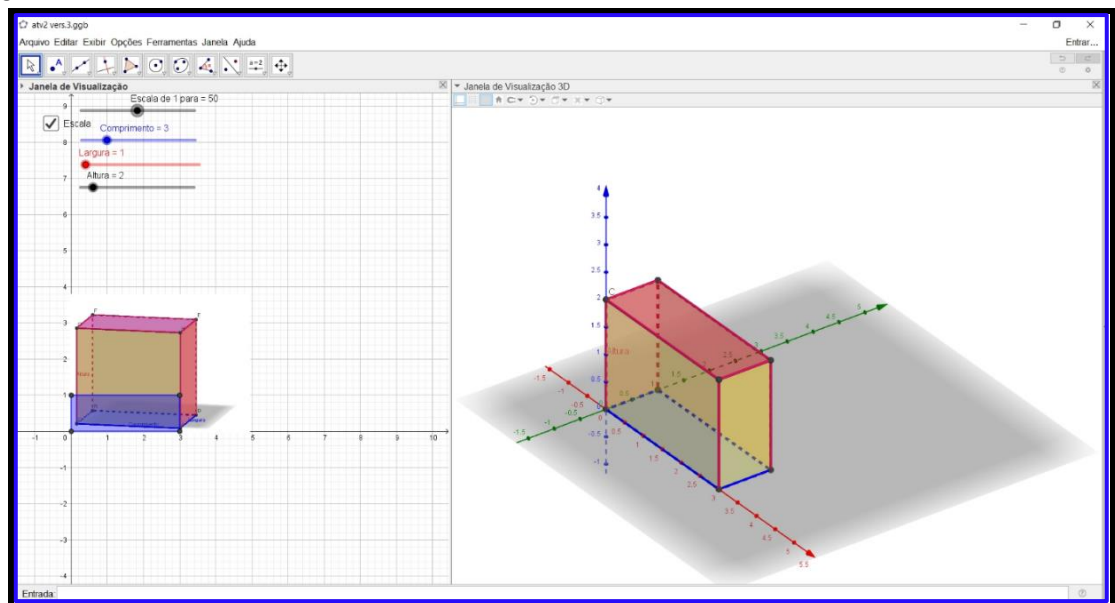
Figura 14 - Visualização 2D/3D construída pelo *software* GeoGebra correspondente a Questão 1



Fonte: Construção da autora.

No cenário computacional, os futuros professores se põem diante de uma gama de possibilidades que lhes propiciarão a oportunidade de explorar e desenvolver construções através do *software* GeoGebra. Na Figura 15, observando os movimentos, espera-se que os licenciandos recordem e verifiquem os padrões numéricos e geométricos, de maneira dinâmica e atrativa, utilizando a visualização proporcionada pelo GeoGebra.

Figura 15 - Visualização 2D/3D proporcionada pelo GeoGebra correspondente a Questão 1



Fonte: Construção da autora.

Dialética da Formulação: É o momento da troca de informações entre os envolvidos, que pode ser oral ou escrita. A partir das simulações realizadas com as figuras acima, o pesquisador deve sugerir que os participantes registrem suas observações. Nessa fase, espera-se que os futuros professores estabeleçam a existência de padrões entre as medidas das arestas

e a capacidade de armazenamento do recipiente para formular um modelo matemático que permita solucionar o problema de forma ágil e eficaz.

Ademais, almeja-se que, por meio da construção no GeoGebra, os futuros docentes possam explorar o comprimento, largura ou altura, variando os controles deslizantes a , b e c ; assim eles podem observar as modificações no formato do paralelepípedo, estabelecendo relações entre essas grandezas e percebendo que ao se multiplicar tais medidas, obtém-se a resolução da capacidade de massa de qualquer bloco retangular. Acredita-se que a visualização da construção no *software* poderá despertar as habilidades epistêmicas e pragmáticas dos licenciandos e promover a compreensão necessária para solucionar o problema.

No entanto, o participante não pode se furtar de relacionar a grandeza escala para poder solucionar a questão 1, este, talvez, constitua-se uma dificuldade para obter-se uma resposta adequada ao enunciado da questão. De posse desses conhecimentos prévios que permitem determinar o volume do prisma e sua fórmula geral, pode-se então desenvolver um estudo que possibilite explorar e verificar os valores numéricos que exibe-se na Tabela 1, discriminada abaixo.

Tabela 1 - Relações de Medidas de comprimento a partir das construções com o *software* GeoGebra

Virtual (cm)	Realidade (cm)
1	100
2	200
3	300

Fonte: Construção da autora.

Nesse momento, o pesquisador deve estimular os participantes a realizarem atividades com o intuito de encontrar uma fórmula que possibilite a indução dos valores numéricos encontrados na Tabela 1. Desse modo, espera-se que eles encontrem a seguinte fórmula numérica $V = comprimento \times largura \times altura$ ou simbolicamente traduzida para $V = a.b.c$.

Dessa maneira, sabendo que, ao multiplicar as medidas das arestas a , b e c , o futuro professor pode estabelecer uma solução, como segue:

$$\text{Volume} = a.b.c \quad (1)$$

$$V = 300.100.200 \quad (2)$$

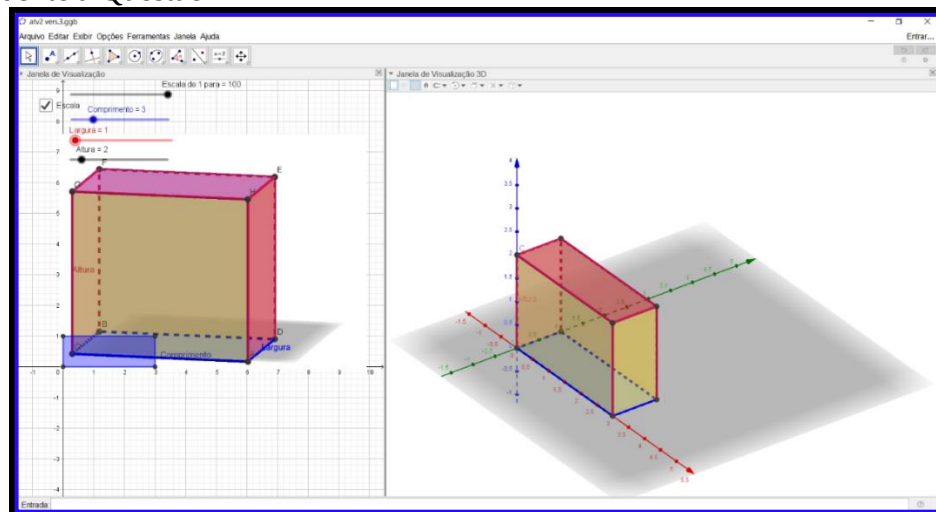
$$V = 6\,000\,000\,\text{cm}^3. \quad (3)$$

Então o volume real do armário é $6\,000\,000\text{cm}^3$.

Portanto, os participantes devem buscar estratégias mais convenientes, relacionando a representação geométrica ao crescimento linear de suas arestas, propriedades que são visualizadas com o *software* GeoGebra, de forma dinâmica, por meio da manipulação do controle deslizante escala.

Dialética da Validação: Nessa fase, é necessário provar o que foi aferido na etapa anterior; sendo assim, os licenciandos poderão comprovar suas estratégias de resolução por meio da comparação oferecida pelo ambiente tecnológico do GeoGebra. Por exemplo, na janela do lado esquerdo, manipulando o controle escala para 100, é possível verificar a comparação do tamanho real e virtual do armário. As estratégias adotadas na interação e manipulação da construção geométrica podem ser observadas nas Figuras 15 e 16.

Figura 16 - Visualização 2D/3D proporcionada pelo *software* GeoGebra correspondente a Questão 1



Fonte: Construção da autora.

Após a demonstração da forma geométrica, os participantes poderão apresentar o modelo matemático por eles instituídos e validar as conjecturas empregadas para solucionar o problema com todos os envolvidos. Espera-se ainda que, durante a dialética da validação os futuros docentes, realizem demonstrações do cálculo de volumes, modelizadas no *software* GeoGebra.

Dialética da Institucionalização: Nesse momento, sob o controle do pesquisador, faz-se um levantamento das estratégias de resoluções exibidas pelos participantes, incorporando o conceito de volume vivenciados através das quatro fases dialéticas discutidas e da construção dos conhecimentos utilizados para resolução do problema proposto.

Ressalta-se que a utilização de um recurso tecnológico contribui para promover um maior diálogo entre os envolvidos como também uma maior aproximação do raciocínio matemático manifestados pelos docentes em formação para elaboração e validação do problema proposto. Por fim, as conjecturas serão ordenadas e organizadas por meio do seguinte teorema⁴:

Teorema 1. O volume de um paralelepípedo é o produto da área da base pela altura.

$$V = A_b \cdot h$$

6.2.2 Situação Didática 2

Problema do ENEM 2012 – Caderno Azul – Questão 180

A cerâmica possui a propriedade de contração, que consiste na evaporação da água existente em um conjunto ou bloco cerâmico submetido a uma determinada temperatura elevada: em seu lugar aparecendo “espaços vazios” que tendem a se aproximar. No lugar antes ocupado pela água vão ficando lacunas e, conseqüentemente, o conjunto tende a retirar-se. Considere que no processo de cozimento a cerâmica de argila sofra uma contração, em dimensões lineares, de 20%.

Disponível em: www.arq.ufsc.br. Acesso em: 30 mar. 2012 (adaptado).

Levando em consideração o processo de cozimento e a contração sofrida, o volume V de uma travessa de argila, de forma cúbica de aresta a , diminui para um valor que é:

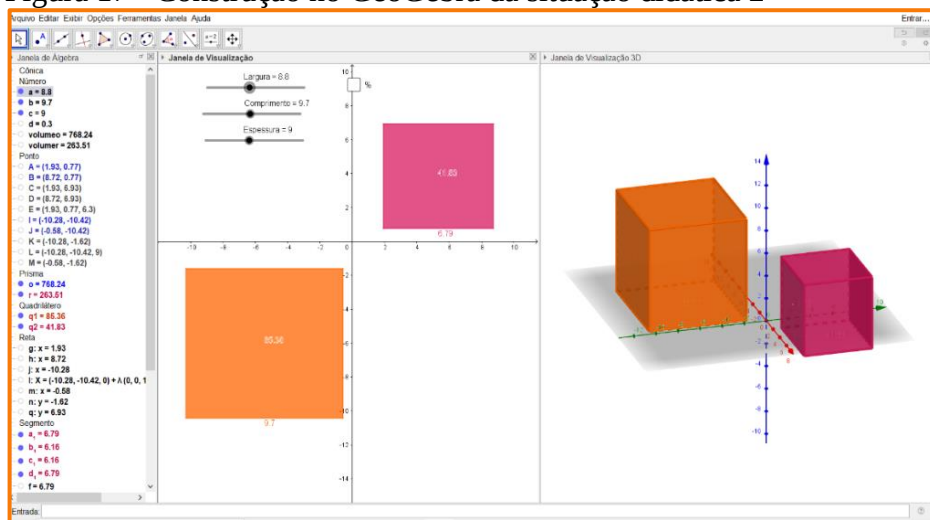
- (A) 20% menor que V , uma vez que o volume do cubo é diretamente proporcional ao comprimento de seu lado.
- (B) 36% menor que V , porque a área da base diminui de a^2 para $((1 - 0,2)a^2)$.
- (C) 48,8% menor que V , porque o volume diminui de a^3 para $(0,8a)^3$.
- (D) 51,2% menor que V , porque cada lado diminui para 80% do comprimento original.
- (E) 60% menor que V , porque cada lado diminui 20%.

O objetivo dessa situação é mobilizar os conhecimentos epistêmicos e pragmáticos dos futuros professores para estabelecer a existência de um padrão que relacione as dimensões das arestas de um cubo e as propriedades de contração de um bloco, após o cozimento. Para esse problema, são exigidos conhecimentos prévios sobre expressões algébricas, potências, elementos e propriedades de um sólido geométrico, áreas de um polígono e diferenciar um cubo de um paralelepípedo.

⁴ Esse teorema foi retirado de Lima (1991, p. 72).

Dialética da Ação: Nessa etapa, os futuros docentes realizam a leitura do problema na tentativa de descobrir aspectos numéricos e geométricos implícitos no enunciado do problema. Os participantes devem ser incentivados pelo pesquisador a explorarem todas as possibilidades na busca da resolução da questão, de maneira que eles possam fazer uso do *software* GeoGebra para diferenciar as propriedades numéricas e geométricas que conduzirão os futuros professores a investigar o cálculo de volume. Espera-se que a utilização desse recurso tecnológico possa ampliar as estratégias de resolução dos participantes. Veja na Figura 17, essa construção.

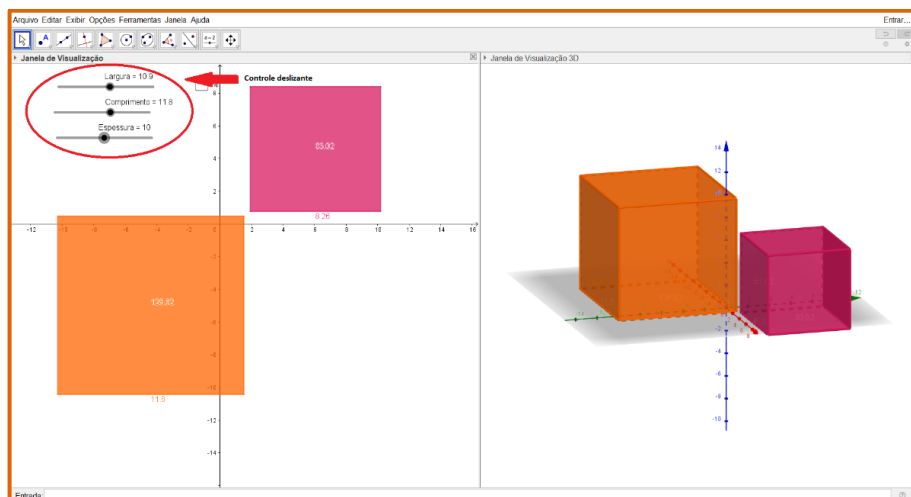
Figura 17 - Construção no GeoGebra da situação didática 2



Fonte: Construção da autora.

A partir da movimentação da ferramenta “controles deslizantes” (Figura 18), que nessa questão foram nomeados de “Largura, Comprimento e Espessura”, os participantes poderão observar as alterações nas medidas das arestas, modificando o tamanho dos objetos e, consequentemente, aumentando ou diminuindo o volume dos cubos.

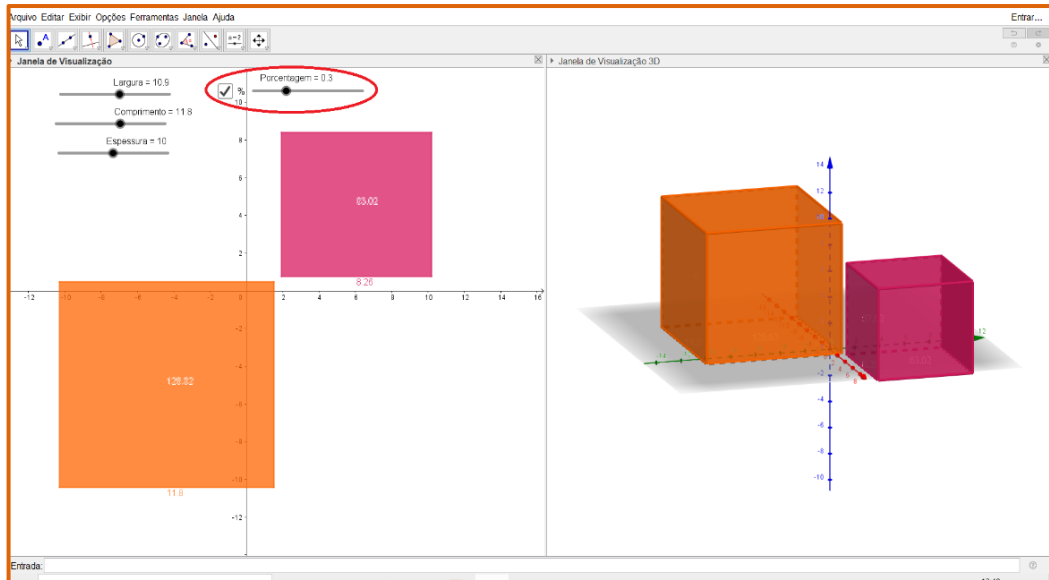
Figura 18 - Movimentação dos controles deslizantes no GeoGebra da situação didática 2



Fonte: Construção da autora.

Ao acessar o botão Caixa para exibir/Esconder Objetos (Figura 19), pode-se movimentar o controle deslizante que modifica as arestas do cubo rosa, possibilitando simular a redução da porcentagem da cerâmica, após o cozimento.

Figura 19 - Modelização da redução da porcentagem da situação didática 2 no GeoGebra



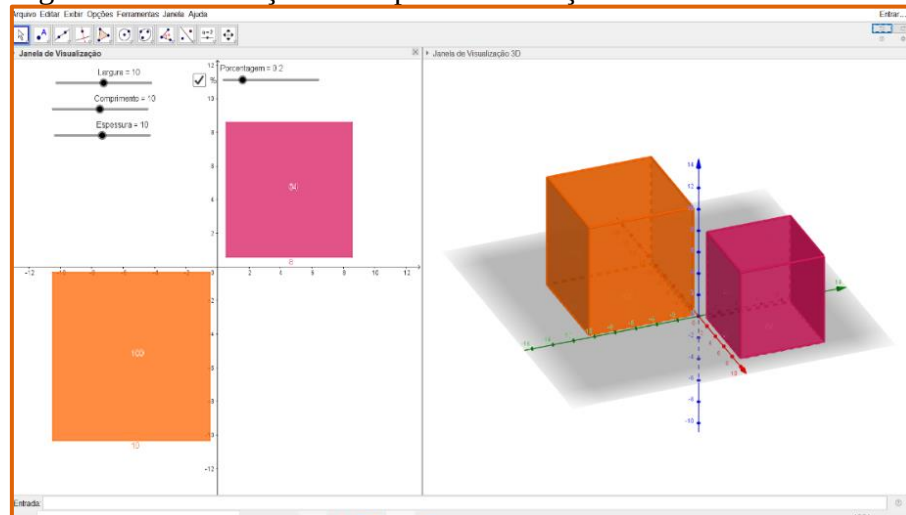
Fonte: Dados da pesquisa.

Espera-se, com isso, que os futuros professores possam perceber, por meio da manipulação da construção no GeoGebra, que para chegar-se à solução do problema, deve haver uma redução das dimensões lineares do cubo, ou seja, as arestas irão diminuir, e não o volume.

Dialética da Formulação: Nessa fase, os futuros professores irão trocar informações entre eles, na tentativa de estabelecer estratégias de resolução, podendo ser escrita ou oral, sobre a questão, de modo a estabelecer um modelo matemático de resolução.

Durante essas trocas de ideias, os participantes devem ser incentivados a usarem o *software*, assim a pesquisadora pode instigá-los, fazendo questionamento sobre a exploração da construção no GeoGebra (Figura 20), despertando a curiosidade, de modo a estimular a criação de uma estratégia de solução que satisfaça o enunciado do problema. Desse modo, ao manipular o controle deslizante da porcentagem, o futuro professor pode perceber que sua variação corresponde ao volume do sólido e que, portanto, para chegar à solução da situação ele deverá reduzir 20% da aresta original, ou seja, 0,2 de “ a ”, determinando a nova medida da aresta em 0,8a e, assim, calcular o volume, equacionando o problema em $V = a^3$.

Figura 20 - Construção corresponde a situação didática 2 no GeoGebra



Fonte: Construção da autora.

Dialética da Validação: Nesse momento, almeja-se que os futuros professores apresentem suas estratégias de resolução, de maneira a comprovar a veracidade do modelo por eles criado na fase anterior, fazendo uma exposição a todos os presentes, para que o resultado apresentado seja validado. Sendo assim, espera-se que eles concluam o resultado do seguinte modo:

De acordo com o enunciado da situação didática 2, após o cozimento, a cerâmica sofre uma contração de suas dimensões lineares em 20%, então o volume inicial do recipiente cúbico será reduzido, podendo-se, assim, aplicar o modelo encontrado na fase anterior, do seguinte modo:

$$V = a^3 \quad (4)$$

$$V = (0,8)^3 \quad (5)$$

$$V = 0,512a^3 \quad (6)$$

Ainda de acordo com o enunciado, nesse momento, o participante deve perceber a necessidade de fazer a diferença entre o volume inicial e o volume final, além de relacionar a solução com a porcentagem; portanto, após a contração, o cubo sofrerá uma redução em seu volume de:

$$V_{\text{inicial}} - V_{\text{final}} = 1 - 0,512 = 0,488 \times 100 = 48,8\%. \quad (7)$$

Assim, após o cozimento, o cubo sofre uma redução em seu volume de 48,8%.

Pode ocorrer que algum dos participantes apresente um modelo diferente de resolução, como também seja possível que ele não compreenda o enunciado do problema e não consiga determinar uma solução correta ou, simplesmente, que apareça apenas uma solução por meio da exploração do *software* GeoGebra.

Dialética da Institucionalização: Nessa fase, a pesquisadora retoma o controle das ações e procede à formalização dos conceitos matemáticos, a partir das estratégias de resolução dos participantes, esclarecendo alguma dúvida e institucionalizando um novo conhecimento. Nessa etapa, a investigadora pode utilizar a construção no GeoGebra, para confrontar o modelo matemático com o modelo tecnológico do computador para validar a solução apresentada. Por fim, ordenará e organizará as resoluções por meio da seguinte definição⁵:

Dado um bloco retangular B , cujas arestas têm medidas a , b e c , seu volume é dado pela fórmula $vol(B) = abc$.

No caso do cubo, o procedimento usado pode ser o mesmo, haja vista, o cubo se constituir um caso particular de bloco retangular em que as arestas têm medidas iguais, chegando assim ao seguinte resultado: se a aresta de um cubo C tem para medida um número racional a , então o volume de C será igual a a^3 .

6.2.3 Situação Didática 3

Problema do ENEM 2017 – Caderno Azul – Questão 142

Um casal realiza sua mudança de domicílio e necessita colocar numa caixa de papelão um objeto cúbico, de 80 cm de aresta, que não pode ser desmontado. Eles têm à disposição cinco caixas, com diferentes dimensões, conforme descrito:

- Caixa 1: 86 cm x 86 cm x 86 cm
- Caixa 2: 75 cm x 82 cm x 90 cm
- Caixa 3: 85 cm x 82 cm x 90 cm
- Caixa 4: 82 cm x 95 cm x 82 cm
- Caixa 5: 80 cm x 95 cm x 85 cm

O casal precisa escolher uma caixa na qual o objeto caiba de modo que sobre o menor espaço livre em seu interior. A caixa escolhida pelo casal deve ser a de número

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.
- (E) 5.

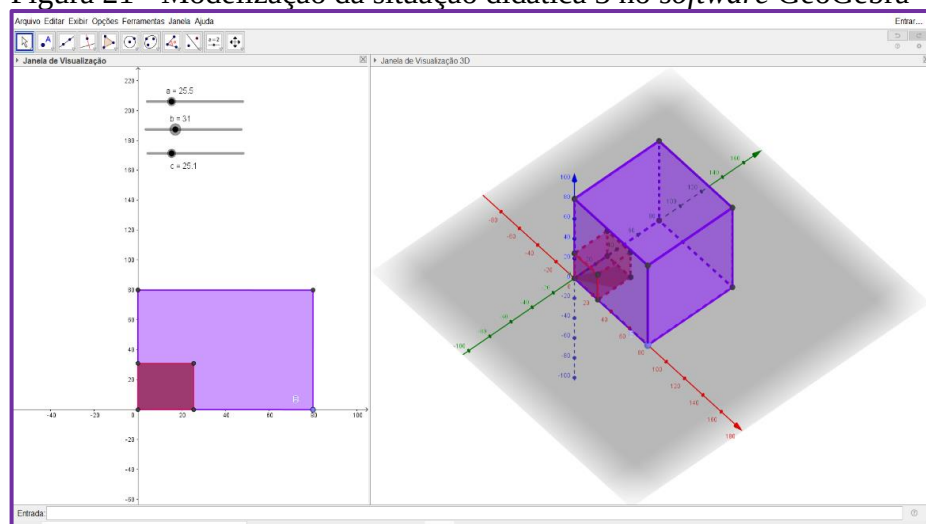
⁵ Essa definição foi retirada de Lima (1991, p. 62-64).

O objetivo dessa situação é mobilizar os conhecimentos epistêmicos e pragmáticos do futuro docente a respeito da noção de capacidade, ou seja, de quanto um objeto cabe em outro para encontrar um padrão que permita identificar qual caixa será melhor para armazenar o objeto, de modo que não sofra danos durante o transporte. A situação necessita de conhecimentos prévios de multiplicação, noção intuitiva de volume de um bloco retangular e noção de capacidade.

Dialética da Ação: Nesse momento os participantes realizam a leitura do problema, mobilizam os conhecimentos prévios sobre o assunto, extraem as informações do enunciado do problema e tomam as decisões iniciais para resolver a situação. Assim, espera-se que os futuros docentes percebam que através das dimensões das caixas disponíveis no enunciado do problema, pode-se visualizar todas as sequências possíveis de resolução da questão.

É possível que nesse momento algum participante já queira realizar um rascunho, formulando uma resolução algébrica no caderno. No entanto, será disponibilizado uma construção dessa situação no *software* GeoGebra, para que eles possam explorar, de forma dinâmica, a capacidade de armazenamento de cada caixa, possibilitando uma maior compreensão do problema. Veja, na Figura 21, essa sequência de armazenamento construída no GeoGebra.

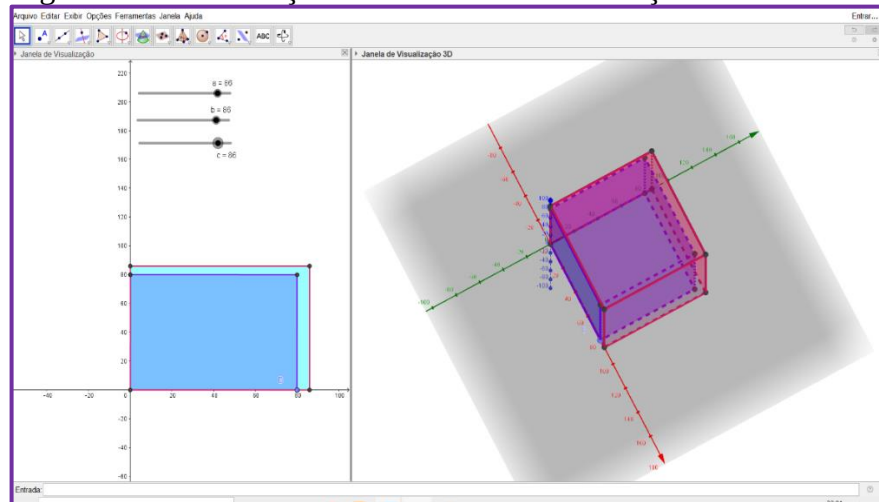
Figura 21 - Modelização da situação didática 3 no *software* GeoGebra



Fonte: Construção da autora.

O futuro professor tem a opção de movimentar o bloco, utilizando os controles deslizantes, aqui nomeados de “a, b, c”, e observar as alterações das caixas, como por exemplo, para $a = 86$, $b = 86$ e $c = 86$, exibido na Figura 22.

Figura 22 - Modelização das dimensões de resolução da caixa 1



Fonte: Construção da autora.

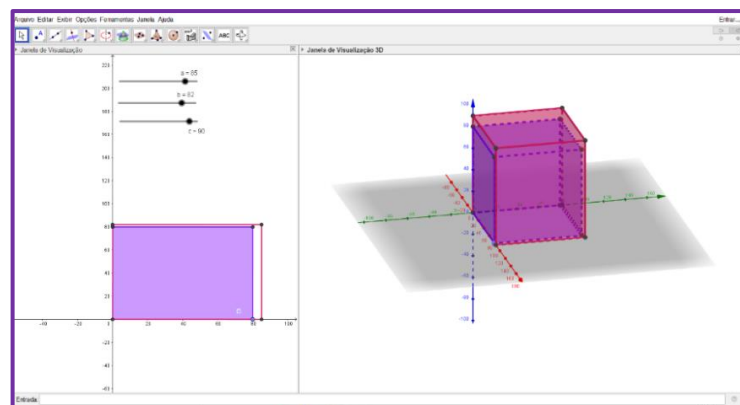
Assim, espera-se que, por meio da manipulação da construção no *software* GeoGebra, os licenciandos possam perceber a sequência de espaço que o objeto ocupará nas caixas, através das simulações das dimensões de cada uma delas no recurso computacional do GeoGebra.

Dialética da Formulação: Esse é o momento em que os futuros docentes trocam ideias e informações para tentar formular uma estratégia de resolução para o problema. Aqui, espera-se que eles possam discutir e identificar elementos e propriedades que possibilitem a criação de um modelo matemático que solucione a questão proposta de forma ágil e eficaz.

Ainda utilizando a construção no GeoGebra, os participantes podem explorar todas as sequências forjadas pela variação dos controles deslizantes, realizando simulações de cada medida disponibilizada no enunciado da questão; assim, eles podem observar aquela que ocupará o menor espaço e que, portanto, será a resposta procurada.

Na Figura 23, é apresentada a simulação que traz informações de uma possível resolução, que é o que se deseja que os futuros professores percebam.

Figura 23 - Simulação de uma possível resolução para a situação didática 3 no GeoGebra.



Fonte: Construção da autora.

Desse modo, espera-se que, ao observarem a simulação, eles possam criar seu próprio modelo matemático para essa situação e assim determinar o modelo de caixa mais adequado para armazenar o objeto que será transportado. Então, os futuros professores poderão formular estratégia algébrica ao realizar a multiplicação das três dimensões da caixa, conhecida como cálculo do volume de um bloco retangular, sendo dada pela expressão:

$$V = a.b.c \quad (8)$$

Resolvendo essa expressão, encontra-se a seguinte solução:

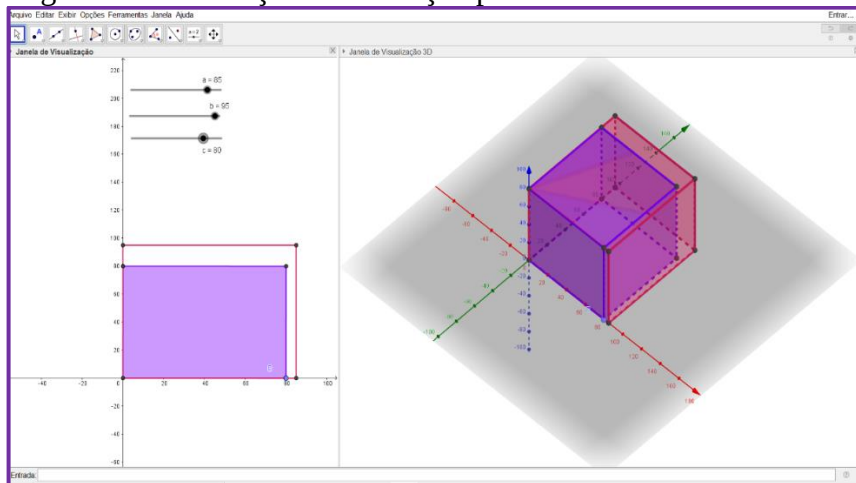
$$V = 85.82.90 \quad (9)$$

$$V = 627\,300 \text{ cm}^3 \quad (10)$$

Logo, o volume encontrado corresponde a caixa 3, sendo ela portanto, aquela que vai sobrar menos espaço, pois tem o menor volume.

Dialética da Validação: Nessa etapa, os participantes podem confrontar os dados obtidos nas fases anteriores com a construção no *software* GeoGebra para validar suas estratégias de resolução, procedendo à simulação com todas as opções de caixa presentes, no enunciado da questão. Veja, na Figura 24, uma simulação para a caixa 5:

Figura 24 - Simulação de resolução para caixa 5 no GeoGebra



Fonte: Construção da autora.

Assim, pode-se verificar claramente que a caixa 5 não atende as especificações exigidas para solucionar a questão. Então, esse modelo de resolução com o GeoGebra pode ser utilizado pelo futuro professor para apresentar suas estratégias de resolução a todos os participantes e demonstrar a confrontação do modelo algébrico com o modelo tecnológico proporcionado pelo GeoGebra.

Dialética da Institucionalização: Nesse momento, a pesquisadora reassume o controle da situação, faz um levantamento de todas as estratégias de resolução apresentadas

pelos futuros professores, ordenando e organizando essas produções, por meio da mesma definição⁶ utilizada na situação anterior:

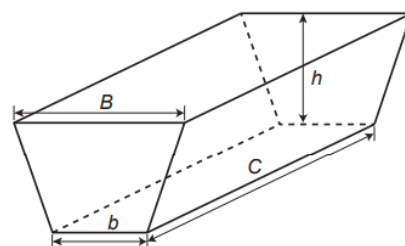
Dado um bloco retangular B , cujas arestas têm medidas a , b e c , seu volume é dado pela fórmula $\text{vol}(B) = abc$.

No caso do cubo, o procedimento usado pode ser o mesmo, haja vista, o cubo se constituir um caso particular de bloco retangular em que as arestas têm medidas iguais, chegando assim ao seguinte resultado: se a aresta de um cubo C tem para medida um número racional a , então o volume de C será igual a a^3 .

6.2.4 Situação Didática 4

Problema do ENEM 2014 – Caderno Azul – Questão 142

Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, colocá-la no solo, compactá-la e protegê-la com uma nova vedação denomina-se silagem. Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma reto trapezoidal, conforme mostrado na figura.



Legenda:

b - largura do fundo
 B - largura do topo
 C - comprimento do silo
 h - altura do silo

Considere um silo de 2 m de altura, 6 m de largura de topo e 20 m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0,5 m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa 2 m³ desse tipo de silo.

EMBRAPA, Gado de corte. Disponível em: www.cnpgc.embrapa.br. Acesso em: 1 ago. 2012 (adaptado).

Após a silagem, a quantidade máxima de forragem que cabe no silo, em toneladas, é

- (A) 110.
- (B) 125.
- (C) 130.
- (D) 220.
- (E) 260.

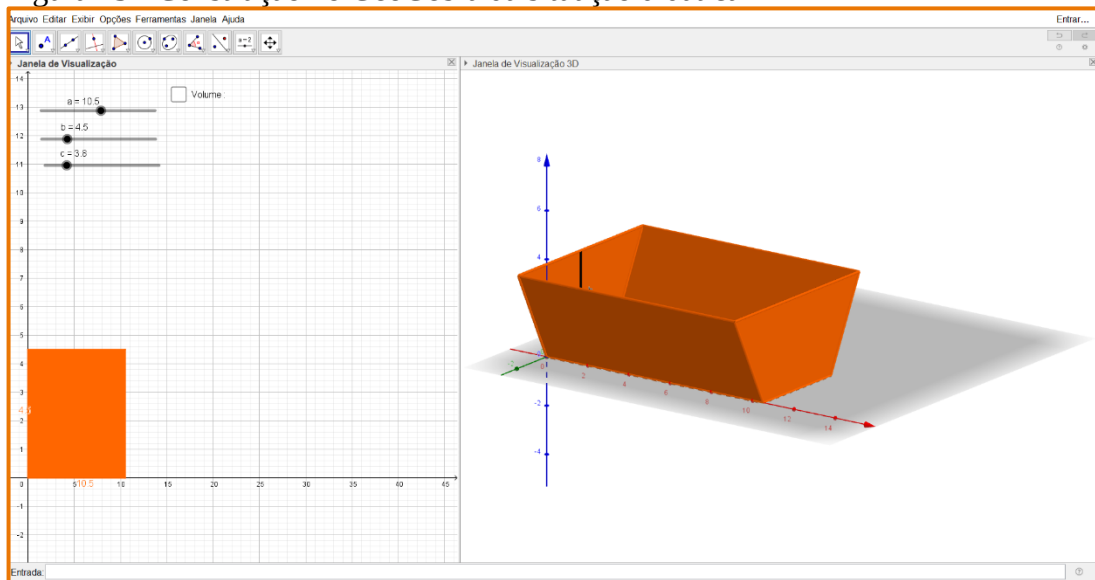
⁶ Retirada de Lima (1991, p. 62-64).

Essa questão tem como objetivo mobilizar os conhecimentos epistêmicos e pragmáticos dos futuros professores para identificar elementos e propriedades em objeto trapezoidal que possibilitem determinar sua capacidade de armazenamento, conduzindo-os, portanto, a investigarem o conceito de volume. Para tanto, são necessários conhecimentos prévios de área do trapézio, unidades de medida de massa e expressão algébrica.

Dialética da Ação: Nesse momento, os futuros professores se debruçam sobre o problema e realizam as primeiras ações, na tentativa de extrair todas as informações possíveis para estabelecer hipóteses que podem ser aplicadas para solucionar a questão. Nesse caso, espera-se que eles observem, como primeiro procedimento, a necessidade de determinar a largura do fundo do objeto.

Nessa etapa, os futuros docentes devem ser incentivados a realizarem uma simulação no GeoGebra (Figura 25), assim, ao movimentarem os controles deslizantes é possível que sejam visualizadas relações e propriedades de elementos matemáticos, necessários para estabelecer uma estratégia de resolução.

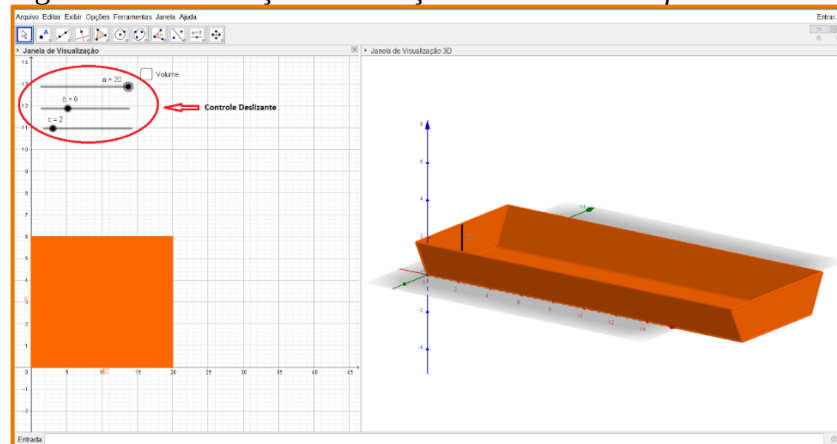
Figura 25 - Construção no GeoGebra da situação didática 4



Fonte: Construção da autora.

Ao movimentarem os controles deslizantes que aqui foram nomeados de “a, b, c” e atribuindo a eles os valores das medidas apresentadas no problema, tem-se para $a = 20$, $b = 6$ e $c = 2$, os futuros professores poderão observar modificações no comprimento, largura e altura, respectivamente, possibilitando assim a visualização dinâmica do objeto exibido no enunciado da questão, conforme se verifica na imagem da Figura 26.

Figura 26 - Construção da situação didática 4 no *software* GeoGebra



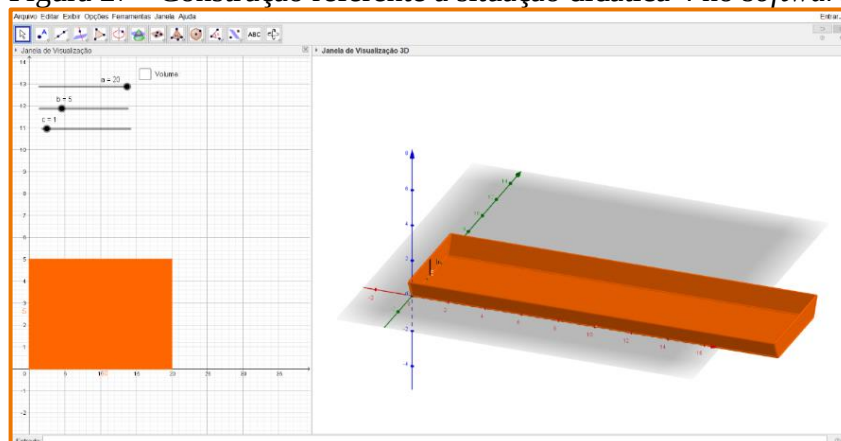
Fonte: Construção da autora.

Dialética da Formulação: Nessa etapa, os futuros professores trocam informações com o intuito de formular estratégias para resolver o problema. Nesse momento, o pesquisador pode sugerir a manipulação da construção no GeoGebra, de modo que eles possam registrar suas observações para iniciarem os pressupostos da solução.

Dessa forma, os participantes poderão realizar movimentos no objeto, possibilitando, assim, verificar algumas situações numéricas, à medida que ocorre a manipulação da altura, comprimento e largura do silo, induzindo o futuro professor a determinar a área da base do recipiente para, depois, descobrir o volume do objeto. A partir de então, eles deverão reconhecer que a diferença entre a largura do topo e a largura do fundo, associada à altura do silo, pode ser determinada ao realizar o cálculo de $2 \times 0,5 = 1$, verificando, assim, que a largura do topo tem um metro a mais que a largura do fundo.

Portanto, a utilização do *software* GeoGebra mostra-se relevante nesta etapa, pois promove a exploração visual e dinâmica do problema (Figura 27), podendo conduzir o futuro docente a perceber que área do trapézio, vezes a altura do prisma lhe possibilitará resolver o problema.

Figura 27 - Construção referente a situação didática 4 no *software* GeoGebra



Fonte: Construção da autora.

Espera-se assim, que a visualização proporcionada pela manipulação do *software* GeoGebra possibilite a percepção de elementos capazes de promover aos futuros professores, uma melhor compreensão para formular as estratégias de resolução do problema. Então, formaliza-se a seguinte expressão para a calcular o volume do silo:

$$V_{\text{silo}} = \frac{(B+b).h}{2} \cdot c \quad (11)$$

$$V_{\text{silo}} = \frac{(6+5)}{2} \cdot 20 \quad (12)$$

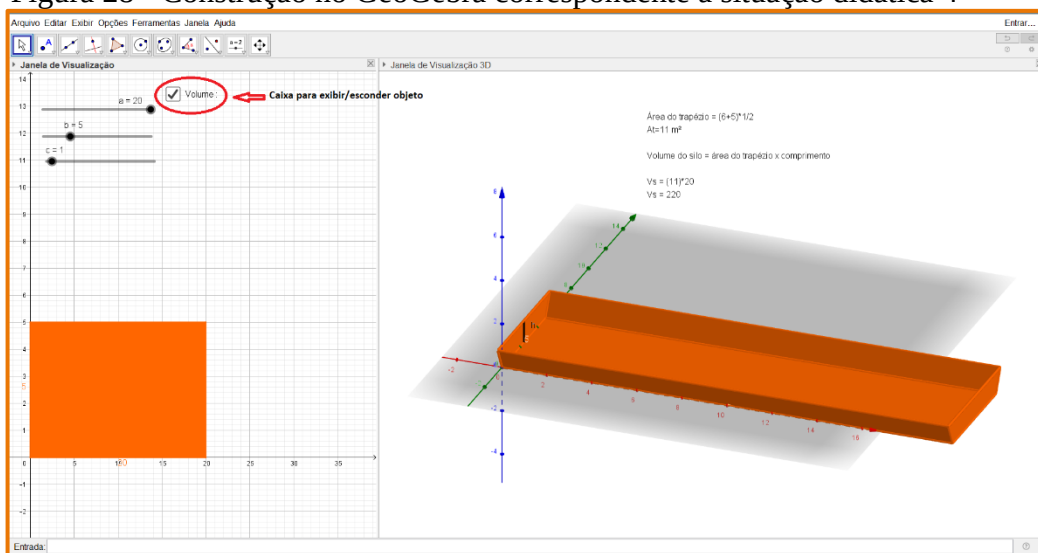
$$V_{\text{silo}} = 220 \text{ m}^3 \quad (13)$$

Assim, sabe-se que para resolver o problema é necessário transformar o metro cúbico em tonelada. De acordo com o enunciado do problema, 1 tonelada ocupa 2m^3 ; sendo assim, pode-se formalizar a resolução final por meio de uma simples divisão, tendo-se $\frac{220}{2} = 110 \text{ t}$.

Conclui-se, portanto, que caberão 110 toneladas de forragem no silo.

Dialética da Validação: Na etapa da validação, os participantes devem provar que as informações coletadas nas fases anteriores correspondem ao esperado para solucionar a questão. Ademais, os futuros professores podem utilizar a construção feita no GeoGebra para estabelecer as relações de confrontação do modelo gerado no computador com o modelo matemático de resolução. Ao acionar o botão “Caixa para exibir/Esconder Objetos” (Figura 28), exibe-se a expressão que determina o cálculo do volume do objeto, possibilitando a comprovação da resolução elaborada pelos participantes.

Figura 28 - Construção no GeoGebra correspondente a situação didática 4



Fonte: Construção da autora.

Com isso, realizadas as demonstrações no GeoGebra, os futuros professores podem apresentar suas estratégias de resolução no quadro, a todos os presentes, com o intuito de validar a resolução.

Dialética da Institucionalização: Para finalizar, na etapa da institucionalização, a pesquisadora procede à formalização da solução, com a intenção de agregar as ideias dos participantes e condensar as respostas em uma única solução. De acordo com Lima (1991), um prisma tem base poligonal e fica limitado por faces planas; sendo assim, pode-se formalizar a resolução pelo seguinte teorema⁷:

Por apresentar elementos de um prisma, o volume do silo pode ser calculado pelo Teorema 1: “O volume de um paralelepípedo é o produto da área da base pela altura”.

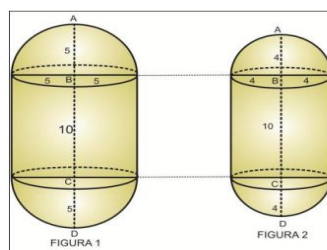
6.2.5 Situação Didática 5

Problema do ENEM 2014 – Caderno Azul – Questão 167 - Adaptada

Uma empresa farmacêutica produz medicamentos em pílulas, cada uma na forma de um cilindro com uma semiesfera com o mesmo raio do cilindro em cada uma de suas extremidades. Essas pílulas são moldadas por uma máquina programada para que os cilindros tenham sempre 10 mm de comprimento, adequando o raio de acordo com o volume desejado.

Um medicamento é produzido em pílulas com 5 mm de raio. Para facilitar a deglutição, deseja-se produzir esse medicamento diminuindo o raio para 4 mm, e, por consequência, seu volume. Isso exige a reprogramação da máquina que produz essas pílulas.

Use 3,14 como valor aproximado para π .



A redução do volume da pílula, em milímetros cúbicos, após a reprogramação da máquina, será aproximadamente

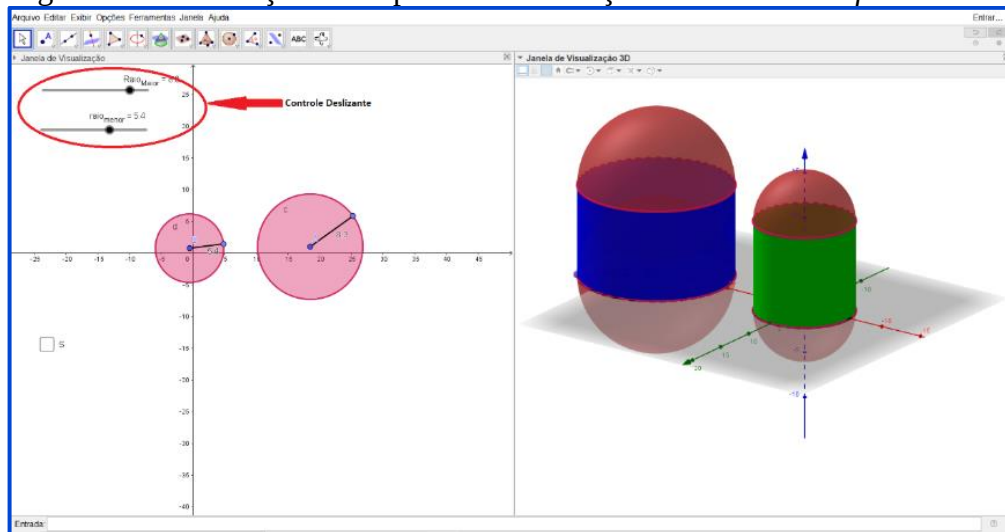
- (A) 168.
- (B) 304.
- (C) 306.
- (D) 378.
- (E) 538.

⁷ Retirado de Lima (1991, p. 72)

Essa questão tem por objetivo resolver problemas de comparação de formas geométricas, envolvendo o conceito de volume. Para o problema, são necessários os conhecimentos prévios de área de uma circunferência, volume do cilindro, volume da esfera e expressão algébrica.

Dialética da Ação: Tem-se, nessa fase, as ações iniciais dos participantes, mediante a leitura do problema, de modo a confrontar-se os dados retirados da questão e descobrir aspectos numéricos e geométricos que podem ser relacionados para estabelecer uma estratégia de resolução, ao mesmo tempo que visualizam a representação da situação no GeoGebra (Figura 29). Desse modo, os futuros professores são incentivados a movimentarem o objeto no *software*, na tentativa de identificar os elementos matemáticos que fundamentarão a resolução da situação.

Figura 29 - Construção correspondente a situação didática 5 no *software* GeoGebra



Fonte: Construção da autora.

O enunciado da questão sugere uma relação funcional entre o raio de uma circunferência, a altura de um cilindro reto e outro objeto semelhante, porém com uma medida diferente para o raio da circunferência. Portanto, ao movimentar os “controles deslizantes” “Raio_{Maior}” e “raio_{menor}” modificam-se os raios dos dois objetos, perspectivando proporcionar a identificação de propriedades numéricas e geométricas que conduzirão os futuros docentes a investigar o conceito de volume.

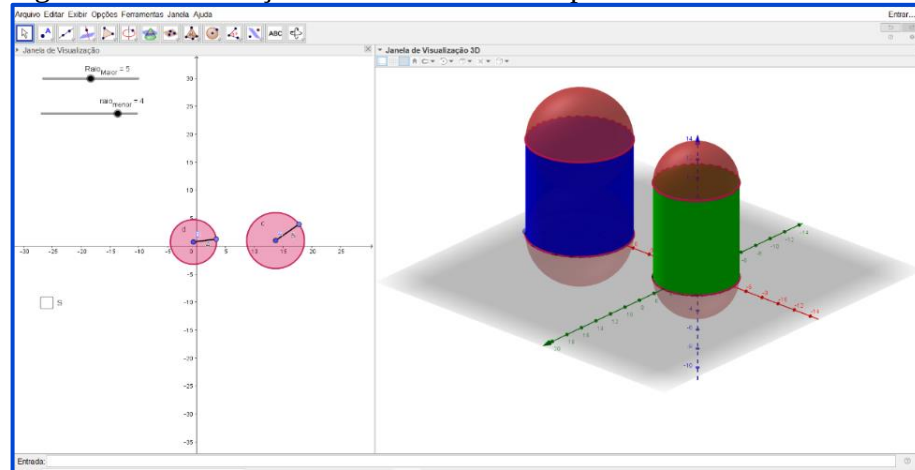
Dialética de Formulação: Nessa fase, os futuros professores irão trocar informações referentes ao problema, buscando desenvolver ideias que permitam formular estratégias que solucionem a questão, podendo ser de forma oral ou escrita.

Durante as trocas de ideias e a utilização do GeoGebra, a pesquisadora deve incentivá-los, fazendo questionamentos referente à construção no *software*, de modo a instigá-los a

explorarem a construção dinâmica no computador, na tentativa de criar um padrão de resolução.

Ao movimentarem os “controles deslizantes” $Raio_{Maior} = 5$ e $raio_{menor} = 4$ (Figura 30), visualizam-se as medidas exibidas na imagem do problema, possibilitando assim mobilizar os conhecimentos epistêmicos e pragmáticos dos futuros docentes para instituir um modelo de resolução.

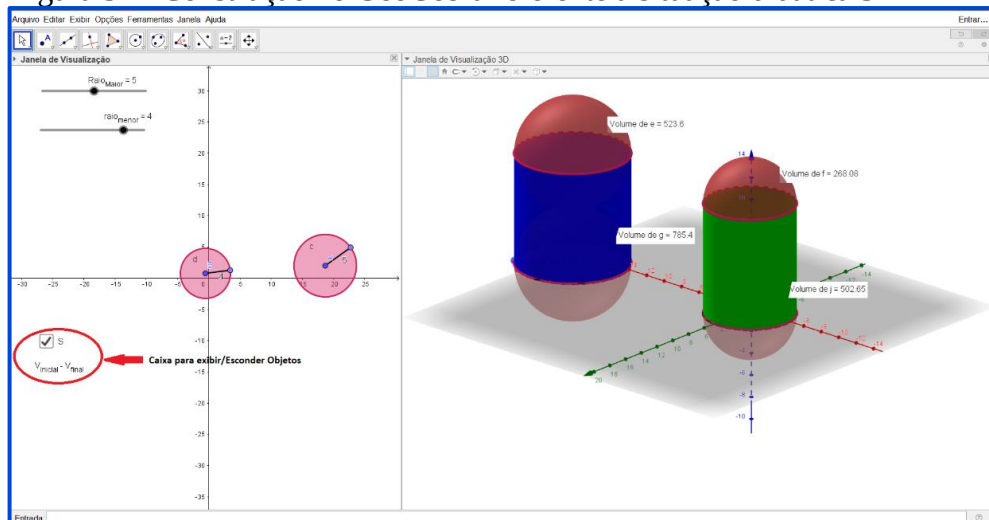
Figura 30 - Construção no GeoGebra correspondente ao enunciado da Questão 5



Fonte: Construção da autora.

Continuando a explorar a construção, os futuros professores podem ter acesso à visualização dos volumes das pílulas, ao acionar o botão “Caixa para exibir/Esconder Objetos”, aqui nomeado de “S” (Figura 31). Assim, espera-se que os futuros docentes possam perceber, a partir das informações colhidas com a manipulação do GeoGebra, que eles podem ser capazes de estabelecer uma conexão que favoreça a descoberta de um modelo que possibilite realizar o cálculo da área da base do sólido para, em seguida, calcular o volume da pílula.

Figura 31 - Construção no GeoGebra referente a situação didática 5



Fonte: Construção da autora.

Portanto, mobilizando os conhecimentos já adquiridos para desenvolver um raciocínio matemático, espera-se que os futuros professores possam perceber que o volume de cada pílula é determinado pelo somatório do volume da esfera e do volume do cilindro, formalizando a seguinte expressão:

$$V_{\text{pílula}} = \pi . r^2 . h + \frac{4}{3} . \pi . r^3 \quad (14)$$

Dessa maneira, de acordo com informações presentes no enunciado da questão, após a reprogramação da máquina, a pílula é reduzida, diminuindo o raio original de 5mm para 4mm. Assim, espera-se que os futuros professores percebam que para solucionar o problema é necessário fazer a diferença entre o volume inicial e o volume final. Então, aplicando os valores das medidas dos raios extraídos da questão, na expressão encontrada, apresenta-se a seguinte resolução.

$$V_{\text{Reduzido}} = V_{\text{inicial}} - V_{\text{final}}$$

Substituindo os valores V_{inicial} e V_{final} na equação, tem-se que:

$$V_R = (\pi . r^2 . h + \frac{4}{3} . \pi . r^3) - (\pi . r^2 . h + \frac{4}{3} . \pi . r^3) \quad (15)$$

$$V_R = (\pi . 5^2 . 10 + \frac{4}{3} . \pi . 5^3) - (\pi . 4^2 . 10 + \frac{4}{3} . \pi . 4^3) \quad (16)$$

$$V_R = (\pi . 25 . 10 + \frac{4}{3} . \pi . 125) - (\pi . 16 . 10 + \frac{4}{3} . \pi . 64) \quad (17)$$

$$V_R = (250\pi + \frac{500}{3} . \pi) - (160\pi + \frac{256}{3} . \pi) \quad (18)$$

$$V_R = (250\pi + 166,66 \pi) - (160\pi + 85,33 \pi) \quad (19)$$

$$V_R = 416,66\pi - 245,33\pi \quad (20)$$

$$V_R = 171,33\pi \quad (21)$$

$$V_R = 171,33 . 3,14 \quad (22)$$

$$V_R = 537,97 \quad (23)$$

Conclui-se, portanto, que a redução do volume da pílula deve ser aproximadamente 538mm.

Dialética da Validação: É nessa etapa que os futuros professores devem apresentar as estratégias adotadas nas etapas anteriores para resolver o problema, exibindo o modelo de resolução por eles criado a todos os presentes para validação.

Os participantes também podem usar a construção no *software* GeoGebra para validar os dados por eles instituídos no momento da formalização, confrontando o modelo algébrico de resolução com o recurso tecnológico proporcionado pela manipulação da construção no computador, sendo analisados o processo argumentativo com a linguagem matemática adequada para o assunto tratado na questão.

Dialética da Institucionalização: Nessa fase, o pesquisador retoma a mediação para formalizar as ações e os procedimentos encontrados pelos participantes nas fases anteriores, procurando valorizar as soluções por eles apresentadas, contrapondo-as com a estrutura formal da matemática. Para finalizar, procederá a institucionalização das produções exibidas por meio dos seguintes teoremas⁸:

Teorema 2. *O volume de um cilindro é igual ao produto da área da base pela altura.*

Teorema 4. *O volume de uma esfera de raio R é igual a $\frac{4}{3}\pi R^3$*

6.2.6 Situação Didática 6

Problema do ENEM 2011 – Caderno Azul – Questão 139

Uma fábrica produz barras de chocolates no formato de paralelepípedo e de cubos, com o mesmo volume. As arestas das barras de chocolate no formato de um paralelepípedo medem 3 cm de largura, 18 cm de comprimento e 4 cm de espessura.

Analisando as características das figuras geométrica descritas, a medida das arestas dos chocolates que têm o mesmo formato do cubo é igual a

- (A) 5 cm.
- (B) 6 cm.
- (C) 12 cm.
- (D) 24 cm.
- (E) 25 cm.

Essa questão tem como objetivo resolver problemas envolvendo noções de volumes e, comparar grandezas de mesma natureza. Geralmente problemas de medida inter-relacionam o uso de números com questões de espaço, de forma que possibilitam não só trabalhar os conteúdos específicos, como também explorar números racionais, tanto em fração quanto em decimal. Para o problema, são necessários conhecimentos prévios de cálculo de volume de sólidos geométricos, potenciação e equação exponencial.

Dialética da Ação: Nesta etapa, os futuros professores irão atuar sobre a situação proposta, obtendo um *feedback* sobre suas ações; desse modo, uma situação didática ideal

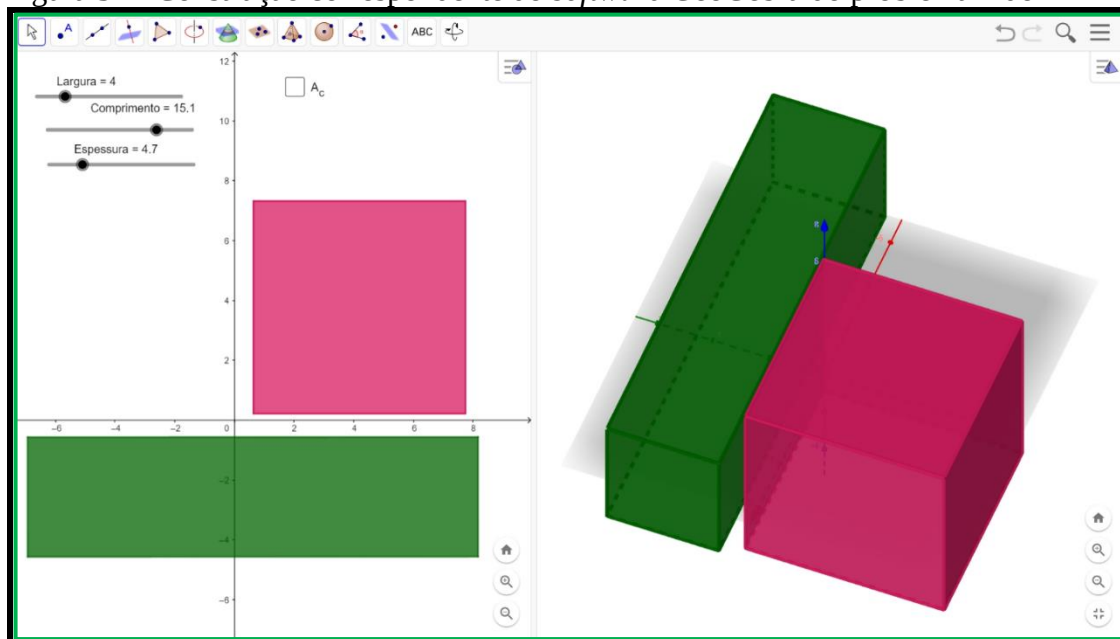
⁸ Retirado de Lima (1991, p. 74-78).

deve permitir ao aprendiz analisar o resultado de suas ações e realizar as modificações necessárias para solucionar o problema, sem a intervenção do professor (pesquisador).

Nesse momento, os licenciandos poderão perceber que a questão apresenta um comparativo entre duas grandezas de mesma natureza, pois relaciona a igualdade de volumes de sólidos geométricos de formas distintas, porém com características semelhantes.

Assim, eles poderão utilizar a construção desse problema no *software* GeoGebra, buscando uma melhor visualização dos objetos e, conseqüentemente, auxiliar o aprendiz na compreensão do enunciado do problema, estabelecendo relações que promovam a resolução da questão. Espera-se assim, que os futuros docentes utilizem o aporte tecnológico para expandir suas estratégias de resolução. Segue a construção, na Figura 32.

Figura 32 - Construção correspondente do *software* GeoGebra do problema 1 do ENEM



Fonte: Construção da autora.

Ao realizar o movimento dos “controles deslizantes” que, para essa questão, foram nomeados por “Largura, Espessura e Comprimento”, os participantes terão condições de observar alterações no tamanho dos sólidos, por meio da modificação de tais medidas.

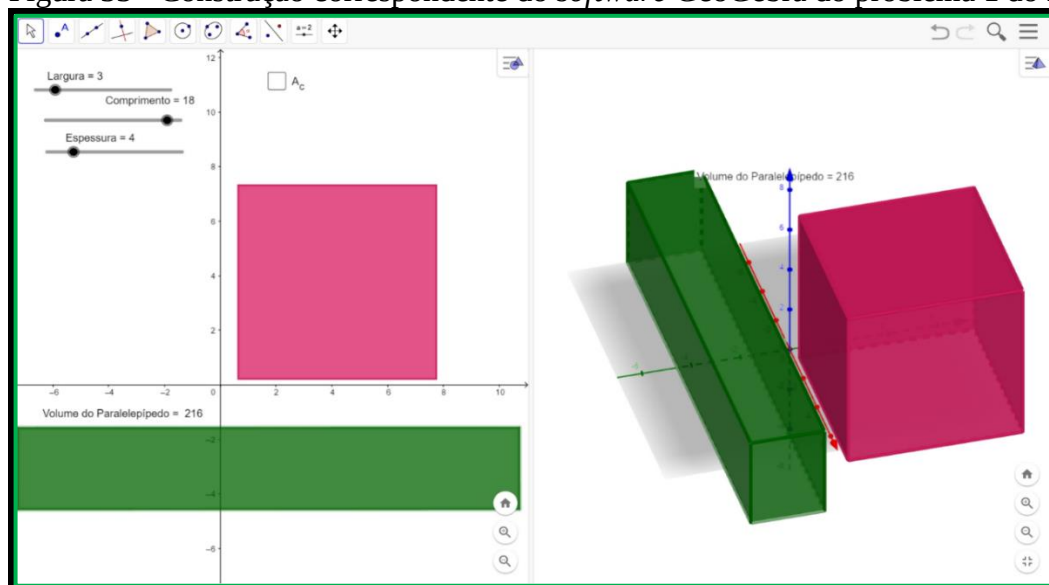
Dialética da Formulação: É nesse momento que ocorrem as trocas de informações entre os futuros professores, com a intenção de estabelecer as melhores estratégias de resolução do problema, com o intuito de determinar um modelo matemático que satisfaça a solução da questão.

A etapa da formulação permite ao futuro docente elaborar estratégias de resolução, de forma gradativa, para solucionar a situação proposta. Nesta etapa, o pesquisador deve instigar os futuros professores a analisar a representação da situação didática do ENEM, fazendo questionamentos referentes à construção no GeoGebra, incentivando seu uso de modo que sua

manipulação permita ao participante, estabelecer propriedades numéricas e geométricas, na tentativa de estabelecer uma solução.

Ao movimentar os “controles deslizantes” para, Largura = 3, Comprimento = 18 e Espessura = 4, exibe-se a medida do volume do paralelepípedo, conforme ilustração da Figura 33. Com base nessa informação, o futuro professor pode começar a estruturar uma possível solução para o problema.

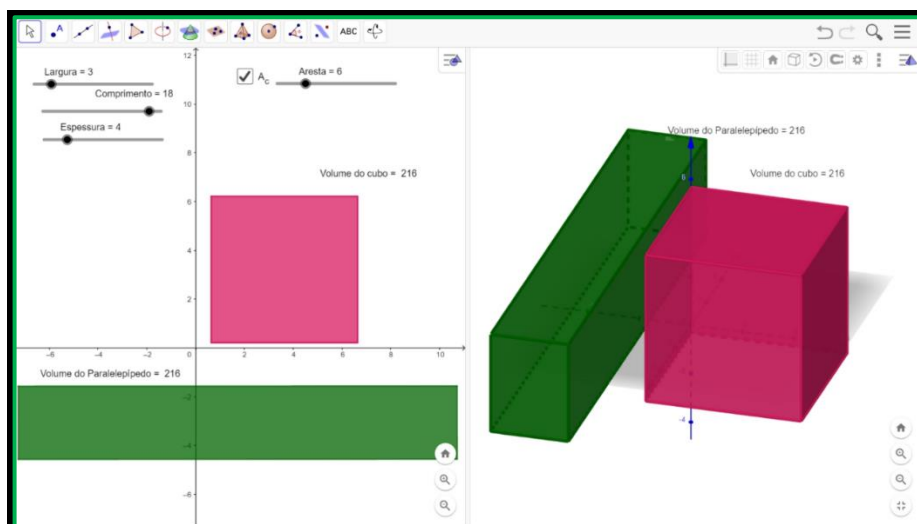
Figura 33 - Construção correspondente do *software* GeoGebra do problema 1 do ENEM



Fonte: Construção da autora.

Ademais, ao selecionar o botão A_c , exibe-se o controle deslizante que movimenta as arestas do cubo; assim, ao atingir a medida da Aresta = 6, apresentam-se os dois sólidos com volumes iguais, determinando assim a possível resolução do problema, como mostra a Figura 34.

Figura 34 - Construção correspondente do *software* GeoGebra do problema 1 do ENEM



Fonte: Construção da autora.

Dialética da Validação: Na dialética da validação, o futuro professor deve expor suas estratégias de solução, apresentando um modelo por ele criado para ser validado, além de tentar justificar a eficácia desse modelo, pois, segundo Almouloud (2007), nesse momento o futuro professor apresenta a solução por ele criada, submetendo a uma mensagem matemática, chamada de modelo de situação, para ser julgada pelos participantes.

Assim, almeja-se que o professor em formação inicial comprove a veracidade do modelo de resolução por ele elaborado na fase anterior, por meio de uma exposição na lousa, analisando se os argumentos usados se enquadram ao conteúdo da questão. Portanto, espera-se que eles apresentem a seguinte solução:

$$V_{\text{paralelepípedo}} = a.b.c \quad (24)$$

$$V_p = 3 \text{ cm}.18 \text{ cm}.4 \text{ cm}. \quad (25)$$

$$V_p = 216 \text{ cm}^3 \quad (26)$$

$$V_{\text{cubo}} = a^3 \quad (27)$$

$$V_c = V_p \quad (28)$$

$$a^3 = 216 \quad (29)$$

$$a^3 = 6^3 \quad (30)$$

$$a = 6 \text{ cm}. \quad (31)$$

Então a medida da aresta do cubo é 6 cm.

Dialética da Institucionalização: Essa etapa, tem como característica a exposição do novo conhecimento pelo professor/pesquisador, de maneira clara e precisa. De acordo com Alves (2016, p. 77), nesse momento o docente (pesquisador) “deve explicitar e indicar as principais propriedades formais que asseguram a consistência das operações e manipulações executadas nas fases anteriores”. Desse modo, a pesquisadora reassume o controle da situação e formaliza os conceitos matemáticos, a partir das formulações apresentadas pelos futuros docentes, esclarecendo as dúvidas e promovendo um novo saber. Aqui, o GeoGebra pode ser usado para confrontar o modelo gerado no computador com o modelo matemático exibido no enunciado da questão. Por fim, o modelo final poderá ser instituído pela definição seguinte⁹:

⁹ Essa definição foi retirada de Lima (1991, p. 62-64).

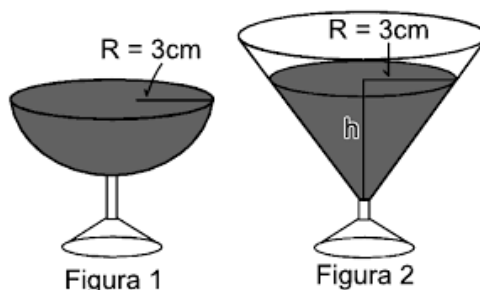
Dado um bloco retangular B , cujas arestas têm medidas a , b e c , seu volume é dado pela fórmula $\text{vol}(B) = abc$.

No caso do cubo, o procedimento usado pode ser o mesmo, haja vista, o cubo se constituir um caso particular de bloco retangular em que as arestas têm medidas iguais, chegando assim ao seguinte resultado: se a aresta de um cubo C tem para medida um número racional a , então o volume de C será igual a a^3 .

6.2.7 Situação Didática 7

Problema do ENEM 2010 – Caderno Azul – Questão 168

Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes. Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.



Considere:

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad \text{e} \quad V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de

- (A) 1,33.
- (B) 6,00.
- (C) 12,00.
- (D) 56,52.
- (E) 113,04.

O objetivo dessa situação é conduzir o futuro professor a mobilizar os conhecimentos adquiridos anteriormente para perceber que objetos com estruturas diferentes possuem elementos equivalentes, como os que os relacionam ao mesmo volume, isto é, ambos podem possuir a mesma capacidade. Tal situação requer como conhecimento prévio a área da

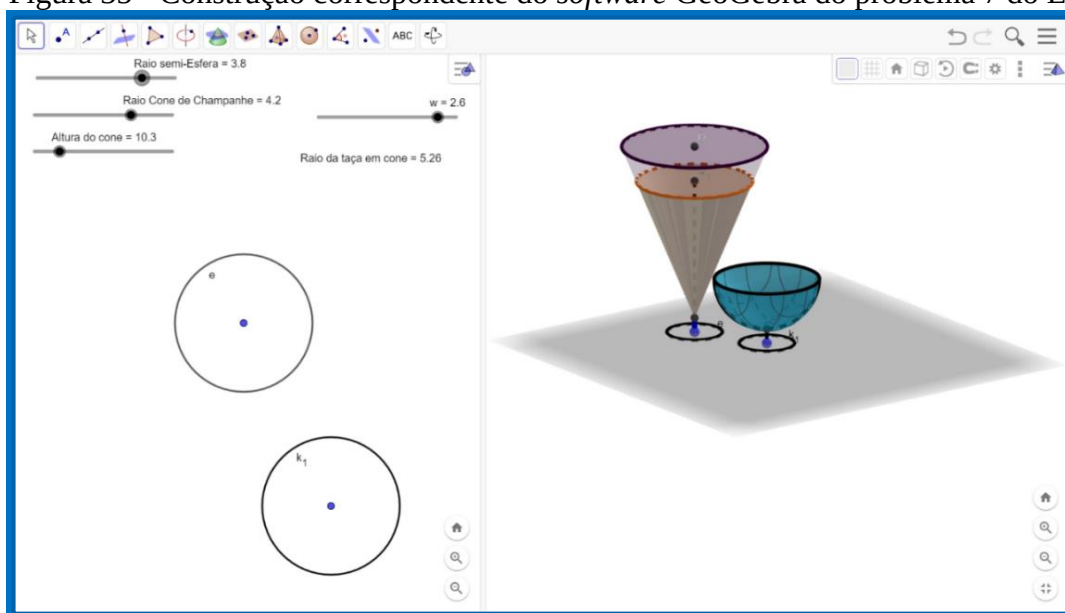
circunferência, como também as expressões algébricas que determinam o volume de cada sólido.

Dialética da Ação: Nessa primeira fase, os futuros professores tentam mobilizar os raciocínios matemáticos, provenientes dos elementos e das propriedades matemáticas identificadas das leituras e interpretação da questão proposta. Assim, espera-se que ao analisar as figuras presentes no enunciado da questão, eles percebam que na primeira taça tem-se uma semiesfera, ou seja, o seu volume será a metade do volume de uma esfera inteira.

O pesquisador deve orientar os licenciandos que nesse momento se utilizem da construção do problema disponibilizado no GeoGebra, pois é possível que alguns deles já queiram rascunhar suas resoluções no caderno. Assim, almeja-se que eles possam interagir com *software* para observar, de forma dinâmica, uma relação de igualdade entre o volume das duas taças. Pois de acordo com Neves, Santos e Muniz (2013, p. 31), o uso proporcionado por *softwares* educacionais propicia um ambiente em que “é possível a manipulação direta das figuras na tela, o que possibilita sua exploração, mantendo as relações geométrica da construção”, ou seja, suas variáveis não sofrem alterações, ampliando assim a capacidade de visualização de todos que interagem com a construção.

Sendo assim, disponibilizou-se a construção desse problema no GeoGebra, para que os participantes pudessem manipular os controles deslizantes e perceber as relações e propriedades existentes entre os objetos da Figura 35 e, estabelecer estratégias de resolução da situação problema.

Figura 35 - Construção correspondente do *software* GeoGebra do problema 7 do ENEM

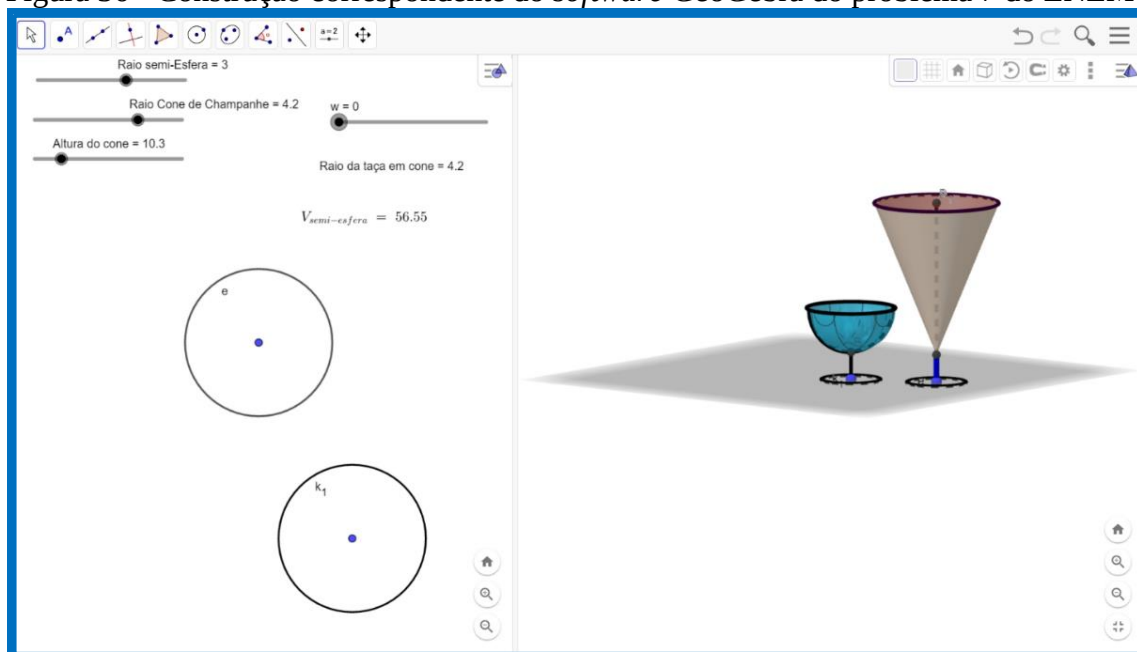


Fonte: Construção da autora.

Ao movimentar o controle deslizante Raio semiesfera = 3, o futuro professor poderá observar as alterações no formato da taça semiesférica, assim como a exibição de seu volume na janela de visualização, conforme apresentado na Figura 36.

Então, espera-se que os futuros professores percebam que ao manipular o GeoGebra pode se estabelecer uma relação de igualdade entre os volumes das duas taças, caracterizando-se no processo necessário para solucionar a questão proposta.

Figura 36 - Construção correspondente do *software* GeoGebra do problema 7 do ENEM

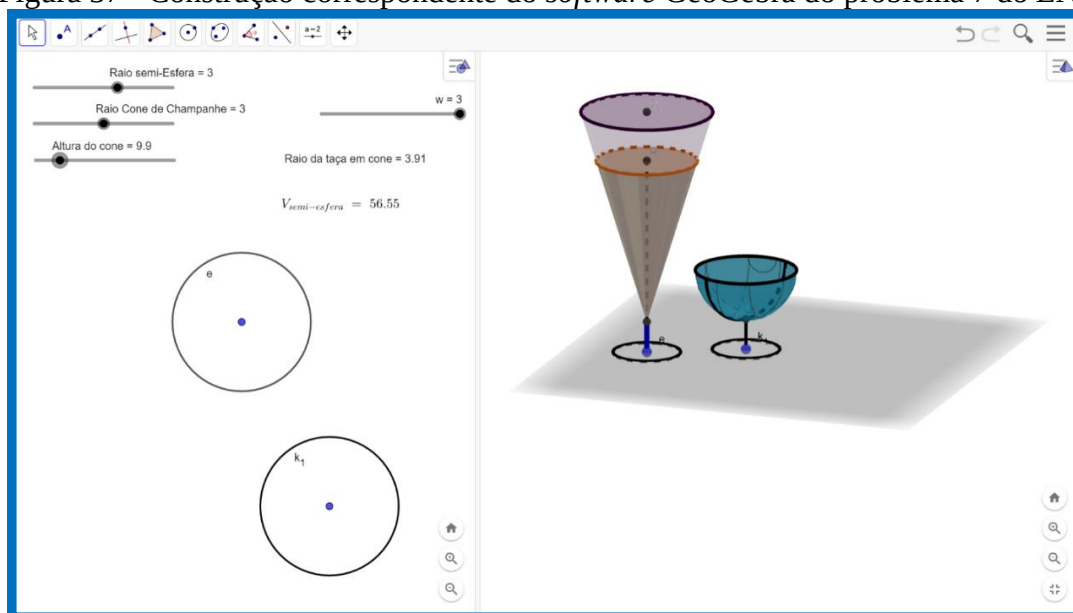


Fonte: Construção da autora.

Dialética da Formulação: Nesse momento, espera-se que os futuros docentes troquem ideias acerca de como estruturar um modelo matemático que solucione o problema; para tanto, o pesquisador deve estimular a descrição e o relato das estratégias adotadas pelos futuros professores.

Ainda, por meio da exploração da construção no GeoGebra, eles podem verificar a variação do controle deslizante Raio Cone de Champanhe = 3, o formato de cone se modifica, igualando a medida do raio dos dois objetos, o que permitirá ao futuro professor relacionar propriedades para comparar os volumes das bebidas necessários para atender à resolução do problema, como demonstrado na Figura 37.

Figura 37 - Construção correspondente do *software* GeoGebra do problema 7 do ENEM



Fonte: Construção da autora.

Portanto, espera-se que sejam observadas as informações disponibilizadas na construção do *software* GeoGebra para ajudar na compreensão e despertar as habilidades de resolução do problema. Assim, de acordo com o enunciado do problema, tem-se a informação da expressão para o cálculo do volume de uma esfera. No entanto, para solucionar o problema proposto, se faz necessário determinar o volume da semiesfera; para isso, basta utilizar a metade do volume da esfera. Então, formaliza-se a seguinte expressão para o cálculo do volume da semiesfera:

$$V_{\text{semiesfera}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2} \quad (32)$$

$$V_{\text{semiesfera}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{1}{2} \quad (33)$$

$$V_{\text{semiesfera}} = \frac{4}{6}\pi R^3 \quad (34)$$

Dessa maneira, sabendo que para resolver o problema é necessário igualar o volume de champanhe nas duas taças, se faz necessário determinar a altura da bebida que será disponibilizada para a taça em cone. Assim, formaliza-se a seguinte expressão para determinar a resolução do problema proposto.

$$V_{\text{cone}} = V_{\text{semiesfera}} \quad (35)$$

$$\frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{4}{6}\pi R^3 \quad (36)$$

Resolvendo a expressão, tem-se:

$$\frac{1}{3}\cancel{\pi} \cancel{R}^2 = \frac{4}{6}\cancel{\pi} \cancel{R}^3 \quad (37)$$

$$\frac{1}{3}h = \frac{4}{6}R \quad (38)$$

$$\frac{1}{3}h = \frac{4}{6} \cdot 3 \quad (39)$$

$$\frac{1}{3}h = 2 \quad (40)$$

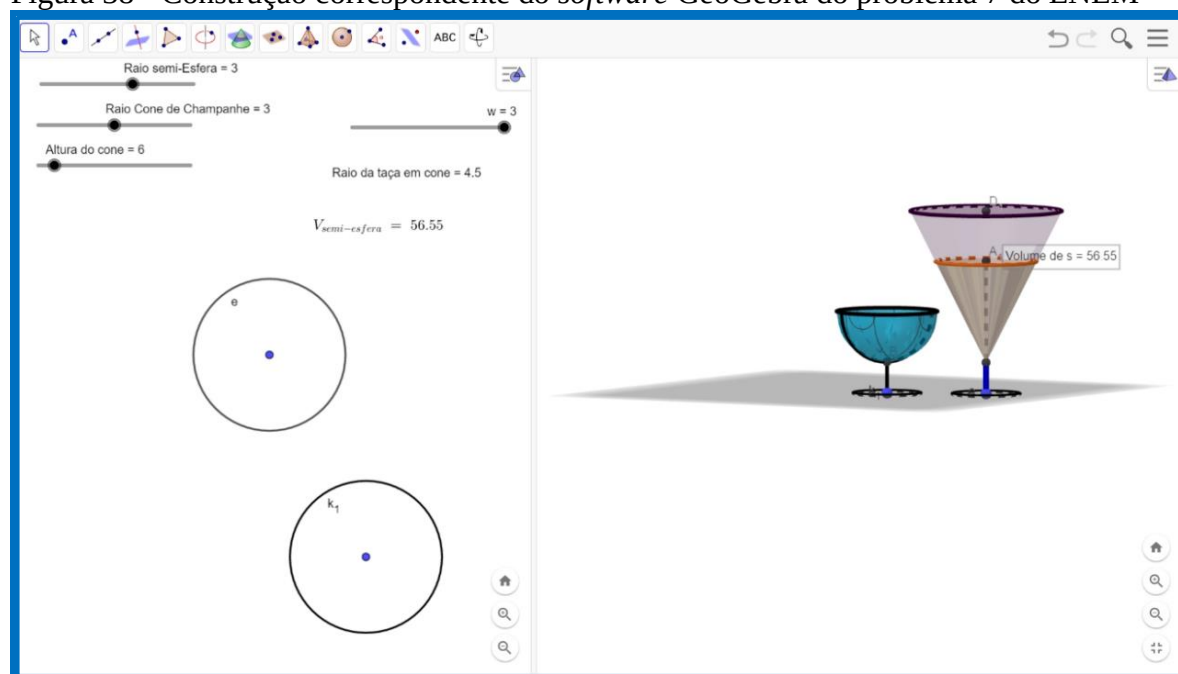
$$h = \frac{2}{\frac{1}{3}} \quad (41)$$

$$h = 6 \text{ cm} \quad (42)$$

Logo, a taça em cone deve ser cheia até a altura de 6 cm.

Dialética da Validação: Na dialética da validação, o professor (pesquisador) deve estimular o futuro professor a utilizar-se da construção feita no GeoGebra para validar os dados por ele instituídos, no momento da formalização. Então, movimentando o controle deslizante “Altura do cone = 6” é possível, por meio da visualização na janela 3D, comprovar que os volumes das bebidas das duas taças se igualam, conforme exibido na Figura 38.

Figura 38 - Construção correspondente do *software* GeoGebra do problema 7 do ENEM



Fonte: Construção da autora.

Após a demonstração no GeoGebra, os futuros professores apresentam suas estratégias de resolução no quadro, com o intuito de validar sua resolução. Desse modo, o conhecimento exibido passa a fazer parte do patrimônio matemático da classe, mesmo que ainda não tenha sido instituído como estatuto de saber social e cultural (ALMOULOU, 2007).

Dialética da Institucionalização: Nessa situação, a professora (pesquisadora) assume o controle da intermediação das estratégias usadas pelos futuros professores para resolver o problema apresentado, promovendo um levantamento de todos dados apresentados pela

turma. Para finalizar, sintetiza as informações e as estratégias, por meio da formalização dos seguintes teoremas¹⁰:

A partir da descrição do Teorema 3: “O volume de um cone é igual a um terço do produto da altura pela área da base”, tem-se como resultado o seguinte:

Corolário. O volume de um cone de altura h , cuja base é um círculo de raio R , é igual a $\frac{1}{3}\pi R^2 h$.

Teorema 4: “O volume de uma esfera de raio R é igual a $\frac{4}{3}\pi R^3$ ”.

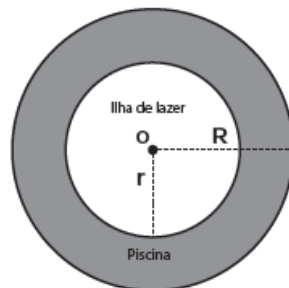
Ademais, ainda foi possível verificar que:

O volume de uma semiesfera de raio R é igual a $\frac{4}{6}\pi R^3$.

6.2.8 Situação Didática 8

Problema do ENEM 2013 – Caderno Azul – Questão 157

Num parque aquático existe uma piscina infantil na forma de um cilindro circular reto, 1 m de profundidade e volume igual a 12 m^3 , cuja base tem Raio R e centro O . Deseja-se construir uma ilha de lazer seca no interior dessa piscina, também na forma de um cilindro circular reto, cuja base estará no fundo da piscina e com centro da base coincidindo com o centro do fundo da piscina, conforme a figura. O raio da ilha de lazer será r . Deseja-se que após a construção dessa ilha, o espaço destinado à água na piscina tenha um volume de, no mínimo, 4 m^3 .



Considere 3 como valor aproximado para π .

Para satisfazer as condições dadas, o raio máximo da ilha de lazer r , em metros, estará mais próximo de

- (A) 1,6.
- (B) 1,7.
- (C) 2,0.
- (D) 3,0.
- (E) 3,8.

¹⁰ Os Teoremas 4 e 5 foram retirados de Lima (1991, p. 77-78).

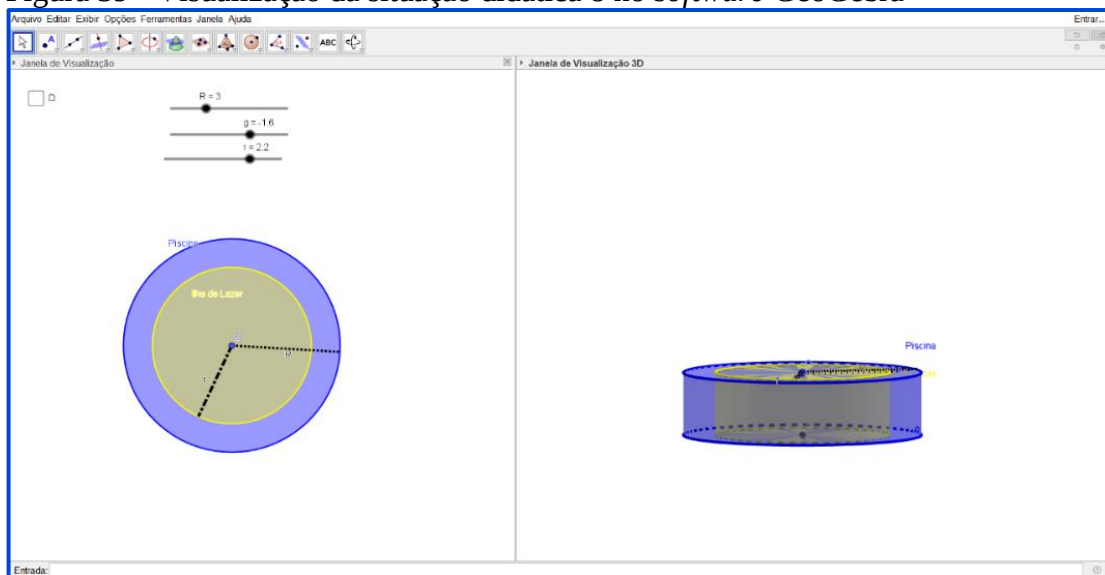
O objetivo desse problema é resolver problemas que tratam das relações funcionais entre o volume de dois objetos cilíndricos, por meio de um comparativo de suas capacidades, uma vez que ambos ocupam a mesma posição, porém com raios diferentes. Para tanto, são necessários conhecimentos prévios sobre área de uma circunferência, volume do cilindro, inequação e radiciação.

Dialética da Ação: Essa é a etapa inicial, em que os participantes estabelecem o primeiro contato com o problema, realizam a leitura e procuram extrair todas as informações possíveis para formular uma estratégia de resolução. Nesse momento, o pesquisador deve encorajar os participantes a buscarem todas as possibilidades de resolução; assim eles podem utilizar as soluções dinâmicas proporcionadas pela manipulação da construção no *software* GeoGebra, na tentativa de internalizar ideias matemáticas para formular uma solução para o problema.

Inicialmente, espera-se que os futuros professores entendam que o volume da piscina, após a construção da ilha, está relacionado ao valor da medida do raio em ambos os objetos, haja vista que o centro da base das duas construções ocupa a mesma posição. Desse modo, almeja-se que os participantes percebam que, para solucionar o problema, precisam determinar as medidas dos raios, podendo, para isso, fazer uma comparação entre o volume inicial e final da piscina.

Na imagem da Figura 39, apresenta-se essa relação entre o volume original da piscina com o seu volume após a construção da ilha, a partir da manipulação e alterações da construção no GeoGebra que possibilita diferenciar as propriedades numéricas e geométrica que podem conduzir os licenciandos a investigarem o conceito de volume do cilindro.

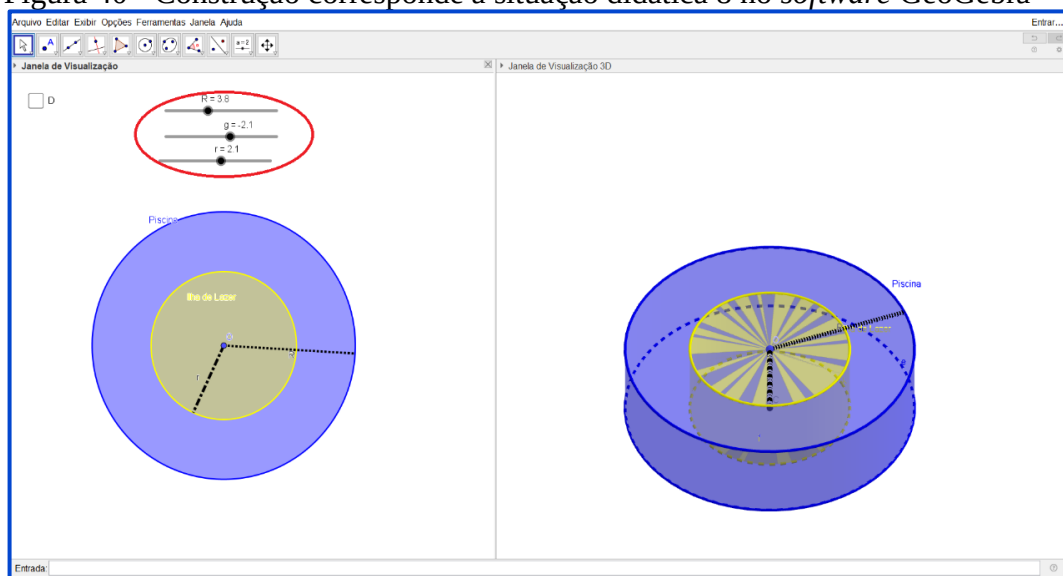
Figura 39 - Visualização da situação didática 8 no *software* GeoGebra



Fonte: Construção da autora.

Ao movimentar a ferramenta “controle deslizante” (Figura 40) que aqui foi nomeada de “R, g, r”, os futuros professores poderão observar modificações no raio da piscina, profundidade e raio da ilha, respectivamente, buscando perspectivas intuitivas que podem gerar argumentos de resolução do problema.

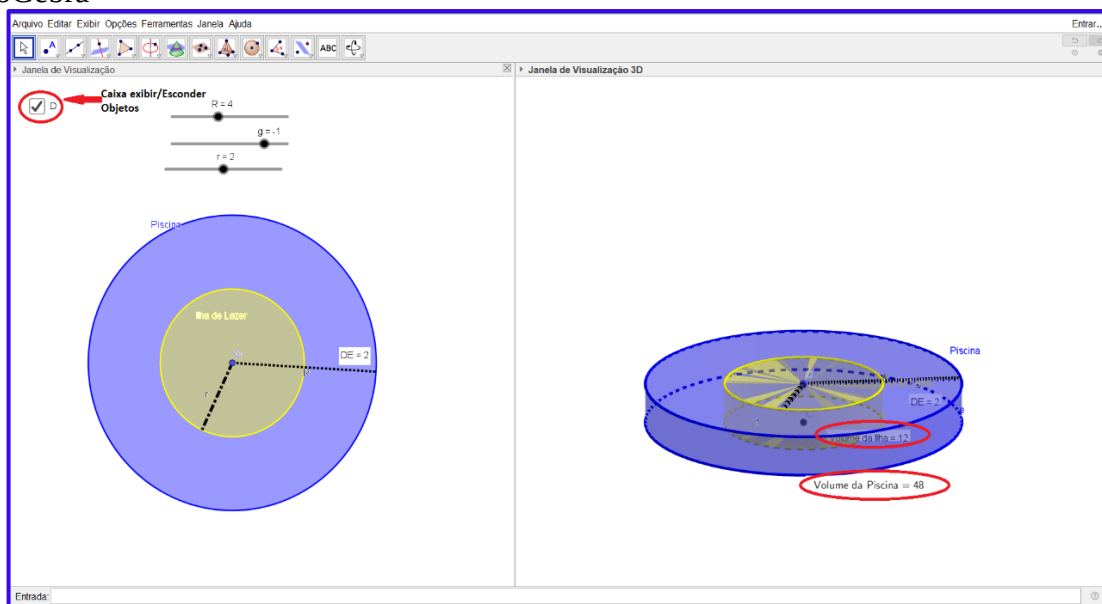
Figura 40 - Construção corresponde a situação didática 8 no *software* GeoGebra



Fonte: Construção da autora.

Dialética da Formulação: Essa é a etapa, onde se procede a interação e a troca de informações entre os futuros professores, com a intenção de estabelecer estratégias de resolução. Nesse momento, os participantes podem utilizar a construção no *software* GeoGebra e acionar o botão “Caixa para exibir/Esconder Objetos” (Figura 41), nomeado de “D” e visualizar os volumes da piscina e da ilha.

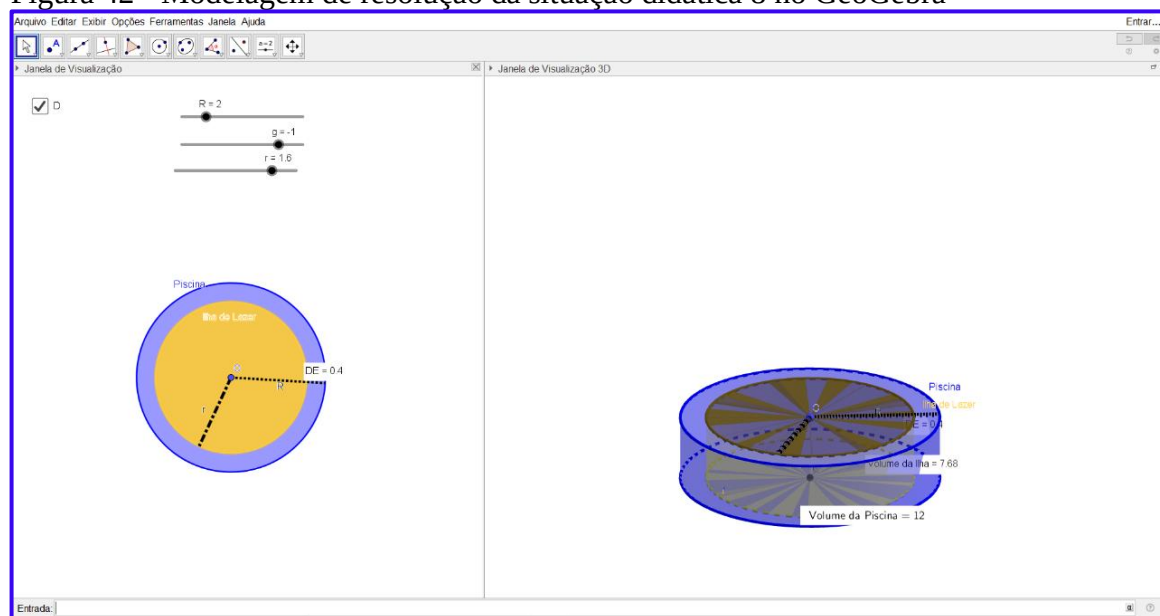
Figura 41 - Visualização de um possível modelo de resolução da situação didática 8 no GeoGebra



Fonte: Construção da autora.

Nesse sentido, ao manipular os “controles deslizantes” para $R = 2$, $g = -1$ e $r = 1,6$, os futuros professores poderão observar modificações no raio e no volume da piscina e da ilha, exibindo assim o modelo de uma possível resolução para o problema, como se verifica na imagem da Figura 42.

Figura 42 - Modelagem de resolução da situação didática 8 no GeoGebra



Fonte: Construção da autora.

Desse modo, pela manipulação da construção no GeoGebra, é possível visualizar os valores numéricos dos raios, informação não apresentada no enunciado da questão. Com isso, espera-se que os futuros professores percebam a relação dos valores das medidas dos raios com a diferença entre o volume inicial e o volume final da piscina. Nesse momento, eles podem formalizar uma expressão para determinar o raio da piscina original, por meio da fórmula para o cálculo do volume do cilindro, como segue:

$$V_{\text{inicial da piscina}} = \pi \cdot R^2 \cdot h \quad (43)$$

$$12 = 3 \cdot R^2 \cdot 1 \quad (44)$$

$$3 R^2 = 12 \quad (45)$$

$$R^2 = \frac{12}{3} \quad (46)$$

$$R^2 = 4 \quad (47)$$

$$R = \sqrt{4} \quad (48)$$

$$R = 2 \quad (49)$$

Assim, de posse das informações acima, é possível determinar o raio da ilha; para tal, o primeiro passo é descobrir o volume da ilha, encontrando a diferença entre o volume inicial

e final da piscina, assim: Volume da ilha = $12 - 4 = 8\text{m}^3$. Nesse momento, formaliza-se o modelo de resolução final do problema.

$$V_{\text{ilha}} \leq 8\text{m}^3 \quad (50)$$

$$\pi \cdot r^2 \cdot h \leq 8 \quad (51)$$

$$3 \cdot r^2 \cdot 1 \leq 8 \quad (52)$$

$$3r^2 \leq 8 \quad (53)$$

$$r^2 \leq \frac{8}{3} \quad (54)$$

$$r \leq \sqrt{\frac{8}{3}} \quad (55)$$

$$r \leq 1,64 \quad (56)$$

$$r \leq 1,64 \quad (57)$$

Assim, o raio máximo da ilha estará próximo de 1,6 metros, finalizando a solução dessa situação didática.

Dialética da Validação: Nesse momento, os futuros professores procederão à apresentação das estratégias de resolução por eles formuladas para serem validas ou refutadas por todos os presentes. Essa comprovação poderá ocorrer por meio de demonstrações no quadro e/ou pela manipulação da construção no *software* GeoGebra, concretizando-se as validações por meio de análises das respostas, dos raciocínios e dos conceitos matemáticos explorados para obter-se a solução do problema.

Dialética da Institucionalização: Nesse momento, a pesquisadora reassume o controle da situação, procedendo à generalização dos resultados obtidos a partir das ações dos participantes, nas etapas anteriores. A pesquisadora poderá formalizar o conhecimento o novo conhecimento, por meio do seguinte teorema¹¹:

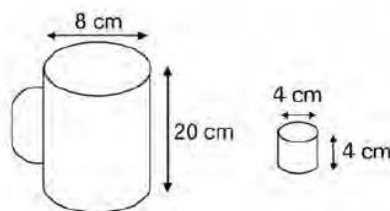
Teorema 2. *O volume de um cilindro é igual ao produto da área da base pela altura.*

6.2.9 Situação Didática 9

Problema do ENEM 2010 – Caderno Azul – Questão 151

¹¹ Esse teorema foi extraído de Lima (1991, p. 74).

Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram em uma reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos, também cilíndricos.



Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade mínima de água na leiteira para encher os vinte copinhos pela metade. Para que isso ocorra, dona Maria deverá

- (A) encher a leiteira até a metade, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.
- (B) encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.
- (C) encher a leiteira de toda de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.
- (D) encher duas leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.
- (E) encher cinco leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

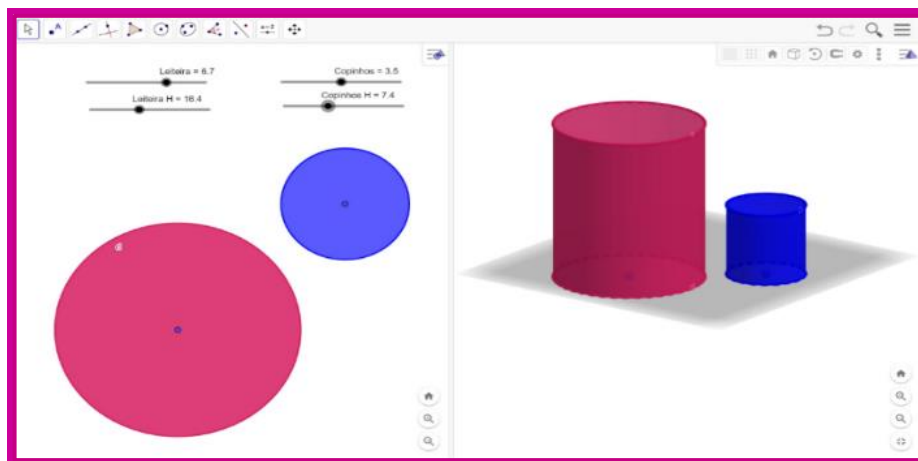
Essa questão tem por objetivo resolver problema relacionado a capacidade de armazenamento de objetos cilíndricos e verificar a proporção dessa capacidade entre os dois sólidos. Para tal, são necessários os conhecimentos prévios sobre área de uma circunferência, unidades de capacidade e expressões algébricas para determinar o volume dos recipientes.

Dialética da Ação: Nesse momento, os futuros professores se deparam com o enunciado do problema, ao mesmo tempo que visualizam a representação da situação no *software* GeoGebra (Figura 43). Na situação de ação, devem-se perceber as propriedades geométricas envolvidas da resolução da questão. Assim, incentiva-se os professores em formação a movimentar o objeto no *software*, com o intuito de identificar os elementos matemáticos que nortearam a resolução da questão.

Portanto, espera-se que o professor em formação inicial perceba que a capacidade de um recipiente é o espaço nele disponível para conter coisas, determinando assim seu volume interno. Nessa perspectiva, procura-se identificar o raciocínio intuitivo do aprendiz, visto que a questão relaciona elementos comuns entre a leiteira e o copo. Então, ao movimentar os “controles deslizantes” “Leiteira” se modifica o raio, “Leiteira H” se altera a altura, “Copinho” move-se o raio do copo e “Copinho H” para manipular a altura do recipiente,

podendo assim buscar tais perspectivas intuitivas necessárias para solucionar o problema. Veja, na Figura 43, essa construção.

Figura 43 - Construção correspondente do *software* GeoGebra do problema 9 do ENEM

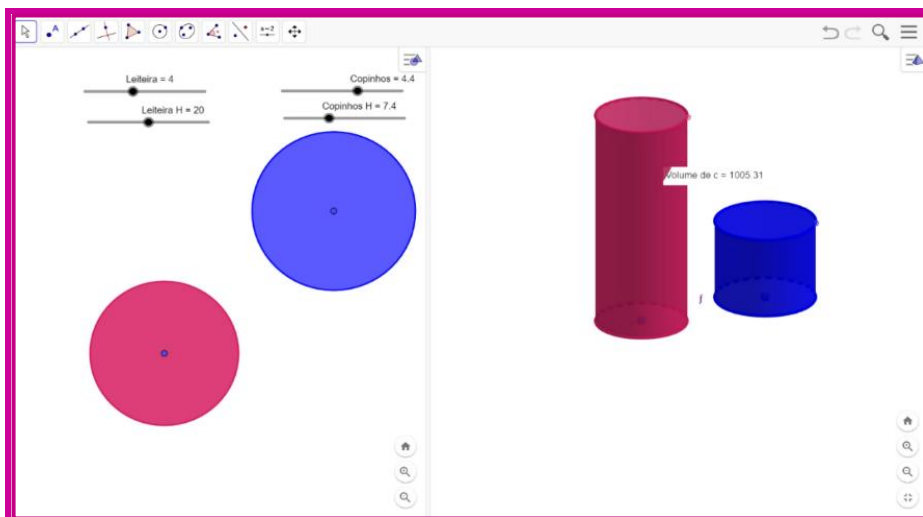


Fonte: Construção da autora.

Dialética da Formulação: Nessa etapa se procede a interação e troca de argumentos entre os futuros professores, na tentativa de estabelecer as melhores estratégias de resolução. Ao movimentar os “controles deslizantes”, nomeados de Leiteira = 8, Leiteira H = 20, Copinho = 4 e Copinho H = 4, visualizam-se as medidas exibidas na figura do enunciado do problema, mas que não se configuram como a resolução adequada, já que elas trazem as medidas relativas ao diâmetro dos objetos e não do raio, sendo necessário, para o primeiro momento, estabelecer as medidas dos raios, que se caracterizam pela metade do diâmetro.

Nesse sentindo, espera-se que os futuros professores, percebam que ao manipular, no GeoGebra, os controles deslizantes Leiteira = 4 e Leiteira H = 20, exibe-se a medida do volume da Leiteira utilizada para se fazer o café, como está representada na Figura 44.

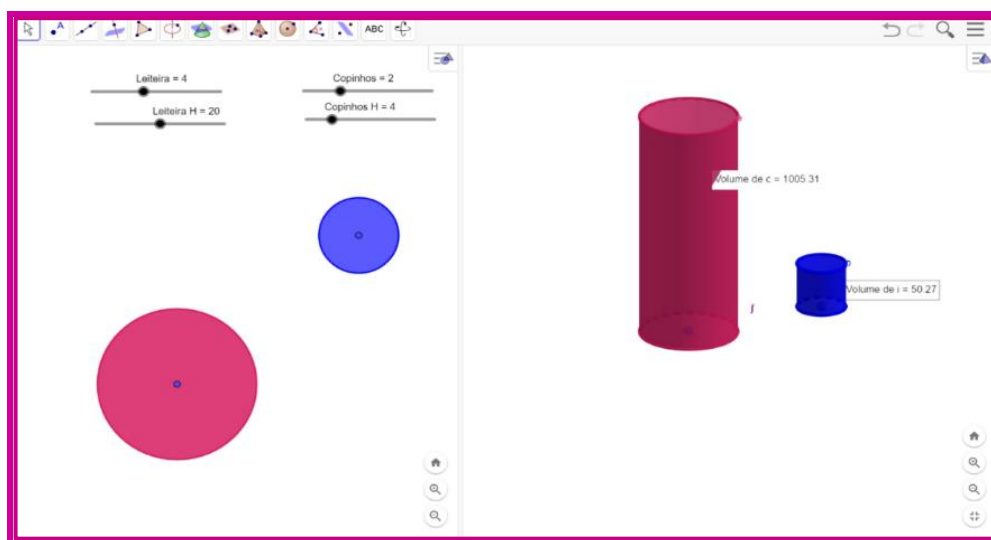
Figura 44 - Construção correspondente do *software* GeoGebra do problema 9 do ENEM



Fonte: Construção da autora.

Eles também podem manipular os controles deslizantes Copinho = 4 e Copinho H = 2 para descobrir o volume do copo (Figura 45) e, com isso, estabelecer um padrão matemático, por meio do qual seja possível calcular o quanto a capacidade da leiteira é maior que a do copo.

Figura 45 - Construção correspondente do *software* GeoGebra do problema 9 do ENEM



Fonte: Construção da autora.

A partir de seus conhecimentos prévios sobre área de um círculo, volume de um cilindro e compreensão do conceito, os professores perceberão que será necessário determinar o volume da leiteira, que será validado pela expressão:

Volume da Leiteira (V_L)

$$V_L = \pi \cdot r^2 \cdot h \quad (58)$$

$$V_L = \pi \cdot 4^2 \cdot 20 \quad (59)$$

$$V_L = 320\pi \text{ cm}^3 \quad (60)$$

Para determinar a resposta que satisfaça o enunciado da questão, também se faz necessário proceder a um cálculo similar para obter-se o volume dos copinhos, como se vê a seguir:

Volume do Copinho Cheio (V_C)

$$V_C = \pi \cdot r^2 \cdot h \quad (61)$$

$$V_C = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 \quad (62)$$

$$V_C = 16\pi \text{ cm}^3 \quad (63)$$

De acordo com o enunciado do problema, o objetivo é determinar uma quantidade de água suficiente para encher 20 copinhos pela metade; assim se estabelece o seguinte cálculo:

Volume da Metade dos 20 copinhos ($V_{c/2}$)

$$V_{c/2} = 20.\pi.r^2.h \quad (64)$$

$$V_{c/2} = 20.\pi.2^2.2 \quad (65)$$

$$V_{c/2} = 160\pi \text{ cm}^3 \quad (66)$$

Portanto, os futuros professores perceberão que o volume da metade dos 20 copinhos corresponde exatamente a metade da capacidade de armazenamento da leiteira. Ademais, pelos cálculos apresentados, percebe-se que o volume da leiteira é 20 vezes maior que o volume do copo, formalizando-se assim o resultado adequado para solucionar a situação problema.

Logo, para não haver desperdício de café, a leiteira deve conter água até a metade, pois seu volume é 20 vezes maior que o volume do copo, o que corresponde à opção de letra “A”.

Dialética da Validação: Nessa etapa, de acordo com os conhecimentos que foram construídos nas etapas anteriores, dá-se o momento de provar e demonstrar as estratégias utilizadas para construção da resposta. Essa comprovação poderá ocorrer por escrito ou oralmente, em que os professores em formação mostrarão os métodos adotados para chegar-se à resposta.

O professor (pesquisador) deve incentivar o docente em formação sobre a necessidade de demonstrar as conjecturas elaboradas, por meio da exploração e interação da construção no GeoGebra, como se observou nas Figuras 44 e 45. Assim, concretiza-se a validação, por meio de análises das respostas, dos raciocínios e dos conceitos matemáticos explorados para chegar-se à solução do problema.

Dialética da Institucionalização: Nesse momento, a professora (pesquisadora) reassume a responsabilidade da situação e procederá à generalização dos resultados, a partir das ações, formulações e validações observadas no momento da resolução. A pesquisadora institucionalizará a noção de volume de um cilindro circular reto, por meio de demonstrações no GeoGebra, do seguinte teorema¹².

Teorema 2. O volume de um cilindro é igual ao produto da área da base pela altura.

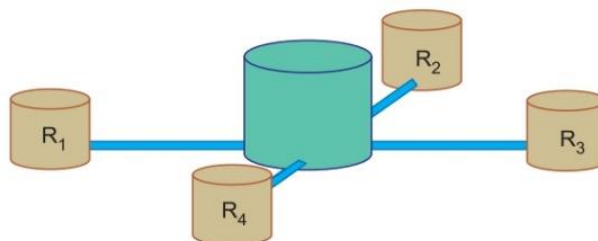
$$V = A_b . h$$

¹² Esse teorema foi retirado de Lima (1991, p. 74).

6.2.10 Situação Didática 10

Problema do ENEM 2019 – Caderno Azul – Questão 175

Uma construtora pretende conectar um reservatório central (R_c) em formato de um cilindro, com raio interno igual a 2 m e altura interna igual a 3,30 m, a quatro reservatórios cilíndricos auxiliares (R_1 , R_2 , R_3 , R_4), os quais possuem raios internos e alturas internas medindo 1,5 m.



As ligações entre o reservatório central e os auxiliares são feitas por canos cilíndricos com 0,10 m de diâmetro interno e 20 m de comprimento, conectados próximos às bases de cada reservatório. Na conexão de cada um desses canos com o reservatório central há registros que liberam ou interrompem o fluxo de água. No momento em que o reservatório central está cheio e os auxiliares estão vazios, abrem-se os quatro registros e, após algum tempo, as alturas das colunas de água nos reservatórios se igualam, assim que cessa o fluxo de água entre eles, pelo princípio dos vasos comunicantes.

A medida, em metros, das alturas das colunas de água nos reservatórios auxiliares, após cessar o fluxo de água entre eles, é

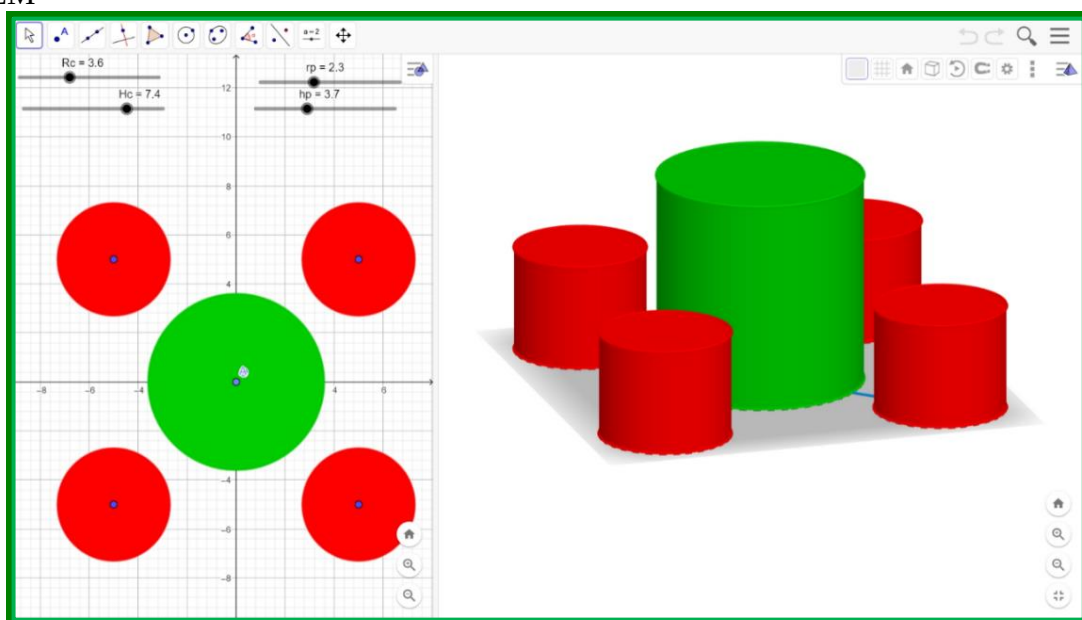
- (A) 1,44.
- (B) 1,16.
- (C) 1,10.
- (D) 1,00.
- (E) 0,95.

Essa situação tem como objetivo conduzir o professor em formação à existência de um padrão matemático para estabelecer a altura do fluxo de água dos reservatórios pequenos, pelo princípio dos vasos comunicantes, como já informado no problema. Assim, eles precisarão fazer uma relação ou criar um padrão, a partir das informações do enunciado e da Figura apresentada na questão. Para esse problema, são necessários os seguintes conhecimentos prévios: área de uma circunferência, noções de vasos comunicantes, unidades de capacidade e expressões algébricas.

Dialética da Ação: Nessa fase, os professores em formação irão se debruçar sobre o problema, lendo atentamente para interpretá-lo, selecionando as informações mais relevantes para, posteriormente, formular as estratégias de resolução.

Nessa etapa, a pesquisadora deve instigar os professores em formação a utilizarem a construção disponibilizada no *software* GeoGebra para ampliarem suas estratégias de resolução. Veja na Figura 46, essa construção.

Figura 46 - Construção correspondente do *software* GeoGebra do problema 10 do ENEM

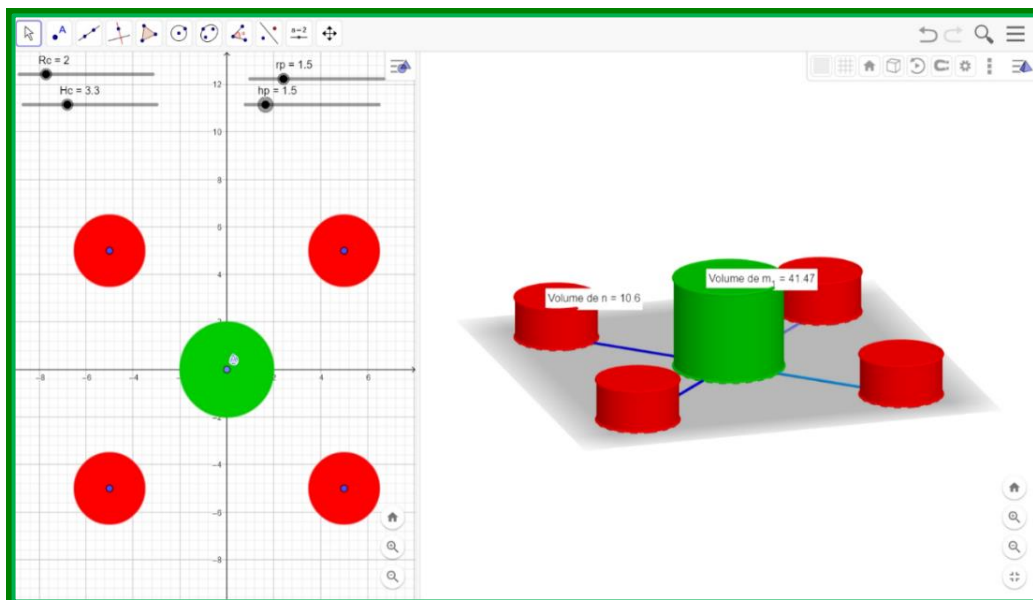


Fonte: Construção da autora.

Ao movimentar a ferramenta “controle deslizante”, nomeada de $R_c = 2$, $H_c = 3.3$, $r_p = 1.5$ e $h_p = 1.5$, os futuros professores poderão observar modificações no raio e altura do cilindro central e dos pequenos, exibindo-se os valores de seus respectivos volumes, como se verifica na Figura 47.

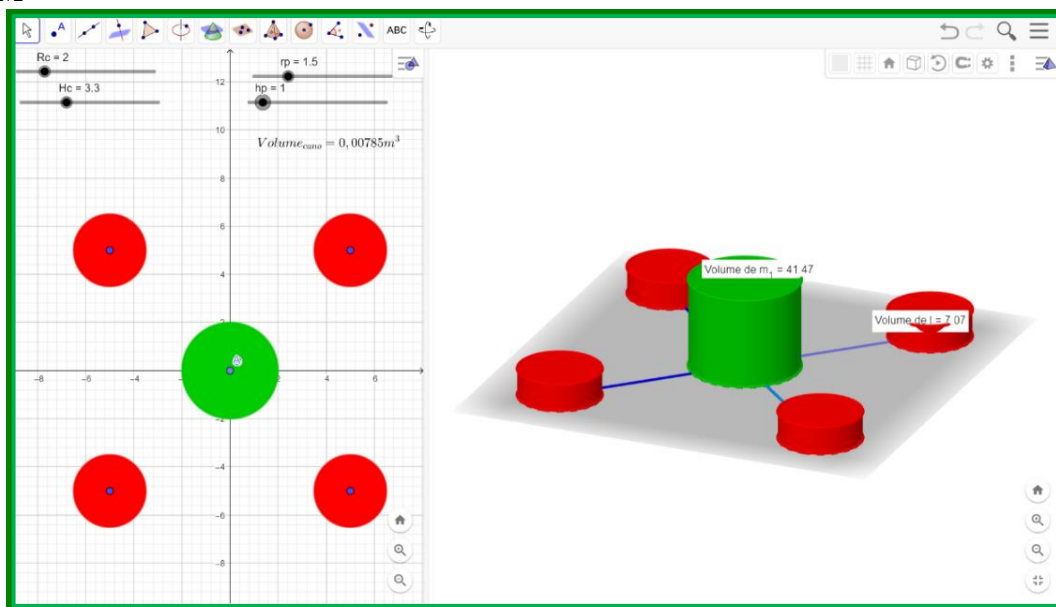
De acordo com o enunciado da questão, o reservatório central cederá água aos reservatórios menores pelo princípio dos vasos comunicantes. Assim, almeja-se que os futuros professores percebam, a partir da manipulação do GeoGebra, que os vasos comunicantes são ligados pela mesma base e que o líquido disposto em seu interior, quando em equilíbrio tem a mesma altura, em todos os ramos. Portanto, o intuito é descobrir a altura da água dos reservatórios pequenos, como se apresenta na Figura 48, ao modificar-se o controle deslizante para $h_p = 1$, exibindo-se um possível padrão matemático para solucionar a proposta do ENEM.

Figura 47 - Construção correspondente do *software* GeoGebra do problema 10 do ENEM



Fonte: Construção da autora.

Figura 48 - Construção correspondente do *software* GeoGebra do problema 10 do ENEM



Fonte: Construção da autora.

Então, espera-se que os professores em formação possam perceber que, a partir da manipulação do GeoGebra, esse padrão de equilíbrio da quantidade de água para todos os reservatórios se constitui em uma possível formulação para encontrar a solução final da situação proposta.

Situação de Formulação: É o momento em que se dá a troca de informações entre participantes, com a intenção de estabelecer as melhores estratégias de resolução. Assim, anseia-se que eles discutam as ideias iniciais de como montar um modelo matemático que possa promover uma resolução de forma ágil para o problema.

O pesquisador instigará os futuros professores à manipulação no *software* GeoGebra para explorar o controle deslizante “Hc e hp” e, com isso, observar o padrão de equilíbrio entre os recipientes, o que poderá facilitar e despertar suas habilidades de resolução de problemas, na tentativa de encontrar uma resposta que satisfaça o enunciado da questão.

Ademais, espera-se que os professores em formação possam perceber que, pelo princípio dos vasos comunicantes, as colunas de água presente nos canos de ligação entre os recipientes também são relevantes para a formulação de uma resposta adequada. A princípio, espera-se que, ao observarem as informações dadas no enunciado do problema, eles possam determinar o volume do reservatório central (R_c), pela seguinte expressão:

$$R_c = A_b \cdot h \quad (67)$$

$$R_c = \pi \cdot r^2 \cdot h \quad (68)$$

$$R_c = \pi \cdot 2^2 \cdot 3,3 \quad (69)$$

$$R_c = 13,20\pi \text{ m}^3 \quad (70)$$

Dessa maneira, sabendo que o reservatório central irá ceder água para os outros quatro reservatórios menores, espera-se que os professores em formação percebam que a altura (h) das colunas de água do reservatório central (R_c) deve ser igual à soma dos volumes de água dos reservatórios menores (R_p), dos canos (V_c) e do reservatório central (R_c). Nesse sentido, almeja-se que eles apresentem uma solução como a que segue:

$$R_c + 4.R_p + 4.V_c = R_c \quad (71)$$

Resolvendo a expressão, encontra-se a seguinte resolução:

$$\pi \cdot r^2 \cdot h + 4 \cdot (\pi \cdot r^2 \cdot h) + 4 \cdot (\pi \cdot r^2 \cdot h) = \pi \cdot r^2 \cdot h \quad (72)$$

$$\cancel{\pi} \cdot 2^2 \cdot h + 4 \cdot \cancel{\pi} \cdot (1,5)^2 \cdot h + 4 \cdot \cancel{\pi} \cdot (0,05)^2 \cdot h = 13,2\cancel{\pi} \quad (73)$$

$$4h + 4 \cdot (2,25) \cdot h + 4 \cdot (0,0025) \cdot 20 = 13,2 \quad (74)$$

$$4h + 9h + 0,2 = 13,2 \quad (75)$$

$$13h = 13,2 - 0,2 \quad (76)$$

$$13h = 13 \quad (77)$$

$$h = \frac{13}{13} \quad (78)$$

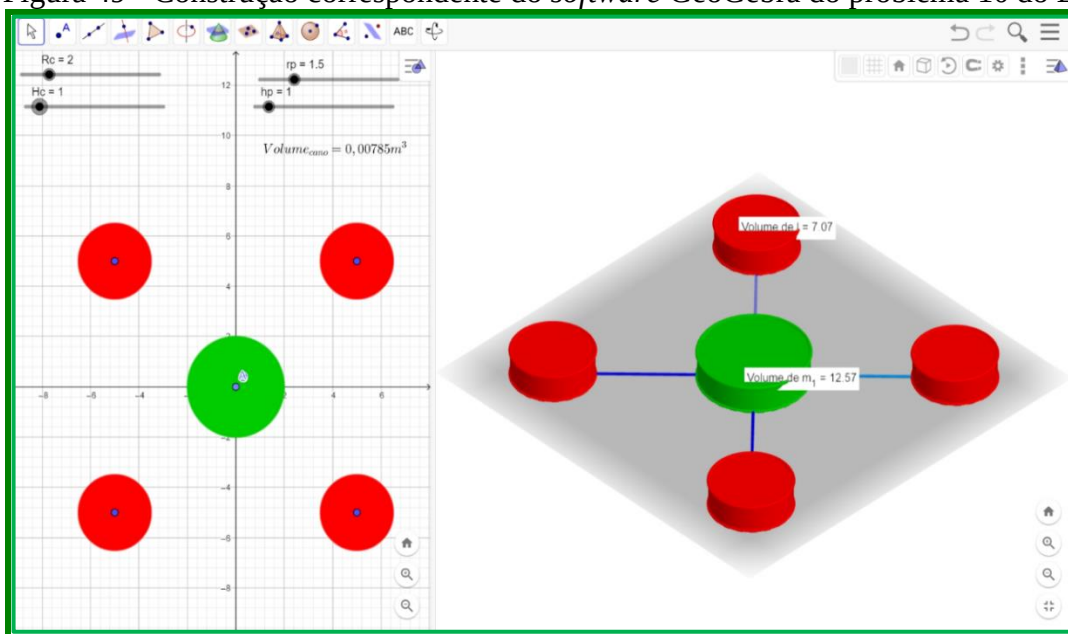
$$h = 1 \text{ m} \quad (79)$$

Conclui-se, portanto, que a medida das alturas das colunas de água nos reservatórios auxiliares, após cessar o fluxo de água entre eles, deve ser de 1,00 metro.

Dialética da Validação: Na dialética da validação, os professores em formação devem expor as estratégias adotadas para solucionar o problema, ou seja, exporão os modelos por eles criados para a validação. Promove-se o debate entre os futuros professores, na tentativa

de estabelecer provas ou refutá-las. Para tanto, eles podem confrontar os dados obtidos, nas fases anteriores com a manipulação do *software* GeoGebra, como, por exemplo, para $H_c = 1$ e $h_p = 1$. É possível comprovar que a soma das medidas dos volumes dos quatro reservatórios auxiliares com o volume do reservatório grande corresponde exatamente ao volume do reservatório central. Veja, na Figura 49, essa representação.

Figura 49 - Construção correspondente do *software* GeoGebra do problema 10 do ENEM



Fonte: Construção da autora.

Após a demonstração geométrica no GeoGebra, os professores em formação poderão apresentar o modelo matemático por eles criados e validar suas estratégias de resolução com todos os participantes. Dessa forma, de acordo com Almouloud (2007), após o conhecimento ser construído e validado, passa a fazer parte do patrimônio da classe, mesmo não tendo ainda o status de saber social.

Dialética da Institucionalização: Nessa fase, a professora (pesquisadora) retoma o controle da sessão e faz uma análise de todas as estratégias e soluções apresentadas pelos participantes. Por fim, organizará e procederá à institucionalização das produções exibidas por meio do seguinte teorema¹³:

Teorema 2. *O volume de um cilindro é igual ao produto da área da base pela altura.*

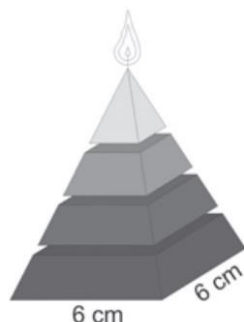
$$V = A_b \cdot h$$

¹³ Esse teorema foi retirado de Lima (1991, p. 74).

6.2.11 Situação Didática 11

Problema do ENEM 2009 – Caderno Azul – Questão 173

Uma fábrica produz velas de parafina em forma de pirâmide quadrangular regular com 19 cm de altura e 6 cm de aresta da base. Essas velas são formadas por 4 blocos de mesma altura – 3 troncos de pirâmide de bases paralelas e 1 pirâmide na parte superior –, espaçados de 1 cm entre eles, sendo que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, com uma haste de ferro passando pelo centro de cada bloco, unindo-os, conforme a figura.



Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem 1,5 cm de aresta da base, mas mantendo o mesmo molde, quanto ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela?

- (A) 156 cm^3 .
- (B) 189 cm^3 .
- (C) 192 cm^3 .
- (D) 216 cm^3 .
- (E) 540 cm^3 .

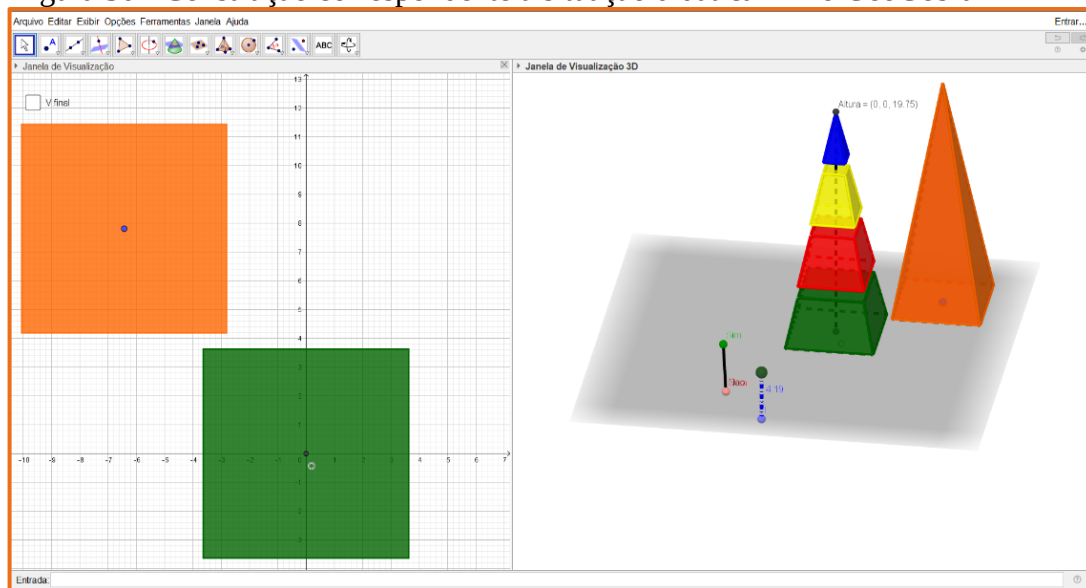
Essa questão tem o objetivo de resolver problemas referentes ao volume de pirâmides, relacionando-os a blocos sólidos e seus elementos, além de noções básicas de sobreposição. Para tanto, são necessários os conhecimentos prévios de área de figuras planas, elementos de blocos sólidos, tronco de pirâmide e volume da pirâmide.

Dialética da Ação: Nessa etapa, os participantes têm o primeiro contato com a situação proposta, realizam a leitura do problema, extraem todas as informações implícitas no enunciado da questão e procedem às primeiras ações para estabelecer suas estratégias de resolução.

A partir dessa primeira análise, eles poderão perceber que existe uma relação entre o volume da pirâmide original e o volume do tronco, após a retirada dos espaços na altura. É possível verificar essa relação por meio da manipulação e visualização da construção no

software GeoGebra (Figura 50), permitindo assim um comparativo entre o volume dos dois modelos.

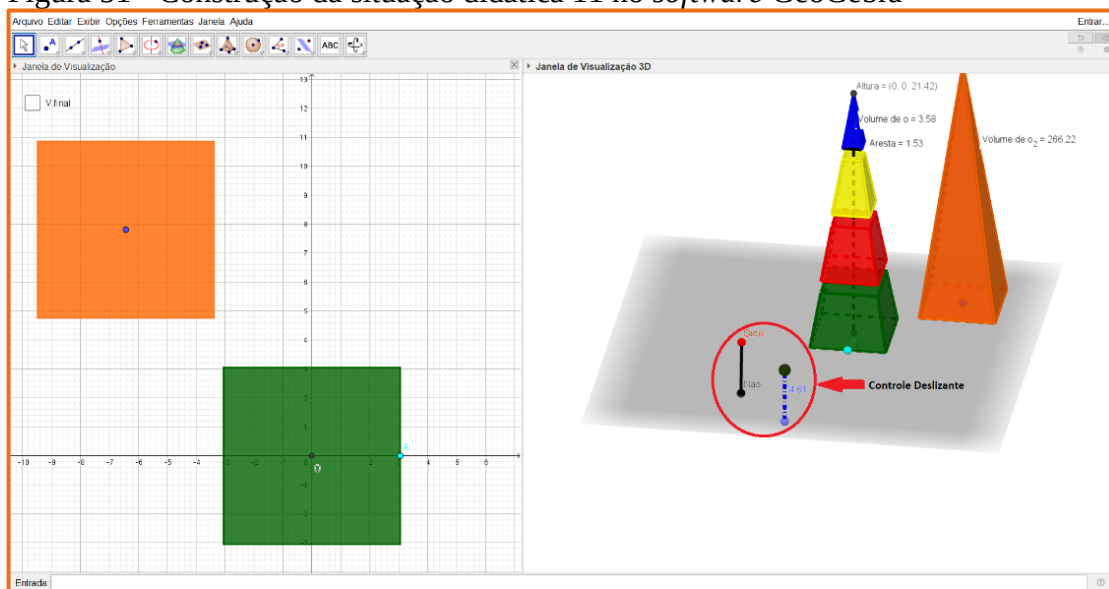
Figura 50 - Construção correspondente a situação didática 11 no GeoGebra



Fonte: Construção da autora.

Ao movimentar os “controles deslizantes”, os futuros professores poderão observar modificações na altura, além de visualizarem o volume da pirâmide fixada no topo e o volume da pirâmide completa, conforme se verifica na Figura 51.

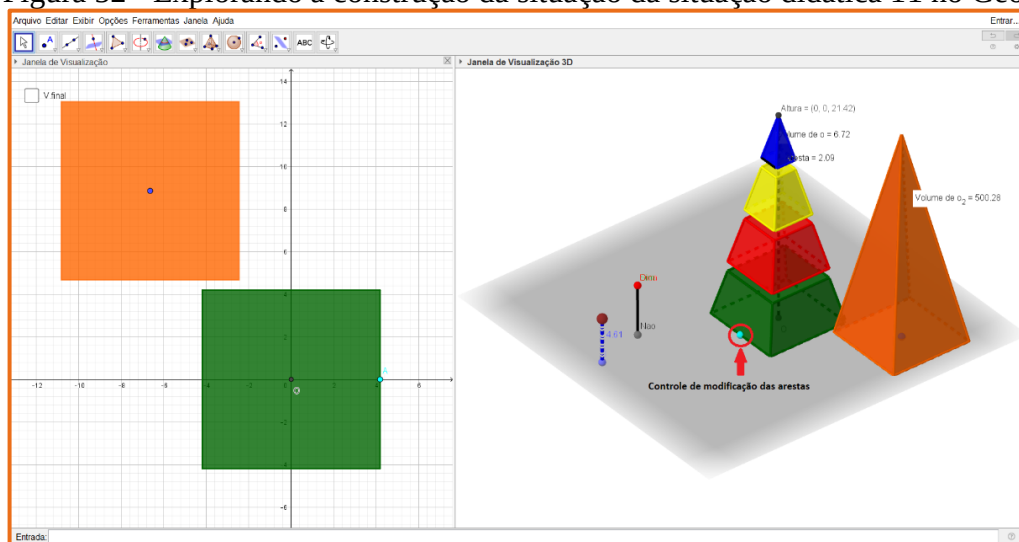
Figura 51 - Construção da situação didática 11 no *software* GeoGebra



Fonte: Construção da autora.

Continuando a exploração da construção no GeoGebra, os participantes ainda podem ter acesso a um ponto que lhes permitem movimentar as arestas da base da pirâmide, conforme se verifica na Figura 52.

Figura 52 - Explorando a construção da situação da situação didática 11 no GeoGebra



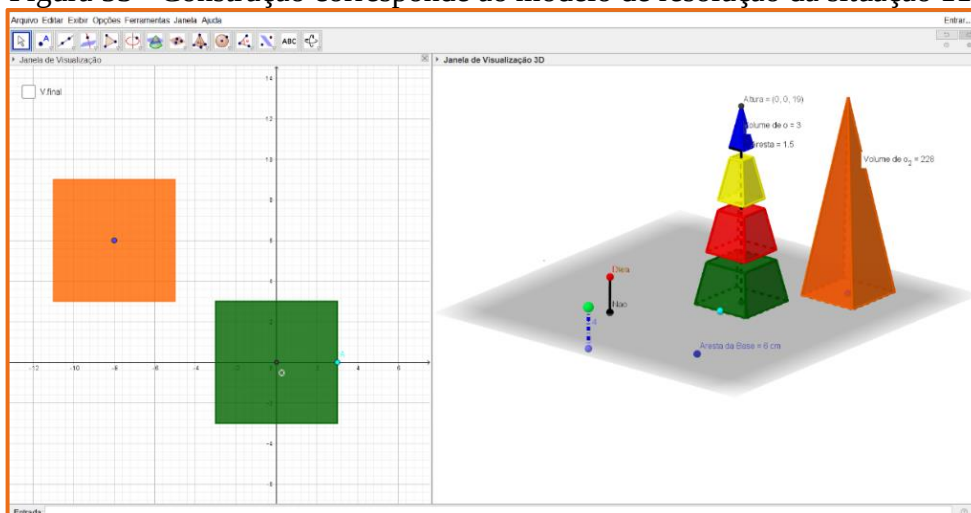
Fonte: Construção da autora.

Dialética da Formulação: Nessa etapa, ocorre a troca de ideias entre os participantes com a intenção de estabelecer as melhores estratégias para solucionar a questão proposta. Assim, deseja-se que os futuros professores possam discutir ideias e trocar informações que lhes permitem estruturar um modelo matemático de solução.

Nesse momento, a comunicação é essencial e a troca de informações permite aos futuros docentes perceberem que, ao manipularem as medidas da altura e das arestas da base, eles podem visualizar modificações na estrutura do objeto que possibilitem a identificação de relações entre essas grandezas, conduzindo os futuros professores a investigarem o conceito de volume de uma pirâmide de base quadrada.

Assim, os futuros docentes poderão constatar que, para solucionar a questão, eles podem manipular, no GeoGebra, a altura e a aresta da base, criando uma estrutura que resulta na solução do problema. Veja na imagem da Figura 53.

Figura 53 - Construção corresponde ao modelo de resolução da situação 11



Fonte: Construção da autora.

Nesse momento, espera-se que os futuros docentes mobilizem seus conhecimentos epistêmicos e pragmáticos para estruturar um modelo algébrico de resolução. Assim, de acordo com as informações obtidas por meio do enunciado do problema e da manipulação no GeoGebra, almeja-se que eles possam calcular o volume da pirâmide menor fixada no topo, equacionando a seguinte expressão:

$$V_{p(\text{menor})} = \frac{1}{3} \cdot Ab \cdot h \quad (80)$$

$$V_{p(\text{menor})} = \frac{1}{3} \cdot (1,5)^2 \cdot 4 \quad (81)$$

$$V_{p(\text{menor})} = \frac{1}{3} \cdot 2,25 \cdot 4 \quad (82)$$

$$V_{p(\text{menor})} = 3 \text{ cm}^3 \quad (83)$$

Em seguida, eles devem calcular o volume da pirâmide maior, usando a mesma estratégia anterior, como segue:

$$V_{p(\text{Maior})} = \frac{1}{3} \cdot Ab \cdot h \quad (84)$$

$$V_{p(\text{Maior})} = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 16 \quad (85)$$

$$V_{p(\text{Maior})} = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 16 \quad (86)$$

$$V_{p(\text{Maior})} = 192 \text{ cm}^3 \quad (87)$$

Assim, de acordo com o enunciado da questão, para descobrir a quantidade de parafina necessária para a fabricação do novo modelo de vela, basta fazer a diferença entre o volume da pirâmide maior e o volume da pirâmide menor, como segue:

$$V_{\text{final}} = V_{\text{maior}} - V_{\text{menor}}$$

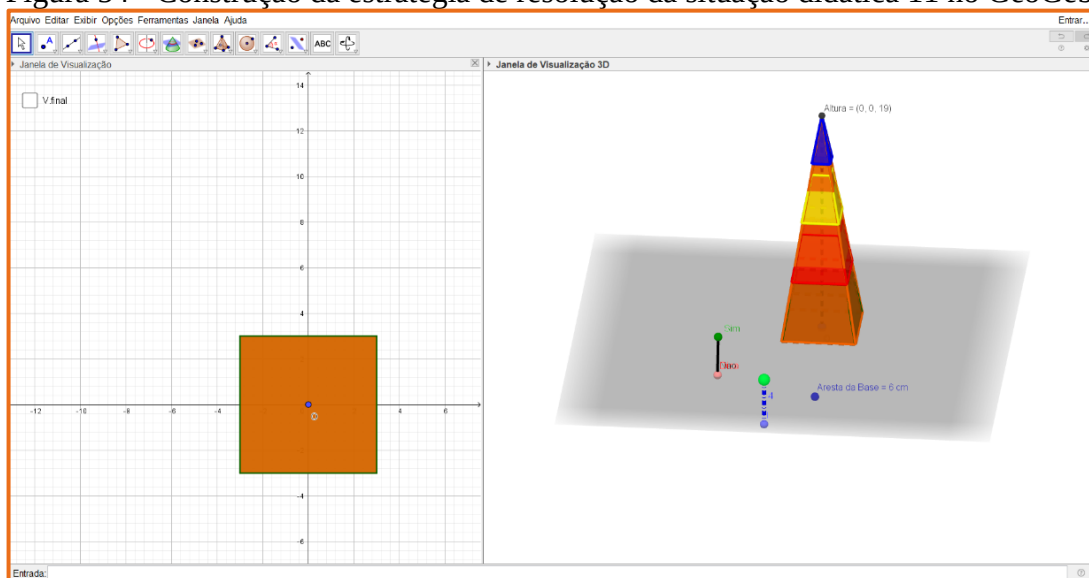
$$V_{\text{final}} = 192 - 3 = 189 \text{ cm}^3 \quad (88)$$

Portanto, a quantidade de parafina necessária para a fabricação do novo modelo de vela é 189 cm^3 .

Dialética da Validação: Nessa fase, os futuros docentes apresentam suas estratégias de resolução, expondo um modelo matemático de resolução para análise e validação de todos os participantes. Podendo, para tanto, serem indagados por parte dos presentes que podem ter dúvidas ou até mesmo discordar das propostas de resolução apresentadas.

Nesse momento, o pesquisador deve incentivar os futuros docentes a confrontarem a resolução encontrada com o recurso tecnológico oferecido pela manipulação no *software* GeoGebra (Figura 54), oferecendo aos participantes a comprovação visual da solução formulada pelos participantes.

Figura 54 - Construção da estratégia de resolução da situação didática 11 no GeoGebra



Fonte: Construção da autora.

Dialética da Institucionalização: Essa é fase final. Aqui o pesquisador retoma as ações da situação, intermediando as estratégias apresentadas pelos futuros professores, promovendo uma análise de todos os dados apresentados pela turma. Para finalizar, sintetizam-se as informações e as resoluções, por meio da formalização dos seguintes teoremas¹⁴:

Teorema 6. *O volume de qualquer pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela altura.*

Para finalizar, deve-se esclarecer as possíveis dúvidas sobre o assunto matemático da questão e fazer reflexões sobre as estratégias de resolução adotadas, além de discutir o uso do *software* GeoGebra, suas vantagens e desafios. Convém ressaltar, que as resoluções algébricas apresentadas neste capítulo, tratam-se de projeções de possíveis solução e que os participantes podem apresentar respostas diferentes daquelas previstas nas análises *a priori*.

¹⁴ O Teorema 6 foi retirado de Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (1998).

7 EXPERIMENTAÇÃO

Esta é a fase clássica, é o momento onde se põe em prática todo o dispositivo construído, corrigindo sempre que as análises locais do experimento se mostrarem necessárias, implicando assim um retorno à análise *a priori*. (ALMOULOU, 2007).

Apresenta-se, portanto, todos os procedimentos utilizados para a prática da pesquisa: como se deu a aplicação, a caracterização do curso de licenciatura, o uso do GeoGebra, a seleção dos sujeitos envolvidos na investigação e como os dados foram coletados nas formações online, assim realizadas devido à suspensão das aulas presenciais, ocasionada por conta da pandemia da Covid-19.

Esta pesquisa refere-se ao ensino de “Volume”, na qual se utilizou questões oriundas das provas do ENEM para estruturar situações didáticas que foram aplicadas com professores em formação inicial. As formações aconteceram por meio de encontros virtuais, utilizando-se a ferramenta *Google Meet* e, da plataforma *Moodle* do Núcleo de Educação a Distância (NEaD) da UVA que foi utilizada para o desenvolvimento de atividades teóricas e fóruns, com o intuito de promover debates sobre o referencial teórico utilizado para embasar essa investigação.

Durante os encontros virtuais, foram aplicadas situações didáticas abordando problemas do ENEM referentes ao conteúdo de Volume, fundamentadas nas dialéticas da TSD, com o propósito de organizar as sessões didáticas e a EDF, possibilitando analisar as atividades dos futuros professores, diante das situações didáticas do ENEM. Convém ressaltar que devido à condição imposta pela pandemia, as fases da TSD tiveram que ser adaptadas para o ensino virtual, na tentativa de garantir que suas etapas ocorressem sem prejuízos ao resultado da pesquisa.

Para selecionar os problemas do ENEM, limitou-se a questões que abordassem o objeto matemático escolhido de “Volume”. Assim, buscou-se investigar a formação docente para o ensino de volume de sólidos geométricos, com o intuito de contextualizar e ressignificar estes cálculos. Para tal, criaram-se situações didáticas retiradas de questões presentes nas provas do ENEM, pois as referidas provas apresentam grande variedade de problemas relacionados a este conteúdo, além de procurar selecionar aquelas questões que apresentassem potencial para serem desenvolvidas com ou pelo *software* GeoGebra.

Foram propostas onze situações que foram aplicadas em quatro encontros virtuais. Para tais aplicações, acreditou-se que os participantes (Onze alunos do curso de licenciatura em Matemática), disponham de conhecimentos prévios em conceitos de áreas de figuras

planas e volume de sólidos, com ênfase no princípio de Cavalieri, por tratar-se de princípios norteadores dos livros didáticos e da Lei de Diretrizes e Bases (LDB) para o ensino de Geometria Espacial, nas escolas brasileiras.

A pesquisa ocorreu durante cinco encontros virtuais, conforme se apresenta no Apêndice A, com o objetivo de analisar as ações desenvolvidas pelos professores em formação inicial, ao resolverem problemas sobre volume de sólidos geométricos com o apoio do *software* GeoGebra, como também verificar suas habilidades práticas e as estratégias de resolução de problemas, manifestadas com o intuito de favorecer a identificação e o desenvolvimento de competências profissionais de certos saberes geométricos que favoreçam o processo de ensino de Geometria Espacial e o conceito específico de Volume, além das concepções e conhecimentos matemáticos usados nas tomadas de decisões das resoluções dos problemas, na leitura e interpretação dos textos matemáticos presentes no enunciado da questão e dos teoremas que poderiam ser usados nas demonstrações.

Assim, para garantir o bom andamento da investigação, os 11 licenciandos foram orientados a dividirem-se em grupos que foram assim distribuídos: três grupos (dois grupos com 4 membros e um grupo com 3 membros). Os grupos criaram subgrupos em aplicativos de mensagens, de modo a garantir a troca de informações e estratégias de resolução, durante o processo de formulação. No momento da validação, um ou mais representantes do grupo apresentavam suas estratégias de resolução para a turma, por meio da plataforma online adotada na pesquisa, culminando com a institucionalização da pesquisadora pela mesma plataforma.

Para os encontros, foram necessários os seguintes materiais: lápis, papel, computador, celular, internet e o *software* GeoGebra, nas versões 5.0 ou 6.0. O *software* GeoGebra foi utilizado em todos os encontros da formação, com a intenção de promover uma melhor visualização das situações didáticas e propiciar um recurso que ajudasse a estabelecer melhores estratégias de resolução relacionadas aos cálculos de Volume. Antes de realizar o primeiro encontro, foi criado um grupo, no aplicativo de mensagens aqui já citado, para coleta de informações acerca de suas vivências práticas e teóricas de ensino e seus conhecimentos referentes ao *software* GeoGebra.

Também se utilizou o Ambiente Virtual de Ensino à Distância da UVA, com o intuito de desenvolver estudos sobre a parte teórica da pesquisa, como a TSD, Contrato Didático e tutoriais sobre o uso do *software* GeoGebra. Nesse ambiente, foram disponibilizados textos, vídeos e fóruns sobre os referidos temas, a fim de propiciar uma plataforma que permitisse explorar aspectos relevantes da formação.

No primeiro encontro, foi realizado uma formação sobre o uso das ferramentas básicas do *software* GeoGebra e suas figuras e formas, com a finalidade de mostrar como o *software* seria usado durante as aplicações das situações didáticas e, também, como as formas geométricas são construídas e visualizadas em terceira dimensão. Nos quatro encontros seguintes (Situações: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 e 11), a pesquisadora apresentou a construção pronta no GeoGebra, para que os futuros professores apenas manuseassem a construção no computador ou celular, realizando alterações e visualizando, de forma dinâmica, a questão proposta. O tempo médio de duração de cada sessão didática foi de 2:00h. A organização e descrição dos encontros estão no Quadro 3.

Quadro 3 - Descrição dos Encontros da Formação

Encontros da Formação	Descrição do Conteúdo abordado na Questão do ENEM	Ano de Aplicação da Questão no ENEM
I	Formação do uso das ferramentas básicas do GeoGebra e construções de figuras e formas na janela 2D e 3D.	-
II	O problema 1 requer o conhecimento de escala, de elementos de sólidos geométricos, área de figuras planas e noção intuitiva de volumes de bloco retangular.	2014
	O problema 2 exige o conhecimento das propriedades do cubo, porcentagem e noções de áreas e volumes.	2012
III	Problema 3 necessita de conhecimento da operação de multiplicação, noção intuitiva do volume de bloco retangular e de capacidade.	2017
	No problema 4, são necessários conhecimentos de unidade de medidas, área do trapézio e noção intuitiva de volumes.	2014
	Para o problema 5, são precisos conhecimentos de área de uma circunferência, noções de elementos do cilindro e da esfera.	2014
IV	No problema 6, são exigidos conhecimentos prévios de cálculo de volumes de sólidos, comparação de grandezas de mesma natureza e números racionais.	2011
	O problema 7 exige a mobilização de conhecimentos de área da circunferência, expressões algébricas e volume de sólidos.	2010
	No problema 8, exige-se conhecimento de área de uma circunferência e volume de um cilindro circular reto.	2013
	No problema 9, são necessárias noções capacidade de armazenamento e proporção de objetos cilíndricos e conhecimentos prévios de unidade de capacidade, expressões algébricas, área de uma circunferência e volume de sólidos.	2010

V	O problema 10 requer noções de vasos comunicantes, conhecimentos prévios de área da circunferência, volume de um cilindro, unidades de capacidade e expressões algébricas.	2019
	No problema 11, necessitam-se conhecimentos prévios de área de figuras planas e volume da pirâmide, noção de comparação entre volumes de dois modelos e de capacidade de armazenamento.	2009

Fonte: Elaboração da autora.

A ordem de aplicação das Situações Didáticas se deu mediante as possíveis dificuldades interpretativas da resolução dos problemas, assim definidas em razão das experiências de minhas práticas docentes, que poderiam se constituir em uma dificuldade na utilização do *software* GeoGebra, pelo pouco conhecimento do *software* apresentado pelos professores em formação. Com relação aos conhecimentos prévios dos conteúdos trabalhados, não se viu necessidade de elencá-los como critério de seleção da ordem de aplicação, uma vez que tais conceitos foram contemplados na formação básica e reforçados na disciplina de Geometria Espacial e Geometria Euclidiana, de acordo com a Matriz Curricular (**Anexo A**) do Curso de Licenciatura em Matemática da UVA, Sobral. Assim, não houve necessidade de explicações prévias, pois almejava-se que os participantes mobilizassem os conhecimentos sobre Geometria Espacial e noções de Volumes, adquiridos ao longo da formação profissional.

A coleta de dados ocorreu por meio de instrumentais como: registros fotográficos, gravações de áudios e audiovisuais, produções escritas, observações e questionários de pesquisa. É conveniente lembrar que, devido à natureza de aplicação da pesquisa, os participantes fizeram fotos e vídeos das resoluções e manipulação no GeoGebra e também *screenshot* das conversas nos grupos de *WhatsApp* para serem enviados à pesquisadora. Ressalta-se também, que os encontros no *Google Meet* foram todos gravados, com o consentimento de todos os participantes.

Esta pesquisa tem aprovação do Comitê de Ética tanto da instituição proponente, quanto da instituição coparticipante, como se pode verificar no **Anexo B**.

7.1 O *lócus* e os sujeitos da Pesquisa

A aplicação e a coleta de dados ocorreram, nos meses de maio e junho de 2020, de maneira remota, por meio da plataforma online disponibilizada pelo *Google*, com alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UVA, na cidade de Sobral, Brasil.

A pesquisa foi associada a um grupo de alunos em formação inicial, pois assim este estudo pode contribuir na formação profissional a respeito do ensino de Volume, ao mesmo tempo que se formaliza o uso do *software* GeoGebra para resolução de problemas.

Os sujeitos da pesquisa foram selecionados de acordo com os seguintes critérios: serem alunos do curso de Licenciatura em Matemática, terem cursado a disciplina de Didática da Matemática e serem integrantes do “Grupo de Estudos de Didática da Matemática”, por tratar-se de um tema que coincide com estudos desenvolvidos pelos integrantes do referido grupo, além de trazer uma abordagem pertinente para a formação dos futuros professores. Assim, os licenciandos poderiam articular os conhecimentos científicos do ensino e da pesquisa em prol de uma melhor formação acadêmica e profissional. Vale ressaltar que, por tratar-se de uma pesquisa voluntária, dos onze integrantes do grupo, dez participaram da pesquisa e um não conseguiu conciliar disponibilidade para os encontros da formação, sendo que iniciou a participação, porém não concluiu todo o processo.

Os dez participantes da pesquisa assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) que trata de esclarecer a natureza da investigação, os objetivos, os métodos, os benefícios e a garantia de anonimato. Esse termo também esclarece que as informações oriundas da análise de dados podem ser usadas pelos pesquisadores em publicações e/ou eventos científicos, conforme apresentado no **Anexo C**. Com o intuito de preservar o anonimato dos participantes, eles foram nomeados de P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8, P9 e P10. Para responder os problemas, eles tiveram acesso aos seguintes materiais: lápis, papel, arquivo ggb das construções no GeoGebra, arquivos em pdf das questões, códigos *QR-CODE* das construções no GeoGebra e também das questões do ENEM, computador e/ou celular. A seguir, no Quadro 4, apresentam-se algumas das características dos participantes, o semestre em que estão matriculados e seus conhecimentos sobre o GeoGebra.

Quadro 4 - Características dos Participantes da Pesquisa

Acadêmicos	Gênero Sexual	Semestre do Curso	Conhece o GeoGebra
P1	M	9º	Sim
P2	M	5º	Sim
P3	M	9º	Sim
P4	F	8º	Sim
P5	M	5º	Sim
P6	F	6º	Sim

P7	F	5°	Sim
P8	F	5°	Sim
P10	F	4°	Sim
P11	M	6°	Sim

Fonte: Elaboração da autora.

Pelo exposto no Quadro 4, pode-se perceber um equilíbrio na presença de homens e mulheres na área das exatas, caracterizando um crescimento do gênero feminino em cursos antes vistos como predominantemente masculino.

Ressalta-se que os professores em formação trabalharam em grupos que foram nomeados de Grupo 1, Grupo 2 e Grupo 3. É importante lembrar que o Grupo 3 contou somente com dois participantes, pois um de seus membros acabou desistindo durante a formação. Veja, no Quadro 5, o agrupamento dos participantes.

Quadro 5 - Distribuição dos participantes em grupos

Número de grupo	Participantes
1	P1, P2, P3, P4.
2	P5, P6, P7, P8.
3	P10, P11.

Fonte: Elaboração da autora.

Como já informado anteriormente, procurou-se selecionar licenciandos que já tivessem cursado a disciplina de Didática da Matemática, por isso todos os participantes encontram-se matriculados do 4º período em diante. Outro ponto importante foi a questão dos participantes fazerem parte do grupo de estudo, permitindo, assim, que todos os sujeitos envolvidos vivenciassem e fundamentassem os aprendizados obtidos em sala de aula, na prática. Finalmente, averiguou-se que todos os participantes já conheciam o *software* GeoGebra, mas somente suas funções básicas e sem utilizá-lo para resolução de problemas. Assim, buscou-se promover o interesse dos futuros professores em utilizar essa ferramenta tecnológica em prol dessas resoluções, bem como apresentar um recurso didático que pode ser incorporado às práticas docentes dos futuros professores.

Ressalta-se que os professores em formação responderam as situações didáticas em casa; porém, houve vários momentos de compartilhamento de ideias e de estratégias com os colegas por trocas de mensagens, nos grupos por eles criados, seguindo os preceitos da teoria de ensino proposta nesta investigação (ação, formulação, validação e institucionalização).

A pesquisadora não se manifestava durante o desenvolvimento das atividades; a não ser quando solicitada, evitando assim direcionar aos grupos as soluções pretendidas. A

institucionalização das noções dos conceitos foi realizada ao final de cada situação, levando em consideração as estratégias formuladas pelos grupos.

A seguir, apresenta-se a última fase da ED, Análise a *posteriori* e validação. Assim, traz-se as vivências obtidas a partir da aplicação da TSD, seguidas da apresentação dos pontos mais relevantes coletados durante a aplicação das situações didáticas e do questionário de avaliação da pesquisa, atribuindo assim uma maior robustez à validação da investigação.

8 ANÁLISE *POSTERIORI* E VALIDAÇÃO DA ENGENHARIA

Neste capítulo, apresenta-se a quarta e última fase da metodologia de pesquisa utilizada neste estudo. Segundo Almouloud (2007, p. 177), uma análise *a posteriori* tem por objetivo “relacionar as observações como os objetivos definidos *a priori* e estimar a reprodutibilidade e, também, a regularidade dos fenômenos didáticos identificados”. Portanto, nesse momento se procede à análise de dados coletados durante a fase da experimentação, confrontando-os com a análise *a priori*, possibilitando assim que a validação dos objetivos propostos aconteça, mediante a aplicação das situações didáticas.

No transcurso desta sessão, faz-se uma explanação do desenvolvimento do experimento e uma análise das sessões didáticas, fundamentadas pela TSD e EDF, visando à validação interna das situações problemas, originadas da interação do professor em formação com os conhecimentos oriundos de suas vivências práticas e das situações didáticas.

Devido à necessidade de realizar uma aplicação remota, foi preciso estabelecer algumas diretrizes que pudessem garantir o bom andamento da aplicação prática, estruturadas e fundamentadas na TSD e na EDF. Isso posto, tinha-se o desafio de usar uma teoria de ensino (TSD) que fora criada para ser aplicada presencialmente, sendo totalmente utilizada de modo remoto, como também a metodologia de pesquisa da EDF. Assim, apresenta-se as interações dialéticas, previstas na TSD, vivenciadas pelos professores em formação, com o intuito de reconhecer a manifestação de algumas de suas intenções no processo de ensino e de aprendizagem de uma situação didática do ENEM.

8.1 Análise *a posteriori* e validação das Situações Didáticas do ENEM, aplicadas no segundo encontro

As situações didáticas 1 e 2 do ENEM têm por objetivo levar os futuros docentes a fazerem uso dos conhecimentos adquiridos durante a formação básica numa abordagem didática compreensível para os níveis propostos nos problemas. No entanto, por tratar-se de uma aplicação remota, teve-se o cuidado de solicitar aos participantes que não utilizassem livros, sites e nenhum outro recurso para pesquisas, além dos disponibilizados pela pesquisadora.

Nesse momento, instituiu-se o contrato didático com todos os participantes da pesquisa, pois de acordo com Santos (2018, p. 67), o contrato didático ressalta o

desenvolvimento do trabalho docente, a organização das estratégias metodológicas envolvidas na preparação de uma situação didática, a postura de mediador do professor, como também possibilita aos estudantes tornarem-se agentes mais “investigativos, reflexivos, críticos, autônomos e colaborativos entre si”.

Assim, estabeleceram-se as seguintes orientações para a realização da pesquisa:

- Instituir os grupos (três), que foram formados pelos próprios participantes;
- Cada grupo deveria criar um grupo no *WhatsApp*, para que seus membros pudessem se comunicar durante a resolução da atividade e facilitar o debate, com o intuito de estabelecer estratégias de resolução. Deveriam fazer *screenshot* e enviar à pesquisadora, assim como gravações de áudio (caso tenha) das conversas realizadas para chegar-se à solução da situação didática proposta;
- Cada grupo deveria escolher um representante para realizar a socialização de suas resoluções, exibindo e explicando as estratégias adotadas para resolver o problema. Os membros de cada grupo poderiam alternar suas representações a cada encontro;
- Durante a aplicação da situação didática, os participantes fariam anotações das resoluções, descrevendo cada etapa, anotando as dúvidas, as dificuldades e tudo mais que achassem necessário para registrar as etapas da solução;
- Deveriam ser feitas fotos e/ou gravações audiovisuais das resoluções do caderno, da manipulação do GeoGebra e todas as anotações realizadas pelos grupos.

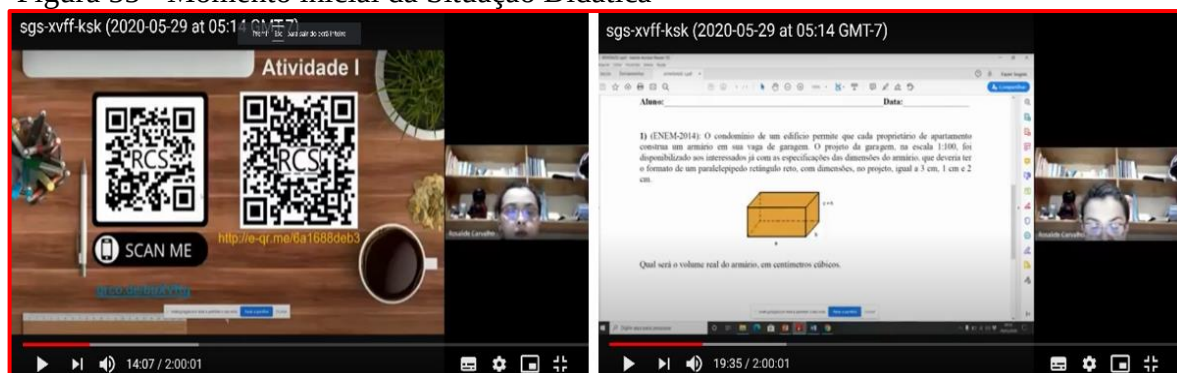
Assim, ao final de cada encontro, todos os registros deveriam ser enviados à pesquisadora para análise e armazenamento dos dados a serem utilizados neste trabalho.

8.1.1 Análise a posteriori e validação da situação didática 1

Iniciou-se essa sessão didática através da ferramenta *Google Meet*, em que os participantes foram orientados a visualizarem as situações didáticas do ENEM e as construções dessas situações, no GeoGebra, que foram disponibilizadas em tela através de códigos *QR-CODE* e de *links* das respectivas atividades que estão no Apêndice B, além de serem enviadas para o grupo de *WhatsApp*. Enquanto os futuros professores se debruçavam sobre o enunciado do problema I, achou-se por bem, deixar exposto em tela a questão para

assim garantir que os participantes dispusessem de todas as condições necessárias para solucionar a situação problema, conforme as imagens da Figura 55.

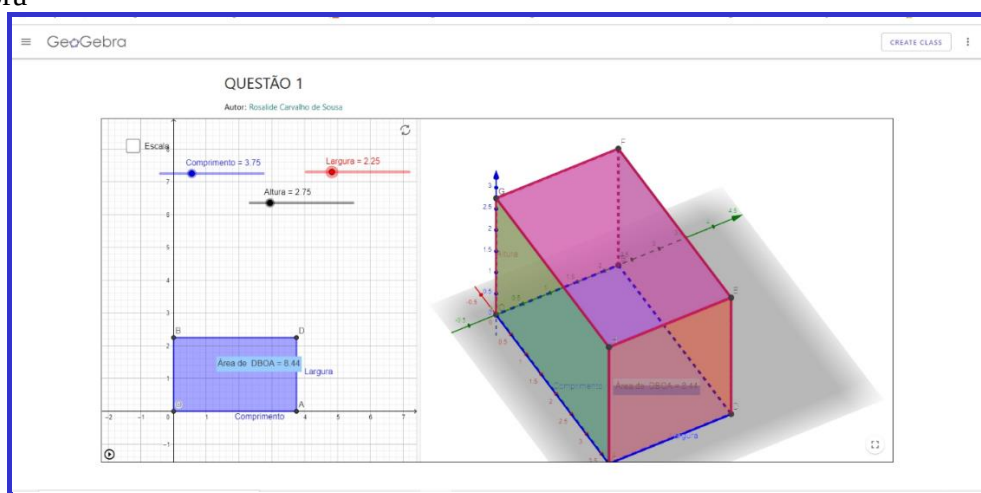
Figura 55 - Momento inicial da Situação Didática



Fonte: Dados da pesquisa.

Desse modo, os professores em formação tiveram acesso aos problemas, realizaram a leitura e visualizaram a construção da questão no GeoGebra (Figura 56). Começaram a trabalhar, inicialmente de forma individual (conforme relatos dos participantes), mas depois, por meio de troca de ideias e informações através de mensagens via *WhatsApp*, constituindo-se assim as fases da ação e formulação na busca por solucionar a questão, conforme antevisto na análise *a priori*. Ressalta-se, na dialética da ação, o uso do *software* GeoGebra, como recurso tecnológico utilizado para análise das propriedades e elementos matemáticos presentes na situação didática proposta.

Figura 56 - Momento em que o acadêmico inicia a ação de modelização no GeoGebra

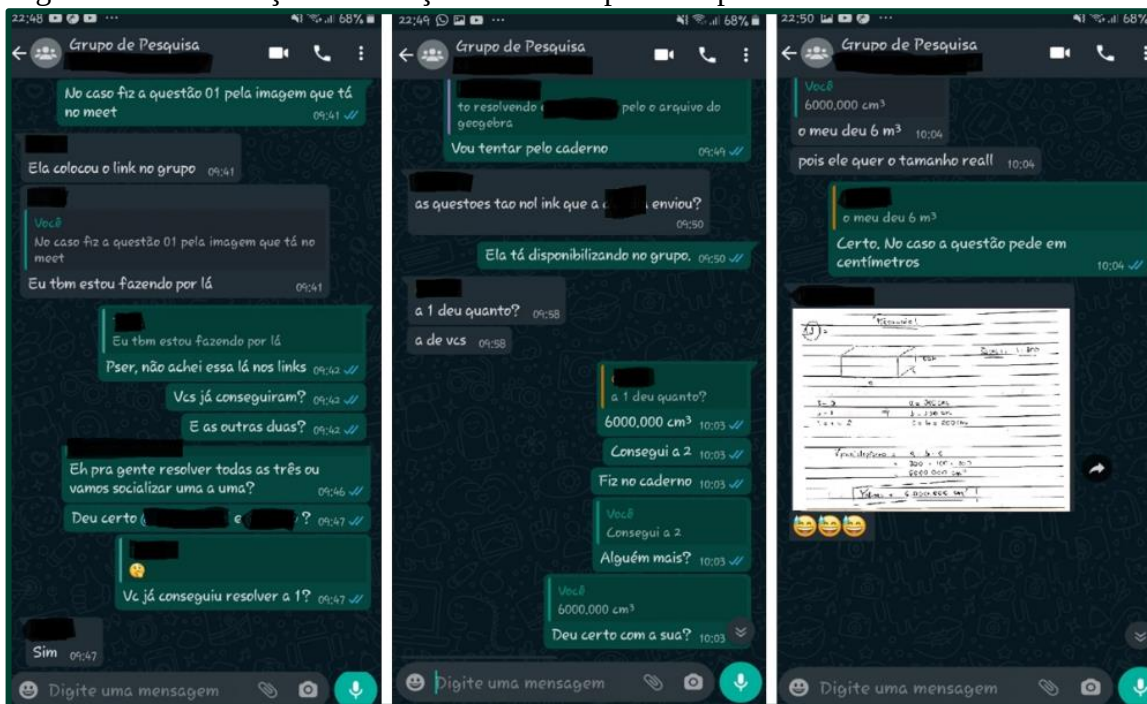


Fonte: Elaboração da autora.

Na dialética da formulação, é o momento que se pode proceder a troca de informações orais ou escritas referentes ao enunciado e à resolução do problema. Assim, observaram-se os diálogos e a elaboração de estratégias do Grupo 1, disponibilizados por meio de *screenshot* no *WhatsApp*, sobre a modificação das medidas do comprimento, largura e altura e a relação com

a escala de 1 para 100, como já havia sido previsto. A imagem da Figura 57 mostra a dialética da formulação entre os futuros professores do grupo, na busca da resolução da situação proposta.

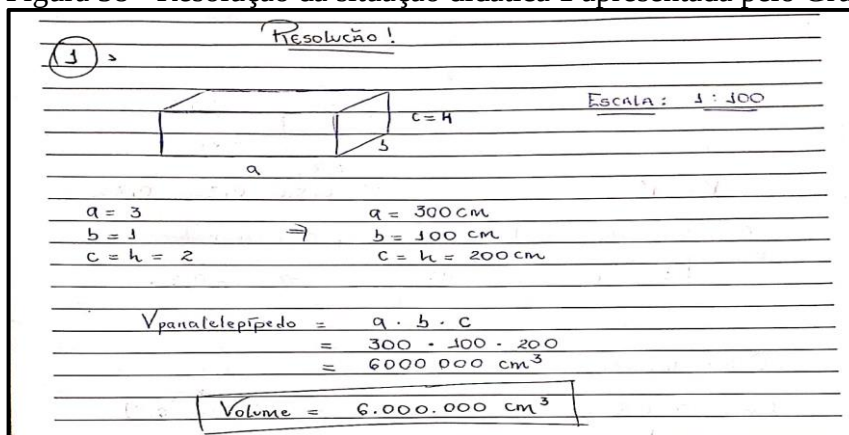
Figura 57 - Formulação da situação didática 1 pelo Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa.

Analisando os diálogos desenvolvidos pelos participantes desse grupo, verificou-se que houve a manipulação da construção no *software* GeoGebra para formular estratégias de resolução. Em seguida, o Grupo 1 apresentou sua solução (Figura 58), registrada no ambiente do lápis e papel.

Figura 58 - Resolução da situação didática 1 apresentada pelo Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa.

Observa-se que o grupo mobilizou a noção intuitiva de volume de um bloco retangular para proceder ao registro algébrico da resposta do problema 1. Nesse sentido, fazendo uma correta interpretação do enunciado da questão 1, eles relacionaram a grandeza escalar de

1:100 para estabelecer as medidas reais das arestas do paralelepípedo, instituindo a conversão e determinando os valores numéricos de suas medidas em: $a = 300\text{cm}$; $b = 100\text{cm}$ e $c = 200\text{cm}$.

Para finalizar a resposta, realizaram o cálculo por meio da expressão que determina o volume de um paralelepípedo, de acordo com o que se havia previsto na análise *a priori*.

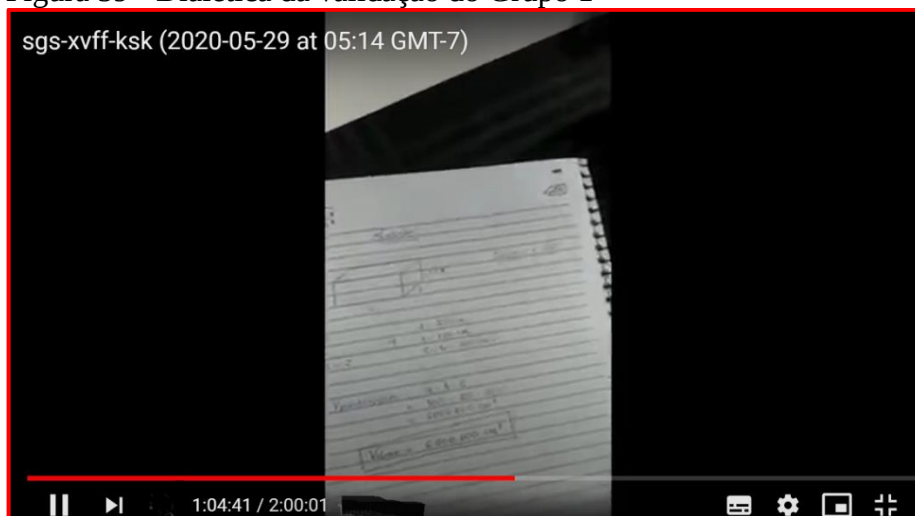
$$V_{\text{paralelepípedo}} = a.b.c$$

$$V_{\text{paralelepípedo}} = 300.200.100$$

$$V_{\text{paralelepípedo}} = 6.000.000 \text{ cm}^3$$

No momento da validação, o representante desse grupo explicou as estratégias de resolução a todos os participantes (Figura 59), apresentado o modelo matemático por eles formulado.

Figura 59 - Dialética da validação do Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa.

Segue a transcrição do representante do grupo, captada pela gravação do *Google Meet*, no momento da validação.

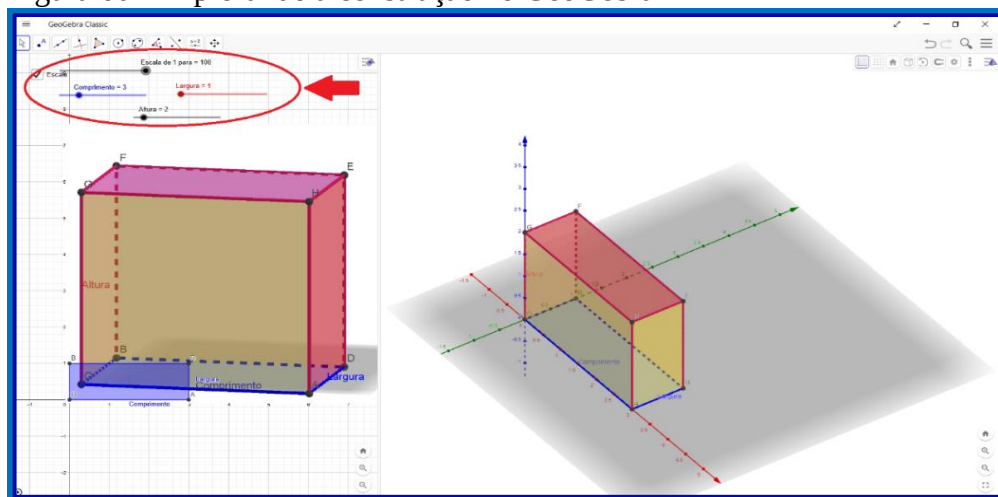
P3: No caso meu paralelepípedo tem as dimensões a , b e c , no caso “ c ” sendo a altura. Coloquei meu “ a ” valendo 2cm , o “ b ” sendo 1cm e “ c ” valendo 2cm . Para que eu possa ter o volume de meu paralelepípedo eu preciso multiplicar as três dimensões: a base, a lateral da minha base e a altura. No caso eu tenho a escala de 1 para 100, como na minha figura o valor de “ a ” é 3 cm , então o tamanho real é 300, pois faço a multiplicação de 3 vezes 100. Assim, o valor “ b ” vai ser 100 e o valor de “ c ” vai ser 200. Para que eu possa ter o valor de meu paralelepípedo eu preciso fazer a multiplicação desses três valores: $300 \times 100 \times 200$. Realizando a multiplicação desses três valores eu vou ter o volume do meu paralelepípedo, que no caso é $6.000.000 \text{ cm}^3$.

As vivências das etapas da ação, formulação e validação (situação adidática), possibilitaram aos participantes do Grupo 1, mobilizar os conhecimentos teóricos e práticos,

despertando estratégias de resolução que podem ser aplicadas em sala de aula, contribuindo com a formação desses futuros professores.

O Grupo 2 realizou ações, mobilizando seus conhecimentos para apresentar um modelo matemático de solução do problema proposto. Para tanto, eles utilizaram o *software* GeoGebra para visualizar a relação entre o produto das grandezas comprimento, largura e altura e observar o aumento ou a diminuição do formato do bloco retangular, por meio da movimentação da ferramenta controle deslizante (Figura 60).

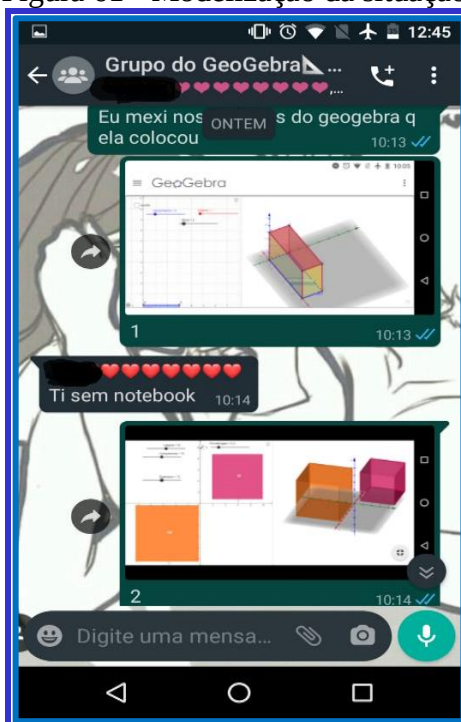
Figura 60 - Explorando a construção no GeoGebra



Fonte: Construção da autora.

Na imagem seguinte (Figura 61), mostra-se que o Grupo 2 utilizou a construção do *software* GeoGebra para formalizar a resolução do problema.

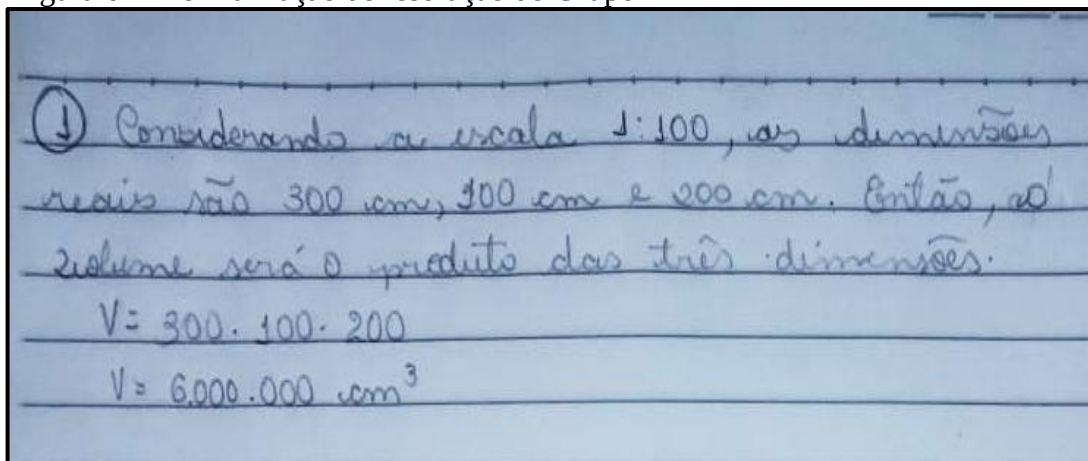
Figura 61 - Modelização da situação didática 1 no GeoGebra



Fonte: Dados da pesquisa.

O Grupo 2 sintetizou um modelo matemático que formalizasse a resolução do problema 1. Vejam na Figura 62 essa formalização.

Figura 62 - Formalização de resolução do Grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa.

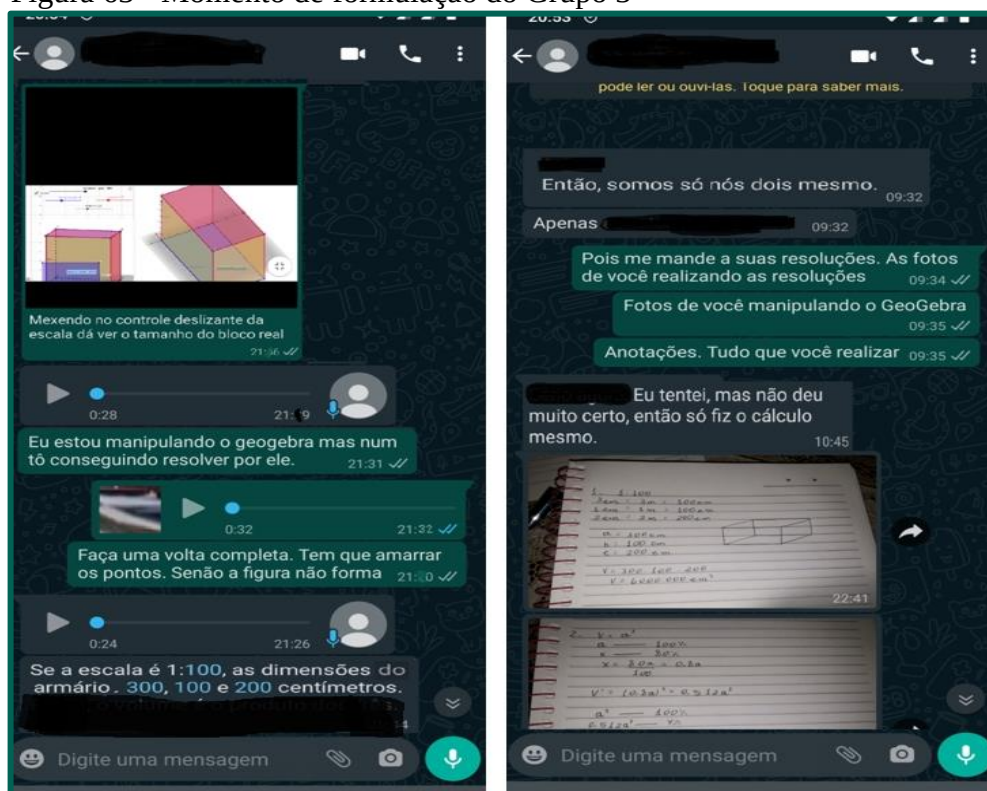
Observando a estratégia do Grupo 2, vê-se claramente a relação das medidas do comprimento, largura e altura com a escala de 1 para 100, haja vista o enunciado da questão fazer um comparativo do tamanho virtual com o tamanho real do armário. Esta descrição tem como consequência o modelo matemático do volume de um paralelepípedo, que é o produto das medidas do comprimento, largura e altura, resultado na fórmula matemática $V = a.b.c$, formalizando assim a modelização matemática de resolução do problema 1.

No momento da validação, o grupo expôs suas estratégias de resolução a todos os participantes do encontro. Segue a transcrição do áudio, captada pela gravação do *Google Meet*, durante a explicação do representante do grupo.

P1: Nossa solução está igual ao do outro grupo. Nós multiplicamos os valores das arestas a, b e c por 100, para colocar as medidas do armário no tamanho real, ficando em 300, 100 e 200 centímetros. Depois, multiplicamos os valores $300.100.200 = 6.000.000 \text{ cm}^3$, encontrando o volume do paralelepípedo.

Já o Grupo 3 desenvolveu uma estratégia de resolução inicialmente não prevista na análise *a priori*, pois não utilizou a construção do *software* GeoGebra para resolver a questão. Assim, no momento da dialética da formulação, observou-se que os participantes desse grupo mobilizaram os conhecimentos epistêmicos e pragmáticos para apresentar um modelo algébrico de resolução. Veja, na Figura 63.

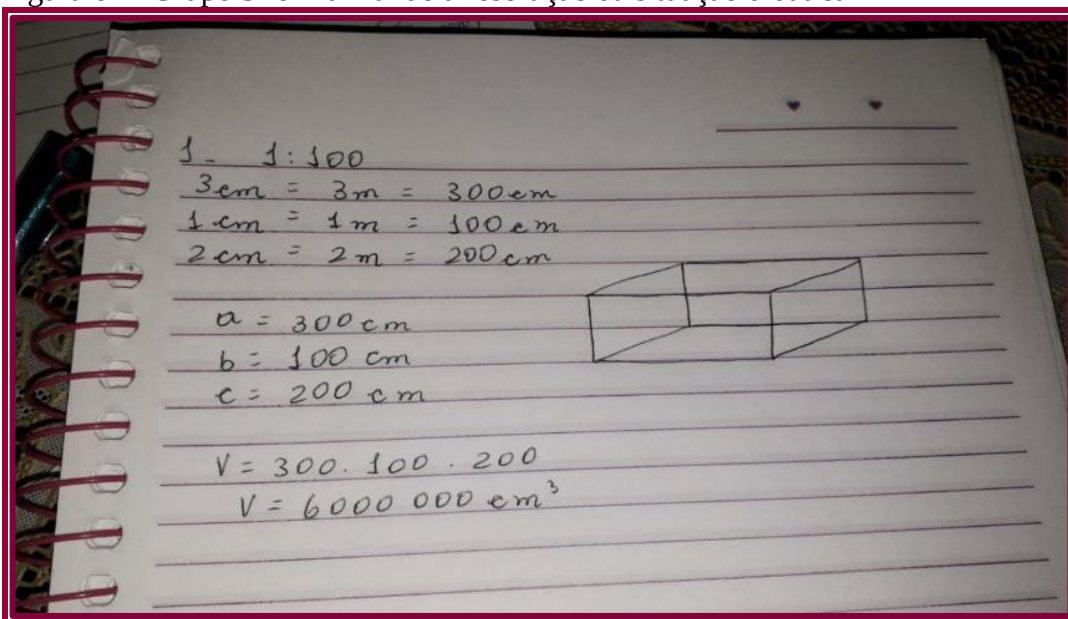
Figura 63 - Momento de formulação do Grupo 3



Fonte: Dados da pesquisa.

O grupo apresentou sua solução (Figura 64) registrada por meio da utilização de lápis e papel, como segue na imagem.

Figura 64 - Grupo 3 formalizando a resolução da situação didática 1



Fonte: Dados da pesquisa.

Conforme exibição da Figura 64, percebe-se que o Grupo 3 relacionou as dimensões do papel com o tamanho real por meio da escala de 1 para 100, como destacado no enunciado

do problema, para, a partir daí, formular a expressão de um modelo matemático do cálculo do volume de um bloco retangular.

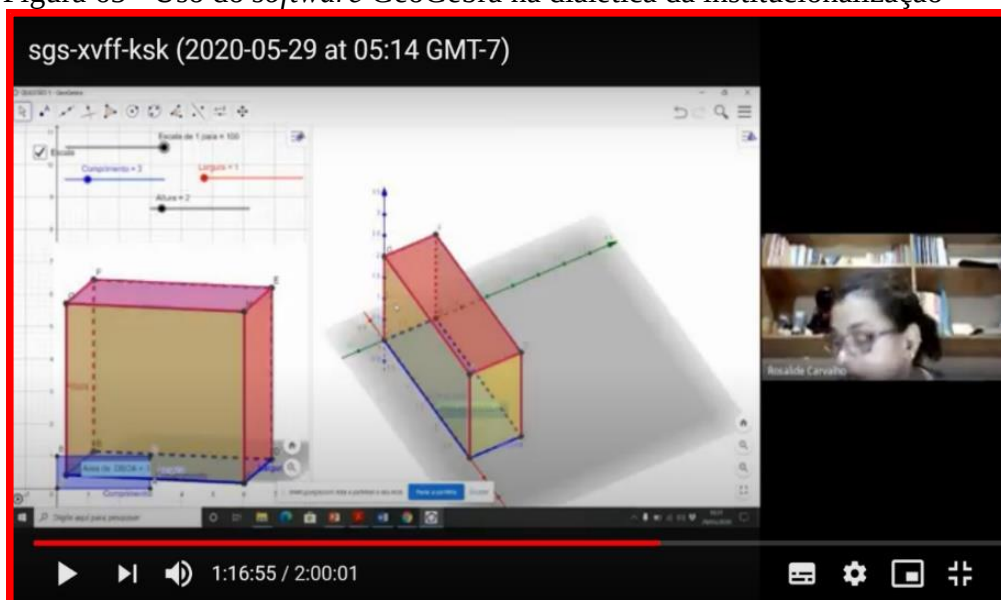
No momento da etapa da validação, o grupo não quis expôr seu modelo de resolução, apresentou apenas de forma oral para os demais participantes, relatando que para resolver o problema eles efetuaram o cálculo semelhante às soluções apresentadas pelos demais grupos, realizando a multiplicação das dimensões das arestas e obtendo o volume do paralelepípedo. O representante ressaltou dificuldades no decorrer do processo de solução, elencando o fato de conhecer pouco sobre o *software* GeoGebra e, conseqüentemente, ter pouca habilidade em manipular o objeto para solucionar o problema proposto. Assim, percebeu-se o que pode vir a constituir-se em um pequeno obstáculo da ação docente, haja vista a comprovação cada vez maior da necessidade da inserção de ferramentas tecnológicas para o ensino e aprendizagem da matemática.

Verificou-se que todos os grupos conseguiram encontrar $6.000.000\text{cm}^3$ como volume real do armário; portanto, enfatiza-se que o objetivo da situação didática 1 foi atingido, uma vez que os futuros professores conseguiram resolver o problema, apresentando suas estratégias de resolução e contribuindo para enriquecer a formação dos futuros professores, propiciando assim uma melhor preparação para a realidade da sala de aula.

Com relação ao recurso didático do *software* GeoGebra, segundo as dialéticas dos participantes, contribuiu na visualização do sólido em 3D, ajudando na abstração do objeto; no entanto, não foi considerado como elemento fundamental para solucionar a questão. Porém, vale complementar que seu potencial para uso com alunos da educação básica foi reconhecido pelos professores em formação, sendo visto como um recurso valioso no momento da solução e validação matemática.

No momento da institucionalização, a pesquisadora elencou as estratégias de resolução apresentadas pelos participantes em único problema, por meio de explanação das variáveis didáticas e dos obstáculos surgidos no transcurso das tentativas de resolução. Vale salientar também que, na dialética da institucionalização, a pesquisadora utilizou o *software* GeoGebra para confrontar o modelo gerado no computador com o modelo matemático exibido no enunciado da questão (Figura 65). Por tratar-se de uma formação de professores, acredita-se que seja importante relacionar o uso do recurso didático para instituir e validar as propriedades formais do conteúdo implícito na questão.

Figura 65 - Uso do *software* GeoGebra na dialética da institucionalização



Fonte: Dados da pesquisa.

Desse modo, buscou-se demonstrar aos professores em formação, a importância da utilização de diferentes recursos didáticos para instituir-se um novo conhecimento, mostrar situações com as quais eles poderão se deparar, quando estiverem no exercício da docência, como também a importância de valorizar os diferentes caminhos percorridos pelos alunos para chegar à resolução de uma situação problema.

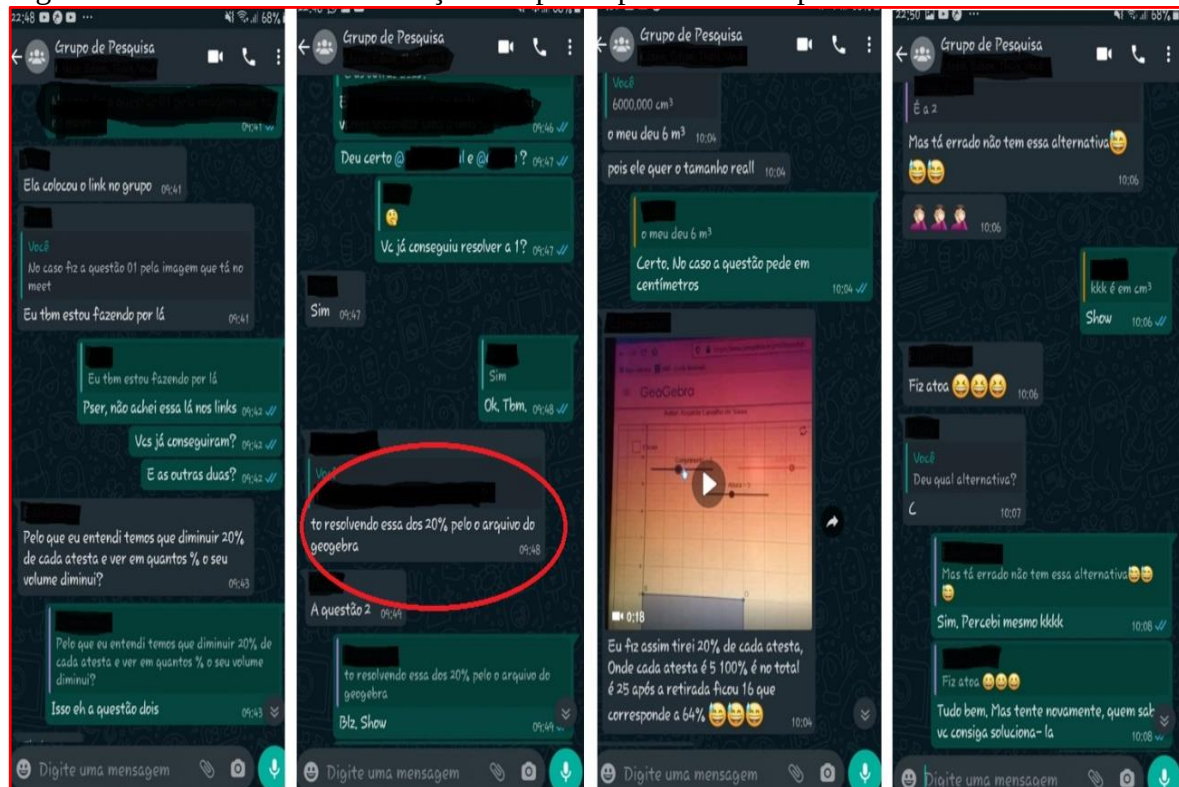
Após a formalização das quatro fases da TSD na primeira situação, deu-se início às etapas de ação, formulação, validação e institucionalização da situação didática 2, seguindo os mesmos parâmetros de aplicação do problema 1.

8.1.2 Análise a posteriori e validação da situação didática 2

De modo semelhante à aplicação da situação didática 1, os participantes começaram a resolução de maneira individual para, logo em seguida, realizarem as trocas de ideias com o grupo, debatendo e expondo os conhecimentos prévios apresentados na análise *a priori*. Assim eles realizaram a leitura da questão e começaram as tentativas de resolução do problema. Enquanto isso, o problema ficou exposto em tela para facilitar o acesso às informações, durante a realização da atividade. No primeiro momento, os professores em formação procuraram estabelecer uma relação funcional entre a aresta do cubo e a propriedade de contração de um bloco cúbico, após o cozimento, conforme informação presente no enunciado do problema.

Na etapa da formulação, o Grupo 1 iniciou as trocas de informações, objetivando a resolução do problema. Nesse momento, a pesquisadora reforçou a utilização da construção da Figura, no *software* GeoGebra. Observaram-se assim os diálogos, por meio das trocas de mensagens no *WhatsApp*, sobre o padrão entre o volume do cubo original e o volume do cubo após a contração. A imagem da Figura 66 mostra os diálogos desse grupo sobre um possível padrão de decrescimento da porcentagem de cada aresta com o volume do cubo.

Figura 66 - Momento da formulação dos participantes do Grupo 1



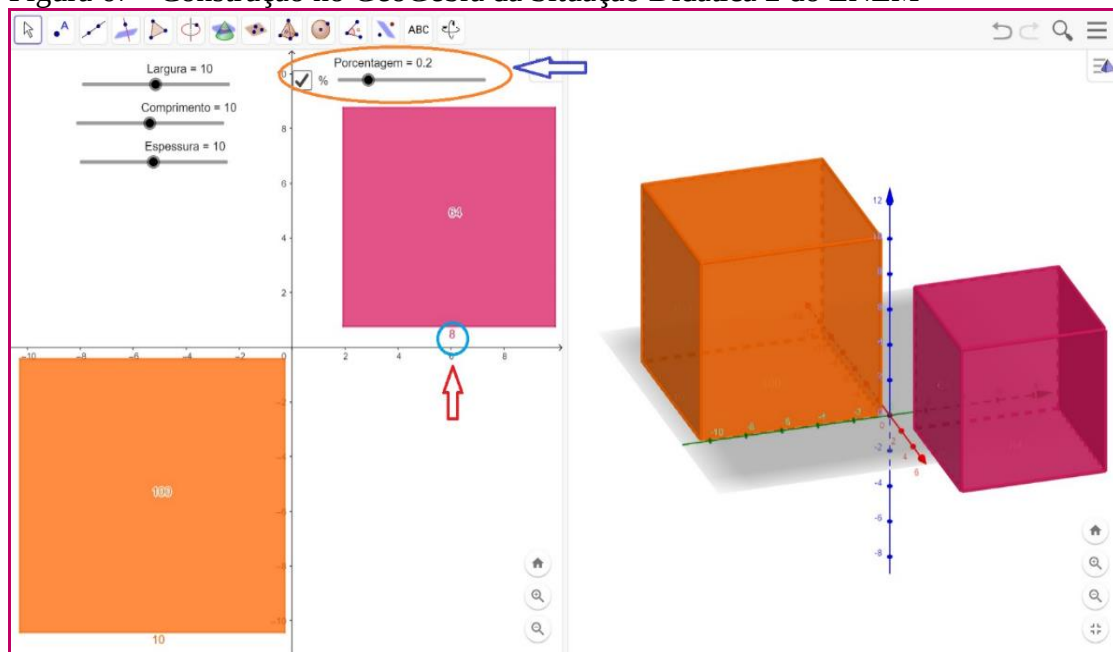
Fonte: Dados da pesquisa.

Observa-se, pelos diálogos exibidos na Figura 66, que o grupo começa a estabelecer estratégias para resolver o problema, percebendo que para chegar à resolução da questão, faz-se necessário reduzir a aresta original em 20%, conforme previu-se na análise *a priori*. Chama-se atenção para o fato dos futuros professores, conforme orientações iniciais da pesquisadora, já começarem a utilizar a construção do objeto no GeoGebra. Percebeu-se, pelo exposto, que um dos participantes exibe a utilização da construção aos demais integrantes do grupo, por meio de um vídeo e da descrição de como procedeu a seus cálculos para chegar-se à solução da questão, gerando um debate que promoveu a interação e as manifestações de outras resoluções pelos participantes.

Eles manipulam a construção no *software* (Figura 67), a partir da ferramenta “controle deslizante”. Na imagem abaixo, tem-se os “controles deslizantes” (Largura, Comprimento e Espessura) relativos às arestas do cubo original (laranja) e ao “controle deslizante”

(Porcentagem) correspondente às arestas do segundo cubo (rosa), relacionando o objeto após a contração. Assim, os participantes puderam visualizar a dinâmica da construção ao realizarem a movimentação do controle deslizante “Porcentagem”, propiciando verificar a proporção do aumento e redução lineares do cubo laranja, encontrando a nova medida da aresta e, portanto, formalizando a estrutura necessária para solucionar a situação didática 2, conforme havia sido previsto na etapa da análise *a priori*. Veja a imagem abaixo.

Figura 67 - Construção no GeoGebra da Situação Didática 2 do ENEM



Fonte: Construção da autora.

No momento da formulação, o Grupo 1 inovou e realizou a própria construção do objeto no GeoGebra, ação não prevista na análise *a priori*. Procuraram relacionar a redução de 20% na porcentagem das arestas para encontrar o valor da nova medida, após a contração. Observou-se que, durante a dialética da formulação, eles discorreram sobre os métodos utilizados para solucionar o problema, permitindo assim que o professor P1 percebesse que havia cometido um erro, durante sua tentativa de resolução, ao relacionar as medidas das arestas à área, conforme exibida na janela de visualização do *software*, e não ao cubo, exposto em terceira dimensão na janela 3D. Assim ele pode refazer sua estratégia de solução do problema 2.

Em seguida, começaram a estruturar um modelo matemático, a partir da observação das modificações proporcionadas pelo manuseio do recurso tecnológico do GeoGebra e também pela troca de conhecimento epistêmico para padronizar uma fórmula (Figura 68) para o cálculo dessa situação-problema.

Figura 68 - Modelização de resolução do Grupo 1

2

a a a $- 20\%$ $0,8a$ $0,8a$ $0,8a$

$V = a^3$ $V = 0,8a \cdot 0,8a \cdot 0,8a$

O valor da aresta era a , com a redução de 20% $\rightarrow a - 20a = \frac{100a - 20a}{100} \Rightarrow a - 0,2a \Rightarrow 0,8a$

CUBO INICIAL $\Rightarrow V = a^3$

CUBO COM REDUÇÃO DE 20% $\Rightarrow V = (0,8a) \cdot (0,8a) \cdot (0,8a)$

$\rightarrow V = (0,8a) \cdot (0,8a) \cdot (0,8a)$
 $V = (0,64a^2) \cdot (0,8a)$
 $V = 0,512a^3$

$V = 0,512 \cdot 100 \Rightarrow V = 51,2\%$ NO VALOR

MAS PRECISAMOS SUBTRAIR DE 100% PARA ENCONTRAR O VALOR QUE DIMINUIU.

$100\% - 51,2\%$
 $48,8\%$ Menos que o valor original, reduzindo o volume para $(0,8a)^3$.

Fonte: Dados da pesquisa.

Desse modo, observou-se que, primeiramente, o grupo estabeleceu a medida da aresta do cubo após a contração, fazendo a redução de 20% de sua medida original. Com o valor inicial da aresta sendo “a”, procedendo ao cálculo da seguinte expressão:

$$a - \frac{20a}{100} = \frac{100a - 20a}{100} =$$

$$a - 0,2a = 0,8a$$

Em seguida, procedeu ao cálculo do volume dos dois cubos, afim de mostrar a relação da redução da porcentagem.

Cubo Inicial: $V = a^3$

Cubo com redução de 20%:

$$V = (0,8a) \cdot (0,8a) \cdot (0,8a)$$

$$V = 0,512a^3$$

Depois, multiplicaram esse valor por 100, para obter a porcentagem:

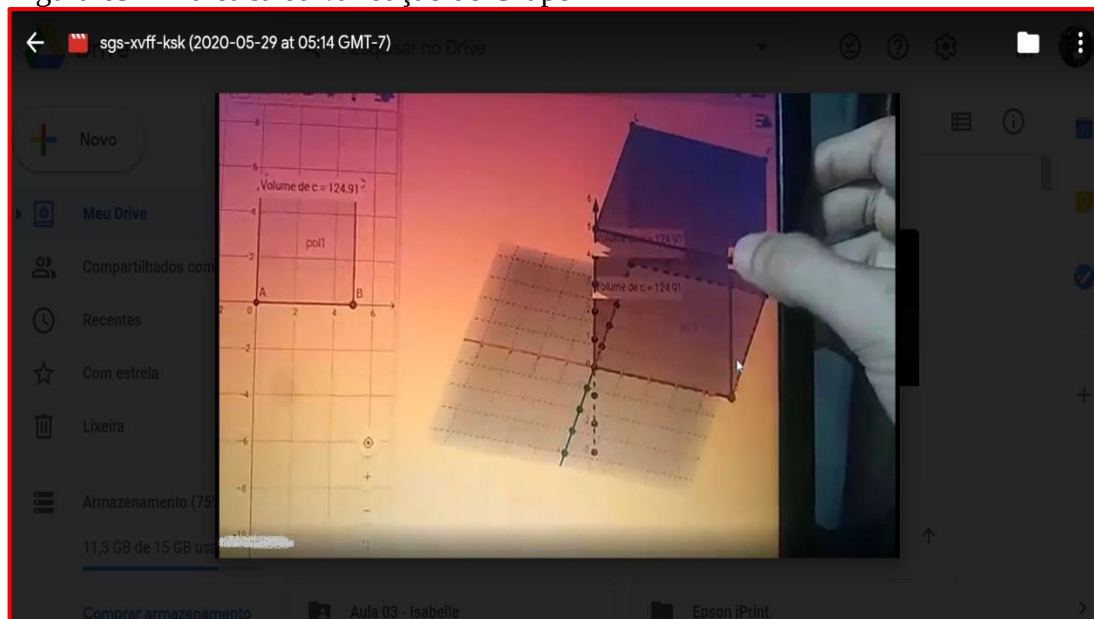
$$V = 0,512 \cdot 100 = 51,2\%$$

Finalizando com uma subtração simples para determinar a porcentagem de redução do cubo, após a contração:

$$100\% - 51,2\% = 48,8\%$$

Para validar a estratégia de resolução, o Grupo 1 promoveu uma exposição, por meio da manipulação da construção no *software* GeoGebra. Veja Figura 69.

Figura 69 - Dialética da validação do Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa.

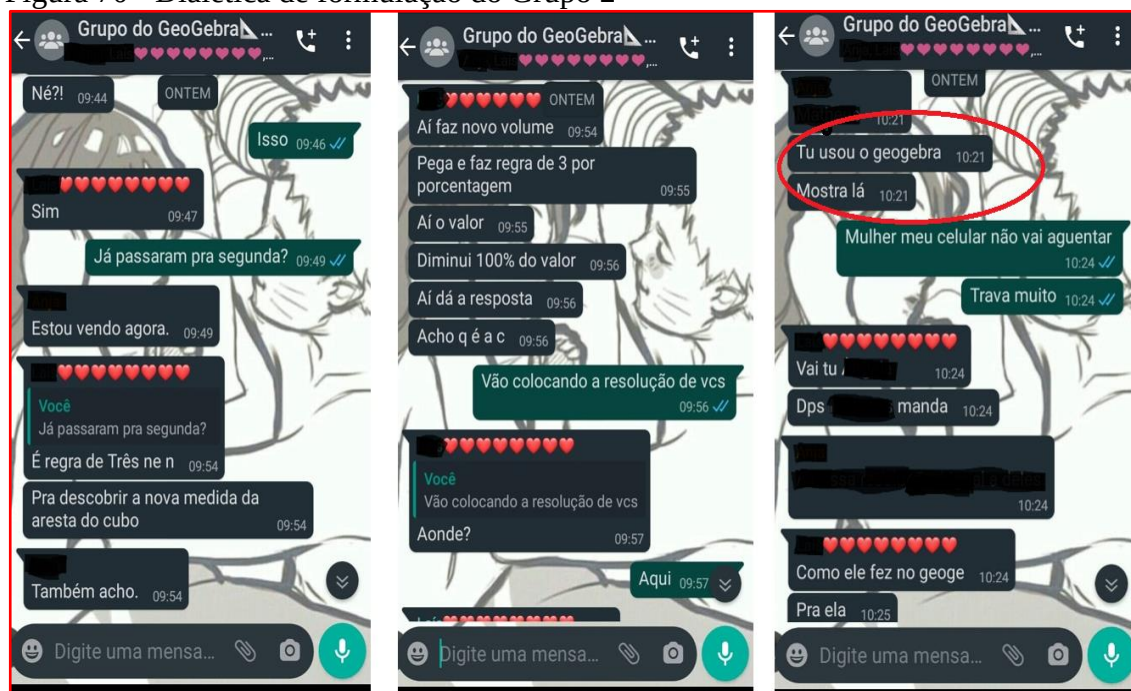
A partir da transcrição do áudio coletado no momento da exposição do representante do Grupo 1, pelo *Google Meet*, tem-se a explicação da estratégia de resolução, no momento da validação.

P1: Levando em consideração a questão, a gente fez a construção do cubo no GeoGebra e colocou um valor para as arestas, que no caso foi 5cm, em que o volume total é 125 cm^3 . Tiramos 20% de cada aresta, passando a valer 4 cm, no caso, a altura, o comprimento e a largura diminui para 4 cm. Socializando com o grupo no *WhatsApp*, fizemos uma regra de três, assim, cada aresta valendo 4 cm, nós chegamos ao valor cúbico de 64 cm^3 , sendo que o total, o 100% corresponde ao volume de 125 cm^3 . Então nós resolvemos a regra de três e chegamos à porcentagem de 51,2%, que no caso é o tamanho que deve ser diminuído do volume inicial. Então, agente pegou esse valor e subtraiu do 100%, o que deu 48,8%, que no caso ficou sendo a alternativa “C” como resposta.

Nesse momento, a pesquisadora indagou ao representante do grupo, o motivo para ele não utilizar a construção pronta disponibilizada previamente. Então, ele respondeu que teve dificuldades em manipular a construção, devido ao fato de seu celular está travando muito naquele momento, impossibilitando o manuseio do controle deslizante; assim, ele resolveu criar a própria resolução no GeoGebra.

Já o Grupo 2, na dialética da formulação, realizou ações diferentes das utilizadas pelo Grupo 1. No entanto, também fizeram uso da construção no GeoGebra, conforme relato de seus participantes (Figura 70), para formular a resolução.

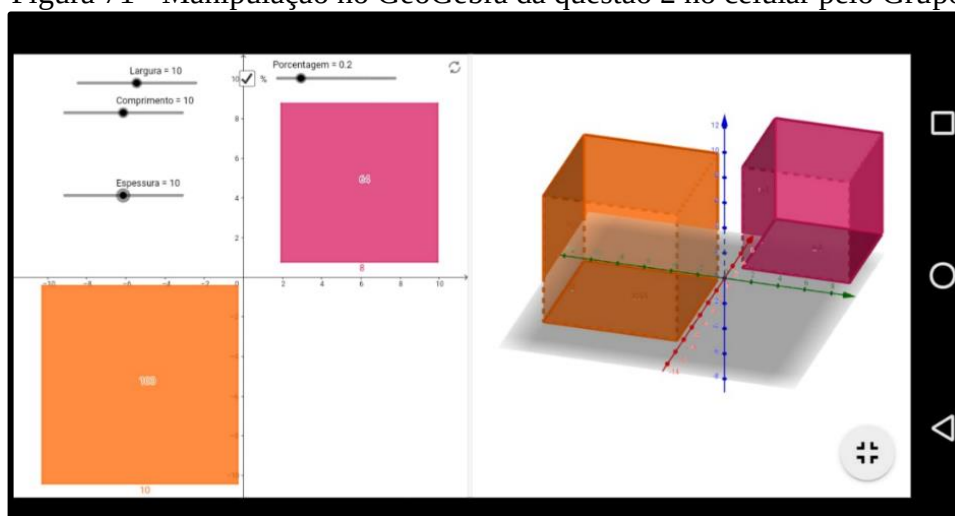
Figura 70 - Dialética de formulação do Grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa.

Na tentativa de estabelecer uma estratégia de resolução, os membros do Grupo 2 acessaram a construção do GeoGebra (Figura 71) da questão 2, na tela do celular, na busca por instituir um modelo de resolução. Convém ressaltar que para acessar essa construção no *smartphone* foi disponibilizado um código QR-CODE para os participantes, na tela do *Google Meet*.

Figura 71 - Manipulação no GeoGebra da questão 2 no celular pelo Grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa.

A partir da manipulação dessa construção, os participantes do Grupo 2 perceberam que, reduzindo 20% da aresta do cubo original, ou seja, 0,2 de " a ", encontra-se uma nova medida para a aresta, cujo valor é 8 ou mais precisamente, $0,8a$. Assim, recorreram à álgebra para formular um modelo matemático de solução para o problema 2 (Figura 72).

Figura 72 - Registro algébrico da solução da situação didática 2 pelo Grupo 2

Resolução Atividade II

Redução de 20% das dimensões lineares.

$$V_1 = c.l.h$$

$$V_2 = c. \frac{80}{100} . l. \frac{80}{100} . h. \frac{80}{100}$$

$$V_2 = c.l.h. \left(\frac{80}{100}\right)^3$$

$$V_2 = V_1 . \frac{512}{1000}$$

$$V_2 = \frac{51,2}{100} . V_1$$

$$V_2 = 51,2\% . V_1 \quad \therefore V_2 \text{ é } 48,2\% \text{ menor que } V_1$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Na imagem acima (Figura 72), tem-se uma estratégia de resolução diferente da apresentada pelo Grupo 1. Então, os professores em formação do Grupo 2 apresentam um modelo matemático embasado nos conhecimentos epistêmicos de geometria, formalizando o cálculo do volume de um bloco retangular ao multiplicar comprimento, largura e altura, equacionando-a em $V_1 = c.l.h$. Assim, eles fizeram o cálculo para o volume do segundo cubo, também por meio da multiplicação das mesmas medidas, só que as reduzindo em 20% dos valores anteriores, apresentada pela seguinte fórmula:

$$V_2 = c. \frac{80}{100} . l. \frac{80}{100} . h. \frac{80}{100}$$

Para resolver, eles relacionaram esse modelo ao volume inicial. Assim, tem-se:

$$V_2 = c. \frac{80}{100} . l. \frac{80}{100} . h. \frac{80}{100}$$

$$V_2 = c.l.h. \left(\frac{80}{100}\right)^3$$

$$V_2 = V_1 . \frac{512}{1000}$$

$$V_2 = \frac{51,2}{100} . V_1$$

$$V_2 = 51,2\% . V_1$$

Logo, descobriram que o volume do segundo cubo representa 51,2% do volume do primeiro sólido. Desse modo, eles deduziram que o volume do segundo objeto era 48,8% menor que o volume do primeiro. Observa-se, na imagem da Figura 72, que o grupo comete um pequeno erro na resposta final, escrevendo 48,2% ao invés de 48,8%; porém, no momento da socialização, o representante do grupo faz uma ressalva, corrigindo o erro da escrita.

Durante a validação, captada pela gravação audiovisual do *Google Meet*, o representante explicou suas estratégias de solução do seguinte modo:

Primeiro nós fizemos o volume do 1º sólido. No caso, fizemos ele sendo V_1 , assim multiplicamos comprimento, vezes largura, vezes altura. Para o volume do segundo, V_2 , nós tínhamos esses mesmos comprimentos, largura e altura, só que reduzido em 20%, ou seja, 80% do valor anterior. No caso, nós juntamos o comprimento, largura e altura e percebemos que eles davam exatamente o volume do primeiro sólido, e assim, 80% foi colocado como $(\frac{80}{100})^3$. Resolvendo essa parte, temos que o volume do segundo sólido representa $\frac{51,2}{100}$ do volume do primeiro, ou seja, o volume do segundo (V_2) é 48,2%, opa, erramos aqui, no caso é 48,8% menor que o volume do primeiro (V_1).

Na solução apresentada pelo Grupo 2, embora se utilizem os conceitos de volume do bloco retangular, apresentam-se ações não previstas na análise *a priori*. Ou seja, eles acrescentaram a porcentagem à fórmula matemática para o cálculo do volume e, assim, apresentaram uma solução que levou à indução da resposta final, ao concluir que o valor de 51,2% encontrado representa uma parte de um todo e que essa diferença, que é 48,8%, é a resposta correta do problema.

O Grupo 3, por sua vez, realizou ações não previstas na análise *a priori*, apresentando, durante a etapa da formulação, uma solução registrada pelo uso de lápis e papel (Figura 73). Por meio de um exame mais detalhado do manuscrito do grupo, percebeu-se que o grupo não formalizou a solução por inteiro, não havendo registro da fase final da resposta; porém, sendo possível levar os participantes a deduzirem a resolução final, conforme relato do representante no momento da validação do modelo matemático. Assim, na dialética da validação, o grupo enfatizou que a solução final seria a diferença do volume original pelo volume reduzido. Convém ressaltar que, nesse segundo encontro, o Grupo 3 contou somente com a participação de dois participantes.

Figura 73 - Solução apresentada pelo Grupo 3

Handwritten mathematical solution on lined paper:

$$2- \begin{array}{l} V = a^3 \\ a \text{ --- } 100\% \\ x \text{ --- } 80\% \\ x = \frac{80a}{100} = 0,8a \\ V' = (0,8a)^3 = 0,512a^3 \\ \begin{array}{l} a^3 \text{ --- } 100\% \\ 0,512a^3 \text{ --- } Y\% \end{array} \\ Y = \frac{0,512a^3}{a^3} \cdot 100 = 51,2\% \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

No momento da validação, o representante desse grupo apresenta sua resolução, descrevendo todo o processo de modelização adotado por eles para resolver o problema:

Eu vou fazer a apresentação por uma regra de três. Então nós vamos ter um cubo de aresta “a”, assim seu volume será a^3 . Depois do cozimento esse cubo sofrerá uma contração. Então vou tentar descobrir qual vai ser o valor dessa nova aresta. Inicialmente, eu peguei o “a” que era meu valor inicial da aresta e igualei a 100%, depois eu peguei uma variável “x, que será o novo valor para a aresta, depois da contração sofrida, no caso o valor será 100% - 20%, relacionado aos 20% da redução do enunciado da questão, isso vai corresponder a $\frac{80}{100}a$, assim o novo valor da aresta será $(0,8a)^3$. A partir daqui o meu novo valor do volume, que eu chamei de V' (vê linha), fazendo isso eu tenho o novo valor do volume que será: $V' = (0,8)^3$, fazendo isso a resolução eu tenho $V' = 0,512a^3$. Agora que eu já tenho o valor da aresta, eu vou descobrir o novo volume do cubo. Então eu vou pegar o volume total que é a^3 igualar a 100% e vou pegar $0,512a^3$ e igualar a y%, que vai ser a porcentagem do meu novo volume. Assim, eu vou ver que $y = 51,2\%$. Então, para finalizar é só fazer a subtração do 100% que era o valor antigo menos o 51,2% que foi o meu novo volume, que será dado por: $100\% - 51,2\% = 48,8\%$.

Nesse momento, o representante do Grupo 3 voltou a ressaltar a dificuldade no uso do *software* GeoGebra. Outro ponto importante é que o participante, no dia do referido encontro, não contava com a participação de todos os membros de seu grupo, o que foi descrito também como dificuldade pelo acadêmico, pois segundo relato deste, houve pouca troca de informações durante a etapa da formulação.

A construção dessa proposta tinha a intenção de propiciar aos participantes uma melhor compreensão dos elementos geométricos envolvidos no problema, proporcionada pela análise através da visualização e modelização da situação no *software* GeoGebra. Acredita-se que tal objetivo tenha sido alcançado, pois houve a interação do professor em formação com a construção no GeoGebra, conforme relato captado por meio de áudio, durante a gravação do encontro, em que o participante P5 descreve como usou o *software* para modelar a solução do problema no momento da formulação.

P5: Eu manipulei lá no arquivo do GeoGebra, mesmo meu celular travando muito. Essa parte foi bastante interessante, por que no arquivo de acordo com as dimensões que iam dando, dava para alterar a porcentagem do segundo sólido, o que facilita na hora do cálculo. Eu poderia colocar quaisquer valores para: comprimento, largura e altura, que automaticamente ele já me dava o valor do volume, com base na porcentagem que ia dando pela manipulação desse controle deslizante.

Foi verificado que todos os participantes encontraram 48,8% como volume reduzido após a contração. Assim, conclui-se que o objetivo dessa situação didática foi atingido. Ademais, os professores em formação também demonstraram outras habilidades diferentes daquelas previstas pela pesquisadora, na etapa da análise *a priori*, para compreender os

conceitos envolvidos na questão, o que propiciou um ambiente de formação com elementos riquíssimos para preparação docente.

Com relação ao recurso didático proporcionado pela manipulação do GeoGebra, os participantes relataram que sua utilização facilitou a visualização e a compreensão dos conceitos implícitos no enunciado da questão e assim possibilitou a criação de um modelo para solucionar a situação didática.

Na dialética da institucionalização, a pesquisadora expôs a resolução, fazendo uma mediação com as estratégias de solução apresentadas pelos participantes, em um único problema. Valorizou as diversas soluções expostas pelos participantes, parabenizando-os pelo empenho e pelas excelentes respostas. Nesse momento, a investigadora também utilizou o GeoGebra para confrontar os dados da resolução com o modelo gerado no *software* e validar a solução, com o intuito de mostrar aos professores em formação a importância de comprovação, durante os processos de validação e institucionalização.

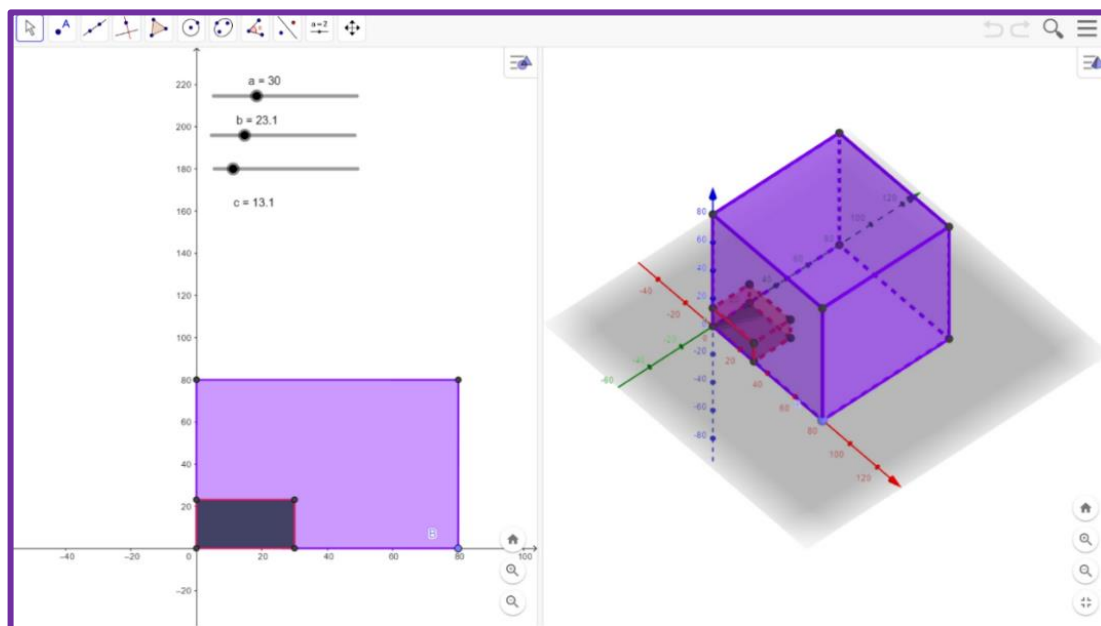
8.2 Terceiro encontro: Análise *a posteriori* e validação das Situações Didáticas do ENEM

De maneira análoga à aplicação da situação do encontro anterior, os participantes tomaram ciência de três situações didáticas do ENEM que seriam aplicadas durante o encontro. Assim, eles receberam os problemas propostos e suas construções, por meio dos códigos *QR-CODE* e *links* de acesso, como também lhes foram disponibilizados os arquivos em pdf das questões e das construções do GeoGebra, em ggb.

8.2.1 Análise *a posteriori* e validação da situação didática 3

De acordo com as orientações da pesquisadora, os participantes deveriam resolver primeiramente o problema 3 e, só após as vivências das quatro fases da TSD, passarem para as situações 4 e 5, respectivamente. Nesse momento, eles também foram incentivados a utilizarem a construção no *software* GeoGebra (Figura 74) para ajudar na indução do raciocínio e da criatividade que pudesse promover a instituição de um modelo matemático que solucionasse a questão.

Figura 74 - Acesso inicial a construção do GeoGebra para modelização da questão 3 do ENEM



Fonte: Construção da autora.

Então, na etapa da ação, os professores em formação tiveram acesso à situação didática 3, realizaram a leitura do problema e começaram a traçar as estratégias de resolução, por meio de seus conhecimentos epistêmicos e pragmáticos dos elementos matemáticos identificados, durante a leitura da situação problema.

Durante o momento da ação, os grupos realizaram simulações, através da modelização da situação didática 3. Perceberam que, movimentando os controles deslizantes (Figura 74), poderiam visualizar todas as sequências possíveis de resolução do problema, através das dimensões das caixas disponíveis no enunciado do problema, como havia-se previsto na análise *a priori*. Assim, ao manipular os controles deslizantes, os futuros professores visualizaram os movimentos de todas as cinco caixas e formularam suas estratégias de resolução.

O Grupo 1, no momento da formulação, promoveu as trocas de informações, através das mensagens no *WhatsApp*, referentes ao objetivo da situação didática 3. Assim, analisaram-se os diálogos do grupo sobre as modificações das dimensões da caixa ao movimentar os controles deslizantes da construção no GeoGebra. Segue a transcrição do áudio, captada pelo *WhatsApp*, na tentativa de estabelecer as estratégias de resolução.

P3: Primeiramente eu fui para o GeoGebra, lá, conforme o arquivo que a professora nos mandou, eu tentei mover as medidas para ter uma melhor visualização do problema. No caso eu comecei a mover olhando as medidas da caixa I e depois fui fazendo com as outras caixas, assim eu ia procurando a caixa que me satisfazia.

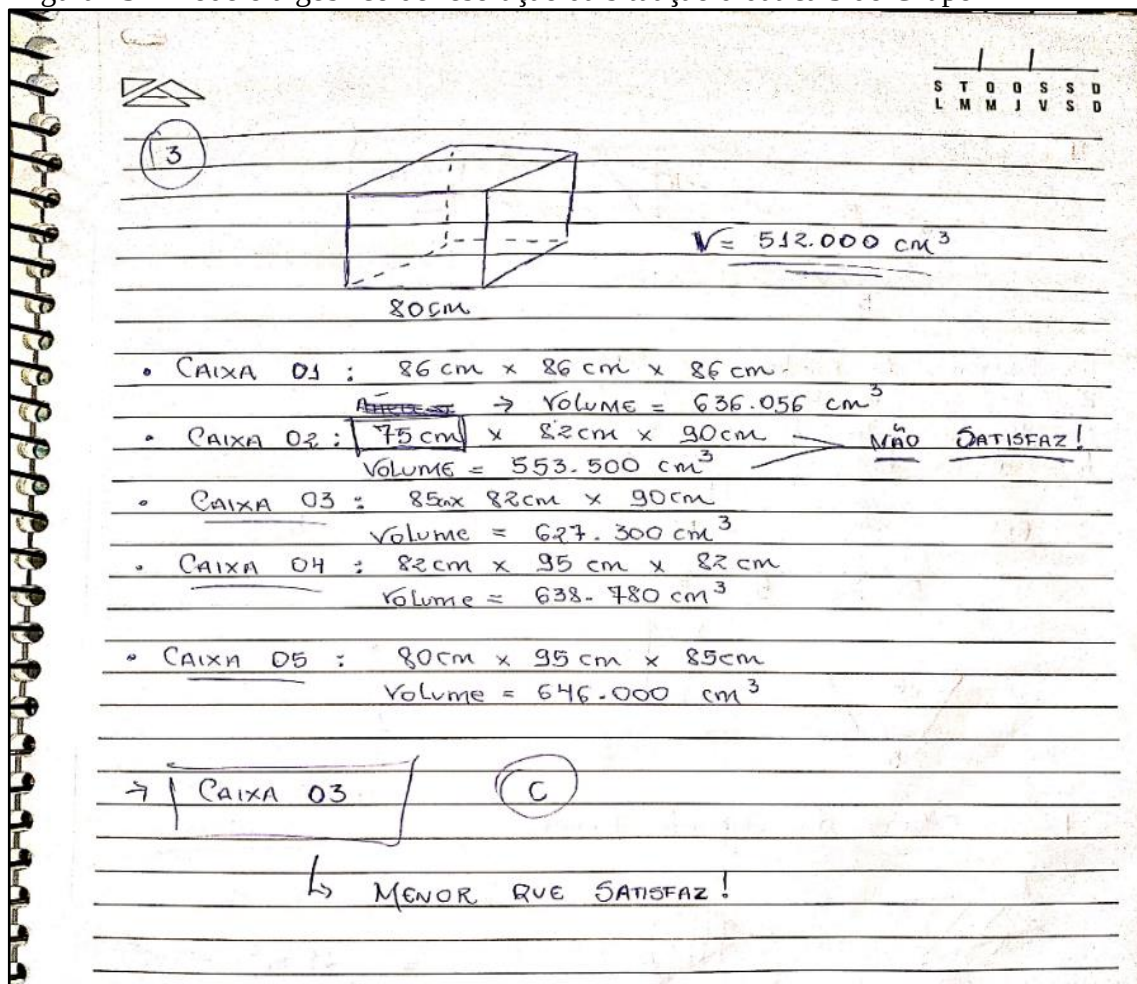
P2: Eu fiz o cálculo no caderno do volume de cada caixa, para saber qual é a que tem o menor volume.

P4: Eu movimentei o GeoGebra e depois fiz o cálculo dos volumes no caderno, mas pelo GeoGebra já fica fácil ver a resposta.

P1: Eu também fiz no caderno e no GeoGebra, assim ficou fácil ver que é a caixa 3 a resposta.

Em seguida, o grupo procurou estruturar um modelo matemático para solucionar o problema. Assim, no ambiente lápis e papel, realizaram um registro algébrico e formularam a resposta (Figura 75) da situação didática proposta. Nesse momento, observa-se, na troca de informações, os conhecimentos epistêmicos e pragmáticos entre os futuros professores.

Figura 75 - Modelo algébrico de resolução da situação didática 3 do Grupo 1

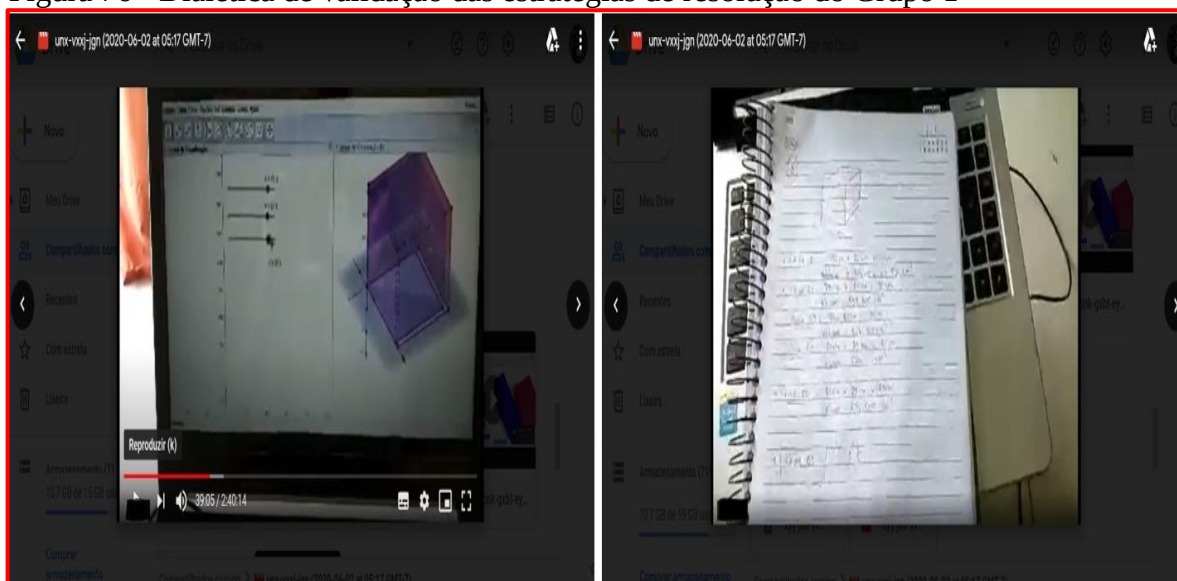


Fonte: Dados da pesquisa.

Pelo exposto, percebe-se que o Grupo 1, de imediato, elimina a caixa 2 por não atender às especificações do enunciado do problema. Em seguida, procede ao cálculo do volume das caixas restantes pelo produto de suas arestas, através da expressão: $V = a.b.c$. Determinando, assim, a resposta da situação 3 do ENEM como sendo a caixa 3 por apresentar o menor volume, 627.300 cm^3 .

Na dialética da validação, apresentada pelo Grupo 1, eles também fazem uso do GeoGebra para mostrar suas estratégias de resolução, culminando com a escrita matemática da solução da situação problema proposta, conforme exibida na Figura 76.

Figura 76 - Dialética de validação das estratégias de resolução do Grupo 1



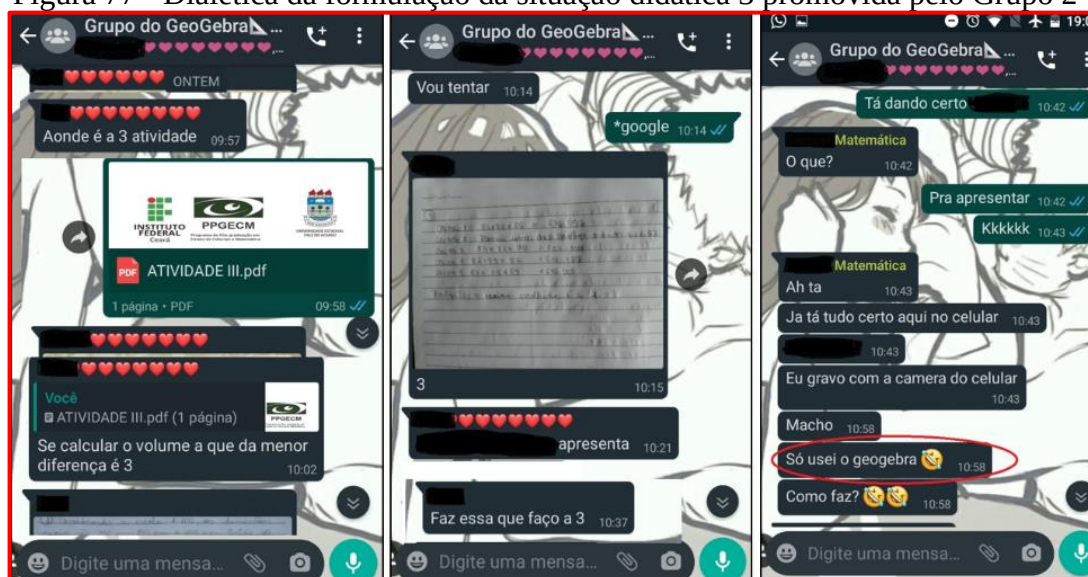
Fonte: Dados da pesquisa.

Segue a transcrição do áudio, coletado durante a formação, sobre as estratégias de solução estabelecidas pelo representante do grupo, durante a dialética da validação.

P3: Primeiramente eu fui no GeoGebra e tentei mover as medidas para ter uma melhor visualização do problema. No caso, eu comecei a mover olhando as medidas da caixa I, em que a medida de “a” é 86, a medida “b” é 86 e a medida “c” é 86. Assim, eu notei que realmente essa caixa me satisfazia. Aí eu fui para caixa II, em que a medida de “a” é 75, a medida de “b” é 82 e a medida de “c” é 90 cm, porém, na caixa II eu notei que a medida “a” não me satisfazia, então automaticamente eu já descartei a caixa II. Dando prosseguimento, eu comecei a colocar as medidas das outras caixas e notei que as outras caixas me satisfaziam, então eu fui para o segundo passo. O segundo passo, foi colocar no caderno as medidas de cada caixa e fazer o cálculo do volume. E assim eu ia perceber o volume que iria me satisfazer, que no caso, seria o menor, conforme as dimensões. No caderno, eu tenho meus volumes, já descartamos a caixa II, assim notei que a caixa que tinha o menor volume e que satisfazia o que a questão pedia, era a caixa III, com o volume igual a 627.300 cm^3 .

O Grupo 2, no momento da formulação, estabeleceu suas estratégias de resolução por meio da troca de informações em seu grupo de *WhatsApp*. Veja, a seguir (Figura 77), os diálogos estabelecidos pelos participantes do Grupo 2, na tentativa de estabelecer uma solução para o enunciado proposto no problema 3.

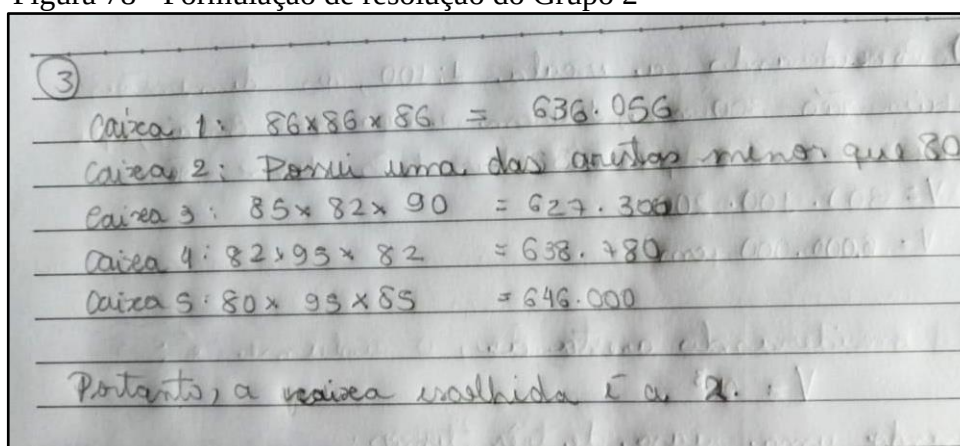
Figura 77 - Dialética da formulação da situação didática 3 promovida pelo Grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa.

Assim, a partir do que foi observado com a manipulação do objeto, eles buscaram estruturar um modelo matemático por meio dos conceitos epistêmicos, uma vez que se buscava saberes geométricos que propiciasse estabelecer uma fórmula para solucionar o problema. Sendo assim, observou-se que, no momento da elaboração das estratégias de resolução, os participantes descartaram a caixa II por ela apresentar uma das medidas da aresta inferior às medidas do objeto que seria colocado em seu interior, conforme observa-se na imagem da resolução (Figura 78).

Figura 78 - Formulação de resolução do Grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa.

Pelo exposto, constatou-se que para instituir um modelo matemático que satisfizesse o enunciado da questão, os participantes realizaram uma comparação geométrica, através do GeoGebra, para posteriormente fazerem os cálculos algébricos necessários para validar sua resposta, de acordo com a previsão realizada na análise *a priori*. Portanto, verificou-se que o grupo partiu da construção no GeoGebra para formalizar um modelo matemático do cálculo

do volume de um paralelepípedo, ao multiplicarem-se as medidas das três arestas, equacionando a fórmula $V = a.b.c$. Assim, eles realizaram os cálculos das caixas I, III, IV e V, exceto a caixa II, por suas medidas não satisfazerem as necessidades do enunciado da questão.

Para resolver, eles realizaram o seguinte processo:

$$V_{\text{inicial}} = 80 \times 80 \times 80 = 512.000$$

$$V_1 = \text{Caixa 1: } 86 \text{ cm} \times 86 \text{ cm} \times 86 \text{ cm} = 636.056 \text{ cm}^3$$

~~Caixa 2: 75 cm x 82 cm x 90 cm~~ → não satisfaz o enunciado

$$V_3 = \text{Caixa 3: } 85 \text{ cm} \times 82 \text{ cm} \times 90 \text{ cm} = 627.300 \text{ cm}^3$$

$$V_4 = \text{Caixa 4: } 82 \text{ cm} \times 95 \text{ cm} \times 82 \text{ cm} = 638.780 \text{ cm}^3$$

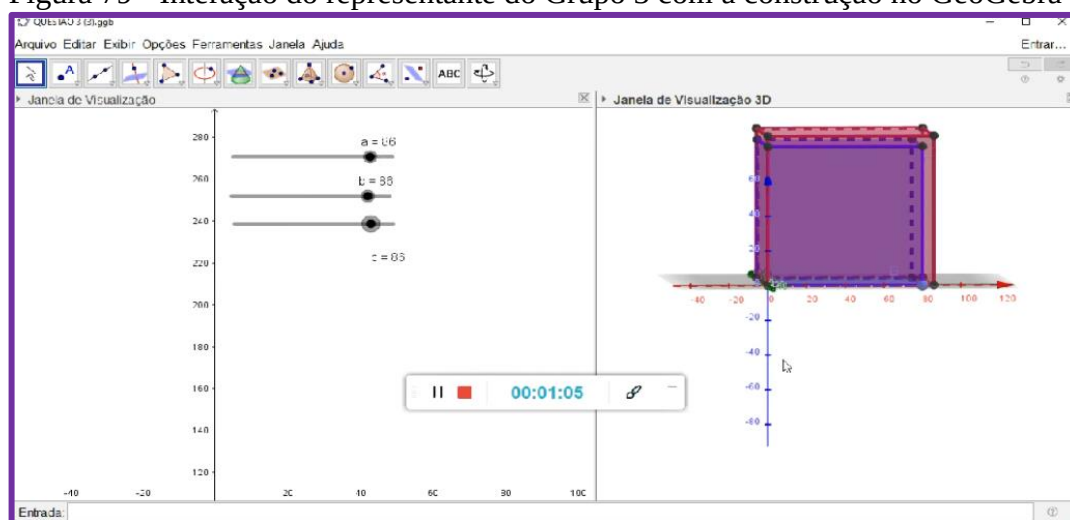
$$V_5 = \text{Caixa 5: } 80 \text{ cm} \times 95 \text{ cm} \times 85 \text{ cm} = 646.000 \text{ cm}^3$$

Assim, eles verificaram que o volume da caixa III era o menor e, portanto, a opção correta para armazenar o objeto, durante a mudança de domicílio.

O Grupo 2, no momento da validação, não expôs sua solução no *Meet*, fazendo apenas uma breve apresentação oral para os colegas, na qual seu representante relata ter usado o GeoGebra para movimentar as arestas da caixa e que realizaram o cálculo algébrico dos volumes das caixas, no caderno.

Já o Grupo 3, na dialética da formulação, não apresentou trocas de informações, uma vez que apenas um membro do grupo participava do encontro no momento da aplicação do problema 3. No entanto, esse representante formulou sua estratégia de resolução de modo semelhante aos outros grupos, fazendo uso do *software* GeoGebra (Figura 79) para estruturar um modelo de resolução para questão.

Figura 79 - Interação do representante do Grupo 3 com a construção no GeoGebra



Fonte: Construção da autora.

Assim, o participante do Grupo 3 apresentou seu modelo algébrico de resolução, através do cálculo do volume do paralelepípedo para verificar a capacidade de

armazenamento de cada caixa e, portanto, escolher aquela que estivesse de acordo com a resposta da situação didática 3, como exposto na Figura 80.

Figura 80 - Modelização Matemática do Grupo 3 no momento da formulação

3 - Calcular o volume de cada caixa

$$C_1 = 86 \cdot 86 \cdot 86 = 636.056$$

$$C_2 = 85 \cdot 82 \cdot 90 = 627.300 \checkmark$$

$$C_3 = 82 \cdot 95 \cdot 82 = 638.780$$

$$C_4 = 80 \cdot 95 \cdot 85 = 646.000$$

item (C)

Fonte: Dados da pesquisa.

No momento da validação, captada pela gravação do encontro, o representante do grupo expôs suas estratégias para solucionar a questão, usando a construção no *software* GeoGebra. Segue a transcrição do áudio da apresentação dele:

P10: Inicialmente a questão pede para gente escolher uma caixa. É dado 5 caixas, pra gente ver a caixa que melhor se enquadra, que melhor cabe um objeto, sem sobrar muito espaço, de 80 cm de aresta. O que eu fiz? Eu peguei as medidas das 5 caixas e fui igualando aqui nos controles deslizantes para eu poder observar aqui, qual era a caixa que mais se adequava ao objeto, então eu vou começar pela caixa "A". Manipulei o controle deslizante e coloquei as medidas 86 x 86 x 86 e agora a gente vai observar o objeto por vários ângulos. Como dá para perceber sobra espaço. Ela coube o objeto direitinho, porém realmente sobra espaço. Agora a gente tem de observar as outras caixas. Observando a caixa III, porque eu não considero a caixa II, porque na questão uma das suas medidas é 75 cm e como o objeto tem 80 cm de aresta, então já fica nítido que ela vai caber o objeto. Ela não atende as minhas necessidades, então vamos para as medidas caixa III. As medidas da caixa III, são 85, 82 e 90. Então, vamos observar aqui, que ela cabe também o objeto. Sobra espaço um pouco menos aqui nas laterais e sobra espaço em cima. Visualmente, ela também não sobra muito, eu ficaria em dúvida entre a caixa III e a caixa I. Observando as medidas da caixa IV, que são 82, 95 e 82 cm, nessa aqui não há espaço em cima, tá bem direitinho, mas aqui, na lateral tem um espaço bem significativo com relação as outras caixas. Agora vamos observar as medidas da caixa V, ela tem as medidas 80, 95 e 85 cm. Como você pode perceber, ela é a maior de todas, sobra espaço significativo na lateral e em cima. Então ficaria em dúvida na caixa I e na caixa III. Para tirar essa dúvida eu fui para o caderno e calculei o volume da caixa I e da caixa III, para ver qual era a menor. E assim, eu tirei a conclusão de qual o objeto se encaixaria melhor na caixa.

Observou-se aqui que P10 interagiu com o *software* para formular sua resposta, o que significou uma evolução do participante, haja vista que ele não utilizou o GeoGebra nas situações didáticas anteriores, perspectivando um ambiente de formação que contribua para a evolução docente do futuro professor.

Em virtude das análises das reproduções de áudio e audiovisuais, como também das conversas nos grupos de *WhatsApp*, pode-se concluir que o objetivo proposto nessa situação didática foi atingido, pois os participantes usaram a construção no *software* GeoGebra para, em seguida, formular e validar suas resoluções, ou seja, as ações previstas pela pesquisadora foram identificadas e os professores em formação solucionaram o problema.

No que concerne ao momento da institucionalização, achou-se importante trazer os conceitos implícitos no enunciado da questão para enfatizar aos participantes que, no exercício da docência, faz-se necessário expor todos os elementos matemáticos presentes na situação didática, com o intuito de promover meios adequados para instituir o saber matemático a que se propõe. Assim, expuseram-se as ideias intuitivas de volumes de um sólido, embasadas no Princípio de Cavalieri (Figura 81), haja vista o ensino de volumes nas escolas brasileiras serem pautados nesse princípio. De acordo com as OCN, “o Princípio de Cavalieri deve ser tomado como ponto de partida para o estudo de volumes de sólidos (cilindro, prisma, pirâmide, cone e esfera), permitindo ao aluno compreender o significado das fórmulas” (BRASIL, 2006, p. 76).

Figura 81 - Dialética da institucionalização mediada pela pesquisadora



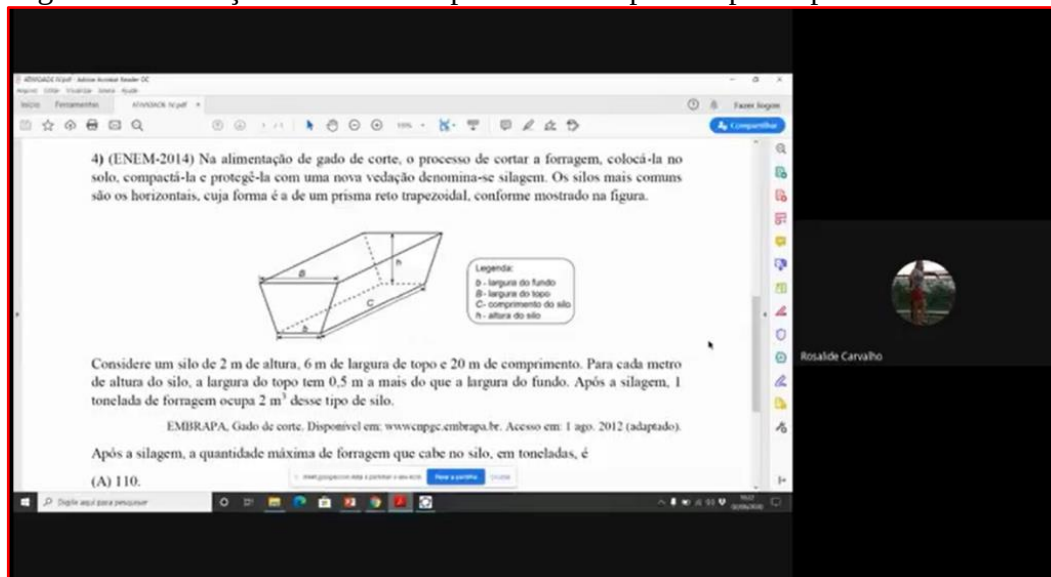
Fonte: Dados da pesquisa.

Em seguida, a pesquisadora retomou os conhecimentos gerados a partir das conjecturas dos professores e apresentou a solução, a mesma que fora proposta na análise *a priori*. É importante lembrar que, nesse momento, também foi usado o GeoGebra para confrontar os dados do modelo matemático com o modelo apresentado no computador, validando assim os elementos e propriedades geométricas presentes no enunciado do problema.

8.2.2 Análise a posteriori e validação da situação didática 4

Seguindo os mesmos pressupostos de experimentação das outras situações didáticas, no momento da ação, os professores em formação acessaram o arquivo da questão (Figura 82), no qual realizaram a leitura para, em seguida, começarem a trabalhar suas conjecturas com os colegas dos grupos, através das trocas de mensagens via celular.

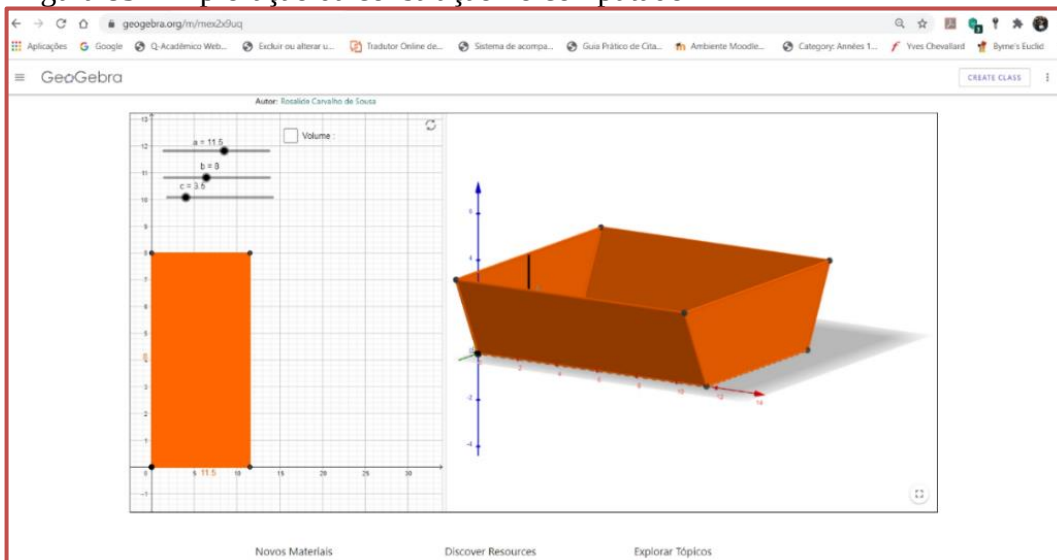
Figura 82 - Situações didáticas disponibilizadas para os participantes



Fonte: Dados da pesquisa.

Ainda na fase da ação, os grupos também tiveram acesso ao arquivo da construção no GeoGebra (Figura 83) para, de acordo com as orientações da pesquisadora, realizarem a manipulação do objeto e formularem as estratégias de resolução, na busca por um modelo matemático que satisfizesse o enunciado da questão.

Figura 83 - Exploração da construção no computador



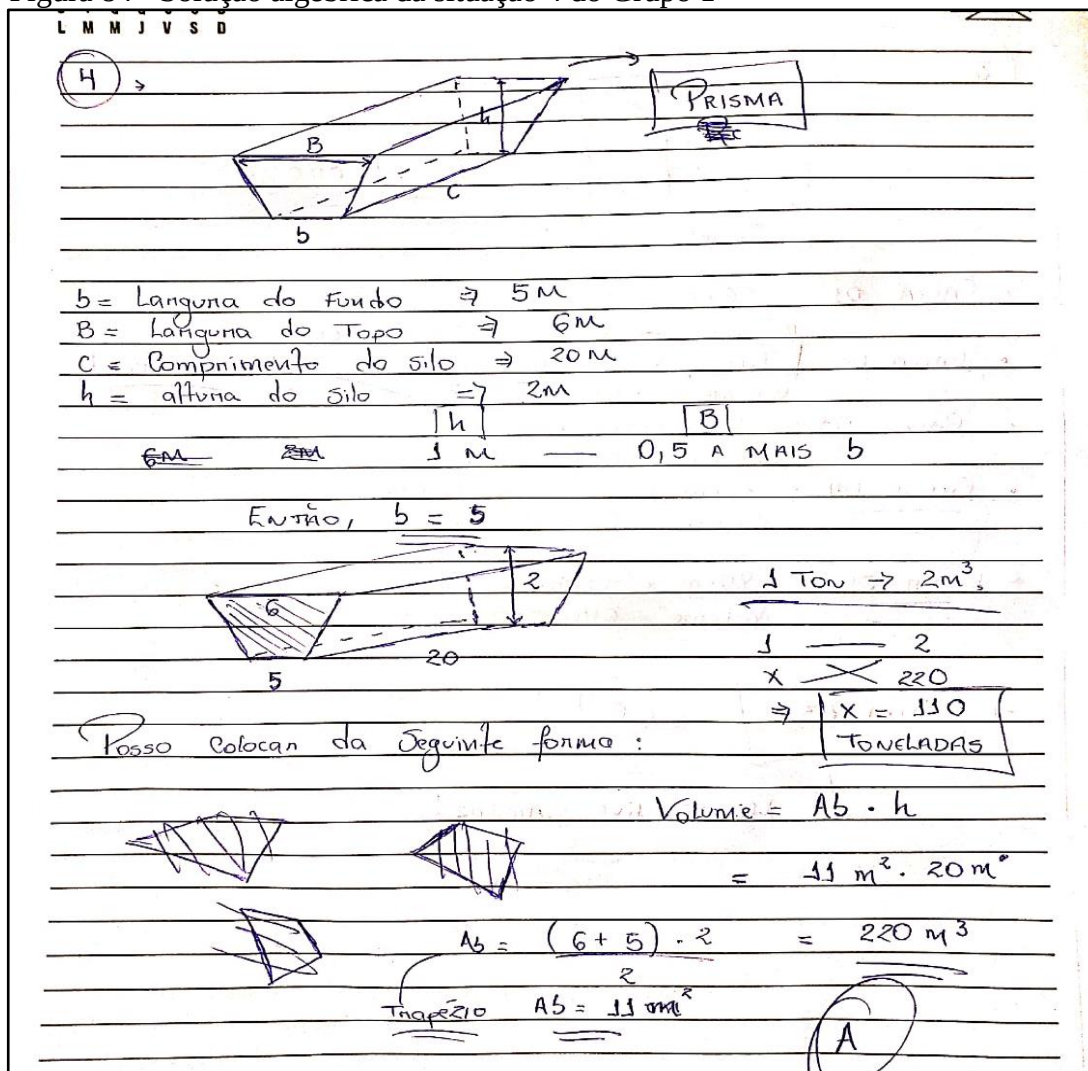
Fonte: Elaboração da autora.

Assim, os participantes dos grupos puderam manipular a construção e, por meio da movimentação dos controles deslizantes, verificar algumas situações numéricas que os levassem à descoberta de um modelo capaz de propiciar o cálculo da área da base do silo, conforme fora suposto na análise *a priori*.

Durante a análise dos dados coletados na etapa da formulação, os membros do Grupo 1 trocaram ideias e começaram a movimentar a figura no *software* GeoGebra, na tentativa de verificar as situações numéricas e geométricas do objeto, à medida que manipulavam suas dimensões. Então, observou-se que o grupo realizou o cálculo da área da base do recipiente para, em seguida, determinar o cálculo do volume do objeto, de acordo com o que se previu na análise *a priori*.

Dessa forma, eles utilizaram seus conhecimentos teóricos e práticos para estruturar um modelo algébrico de resolução (Figura 84), apresentando uma solução registrada no ambiente do lápis e papel.

Figura 84 - Solução algébrica da situação 4 do Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa.

De acordo com o que se observou da resolução do Grupo 1, os participantes iniciaram determinando as médias do silo, associando a diferença entre a largura do fundo e a altura do objeto e, assim, estabelecendo que a largura do topo é $2 \times 0,5 = 1$ metro a mais que a largura do fundo. Em seguida, equacionaram a fórmula para o cálculo do volume o silo, realizando produto da área da base pela altura, $V = ab.h$. Como a área da base se trata de um trapézio, determinaram o cálculo do seguinte modo:

$$A_b = \frac{(B+b).h}{2}$$

$$A_b = \frac{(6+5).2}{2}$$

$$A_b = 11\text{m}^2$$

Após determinar a área da base, procedeu-se ao cálculo do volume do silo, bastando, para isso, multiplicar a base pelo comprimento do objeto, assim: $V_{\text{silo}} = 11\text{m}^2 \cdot 20\text{m} = 220\text{m}^3$.

Para finalizar, o grupo realizou uma regra de três para apresentar a resolução do problema, como segue:

$$\begin{array}{rcl} T & \longrightarrow & \text{m}^3 \\ 1 & \text{---} & 2 \\ x & \text{---} & 220 \\ x & = & 110 \text{ t} \end{array}$$

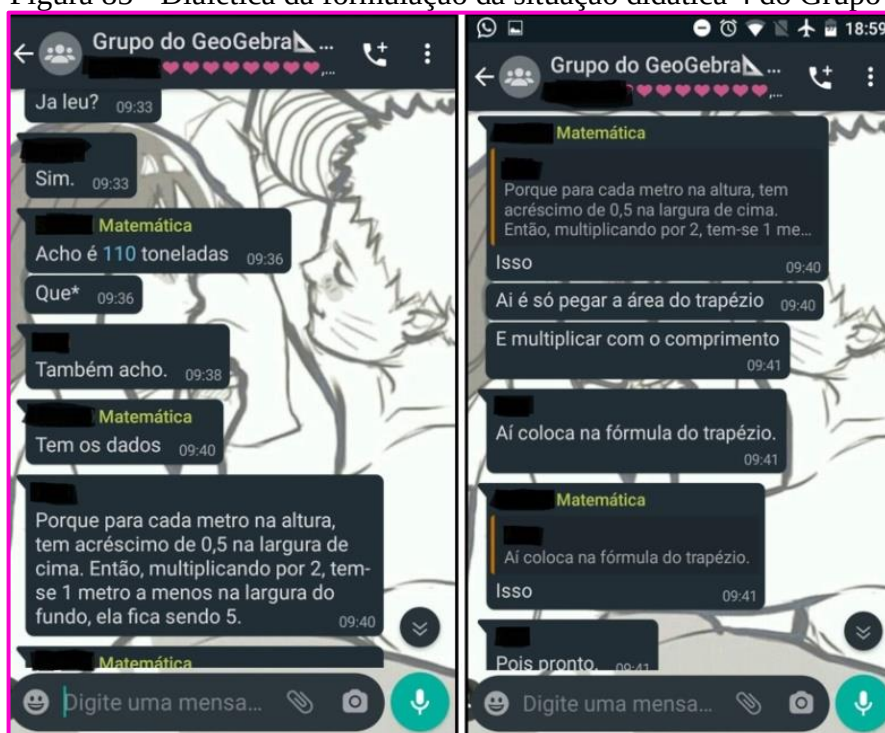
Concluindo, portanto, que caberão 110 toneladas de forragem no silo.

Para validar sua estratégia de resolução, o Grupo 1 apresentou oralmente a resolução, explicando de maneira simples e objetiva. Segue a transcrição do áudio coletado no momento da formação:

P1: Primeiro nós movimentamos o GeoGebra para ver as modificações que o silo sofria a medida de agente alterava suas medidas. Depois, realizamos o cálculo no caderno, começamos calculando a área da base, pela fórmula do trapézio, em seguida multiplicamos por 20m, que é o comprimento do silo, encontrando 220m^3 . Como a questão pedia a resposta em toneladas, fizemos uma regra de três para transformar metros cúbicos em toneladas, achando 110t. Sendo a opção “A” a resposta correta.

O Grupo 2, no momento da formulação, realiza os procedimentos semelhantes aos do Grupo 1, estabelecendo troca de ideias através do grupo de *WhatsApp*. Assim, procedendo às análises das trocas de informações entre os participantes do grupo, pôde-se perceber os diálogos entre eles, na tentativa de instituir uma fórmula para solucionar essa situação didática, como se vê na imagem da Figura 85.

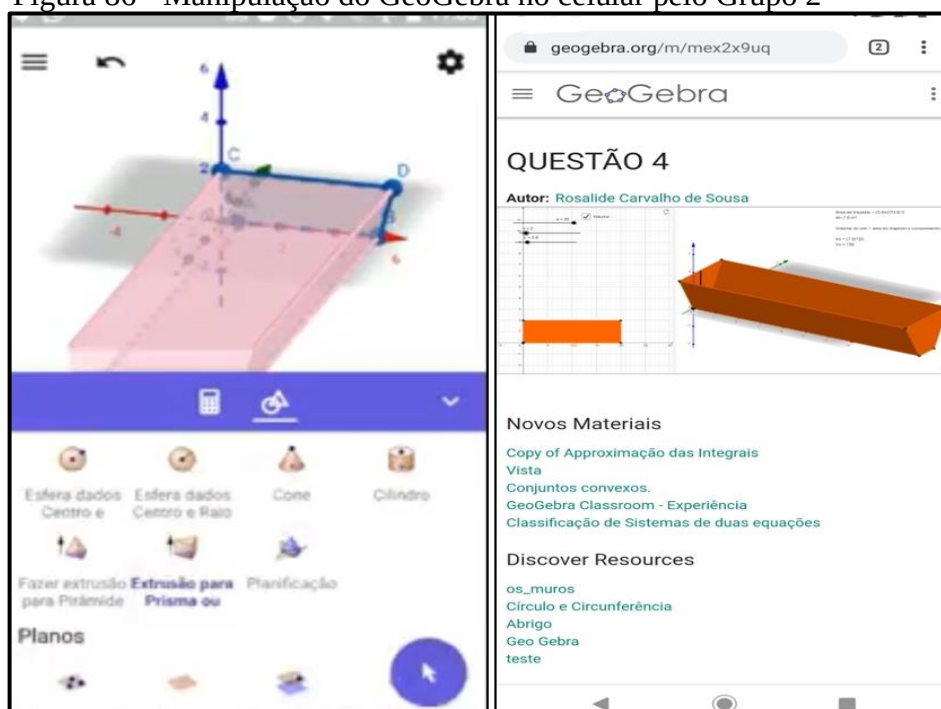
Figura 85 - Dialética da formulação da situação didática 4 do Grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa.

O grupo prossegue com as elaborações das conjecturas e, busca a utilização do GeoGebra para tentar visualizar elementos que justifiquem suas ações iniciais. Na imagem da Figura 86, tem-se os professores em formação do Grupo 2, acessando a construção do *software* GeoGebra, através do *smartphone*. Na imagem da esquerda, vê-se o acesso por meio do arquivo ggb e, na imagem à direita, por meio do QR-CODE.

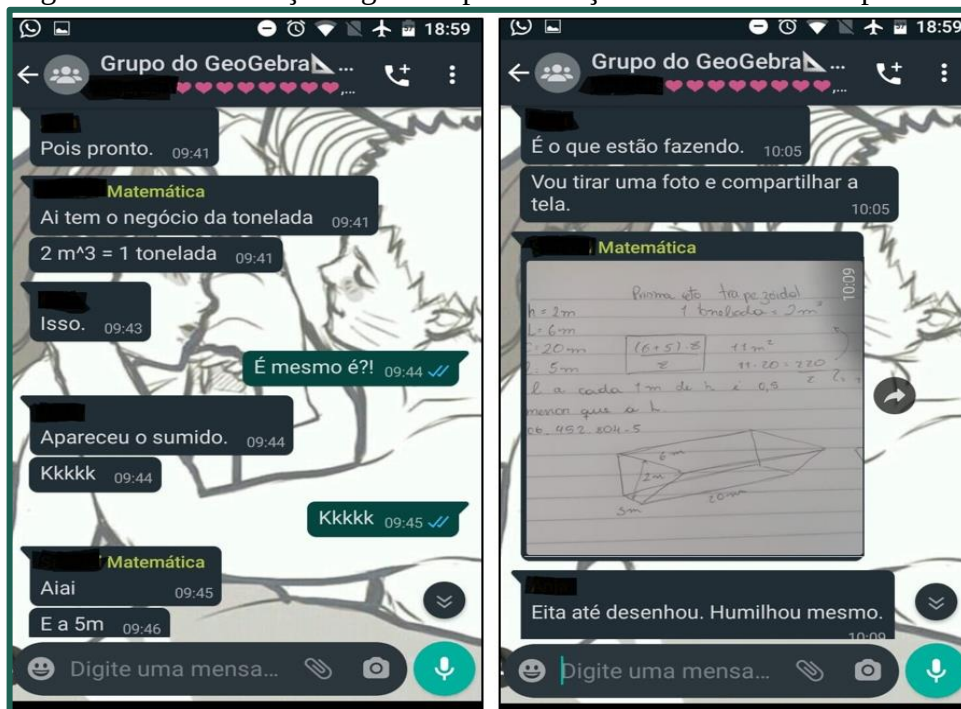
Figura 86 - Manipulação do GeoGebra no celular pelo Grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa.

De acordo com o exposto, verificou-se que os futuros professores, de modo semelhante ao Grupo 1, perceberam a diferença entre a largura do topo e a largura do fundo associando a altura ao objeto e, portanto, formalizando que a largura do topo era $2 \times 0,5 = 1$ metro a mais que a largura do fundo, de acordo com o previsto na análise *a priori*. Assim, eles estruturaram um modelo matemático para o cálculo do volume do silo, equacionando a área do trapézio vezes a altura do prisma. Veja Figura 87.

Figura 87 - Modelização algébrica para situação didática 4 do Grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa.

Assim, o grupo formalizou um modelo matemático, a partir dos conceitos da área do prisma e do volume de um sólido, que foi equacionado do seguinte modo:

$$V_{\text{silo}} = \frac{(B+b).h.c}{2}$$

Aplicando a fórmula matemática e substituindo seus valores, encontra-se o volume do silo, assim:

$$V_{\text{silo}} = \frac{(6+5).1.20}{2}$$

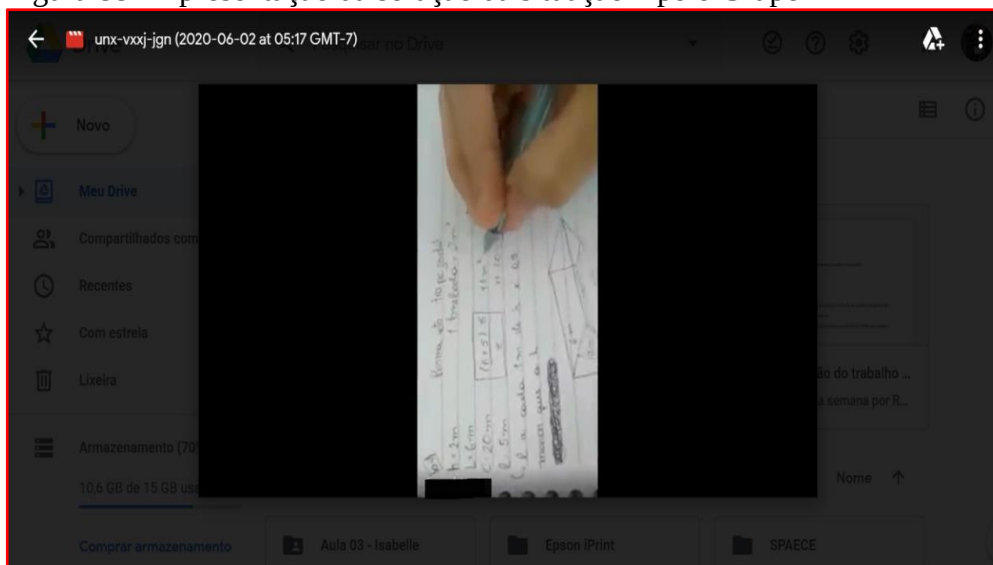
$$V_{\text{silo}} = 220 \text{ m}^3$$

Logo para identificar a quantidade de forragem ocupada pelo objeto, identifica-se que 1 tonelada de forragem ocupa 2 m^3 , assim tem-se $\frac{220}{2} = 110 \text{ t}$.

No momento da validação, o representante do grupo apresentou argumentos sobre as estratégias de solução para todos os participantes do encontro no *Google Meet*, na tentativa de

validar sua proposta de resolução. Na Figura 88, exibe-se o modelo matemático da situação 4, apresentada por esse grupo.

Figura 88 - Apresentação da solução da situação 4 pelo Grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa.

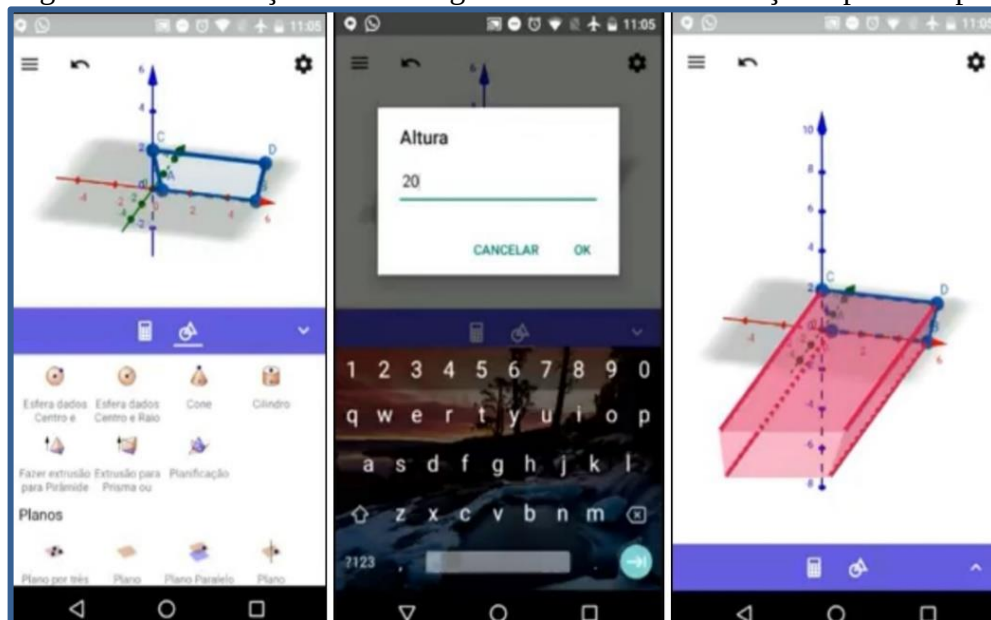
Tem-se a transcrição do áudio coletado pelo *Meet*, no momento da explicação da estratégia de resolução do futuro professor.

P8: Essa questão IV trata-se de um prisma trapezoidal. Ela fornece algumas informações, como a altura de 2 metros do nosso silo. Ele tem largura maior com 6 metros e comprimento de 20 metros. E a largura menor, o que que ela diz? Que a cada 1 metro de altura, a largura menor, é 0,5 menor que a largura maior. A partir disso, a gente entende que se tem 2 metros, e ela diminui 0,5 metro a cada 1 metro. Então, se temos 2 metros, a largura menor será a largura maior menos 1 metro. No caso a gente descobre que a largura menor é equivalente a 5 metros. Assim, temos a medida de nosso trapézio, que são: Altura 2 m, largura maior 6 m e a largura menor 5 m. Então, a gente vai aplicar na fórmula da área do trapézio que é largura maior mais largura menor vezes altura dividido por dois: $\frac{(B+b) \cdot h}{2}$. Aplicando todos os dados que temos, vai ficar: $\frac{(6+5) \cdot 2}{2} = 11$. Então a área do nosso trapézio é 11 m². Para descobrir o nosso volume o que a gente precisa fazer? Precisa da área de nosso trapézio vezes o comprimento de nosso silo, que no caso será 11 x 20, que vai resultar em 220m³. Porém, a gente tem outra informação, que é a seguinte: a cada 2m³ tem 1 tonelada de silagem. Então, a gente vai pegar nosso volume e dividir por 2, e assim, a gente chega no resultado que é 110 toneladas, que é a letra "A".

Percebeu-se, com a solução exibida por esse grupo, que ele usou de seus conhecimentos adquiridos ao longo da educação básica e de sua formação inicial para estabelecer uma melhor estratégia de resolução, de acordo com os pressupostos da análise *a priori*. Assim, pôde-se ver em suas ações uma boa interpretação do problema e a instituição de um modelo matemático sobre volumes que responde às expectativas do enunciado da situação didática.

O Grupo 2 também expôs sua estratégia de resolução através da construção no GeoGebra. Durante o processo de validação, chamou atenção o fato de que, durante o processo de formulação, esse grupo criou sua própria construção no GeoGebra (Figura 89) para auxiliar na resolução da questão.

Figura 89 - Construção da modelagem matemática da situação 4 pelo Grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa.

Assim, apresenta-se a explicação do outro representante do Grupo 2, durante a dialética de validação sobre os caminhos traçados durante a resolução.

P5: No celular, o GeoGebra 3D não possibilita a construção da base do trapézio diretamente utilizando as ferramentas do polígono. Então, eu tive a ideia de colocar como sendo a parte de pontos, assim eu comecei primeiro as construções dos pontos. Para o primeiro ponto comecei com as coordenadas $A = (0.5, 0, 0)$. O segundo ponto, as coordenadas vão ser $B = (5.5, 0, 0)$. O terceiro, as coordenadas serão $C = (0, 0, 2)$ e o quarto ponto de coordenadas $D = (6, 0, 2)$. A partir desses quatro pontos eu vou na ferramenta polígono e seleciono esses quatro pontos, e aí já me dá a base, que o trapézio. Através dessa base, eu vou construir um prisma, utilizo a ferramenta que é para fazer a extrusão para prisma e seleciono a base, em seguida abre uma janela em que eu coloco a altura, que no caso seria o comprimento que tem na questão, que é 20. Assim, fica construído o prisma. As coordenadas que utilizei nos pontos da construção, eu calculei, mais ou menos, utilizando os dados da questão. A base maior, que seria esse segmento DC de medida 6. O segmento AB, que é a base menor, tem medida 5 e altura 2. O comprimento, que no caso é 20. O GeoGebra também calcula o volume desse prisma, através da ferramenta volume. Então, eu vou nessa ferramenta, seleciono e já dá a medida do volume, que é 200 m^3 . Aí no caso, eu só precisaria descobrir as medidas em tonelada nesse silo. Assim, basta eu dividir 220 por 2, que obtenho a resposta, que é 110 toneladas.

Observando o relato, percebeu-se que o grupo usou os conhecimentos adquiridos no primeiro encontro da formação, em que se mostraram os comandos básicos do GeoGebra e como construir figuras e formas, na janela de visualização 3D, para modelar uma construção

para a situação didática 4. Ao ser indagado pela pesquisadora sobre fazer sua própria construção da questão, ele relatou que não estava conseguindo manusear o controle deslizante da base maior em seu celular; ademais, ele queria colocar em prática os conhecimentos adquiridos na formação.

Já o Grupo 3 não conseguiu estabelecer a dialética da formulação por não ter todos os membros de seu grupo participando do encontro. Mas o representante do referido grupo formulou sua estratégia de resolução (Figura 90), utilizando o ambiente do lápis e papel.

Figura 90 - Resolução algébrica da situação 4 pelo Grupo 3

11 - $2 \cdot 0,5 = 1m$
 $6m - 1m = 5m$ a largura de fundo

Área do trapézio
 $\frac{(B+b) \cdot h}{2} \Rightarrow \frac{(6+5) \cdot 2}{2} = 11$

calculando o volume do silo:
 $11 \cdot 20 = 220m^3$

1t	—	$2m^3$
x	—	$220m^3$

$2x = 220$
 $x = \frac{220}{2} = 110$ toneladas

Fonte: Dados da pesquisa.

O Grupo 3 apresenta uma estratégia de resolução semelhante ao do Grupo 1, recorrendo ao registro algébrico para instituir um modelo de resolução do problema 4. Determinou a largura do fundo do silo, associando à altura do objeto e realizando uma subtração. Depois, realizou o cálculo da área da base, encontrando $220m^3$ para, em seguida, realizar uma regra de três para transformar metros cúbicos em toneladas, apresentando assim 110 tonelada como resposta.

No momento da validação, o professor em formação P10, representante do grupo, resumiu sua estratégia de resolução, ressaltando que procedeu ao cálculo de modo semelhante ao Grupo 1 e que também encontrou o mesmo resultado. Acrescentou que não utilizou a construção do *software* GeoGebra para formular a resolução, pois ainda sente dificuldades com o manuseio desse recurso tecnológico, mas que, após a resolução no caderno, movimentou a construção para verificar a veracidade de sua estratégia de resolução para, a partir daí, apropriar-se melhor dos mecanismos de funcionamento desse *software*.

Portanto, afirma-se que o objetivo dessa situação problema foi atingido, pois os participantes encontraram a capacidade de armazenamento do silo, de 110t, e ainda conseguiram desenvolver outras habilidades de resolução com o *software* GeoGebra,

demonstrando, assim, que o ambiente de formação se apresentou consistente na preparação desses futuros professores para a ação docente.

Com relação a institucionalização, a pesquisadora retomou às ações da sessão didática, apresentando os conceitos implícitos no enunciado da questão sobre área do trapézio, relacionando-os aos conhecimentos apresentados pelos futuros professores para formalizar a solução e apresentar a todos os participantes. Também foi realizada uma demonstração da resolução pela manipulação da construção no GeoGebra, com o intuito de mostrar a comparação entre o modelo apresentado no computador e o modelo matemático da solução.

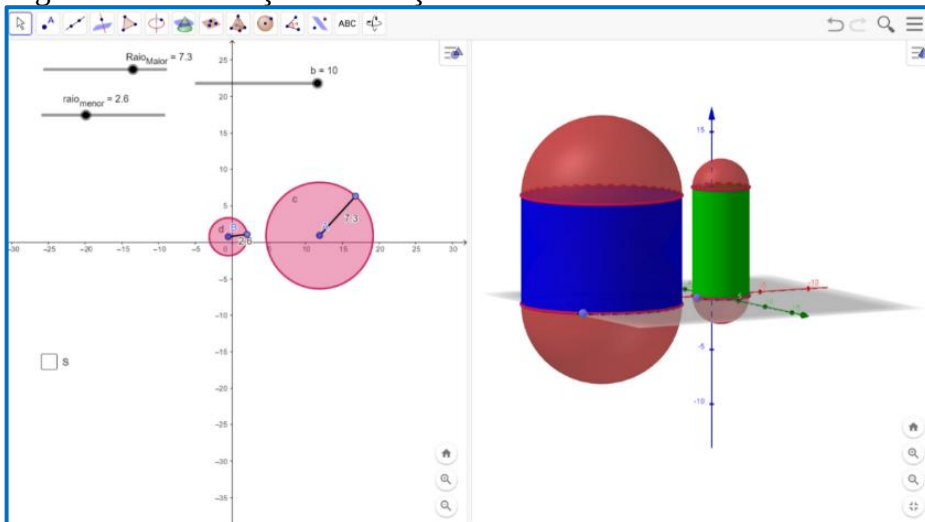
É importante ressaltar que a solução apresentada já havia sido prevista na análise *a priori* e que houve modelos diferentes de resolução, o que também é importante para o crescimento e amadurecimento acadêmico e profissional dos futuros docentes.

8.2.3 Análise *a posteriori* e validação da situação didática 5

Analogamente aos processos anteriores, no momento da ação, os participantes tiveram acesso aos arquivos da questão 5 e de sua construção no GeoGebra. Realizaram a leitura, começaram as trocas de ideias em seus respectivos grupos e formularam suas estratégias de resolução, de acordo com os pressupostos da análise *a priori*.

De início, eles realizaram a leitura do problema e depois acessaram o arquivo no GeoGebra (Figura 91). Procuraram estabelecer estratégias para resolver a questão proposta, mobilizando os raciocínios matemáticos originados da interpretação e da identificação de elementos geométricos presentes na situação problema do ENEM, além da manipulação do objeto no *software*.

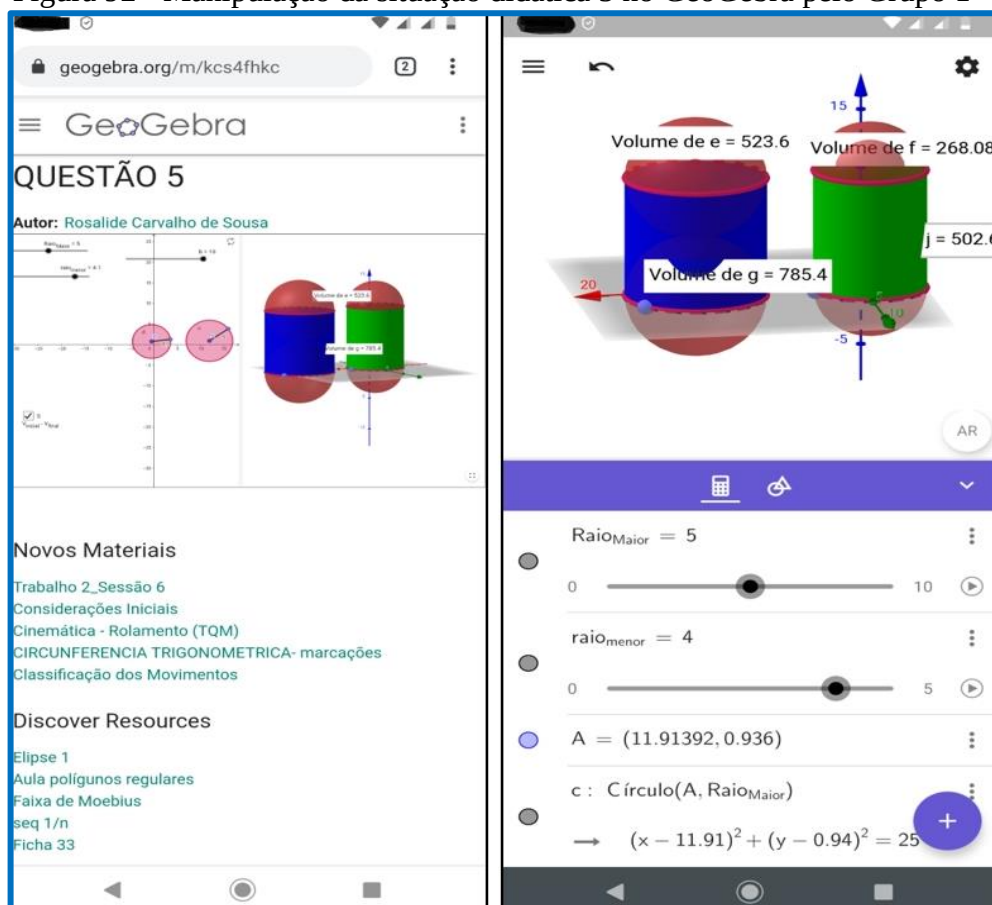
Figura 91 - Construção da situação didática 5 do ENEM no GeoGebra



Fonte: Construção da autora.

Na Figura 92, apresenta-se a construção, no GeoGebra, do problema 5, sendo acessada no *smartphone*, na imagem do lado esquerdo, por meio do *QR-CODE*; e, do lado direito, tem-se o arquivo *ggb*, utilizados durante a formulação pelos professores em formação do Grupo 1.

Figura 92 - Manipulação da situação didática 5 no GeoGebra pelo Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa.

Durante a formulação, os participantes do Grupo 1 trocaram mensagens para estabelecer uma estratégia de resolução do problema 5 (Figura 93). Nesse momento, eles manipularam a construção no *software* GeoGebra, na tentativa de buscarem prognósticos para desenvolverem conclusões que favorecessem a descoberta de um modelo matemático que solucionasse a situação problema. Os professores em formação desse grupo realizaram simulações através da modelização da situação do ENEM, explicitaram, por meio de mensagens de áudio, alguns questionamentos, verificaram algumas situações numéricas com a movimentação dos controles deslizantes e a modificação que os objetos sofreram, à medida que os raios e a altura eram manipulados.

Figura 93 - Solução algébrica da situação didática 5 do Grupo 1

Handwritten solution showing the calculation of the volume of a capsule (cylinder + sphere) before and after a radius reduction.

Initial State (5mm radius):

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 25 \cdot 10 = 785 \text{ mm}^3$$

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 125}{3} = 523,33 \text{ mm}^3$$

$$V_{\text{total}} = 785 + 523,33 = 1.308,33 \text{ mm}^3$$

Reduction (1mm radius):

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 16 \cdot 10 = 502,4 \text{ mm}^3$$

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 64}{3} = 267,95 \text{ mm}^3$$

$$V_{\text{total}} = 502,4 + 267,95 = 770,35 \text{ mm}^3$$

Difference:

$$\text{Diferença} = 1.308,33 - 770,35 = 537,98$$

Approximation:

$$\approx \text{Aprox. } 538 \Rightarrow \text{R}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Para o registro algébrico, o grupo realizou o cálculo do volume total da pílula, sendo este o somatório do volume do cilindro com o volume da esfera, de acordo com o que se havia previsto na análise *a priori*. Primeiramente eles fizeram o cálculo do volume da pílula inicial, cujo raio tinha medida de 5mm, como segue:

$$V_i = \pi \cdot r^2 \cdot h + \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$V_i = 3,14 \cdot 5^2 \cdot 10 + \frac{3}{4} \cdot 3,14 \cdot 5^3$$

$$V_i = 785 + 523,33$$

$$V_i = 1.308,33 \text{ mm}^3$$

Em seguida, procederam a um cálculo semelhante para encontrar o volume da pílula, após a redução do raio em 1mm, assim:

$$V_f = \pi \cdot r^2 \cdot h + \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$V_f = 3,14 \cdot 4^2 \cdot 10 + \frac{3}{4} \cdot 3,14 \cdot 4^3$$

$$V_f = 502,4 + 267,94$$

$$V_f = 770,34$$

Para concluir a solução, os professores em formação do Grupo 1 realizaram a subtração do volume inicial pelo volume final, de acordo com os pressupostos da análise *a priori*.

$$V_{\text{inicial}} - V_{\text{final}}$$

$$V = 1.308,3 - 770,34$$

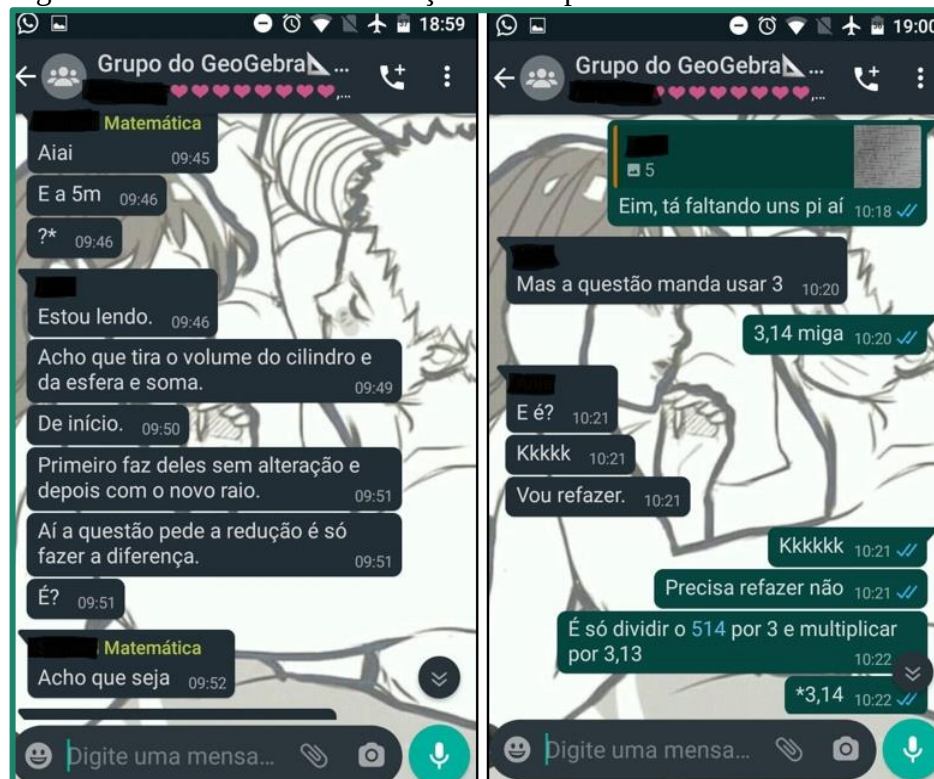
$$V = 537,96 \text{ mm}^3$$

Então, o volume da pílula reduzida deve ser aproximadamente 538 mm.

No momento da validação, o representante do Grupo 1 apresentou problemas com o sinal de internet; no entanto, foi possível captar um pouco da apresentação oral, na qual a solução foi aceita por todos os participantes, como válida.

O Grupo 2, no momento da formulação, realizou procedimentos semelhantes ao Grupo 1. Trocaram mensagens via *WhatsApp* (Figura 94), com o intuito de estabelecer estratégias de resolução para o problema proposto.

Figura 94 - Dialética da formulação do Grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa.

Verifica-se, na dialética da formulação, que os professores em formação desse grupo percebem que os volumes das pílulas são o somatório do volume da esfera com o volume do cilindro e, que para solucionar a questão basta realizar a diferença entre as duas.

Nesse momento, eles procuraram estabelecer uma conexão para favorecer a descoberta de um modelo que possibilitasse o cálculo da área da base do sólido para calcular o volume

das pílulas, fazendo uso de seus conhecimentos pragmáticos e epistêmicos para desenvolver um raciocínio matemático que possibilitasse estabelecer a diferença entre o volume da primeira e o volume da segunda pílula, por meio de uma associação entre $V_{\text{inicial}} - V_{\text{final}}$ para solucionar o problema. Veja Figura 95.

Figura 95 - Modelização matemática de solução da situação 5 pelo Grupo 2

(5)

Considerando os volumes do cilindro e da esfera, temos:

$$V_c = \pi \cdot R^2 \cdot h \qquad V_e = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$

$$V_c = 3,14 \cdot 5^2 \cdot 10 \qquad V_e = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 5^3$$

$$V_c = 78,5 \cdot 10 \qquad V_e = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 125$$

$$V_c = 785, \qquad V_e = 523,3$$

Somando: $V_c + V_e = 1308,3$

Considerando os volumes com a redução do raio, temos:

$$V_c = 3,14 \cdot 4^2 \cdot 10 \qquad V_e = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 4^3$$

$$V_c = 3,14 \cdot 16 \cdot 10 \qquad V_e = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 64$$

$$V_c = 502,4 \qquad V_e = 267,9466$$

$$V_e = 267,94$$

Somando: $V_c + V_e = 770,34$

Para saber a redução basta fazer a diferença, entre os volumes:

$$V = 1308,3 - 770,34$$

$$V = 537,96 \text{ mm}^3$$

$$V \approx 538 \text{ mm}^3$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Observou-se que o grupo apresentou uma solução semelhante a que foi exibida na análise *a priori*, realizou o cálculo do volume da esfera e do cilindro da primeira pílula, cujo raio media 5 mm, procedendo do seguinte modo:

$$V_c = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V_e = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$V_c = 3,14 \cdot 5^2 \cdot 10$$

$$V_e = \frac{3}{4} \cdot 3,14 \cdot 5^3$$

$$V_c = 78,5 \cdot 10$$

$$V_e = 523,3$$

$$V_c = 785$$

Assim, somando $V_c + V_e = 1.308,3$.

Prosseguindo com a estratégia de resolução, buscaram estabelecer o volume da segunda pílula, considerando a redução do raio para 4 mm, como segue:

$$\begin{aligned} V_c &= \pi \cdot r^2 \cdot h & V_e &= \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot r^3 \\ V_c &= 3,14 \cdot 4^2 \cdot 10 & V_e &= \frac{3}{4} \cdot 3,14 \cdot 4^3 \\ V_c &= 3,14 \cdot 16 \cdot 10 & V_e &= \frac{3}{4} \cdot 3,14 \cdot 64 \\ V_c &= 502,4 & V_e &= 267,94 \end{aligned}$$

Assim, somando $V_c + V_e = 770,34$

Finalizando, o Grupo 2 realizou a diferença entre os dois volumes para instituir a resposta final dessa situação didática. Desse modo, tem-se:

$$\begin{aligned} V &= 1.308,3 - 770,34 \\ V &= 537,96 \text{ mm}^3. \end{aligned}$$

Então, a redução do volume da pílula deve ser aproximadamente 538 mm.

Na validação, o representante desse grupo apresentou sua estratégia de solução para todos os presentes. Segue a transcrição captada pela ferramenta do *Google Meet*, no momento da apresentação.

P6: De início a gente vai precisar saber o volume do comprimido sem a redução. Então, para isso eu tirei o volume do cilindro e da esfera. Sabemos que o volume do cilindro é $\pi \cdot r^2 \cdot h$. Lá na questão ele diz que é pra usar $\pi = 3,14$. Assim, temos $3,14 \cdot 5^2 \cdot 10$. Então, realizando a operação eu encontro o volume do cilindro em 785 mm^3 . Com relação ao volume da esfera eu tenho $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$, substituindo os valores e resolvendo eu encontro o volume que é $523,3 \text{ mm}^3$. Para que eu saiba qual é o valor do comprimido todo eu faço a soma dos dois e encontro $1.308,3 \text{ mm}^3$. Depois para que eu encontre o volume do outro comprimido, depois da redução, eu vou utilizar o raio sendo 4, assim fazendo o volume tanto do cilindro quanto da esfera eu encontro 502,4 para o cilindro e para a esfera 267,94. Realizando a soma eu tenho $770,34 \text{ mm}^3$. Para eu saber a redução, basta eu fazer a diferença entre os dois, que vai ser a diferença do maior menos a do menor, por fim, eu encontro $537,96 \text{ mm}^3$ que vai ser aproximadamente 538 mm.

Sendo assim, ficou claro que o Grupo 2 identificou os teoremas dos volumes do cilindro e da esfera, necessários para formular a resolução do enunciado da situação didática proposta.

Quanto ao Grupo 3, de acordo com o que já foi relatado anteriormente, não conseguiu realizar a etapa da formulação. O representante do grupo apresentou à pesquisadora, por meio do *WhatsApp*, as estratégias de resolução por ele utilizadas para resolver a situação didática, apresentando uma resolução algébrica (Figura 96).

Figura 96 - Resolução algébrica da situação didática 5 do Grupo 3

5. $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 + \pi \cdot R^2 \cdot h$
 $\pi = 3,14$

• Calcular a diferença de volumes

1) $\frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 5^3 + 3,14 \cdot 5^2 \cdot 10 = 1308,33 \text{ m}^3$

2) $\frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 4^3 + 3,14 \cdot 4^2 \cdot 10 = 770,34 \text{ m}^3$

redução do volume:
 $1308,33 - 770,34 = 514 \text{ m}^3$

Fonte: Dados da pesquisa.

Observa-se que a estratégia empregada pelo Grupo 3, na resolução da situação didática 5, é semelhante às aquelas aplicadas pelos outros dois grupos. Primeiro, foi determinado o volume da pílula inicial: $V_i = 1.308,33\text{mm}^3$; em seguida, foi realizado o cálculo do volume da pílula com raio reduzido, assim: $V_f = 770,34\text{mm}^3$; finalizando com a diferença entre o volume inicial e final. No entanto, nesse momento, verificou-se que o grupo cometeu um erro na subtração, encontrando o valor de 514mm^3 , o que não corresponde ao resultado correto dessa operação, sendo o resultado correto o seguinte: $V = 1.308,33 - 770,34 = 537,99$. Porém, percebe-se esse erro mais como desatenção do que propriamente um erro epistêmico ou pragmático.

No momento da validação, o representante do Grupo 3 não apresentou sua estratégia de resolução, pois havia muita oscilação no sinal de internet, mas relatou que percebeu, durante a apresentação dos outros grupos, o erro cometido por ele no momento de sua resolução final. Nesse momento, a pesquisadora indagou se ele havia utilizado o GeoGebra para auxiliar na resolução. O participante P10 relatou que não conseguiu acessar o *link* da construção devido ao sinal da internet e, que o computador não estava disponível no momento.

Para finalizar essa sessão didática, é importante ressaltar que, durante esse encontro, muitos dos professores relataram dificuldade na conexão à internet, havendo quedas constantes, o que dificultou o acesso a informações e, principalmente, à troca de ideias entre os participantes, durante a etapa de formulação, além de comprometer um pouco a coleta de dados da pesquisa.

Mesmo com esses obstáculos, pôde-se verificar que os objetivos propostos nessa situação foram atingidos, pois todos os participantes encontraram a solução de 538mm para o volume reduzido da pílula, conforme o enunciado da questão proposta. Referente à utilização

do *software* GeoGebra, constatou-se sua manipulação; mesmo quando não foi usado para formular a solução, os futuros professores procuraram o recurso tecnológico para confrontar e validar a resposta apresentada, conforme o relato captado no momento da apresentação de um dos participantes do Grupo 2.

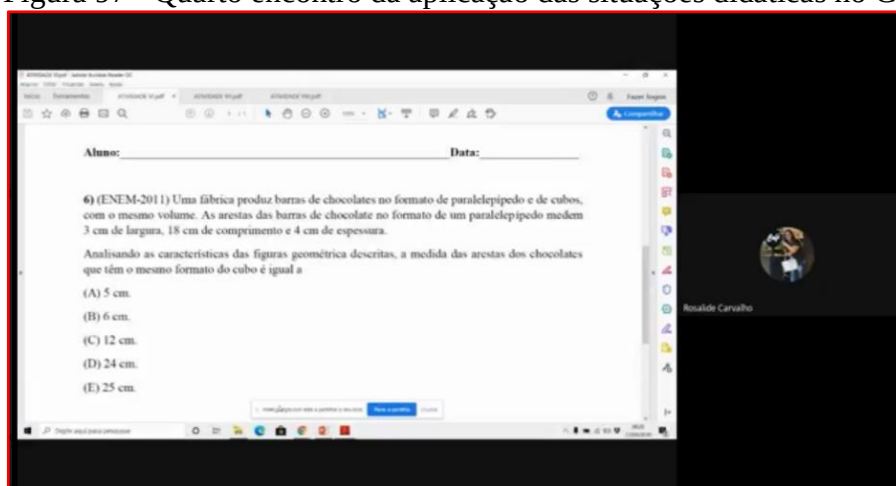
P6: Com relação ao GeoGebra eu não utilizei lá na resposta, mas eu acho importante agente dá uma olhada, por que depois que a gente utiliza o GeoGebra é possível ver mesmo, de forma explícita a mudança, a diferença com relação ao uso ou não. Então, eu utilizei o GeoGebra para comparar a resposta que encontrei, com a visualização da figura. Então, é importante a utilização do GeoGebra por que se torna visível e até mais dinâmico mesmo, a apresentação e a socialização com os alunos da sala de aula.

Com relação à institucionalização, a pesquisadora expôs os conceitos implícitos no enunciado do problema, pautados no Princípio de Cavalieri para, em seguida, fazer um levantamento de todas as estratégias de resolução dos participantes, retomando, no momento da apresentação, em uma única resolução. Nesse momento, a investigadora também apresentou a confrontação do modelo matemático com o modelo tecnológico apresentado pelo computador para validar a solução da questão 5.

8.3 Quarto encontro: Análise *a posteriori* e validação das Situações Didáticas do ENEM

As ações dos sujeitos da pesquisa foram iniciadas de modo semelhante às aplicações anteriores; os participantes dos grupos receberam os arquivos das questões e suas respectivas construções no GeoGebra. Iniciou-se o encontro virtual no *Google Meet* (Figura 97), onde a pesquisadora relembrou os passos das aplicações das sessões didáticas para todos os participantes.

Figura 97 - Quarto encontro da aplicação das situações didáticas no Google Meet



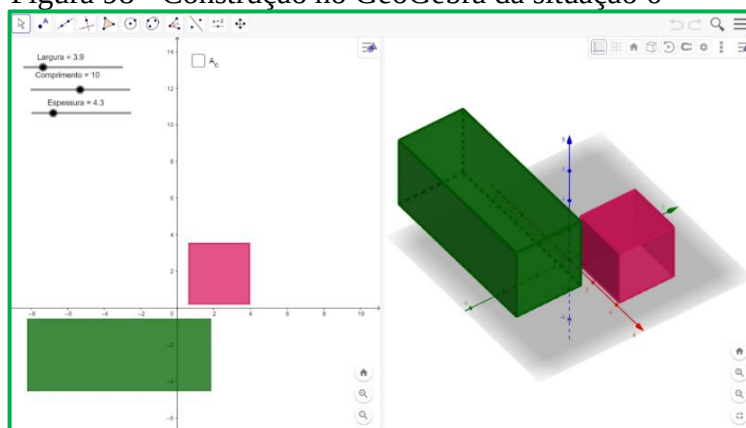
Fonte: Dados da pesquisa.

8.3.1 Análise a posteriori e validação da situação didática 6

Conforme os pressupostos da análise *a priori*, os professores em formação realizaram a leitura do problema e mobilizaram seus conhecimentos matemáticos para identificar elementos geométricos, presentes na situação didática 6, para criar um modelo matemático de resolução.

Os professores em formação foram incentivados a utilizarem a construção no GeoGebra (Figura 98) e, manipularem o objeto, a partir da ferramenta controle deslizante para tentarem estruturar um modelo matemático de resolução desta situação didática.

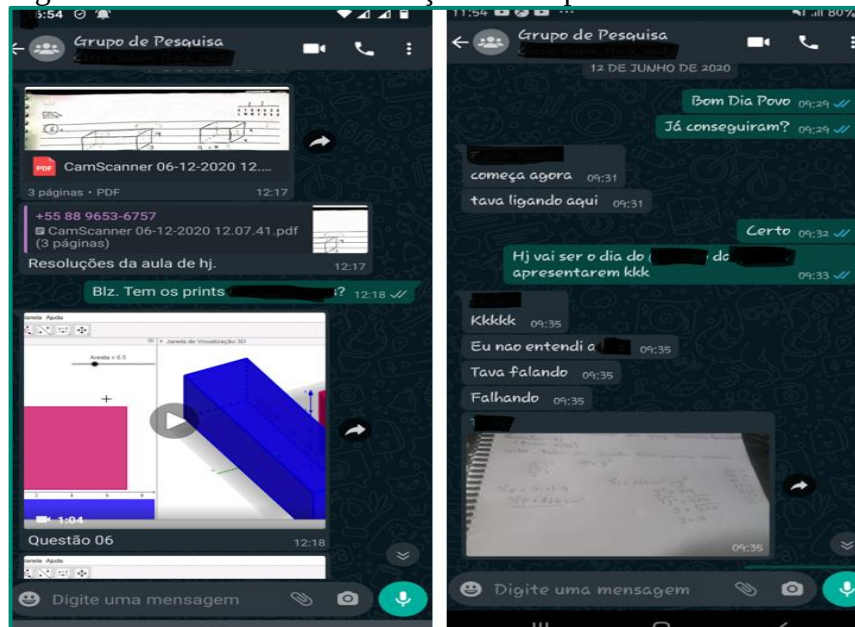
Figura 98 - Construção no GeoGebra da situação 6



Fonte: Construção da autora.

Na dialética da formulação, o Grupo 1 procede à troca de ideias através do *WhatsApp*. Nesse momento, os diálogos escritos ou por áudio são manifestados para atingir o objetivo do problema, veja Figura 99.

Figura 99 - Dialética da formulação do Grupo 1

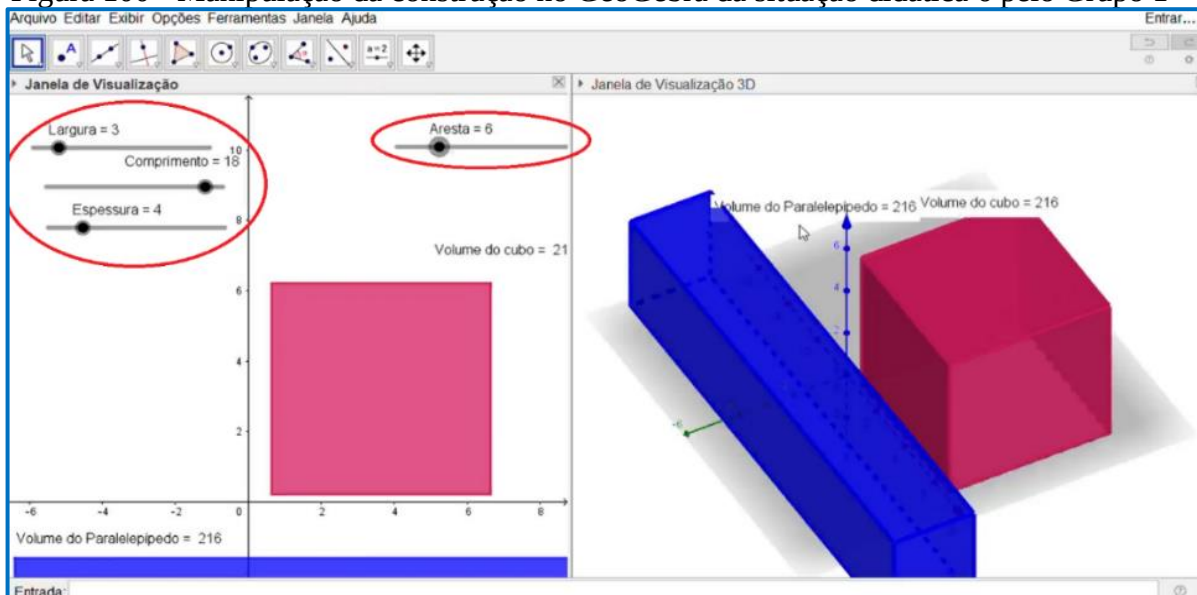


Fonte: Dados da pesquisa.

Pelo exposto na imagem da Figura 99, verifica-se a clara manifestação do Grupo 1 em utilizar a construção do GeoGebra para auxiliar na formulação da resolução matemática da questão 6. Os participantes trocaram vídeos, demonstrando como realizaram as simulações através da situação didática 6, expondo alguns questionamentos. Observaram que, através dessa construção dinâmica, eles tinham a possibilidade de variar os controles deslizantes e visualizar a igualdade dos volumes dos dois sólidos. Assim, os membros do grupo, no momento da formulação, utilizaram o GeoGebra (Figura 100), movimentando os “controles deslizantes”: Largura, Comprimento, Espessura e Aresta para estabelecer propriedades numéricas e geométricas, na tentativa de solucionar a situação didática 6, de acordo com os pressupostos da análise *a priori*.

Os professores em formação revelaram que a manipulação dos controles deslizantes possibilitou a compreensão dos elementos matemáticos implícitos no enunciado da questão, de acordo com os pressupostos da análise *a priori*.

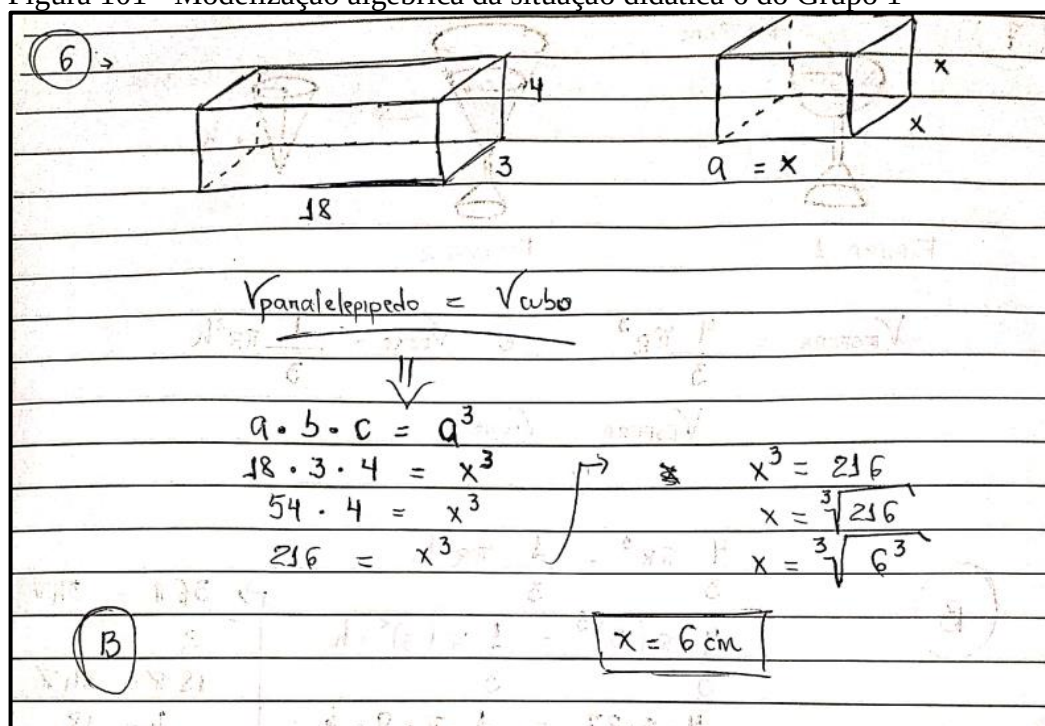
Figura 100 - Manipulação da construção no GeoGebra da situação didática 6 pelo Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa.

Logo após, começaram a estruturar um modelo matemático, recorrendo aos conhecimentos práticos e epistêmicos para formular um registro algébrico de solução (Figura 101).

Figura 101 - Modelização algébrica da situação didática 6 do Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa.

O Grupo 1, apresentou uma solução de acordo com os preceitos da análise *a priori*. Sendo assim, igualaram os volumes do cubo e do paralelepípedo por meio da seguinte expressão:

$$V_{\text{paralelepípedo}} = V_{\text{cubo}}$$

$$a \cdot b \cdot c = a^3$$

Em seguida, aplicam no seu modelo matemático as dimensões do enunciado da questão:

$$18 \cdot 3 \cdot 4 = x^3$$

$$x^3 = 216$$

$$x = \sqrt[3]{216}$$

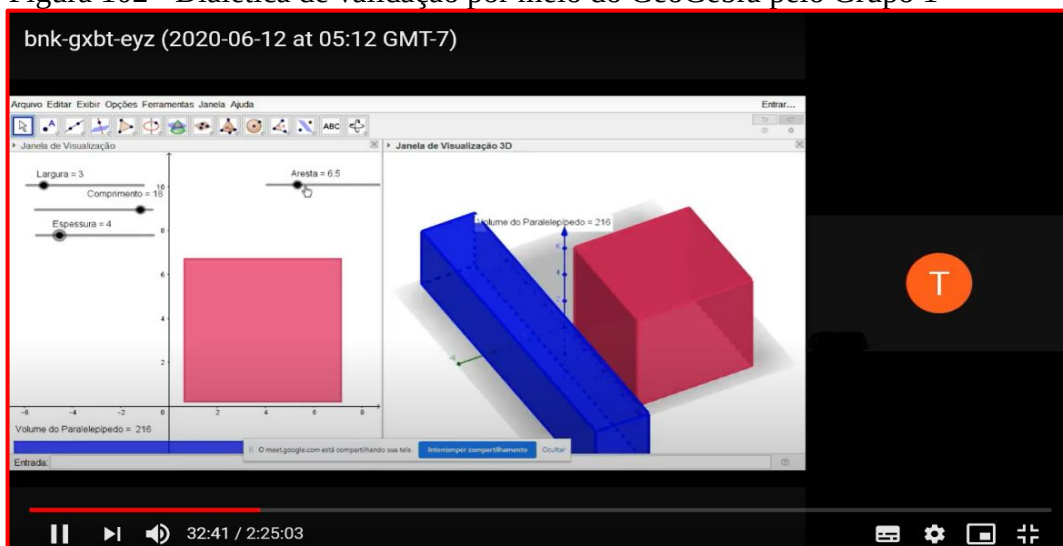
$$x = \sqrt[3]{6^3}$$

$$x = 6 \text{ cm}$$

Desse modo, o Grupo 1 determinou que aresta do cubo é 6 cm.

No momento da validação, o Grupo 1 expôs, no *Google Meet*, as estratégias de resolução adotadas por eles para responder o problema 6. Num primeiro momento, apresentou a solução através da utilização da movimentação da construção no GeoGebra (Figura 102).

Figura 102 - Dialética de validação por meio do GeoGebra pelo Grupo 1



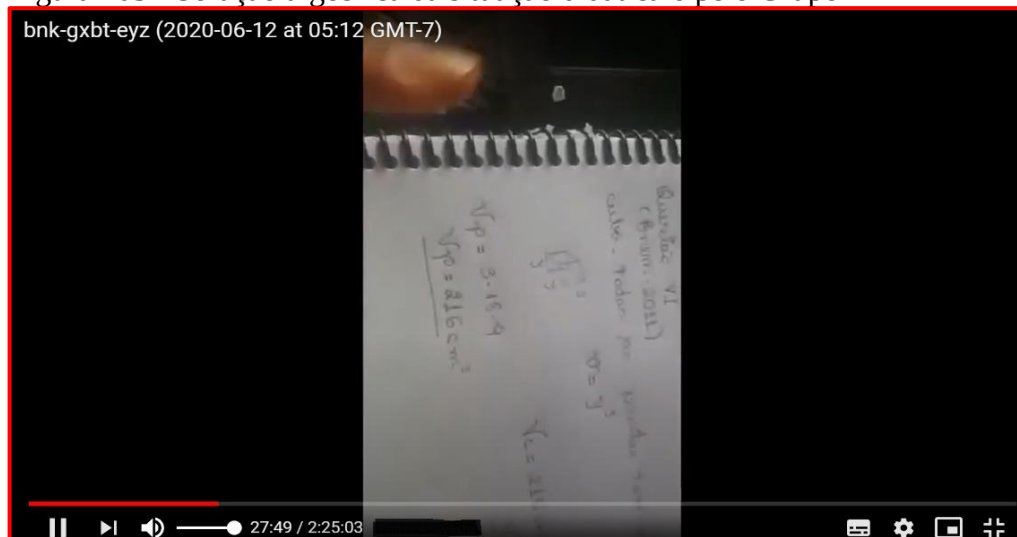
Fonte: Dados da pesquisa.

No momento da validação, o representante desse grupo apresentou suas estratégias de resolução para instituir o modelo matemático de sua solução, através da manipulação do GeoGebra, como segue:

P3: Inicialmente, eu usei os controles deslizantes e coloquei a largura, o comprimento e a espessura, conforme os dados da questão: a largura 3, o comprimento 18 e a espessura 4. Pronto, aí já tenho a medida do meu paralelepípedo, em que automaticamente é dado o volume de 216 cm^3 . Já com as arestas do cubo, eu realizei movimentações, com o seu controle deslizante, aumentando e diminuindo o tamanho para ter aquela noção de como deveria ficar o cubo. Já na movimentação eu consegui descobrir que o volume dele é igual a 216 cm^3 , assim eu visualizei que esse volume do cubo corresponde a aresta de medida 6. Em seguida, para comprovar eu fiz também o cálculo no caderno e comprovei que a medida da aresta é realmente 6 cm.

Depois, o Grupo 1, também expôs a solução algébrica da situação didática 6 (Figura 103).

Figura 103 - Solução algébrica da situação didática 6 pelo Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa.

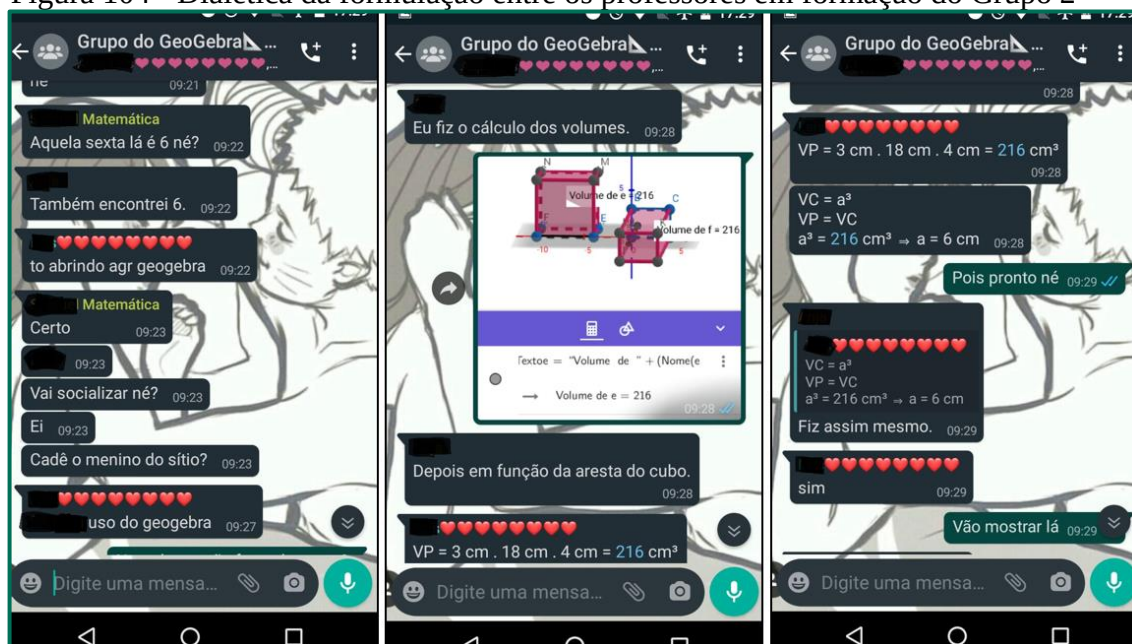
Segue a transcrição do áudio captada pelo *Meet*, no momento da validação pelo outro participante do Grupo 1.

P4: Bem, na questão fala que a fábrica produz barras de chocolate no formato do paralelepípedo e do cubo, com o mesmo volume. As arestas da barra de chocolate no formato de paralelepípedo medem: 3cm de largura, 2cm de comprimento e 4cm de espessura. Agente sabe que o cubo possui todas as arestas iguais, então o volume do cubo vai ser igual a medida das arestas ao cubo, no caso chamei essas arestas do cubo de “y”, sendo assim determinado por: $V = y^3$. Em seguida, nós calculamos o volume do paralelepípedo, multiplicando suas medidas: $3\text{cm} \cdot 18\text{cm} \cdot 4\text{cm} = 216\text{cm}^3$. Como sabemos que os volumes tanto do paralelepípedo quanto do cubo são iguais, igualamos o volume do cubo a 216, pois pelo o enunciado da questão, precisamos saber a medida das arestas do cubo, assim fizemos o seguinte cálculo: $y^3 = 216$. Para isolar o “y”, nós extraímos a raiz cúbica dos dois lados, desse modo, têm-se: $\sqrt[3]{y^3} = \sqrt[3]{216}$. Então ficou $y = 6\text{cm}$, que o valor das arestas do cubo.

Verifica-se, que o Grupo 1 utilizou o recurso tecnológico do *software* GeoGebra e o registro algébrico para confrontar e validar suas estratégias de resolução. Isso quer dizer que o grupo conseguiu associar as propriedades numéricas e geométricas, através da manipulação da imagem em terceira dimensão.

O Grupo 2, no momento da formulação, realizou ações diferentes, visto que criou a própria construção no GeoGebra para ajudar a formular sua resolução.

Figura 104 - Dialética da formulação entre os professores em formação do Grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa.

Pelo exposto, tem-se a clara manifestação dos participantes em utilizar a construção do GeoGebra para auxiliar na formulação da resolução matemática da questão 6. A imagem acima (Figura 104) mostra a interação da construção criada pelo grupo para auxiliar na solução do problema.

Ao analisar as trocas de informações entre os futuros professores, verificou-se as estratégias de resolução implementadas pelo Grupo 2 para formalizar a resolução do problema proposto. Veja Figura 105.

Figura 105 - Modelização algébrica da situação didática 6 pelo Grupo 2

* Volume do "paralelepípedo"

$$V_p = L \cdot C \cdot E$$

$$V_p = 3 \cdot 18 \cdot 4$$

$$V_p = 216 \text{ cm}^3$$

* Volume do "cubo"

$$V_c = a^3$$

$$V_p = V_c$$

$$216 = a^3$$

$$a = \sqrt[3]{216}$$

$$a = 6 \text{ cm}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Verifica-se que os participantes desse grupo expuseram uma solução semelhante à apresentada pelo Grupo 1. Buscaram estruturar um modelo matemático, a partir dos elementos e propriedades implícitos no enunciado do problema, depois padronizaram uma fórmula, pautados nos conhecimentos epistêmicos dos conceitos envolvidos no problema e na modelização do *software* GeoGebra.

O primeiro passo foi calcular o volume do paralelepípedo, haja vista que o enunciado da questão ressalta que os dois blocos possuem volumes iguais. Assim, eles multiplicaram as medidas da largura, comprimento e espessura, $V_p = 3 \cdot 8 \cdot 16 = 216 \text{ cm}^3$. Em seguida, determinaram que o volume inicial do cubo seria dado por, $V_c = a^3$ para, logo depois, igualar os dois volumes e determinar a medida da aresta do cubo, realizando o seguinte procedimento: $a^3 = 216$; calculando a raiz cúbica de 216, encontra-se a medida da aresta igual a 6cm, resolvendo assim a situação-problema 6.

Segue a explicação da modelagem de resolução desse grupo, a partir da transcrição de áudio coletado do *Google Meet* durante a formação, no momento da dialética de validação do representante do grupo, o participante P7.

Nós sabemos que os volumes são iguais, então o que foi que nós fizemos: eu, P6 e P8. Agente calculou o volume do paralelepípedo que é: $3 \cdot 18 \cdot 4$, que deu 216 cm^3 . Nós igualamos o volume do cubo com a sua aresta ao cubo, assim: $V_c = a^3$. Então, o

que a gente fez: como os dois têm volumes iguais, fizemos a raiz cúbica de 216, que no caso, deu 6 cm. Já o professor P5 utilizou o GeoGebra em sua resolução, mostrando no nosso grupo como vez a movimentação para solucionar a questão. Ele mostrou os dois volumes sendo iguais, aí ele descobriu que a medida da aresta era 6 cm, vendo o volume do paralelepípedo e do cubo.

Pelo relato, viu-se claramente que a dialética da formulação, entre os participantes do Grupo 2, constituiu-se um processo bastante promissor para a formação docente desses futuros professores, haja vista que a troca de informações possibilitou o aprimoramento de conceitos geométricos e o desenvolvimento de novos métodos de ensino.

O Grupo 3, na fase da formulação, apresentou um modelo de resolução registrado no ambiente do lápis e papel (Figura 106). Seu registro manuscrito mostra semelhança com as soluções apresentadas pelos outros grupos e com os pressupostos da análise *a priori*.

Figura 106 - Solução da situação 6 apresentada pelo Grupo 3

$$\begin{aligned}
 1. \quad & V_p = 3\text{cm} \cdot 18\text{cm} \cdot 4\text{cm} = 216\text{cm}^3 \\
 & V_c = a^3 \\
 & V_p = V_c \\
 & a^3 = 216\text{cm}^3 \Rightarrow a = 6\text{cm} \\
 & \text{item (A)}.
 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Conforme a exibição da Figura 106 o Grupo 3 apresenta uma solução, fazendo um comparativo de duas grandezas de mesma natureza ao relacionar a igualdade entre o volume do paralelepípedo e o volume do cubo, sólidos com formas diferentes, mas com características semelhantes, de acordo com o que se previu na análise *a priori*.

Assim, o grupo realizou o cálculo do volume do paralelepípedo, multiplicando largura, comprimento e espessura, encontrando o resultado de 216cm^3 . Sendo assim, para encontrar a medida da aresta do cubo, os participantes do grupo igualaram o volume dos dois sólidos e procederam ao seguinte cálculo:

$$\begin{aligned}
 V_p &= V_c \\
 a^3 &= 216\text{cm}^3 \\
 a &= 6\text{cm}.
 \end{aligned}$$

Desse modo, eles perceberam que, para se chegar à resposta do problema, bastava realizar o cálculo da raiz cúbica ou a fatoração de 216, encontrando, então, a medida da aresta do cubo, que é 6 cm.

No momento da validação, o representante do grupo, P10, não expôs seu modelo de resolução para os participantes por problemas técnicos. Apresentado oralmente, limitou-se a dizer que a resposta de seu grupo assemelhava-se àquelas apresentadas pelos grupos 1 e 2. No entanto, relatou algumas dificuldades durante a realização da atividade, como o fato de, nesse encontro, seu grupo contar com apenas dois participantes e, que um deles estava com dificuldade de acesso devido à oscilação do sinal de internet, o que tornou a troca de ideias pouco eficaz. Um outro ponto que chama atenção foi esse professor não utilizar o *software* GeoGebra, situação não prevista na análise *a priori*, e alegar não ter habilidade em seu manuseio. Porém, isso pode se caracterizar como uma resistência ao uso das ferramentas tecnológicas, podendo, assim, representar um obstáculo ao futuro professor, num ambiente de trabalho.

De acordo com os dados analisados, verificou-se que todos os participantes conseguiram encontrar 6cm como a medida das arestas do cubo; portanto, o objetivo dessa situação didática foi alcançado. Além disso, também observou-se que os professores em formação desenvolveram outras habilidades de apropriação dos assuntos implícitos na questão, estabelecendo diferentes estratégias de resolução para a situação didática proposta.

O recurso didático proporcionado pelo *software* GeoGebra, segundo relato dos futuros professores, foi importante para visualização e para estabelecer as estratégias de resolução do problema.

No momento da institucionalização, retomou-se os conhecimentos gerados nessa situação, trabalhando os conceitos implícitos do enunciado da questão, pautados no Princípio de Cavalieri e, utilizando o *software* GeoGebra (Figuras 107 e 108).

Figura 107 - Dialética da institucionalização da situação didática 6

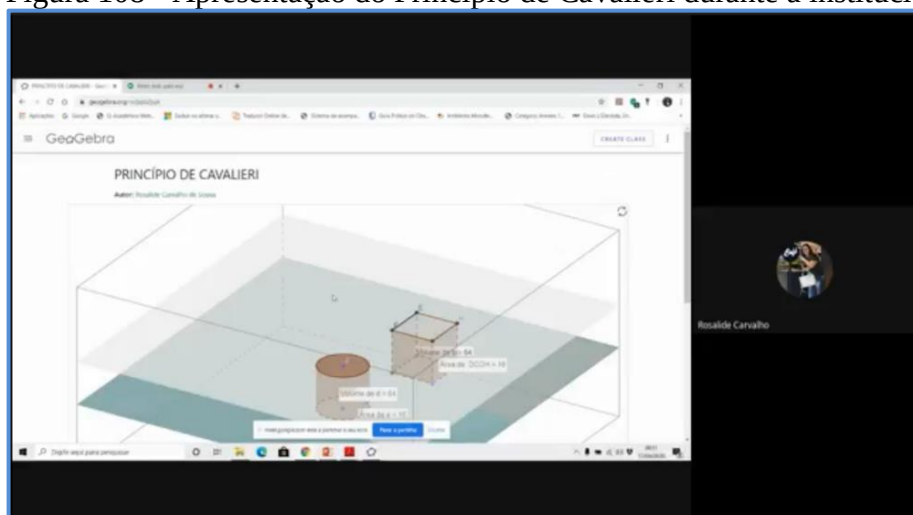
The image shows a screenshot of a GeoGebra presentation slide titled "Solução VI". The slide contains a list of bullet points in Portuguese:

- Um paralelepípedo cuja faces são retângulos é um bloco rectangular. Assim, pelo teorema 1 temos:
- "Teorema 1. O volume de um paralelepípedo é o produto da área da base pela altura" (LIMA, 2001, P. 72).
- Um cubo se constitui em um caso particular de bloco rectangular em que as arestas têm medidas iguais. Assim, tem-se:
- Se a aresta de um cubo C tem para medida um número racional a , então o volume de C será igual a a^3
- <http://opn.to/a/E3rca>
- <http://opn.to/a/jtQhF>

At the bottom of the slide, there is a small video inset showing a person, identified as Rosalide Carvalho, in a circular frame.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 108 - Apresentação do Princípio de Cavalieri durante a institucionalização



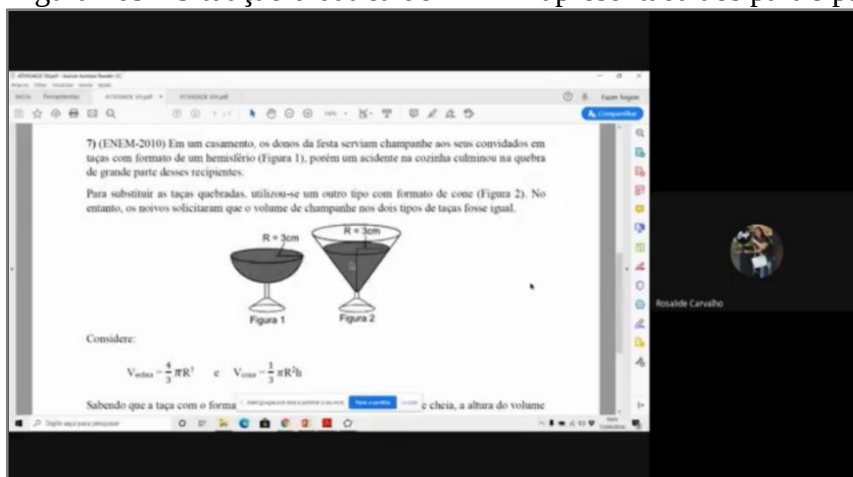
Fonte: Dados da pesquisa.

Em seguida, fez-se um levantamento das conjecturas exibidas pelos grupos, sintetizando em uma única solução e apresentando a todos os presentes, de acordo com os pressupostos da análise *a priori*. Durante as análises dos dados coletados, pôde-se verificar que os futuros professores definiram modelos matemáticos diferentes em sua formulação, sendo vista pela pesquisadora como um fator importante no enriquecimento da formação dos futuros docentes.

8.3.2 Análise *a posteriori* e validação da situação didática 7

O início dessa situação transcorreu de maneira semelhante à aplicação da situação didática 6; sendo assim, os participantes dos grupos leram o enunciado do problema (Figura 109), acessaram a construção no GeoGebra, realizaram as ações, formulações e validações para resolver o problema, de acordo com o que foi previsto na análise *a priori*.

Figura 109 - Situação didática do ENEM apresentada aos participantes

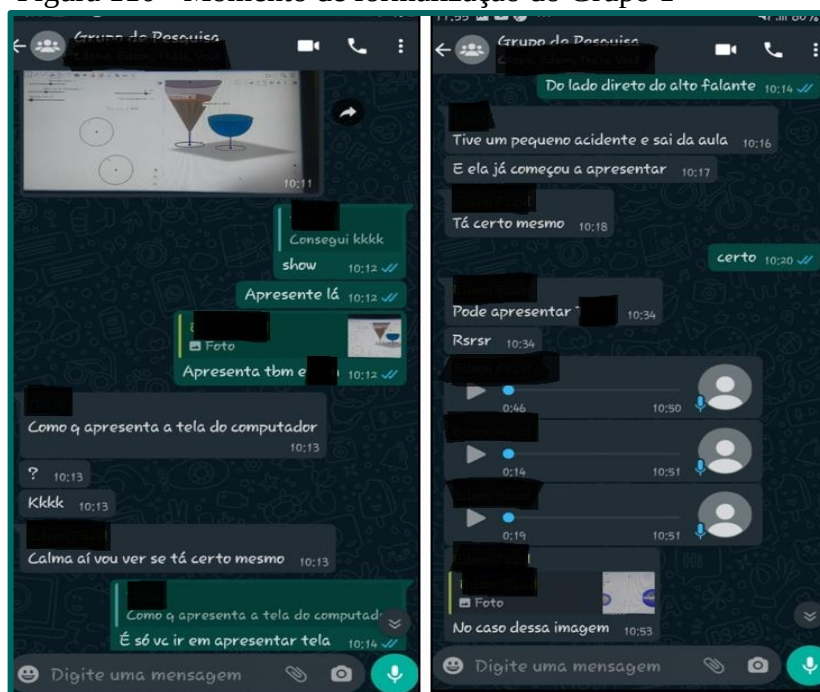


Fonte: Dados da pesquisa.

Assim, após realizar a leitura da questão 7, os participantes procuraram mobilizar seus conhecimentos matemáticos oriundos da interpretação da leitura do problema, observando que no caso em particular, basta usar a metade do volume de uma esfera inteira para estabelecer um modelo matemático de resolução. Tal como nas situações anteriores, os futuros professores foram orientados a utilizarem a construção do problema disponibilizado no *software* GeoGebra, para observar de forma dinâmica a relação de igualdade entre o volume das duas taças, conforme o que se tinha previsto na análise *a priori*.

Na dialética da formulação, houve os procedimentos de troca de informações entre os participantes do Grupo 1, na tentativa de estruturar um modelo matemático que solucionasse a questão. A comunicação entre os futuros professores desse grupo, ocorreu por mensagens de voz e escrita através do grupo de *WhatsApp* (Figura 110), assim, observou-se os diálogos entre eles, sobre a igualdade entre os volumes dos dois recipientes.

Figura 110 - Momento de formalização do Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa.

Segue a transcrição das mensagens de áudio, trocadas entre os participantes do Grupo 1, no momento da formulação.

P3: Como no caso eu tenho que ter o mesmo volume, eu igualei o volume da esfera com o volume do cone.

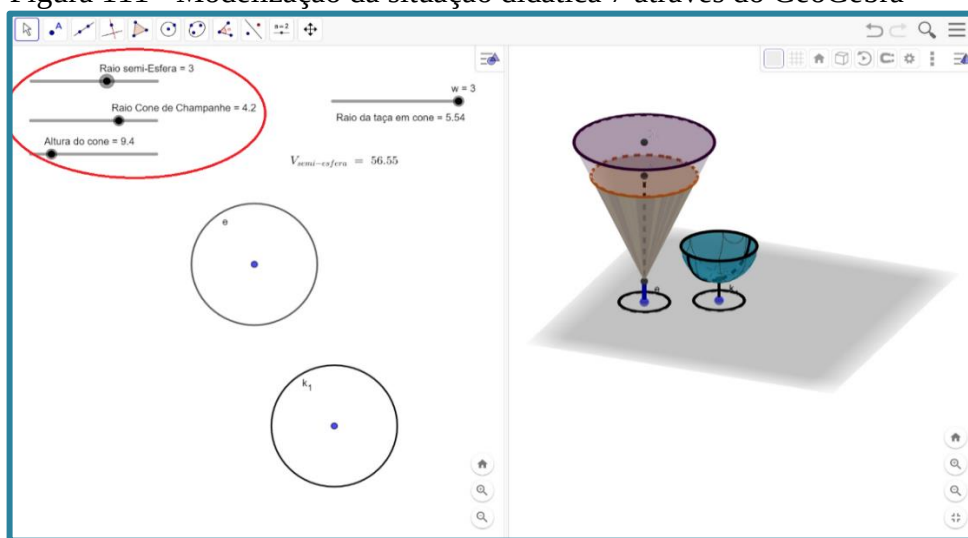
P4: Eu fiz no GeoGebra, movimentei aqui o raio dos controles deslizantes e coloquei o raio da semiesfera 3, como ele fala na questão. A do champanhe 3 e o raio da taça em cone 3. Ai aqui, ele me deu o volume da semiesfera.

P1: Fiz as movimentações no GeoGebra, depois fiz o cálculo no caderno para comprovar. Achei o mesmo resultado.

P2: Fiz o cálculo no caderno, achei 6 para altura.

Pelo exposto, vê-se claramente que os participantes se mostram receptivos ao uso do GeoGebra, tanto para formular a resolução quanto para comprovar sua validação. Assim, explorando a construção no *software* (Figura 111), eles utilizaram os controles deslizantes para verificar a variação do raio das duas taças, relacionando propriedades para comparar os volumes das bebidas, nos dois recipientes.

Figura 111 - Modelização da situação didática 7 através do GeoGebra



Fonte: Construção da autora.

Portanto, observadas as informações disponibilizadas na construção do *software*, os participantes do Grupo 1 usaram seus conhecimentos e habilidades de resolução para formalizar um modelo matemático (Figura 112). Assim começaram suas conjecturas com lápis e papel para solucionar a situação didática proposta. Nesse momento, os conhecimentos epistêmicos são acionados, pois os professores em formação pretendem despertar um saber matemático para estruturar uma fórmula que resolva o problema.

Figura 112 - Formulação da escrita matemática da situação didática 7 pelo

Grupo 1

FIGURA 1

FIGURA 2

$$V_{\text{ESFERA}} = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad \text{e} \quad V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

$$V_{\text{ESFERA}} = V_{\text{cone}}$$

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

$$\frac{4}{3} \pi (3)^3 = \frac{1}{3} \pi (3)^2 \cdot h$$

$$\frac{4 \cdot \pi \cdot 27}{3} = \frac{1 \cdot \pi \cdot 9 \cdot h}{3}$$

$$4 \cdot \pi \cdot 9 = \pi \cdot 3 \cdot h$$

$$36\pi = 3h\pi$$

$$18\pi = 3h\pi$$

$$h = \frac{18}{3}$$

$$h = 6\text{cm}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

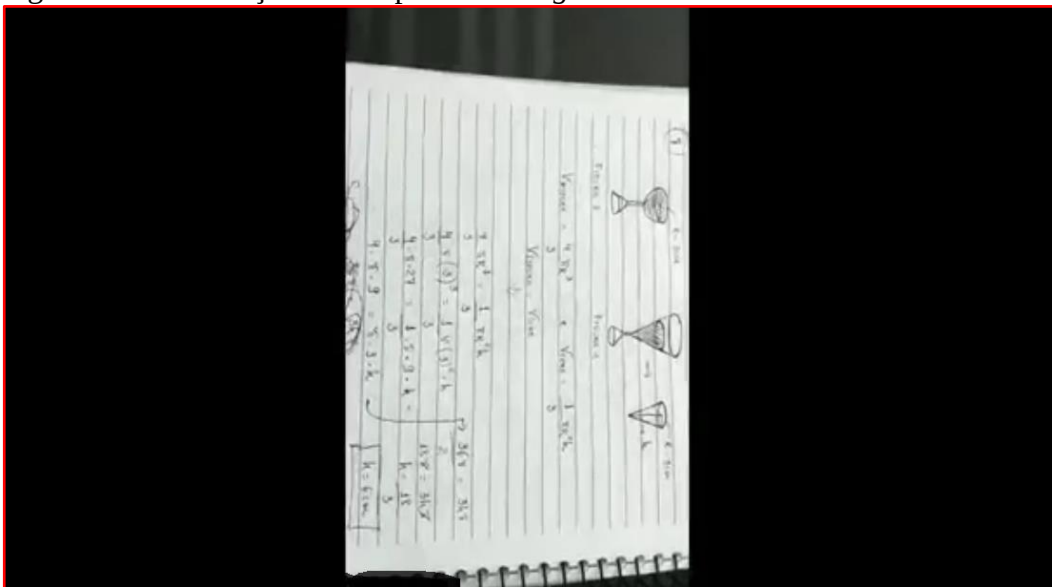
Diante do exposto, verifica-se que esse grupo, no momento da formulação, realiza o desenho no ambiente lápis e papel. Esses participantes ressaltaram que também utilizaram o recurso digital disponibilizado no *software* GeoGebra para comprovar o modelo de resolução do problema 7. No momento da validação, eles apresentaram a resolução no caderno e também com o auxílio do recurso digital do GeoGebra.

Assim, o representante P3 apresenta sua resolução a todos os presentes, captada pela gravação do *Google Meet*.

Nós tentamos fazer o desenho pra ficar melhor de explicar. Na figura II, que deve corresponder a parte que tá no líquido, nós colocamos em destaque. Assim, o que se quer saber, é a altura, já que o raio é 3 cm. Bem, o que nós fizemos: Como eu tenho que ter o mesmo volume, nós igualamos o volume da esfera com o volume do cone, assim: $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$ e substituí os valores do raio, sem alterar o pi porque posteriormente iríamos fazer o famoso corte. Realizando os cálculos, aqui na última linha nós temos $4\pi \cdot 9$ que é igual a $\pi \cdot 3 \cdot h$. O que percebemos? Que $4 \cdot 9$ é 36, vezes π é 36π . Nessa primeira linha aqui temos $\frac{36\pi}{2}$, por que por 2? Bem, como agente sabe eu tô calculando o volume da esfera, como a taça é um hemisfério eu vou ter que dividir por 2 esse volume, com isso eu tenho $18\pi = 3h \cdot \pi$. Agora eu faço o famoso corte, corto pi com pi e obtenho $3h = 18$, isolando o h eu temos $h = \frac{18}{3}$. Então, o h é 6 cm, essa é altura do líquido na taça.

A partir do que foi transcrito, tem-se a compreensão do raciocínio e das habilidades dos futuros professores para formular a resolução e para expor suas estratégias aos demais participantes. Na Figura 113, traz-se o momento de explanação/validação no *Meet*, apresentando sua resposta de forma clara e precisa a todos os presentes.

Figura 113 - Validação do Grupo 1 no *Google Meet*



Fonte: Dados da pesquisa.

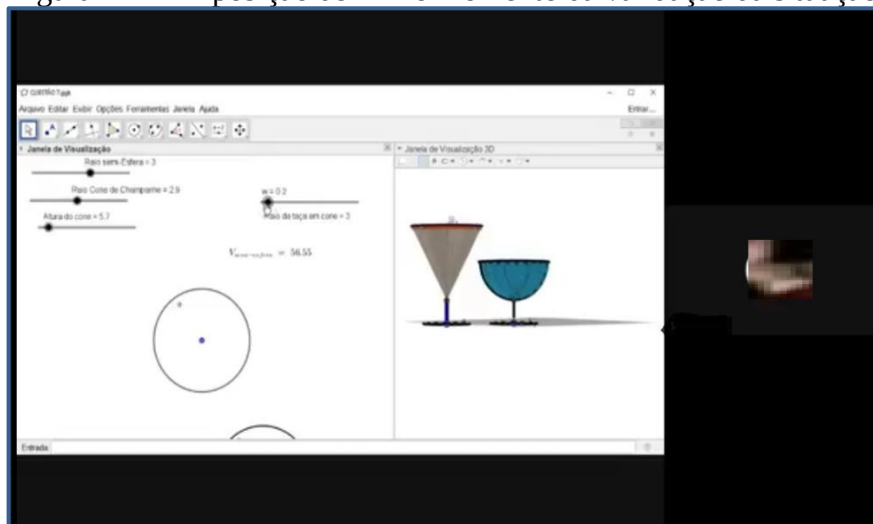
Os participantes do Grupo 1 também realizaram o procedimento inverso para formular a resposta do problema 7, haja vista que eles manipularam a construção no GeoGebra para solucionar a questão e, posteriormente, fizeram os cálculos no ambiente lápis e papel para comprovar e instituir um modelo de escrita matemática para a situação didática.

No momento da validação, um outro participante do Grupo 1 expõe suas estratégias de resolução para todos os presentes, conforme áudio captado pela gravação do *Google Meet*.

P4: Na questão ele fala que o raio da taça da figura 1 e da figura 2 são iguais. Então, eu movimente aqui, o raio dos controles deslizantes e coloquei o raio da semiesfera 3, como ele fala na questão. A da champanhe 3 e o raio da taça em cone 3 também. Aí, aqui ele me deu o valor do volume da semi-esfera que é 56,55. Então eu fui mechendo aqui no controle deslizante da altura do cone, e quando eu cheguei na altura 6, foi mostrado o mesmo volume, igual ao volume da semiesfera. Portanto, a altura do champanhe é 6 cm.

A Figura 114 traz o momento de validação/exposição da resolução de P4, deixando bem claro como ocorreu a manipulação da construção no GeoGebra para modelar uma escrita matemática da solução do problema 7.

Figura 114 - Exposição de P4 no momento da validação da situação 7 do ENEM



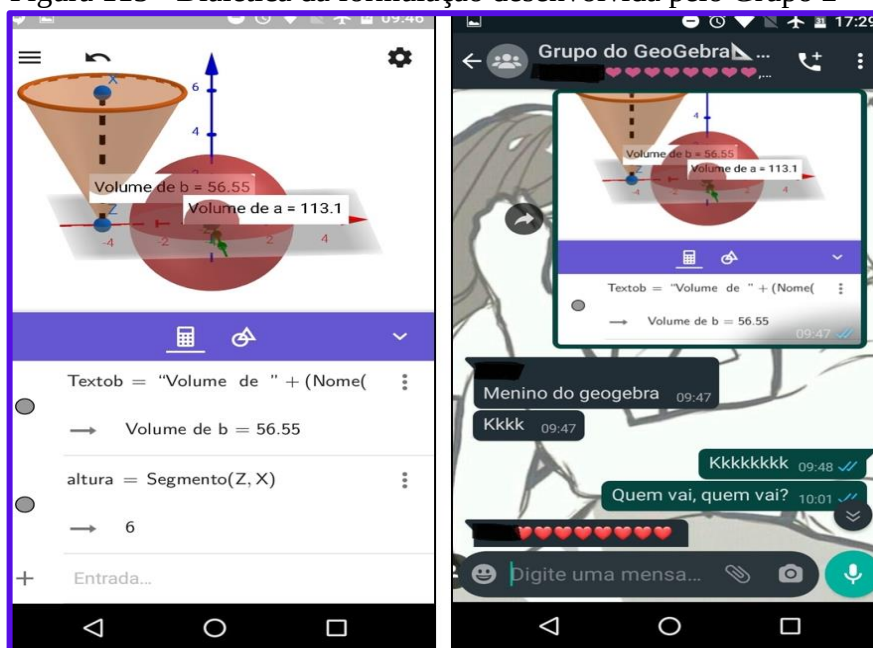
Fonte: Dados da pesquisa.

Observando-se a apresentação desses futuros professores, percebeu-se que eles conseguem desenvolver certas habilidades na exposição de suas estratégias de resolução, demonstrando preocupação em elencar os conceitos implícitos no enunciado da questão com o modelo disponibilizado no computador, manifestando ações que podem ser usadas em sala de aula, contribuindo assim com suas formações profissionais, seguindo os pressupostos da EDF.

O Grupo 2, no momento da formalização, usou o *WhatsApp* para trocar ideias e estruturar um modelo matemático de resolução (Figura 115). Os participantes desse grupo

realizaram novamente a construção de sua própria figura no ambiente 3D do *software* GeoGebra, o que é visto pela pesquisadora como um avanço no desenvolvimento profissional por esses professores em formação, solidificando a proposta da EDF.

Figura 115 - Dialética da formulação desenvolvida pelo Grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa.

Os participantes do Grupo 2 mobilizaram seus conhecimentos teóricos e práticos para estabelecer suas estratégias de resolução. Então, ao analisar seus registros sobre a etapa de formulação, verificou-se que eles apresentaram uma solução formulada com o uso de lápis e papel (Figura 116) e também com a utilização do *software* GeoGebra, semelhante às estratégias empregadas pelo Grupo 1.

Figura 116 - Solução da situação didática 7 apresentada pelo Grupo 2

$$\begin{aligned}
 & \text{Questão 7:} \\
 & V_B = V_C \rightarrow 4 \cdot \frac{3^3}{3} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3} \\
 & \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3} \\
 & \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3} \\
 & 4 \cdot \pi \cdot R^3 = \pi \cdot R^2 \cdot h \\
 & 4 \cdot 27 = 9 \cdot h \\
 & 108 = 9h \\
 & 18 = h \quad \therefore h = 6
 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Verifica-se que, ao equacionar a igualdade entre as duas taças, o Grupo 2 relacionou as informações do enunciado da questão e percebeu que em sua resolução não haveria necessidade de usar o volume da esfera, e sim de uma semiesfera; para tanto, eles dividiram o

volume da esfera por 2 e formalizaram a expressão para determinar a resposta do problema do seguinte modo:

$$\frac{V_e}{2} = V_c$$

$$\frac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3}{2} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3}$$

Então, resolvendo a igualdade, encontrou-se a seguinte solução:

$$\frac{4 \cdot \cancel{\pi} \cdot R^3}{6} = \frac{\cancel{\pi} \cdot R^2 \cdot h}{3}$$

$$\frac{4 \cdot 3^3}{6} = \frac{3^2 \cdot h}{3}$$

$$\frac{4 \cdot 27}{6} = \frac{9 \cdot h}{3}$$

$$\frac{108}{6} = 3h$$

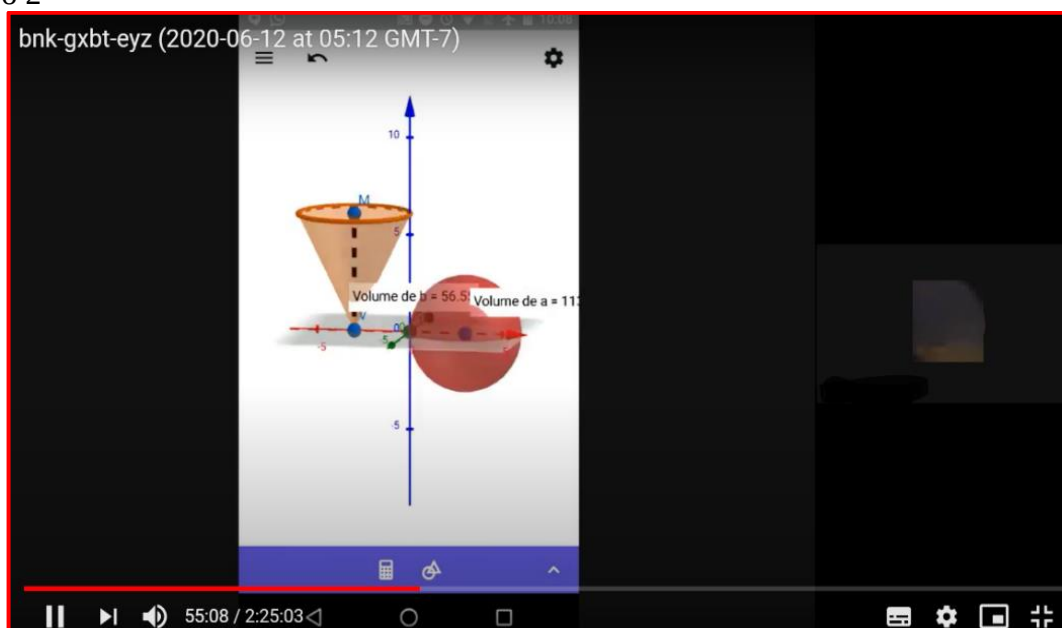
$$18 = 3h$$

$$h = 6$$

Igualando os dois volumes e resolvendo a expressão, encontraram como resposta 6cm de altura, correspondendo à quantidade de champanhe da taça em cone.

No momento da validação, o Grupo 2 exibiu a estratégia de resolução, a partir da utilização do *software* GeoGebra (Figura 117), e também o modelo algébrico da escrita matemática.

Figura 117 - Demonstração da solução por meio da construção no GeoGebra pelo Grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa.

A partir do relato do representante do grupo, gravado no ambiente de aplicação, ele expôs a todos os participantes suas estratégias de resolução, afirmando o uso do GeoGebra na sua formulação.

P5: Aqui eu já tenho as construções da esfera e do cone que a questão solicita. Ele fala que a taça original é hemisférica, ou seja, metade de uma esfera. Só que algumas dessas taças acabaram quebrando, e, eles tiveram que substituir por uma taça no formato de um cone. Eles querem que a mesma quantidade de champanhe servida na taça esférica, também seja servida na taça em cone. Como o GeoGebra não cria uma semiesfera nós optamos por construir a esfera, calcular o volume a partir da ferramenta volumes, que já tem no GeoGebra, que é essa aqui (mostra a ferramenta no vídeo). Aí no caso, ele deu que o volume dessa esfera aqui, que o GeoGebra chamou de “A” é 113.1, só que ele não quer o volume da esfera, ele quer o volume da taça, que é o volume de “A” dividido por 2, que daria exatamente o volume da taça que é 56,55. Depois, nós criamos aqui um cone, a partir de um ponto, que nós chamamos de “V” e esse outro ponto que nós chamamos de “M”. Então, a única coisa que fizemos foi regular esse segmento de “V” até “M”, de tal modo que o volume de “V” seja igual a 56,55. Assim, a gente pode movimentar esse segmento V a M, até que ele fique de tamanho que queremos. No caso, ele deu a altura desse segmento, que é o valor 6 cm, mas eu poderia colocar qualquer outro valor, procurando a partir desse segmento $\overline{VM}$. Assim, vocês podem notar que o volume “B”, que é o volume desse cone aqui (aponta para o objeto na tela), ele vai variar de acordo com a altura. Se eu colocar por exemplo uma altura 4, o volume do cone vai para 37.7, se eu aumentar esse valor para 6.3 ou superior, esse volume também vai ser alterando. Portanto, nós podemos alterar esses valores por meio dessa movimentação. Mas para a questão, ficou claro que a resposta é 6cm.

Já Grupo 3, no momento da formulação, estabeleceu suas estratégias de resolução pautadas nos conhecimentos epistêmicos e pragmáticos, apresentando um modelo algébrico de resolução, num ambiente do lápis e papel (Figura 118), não utilizando a construção no *software* GeoGebra fornecida pela pesquisadora.

Figura 118 - Modelização algébrica da solução da situação 7 do Grupo 3

$$\begin{aligned}
 &2 - V_1 = V_2 \\
 &\frac{4\pi \cdot 3^3}{6} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot h}{3} \\
 &\frac{2\pi \cdot 27}{3} = \frac{\pi \cdot 9 \cdot h}{3} \\
 &54 = 3h \\
 &h = 6
 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Verifica-se, pela imagem acima (Figura 118), que num primeiro momento eles igualaram o volume das duas taças, pela expressão, $V_1 = V_2$. Depois, aplicaram a fórmula do volume da esfera e do volume do cone na expressão, efetuando o cálculo do seguinte modo:

$$\frac{4 \cdot \pi \cdot 3^3}{6} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot h}{3}$$

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot 27}{3} = \frac{\pi \cdot 9 \cdot h}{3}$$

$$54 = 9h$$

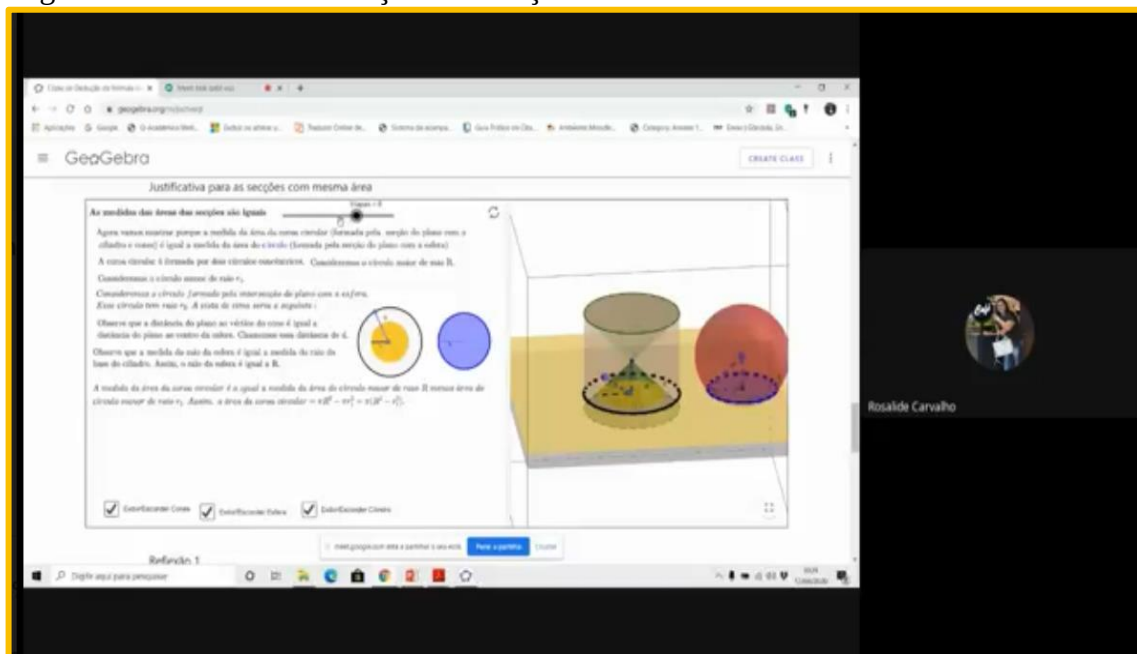
$$h = 6$$

No momento da validação, ao expor sua resolução, o representante do grupo apresentou sua estratégia, mostrando a todos uma solução prática e sucinta, explicando de maneira rápida e clara como estabeleceram a resposta do problema 7.

Diante do que foi exposto, afirma-se que o objetivo proposto na situação didática foi alcançado, uma vez que os participantes conseguiram resolver a questão e ainda apresentaram estratégias de resolução diferentes, fortalecendo a preparação desses professores em formação para o ambiente da sala de aula. Com relação ao processo de utilização do GeoGebra como recurso didático, os participantes afirmaram que ele foi importante para visualização, formulação e comprovação da resolução da situação.

No momento da institucionalização, a pesquisadora trouxe os conceitos implícitos no enunciado da questão através do Princípio de Cavalieri e do *software* GeoGebra (Figura 119), demonstrando, de maneira dinâmica, os conceitos de volume da esfera e do cone, deixando claro aos participantes, a importância da mediação do professor nessa etapa, antevendo uma situação de sala de aula para o futuro professor, enriquecendo, assim, o ambiente de formação.

Figura 119 - Institucionalização da situação didática 7 com o GeoGebra



Fonte: Dados da pesquisa.

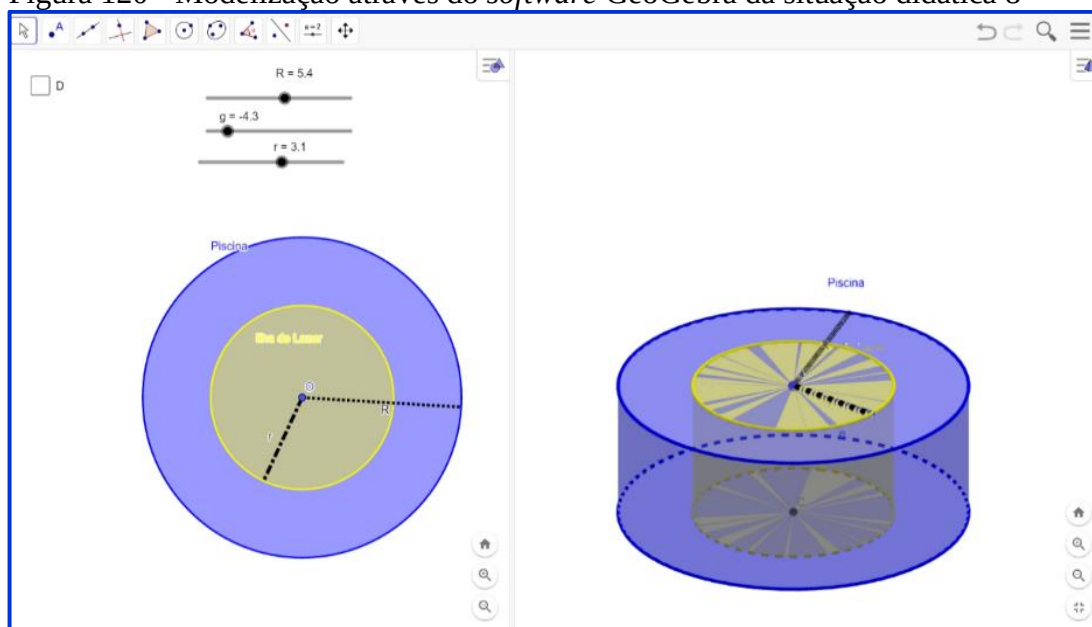
Por fim, a pesquisadora fez um apanhado de todas as estratégias de solução apresentadas naquele problema, ressaltando a diversidade de resoluções apresentadas. Sintetizou uma resposta, semelhante àsquelas apresentadas pelos participantes e também realizou a demonstração da resolução, por meio da manipulação da construção no *software* GeoGebra.

8.3.3 *Análise a posteriori e validação da situação didática 8*

O início dessa situação ocorreu de modo semelhante às situações anteriores. Assim, no momento da ação, os participantes tiveram acesso ao arquivo da questão, realizaram uma primeira leitura, consultaram a construção no GeoGebra, numa primeira tentativa de estruturar um modelo que possibilitasse a compreensão dos conhecimentos envolvidos no enunciado do problema, como citado na análise *a priori*.

Ressaltando que, nesse momento, os futuros professores foram previamente incentivados a utilizarem a construção do *software* GeoGebra (Figura 120), com a intenção de estimular o raciocínio e despertar a criatividade do modelo matemático, a partir da visualização do objeto em terceira dimensão.

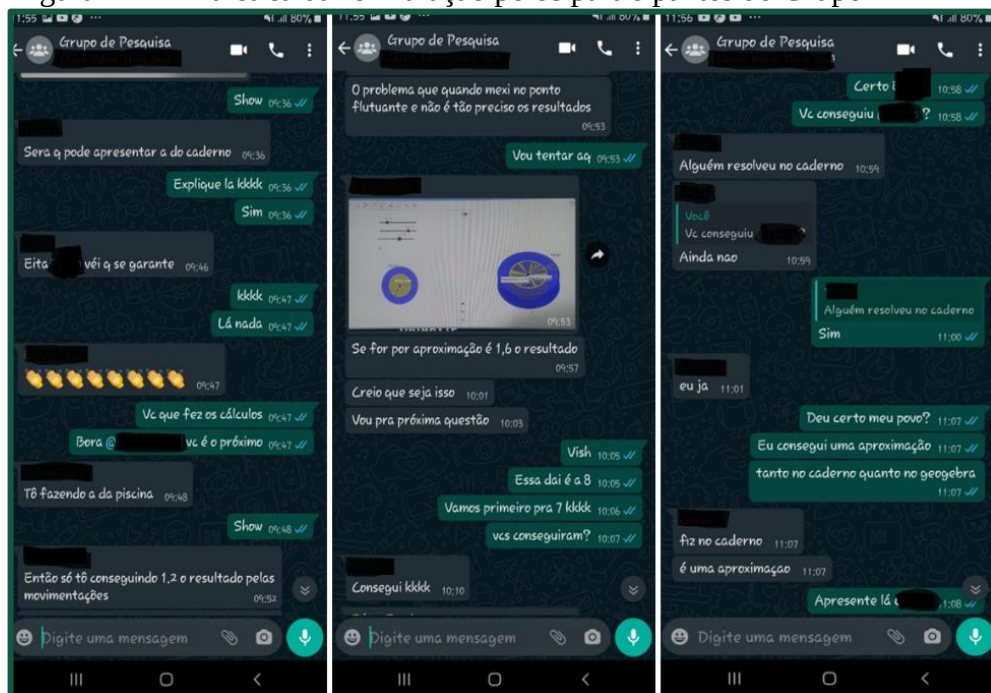
Figura 120 - Modelização através do *software* GeoGebra da situação didática 8



Fonte: Construção da autora.

Durante a formulação, houve as trocas de ideias entre os professores em formação, através de mensagens escritas nos grupos de *WhatsApp*, relacionadas ao objetivo do problema. Então, buscou-se analisar os diálogos entre os participantes sobre a redução do volume original da piscina, após a construção da ilha. Veja, na Figura 121, a dialética da formulação entre os participantes do Grupo 1.

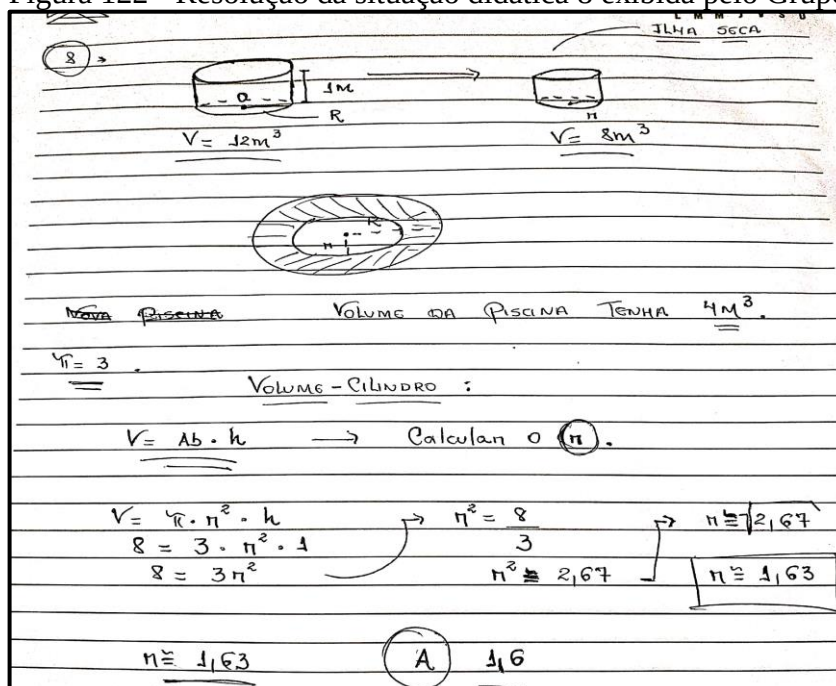
Figura 121 - Dialética da formulação pelos participantes do Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa.

De acordo com os diálogos desenvolvidos entre os participantes, evidencia-se que o uso do GeoGebra foi utilizado, tanto para formular uma resolução quanto para comprovação da resposta. Em seguida, os futuros professores procuraram apresentar um modelo de resolução, padronizando uma fórmula algébrica (Figura 122), por meio do qual seria possível calcular a medida do raio de uma circunferência, para em seguida calcular o volume do cilindro.

Figura 122 - Resolução da situação didática 8 exibida pelo Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa.

Sendo assim, observou-se que os participantes desse grupo realizaram a diferença entre o volume original da piscina e do espaço destinado a água, após a construção, para estabelecer o volume da ilha em 8m^3 e, assim, calcular a medida de seu raio para, em seguida, determinar a solução, por meio da fórmula do volume do cilindro, $V = A_b \cdot h$.

Substituindo na fórmula, tem-se a resolução final do problema proposto.

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$8 = 3 \cdot r^2 \cdot 1$$

$$8 = 3r^2$$

$$r^2 = \frac{8}{3}$$

$$r^2 \cong 2,67$$

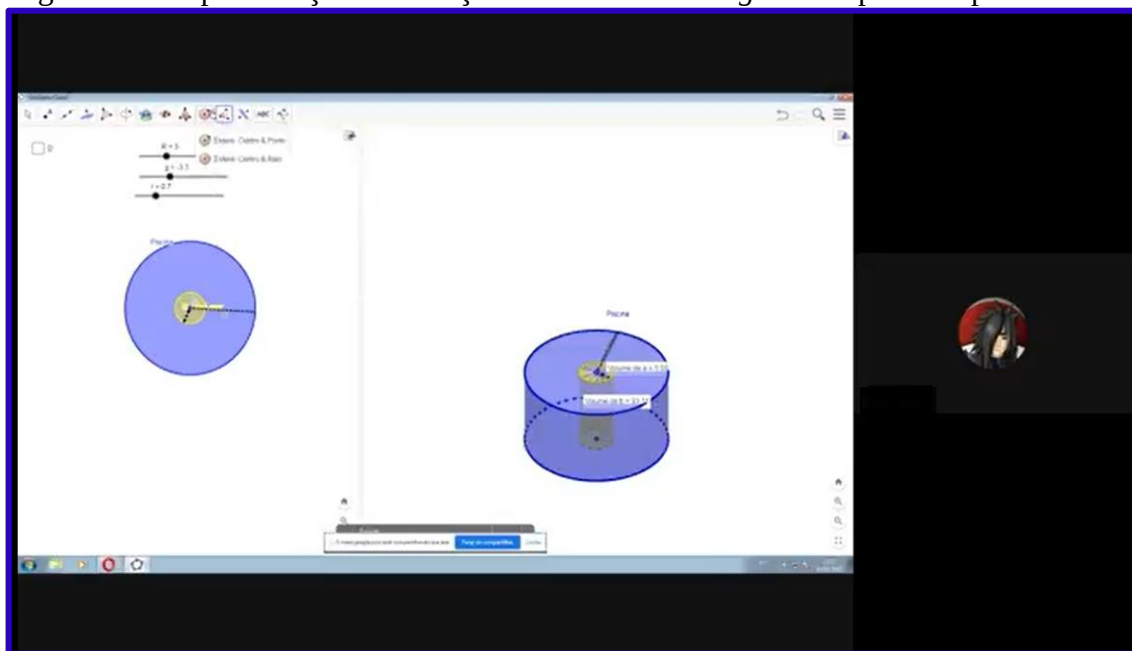
$$r = \sqrt{2,67}$$

$$r \cong 1,63 \text{ m}$$

Conclui-se, portanto, que o raio máximo da ilha estará próximo de 1,6 metros.

No momento da validação, o representante do Grupo 1 expôs as estratégias de resolução a todos os presentes, realizando uma demonstração por meio da manipulação da construção no GeoGebra. Figura 123.

Figura 123 - Apresentação da situação didática 8 no *Google Meet* pelo Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa.

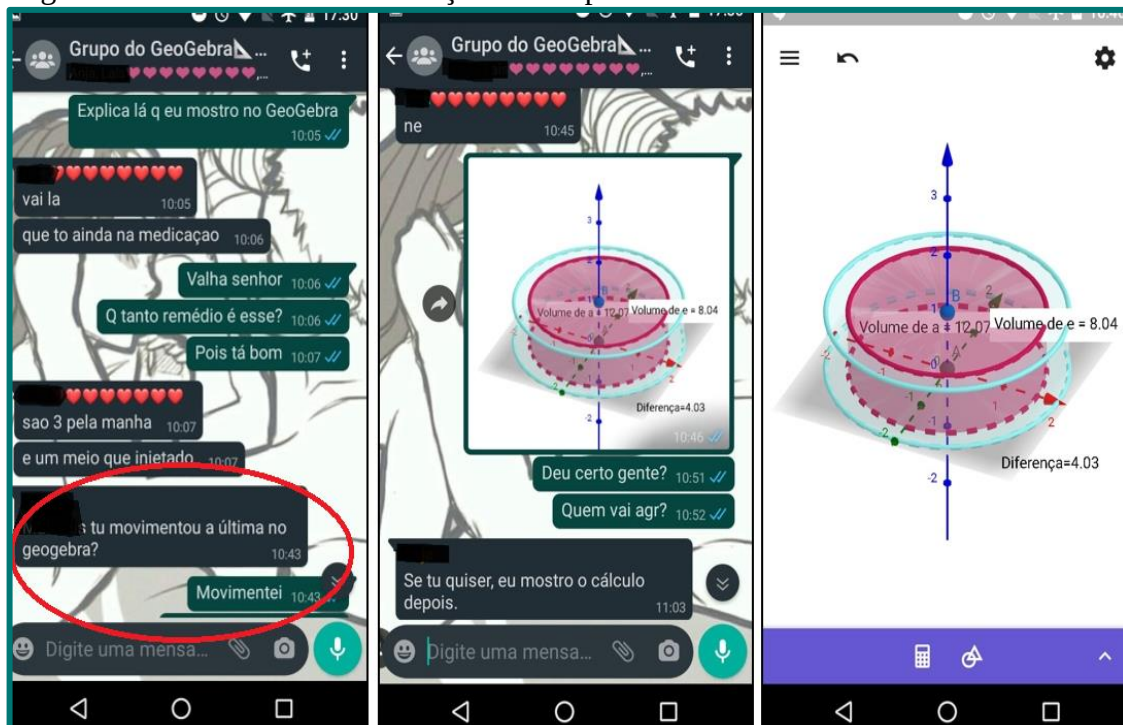
Assim, segue a transcrição do áudio coletado no *Google Meet*, no momento da explicação da estratégia de solução desse grupo, na dialética da validação:

P1: No caso, aqui nós colocamos logo para aparecer o volume da parte azul e da parte amarela para quando for mexendo nos pontos flutuantes ir aparecendo os valores. A questão fala que a piscina tem 1 metro de profundidade, aí no caso, a gente vai mexendo nos controles deslizantes para movimentar os raios. Assim, para que eu encontre a diferença entre elas e que obedeça a condição que ele me deu, que no caso tem que ser maior ou igual a 4, nós substituímos $12 - 3.r^2 \geq 4$. Depois de efetuar os cálculos encontramos que “r” será $\leq 1,632$. Que no caso aproximado será 1,6. Assim, a opção será a letra “A”.

Portanto, pelo exposto, evidencia-se a utilização da construção do GeoGebra pelos futuros professores na formulação da resolução, conforme o previsto na análise *a priori*.

Já os participantes do Grupo 2, na dialética da formulação, estabeleceram as estratégias de resolução, a partir das trocas de ideias, promovendo a resposta, tanto pela manipulação da construção no GeoGebra quanto no ambiente lápis e papel (Figura 124). Eles organizaram o modelo matemático, a partir da relação de diferença entre o volume inicial e o volume final da piscina.

Figura 124 - Dialética da formulação do Grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa.

Chama atenção, o fato dos participantes do Grupo 2 não utilizarem a construção no GeoGebra, disponibilizada pela pesquisadora, preferindo construir o próprio modelo no *software* para, a partir de seu manuseio, formular uma solução para o problema 8.

O grupo estruturou um modelo matemático de solução (Figura 125), recorrendo ao registro algébrico para responder à situação-problema proposta.

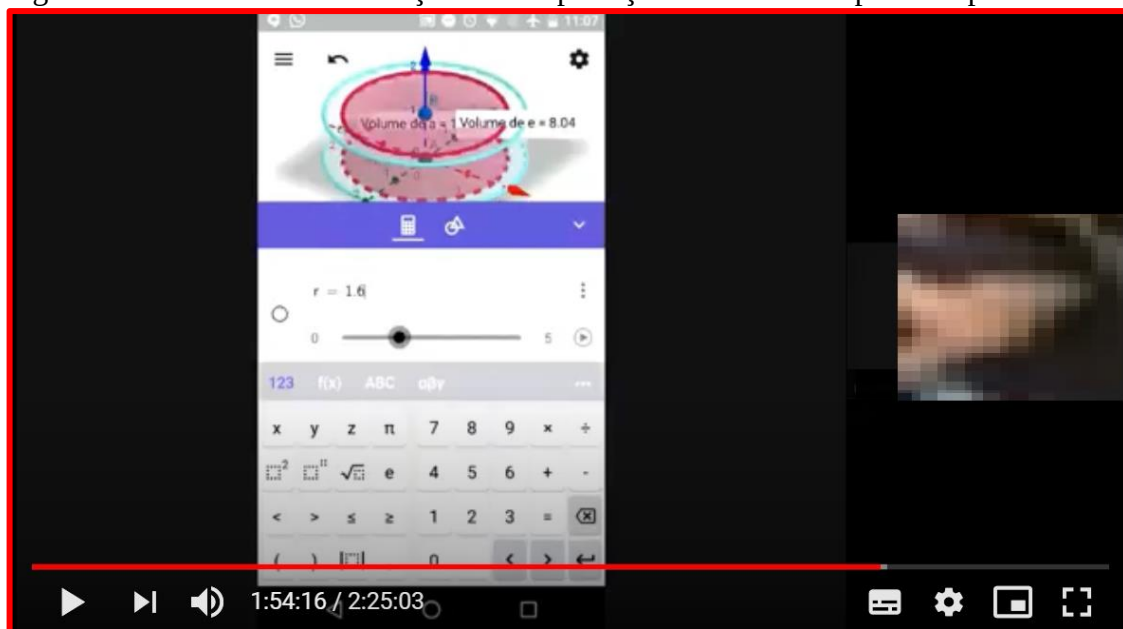
Figura 125 - Modelização da situação didática 8 apresentada pelo Grupo 2

Volume da piscina	$v_p - v_i \geq 4$
$V_p = 12m^3$	$12 - 3r^2 \geq 4$
	$3r^2 \leq 8$
Volume da ilha	$R \leq 1,632$
$V_i = \pi r^2 \cdot h$	Aproximadamente 1,6
$V_i = 3 \cdot r^2 \cdot 1$	
$V_i = 3r^2$	

Fonte: Dados da pesquisa.

A partir do relato audiovisual coletado durante a explanação do representante do grupo, no momento da validação (Figura 126), tem-se a afirmativa da utilização da construção do GeoGebra para auxiliar na modelização da solução dessa situação didática.

Figura 126 - Dialética da validação com exploração do GeoGebra pelo Grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa.

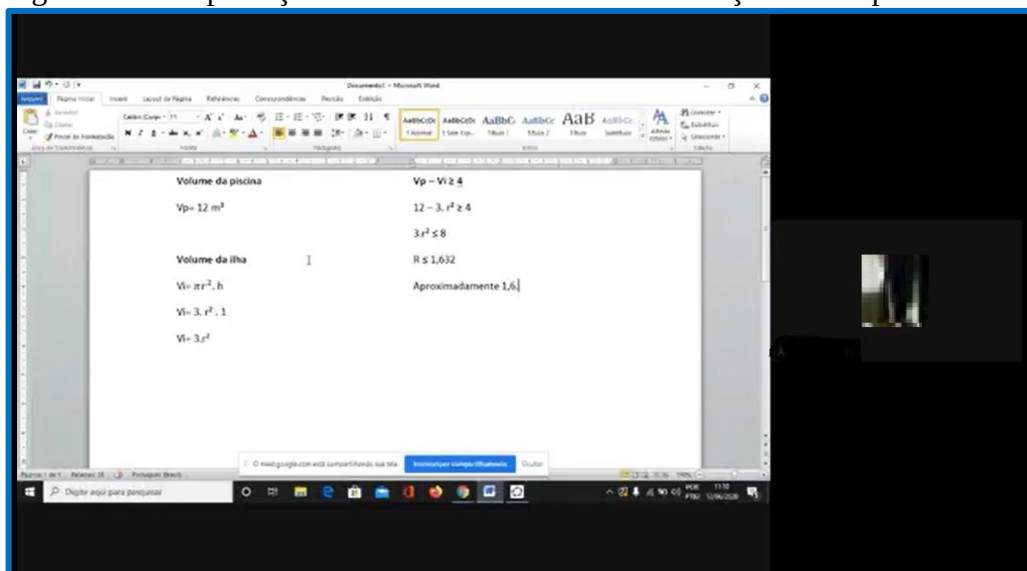
Segue a transcrição do áudio captada no momento da explanação do Grupo 2 para todos os presentes:

P5: Essa questão está dizendo que eu tenho uma piscina de 1 metro de profundidade e volume de $12m^3$. Deseja-se fazer uma obra para colocar uma área seca dentro desta piscina, que vai ter a mesma altura e o volume da água após a área seca, não podendo ser inferior a $4m^3$. Aí o que a gente fez aqui, foi primeiro fazer uma piscina completa no GeoGebra, conseguimos também fazer o controle deslizante, aprendi agora a fazer. Então, agente construiu esse cilindro e colocamos para seu volume os $12m^3$, aí à medida que a gente, vai movimentando esse controle deslizante, esse volume vai alterando, por que esse controle é justamente para o raio. Então, quando está mais ou menos em 1.96 esse volume tem aproximadamente, $12m^3$. No segundo cilindro nós fizemos a mesma coisa, nós pegamos o cilindro com o mesmo centro e a mesma altura e colocamos o controle deslizante, que no caso foi denominado de

“r”, e fui alterando os valores. Como ele queria que a diferença entre o volume de 12 m^3 depois da obra, não fosse inferior a 4 m^3 , nós criamos uma variável que foi chamada de diferença do volume do cilindro maior, nomeado de “A” e o cilindro menor, que foi chamada de “B”. Nós colocamos até a caixinha de texto, mostrando a diferença. E foi simplesmente mexendo no controle deslizante, até essa diferença chegar mais próximo de 4, que foi quando se obteve aproximadamente 1.6, que é justamente o raio, o maior raio possível que essa construção pode ter. No caso do raio, qualquer valor menor que 1.6, essa diferença será maior que 4. Passando desse valor, essa diferença já diminui. Assim, o raio para essa construção tem que ser no máximo 1.6, que é a alternativa “A”.

Ainda dando prosseguimento à dialética da validação do Grupo 2, um outro participante também apresentou um modelo de resolução da escrita matemática (Figura 127), expondo a resposta a todos os participantes.

Figura 127 - Explicação da escrita matemática de resolução do Grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa.

Percebe-se que o Grupo 2 apresenta uma resolução semelhante ao Grupo 1; porém, bem mais prática do que o modelo previsto na análise *a priori*. Segue a transcrição da explicação captada pelo *Meet*, no momento da validação desse participante.

P6: Bem, só como complemento da explicação de P5, para deixar bem claro nossa resolução, mesmo já tendo ficado bem visível no GeoGebra, mas só por uma questão de cálculo matemático eu vou mostrar como foi feito. Eu vou ler a questão para ficar melhor de entender. Fala que num parque aquático existe uma piscina infantil em forma de um cilindro circular reto de 1 metro de profundidade e volume igual a 12 m^3 . Deseja-se construir uma ilha de lazer seca no interior dessa piscina, também na forma de um cilindro circular reto, cuja base estará no fundo da piscina e com centro da base coincidindo com o centro do fundo da piscina. Deseja-se que após a construção dessa ilha, o espaço destinado à água na piscina tenha um volume de, no mínimo, 4 m^3 . Bem, ele me dá o volume da piscina, que é 12 m^3 . Então, a partir disso eu tiro o volume da ilha. Esse volume da ilha será o volume de um cilindro, que é $V_i = \pi \cdot r^2 \cdot h$, substituindo os valores, eu encontro no final o volume da ilha que é $V_i = 3r^2$. Para que eu encontre a diferença entre elas e que obedeça a condição que foi dada, que no caso tem que ser menor ou igual a 4, eu substituo em

$12 - 3 \cdot r^2 \geq 4$. Depois, de efetuar os cálculos eu encontro que “r” será ≤ 1.632 . Que no caso aproximado será 1.6, como P5 falou, opção “A”.

Percebe-se, assim, que o grupo identificou uma associação entre a resolução algébrica e a solução apresentada pela manipulação do recurso tecnológico do *software* GeoGebra, corroborando o propósito dessa situação didática.

O Grupo 3 apresentou suas estratégias de resolução, por meio do ambiente lápis e papel, (Figura 128). Eles não usaram o recurso tecnológico da construção no GeoGebra para ampliar a visualização e compreensão do problema. Acredita-se que eles optaram por usar apenas seus conhecimentos epistêmicos sobre o assunto, apresentando somente o resultado algébrico, em detrimento da exploração geométrica com o recurso didático do *software* GeoGebra. Observa-se que o Grupo 3 realizou uma resolução prática e sucinta, encontrando a resposta em poucas linhas, mas relacionando a diferença entre o volume da piscina inicial e seu volume após a construção da ilha, de acordo com o previsto na análise *a priori*. Convém ressaltar que o grupo não apresentou registro da dialética da formulação, enviando à pesquisadora somente a solução matemática do problema.

Figura 128 - Modelo generalizado pelo participante do Grupo 3

$$\begin{aligned}
 &3 - \text{volume piscina infantil: } V_1 = 12 \text{ m}^3 \\
 &\text{volume da ilha de lazer seca: } V_2 = \pi \cdot r^2 \cdot 1 = 3r^2 \\
 &V_1 - V_2 \geq 4 \\
 &12 - 3r^2 \geq 4 \\
 &3r^2 \leq 8 \\
 &r \leq 1,63
 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Percebe-se que o grupo estabeleceu, de acordo com o enunciado da questão, os volumes da piscina inicial em 12m^3 e o volume da ilha de lazer seca, do seguinte modo: $V_2 = \pi \cdot r^2 \cdot 1 = 3r^2$. Em seguida, estruturou uma expressão para solucionar a situação problema, por meio da seguinte diferença: $V_1 - V_2 \geq 4$, estratégia semelhante a que foi adotada pelo Grupo 2. Nesse momento, observou-se também que esse grupo expôs uma solução um pouco diferente daquela prevista na análise *a priori*, enriquecendo ainda mais o ambiente de formação.

Substituindo os volumes dos cilindros na expressão, tem-se a solução final da situação didática:

$$12 - 3r^2 \geq 4$$

$$3r^2 \leq 8$$

$$r^2 \leq \frac{8}{3}$$

$$r \leq 1,63$$

Portanto, a medida máxima para o raio da ilha será de aproximadamente 1,6 metros.

Segue a transcrição do áudio captado pelo *Google Meet*, no momento da validação, pelo representante do Grupo 3, ao expor as estratégias de resolução de seu grupo:

P10: O volume “i” que eu coloquei, é o volume que já foi dado na questão, que é igual a $12m^3$. O outro volume eu coloquei na fórmula que é $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, como a altura é 1 eu já coloquei $3 \cdot r^2$, o 3 é o valor do pi. A questão também já deu que o volume 1 é igual ao volume 2, e o volume 2 é igual ou maior que $4m^3$. Então, o que eu fiz? Eu só substituí, coloquei o volume 1 que é 12 e o volume 2 que é $3 \cdot r^2$, então apareceu a inequação $12 - 3r^2 \leq 4$. Então, eu só fiz resolver a inequação e obtive o raio aproximado a 1,6.

Portanto, conclui-se que o objetivo dessa situação foi atingido, visto que todos os grupos encontraram como resposta 1,64 metros de raio. Ademais, tem-se um ambiente de formação enriquecido pela manifestação de outras habilidades de compreensão e de estratégias de resolução apresentadas pelos futuros professores.

Com relação ao *software* GeoGebra como recurso didático, também se tem uma avaliação positiva sobre o seu uso, pois tal recurso tanto foi utilizado para formular uma resolução quanto para validar a resposta do problema, como segue na transcrição do áudio captado pelo *Google Meet*, do participante P5.

Eu só queria falar aqui, que principalmente nessa questão a manipulação do GeoGebra facilita muito na resolução, para se chegar na resposta correta. Nossa colega, P6, utilizou $\pi = 3$, o GeoGebra traz o “pi” próximo a 3,14. Quando vai fazer a resolução utilizando os valores mesmo, fica muito mais complicado, porque eu peguei no final como sendo a resposta igual a $2\sqrt{2}$ e dividi por raiz quadrada de “pi”. Então, só por essa daí já se cria uma aproximação boa, mas depois que agente faz a manipulação, fica mais fácil de fazer.

Na institucionalização, a pesquisadora apresentou os conceitos implícitos no enunciado da questão, volume do cone e volume da esfera, a partir de demonstrações do Princípio de Cavalieri, utilizando o *software* GeoGebra. Em seguida, fez um levantamento das estratégias de resolução apresentadas, sintetizado em único modelo, apresentando a comprovação dos dados algébricos com a manipulação do recurso didático disponibilizado pela construção no GeoGebra.

8.4 Quinto encontro: Análise *a posteriori* e validação das Situações Didáticas do ENEM

Antes de dar início, é importante relatar que as situações didáticas desse encontro foram encaminhadas aos participantes de maneira um pouco diferente das anteriores. As situações didáticas 9, 10 e 11 foram disponibilizadas aos professores em formação, cinco dias antes do último encontro, seguindo o mesmo protocolo de acesso das outras aplicações.

Buscou-se, com isso, identificar como se daria o processo de resolução dos futuros professores com um prazo maior para desenvolver as atividades, se eles trariam novos elementos de estratégias de resolução e, finalmente, como transcorreria o contrato didático.

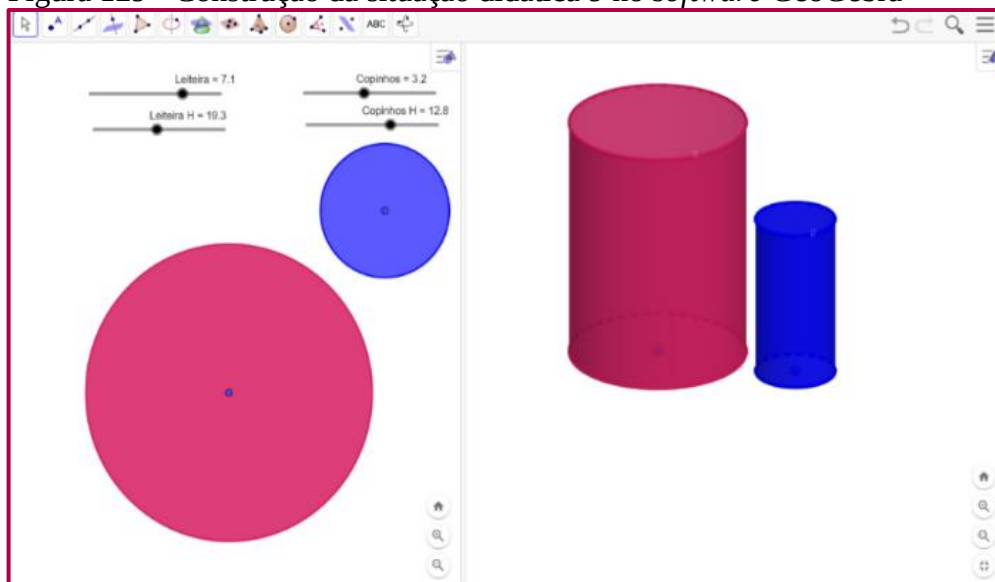
A seguir, apresentam-se as ações dos grupos, na tentativa de formularem suas estratégias de resolução.

8.4.1 Análise *a posteriori* e validação da situação didática 9

De maneira semelhante às outras situações, os participantes trabalharam em grupos, trocaram informações, expuseram ideias, identificaram as variáveis didáticas, realizaram as ações, formulações e validações para solucionar a situação, de acordo com que fora previsto na análise *a priori*.

Os futuros professores acessaram o arquivo da situação didática 9, leram o enunciado do problema e visualizaram a representação da questão no *software* GeoGebra (Figura 129). Tentaram mobilizar os raciocínios matemáticos, provenientes da leitura e da identificação de propriedades geométricas presentes no problema.

Figura 129 - Construção da situação didática 9 no *software* GeoGebra

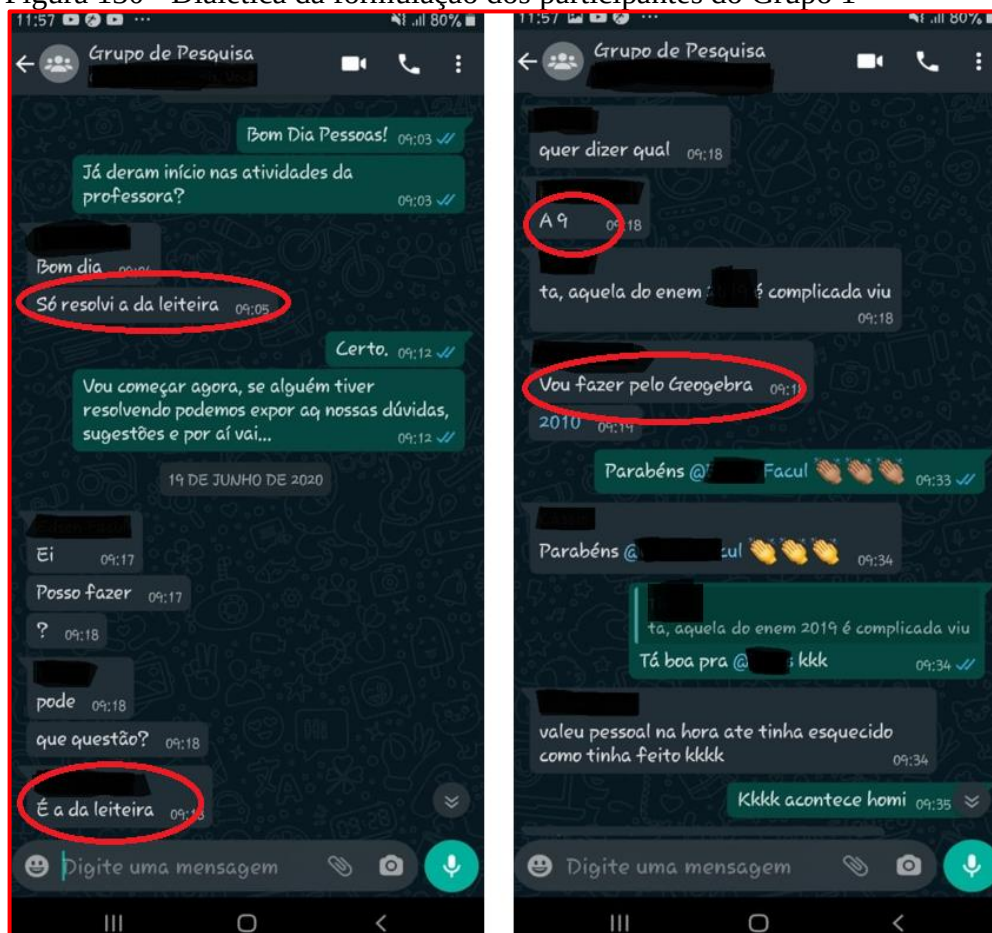


Fonte: Elaboração da autora.

De acordo com a análise dos dados coletados no momento da ação, os participantes movimentaram os “controles deslizantes” para modificar o raio e a altura da leiteira e do copinho, procurando identificar perspectivas intuitivas que possibilitassem a solução do problema.

Durante a dialética da formulação, procedeu-se a interação dos participantes dentro de seus grupos, através de troca de mensagens via *WhatsApp*, na tentativa de estabelecer as melhores estratégias de resolução. Então, nesse momento, analisaram-se os diálogos entre os membros do Grupo 1 (Figura 130) sobre as tentativas de estabelecer um padrão matemático que possibilitasse determinar o quanto a capacidade da leiteira seria maior do que a do copo.

Figura 130 - Dialética da formulação dos participantes do Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa.

Pelo exposto, percebe-se que o Grupo 1 conseguiu desenvolver estratégias de resolução, tanto na escrita matemática quanto na utilização do GeoGebra, a partir de seus conhecimentos epistêmicos e pragmáticos sobre a área de um círculo e o volume de um cilindro. Em seguida, o grupo promoveu um modelo matemático para solução (Figura 131), por meio dos registros algébricos para padronizar uma fórmula correspondente ao volume do cilindro.

Figura 131 - Solução algébrica da situação didática 9 apresentada pelo Grupo 1

09

Volume do cilindro maior = Volume do copo

Volume da leiteira = $\pi r^2 \cdot h$

$V_L = \pi \cdot 4^2 \cdot 20$

$V_L = \pi \cdot 16 \cdot 20$

$V_L = 320\pi \text{ cm}^3$

Volume do copo = $\pi r^2 \cdot h$

$V_C = \pi \cdot 2^2 \cdot 4$

$V_C = \pi \cdot 4 \cdot 4$

$V_C = 16\pi \text{ cm}^3$

Obs: São 20 copinhos e devem ficar na metade da capacidade

Logo, $20 \cdot \frac{V_C}{2} = 10 \cdot V_C = 10 \cdot 16\pi \text{ cm}^3 = 160\pi \text{ cm}^3$

Com isso, sabendo que o volume da leiteira é $320\pi \text{ cm}^3$ e o volume dos 20 copinhos pela metade é de $160\pi \text{ cm}^3$, Então a alternativa correta é a (A), pois:

$\frac{V_L}{2} = 20 \cdot \frac{V_C}{2}$ e $V_L = 20 \cdot V_C$

Fonte: Dados da pesquisa.

Observa-se que o grupo mobilizou os conhecimentos geométricos necessários para determinar o volume da leiteira, sendo validada pela expressão:

Volume da Leiteira (V_L)

$$V_L = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V_L = \pi \cdot 4^2 \cdot 20$$

$$V_L = 320\pi \text{ cm}^3$$

Para, em seguida, realizar um cálculo similar para determinar o volume do copinho, como segue:

Volume do Copinho (V_C)

$$V_C = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V_C = \pi \cdot 2^2 \cdot 4$$

$$V_C = 16\pi \text{ cm}^3$$

Observa-se que o Grupo 1 enfatiza que, para se chegar à solução, é necessário determinar uma quantidade de água suficiente para encher 20 copinhos pela metade, formulando a seguinte expressão:

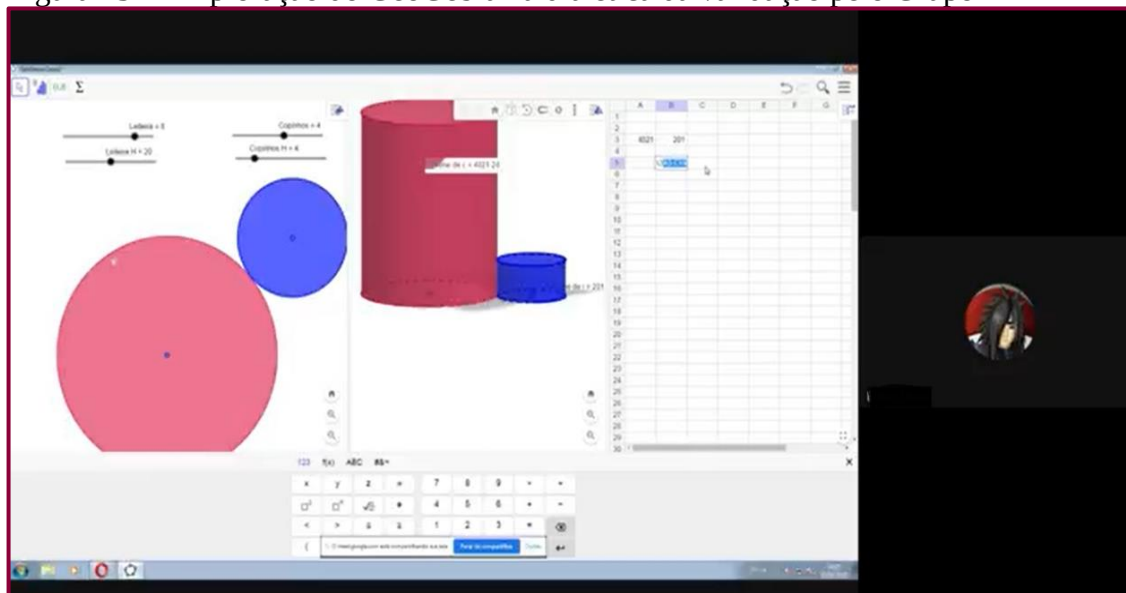
$$20 \cdot \frac{V_C}{2} = 10 \cdot V_C = 10 \cdot 16\pi \text{ cm}^3 = 160\pi \text{ cm}^3$$

Para finalizar a resolução, os participantes desse grupo mobilizam seus conhecimentos cognitivos para instituir o seguinte raciocínio: sabendo-se que o volume da leiteira é $320\pi \text{ cm}^3$ e a metade do volume dos copinhos é de $160\pi \text{ cm}^3$, pois $\frac{V_L}{2} = 20 \cdot \frac{V_C}{2}$ e $V_L = 20 \cdot V_C$.

Então, a leiteira deve conter água até a metade, pois seu volume é 20 vezes maior que o volume do copo, o que corresponde à opção de letra “A”.

No momento validação, o Grupo 1 expôs suas estratégias de resolução, por meio da manipulação da construção no *software* GeoGebra (Figura 132).

Figura 132 - Exploração do GeoGebra na dialética da validação pelo Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa

Seque a transcrição da explicação do professor P1, captada pela gravação *Google Meet*, no momento da validação.

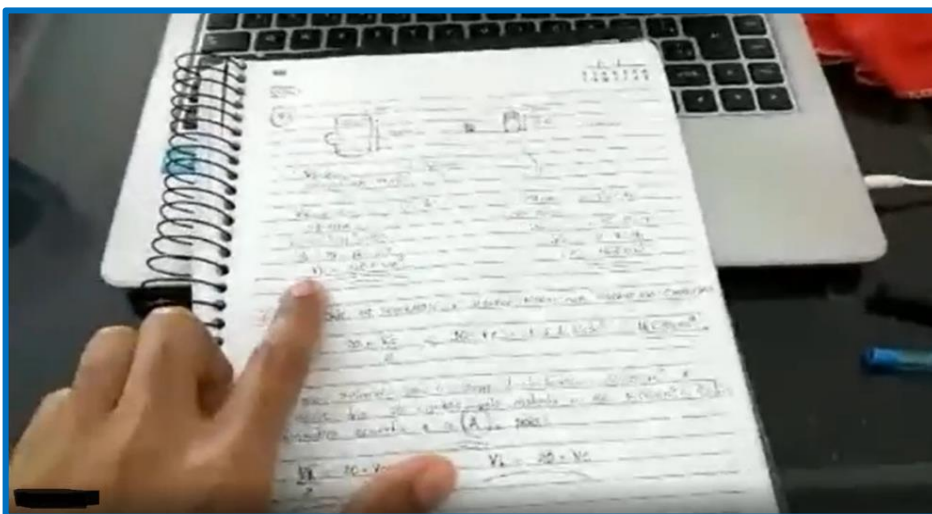
P1: A questão pede que Dona Maria disponha de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos, também cilíndricos. Ela tem que servir, para 20 pessoas, utilizando a leiteira grande, enchendo os copinhos plásticos até a metade. Então, de início eu vou mexer aqui no controle deslizante, referente ao raio da leiteira, que deve ter 8 cm, então eu vou mover até o 8. Agora, eu vou movimentar o controle deslizante da altura da leiteira, até 20 cm. Assim, já se tem o volume da leiteira. Mexendo no controle deslizante do raio do copinho, até o 4, de acordo com o que questão pede, e também movendo o ponto flutuante da altura também para 4 cm, têm-se o volume do copo. Essa questão é mais de interpretação, por isso eu vou utilizar alguns valores, mas vou pegar mais a parte inteira. Realizando o cálculo eu vou colocar 4021 para o volume da leiteira e 201 para o volume do copo. Assim, eu vou saber quantas vezes eu posso encher o copinho, utilizando a leiteira, para isso eu vou dividir $4021 \div 201 = 20$. Só que aí a questão que o quê? Quer que o copo seja cheio só pela metade, como eu já sei que posso encher 20 vezes o copinho pequeno, com a leiteira inteira, então eu vou precisar encher a leiteira inteira, no caso eu vou utilizar a metade, que assim daria para encher 10 copos pela metade. Essa é uma questão mais de interpretação, que no caso, a resposta seria a alternativa “A”, encher a leiteira até a metade, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo. Assim, eu posso encher a metade de cada copinho 20 vezes.

O representante do Grupo 1 apresentou em sua demonstração uma explicação da utilização do GeoGebra para formular a resolução. Essa tentativa de validação não foi aceita pelos participantes, pois, para eles, muito embora o professor P1 tenha apontado a opção

correta para a resolução, o raciocínio apresentado não comprova a resposta, haja vista esse professor ter efetuado a manipulação dos raios dos objetos de maneira equivocada, utilizando as medidas referentes ao diâmetro dos cilindros, ao invés dos valores dos raios e finalizando com uma divisão do volume da leiteira pelo volume do copo, o que corresponde à quantidade de vezes que o copo caberia na leiteira, também apresentando um raciocínio equivocado. Aqui se observou o que pode ser considerado um obstáculo de interpretação matemática, uma vez que ele utilizou os dados apresentados no suporte da questão, sem uma leitura mais aprofundada do problema.

Assim, o Grupo 1 solicitou que um outro participante expusesse uma outra estratégia de resolução (Figura 133) para comprovar e validar a resolução por eles apresentada.

Figura 133 - Dialética de validação no ambiente do lápis e papel exibido pelo Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa.

Desse modo, o professor P3 expôs o modelo de resolução realizada no ambiente do lápis e papel, conforme a transcrição a seguir, captada pelo *Meet*, no momento da apresentação.

P3: No caso foi realizado o cálculo do volume da leiteira e o volume do copo. A gente sabe que o volume do cilindro é $\pi \cdot r^2 \cdot h$, certo? Aí no caso, eu calculei o volume da leiteira e o volume do copo. Com relação a leiteira, como eu não tinha um valor definido para pi, eu deixei ele normal e continuei o cálculo. Como o diâmetro da leiteira é 8, o raio é a metade, então logo o raio é 4, ficando assim: $V_L = \pi \cdot 4^2 \cdot 20$. Assim, realizando o cálculo temos: $V_L = \pi \cdot 16 \cdot 20 = 320\pi\text{cm}^3$. Para o volume do copo, no caso, é também o volume de um cilindro que é $V_C = \pi \cdot r^2 \cdot h$. Como o diâmetro do copo é 4, no caso o raio é a metade, então é 2 e a altura é 4. Assim, temos: $V_C = \pi \cdot 2^2 \cdot 4$. Realizando o cálculo, eu tenho que o volume do copo é $16\pi\text{cm}^3$. Bom, no caso a questão pede que 20 copinhos sejam cheios pela metade, eu faço aqui uma continha básica $20 \cdot \frac{V_C}{2}$, realizando esse pequeno cálculo eu tenho $10 \cdot 16 = 160\pi\text{cm}^3$. Então, esse é o volume dos 20 copinhos, cheios pela metade. Ora, com isso, sabendo que o volume da leiteira é $320\pi\text{cm}^3$ e o volume dos 20 copinhos pela metade é $160\pi\text{cm}^3$. Então, a alternativa correta é a letra “A”, por quê?

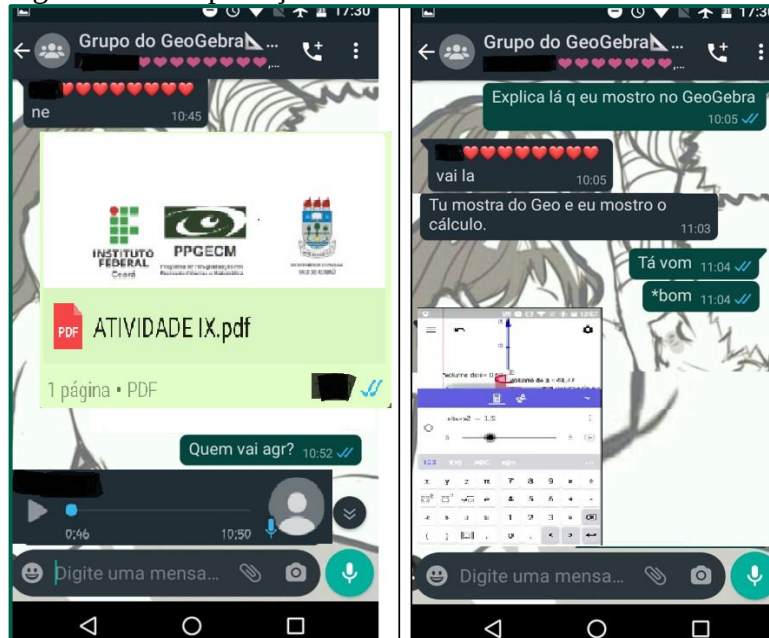
Porque no caso, a gente vai precisar encher a leiteira só pela metade e o volume da leiteira é 20 vezes o volume do copinho, por isso a resposta é a alternativa “A”.

Nesse momento, o professor P1 reconheceu o equívoco de sua resolução e acrescentou que ele acompanhou a explanação de seu colega realizando a manipulação da construção no GeoGebra para, realmente, comprovar e validar a resolução de modo correto no *software*.

O Grupo 2 também realizou a dialética da ação, acessando o pdf da questão e fazendo uma primeira leitura do problema, ao mesmo tempo que abriam o arquivo da construção para visualização do modelo dinâmico proporcionado pelo recurso tecnológico do *software* GeoGebra.

No momento da formulação, os participantes do Grupo 2 iniciaram as trocas de informações, por meio de mensagens realizadas no grupo de *WhatsApp* (Figura 134). Assim, começaram a estabelecer as estratégias de resolução que seriam adotadas para responder essa situação didática, conforme os pressupostos da análise *a priori*.

Figura 134 - Exploração do GeoGebra na dialética de formulação do Grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa.

Durante a dialética da formulação, foram captadas mensagens de áudio, via *WhatsApp*, referente ao objetivo da situação didática. Assim, foi feita uma análise dos diálogos entre os participantes sobre o cálculo do volume da leiteira e do copo, conforme havia sido previsto.

P6: Acho que temos que calcular o volume da leiteira e o volume do copinho cheio e do copinho pela metade.

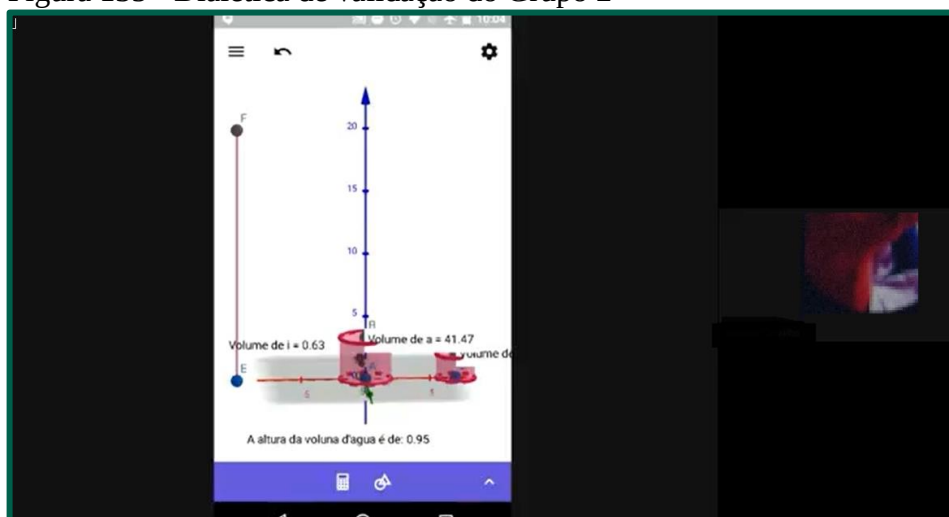
P5: Dando uma olhada na questão e movimentando o controle deslizante no GeoGebra, eu percebi que o raio do copo é metade do raio da leiteira. Quer dizer que a área da base da leiteira é 4 vezes maior que a área da base do copo e que a altura da leiteira é 5 vezes maior que a altura do copo, então, a gente pode multiplicar $5 \times 4 = 20$, que é a quantidade que a leiteira é maior que o copo.

P8: Então, a gente tem que calcular o volume do copinho só pela metade e multiplicar por 20, certo?

Assim, o grupo instituiu um modelo de resolução semelhante à solução apresentada pelo Grupo 1, recorrendo à manipulação da construção no GeoGebra e ao registro algébrico para formular a resposta do problema. Para tanto, eles realizaram o cálculo dos volumes, da leiteira e do copo cheio para, em seguida, estabelecer que a quantidade de água necessária para encher 20 copinhos pela metade é exatamente a metade da capacidade de armazenamento da leiteira.

No momento da validação, o representante do Grupo 2 utilizou o GeoGebra para explicar as estratégias de resolução e validar o modelo por eles apresentado. Veja Figura 135.

Figura 135 - Dialética de validação do Grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa.

Segue a transcrição do Grupo 2, captada pelo *Google Meet*, no momento da apresentação do participante P5:

Aqui está o arquivo que eu fiz para a questão em si. A questão apresenta que é necessário encher 20 copos, cada copo tem as seguintes dimensões: altura e diâmetro igual a 4, também dispões de uma leiteira com 20 cm de altura e 8 cm de diâmetro. O que ele quer é encher 20 copos pela metade, para isso ele precisar saber a que altura precisará encher a leiteira. Assim, analisamos a questão da seguinte maneira: Como o raio de cada copo é metade do raio da leiteira, isso quer dizer que a área da base da leiteira é 4 vezes maior que a área da base do copo. E, como a altura da leiteira é 5 vezes maior que a altura do copo, fazendo esse produto $5 \cdot 4 = 20$, que no caso é a quantidade de vezes que a leiteira é maior que o copo. Mas o caso é que ele não quer encher o copo todo, ele só quer encher a metade da altura, ou seja, até a altura 2 cm. Então, eu tinha o copo com altura máxima de 4 e a leiteira com altura máxima de 20. O que preciso é saber, nessas condições, a quantidade de copo que cabe na leiteira. Mas eu não quero com a altura máxima, que quero só a metade, ou seja, até a altura 2 cm. No caso, com a leiteira cheia daria para encher 40 copos. Só que não é essa a quantidade que eu quero encher. Então, eu tenho que diminuir a quantidade de líquido que eu vou colocar na leiteira diminuindo aqui a altura do objeto no GeoGebra até chegar a quantidade de copos que eu quero. Ou seja, para

que eu encha a metade dos 20 copinhos, eu preciso encher a leiteira até a metade. O Grupo 1 mostrou também a relação do copo com a leiteira, aqui no caso, como eu fiz, não dá para mostrar por que as janelas de visualização no celular, são separadas, então só dá para mostrar em 3D. Foi mais ou menos assim que a equipe fez.

Verifica-se que, mais uma vez, o Grupo 2 inova ao apresentar uma estratégia de resolução diferente da que havia sido prevista na análise *a priori*, fazendo a própria construção da questão no *software* GeoGebra e conseguindo a partir dela criar um modelo de resolução que associa o recurso tecnológico com o registro algébrico.

O Grupo 3, no momento da ação, adotou procedimentos semelhantes aos outros grupos, fazendo a leitura do enunciado do problema e acessando o arquivo da construção no GeoGebra, na tentativa de perceber elementos matemáticos no enunciado da questão que auxiliasse na solução do problema.

Durante a formulação, o grupo não estabeleceu a troca de ideias através de mensagens de *WhatsApp*, conforme o acordo estabelecido entre a pesquisadora e os participantes, o que pode se caracterizar como uma falha no contrato didático firmado, no momento da aplicação da pesquisa. Durante o desenvolvimento dessa atividade, o Grupo 3 contou com a participação apenas do integrante P10, inviabilizando a troca de informações que é característica dessa fase da TSD.

No entanto, o participante P10 apresentou um modelo de solução através do registro algébrico, proporcionado pelo ambiente do lápis e papel (Figura 136).

Figura 136 - Apresentação do modelo matemático para a questão 9 do Grupo 3

The image shows a handwritten mathematical solution on lined paper. The calculations are as follows:

$$1. V_c = \pi \cdot 2^2 \cdot 4$$

$$V_c = 16\pi$$

$$V_L = \pi \cdot 4^2 \cdot 20 = 320\pi$$

$$V_L = 320\pi$$

$$\frac{V_L}{V_c} = \frac{320\pi}{16\pi} = 20$$

Below the calculations, there is a handwritten conclusion in Portuguese:

Assim para encher os copinhos pela metade é necessário encher a leiteira pela metade.

Fonte: Dados da pesquisa.

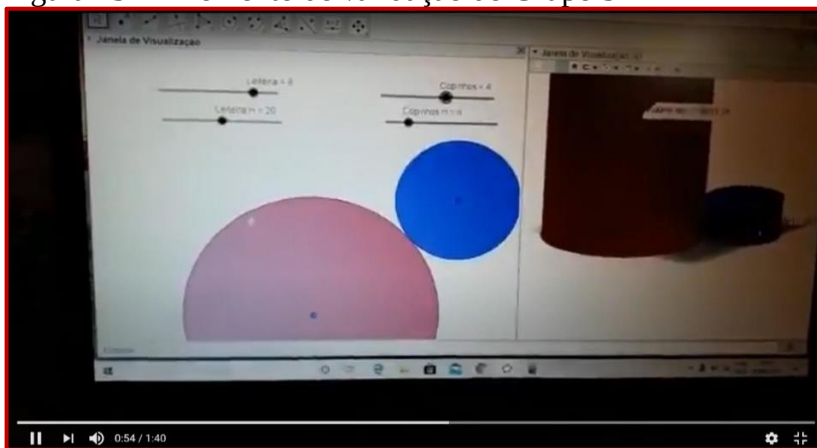
A partir da figura, percebe-se que o grupo realizou primeiro o cálculo do volume total do copo, calculado pela fórmula do cilindro: $V_c = \pi \cdot 2^2 \cdot 4$, dessa forma, encontrando como resposta 16π . Em seguida, procedeu de modo semelhante para o cálculo do volume total da leiteira: $V_L = \pi \cdot 4^2 \cdot 20$, apresentando como resultado 320π . Para finalizar, relacionou o volume da leiteira com o volume do copo, através da divisão de: $320\pi \div 16\pi = 20$, deduzindo que para encher os copinhos pela metade seria necessário encher a leiteira pela metade.

A partir da gravação de vídeo, enviada pelo participante para a pesquisadora, por meio do *WhatsApp*, verifica-se que esse futuro professor também fez uso da construção no GeoGebra, no momento da formulação. O representante do grupo expõe as estratégias de resolução no momento da validação.

P10: Bem eu vou mostrar aqui, como foi que eu utilizei o GeoGebra para resolver essa questão. Inicialmente a questão pede para agente determinar qual é o volume de água para colocar dentro da caneca para encher 20 copinhos de café pela metade. Então o que foi que eu fiz: eu apenas substituí aqui no GeoGebra, movimentando o controle deslizante referente ao raio da leiteira, eu coloquei igual a 8, por que a questão já dá isso, e, o controle deslizante da altura igual a 20, encontrando o volume da leiteira. Coloquei o controle deslizante do raio do copinho igual a 4 e o controle deslizante da altura do copinho também igual a 4. Como ele quer reduzir pela metade, eu peguei o volume do copinho e dividi por 2, obtendo 100,5. Pegando esse 100,5 multiplicando por 20 a gente tem 2010,62. Só que para encher 20 copinhos pela metade era só dividir o volume do copinho e multiplicar por 20, que a gente já obtinha a quantidade de água, no caso o volume da caneca até a metade da altura.

Observa-se que o Grupo 3 utilizou o GeoGebra para validar o modelo de resolução (Figura 137) formulado por eles.

Figura 137 - Momento de validação do Grupo 3



Fonte: Dados da pesquisa.

Pelo exposto, percebe-se, na explicação desse participante, que ele cometeu o mesmo equívoco de interpretação do Grupo 1. Ao estabelecer a relação entre as medidas do raio dos objetos, usou as medidas correspondentes ao diâmetro do cilindro, de acordo com o que foi apresentado no suporte da questão, manipulando os controles deslizantes da construção no GeoGebra, com os valores incorretos.

Um outro fato que chamou atenção, nessa solução, foi que o participante, ao realizar o cálculo matemático, deduziu a resposta correta, relacionando apenas o volume da leiteira com o volume do copo cheio, esquecendo que o que realmente se pede na questão é a quantidade de água necessária para encher 20 copinhos pela metade e não, completamente cheio. Assim,

a resposta por eles instituída pode gerar uma dúvida entre a opção A e a opção B, haja vista que ambas apresentam como resposta um volume para a leiteira, 20 vezes maior que o volume do copo, sendo que, na primeira, a leiteira deve ser cheia pela metade e, na segunda opção, ela deve ser cheia por completo.

Portanto, verificou-se aqui uma dificuldade para compreensão da linguagem empregada nas provas do ENEM, já que essas avaliações exigem maior capacidade de raciocínio lógico e interpretativo do que de conhecimento de fórmulas, o que pode ser julgado como um obstáculo epistemológico ou, até mesmo, como obstáculo docente, pois são situações inesperadas que podem aparecer na tentativa de solucionar esse tipo de problema e que poderá surgir, futuramente, no exercício da profissão.

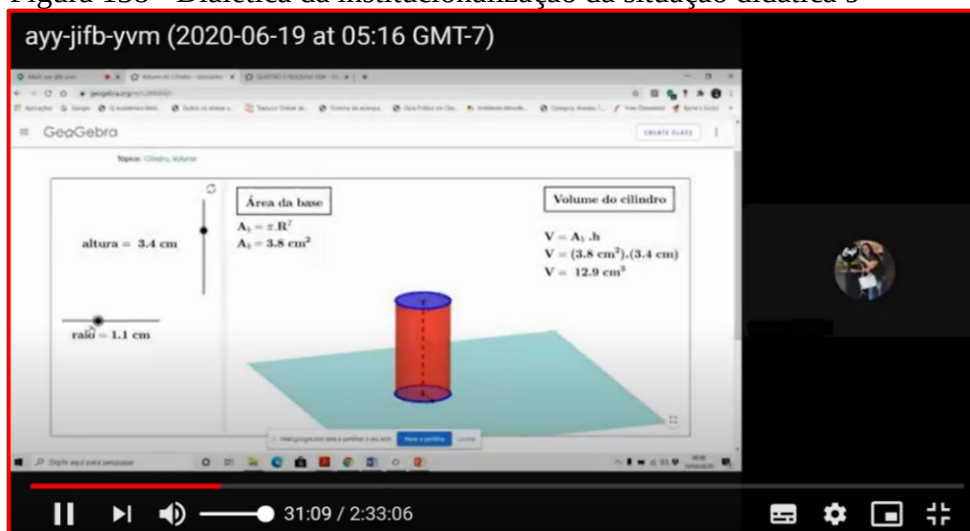
Validar as formulações apresentou-se como uma tarefa difícil, porque alguns grupos apresentaram dificuldades interpretativas do problema e, assim, não conseguiram articular as modificações proporcionadas pela manipulação do *software* GeoGebra com a resolução algébrica do modelo matemático por eles apresentado.

Visto que alguns grupos, mesmo com dificuldade de interpretação do enunciado do problema, conseguiram reavaliar suas estratégias de resolução, durante a dialética da validação apresentada pelos outros participantes e, com isso, mobilizar seus conhecimentos prévios a fim de corrigir os erros e solucionar a situação-problema, realizando o registro algébrico, concluiu-se que o objetivo dessa situação foi atingido, já que os grupos determinaram que, para não haver desperdício de café, a leiteira deve conter água até a metade, tendo um volume 20 vezes maior que o volume do copo.

Com relação a utilização do *software* GeoGebra como recurso didático, os professores em formação afirmaram que ele foi útil, porém não fundamental para compreensão do padrão geométrico de resolução, talvez por conta do erro interpretativo, durante a leitura do enunciado da questão.

Na institucionalização, a pesquisadora fez um levantamento das estratégias de solução apresentadas pelos grupos e uma reflexão sobre a compreensão do enunciado do problema, promovendo uma explanação dos conceitos implícitos na questão, através da demonstração da fórmula do cilindro no *software* GeoGebra (Figura 138).

Figura 138 - Dialética da institucionalização da situação didática 9



Fonte: Dados da pesquisa.

Por fim, retomou os conhecimentos feitos na formulação pelos grupos e institucionalizou uma nova solução, de acordo com o que fora proposto na análise *a priori*.

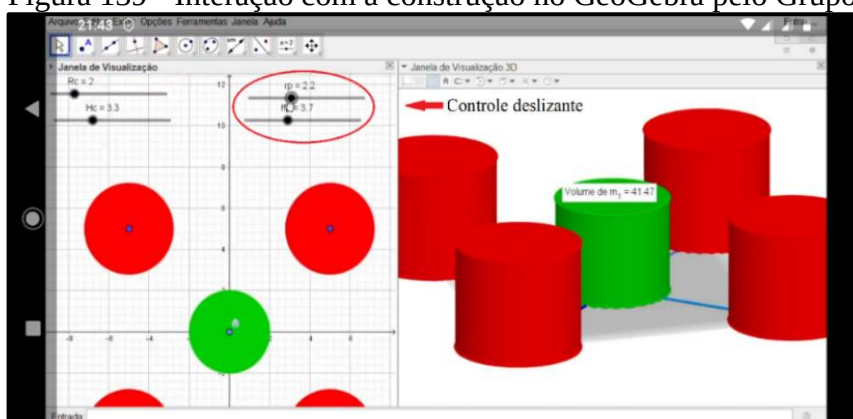
8.4.2 Análise *a posteriori* e validação da situação didática 10

A aplicação ocorreu de modo semelhante à situação anterior: os participantes leram o enunciado da questão, acessaram a construção no *software* GeoGebra, trocaram ideias e estabeleceram suas estratégias de resolução, conforme os pressupostos da análise *a priori*.

Os grupos foram previamente incentivados pela pesquisadora a utilizarem a construção no GeoGebra e movimentarem a ferramenta “controle deslizante” para ampliarem suas estratégias de resolução.

Veja, na Figura 139, os participantes do Grupo 1 manipulando o objeto no GeoGebra, com a finalidade de estabelecer um padrão geométrico que permitisse construir um modelo matemático de resolução, como tinha-se previsto na análise *a priori*.

Figura 139 - Interação com a construção no GeoGebra pelo Grupo 1



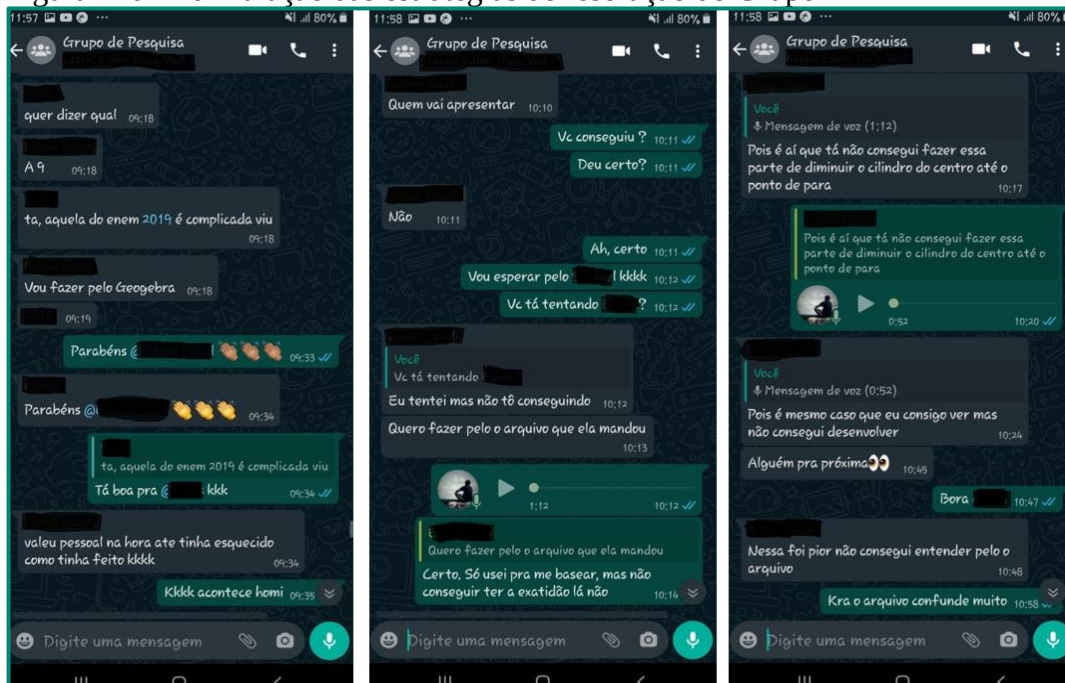
Fonte: Dados da pesquisa.

Expõe-se, a seguir, a transcrição do áudio coletado pela gravação do grupo, no momento da ação:

P3: Analisando a questão 10, eu vou utilizar aqui o GeoGebra para ajudar a compreender melhor como resolver esse problema. O reservatório central, tem raio 2 metros, a altura dele é 3,30 metros, então eu vou mexer aqui no controle deslizante e colocar esses valores, já aparece aqui o volume desse reservatório. Os reservatórios auxiliares, eles têm raio 1,5 metros e altura também 1,5 metros, então aqui já aparece o volume do reservatório auxiliar, aqui só aparece de um reservatório, mas no caso já dá para saber que cada reservatório auxiliar tem esse valor. No caso, eu noto que tem também esses canos cilíndricos, e que também vai água para eles, então eu preciso calcular o volume desses canos. Então, calculando o volume desses canos e diminuindo do volume do reservatório central, já vou conseguir ter a noção de como encontrar essa altura, que deve ser equivalente em todo reservatório. Agora eu vou fazer no caderno.

Durante a formulação, o Grupo 1 estabeleceu comunicação, através de mensagens via *WhatsApp*, na tentativa de formular estratégias de resolução (Figura 140) que propiciassem a criação de um modelo matemático que respondesse ao enunciado do problema.

Figura 140 - Formulação das estratégias de resolução do Grupo 1



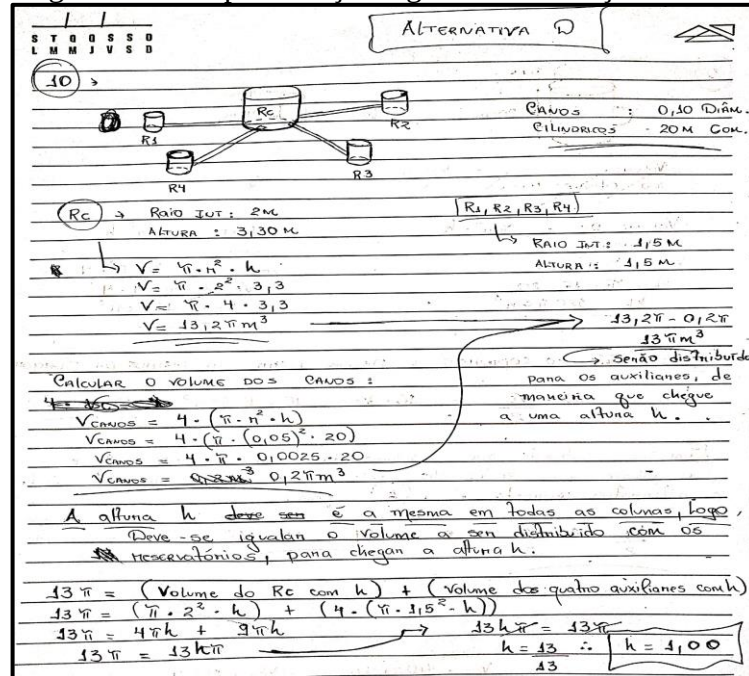
Fonte: Dados da pesquisa.

Analisando a dialética do grupo, percebe-se claramente a dificuldade de associar a manipulação da construção do GeoGebra com o enunciado da questão para formular uma resolução. Observa-se que um dos participantes relata que consegue a visualização através da manipulação da construção, mas não consegue desenvolver uma estratégia de resolução. No entanto, a partir do vídeo enviado (Figura 141) por um dos participantes, os outros conseguiram visualizar a estratégia de resolução proporcionada pelo recurso tecnológico do *software*.

Afirma-se que o Grupo 1 conseguiu desenvolver um processo de visualização na construção que permitisse estabelecer uma relação entre as variáveis visuais e as variáveis do registro algébrico, promovendo a solução do problema.

Assim, o grupo passou a utilizar-se do ambiente lápis e papel para criar um modelo matemático (Figura 141), mobilizando os conhecimentos epistêmicos e pragmáticos para apresentar uma solução que satisfizesse o objetivo do problema.

Figura 141 - Representação algébrica da solução da situação 10



Fonte: Dados da pesquisa.

Observa-se que, na representação algébrica para essa situação-problema do modelo matemático instituído pelo Grupo 1, inicialmente o grupo calculou o volume do reservatório central através da seguinte expressão:

$$R_c = A_b \cdot h$$

$$R_c = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$R_c = \pi \cdot 2^2 \cdot 3,3$$

$$R_c = 13,2\pi \text{ m}^3$$

Em seguida, utilizou a mesma expressão do cálculo anterior para descobrir o volume dos quatro canos que fazem ligação entre o reservatório central e os auxiliares:

$$V_c = 4 \cdot \pi \cdot (0,05)^2 \cdot 20$$

$$V_c = 4 \cdot \pi \cdot 0,0025 \cdot 20$$

$$V_c = 0,2\pi$$

O grupo relacionou o volume do reservatório central com o volume dos canos, realizando uma subtração simples para determinar o volume dos reservatórios auxiliares.

$$13,2\pi - 0,2\pi = 13\pi$$

Por fim, iguala o volume do reservatório central a ser distribuído com a soma dos volumes dos canos e dos reservatórios auxiliares, apresentando o modelo matemático do Grupo 1.

$$13\pi = 4 \cdot \pi \cdot (1,5)^2 \cdot h + 4 \cdot \pi \cdot h$$

$$13\cancel{\pi} = 4\cancel{\pi} + 2,25.h + 4.\cancel{\pi}.h$$

$$13 = 9h + 4h$$

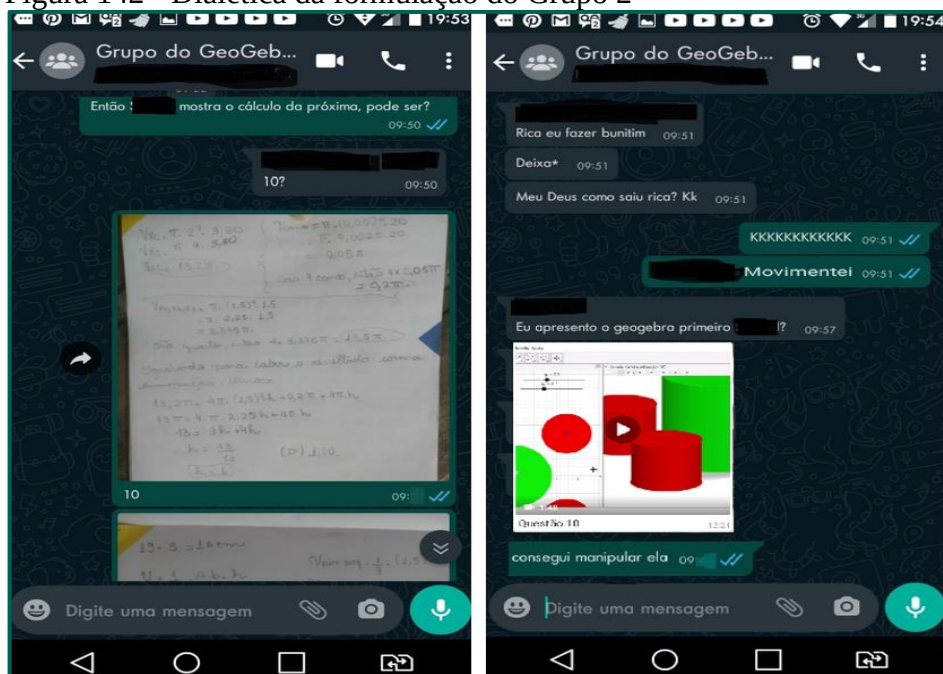
$$h = \frac{13}{13}$$

$$h = 1$$

Com isso, o Grupo 1 concluiu que a medida das alturas das colunas de água, nos reservatórios auxiliares, deveria ser de 1,00 metro. No momento da validação, houve muita interferência no sinal de internet; portanto, prejudicando a exposição da estratégia de resolução do Grupo 1. No entanto, pelo que se conseguiu visualizar da apresentação, verificou-se que a solução atendia ao objetivo da questão, sendo assim considerada como válida por todos os presentes.

O Grupo 2, no momento da formulação, conseguiu desenvolver estratégias de resolução pelo processo de visualização da construção do *software* GeoGebra, organizando relações entre as variáveis visuais e o registro algébrico, promovendo uma resolução matemática a partir de uma experimentação prática, conforme havia-se previsto na análise *a priori*. Veja na Figura 142.

Figura 142 - Dialética da formulação do Grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa.

Verifica-se, pelo exposto, que o grupo estabeleceu estratégia de resolução semelhante ao Grupo 1, fazendo primeiro o cálculo do volume do reservatório central, encontrando $13,2\pi$ para, em seguida, estabelecer o volume dos canos que é $0,2\pi$ e dos reservatórios auxiliares, $13,5\pi$. Finalizando com um modelo matemático de resolução expressa do seguinte modo:

$$13,2\pi = 4 \cdot \pi \cdot (1,5)^2 \cdot h + 0,2\pi + 4 \cdot \pi \cdot h$$

$$13,2\pi - 0,2\pi = 4\pi + 2,25.h + 4 \cdot \pi.h$$

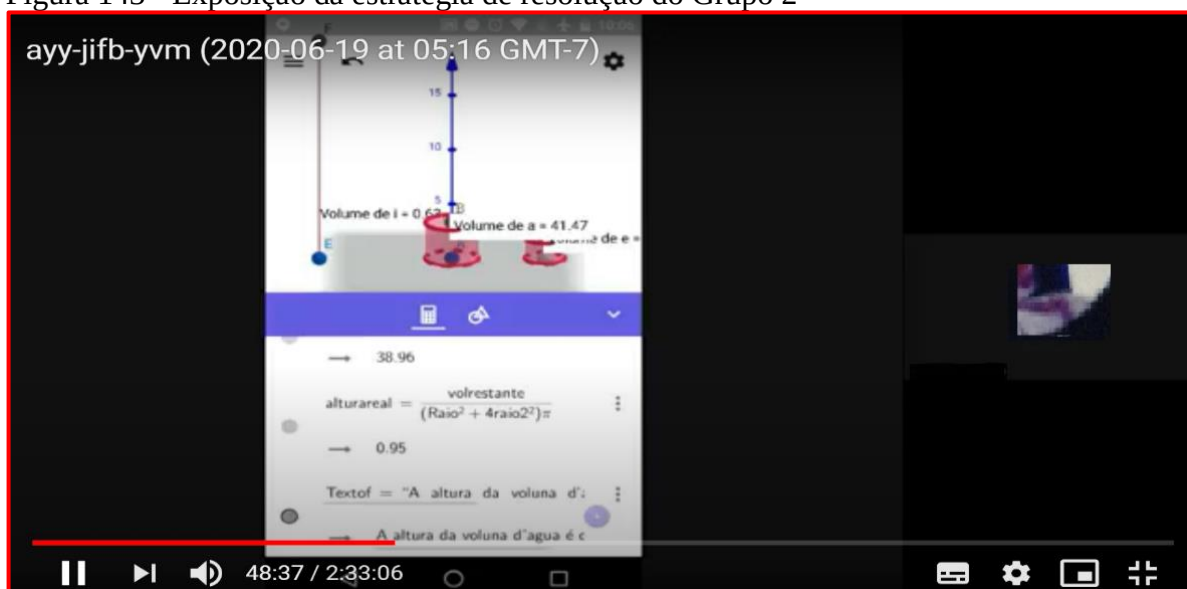
$$13 = 9h + 4h$$

$$h = \frac{13}{13}$$

$$h = 1$$

No momento da validação, o Grupo 2 apresentou suas estratégias de resolução (Figura 143), por meio de seus representantes P5 e P8 que expuseram a resolução com o auxílio da visualização do GeoGebra e do modelo matemático da escrita algébrica.

Figura 143 - Exposição da estratégia de resolução do Grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa.

Segue a transcrição de áudio, captada pelo *Meet*, no momento da explicação do professor P5, a todos os presentes.

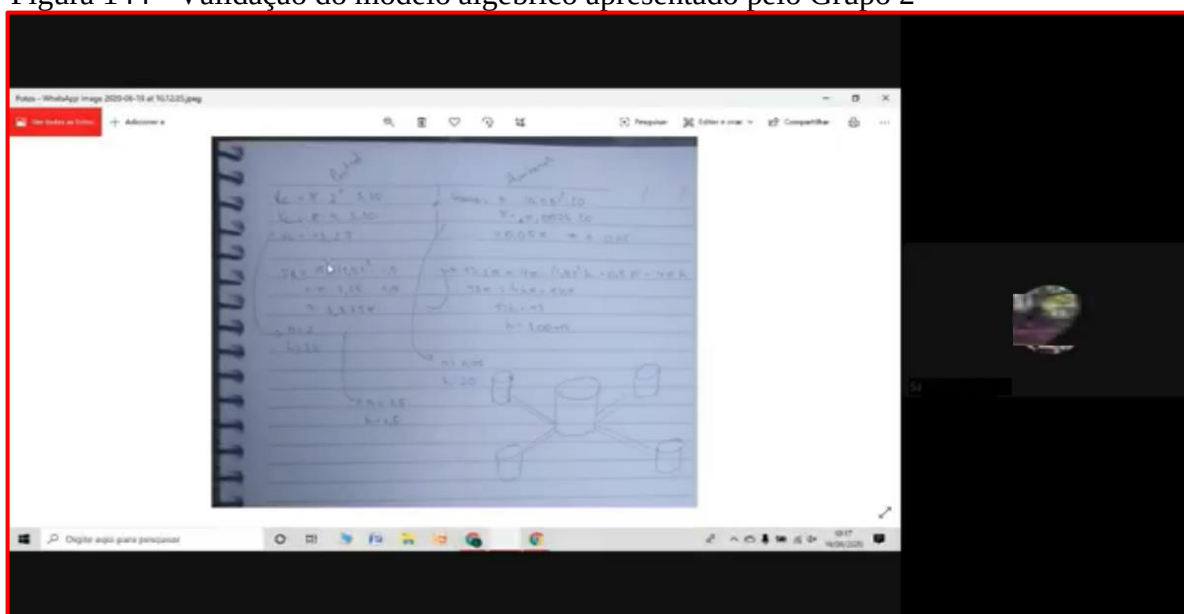
A questão fala que tem um reservatório maior ligado a outros reservatórios menores, por meio de canos cilíndricos de comprimento igual a 20 metros e diâmetro igual a 0,10 metros. Eu optei por fazer o esboço da questão no GeoGebra, do que manipular o arquivo que foi disponibilizado, por que eu não estava conseguindo achar os controles certos, como eu uso o celular para acessar o arquivo, não estava dando certo para eu encontrar a resposta. Então, eu construí aqui um cilindro maior, representando o reservatório maior, um cilindro menor, esse do canto direito, representando os quatro reservatórios menores. Esse daqui, que é um cilindro do lado esquerdo, representando os quatro canos. No caso, a questão diz que o reservatório maior está cheio, no momento que é aberto os quatro registros que ligam o reservatório maior aos quatro menores. Depois de um certo período, essa

água deixa de escorrer, por que a coluna de água do reservatório maior está igual a coluna de água nos outros reservatórios. Aí ele pergunta qual é essa altura. Assim, o que eu fiz foi, por meio da utilização dos recursos do GeoGebra, eu calculei o volume do reservatório maior, de altura 3.3 e raio 2. As alturas dos outros reservatórios eram iguais a 1.5 e o raio também 1.5. E do cano cilíndrico que liga os reservatórios de raio igual a 0.1 e de altura 20 metros, que seria o comprimento. Aí o que eu fiz, foi pedir para calcular o volume e no caso eu retirei os quatro volumes dos canos do volume total do reservatório e depois calculei a altura real pelo volume restante, dividido pelo raio do cilindro maior ao quadrado, mais 4 vezes os raios dos cilindros dos reservatórios menores, multiplicado por π , que deu à altura 0,95, que é a altura da coluna d'água. Claro, que se no caso eu aumentasse o raio do cano que faz essa ligação, eu teria um outro dado. Por exemplo, no caso desse raio 3 (manipula o raio do cilindro maior no GeoGebra), se eu aumentasse esse valor eu teria um valor diferente para a coluna d'água. Mas, como esse raio aqui, no caso de 0.1 ele limita a um diâmetro de 0.2, que é menor do que essa coluna d'água que está em 0.95. Então, eu posso assim dizer que essa aqui é a altura real, depois desse processo de transferência de água. Sendo, portanto, a alternativa "E", como resposta.

Observa-se que o grupo utilizou o *software* GeoGebra para formular a resolução; no entanto, durante essa manipulação, o participante cometeu um erro ao estruturar a estratégia de resolução, pois ao realizar o cálculo, utilizou na manipulação do raio, medidas referentes ao diâmetro, enquanto deveria usar a metade desse valor, que é correspondente ao raio. Nesse momento, a pesquisadora indagou sobre a opção correta, numa tentativa de levar o participante a perceber o equívoco; porém, sem sucesso. Como o grupo ainda iria apresentar o modelo na escrita matemática, achou-se por bem esperar essa exibição para, em seguida, retomar o debate sobre a solução do grupo.

Assim, o Grupo 2 ainda apresentou um registro algébrico de resolução no ambiente do lápis e papel (Figura 144), na tentativa de validar as estratégias de solução do grupo.

Figura 144 - Validação do modelo algébrico apresentado pelo Grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa.

Segue a transcrição gravada pela ferramenta *Google Meet*, no momento da explicação da solução algébrica do grupo.

A questão diz que tem um reservatório central e quatro reservatórios auxiliares e apresenta as seguintes informações: ela diz que nosso reservatório central tem raio igual a 2 metros e uma altura igual a 3,3 metros. Os nossos reservatórios auxiliares têm 1,5 metros de raio e 1,5 metros de altura. As informações de nossos canos são: que os raios dos canos são 0,05 metros e uma altura ou comprimento de 20 metros. O que é que a questão está pedindo? Ela diz, que o reservatório central está todo cheio, e, quando ele fica cheio ele vai esvaziando e preenchendo os reservatórios auxiliares. Nisso, a questão pede que agente deixe a altura do reservatório central igualado com a altura dos reservatórios auxiliares. Para isso, a gente vai calcular o volume do reservatório central pela fórmula $V_c = \pi \cdot r^2 \cdot h$, que vai dá $\pi \cdot 2^2 \cdot 3,3 = 13,2 \pi$, nós vamos deixar o pi para facilitar o cálculo. Agora, a gente vai para o cálculo dos reservatórios auxiliares, fazendo o mesmo esquema o reservatório central, chegando a $3,375 \pi$. Também vamos descobrir o volume dos nossos canos, no nosso caso, vamos fazer o cálculo de um e depois multiplicar por 4, que é $0,2 \pi$. Aqui, agente vai fazer o seguinte cálculo: $13,2 \pi = 4 \pi \cdot (1,5)^2 \cdot h + 0,2 \pi + 4 \pi h$, aqui vamos passar esse $0,2 \pi$ para o outro lado, ficando assim: $13 \pi = 13h \pi$, corta π com π , resultando em $13h = 13$, que vai ser $h = 1$ metro. Então, pelos cálculos que a gente fez aqui, encontramos que a altura que a água fica nivelada nos reservatórios auxiliares e o reservatório central é igual a 1 metro. Assim, quando ele chega a 1 metro de altura de água, estão todos nivelados.

Nesse momento, o participante P5 percebeu o erro que cometeu em sua resolução, descrevendo do seguinte modo:

Professora, eu descobri agora porque o meu resultado deu diferente da do P8, porque no caso, na hora que eu fui colocar o raio do cano, eu coloquei o valor do diâmetro. Agora, eu fui trocar, substitui por 0,05, que era o valor certo do raio do cano, assim, eu achei a resposta igual à do P8, que no caso é 1 metro. Essa pequena diferença que coloquei na hora, deu um valor alterado.

Constatou-se que os participantes do grupo confrontaram suas resoluções no momento da validação e perceberam os erros cometidos, buscando comprovar uma nova estratégia de solução no *software* GeoGebra. Sendo assim, a solução do grupo foi validada por todos os presentes.

O Grupo 3 não realizou a etapa de formulação, pois apenas um membro desse grupo participou da aplicação dessa situação didática. Durante o encontro online, exibido pelo *Google Meet*, o professor P10 não conseguiu se conectar, pois seu provedor de internet não estava enviando sinal para sua residência, por isso ele não conseguiu apresentar as estratégias de resolução na dialética de validação.

No entanto, ele enviou para a pesquisadora, via *WhatsApp*, a solução algébrica da situação didática 10, realizada no ambiente do lápis e papel (Figura 145).

Figura 145 - Solução algébrica da situação didática 10 do Grupo 3

2. I) $V_{\text{cano}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$
 como são 4 canos:
 $V_c = 4 \cdot \pi \cdot (0,05)^2 \cdot 20$
 $V_c = \pi \cdot 0,0025 \cdot 80$
 $V_c = 0,2\pi$

II) calculando volume do R_c :
 $V_{R_c} = \pi \cdot r^2 \cdot h$
 $V_{R_c} = \pi \cdot 2^2 \cdot 3,3$
 $V_{R_c} = 13,2\pi$

III) calculando volume dos 4 cilindros pequenos:
 $V_{R_{1,2,3,4}} = 4 \cdot \pi \cdot (1,5)^2 \cdot 1,5$
 $V_{R_{1,2,3,4}} = 4 \cdot \pi \cdot 2,25 \cdot 1,5$
 $V_{R_{1,2,3,4}} = 4 \cdot 3,375\pi$
 $V_{R_{1,2,3,4}} = 13,5\pi$

IV) descobrindo as alturas dos reservatórios.
 $V_{R_c} = V_{R_{1,2,3,4}} + V_c + V_{R_c} \text{ (diminuindo)}$
 $13,2\pi = 4 \cdot \pi \cdot (1,5)^2 \cdot h + 0,2\pi + 4\pi h$
 $13\pi = 4 \cdot \pi \cdot 2,25h + 4\pi h$
 $h = \frac{13}{13} = 1$

Fonte: Dados da pesquisa.

Pelo exposto, percebe-se que a solução apresentada pelo Grupo 3 assemelha-se às estratégias de resolução exibidas pelos grupos 1 e 2. Verifica-se que o representante do grupo começou estabelecendo o volume dos quatro canos, procedendo com o cálculo da seguinte expressão: $V_c = 4 \cdot \pi \cdot (0,05)^2 \cdot 20 = 0,2\pi$. De modo semelhante, determinou o volume do reservatório central, fazendo o cálculo $V_{R_c} = \pi \cdot 2^2 \cdot 3,3 = 13,2\pi$. Aplicou a fórmula do volume do cilindro para determinar a capacidade de água dos quatro reservatórios auxiliares, encontrando $V_{R_p} = 13,5\pi$, e finalizando com uma expressão que determina a altura de água dos reservatórios dada por: $13,2\pi = 4 \cdot \pi \cdot (1,5)^2 \cdot h + 0,2\pi + 4 \cdot \pi \cdot h$. Ao resolver essa expressão, encontrou como resposta final que a altura da água seria de 1 metro.

A partir do que foi observado, pode-se constatar que a não realização da etapa da formulação pelos grupos 2 e 3 gerou dificuldades para validar as resoluções por eles apresentadas, havendo discordâncias na resposta final entre os grupos e, até mesmo, dentro dos grupos. Isso comprova que para a TSD ser bem-sucedida e constituir uma aprendizagem significativa, todas as suas fases devem ser postas em prática pelos participantes.

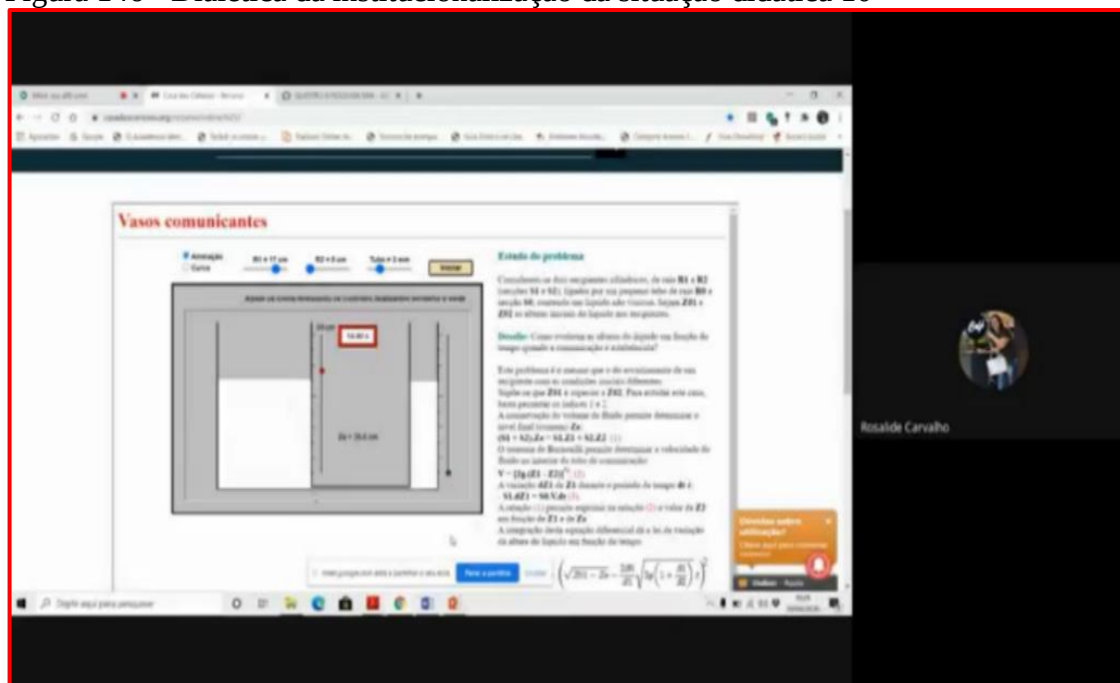
Considera-se que mesmo com os percalços surgidos no decorrer da aplicação dessa situação-problema, os grupos conseguiram encontrar mecanismos que possibilitaram

solucionar o problema, achando como resposta para o fluxo de água dos reservatórios, a medida de 1 metro de altura. Portanto, afirma-se que o objetivo dessa situação foi atingido.

Com relação à utilização do *software* GeoGebra como recurso didático, os professores em formação afirmaram que, no caso desse problema específico, ele foi importante tanto para ajudar a construir a resposta, quanto para validar as estratégias de resolução apresentadas, pois mesmo quando houve desencontros de resultados, a manipulação da construção no GeoGebra, possibilitou uma rápida visualização de um novo padrão de solução, propiciando ajustar e apresentar a resposta correta.

Na institucionalização, de acordo com os pressupostos da análise *a priori*, a pesquisadora utilizou o GeoGebra para explorar os conceitos implícitos na questão, fazendo uma demonstração de vasos comunicantes (Figura 146) e, procedendo à demonstração do Teorema 2.

Figura 146 - Dialética da institucionalização da situação didática 10



Fonte: Dados da pesquisa.

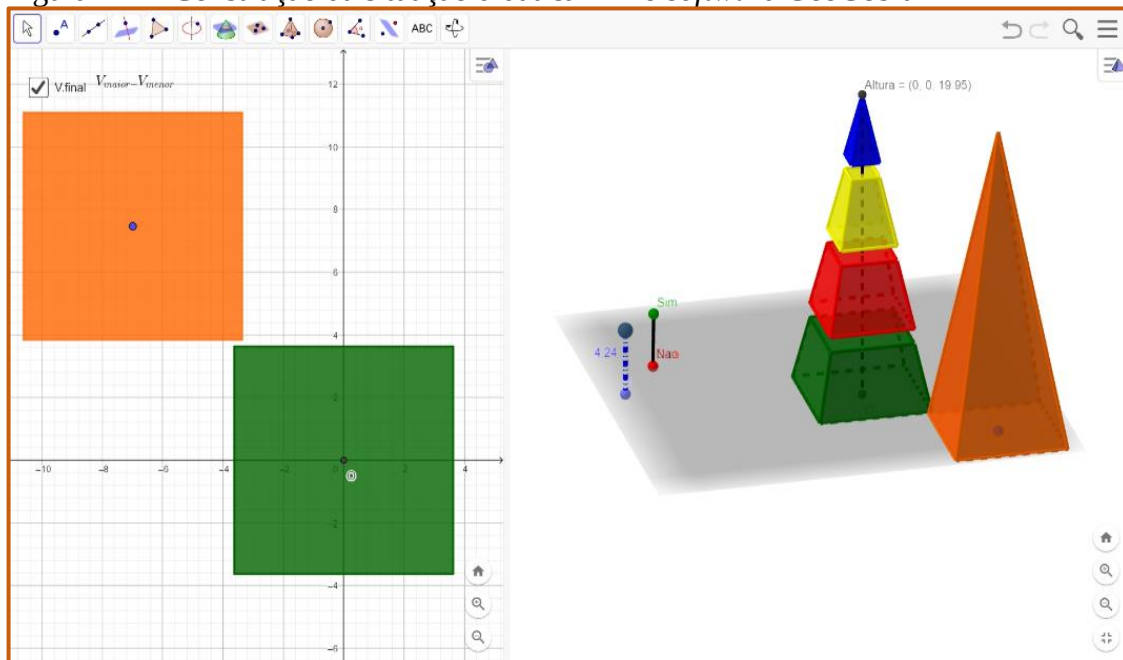
Por fim, retomou as estratégias de resolução dos grupos, sintetizando em uma única solução, por meio da demonstração do registro algébrico, e comprovando sua validação pela demonstração da manipulação da construção no recurso tecnológico do *software* GeoGebra.

8.4.3 Análise *a posteriori* e validação da situação didática 11

Seguindo os mesmos modos operandi das outras situações didáticas, os participantes dos grupos tiveram acesso aos arquivos do problema e da construção no GeoGebra (Figura

147), leram o problema, manipularam o objeto no *software* e relacionaram os aspectos numéricos e geométricos presentes no enunciado da questão, conforme expressas na análise *a priori*. A seguir, analisa-se mais detalhadamente as ações de cada um dos grupos, haja vista que ocorreram ações não previstas na análise *a priori*.

Figura 147 - Construção da situação didática 11 no *software* GeoGebra



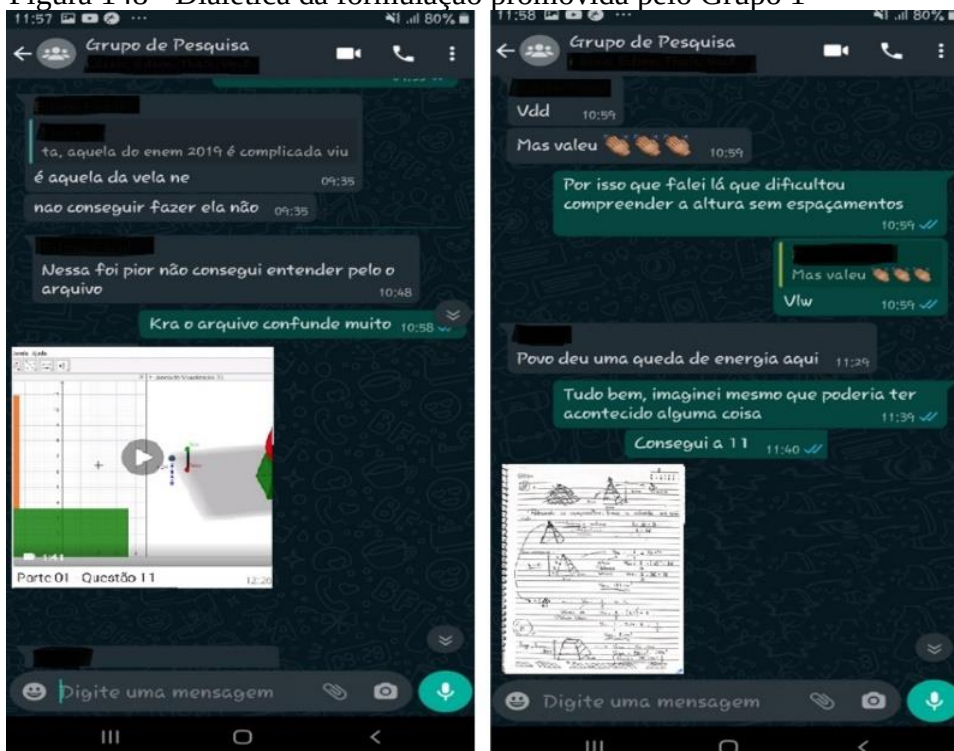
Fonte: Construção da autora.

O Grupo 1, no momento da ação, movimentou o objeto no *software* GeoGebra, na tentativa de estabelecer um padrão geométrico e algébrico de resolução. Segue a transcrição das ações do grupo, captada pela gravação no celular, durante a manipulação da construção.

P3: A questão 11 tem várias informações, então precisa-se ter muita atenção, mas eu vou aqui nesse objeto e movimentando a altura da pirâmide eu consigo um valor aproximado de 4, que é a altura de cada bloco. Nota-se, que é dado a aresta da base com 6cm, numa base quadrangular é 6 por 6 e a aresta da base da pirâmide menor, do topo, é 1,5cm. Então para saber o novo molde, que no caso é sem a pirâmide do topo, então agente nota que precisa ter um cálculo de volume, que no caso, quando eu marco aqui o V_{final} , aparece uma dica que é para subtrair o volume maior, que no caso é da pirâmide toda, menos o volume menor, que é a pirâmide do topo. Então, eu vou calcular no caderno o volume dessas pirâmides e vou conseguir saber o volume do novo molde.

Na dialética da formulação, esse grupo trocou informações, via mensagens de *WhatsApp* (Figura 148), buscando criar uma estrutura que permitisse solucionar a situação didática proposta.

Figura 148 - Dialética da formulação promovida pelo Grupo 1

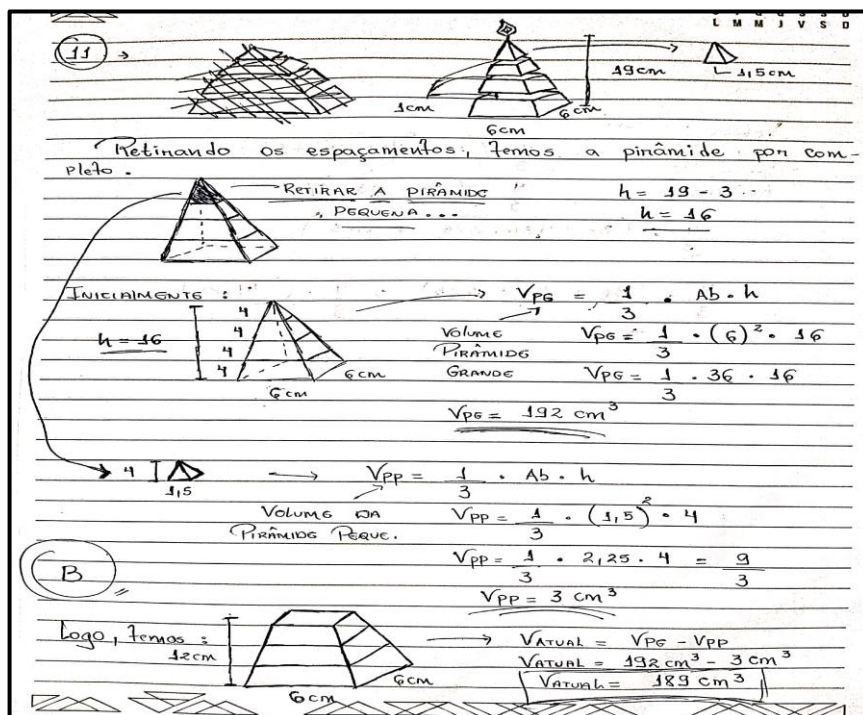


Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse momento, o grupo estabeleceu um modelo matemático de resolução, recorrendo ao uso do recurso tecnológico do GeoGebra para, a partir daí, formular um registro algébrico do cálculo do volume da pirâmide (Figura 149) que permitisse determinar a quantidade de parafina que seria usada na fabricação da nova vela.

Figura 149 - Modelo matemático de resolução da situação didática 11 do Grupo

1



Fonte: Dados da pesquisa

Pelo exposto, percebe-se que o grupo estabeleceu uma estratégia de resolução semelhante ao modelo exibido na análise *a priori*. Observa-se que eles iniciam determinando a altura real da pirâmide, subtraindo os valores correspondentes aos espaçamentos entre os blocos, $19 - 3 = 16\text{cm}$. Em seguida, calculam o volume da pirâmide maior, pela seguinte expressão:

$$V_{PG} = \frac{1}{3} \cdot Ab \cdot h$$

$$V_{PG} = \frac{1}{3} \cdot (6)^2 \cdot 16$$

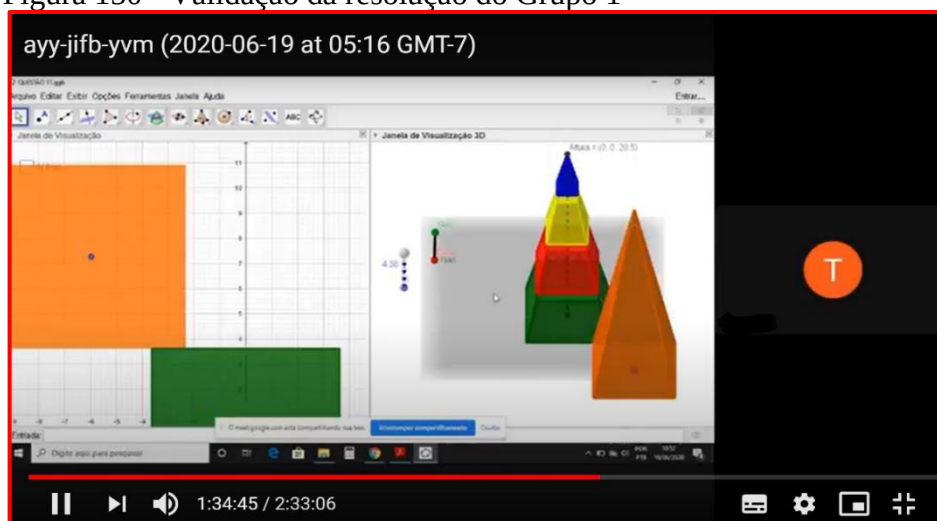
$$V_{PG} = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 16$$

$$V_{PG} = 192\text{cm}^3$$

Depois, de maneira semelhante, foi determinado o volume da pirâmide do topo, fazendo o cálculo de: $V_{PG} = \frac{1}{3} \cdot (1,5)^2 \cdot 4 = 3\text{cm}^3$. E, finalizando, uma subtração simples entre o volume da pirâmide maior e o volume da pirâmide menor, como segue: $V_{\text{atual}} = V_{PG} - V_{PP} = 192\text{cm}^3 - 3\text{cm}^3 = 189\text{cm}^3$.

Na dialética da validação, o representante do Grupo 1 expôs suas estratégias de resolução (Figura 150) a todos os participantes presentes na plataforma do *Google Meet*, no momento da apresentação.

Figura 150 - Validação da resolução do Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa.

A partir do áudio coletado no ambiente de aplicação, no momento do relato do representante do Grupo 1, o participante P3 afirmou que utilizou o GeoGebra para ajudar a compreender o problema. Ele disse:

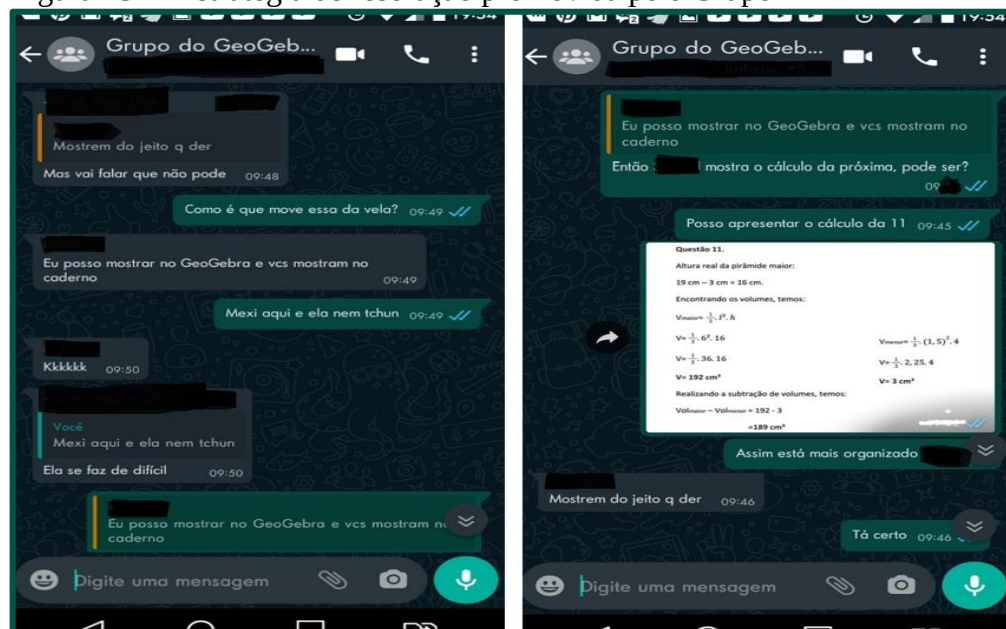
P3: Com relação ao GeoGebra, eu utilizei para me ajudar a compreender o problema, depois eu fiz o cálculo no caderno. Vou mostrar aqui para vocês: Bom, no

caso a questão fala que se o dono de uma fábrica de velas resolver diversificar o modelo retirando a pirâmide da parte superior que tem 1,5cm de aresta da base, mas mantendo o mesmo molde, quanto ele passará a gastar de parafina? Bom, utilizando os outros dados eu fui manipular os objetos no GeoGebra. Esse primeiro ponto, é referente à altura, pois eu consigo por ele, movimentar a altura da pirâmide. Esse outro controle, me dá uma dica para ajudar a compreender a questão da altura, por quê? Bem, a questão diz que a altura da pirâmide é 19cm, então eu vou tentar aqui mover para que a altura fique em 19cm, pronto, tenho aproximadamente 19,04cm. No caso, eu percebo que aqui no controle deslizante, eu tenho a medida 4, e aí analisando os dados da questão, com calma, não podemos esquecer que têm-se os espaçamentos de 1cm entre os blocos. Ora, se o espaçamento é 1cm, então sendo a altura total 19cm, retirando 1cm de cada espaço, que no caso da questão, são 3 à altura real será dada por: $19 - 3 = 16$ cm. Então, observando essa pirâmide aqui do lado esquerdo, está representado ela sem espaçamento. Assim, no caso da aproximação de 19,01cm se tem aqui 4cm, que é a altura de cada sólido. Então, daí eu já consigo entender que a pirâmide por si só, sem o espaçamento tem 16cm de altura. Ora, se ele quer que eu retire essa pirâmide pequena e continuar com o mesmo molde, ou seja, continuar com os sólidos restantes, então, eu preciso calcular o volume total da pirâmide e diminuir pelo volume da pirâmide menor, para eu ficar com o meu novo volume, sem essa pirâmide aqui, do topo. Então, utilizando a fórmula do volume da pirâmide que $\frac{1}{3}$ da área da base vezes à altura, fazendo o cálculo rapidinho eu encontrei que o volume da pirâmide grande é 192cm^3 e da pirâmide pequena é 3cm^3 . Fazendo a diferença dá 189cm^3 . Que é a alternativa B.

Assim, verifica-se que o Grupo 1 utilizou o recurso tecnológico do GeoGebra como suporte para criar estratégias de resolução, fazendo uma transposição do registro visual para o registro algébrico para criar um modelo matemático de resolução dessa situação didática, conforme havia-se previsto na análise *a priori*.

O Grupo 2 começou a troca de mensagens pelo *WhatsApp*, estabelecendo uma dialética de formulação que permitisse promover uma estratégia de resolução consistente com o objetivo dessa situação didática, conforme se vê na Figura 151.

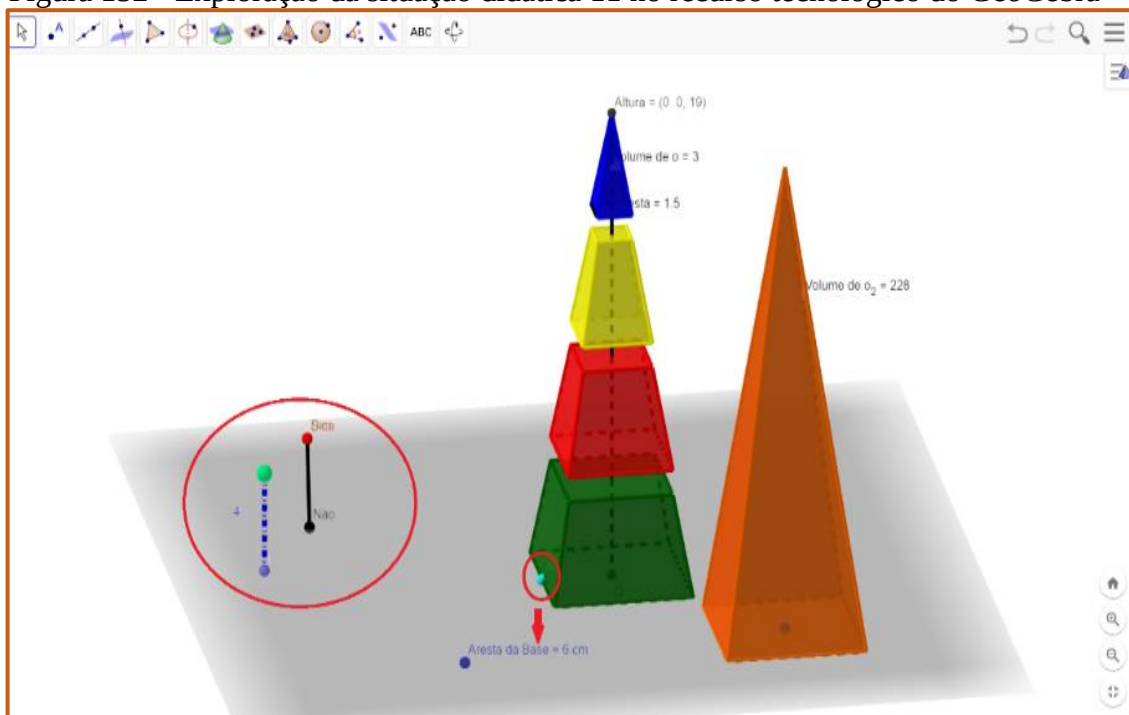
Figura 151 - Estratégia de resolução promovida pelo Grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa.

O grupo procura formular estratégias de resolução tanto usando a construção no GeoGebra, quanto pela escrita matemática. No entanto, percebe-se que os participantes desse grupo sentiram dificuldade em manipular o objeto no *software* GeoGebra, pois, nessa construção específica, não disponibilizou-se os controles deslizantes para movimentar a figura; no entanto, haviam pontos escondidos no próprio sólido que propiciava tal movimentação (Figura 152). Pensou-se que, como os participantes disponham de um tempo maior para resolver a situação didática proposta, eles explorariam a construção de modo mais eficaz.

Figura 152 - Exploração da situação didática 11 no recurso tecnológico do GeoGebra



Fonte: Dados da pesquisa.

Se houvesse a manipulação dos pontos específicos presentes no objeto (Figura 142), eles poderiam ter percebido que seria possível estabelecer a relação entre o volume da pirâmide original e o volume do sólido, após a retirada dos espaços da altura, comparando o volume dos dois modelos, a partir da manipulação e alterações da construção no *software* GeoGebra.

O Grupo 2 estabeleceu um registro algébrico da estratégia de solução da situação didática 11 (Figura 153), semelhante ao modelo apresentado na análise *a priori*.

Figura 153 - Solução algébrica da situação didática 11, apresentada pelo Grupo 2

Questão 11.

Altura real da pirâmide maior:

$$19 \text{ cm} - 3 \text{ cm} = 16 \text{ cm}.$$

Encontrando os volumes, temos:

$$V_{\text{maior}} = \frac{1}{3} \cdot l^2 \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 16$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 16$$

$$V = 192 \text{ cm}^3$$

Realizando a subtração de volumes, temos:

$$Vol_{\text{maior}} - Vol_{\text{menor}} = 192 - 3$$

$$= 189 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{menor}} = \frac{1}{3} \cdot (1,5)^2 \cdot 4$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2,25 \cdot 4$$

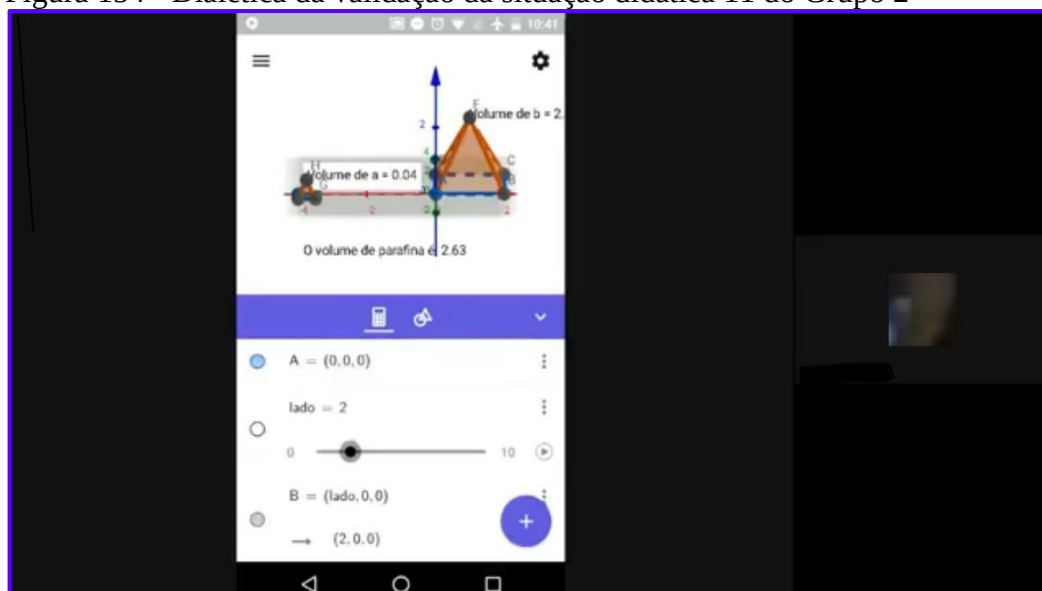
$$V = 3 \text{ cm}^3$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Pelo exposto, verifica-se que, em um primeiro momento, estabeleceram a altura real do objeto, eliminando os espaços existente entre os blocos. Em seguida, buscaram estruturar um modelo matemático, a partir de seus conhecimentos epistêmicos e pragmáticos para determinar o volume da pirâmide maior, por meio da seguinte expressão: $V_{\text{Maior}} = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 16 = 192 \text{ cm}^3$. De modo semelhante, realizaram o cálculo do volume da pirâmide do topo (pirâmide menor), encontrando 3 cm^3 como resposta. Enfim, estabeleceram a solução final da questão XI, fazendo a diferença entre o volume da pirâmide maior e o volume da pirâmide menor, assim: $V_{\text{Maior}} - V_{\text{menor}} = 189 \text{ cm}^3$.

No momento da validação, o Grupo 2 explicou as estratégias de resolução, através do uso do *software* GeoGebra e, do modelo algébrico da questão 11 (Figura 154).

Figura 154 - Dialética da validação da situação didática 11 do Grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa.

Segue a explicação da estratégia de resolução de um dos participantes do Grupo 2, gravada pelo *Meet*, no momento da exposição para os presentes.

P5: Na questão ele diz que tem um fabricante de velas de formato piramidal. Só que ele faz cortes de mesma altura e coloca em uma arte de metal, espaçados a cada 1 cm. No caso, ele afirma que a base é quadrangular de lado 6 e altura da vela sendo 19 cm. A altura da pirâmide tem uma pegadinha, porque no caso ela tem esses espaços de 1cm entre elas. Então, esse valor de 19cm tem de ser subtraído 3cm, que vai dá 16cm de altura da vela. No caso, esse fabricante quer diversificar a produção de velas, tirando essa pirâmide menor que fica no topo, assim, essa pirâmide menor vai ter $\frac{1}{4}$ do lado e $\frac{1}{4}$ da altura da pirâmide maior. Aí no caso, quando é feito esse cálculo e é retirado essa pirâmide menor, vai se chegar a um volume de parafina que vai ser economizado, sendo o volume total de parafina que vai ser utilizado que é 189cm^3 , isso nessas condições dada. Essa questão acho que é mais simples que a outra.

Fazendo a análise dos dados coletados no momento da formação, verificou-se que o Grupo 2, novamente, realizou sua própria construção no GeoGebra para essa situação didática proposta, enriquecendo ainda mais a formação dos futuros professores. Também expuseram o registro algébrico do modelo matemático de resolução por eles criados, de acordo com o que fora previsto na análise *a priori*.

Segue a transcrição do áudio coletada, no momento da exposição da resolução algébrica do Grupo 2:

P6: Vamos apresentar aqui o cálculo para especificar melhor o que o participante P5 fez no GeoGebra. Assim, resumindo um pouco o enunciado, o que nós sabemos da questão é que ele quer saber o volume de parafina que a vela passará a ter. Então, a primeira coisa que a gente precisa saber é qual é a real altura da pirâmide maior, ou seja, da vela mesmo, da parte da parafina. Então, se cada um daqueles espaçamentos vale 1cm, então, agente desconta 3cm, por que nós temos três espaçamentos. Assim: $19\text{cm} - 3\text{cm} = 16\text{cm}$. A partir disso, a gente vai encontrar o volume da pirâmide mesmo, o volume da parafina da vela. No caso, colamos na fórmula para achar o volume de pirâmides, que é $V_p = \frac{1}{3} \cdot \text{Ab} \cdot h$. Nesse caso, nós temos aqui uma base quadrangular, então, nós fazemos as substituições na fórmula, colocando: $V_p = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 16$. Realizando o cálculo, nós temos que o volume de parafina da pirâmide é mesmo 192cm^3 . E com relação a parte que vai ser retirada, que é aquela partezinha de cima, que é a pirâmide menor, nós vamos fazer o volume também. Ele informa, que a aresta é 1,5cm e a altura é 4cm, assim, têm-se: $V_p = \frac{1}{3} \cdot (1,5)^2 \cdot 4$. Fazendo os cálculos, nós encontramos 3cm^3 . Já que ele quer saber quanto vai passar de parafina, agente realiza a diferença entre os dois volumes, $V_{\text{Maior}} - V_{\text{menor}} = 192 - 3$, e chegamos à conclusão que o volume de parafina que será gasto será de 189cm^3 .

No tocante a realização da situação didática 11, o Grupo 2 utilizou o suporte tecnológico do GeoGebra para formular estratégias de resolução que servissem de suporte para a criação de um modelo matemático que respondesse ao objetivo do problema, conforme os pressupostos da análise *a priori*.

Já o Grupo 3 não realizou a dialética da formulação, não estabelecendo comunicação para trocas de informações no momento da resolução. De acordo com o relato de um dos participantes, ele desenvolveu a solução de maneira individual e não, registrando suas estratégias de resolução. Entende-se, por tanto, que, nesse momento, houve uma quebra no acordo firmado entre a pesquisadora e os participantes no momento da aplicação.

Convém lembrar que nenhum dos integrantes desse grupo participou do encontro online, realizado via *Google Meet*. Quanto à atividade que foi disponibilizada com antecedência, só o participante P10 realizou essa situação didática, enviando a solução, por mensagens via *WhatsApp*, para a pesquisadora.

Analisando os dados enviados pelo representante do Grupo 3, verificou-se semelhança nas estratégias de resolução utilizadas, com as apresentadas pelos outros grupos. Assim, foi criado um modelo matemático de resolução no ambiente do lápis e papel (Figura 155), mobilizando os conhecimentos epistêmicos e pragmáticos para solucionar a situação-problema proposta.

Figura 155 - Solução da situação didática 11 do participante P10

$$3 - h = 19 - 3 = 16$$

$$V_p = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 16 - \frac{1}{3} \cdot 1,5 \cdot 1,5 \cdot 4$$

$$V_p = 192 - 3 = 189 \text{ cm}^3$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Verifica-se que esse grupo traz uma solução sucinta, partindo da determinação da altura real da pirâmide maior, eliminando os espaços entre os blocos, por meio de uma subtração simples, fazendo: $h = 19 - 3 = 16$. Num segundo momento, instituiu um registro algébrico, em que se faz a diferença entre o volume da pirâmide maior com o volume da pirâmide menor, estabelecendo a quantidade necessária de parafina para o novo modelo de vela, como segue:

$$V_p = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 16 - \frac{1}{3} \cdot (1,5) \cdot (1,5) \cdot 4$$

$$V_p = 192 - 3$$

$$V_p = 189 \text{ cm}^3.$$

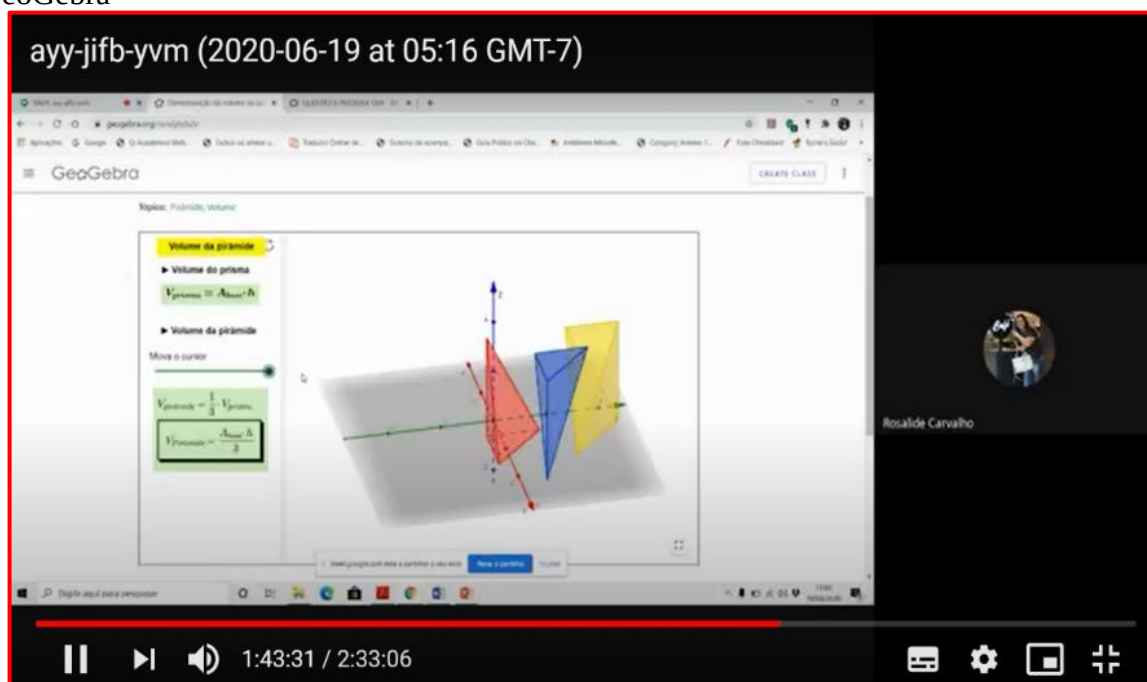
Constata-se, pela análise das ações desse participante, como ele explorou seus conhecimentos teóricos e pragmáticos sobre o assunto para desenvolver uma estratégia de resolução didática e de simples compreensão. A etapa da validação não ocorreu para o grupo, uma vez que os membros do seu grupo não participaram do encontro virtual.

Visto que todos os grupos conseguiram encontrar 189 como a quantidade de parafina necessária para a fabricação do novo modelo de vela, afirma-se que o objetivo dessa situação didática foi atingido. No que concerne à utilização do recurso tecnológico do GeoGebra, os grupos manipularam o objeto tanto para ajudar nas estratégias de resolução, quanto para validar a resposta encontrada, sendo considerado importante na visualização e compreensão das propriedades numéricas e geométricas do problema.

Na institucionalização, a pesquisadora expôs os conceitos presentes no enunciado da questão, utilizando o *software* GeoGebra para fazer uma demonstração do Teorema 6 (Figura 156) que, de acordo com Lima (1991), o volume de uma pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

Em seguida, finalizou com um levantamento das formulações realizadas pelos grupos, sintetizando em uma única solução, segundo o modelo apresentado na análise *a priori*.

Figura 156 - Institucionalização do conceito de volume da pirâmide no *software* GeoGebra



Fonte: Dados da pesquisa.

Fazendo uma análise mais detalhada desse encontro, verificou-se que esse modelo de aplicação, colocado em prática para essa situação didática, não se apresentou eficaz, visto que, mesmo a questão tendo sido disponibilizada com bastante antecedência, nem todos os grupos

promoveram a dialética da formulação, não havendo troca de informações que favorecesse a criação de um modelo matemático de resolução. Entende-se, por conseguinte, a necessidade de uma readequação no contrato didático para pesquisas futuras.

Diante do que foi coletado na experimentação, verificou-se que as situações didáticas utilizadas propiciaram uma melhor compreensão do conceito de Volume e de outras grandezas geométricas, permitindo aos futuros professores fazer uma reflexão sobre o ensino de tais conceitos, valorizando assim a didática e a pedagogia para a construção dos saberes geométricos. A utilização conjunta da TSD e do *software* GeoGebra permitiu estruturar problemas que promovem o raciocínio lógico-dedutivo e as demonstrações, facilitando a transposição da geometria empírica para a geometria dedutiva. Ademais, foi possível perceber que os problemas propostos e as intervenções do professor/pesquisador propiciaram a evolução dos licenciandos, constituindo-se como ferramentas e ações potencializadoras no processo de formação docente e na significação do ensino do objeto matemático abordado nessa dissertação.

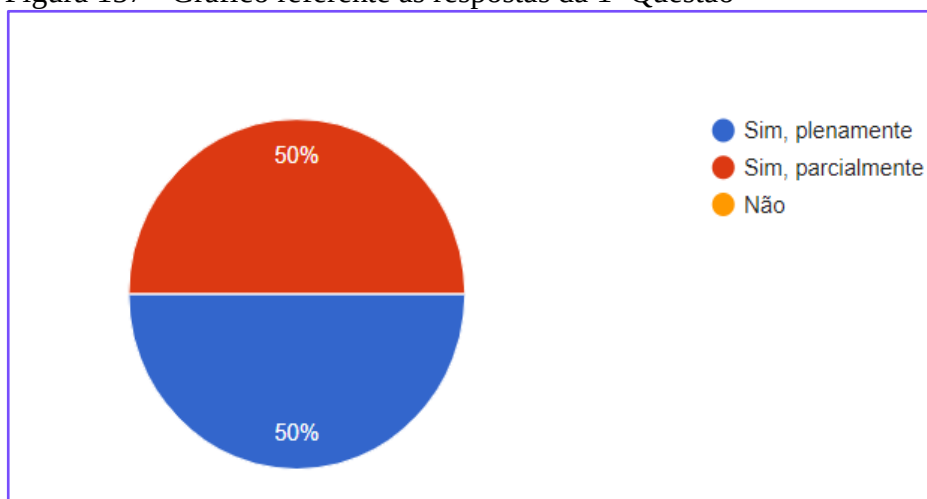
8.5 Aplicação e análise do questionário C

Nesta etapa foi aplicado um questionário, por meio do *Google Forms*, sendo respondido pelos dez participantes da pesquisa, a qual foi acessada por um *link* disponibilizado pela pesquisadora, no grupo de *WhatsApp*. Este questionário teve como objetivo identificar a postura do futuro professor, mediante as vivências práticas das situações didáticas, além de identificar a visão que eles têm da aplicação de tecnologias, no ensino do conceito de volume.

Esse **Questionário de Pesquisa: Avaliação Final** encontra-se no Apêndice C, era composto de nove questões que tratavam da aplicação de metodologias e ferramentas didáticas relacionadas ao ensino de conceitos geométricos e à formação docente, sendo as quatro primeiras objetivas e as cinco outras, subjetivas.

A primeira questão referia-se ao uso do *Google Meet* no ambiente de ensino e se ele favorecia a aprendizagem. Ao analisar as respostas dos participantes, verificou-se uma avaliação positiva com relação à utilização dessa ferramenta tecnológica no processo de ensino e aprendizagem, sendo que cinco (05) deles acham que seu uso favorece plenamente e cinco (05), parcialmente. Veja Figura 157.

Figura 157 - Gráfico referente as respostas da 1ª Questão

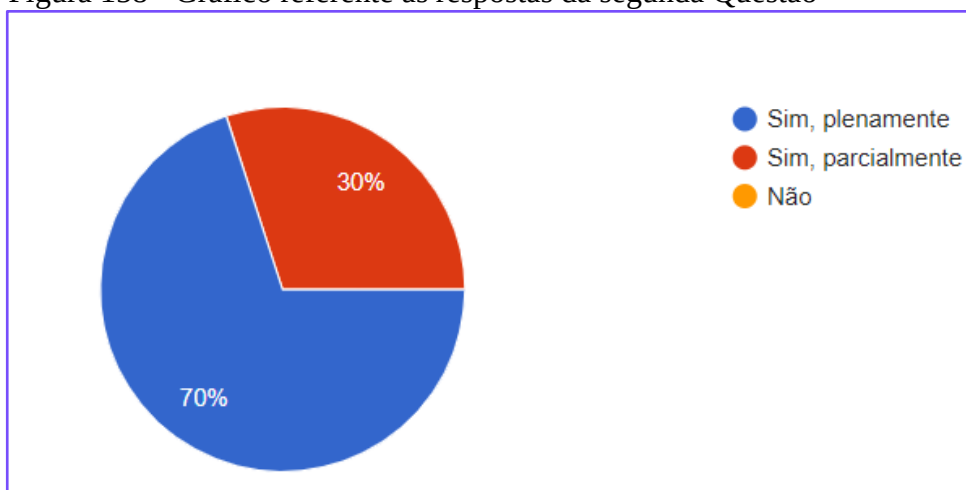


Fonte: Dados da pesquisa.

Essa informação revela que mesmo numa aplicação a distância, os participantes conseguiram coletar informações e compreender conceitos que promoveram a construção de novos saberes matemáticos e didáticos, no entanto, ocorreram adversidades durante essas formações, como exemplo, as oscilações de internet, fato que ocorreu em alguns momentos da aplicação.

A segunda fazia um questionamento se os ambientes a distância poderiam facilitar o desenvolvimento de atividades práticas em experimentos presenciais. Dos dez (10) licenciandos que responderam à questão (Figura 158), sete (07) deles acham que é plenamente possível desenvolver atividades em ambientes a distância e serem aplicadas com êxito em ambientes presenciais e três (03), consideram que elas podem ser parcialmente aplicadas, de modo que gerem um ambiente de aprendizagem presencial totalmente favorável.

Figura 158 - Gráfico referente as respostas da segunda Questão



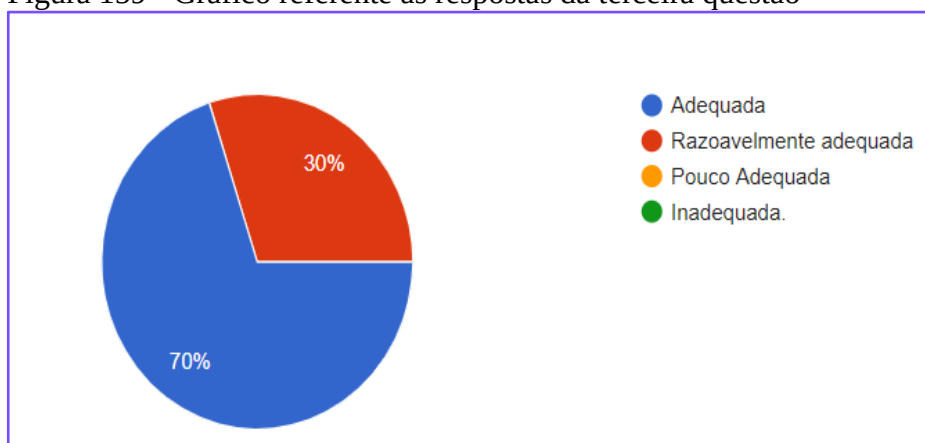
Fonte: Dados da pesquisa.

Neste questionamento, a intenção era perceber se os futuros docentes levariam as experiências vivenciadas na pesquisa para uma situação prática de sala de aula, ou seja, se os

conhecimentos adquiridos da aplicação a distância possibilitariam serem utilizados na prática docente, e diante do exposto pelo gráfico, conclui-se que os participantes consideram que essa possibilidade é viável.

A questão três avalia a orientação das atividades práticas desenvolvidas no *Google Meet*. Sendo assim, sete (07) participantes acham que essas orientações são adequadas e três (03) concordam que elas são razoavelmente adequadas, conforme mostra-se no gráfico da Figura 159. Nesse momento, o intuito era simplesmente verificar se as informações proporcionadas pelo ambiente virtual seriam suficientes para uma experimentação e coleta de dados.

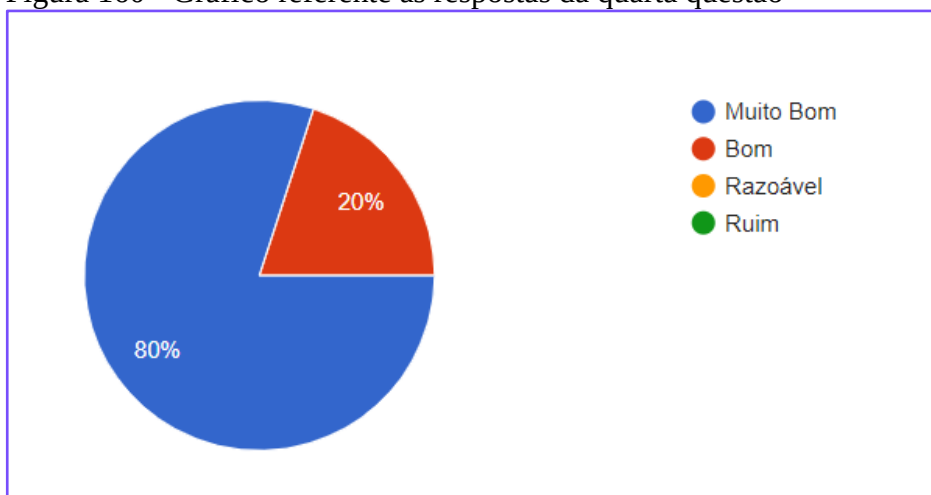
Figura 159 - Gráfico referente as respostas da terceira questão



Fonte: Dados da pesquisa.

Já a quarta pede para os participantes avaliarem o uso do *software* GeoGebra para o ensino de volumes. Assim, oito (08) deles consideram seu uso muito bom e dois (02) acham sua utilização boa para o ensino desses conceitos geométricos (ver Figura 160). Desse modo, vê-se que os futuros professores consideram o aplicativo uma ferramenta que pode ser utilizada para a compreensão do objeto matemático dessa pesquisa.

Figura 160 - Gráfico referente as respostas da quarta questão



Fonte: Dados da pesquisa.

A partir desse trecho, começam as questões discursivas. Convém ressaltar que, para garantir o anonimato dos participantes, o questionário foi respondido sigilosamente. Sendo assim, nesse momento da pesquisa, eles foram nomeados por A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9 e A10.

Na quinta questão, abordou-se a utilização do *software* GeoGebra na preparação para as avaliações externas, como as provas do ENEM. Apresenta-se, assim, a reprodução das respostas mais relevantes dos futuros professores:

A1: Eu acredito que com o GeoGebra existe a possibilidade de uma interpretação mais visual das atividades, dessa forma ele pode ser muito proveitoso para a compreensão de dados dos exercícios e possíveis aplicações.

A2: Acredito que sim. O GeoGebra facilita a compreensão das figuras geométricas, mostra o lado algébrico, plano e tridimensional, de uma forma prática e precisa. O professor tendo um bom preparo e utilizando essa ferramenta, conseguirá dispor ao aluno melhores abordagens dos conceitos do ensino médio.

A3: Sim, pois ao visualizar os sólidos no software, os alunos poderão assimilar melhor o entendimento do conteúdo, não necessariamente, se apegando em fórmulas.

A9: Sim. O software oferece ferramentas que permite o aluno ter um melhor contato visual e de forma mais direta com o conteúdo matemático, além de possibilitar que esses assuntos sejam representados de diferentes maneiras, facilitando assim a compreensão do aluno, até em questões mais complexas como as da prova do ENEM.

Nos comentários acima, observa-se que os participantes consideram o *software* GeoGebra um aliado valioso para promover a compreensão dos conceitos matemáticos implícitos nos enunciados dos problemas, além de contribuir para a formulação de estratégias de resolução, correspondendo ao que se almejou com o segundo objetivo específico.

A sexta questão pede-se que o futuro professor opine e justifique se o GeoGebra pode proporcionar ao aluno apropriação de conceitos Geométricos. Seguem as considerações dos futuros docentes:

A2: Sim. O aprendiz terá mais mecanismos para explorar, maior facilidade em compreender as construções geométricas, bem como as propriedades e as fórmulas que virão em sequência.

A9: Sim, pois o GeoGebra proporciona uma melhor visualização através das janelas de visualização 2D e 3D. Além disso tem a possibilidade de movimentar os sólidos geométricos, fazer a montagem e planificação de diferentes figuras, fazendo o aluno visualizar de forma mais clara os conceitos geométricos.

A10: Sim. Pois com o GeoGebra é possível identificar cada um dos elementos que compõe os conceitos geométricos permitindo diferenciá-los e trabalha-los em conjunto.

Nesse momento, verifica-se nos depoimentos dos participantes que o suporte do GeoGebra propicia a visualização e a identificação de elementos e propriedades matemáticas

que proporciona uma maior apropriação de novos saberes, sendo considerado um recurso didático que permite uma prática docente mais significativa e um aprendizado mais sólido e eficaz dos conceitos matemáticos.

O sétimo questionamento se referia às experiências vivenciadas pelos participantes nesta pesquisa e como as metodologias e teorias de ensino, como a TSD, usadas na aplicação prática da pesquisa, podem ajudar a promover a apropriação do saber matemático. Seguem as reproduções das respostas dos participantes.

A1: Acredito que sim, visto que por meio da TSD os alunos passam a ser partes mais envolvidas e responsáveis no processo de aprendizagem.

A2: Sim. Acredito que as quatro fases da TSD são importantes para a construção do saber, o cumprimento de cada uma fará uma grande diferença para a obtenção de conhecimento, sendo mais significativo estudar matemática.

A4: Sim, em todo o decorrer da aplicação se fez presente todas as etapas: Ação, formulação, validação e institucionalização. Os integrantes agiam diante da situação proposta, formulavam uma solução para tal, faziam a exposição e por fim, a professora ministradora fazia o apanhado de tudo e formalizava todo o processo e, explicava a situação e o assunto a qual abordava.

A9: Com certeza. O objetivo dessa metodologia é sair da proposta do ensino tradicional (bastante mecanizado), e proporcionar ao aluno uma aprendizagem significativa.

Esse é o momento, em que se observa, mesmo em uma aplicação remota, todas as fases da TSD, caracterizada por meio da mediação da pesquisadora e pelo protagonismo dos futuros professores diante de uma situação adidática promovida pelas etapas da ação, formulação e validação. Sendo assim, considera-se que o primeiro objetivo específico foi alcançado.

Na oitava pergunta, buscou-se opinião sobre as modalidades virtuais no ensino. Se através delas seria possível apropriar-se de conceitos matemáticos, metodologias de pesquisa e teorias de ensino que, posteriormente, pudessem ser aplicadas em ambientes presenciais. Seguem as opiniões dos futuros professores.

A2: Acredito que sim, não com a mesma eficácia com relação as aulas presenciais, mas acredito que o ensino a distância está revolucionando o ensino, que está propiciando momentos de grande valia para a educação. Mesmo tendo prós e contras devemos ter uma mente aberta para essa modalidade e entender a sua importância para o ensino atual de matemática.

A5: Sim, no nosso grupo foi bastante enriquecedor pois todos participaram respondendo questões no caderno ou resolvendo no GeoGebra, acredito que todos assim como eu tiveram grande aprendizado.

A7: Sim, pois se fosse presencial tínhamos que utilizar os computadores para resolver as questões e as discussões entre a equipe, que a distância, foram feitas por grupos de *WhatsApp*.

A10: Sim. É possível analisar as práticas presenciais mesmo em ambientes a distâncias e suas teorias, e no momento oportuno coloca-las em prática nos moldes necessários, sem perda de conhecimento.

Nesse momento, tencionava-se perceber se os conceitos e experimentos trabalhados na modalidade virtual foram compreendidos, de maneira a possibilitar sua aplicabilidade em aulas presenciais. Diante dos relatos dos participantes, acredita-se que os futuros docentes adquiriram conhecimentos práticos e teóricos que possibilite sua aplicação em futuras ações docentes dos licenciandos.

E finalmente na última questão, pede-se para o futuro professor avaliar sua participação nesta pesquisa e que contribuições ela pode agregar em sua formação.

A2: Gostei muito dos momentos que tive participando da pesquisa, com os colegas, das discussões, dos conceitos trabalhados e a maneira que os encontros foram acontecendo tiveram contribuições positivas para a minha formação, que espero seja continuada. Ressalto o uso do GeoGebra, que a todo momento estávamos realizando tarefas, buscando compreender suas funções, a variedade de informações que o mesmo dispõe. Pude conhecer mais sobre essa ferramenta, conversar com minha equipe, trocando informações pela rede social, utilizar o *Goolge Meet*, uma plataforma de reuniões muito bem elaborada. Enfim, agradeço por todo o conhecimento obtido, aprendi bastante durante esse processo de ensino e aprendizagem no grupo de pesquisa de didática da matemática.

A9: Contribui bastante. Essas aulas me proporcionaram expandir minha visão sobre os recursos tecnológicos que é possível utilizar em sala de aula e a forma como eles contribuem para a aprendizagem do aluno. Além disso tive mais intimidade com o *software* GeoGebra, que oferece ferramentas incríveis para abordar os conteúdos matemáticos em sala de aula. Me estimulou também a buscar mais ferramentas para serem usadas com o objetivo de facilitar e proporcionar uma aprendizagem significativa ao discente.

A10: Sim. Esses encontros serviram como motivadores para que eu pudesse me familiarizar com as ferramentas do GeoGebra, e melhor identificar como eu posso aplicar essa ferramenta em sala de aula. Mesmo que ainda limitado em questão de conhecimento, percebo que posso melhorar muito as minhas aulas com o uso do GeoGebra.

A partir dos depoimentos relacionados acima, pôde-se observar que os futuros docentes consideram novas metodologias e recursos tecnológicos ferramentas importantes para desenvolver um ensino e uma aprendizagem mais significativos, além de contribuir de modo bastante relevante e promissora para formação docente dos licenciandos de matemática. Desse modo, verifica-se que o terceiro objetivo específico foi alcançado, como também respondeu-se à questão norteadora dessa investigação.

A seguir, apresenta-se o último capítulo desta pesquisa, no qual se enfatizam os resultados mais relevantes e apontam-se perspectivas de pesquisas futuras.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa apresentou um estudo exploratório, tendo como foco as questões de ensino e da aprendizagem do conteúdo de volume, na formação inicial de professores de matemática. Na pesquisa, buscou-se identificar noções e métodos mobilizados pelos futuros professores, mediante situações problemas, envolvendo volume de sólidos geométricos.

A partir de uma revisão bibliográfica balizada por análise de artigos e dissertações que tratam do ensino de Volume, pode-se observar algumas características que chamam atenção no processo de ensino e da aprendizagem deste conteúdo. Dentre elas, destacam-se duas que ilustram bem a dimensão das dificuldades nesse processo: os alunos apresentam dificuldades relacionadas à compreensão para o cálculo de Áreas, na Geometria Plana, refletindo negativamente no cálculo de Volumes, trabalhados na Geometria Espacial, devido às aulas serem apresentadas aos discentes de modo bastante superficial, sendo restritas somente à lista de fórmulas, denominações e resoluções de exercícios; outro fator importante são as dificuldades conceituais apresentadas pelos próprios professores em conceitos básicos de Geometria Plana e Geometria Espacial.

Mediante essa revisão bibliográfica, observa-se que os cursos de formação inicial não incorporam uma reflexão a respeito do ensino de geometria e as formações continuadas não atendem aos objetivos esperados em relação aos conceitos geométricos. Verificou-se também que, embora na literatura se encontre uma quantidade razoável de estudos relacionados à Geometria, no que tange ao conteúdo de volume de sólidos geométricos, eles ainda são escassos. Dessa forma, esta pesquisa teve uma abordagem didática para trabalhar com problemas que envolvessem volume, no viés do ENEM e, direcionados à formação inicial do professor de matemática, em que se pudessem explorar os conhecimentos epistêmicos e pragmáticos referentes a este tema.

Destaca-se, também, a importância do futuro professor em apropriar-se de recursos metodológicos que tratem a visualização como meio de compreender esses conceitos geométricos. Assim, torna-se extremamente relevante que os futuros docentes conheçam as diversas ferramentas didáticas educacionais, de modo que a ação de ensinar possa promover uma aprendizagem mais sólida e eficaz, despertando no aluno o gosto e o protagonismo na busca dos saberes matemáticos. Desse modo, apresenta-se um modelo de situações didáticas consubstanciadas pela incursão do recurso tecnológico do *software* GeoGebra, haja vista ser este uma ferramenta que potencializa o ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos, tendo sua eficácia comprovada por várias pesquisas na área da educação matemática.

Nesse sentido, estruturaram-se situações didáticas amparadas pelo uso do *software* GeoGebra, nas quais se destaca que os licenciandos, por meio das situações didáticas propostas nessa pesquisa, apropriaram-se de saberes geométricos, verificados pela mobilização de tais conceitos nas fases de ação, formulação e validação, utilizados durante a etapa da experimentação dessa investigação.

A manipulação do modelo produzido no *software* GeoGebra possibilitou aos futuros docentes pôr em prática noções intuitivas do conteúdo de volume de sólidos geométricos. Desse modo, os participantes utilizaram a visualização das construções disponibilizadas no GeoGebra para despertar seus conhecimentos epistêmicos e pragmáticos e, assim, compreender, estruturar, validar e demonstrar os teoremas aplicados para solucionar os problemas propostos.

Convém salientar que, sobre a questão da formação docente, buscou-se organizar sessões didáticas, segundo os pressupostos da EDF aliada à TSD, com o intuito de fundamentar uma investigação com ênfase na formação inicial do professor de Matemática. É importante destacar que este trabalho não teve a pretensão de ensinar conceitos Matemáticos, mas, sim, distinguir os conhecimentos epistêmicos e pragmáticos surgidos a partir das situações didáticas aplicadas, haja vista que, durante as etapas das ações, formulações e validações por eles implementadas, percebeu-se a mobilização desses conhecimentos para construir seus próprios saberes, contribuindo assim para a reflexão e o amadurecimento da ação docente, uma vez que tais situações irão fazer parte das vivências profissionais desses futuros professores.

A presente dissertação teve como objetivo principal compreender aspectos didáticos relativos ao ensino do conceito de volume alicerçada na EDF e aprimorada com o *software* GeoGebra. Portanto, apresentam-se as considerações finais sobre a fundamentação teórica e metodológica utilizada, sobre a parte experimental, os resultados principais e as futuras expectativas de estudo.

Para fundamentar e dar sustentação a esta pesquisa, realizou-se um levantamento bibliográfico do conceito e ensino de volume, seguida da TSD (BROUSSEAU, 1986) e pela EDF, ambas pertencentes à vertente da didática francesa. A primeira traz uma investigação dos fenômenos de ensino e aprendizagem e a segunda se direciona para a formação docente.

Durante o levantamento concernente ao ensino do conceito de Volume, percebeu-se uma escassez de trabalhos que abordem o referido tema; no entanto, conseguiram-se elencar alguns trabalhos relevantes como as pesquisas de Vergnaud *et al.* (1983), Douady e Perrin-Glorian (1989), Figueiredo, Bellemain e Teles (2012), Vuelma, Garcia e Trevisan (2011).

Quando se direcionou a busca para o estudo sobre a geometria aplicada com o auxílio do GeoGebra, embasado pela metodologia de pesquisa da ED e da TSD, encontraram-se autores como Leivas e Gobbi (2014), Ferreira e Scortegagna (2018), Volpato, Fortes e Silveira (2018), Pereira *et al.* (2017), Santos e Alves (2018), Souza e Bulos (2011), Costa, Bermejo e Moraes (2009) dentre outros.

Já nos estudos das dissertações, contemplaram-se trabalhos de quatro programas de Pós-Graduação que tratam desse tema, encontrando os que abordam o conceito de volume e seu ensino, bem como a utilização de recursos tecnológicos para seu ensino e aprendizagem, porém focando mais na aprendizagem dos alunos. Todavia, encontrou-se uma dissertação que apresenta uma proposta de formação para professores dos anos iniciais, por meio do ensino de Geometria Espacial. Assim, os trabalhos selecionados apresentaram certas semelhanças com esta investigação, trazendo contribuições que direcionaram os rumos desta pesquisa.

Para conduzir essa investigação, buscou-se a utilização de uma metodologia de pesquisa que auxiliasse a pesquisadora a compreender os eventos que se desenvolvem na sala de aula, na análise dos resultados coletados durante a aplicação das situações didáticas e no fortalecimento da formação docente. Desse modo, adotou-se a EDF, em suas quatro fases, no desenvolvimento desta dissertação, por tratar-se de uma metodologia que estuda o professor, o qual exerce uma importância fundamental na devolução e institucionalização das situações didáticas, além de desempenhar um papel primordial na aprendizagem que se manifesta no interior da sala de aula.

Na segunda etapa da pesquisa, realizou-se a concepção e análise *a priori* com a organização das situações didáticas com base em problemas selecionados das provas do ENEM, sendo realizadas suas representações, através de um modelo criado no *software* GeoGebra. Nesse momento, também identificaram-se as variáveis microdidáticas e previram-se as possíveis ações dos participantes para a resolução dos problemas propostos.

Em relação ao conteúdo, as situações referem-se ao conceito de volume de sólidos geométricos, sendo necessário conhecimentos prévios de geometria plana, expressões algébricas, unidades de capacidade, entre outros. Essas situações foram organizadas e apresentadas, de modo que sua resolução ocorresse por meio de estratégias elaboradas pelos próprios participantes.

Os principais resultados mostram que os participantes se envolveram com os problemas propostos nas onze situações didáticas; assim, pode-se observar e analisar detalhadamente todas as ações e as formulações que os futuros professores manifestaram no momento de interação com essas situações. Foi possível verificar que, durante a etapa da

ação, os licenciandos utilizaram o *software* GeoGebra para mobilizarem seus conhecimentos prévios para instituírem e validarem os novos saberes por eles adquiridos. Ademais, observou-se que os alunos não se restringiram apenas ao trato analítico; foram além, sendo capazes de elaborar seus próprios prognósticos, na tentativa de solucionar e validar as situações propostas.

Em consonância com o contexto anterior, verificou-se ainda que os participantes consideram a utilização do GeoGebra para o ensino de volume, um recurso que proporciona ao aprendiz ampliar o campo de visão das figuras geométricas e, com isso, uma maior compreensão das propriedades e teoremas necessários para a resolução de problemas, promovendo assim um aluno capaz de apropriar-se de novos saberes, por seu próprio mérito. Referente à metodologia de ensino da TSD, os futuros professores a consideram importante na construção de um saber matemático mais significativo.

No entanto, verificaram-se também outros resultados que não podem ser ignorados. Durante a aplicação das situações didáticas, enfrentaram-se algumas dificuldades que necessitam de maior atenção em pesquisas futuras. Muito embora a utilização de ferramentas tecnológicas se mostre promissora e inevitável, durante as formações houve alguns problemas, como a oscilação de internet, trazendo algumas dificuldades de acesso aos participantes. Outro ponto considerado negativo, foi a questão do contrato didático, necessitando ser reavaliado e readequado para trabalhos futuros com a modalidade de aplicação remota. Ademais, nesse modelo de pesquisa não é possível direcionar o olhar da investigadora para observar o comportamento gestual dos participantes, durante a etapa da formulação, sendo que esse olhar pode se constituir numa ferramenta importante para os resultados da investigação, necessitando talvez de uma maior equipe e de outros equipamentos/aplicativos de coleta de dados.

A validação dessa pesquisa foi interna, de acordo com a proposta da ED, resultado da confrontação entre o que foi previsto na análise *a priori* e os dados coletados na análise *a posteriori*, tendo como ênfase os objetivos propostos. Finalizando cada situação, os futuros professores validaram suas formulações e, em seguida, a pesquisadora fez a institucionalização local, ou seja, a partir das resoluções produzidas pelos participantes. As produções foram organizadas por meio de observações e análise de propriedades, em que os resultados coletados, no decorrer do desenvolvimento de cada situação, propiciassem uma relação entre o que foi produzido pelos licenciandos, o saber matemático e as concepções pragmáticas do conceito de volume presente nas situações didáticas.

Diante do exposto, esta pesquisa traz considerações importantes que podem ser usadas para preencher as lacunas identificadas na análise preliminar, como a concepção de um modelo didático que propicia a visualização e a compreensão de Geometria Espacial; no caso específico do conceito de Volume, a apresentação de elementos didático-pedagógicos que podem auxiliar no planejamento e na execução de práticas docentes, contribuindo, portanto, para a formação dos futuros professores.

Tais pressupostos impulsionou e fundamentou algumas sugestões que podem ser utilizadas para melhorar o ensino do conteúdo de Volume, bem como o de Geometria Espacial, tais como: Articular conhecimentos entre a matemática e outras disciplinas ou áreas do conhecimento, valorizando as profissões dos familiares dos alunos ao utilizá-las em sala de aula, pois muitos deles são filhos de pedreiros, cozinheiras, enfermeiras, costureiras, entre outros; Relacionar a matemática dos anos que antecedem o ensino médio, propondo exercícios e exemplos que articulem o novo saber com os conhecimentos prévios dos alunos, a noção de escala por exemplo é tratada no ensino fundamental e pouco articulada com outros conhecimentos, quer seja no âmbito de outras disciplinas, quer seja com a própria matemática.

Tendo em vista perspectivas futuras, almeja-se que pesquisadores possam promover novos estudos referentes à análise da ação docente do professor de Matemática e fortaleçam a inserção de tecnologias educacionais no ensino de conceitos geométricos. Para tanto, sugere-se estudos que possam comparar o ensino de Geometria desenvolvido nos anos de 1980, que sofreu uma forte influência da matemática moderna, com outras pesquisas, como por exemplo do grupo da história do ensino da Matemática, entre outros; Pesquisas que mostrem diferentes meios para atingir as competências e habilidades apresentadas na BNCC; Trabalhos articulados com a ciências, para ajudar a compreender a matemática do cotidiano; Uma análise institucional para auxiliar a compreender o uso exagerado de fórmulas no ensino de matemática, uma vez que as macroavaliações exigem a utilização dessas fórmulas, as instituições (livros didáticos e escolas tendem a seguir essa prática), em particular as instituições privadas, que colocam em evidência o número de estudantes que tiveram sucesso no ENEM e nos vestibulares.

Por fim, acredita-se que o conceito de Volume, aliado às metodologias da EDF e das vivências da TSD, apresentou contribuições relevantes ao ensino e à formação de professores de Matemática, mostrando que elas podem promover mudanças no comportamento da ação docente, e como consequência, provocar impactos diretos nas práticas dos alunos como sujeitos ativos no exercício da construção dos saberes matemáticos.

REFERÊNCIAS

- ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.
- ALMOULOUD, S. A. PCM debate Engenharia Didática de Segunda Geração. [Entrevista concedida a] Ana Paula Machado e Laressa Santos. **Jornal da UEM**, Maringá, n. 102, out. 2011. ISSN: 2238-5010.
- ALMOULOUD, S. A. Diálogos da didática da matemática com outras tendências da educação matemática. **Caminhos da Educação Matemática em Revista/Online**. Sergipe, v. 9, n. 1, p. 145-178, 2019.
- ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. De. Q. E S. Engenharia Didática: características e seu usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPED. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT**. Santa Catarina, v. 3.6, p. 62-77, UFSC, 2008.
- ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. Da. Engenharia didática: evolução e diversidade. **Revemat: R. Eletr. De Edu. Matem.**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 22-52, 2012.
- ALVES, F. R. V. Engenharia Didática para a generalização da sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v. 18, n. 1, p. 61-93, 2016a.
- ALVES, F. R. V. Engenharia Didática no contexto de Transição complexa do Cálculo: aspectos epistemológicos e metodológicos sobre a noção de integração de funções na variável complexa. **THEMA: Ciências Humanas**. Pelotas, v. 13, n. 1, p. 47-64, 2016b.
- ALVES, F. R. V. Teoria das Situações Didáticas (TSD): sobre o ensino de pontos extremantes de funções com arrimo da tecnologia. **Revista Eletrônica Sala de Aula em Foco**. Espírito Santo, v. 5, n. 2, p. 59-68, 2016c.
- ALVES, F. R. V. Formação de professores de matemática: um contributo da engenharia didática (ED). **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 12, n. 2, pp. 192-209, 2017.
- ALVES, F. R. V. Engenharia Didática de 2ª geração com o tema: $h(x)$ -Polinômios de Jacobsthal. **Ensino de Ciências e Tecnologia em Revista**. Santo Ângelo, v. 8, n. 3, p. 28-55, 2018.
- ALVES, F. R. V. Visualizing the olympic didactic situation (ODS): teaching mathematic with support of the GeoGebra software. **Acta Didactica Naposcensia**. Romania, v. 12, n. 2, p. 97-116, 2019.
- ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Engenharia Didática de Formação (EDF): Repercussões para a formação do professor de matemática no Brasil. **Educação Matemática em Revista-RS**. Rio Grande do Sul, v. 2, n. 18, p. 121-137, 2017.
- ARAÚJO, P. C. De.; IGLIORI, S. B. C. O Método na Pesquisa em Educação Matemática. In: V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 5,

2012, Petrópolis. **Anais V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Petrópolis: SIPEM, 2012. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/v_sipem/PDFs/GT04/CC16516613591_A.pdf>. Acesso em 14 de julho 2019.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique, **Institute des Recherche des Mathématiques Rennes**, Rennes, n. S6, p. 124-128, 1989.

ARTIGUE, M. Ingeniería didáctica. In: ARTIGUE, M.; DOUADY, R.; MORENO, L. **Ingeniería didáctica em educación matemática: um esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas**. Bogotá: Iberoamérica, AS, de C.V, 1995.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. (Org.), **Didática das matemáticas**. Tradução de: M. J. Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, p. 193-217, 1996.

ARTIGUE, M. L'ingénierie didactique comme thème d'étude. In: MARGOLINAS, C. *et al* (Eds.), **Em amont et aval des ingénieries didactiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage, 2011.

ARTIGUE, M. Perspective on Design Research: the case of Didactical Engineerin. In: BIKNER-AHSBAHS, A.; KNIPPING, C.; PRESME, N. (Eds.), **Approaches to Qualitative Research in Mathematics: examples of methodology and methods**. New York: Springer Science + Business Média Dordrecht, 2015.

AWILA, H. F. De. **Uma análise da contribuição do Geogebra como recurso interativo para o estudo de Áreas e Volumes**. 2017, 195p. Dissertação (Mestrado em Educação. Matemática e Ensino de Física) – Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria, 2017.

AZEVEDO, I. F. De; ALVES, F. R. V. Engenharia Didática de Formação e olimpíadas de matemática: uma proposta para professores de matemática. **III Encontro de Linha de Pesquisa Educação, Currículo e Ensino**. UFC: 2018. Disponível em <https://www.academia.edu/37432195/ENGENHARIA_DID%C3%81TICA_DE_FORMA%C3%87%C3%83O_E_OLIMP%C3%8DADAS_DE_MATEM%C3%81TICA_UMA_PROP_OSTA_PARA_PROFESSORES_DE_MATEM%C3%81TICA>. Acesso em 3 de abril 2019.

BARROS, J. S. De. **Investigando o conceito de volume no ensino fundamental: um estudo exploratório**. 2002, 147p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Educação. Recife, 2002.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretária de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Volume 2, 2006, p. 69-78.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf.

BROUSSEAU, G. **Les Mathématiques du Cours Préparatoire, Fascicule 1**. Paris: Dunod, 1965. Disponível em: <https://guy-brousseau.com/3144/les-mathematiques-du-cours-preparatoire-1965/>. Acessado em: 10 jan. 2020.

BROUSSEAU, G. **Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques**. These détat. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 1986.

BROUSSEAU, G. L'enseignant dans la théorie des situations didactiques: 1 Structure et fonctionnement du système didactique. In: NOIRFALISE, R.; PERRIN-GLORIAN, M.J. (Eds.). **Actes de la VIII^e Ecole d'été de didactique des mathématiques ST-Sauves d'Auvergne**, Clermont-Ferrand: IREM de Clermont-Ferrand. Actes de la Ville Ecole d'Été, p. 3-46, 1995.

BROUSSEAU, G. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, C.; SAIZ, I. (Orgs.). **Didática da Matemática: Reflexões Psicológicas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. Cap. 4. p. 54-78.

BROUSSEAU, G. **Théori des situations didactique**. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1998.

BROUSSEAU, G. **Conteúdos e Métodos de Ensino**. In: SILVA, B. A. da. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas**. Tradução de: Camila Bogéa. São Paulo: Ática, 2008.

BURIGO, E. Z. O Movimento da Matemática Moderna do Brasil: Encontro de Certezas e Ambiguidades. **Revista Diálogo Educacional /PUCPR**, Curitiba, v. 6, n. 18, p. 35-47, 2006.

CAVALCANTE, F. R. De. F. **O ensino de geometria espacial: uma proposta de atividade com o uso do geogebra**. 2016. 106p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Departamento de Ciências Exatas. Mossoró, 2016.

CHEVALLARD, Y. Sur L'ingenierie d'idactiques. **IREM: d'Aix Marseille**, Paris, p. 1-51, 1982.

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica: del saber sábio al saber enseñado**. Traduzida por Cláudia Gilman. Buenos Aires: Aique, 1991.

CHRONOMATH. **Une chronologie des MATHÉMATIQUES**. Disponível em: <http://serge.mehl.free.fr/chrono/Cavalieri.html>. Acesso em: 07 dez. 2020.

CORRÊA, N. B. De O.; *et al.* A abordagem dos três momentos pedagógicos no ensino de geometria espacial: contribuições de uma sequência didática. In: II CONGRESSO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIAS E FORMAÇÃO DE PROFESSORES, 2, 2019, Catalão. **Anais....**Catalão: CECIFOP, 2019.

COSTA, A. C.; BERMEJO, A. P. B.; MORAES, M. S. F. **Análise do Ensino de Geometria Espacial**. In: X CONGRESSO GÁUCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2009, Ijuí. **Anais...**, Ijuí: EGEM, 2009.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto & aplicações: ensino médio**. (coleção 1º ao 3º ano). 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN, M. J. Um processo d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. **Educational Studies in Mathematics**. Grenoble, v. 20, n. 4. p. 387-424, 1989.

ENEM. Prova de 2012; 2014. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em 25 fev. 2019.

FERREIRA, L.; BARROS, R. M. De O.; SANTOS, T. S. Dos. Geometria Euclidiana com o software GeoGebra. In: X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2010, Salvador. **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática**. Salvador: SBEM, 2010.

FERREIRA, E. F. P.; SCORTEGAGNA, L. Ensinando perímetro e área de figuras planas usando o software GeoGebra. **BoEM**, Joinville, v. 6, n. 11, p. 1-17, 2018.

FIGUEIREDO, A. P. N. B. **Resolução de problemas sobre a grandeza volume por alunos do ensino médio: um estudo sob a ótica da teoria dos campos conceituais**. 2013. 182p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Educação. Recife, 2013.

FIGUEIREDO, A. P. N. B.; BELLEMAIN, P. M. B.; TELES, R. A. De M. A compreensão do conceito de volume como conceito de grandeza no ensino médio. **XVI EBRAPEM – Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática**, 2012. Disponível em: <http://www.eventos.ulbra.br/index.php/ebrapem2012/xviebrapem/paper/viewFile/262/229>. Acesso em 7 de novembro 2019.

FREITAS, J. L. M. De. Situações Didáticas. In: MACHADO, S. D. A., *et al.* (Orgs.). **Educação matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999.

FREITAS, J. L. M. De. Situações Didáticas. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação matemática: uma (nova) introdução**. São Paulo: EDUC, 2015.

GEOGEBRA. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2019. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Geogebra&oldid=55732582>. Acesso em: 23 de julho 2019.

GRAVINA, M. A.; BASSO, M. V. De A. Mídias digitais na educação matemática. In: GRAVINA, M. Al., *et al.* (Orgs.). **Matemática, mídias e didática: tripé para formação do professor de matemática**. Porto Alegre: Evangraf, 2012.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática: ciências e aplicações**. (coleção 1º ao 3º ano). 9 ed. São Paulo: Saraiva, 2017.

LABORDE, C. Affronter la complexité des situations didactiques d'apprentissage des mathématiques em classe: défis et tentatives. **DIDASKALIA**, Lisboa, n. 10, p. 97–112, 1997.

LEIVAS, J. C. P.; GOBBI, J. A. O software GeoGebra e a Engenharia Didática no estudo de área e perímetro de figuras planas. **R. Bras. de Ensino de C&T**, v. 7, n. 1, p. 182-199, 2014. Disponível em <https://www.researchgate.net/publication/286362135_O_Software_GeoGebra_e_a_Engenharia_Didatica_no_estudo_de_areas_e_perimetros_de_figuras_planas>. Acesso em 12 de maio 2019.

LIMA, E. L. **Medida e Forma em Geometria: comprimento, área, volume e semelhança**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

LIMA, E. L., *et al.* **A Matemática no Ensino Médio** – volume 2. Rio de Janeiro: SMB, 1998.

LORENZATO, . Por que não ensinar geometria? **A Educação Matemática em Revista – SBEM**, n. 4, p. 3-13, 1995. Disponível em <http://professoresdematematica.com.br/wa_files/0_20POR_20QUE_20NAO_20ENSINAR_20GEOMETRIA.pdf>. Acesso em 27 de julho 2019.

MACEDO, A. De A. **Engenharia Didática de segunda geração: um referencial para ação investigativa na formação inicial dos professores de Física**. 2018. 158p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Fortaleza, 2018.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: MACHADO, S. D. A., *et al.* (Orgs.). **Educação matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação matemática: uma (nova) introdução**. São Paulo: EDUC, 2015.

MANRIQUE, A. L.; SILVA, M. J. F. Da.; ALMOULOU, S. A. Conceitos Geométricos e formação de professores do ensino fundamental. **Trabalho apresentado na 25ª Reunião Anual da ANPED**, 2002. Disponível em <<http://www.anped.org.br>> (GT19). Acesso em 20 novembro 2019.

MARGOLINAS, C. Situations, savoirs et connaissances...comme lieux de recontre? **Formation et pratiques d'enseignement em questions**. Suíça, n. 19, p. 31-39, 2015. Disponível em: <<http://revuedeshep.ch/pdf/19/2015-Margolinas-FPEQ-19.pdf>>. Acesso em 29 de dezembro 2019.

MENESES, R. S. **Uma história da geometria escolar no Brasil: de disciplina a conteúdo de ensino**. 2007. 163p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Faculdade de Educação. São Paulo, 2007.

MORAIS, L. B. De. **Análise da abordagem da grandeza volume em livros didáticos de matemática no ensino médio**. 2013. 132p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Educação. Recife, 2013.

MUNIZ NETO, A. C. **Geometria – Coleção PROFMAT**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 471 p

NACARATO, A. M. **Leitura Crítica do documento de Matemática na BNCC**. 2016. Disponível em: http://basenacionalcomu.mec.gov.br/documetos/relatórios-analiticos/parece/Adair_Mendes_Nacarato.pdf.

NEVES, R. Da. S. P.; SANTOS, G. L.; MUNIZ, C. A. **Aplicações da informática na construção de conceitos geométricos: limites e possibilidades de softwares de representação dinâmica e de mediação pedagógica**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2013.

OLIVEIRA, J. S. De. **A Engenharia Didática como referência para a ação pedagógica reflexiva: o caso da área de figuras planas irregulares com o GeoGebra**. 2017. 123p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande, 2017.

OLIVEIRA, R. R. De. **Engenharia Didática sobre o modelo de Complexificação da Sequência Generalizada de Fibonacci: Relações recorrentes N-Dimensionais e representações Polinomiais e Matriciais**. 2018. 220p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Ceará, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Fortaleza, 2018.

OLIVEIRA, I. N. C. De. **A construção de bandeiras: um cenário para exploração da geometria via tecnologia e interdisciplinaridade no ensino fundamental**. 2019, 140p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede) – Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão. Catalão, 2019.

PAIS, L. C. **Didática da matemática: uma análise da influência francesa**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

PAIVA, M. **Matemática Paiva**. (coleção 1º ao 3º ano). 2 ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PASSOS, C. L. B. Que Geometria acontece na sala de aula? In: MIZUKAMI, M. Das G. N.; REALI, A. M. De M. R. (Orgs.). **Processos formativos da docência: conteúdos e práticas**. São Carlos: EdUFSCar, 2005, cap.1, p. 17-44.

PAVANELLO, M. R. **O abandono do ensino da geometria: uma visão histórica**. 1991. 166p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação. Campinas, 1991.

PAVANELLO, M. R. Geometria: Atuação de professores e aprendizagem nas séries iniciais. **Anais...** I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática. Curitiba: 2001, p. 172-183.

PEREIRA, L. R., *et al.* Usando o GeoGebra para o ensino de sólidos de revolução. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 39, n. 3, p. 666-686, 2017.

PERRIN-GLORIAN, M. J. L'ingénierie didactique a l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement des ressources et formação des enseignants. In: MARGOLINAS, C., *et al.* (Org.). Em amont et em aval des ingénieries didactiques, XV^a École d'Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (PUY-de-Dôme). **Recherches em Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage, v. 1, p. 57-78, 2009.

PERRIN-GLORIAN, M. J. Des savoirs disciplinaires à construire pour une formation professionnelle universitaire des maîtres L'exemple de la formation des enseignants en mathématiques. In: **Spirale. Revue de recherches en éducation**. Lyon, n. 46, p. 43-61, 2010.

PERRIN-GLORIAN, M. J. L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Vers une ingénierie didactique de deuxième génération ? In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (Ed.), **En amont et en aval des ingénieries didactiques**, p. 57-77, 2011.

PERRIN-GLORIAN, M. J. A interface entre recherche et enseignement, les ingénieries didactiques. In: **Annales Ier Congrès TACD**. Rennes, 2019.

PERRIN-GLORIAN, M. J.; BELLEMAIN, P. M. B. L'ingenierie didactique entre recherche et ressource pour l'enseignement *et al.* la formation des maitres. In: I SIMPÓSIO LATINO-AMERICANO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA, 1, 2016, Bonito. **Anais do I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática**, Bonito, LADIMA, 2016.

PEERIN-GLORIAN, M. J.; BELLEMAIN, P. M. B. L'ingenierie Didactique entre recherché er resourde pour l'enseignement et la formation de maitres. **Caminhos da Educação Matemática em Revista/Online**, v. 9, n. 1, p. 45-82, 2019.

PINHEIRO, A. D.; ALBRECHT, M. P. S. A questão da formação de professores no Brasil: sobre formação inicial e a formação continuada. In: MIRANDA, M. A. G. C.; ALVIM, M. H (Orgs.). **Integrando Pesquisa e Formação de Professores: contribuições do Pibid/UFABC**. Campinas: Edições Leitura Crítica, 2017.

POMMER, W. A. **Brousseau e a ideia de Situação Didática**. Seminários de Ensino de Matemática/FEUSP, 2008. Disponível em: <http://www.nilsonjosemachado.net/sema20080902.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2019.

POMMER, W. M. **A Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares**. São Paulo, 2013. Disponível em: <<http://stoa.usp.br/wmpommer/files/3915/20692/Livro+Eng%C2%AA+Did%C3%A1tica+2013.pdf>>. Acessado em: 12 abr. 2019.

RABAIOLLI, L. L. **Geometria nos anos iniciais: uma proposta de formação de professores em cenários para investigação**. 2013. 134p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) – Centro Universitário UNIVATES. Lajeado, 2013.

RIBEIRO, A. C.; SIEBRA, I. F. G.; SILVA, J. P. M. Da. Engenharia Didática: uma metodologia na arte de resolver problemas matemáticos de Geometria Espacial. **Anais...V**

Congresso Nacional de Educação, Campina Grande – PB, 17 a 20 de outubro 2018. Campina Grande: Realize Editora, 2018. Disponível em: <https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/47228>. Acesso em: 12 ago. 2020.

SANTOS, A. P. R. A.; ALVES, F. R. V. A teoria das situações didáticas no ensino de olimpíadas de matemática: uma aplicação do teorema de Pilot. **Indagatio Didactica**, Aveiro, v. 9, n. 4, 2017.

SANTOS, A. P. R. A.; ALVES, F. R. V. A Engenharia Didática para o ensino de olimpíadas de matemática: situações olímpicas com o amparo do software GeoGebra. **Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de lasCiências**, Bogotá, v. 13. n. 1, p. 141-154, 2018.

SANTOS, A. P. R. A. **Situações Didáticas Olímpicas (SDO): um contributo da Engenharia Didática Clássica no ensino de Olimpíadas**. 2018. 144p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Ceará, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Fortaleza, 2018.

SANTOS, C. A. Dos.; NACARATO, A. M. **Aprendizagem em geometria na educação básica**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2014.

SILVA, N. A. Da.; FERREIRA, M. V. V.; TOZETTI, K. D. **Um Estudo sobre a Situação Didática de Guy Brousseau**. In: XII CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 2015, Curitiba. **Anais....** Curitiba: EDUCERE, 2015.

SIQUEIRA, C. F. R. De. **Didática da matemática: uma análise exploratória, teoria e prática em curso de licenciatura**. 2013. 118p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática. Porto Alegre, 2013.

SOUSA, E. S.; BULOS, A. M. M. **A ausência da geometria na formação dos professores de matemática: causas e consequências**. In: XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2011, Recife. **Anais...** Recife: CIAEM-IACME, 2011.

SOUSA, J. R.; *et al.* Contribuições do (Re)Desenho de tarefas para aproximação da matemática com entorno social da escola. **Revista Práxis Educacional**, v. 15, n. 33, p. 444-471, 2019.

SOUZA, P. B. S. **O software GeoGebra atrelado ao Princípio de Cavalieri como mediador no estudo do cálculo de volume dos sólidos geométricos**. 2015. 109p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia. Cruz das Almas, 2015.

SKOVSMOSE, O. **Desafios da reflexão em educação matemática crítica**. Tradução: Orlando de Andrade Figueiredo; Jonei Cerqueira Barbosa. Campinas: Papirus, 2008.

TEMPIER, F. Quelle resource pour enseigner la numération décimale? Présentation d' un travail em cours. In: DORIER, J.; COUTAT, J. L.; COUTAT, S. (Eds.), **Enseignement des mathématiques et contrat social: enjeux et défis pour le 21^a siècle – Actes du colloque EMF2012**. GT6, 2012.

TEMPIER, F. **Decimal numeration for whole-number at primary school. A didactique engineering for the development of a resource.** 2013. 427p. These Doctorat (Université Paris-Diderot – Paris VII). Paris, 2013.

TEMPIER, F. De la conception d'une ressource pour enseigner la numération à l'identification de besoins pour la formation des enseignants. In: XXXXI COLOQUE COPIRELEM, 41, 2014, Mont de Marsan. **Anais COPIRELEM.** Mont de Marsan, 2014.

TEMPIER, F. New perspective for didactical engineering: an example for the development of a resource for teaching decimal number system. **Journal of Mathematical Teacher Education.** v. 19, n. 1, pp. 261-276, 2016.

VAN DER MER, I. A. Da S. **Aprendizagem do conceito de volume:** uma proposta didática para o ensino fundamental. 2017.102p. Produto Educacional de Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Uberlândia. Ituiutaba, 2017.

VERGNAUD, G. *et al.* Une experience didactique sur le concept de volume em classe de cinquieme (12-13 ans). **Recherches em Didactiques des Mathématiques**, Grenoble, v. 4, n. 1, pp. 71-120, 1993.

VOLPATTO, A. T.; FORTES, P. R.; SILVEIRA, S. R. Um estudo de caso envolvendo a aplicação de um *software* educacional de geometria espacial. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 13, n. 1, p. 79-90, 2018.

VUELMA, C. A.; GARCIA, V. C.; TREVISAN, V. Ensino de áreas e volumes: articulação do mundo físico com os objetos geométricos e suas representações. In: GARCIA, V. C. V., *et al.* (Orgs.). **Reflexão e pesquisa na formação de professores de matemática.** Porto Alegre: Evangraf UFRGS, 2011. 197-228p.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar.** Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICE A – SITUAÇÕES DIDÁTICAS



PPGECM
Programa de Pós-graduação em
Ensino de Ciências e Matemática



APÊNDICE A – SITUAÇÕES DIDÁTICA

ATIVIDADE I - PESQUISA DE MESTRADO

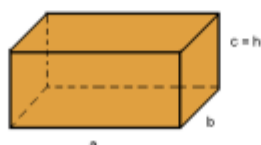
Mestranda: Rosalide Carvalho de Sousa

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Coorientadora: Profa. Dra. Francisca Cláudia Fernandes Fontenele

Aluno: _____ **Data:** _____

1) (ENEM-2014): O condomínio de um edifício permite que cada proprietário de apartamento construa um armário em sua vaga de garagem. O projeto da garagem, na escala 1:100, foi disponibilizado aos interessados já com as especificações das dimensões do armário, que deveria ter o formato de um paralelepípedo retângulo reto, com dimensões, no projeto, igual a 3 cm, 1 cm e 2 cm.



Qual será o volume real do armário, em centímetros cúbicos.



ATIVIDADE II - PESQUISA DE MESTRADO

Mestranda: Rosalide Carvalho de Sousa

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Coorientadora: Profa. Dra. Francisca Cláudia Fernandes Fontenele

Aluno: _____ **Data:** _____

2) (ENEM-2012): A cerâmica possui a propriedade de contração, que consiste na evaporação da água existente em um conjunto ou bloco cerâmico submetido a uma determinada temperatura elevada: em seu lugar aparecendo “espaços vazios” que tendem a se aproximar. No lugar antes ocupado pela água vão ficando lacunas e, conseqüentemente, o conjunto tende a retirar-se. Considere que no processo de cozimento a cerâmica de argila sofra uma contração, em dimensões lineares, de 20%.

Disponível em: www.arq.ufsc.br. Acesso em: 30 mar. 2012 (adaptado).

Levando em consideração o processo de cozimento e a contração sofrida, o volume V de uma travessa de argila, de forma cúbica de aresta a , diminui para um valor que é

- (A) 20% menor que V , uma vez que o volume do cubo é diretamente proporcional ao comprimento de seu lado.
- (B) 36% menor que V , porque a área da base diminui de a^2 para $((1 - 0,2)a^2)$.
- (C) 48,8% menor que V , porque o volume diminui de a^3 para $(0,8a)^3$.
- (D) 51,2% menor que V , porque cada lado diminui para 80% do comprimento original.
- (E) 60% menor que V , porque cada lado diminui 20%.



ATIVIDADE III - PESQUISA DE MESTRADO

Mestranda: Rosalide Carvalho de Sousa

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Coorientadora: Profa. Dra. Francisca Cláudia Fernandes Fontenele

Aluno: _____ **Data:** _____

3) (ENEM-2017): Um casal realiza sua mudança de domicílio e necessita colocar numa caixa de papelão um objeto cúbico, de 80 cm de aresta, que não pode ser desmontado. Eles têm à disposição cinco caixas, com diferentes dimensões, conforme descrito:

- Caixa 1: 86 cm x 86 cm x 86 cm
- Caixa 2: 75 cm x 82 cm x 90 cm
- Caixa 3: 85 cm x 82 cm x 90 cm
- Caixa 4: 82 cm x 95 cm x 82 cm
- Caixa 5: 80 cm x 95 cm x 85 cm

O casal precisa escolher uma caixa na qual o objeto caiba de modo que sobre o menor espaço livre em seu interior. A caixa escolhida pelo casal deve ser a de número

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.
- (E) 5.



ATIVIDADE IV - PESQUISA DE MESTRADO

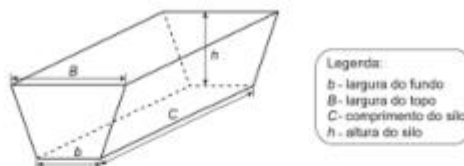
Mestranda: Rosalide Carvalho de Sousa

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Coorientadora: Profa. Dra. Francisca Cláudia Fernandes Fontenele

Aluno: _____ **Data:** _____

4) (ENEM-2014) Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, colocá-la no solo, compactá-la e protegê-la com uma nova vedação denomina-se silagem. Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma reto trapezoidal, conforme mostrado na figura.



Considere um silo de 2 m de altura, 6 m de largura de topo e 20 m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0,5 m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa 2 m^3 desse tipo de silo.

EMBRAPA, Gado de corte. Disponível em: www.ppgecm.embrapa.br. Acesso em: 1 ago. 2012 (adaptado).

Após a silagem, a quantidade máxima de forragem que cabe no silo, em toneladas, é

- (A) 110.
- (B) 125.
- (C) 130.
- (D) 220.
- (E) 260.



ATIVIDADE V - PESQUISA DE MESTRADO

Mestranda: Rosalide Carvalho de Sousa

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

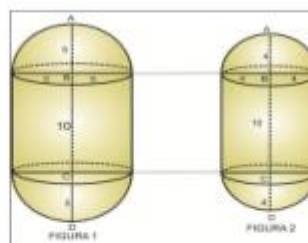
Coorientadora: Profa. Dra. Francisca Cláudia Fernandes Fontenele

Aluno: _____ **Data:** _____

5) (ENEM-2014/Adaptada) Uma empresa farmacêutica produz medicamentos em pílulas, cada uma na forma de um cilindro com uma semiesfera com o mesmo raio do cilindro em cada uma de suas extremidades. Essas pílulas são moldadas por uma máquina programada para que os cilindros tenham sempre 10 mm de comprimento, adequando o raio de acordo com o volume desejado.

Um medicamento é produzido em pílulas com 5 mm de raio. Para facilitar a deglutição, deseja-se produzir esse medicamento diminuindo o raio para 4 mm, e, por consequência, seu volume. Isso exige a reprogramação da máquina que produz essas pílulas.

Use 3,14 como valor aproximado para π .



A redução do volume da pílula, em milímetros cúbicos, após a reprogramação da máquina, será aproximadamente

- (A) 168.
- (B) 304.
- (C) 306.
- (D) 378.
- (E) 538.



PPGECM
Programa de Pós-graduação em
Ensino de Ciências e Matemática



ATIVIDADE VI - PESQUISA DE MESTRADO

Mestranda: Rosalide Carvalho de Sousa

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Coorientadora: Profa. Dra. Francisca Cláudia Fernandes Fontenele

Aluno: _____ **Data:** _____

6) (ENEM-2011) Uma fábrica produz barras de chocolates no formato de paralelepípedo e de cubos, com o mesmo volume. As arestas das barras de chocolate no formato de um paralelepípedo medem 3 cm de largura, 18 cm de comprimento e 4 cm de espessura.

Analisando as características das figuras geométrica descritas, a medida das arestas dos chocolates que têm o mesmo formato do cubo é igual a

- (A) 5 cm.
- (B) 6 cm.
- (C) 12 cm.
- (D) 24 cm.
- (E) 25 cm.



ATIVIDADE VII - PESQUISA DE MESTRADO

Mestranda: Rosalide Carvalho de Sousa

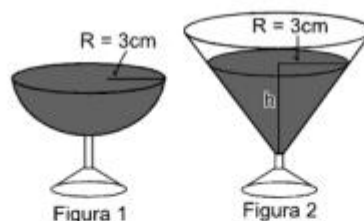
Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Coorientadora: Profa. Dra. Francisca Cláudia Fernandes Fontenele

Aluno: _____ **Data:** _____

7) (ENEM-2010) Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes.

Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.



Considere:

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad \text{e} \quad V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de

- (A) 1,33.
- (B) 6,00.
- (C) 12,00.
- (D) 56,52.
- (E) 113,04.



ATIVIDADE VIII - PESQUISA DE MESTRADO

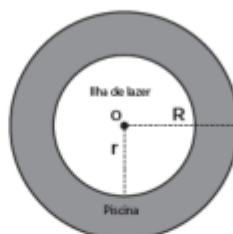
Mestranda: Rosalide Carvalho de Sousa

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Coorientadora: Profa. Dra. Francisca Cláudia Fernandes Fontenele

Aluno: _____ **Data:** _____

8) (ENEM-2013) Num parque aquático existe uma piscina infantil na forma de um cilindro circular reto, 1 m de profundidade e volume igual a 12 m^3 , cuja base tem Raio **R** e centro **O**. Deseja-se construir uma ilha de lazer seca no interior dessa piscina, também na forma de um cilindro circular reto, cuja base estará no fundo da piscina e com centro da base coincidindo com o centro do fundo da piscina, conforme a figura. O raio da ilha de lazer será **r**. Deseja-se que após a construção dessa ilha, o espaço destinado à água na piscina tenha um volume de, no mínimo, 4 m^3 .



Considere 3 como valor aproximado para π .

Para satisfazer as condições dadas, o raio máximo da ilha de lazer **r**, em metros, estará mais próximo de

- (A) 1,6.
- (B) 1,7.
- (C) 2,0.
- (D) 3,0.
- (E) 3,8



ATIVIDADE IX - PESQUISA DE MESTRADO

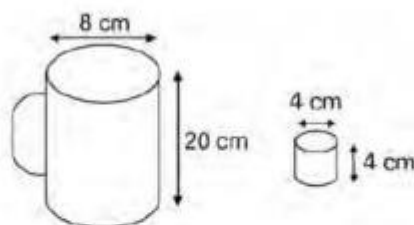
Mestranda: Rosalide Carvalho de Sousa

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Coorientadora: Profa. Dra. Francisca Cláudia Fernandes Fontenele

Aluno: _____ **Data:** _____

9) (ENEM-2010) Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram em uma reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos, também cilíndricos.



Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade mínima de água na leiteira para encher os vinte copinhos pela metade. Para que isso ocorra, dona Maria deverá

- (A) encher a leiteira até a metade, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.
- (B) encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.
- (C) encher a leiteira de toda de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.
- (D) encher duas leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.
- (E) encher cinco leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.



ATIVIDADE X - PESQUISA DE MESTRADO

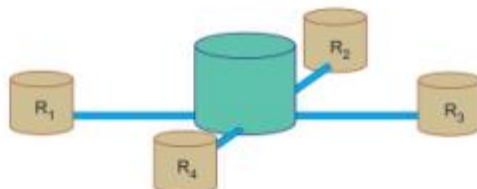
Mestranda: Rosalide Carvalho de Sousa

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Coorientadora: Profa. Dra. Francisca Cláudia Fernandes Fontenele

Aluno: _____ **Data:** _____

11) (ENEM-2019) Uma construtora pretende conectar um reservatório central (R_c) em formato de um cilindro, com raio interno igual a 2 m e altura interna igual a 3,30 m, a quatro reservatórios cilíndricos auxiliares (R_1 , R_2 , R_3 , R_4), os quais possuem raios internos e alturas internas medindo 1,5 m.



As ligações entre o reservatório central e os auxiliares são feitas por canos cilíndricos com 0,10 m de diâmetro interno e 20 m de comprimento, conectados próximos às bases de cada reservatório. Na conexão de cada um desses canos com o reservatório central há registros que liberam ou interrompem o fluxo de água.

No momento em que o reservatório central está cheio e os auxiliares estão vazios, abrem-se os quatro registros e, após algum tempo, as alturas das colunas de água nos reservatórios se igualam, assim que cessa o fluxo de água entre eles, pelo princípio dos vasos comunicantes.

A medida, em metros, das alturas das colunas de água nos reservatórios auxiliares, após cessar o fluxo de água entre eles, é

- (A) 1,44.
- (B) 1,16.
- (C) 1,10.
- (D) 1,00.
- (E) 0,95.



ATIVIDADE XI - PESQUISA DE MESTRADO

Mestranda: Rosalide Carvalho de Sousa

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Coorientadora: Profa. Dra. Francisca Cláudia Fernandes Fontenele

Aluno: _____ **Data:** _____

11) (ENEM-2009) Uma fábrica produz velas de parafina em forma de pirâmide quadrangular regular com 19 cm de altura e 6 cm de aresta da base. Essas velas são formadas por 4 blocos de mesma altura – 3 troncos de pirâmide de bases paralelas e 1 pirâmide na parte superior –, espaçados de 1 cm entre eles, sendo que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, com uma haste de ferro passando pelo centro de cada bloco, unindo-os, conforme a figura.



Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem 1,5 cm de aresta da base, mas mantendo o mesmo molde, quanto ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela?

- (A) 156 cm^3 .
- (B) 189 cm^3 .
- (C) 192 cm^3 .
- (D) 216 cm^3 .
- (E) 540 cm^3 .

APÊNDICE B – ATIVIDADES DE PESQUISA - APLICAÇÕES

LINKS DE ATIVIDADE DE PESQUISA – PRIMEIRA APLICAÇÃO

ATIVIDADE 1: <https://eqrcode.co/a/syPqBC>

ATIVIDADE 2: <https://eqrcode.co/a/ta2yq7>

LINKS DE ATIVIDADE DO GEOGEBRA – PRIMEIRA APLICAÇÃO

QUESTÃO 1: <https://eqrcode.co/a/aqTnmp>

QUESTÃO 2: <https://eqrcode.co/a/SOKsNu>

LINKS DE ATIVIDADE DE PESQUISA – SEGUNDA APLICAÇÃO

ATIVIDADE 3: <http://opn.to/a/MI4GQ>

ATIVIDADE 4: <http://opn.to/a/HPn9F>

ATIVIDADE 5: <http://opn.to/a/Hdb28>

LINKS DE ATIVIDADE DO GEOGEBRA – SEGUNDA APLICAÇÃO

QUESTÃO 3: <https://bit.ly/36ZCrkH>

QUESTÃO 4: <http://opn.to/a/3ySi4>

QUESTÃO 5: <http://opn.to/a/olh6D>

LINKS DE ATIVIDADE DE PESQUISA – TERCEIRA APLICAÇÃO

ATIVIDADE 6: <http://opn.to/a/nc0He>

ATIVIDADE 7: <http://opn.to/a/BHNRQ>

ATIVIDADE 8: <http://opn.to/a/7t4W4>

LINKS DE ATIVIDADE DO GEOGEBRA – TERCEIRA APLICAÇÃO

QUESTÃO 6: <http://opn.to/a/829mO>

QUESTÃO 7: <http://opn.to/a/TA3Xz>

QUESTÃO 8: <http://opn.to/a/feaJs>

LINKS DE ATIVIDADE DE PESQUISA – QUARTA APLICAÇÃO

ATIVIDADE 9: <http://opn.to/a/AiG1R>

ATIVIDADE 10: <http://opn.to/a/aljPe>

ATIVIDADE 11: <http://opn.to/a/Qrool>

LINKS DE ATIVIDADE DO GEOGEBRA – QUARTA APLICAÇÃO

QUESTÃO 9: <http://opn.to/a/Z3Wbs>

QUESTÃO 10: <http://opn.to/a/3di0x>

QUESTÃO 11: <http://opn.to/a/GWWj4>

QR-CODE ATIVIDADE DE PESQUISA – PRIMEIRA APLICAÇÃO

Figura 161 - Códigos das Atividades 1 e 2, respectivamente



Fonte: Elaboração da autora.

QR-CODE ATIVIDADE DO GEOGEBRA – PRIMEIRA APLICAÇÃO

Figura 162 - Códigos das Questões 1 e 2, respectivamente



Fonte: Elaboração da autora.

QR-CODE ATIVIDADE DE PESQUISA – SEGUNDA APLICAÇÃO

Figura 163 - Códigos das Atividades 3, 4 e 5, respectivamente



Fonte: Elaboração da autora.

QR-CODE ATIVIDADE DO GEOGEBRA – SEGUNDA APLICAÇÃO

Figura 164 - Códigos das Questões 3, 4 e 5, respectivamente



Fonte: Elaboração da autora.

QR-CODE ATIVIDADE DE PESQUISA –TERCEIRA APLICAÇÃO

Figura 165 - Códigos das Atividades 6, 7 e 8, respectivamente



Fonte: Elaboração da autora.

QR-CODE ATIVIDADE DO GEOGEBRA – TERCEIRA APLICAÇÃO

Figura 166 - Códigos das Questões 6, 7 e 8, respectivamente



Fonte: Elaboração da autora.

QR-CODE ATIVIDADE DE PESQUISA – QUARTA APLICAÇÃO

Figura 167 - Códigos das Atividades 9, 10 e 11, respectivamente



Fonte: Elaboração da autora.

QR-CODE ATIVIDADE DO GEOGEBRA – QUARTA APLICAÇÃO

Figura 168 - Códigos das Questões 9, 10 e 11, respectivamente



Fonte: Elaboração da autora.

APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO DE PESQUISA: AVALIAÇÃO FINAL



APÊNDICE C - QUESTIONÁRIO DE PESQUISA: AVALIAÇÃO FINAL

Mestranda: Rosalide Carvalho de Sousa

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Coorientadora: Profa. Dra. Francisca Cláudia Fernandes Fontenele

Aluno: _____ **Data:** _____

1. Como você avalia o uso do Google Meet como ambiente de ensino? Ele favorece aprendizagem?

- (A) Sim, plenamente.
- (B) Sim, parcialmente.
- (C) Não.

Justifique:

2. As atividades desenvolvidas em ambientes a distância, como o NEaD/UVA poderão facilitar a experimentação em momentos presenciais?

- (A) Sim, plenamente.
- (B) Sim, parcialmente.
- (C) Não.

Justifique:

3. Como você avalia a orientação das atividades práticas desenvolvidas no Google Meet?

- (A) Adequada.
- (B) Razoavelmente adequada.
- (C) Pouco Adequada.
- (D) Inadequada.

Justifique:

4. Como você avalia a utilização do software GeoGebra para o ensino de volumes?

- (A) Muito Bom.
- (B) Bom.
- (C) Razoável.
- (D) Ruim.

Justifique

5. Você acha que o aporte tecnológico do software GeoGebra pode ser um recurso utilizado para promover uma melhor preparação para as avaliações do ENEM? De que maneira?

6. Em sua opinião, uma aula ministrada com o suporte tecnológico do GeoGebra proporciona ao aprendiz uma maior apropriação dos conceitos Geométricos? Justifique

7. Do que você vivenciou durante a aplicação dessa pesquisa, você acha possível promover uma maior apropriação do saber matemático por meio das quatro fases da Teoria das Situações Didáticas (TSD)?

- (A) Sim, plenamente.
- (B) Sim, parcialmente.
- (C) Não.

Justifique:

8. Nas atuais circunstâncias, em que as aulas tiveram que ser redirecionadas para as modalidades virtuais, você acha possível se apropriar dos conceitos matemáticos, metodologias de pesquisa e teorias de ensino que possam ser aplicados em práticas presenciais? Justifique

9. Você acha que a participação nessa pesquisa contribuirá em sua formação docente? De que maneira? Faça um breve relato sobre sua experiência de nossos encontros e do uso dos recursos tecnológicos disponibilizados para sua realização.

ANEXO A — MATRIZ CURRICULAR DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE ESTADUAL VALE DO ACARAÚ

Universidade Estadual Vale do Acaraú
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Licenciatura em Matemática

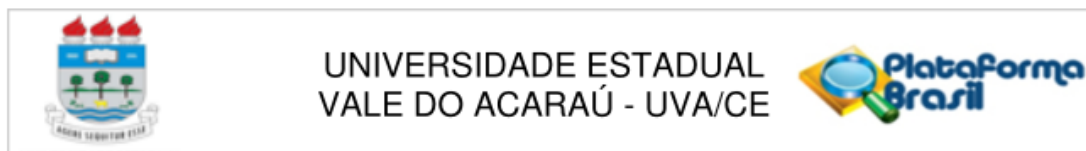
Fluxo 2018

Per.	Disciplina	CH	Pré-Requisito
1	Álgebra Matricial	60	---
1	Introdução às Teorias da Aprendizagem	60	---
1	Lógica e Linguagem dos Conjuntos	60	---
1	Matemática Básica I - Relações e Funções	60	---
1	Matemática Básica II – Trigonometria	60	---
2	Geometria Espacial	80	Matemática Básica II – Trigonometria
2	Geometria Euclidiana	80	---
2	Matemática Básica III - Polinômios e N. Complexos	60	Matemática Básica I – Relações e Funções
2	Metodologia e Prática de Ensino	60	Introdução às Teorias da Aprendizagem
3	Cálculo I	80	Matemática Básica I – Relações e Funções; Matemática Básica II - Trigonometria
3	Didática Geral e da Matemática	60	Metodologia e Prática de Ensino
3	Fundamentos de Programação	60	Lógica e Linguagem dos Conjuntos
3	Geometria Analítica Vetorial	80	Geometria Espacial
4	Álgebra Linear	80	Geometria Analítica Vetorial; Álgebra Matricial
4	Cálculo II	80	Cálculo I
4	Matemática Discreta	60	Lógica e Linguagem dos Conjuntos
4	Tendências da Educação Matemática	80	Didática da Matemática
5	Cálculo III	80	Cálculo II
5	Estágio Supervisionado I	100	Tendências da Educação Matemática; ter necessariamente cursado o terceiro e quarto semestres do curso, conforme a resolução nº 08/2016 - CEPE.
5	Estatística e Probabilidade I	60	Matemática Discreta

Per.	Disciplina	CH	Pré-Requisito
5	História da Matemática	60	Matemática Básica III - Polinômios e Números Complexos
5	Laboratório de Ensino de Matemática e Produção de Material Didático	60	Tendências da Educação Matemática
6	Cálculo Numérico	60	Cálculo III
6	Equações Diferenciais Ordinárias	80	Cálculo III
6	Estágio Supervisionado II	100	Estágio Supervisionado I
6	Estatística e Probabilidade II	60	Estatística e Probabilidade I
6	Tecnologias Digitais no Ensino de Matemática	60	Laboratório de Ensino de Matemática
7	Desenho Geométrico	60	Geometria Espacial
7	Disciplina Eletiva 1	60	---
7	Estágio Supervisionado III	100	Estágio Supervisionado II
7	Etnomatemática	60	Tecnologias Digitais no Ensino de Matemática
7	Física Geral	80	Cálculo II
7	Introdução à Teoria dos Números	80	Matemática Básica III - Polinômios e Números Complexos
8	Construção dos Números	80	Cálculo III
8	Disciplina Eletiva 2	60	---
8	Estágio Supervisionado IV	100	Estágio Supervisionado III
8	Modelagem Matemática	60	Tendências da Educação Matemática; Equações Diferenciais Ordinárias
8	Trabalho de Conclusão de Curso I	60	Estágio Supervisionado III
9	Estruturas Algébricas	80	Introdução à Teoria dos Números
9	Introdução à Análise Matemática	60	Construção dos Números
9	Introdução à LIBRAS	60	---
9	Matemática e Educação Financeiras	60	Matemática Básica III - Polinômios e Números Complexos
9	Trabalho de Conclusão de Curso II	60	Trabalho de Conclusão de Curso I
ELETIVAS		CH	Pré Requisito
	Álgebra Linear II	60	Álgebra Linear
	Equações Diferenciais Ordinárias II	60	Equações Diferenciais Ordinárias

Per.	Disciplina	CH	Pré-Requisito
	Estruturas Algébricas II	60	Estruturas Algébricas
	Geometria Analítica Plana	60	Álgebra Matricial
	Geometria Descritiva	60	Desenho Geométrico
	História da Matemática Escolar no Brasil	60	Didática da Matemática
	Introdução as Curvas Diferenciáveis	60	Cálculo III
	Produção de Vídeos Didáticos em Matemática	60	---
	Seminários de Educação	60	---
	Seminários de Educação Matemática	60	---
	Seminários de Estatística e Probabilidade	60	---
	Seminários de Matemática Aplicada	60	---
	Seminários de Matemática Pura	60	---
	Seminários Especiais	60	---
	Tópicos de Educação	60	---
	Tópicos de Educação Matemática	60	---
	Tópicos de Estatística e Probabilidade	60	---
	Tópicos de Matemática Aplicada	60	---

ANEXO B — PARECER DO COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA



PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

Elaborado pela Instituição Coparticipante

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: Engenharia Didática de Formação (EDF): uma aplicação do GeoGebra com os alunos da Universidade Estadual Vale do Acaraú no ensino de volumes.

Pesquisador: ROSALIDE CARVALHO DE SOUSA

Área Temática:

Versão: 3

CAAE: 29216619.6.3001.5053

Instituição Proponente: Universidade Estadual Vale do Acaraú - UVA

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 4.240.060

Apresentação do Projeto:

Emenda de projeto de pesquisa apresentada devido ao isolamento social causado pela pandemia da Covid-19. Desta forma, o projeto original sofreu alteração em sua metodologia, mudando a pesquisa que seria presencial para remota.

A pesquisa apresenta uma Engenharia Didática de Formação (EDF) desenvolvida no contexto do ensino de geometria espacial relacionadas às questões selecionadas das provas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Serão propostas situações didáticas das questões do ENEM, na qual as sessões serão organizadas seguindo as quatro fases da Engenharia Didática (ED): as análises preliminares, a análise a priori, a experimentação e a análise a posteriori.

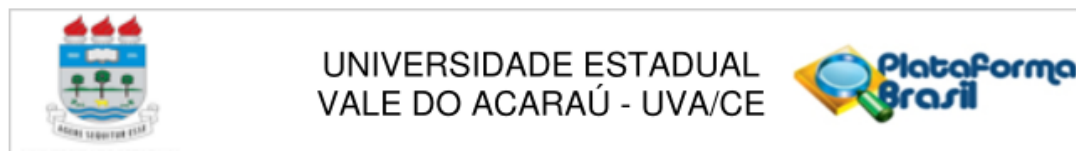
Será utilizado o software GeoGebra para realização da transposição didática de cada questão, com o intuito de favorecer uma modelagem matemática que promova a visualização, e como consequência a compreensão por parte dos aprendizes dos mecanismos essenciais para solucionar os problemas propostos. O público alvo da investigação desse projeto, serão alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú - UVA.

Objetivo da Pesquisa:

Objetivo geral:

- Investigar aspectos didáticos relativos ao ensino de cálculos de volumes aprimorados com o suporte do software GeoGebra, fazendo uso da Engenharia Didática de Formação.

Endereço: Av Comandante Maurocéllo Rocha Ponte, 150
Bairro: Derby **CEP:** 62.041-040
UF: CE **Município:** SOBRAL
Telefone: (88)3677-4255 **Fax:** (88)3677-4242 **E-mail:** uva_comitedeetica@hotmail.com



Continuação do Parecer: 4.240.060

Objetivos específicos:

- Investigar problemas de geometria espacial do ENEM para o cálculo de volume que tenha potencial para o uso do software GeoGebra como suporte na dedução de possíveis soluções.
- Estruturar uma Situação Didática para o ensino do conceito de volume, fazendo o uso do software GeoGebra.
- Apresentar uma proposta de Engenharia Didática de Formação para os professores de matemática em formação inicial, com ênfase na Teoria das Situações Didáticas.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

Uma discussão sobre os possíveis riscos relacionados à aplicação da pesquisa não é apresentada. Entretanto, o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE, apresenta informações de forma clara e explicativa sobre a abordagem da pesquisa. Ademais, o projeto a ser desenvolvido possui alto potencial formador para os participantes da pesquisa (alunos do curso de matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú) favorecendo oportunidades e situações didáticas que proporcione aos discentes da Licenciatura em Matemática, desenvolver uma concepção de modelagem didática através de estudos de uma teoria de ensino aliada a um software educativo e aplicados ao conteúdo de volume.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

Pesquisa bem apresentada.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

Os termos foram apresentados e estão em conformidade.

Recomendações:

Encaminhar relatório final da pesquisa a este CEP.

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

Emenda sem óbices éticos.

Vide recomendações.

Considerações Finais a critério do CEP:

O Colegiado do CEP/UVA, após apresentação e discussão do parecer pelo relator, acatou a relatoria que classifica como aprovado o protocolo de pesquisa. O(a) pesquisador(a) deverá atentar para as recomendações listadas neste parecer.

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Endereço: Av Comandante Maurocélvio Rocha Ponte, 150
Bairro: Derby **CEP:** 62.041-040
UF: CE **Município:** SOBRAL
Telefone: (88)3677-4255 **Fax:** (88)3677-4242 **E-mail:** uva_comitedeetica@hotmail.com



UNIVERSIDADE ESTADUAL
VALE DO ACARAÚ - UVA/CE



Continuação do Parecer: 4.240.060

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_1591395.pdf	25/08/2020 15:59:16		Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	tcleuva.pdf	25/08/2020 15:58:31	ROSALIDE CARVALHO DE SOUSA	Aceito
Outros	projetomodificado.pdf	18/06/2020 18:22:56	ROSALIDE CARVALHO DE SOUSA	Aceito
Outros	folhaderosto3.pdf	24/03/2020 13:22:27	ROSALIDE CARVALHO DE SOUSA	Aceito
Outros	declaracaodecompromissocorrigida.pdf	23/03/2020 14:09:45	ROSALIDE CARVALHO DE SOUSA	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	termocorrigido.pdf	23/03/2020 14:04:15	ROSALIDE CARVALHO DE SOUSA	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	projetocomitedeetica.pdf	23/03/2020 13:58:33	ROSALIDE CARVALHO DE SOUSA	Aceito
Outros	img20200218_19431222.pdf	18/02/2020 20:27:28	ROSALIDE CARVALHO DE SOUSA	Aceito
Outros	img20200218_19491057.pdf	18/02/2020 20:24:38	ROSALIDE CARVALHO DE SOUSA	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	termo.pdf	19/12/2019 21:08:10	ROSALIDE CARVALHO DE SOUSA	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	PROJETO.pdf	19/12/2019 20:51:37	ROSALIDE CARVALHO DE SOUSA	Aceito

Situação do Parecer:

Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:

Não

Endereço: Av Comandante Maurocécio Rocha Ponte, 150

Bairro: Derby

CEP: 62.041-040

UF: CE

Município: SOBRAL

Telefone: (88)3677-4255

Fax: (88)3677-4242

E-mail: uva_comitedeetica@hotmail.com



UNIVERSIDADE ESTADUAL
VALE DO ACARAÚ - UVA/CE

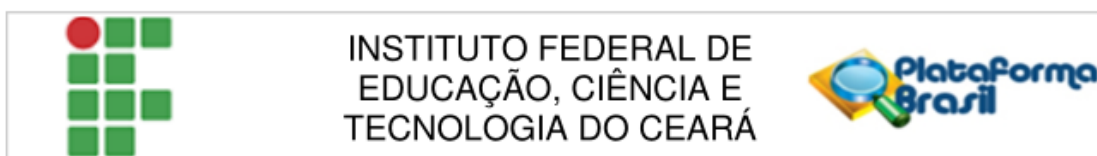


Continuação do Parecer: 4.240.060

SOBRAL, 26 de Agosto de 2020

Assinado por:
Maria do Socorro Melo Carneiro
(Coordenador(a))

Endereço: Av Comandante Maurocélvio Rocha Ponte, 150
Bairro: Derby **CEP:** 62.041-040
UF: CE **Município:** SOBRAL
Telefone: (88)3677-4255 **Fax:** (88)3677-4242 **E-mail:** uva_comitedeetica@hotmail.com



PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DA EMENDA

Título da Pesquisa: Engenharia Didática de Formação (EDF): uma aplicação do GeoGebra com os alunos da Universidade Estadual Vale do Acaraú no ensino de volumes.

Pesquisador: ROSALIDE CARVALHO DE SOUSA

Área Temática:

Versão: 3

CAAE: 29216619.6.0000.5589

Instituição Proponente: INSTITUTO FEDERAL DE EDUCACAO, CIENCIA E TECNOLOGIA DO CEARA

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 4.141.474

Apresentação do Projeto:

O processo se trata de uma emenda, na qual foi ajustado que o processo de realização da pesquisa será feita de forma remota, por meio do aplicativo Google Meet.

Resumo:

Esta pesquisa apresenta uma Engenharia Didática de formação (EDF) desenvolvida no contexto do ensino da geometria espacial, mais especificamente do conteúdo de Volumes, relacionada a questões selecionadas das provas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), no período que corresponde aos anos de 2009 a 2018. São propostas situações didáticas das questões do ENEM, estruturadas na Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau, as quais foram organizadas seguindo as quatro fases da Engenharia Didática (ED): as análises preliminares, a análise a priori, a experimentação e a análise a posteriori, que permitam responder à questão do problema: De que maneira conceber um recurso didático que permita melhorar o ensino de volumes, por meio da formação inicial de professores? Assim, utilizou-se o software GeoGebra para realização da transposição didática de cada questão, com o intuito de favorecer um modelo matemático que promovesse a visualização e, como consequência, a compreensão por parte dos aprendizes dos mecanismos essenciais para solucionar os problemas propostos. Este trabalho tem como objetivo central compreender aspectos didáticos relativos ao ensino do conceito de volumes alicerçada na Engenharia

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703

Bairro: Jardim América

UF: CE

Município: FORTALEZA

Telefone: (85)3401-2332

CEP: 60.410-426

E-mail: cep@ifce.edu.br



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA DO CEARÁ



Continuação do Parecer: 4.141.474

Didática de Formação e aprimoradas com o suporte do software GeoGebra. Um outro objetivo da pesquisa é desenvolver uma proposta de Engenharia Didática de Formação no contexto do ENEM, com ênfase na Teoria das Situações Didáticas (TSD), para o ensino do conceito de volumes por meio de uma modelagem no software GeoGebra, como também apresentar um recurso didático aos professores de matemática em formação inicial que possibilite a compreensão de conceitos geométricos e a formulação de estratégias para resolução de problemas. Nesta investigação, a EDF apresenta-se como uma complementariedade com a Teoria das Situações Didáticas – TSD, de modo que as situações didáticas do ENEM apresentadas se consubstanciem como uma alternativa para aulas que podem ser direcionadas na preparação dos alunos para as provas do ENEM; sua estrutura possibilita descrever os princípios da mediação didática aplicadas durante o processo de ensino e aprendizagem, os quais permitem prever e controlar as ações realizadas pelos alunos, como também, resignificar o estudo do conceito de volumes, no contexto das avaliações do ENEM. Espera-se com essa pesquisa, contribuir com a formação inicial dos professores de matemática, como também apresentar uma proposta que possa ser incorporada ao planejamento e execução de uma metodologia que desenvolva o raciocínio geométrico, promovendo o aperfeiçoamento e o melhoramento do ensino de geometria espacial nas escolas.

Metodologia Proposta:

O presente projeto de pesquisa, visa a utilização da metodologia de pesquisa da EDF e de uma teoria de ensino a TSD, objetivando o planejamento e a elaboração das situações didáticas do ENEM, referentes ao conteúdo de volumes, conceito integrante da Geometria Espacial. Por meio da Engenharia Didática faremos um estudo relacionado a estes temas como embasamento teórico para nossa investigação, e assim, poder apresentar aos professores uma modelagem de ensino pautadas em teorias educacionais robustas e confiáveis. A primeira fase (Análises prévias), foi realizada com base nas etapas da ED. Assim, esse processo foi organizado em duas etapas. Na primeira, foi realizada uma revisão bibliográfica sobre a metodologia de pesquisa, a teoria de ensino, geometria espacial, mais especificamente o conteúdo de volumes e do software GeoGebra. Na outra etapa, foi feita uma descrição da abordagem didática e cognitiva das questões de volumes relacionadas ao contexto preterido para aplicação e desenvolvimento da pesquisa. Na segunda etapa (Concepções e Análises a priori), apresentamos uma descrição sobre o planejamento das situações didáticas do ENEM, assim como, a caracterização do local de desenvolvimento de nossa investigação, com também, os sujeitos envolvidos na pesquisa. Foram escolhidos os alunos da graduação do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703

Bairro: Jardim América

UF: CE

Telefone: (85)3401-2332

Município: FORTALEZA

CEP: 60.410-426

E-mail: cep@ifce.edu.br



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA DO CEARÁ



Continuação do Parecer: 4.141.474

Estadual Vale do Acaraú (UVA), em Sobral-Ce, com um total de doze alunos que estejam cursando ou que já cursaram a disciplina de didática da matemática, com o intuito de identificar a classe intuitiva e a forma empírica que alicerçarão a ação para a resolução das situações didáticas que envolvem o conceito de volume. Convém salientar, que o GeoGebra será utilizado também como ferramenta que auxilie na transposição didática de um conhecimento do contexto científico para o contexto escolar, pois de acordo com Chevallard (1991), o professor exerce a função de mediação entre o saber acadêmico para o contexto escolar, ao planejar a maneira que um conhecimento específico deve ser apresentado, de modo que possam contribuir para uma melhor assimilação e fixação dos conceitos acadêmicos, transformando esse saber ensinado em saber aprendido. Portanto, embasados nos pressupostos de Chevallard, utilizaremos o software GeoGebra para apoiar a visualização da Geometria Espacial. A sessão didática ocorrerá de forma remota, por meio da ferramenta Google Meet e terá duração de aproximadamente 90 minutos. Na terceira etapa (Experimentação), de acordo com Almouloud & Silva (2012) se constitui na aplicação de uma sequência didática, que se caracteriza pela apresentação dos objetivos da pesquisa e em quais condições ela será realizada, este também é o momento em que se efetiva o contrato didático e se faz o registro do que se foi observado durante o período da experimentação. Durante a fase da experimentação nos propomos utilizar as fases da TSD para consolidar a validação das situações-problema. Portanto, pretendemos incentivar o aluno a participar das atividades propostas pelo projeto com o intuito de se obter total colaboração dos discentes na resolução das situações-problema, para isso utilizaremos o contrato didático para nortear as regras do desenvolvimento da pesquisa. Os discentes trabalharão com a manipulação do software GeoGebra, para realizar simulações no computador que auxilie a solucionar as questões

previamente elaboradas pelo professor. Autores como Gravina e Basso (2012, p. 27), descrevem o potencial de softwares para o estudo de geometria espacial, especialmente nos problemas de cálculos de volume, “uma das dificuldades que se apresenta para os alunos é quanto ao entendimento de um objeto tridimensional que está sendo representado em desenho bidimensional”.

Critérios de inclusão

Não apresentado.

Critérios de exclusão

Não apresentado.

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703

Bairro: Jardim América

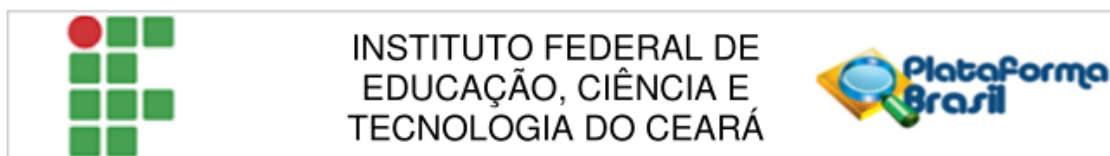
UF: CE

Município: FORTALEZA

CEP: 60.410-426

Telefone: (85)3401-2332

E-mail: cep@ifce.edu.br



Continuação do Parecer: 4.141.474

Objetivo da Pesquisa:

Objetivo primário

Compreender aspectos didáticos relativos ao ensino do conceito de volumes alicerçada na Engenharia Didática de Formação e aprimoradas com o suporte do software GeoGebra.

Objetivo Secundário:

- Desenvolver uma proposta de Engenharia Didática de Formação no contexto do ENEM, com ênfase na Teoria das Situações Didáticas.
- Estruturar Situações Didáticas para o ensino do conceito de volumes que possam ser visualizadas por meio de uma modelagem no software GeoGebra.
- Apresentar um recurso didático aos professores de matemática em formação inicial que possibilite a compreensão de conceitos geométricos e a formulação de estratégias para resolução de problemas.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

Desconfortos e Riscos

Você não deve participar deste estudo, caso venha sentir-se constrangido com algum dos procedimentos anteriormente citados, ou entenda que corra riscos financeiros, físicos ou psicológicos, tendo a liberdade de deixar de participar do estudo em qualquer momento, sem haver nenhum prejuízo para a sua conduta. Cabendo ao pesquisador arcar com quaisquer ônus financeiro, de assistência médica ou psicológica caso seja comprovada tal necessidade.

Benefícios

Os participantes terão oportunidade de participarem de situações didáticas que proporcione aos discentes da Licenciatura em Matemática desenvolver uma concepção de um modelo didática através de estudos de uma teoria de ensino aliada a um software educativo e aplicados ao conteúdo de volumes. Contribuindo assim, com a formação inicial dos professores.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

Sem comentários sobre os aspectos éticos da pesquisa.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

Informações Básicas do Projeto; Projeto completo; Folha de rosto; Termo de compromisso; Cronograma; Termo de infraestrutura; TCLE; Termo de apresentação dos resultados; Garantia de regresso dos benefícios; Orçamento; Cronograma.

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703

Bairro: Jardim América

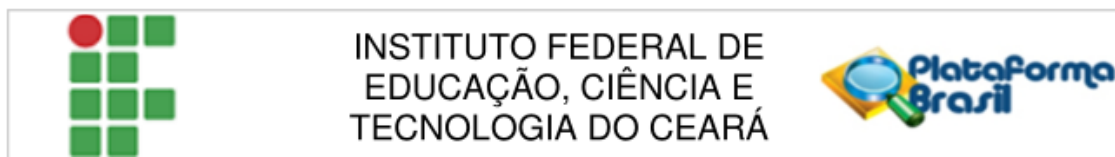
CEP: 60.410-426

UF: CE

Município: FORTALEZA

Telefone: (85)3401-2332

E-mail: cep@ifce.edu.br



Continuação do Parecer: 4.141.474

Recomendações:

Recomenda-se que a nova metodologia adicionada no Projeto Modificado seja adicionado ao documento TCLE.

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

Sem inadequações ou pendências.

Considerações Finais a critério do CEP:

É importante ressaltar que, caso alguma Instituição Coparticipante possua Comitê de Ética em Pesquisa (CEP), o projeto, também, deverá ser avaliado no CEP da Instituição Coparticipante, após a aprovação no CEP da Instituição Proponente, devendo o pesquisador aguardar, também, a aprovação na Instituição Coparticipante antes de iniciar sua pesquisa. Logo, recomenda-se/solicita-se que o pesquisador efetue essa verificação.

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_1579714_E1.pdf	18/06/2020 18:29:32		Aceito
Outros	projetomodificado.pdf	18/06/2020 18:22:56	ROSALIDE CARVALHO DE SOUSA	Aceito
Outros	folhaderosto3.pdf	24/03/2020 13:22:27	ROSALIDE CARVALHO DE SOUSA	Aceito
Outros	declaracaodecompromissocorrigida.pdf	23/03/2020 14:09:45	ROSALIDE CARVALHO DE SOUSA	Aceito
Cronograma	cronogramacorrigido.pdf	23/03/2020 14:07:15	ROSALIDE CARVALHO DE SOUSA	Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	termodeinfrastrukturacorrigido.pdf	23/03/2020 14:05:59	ROSALIDE CARVALHO DE SOUSA	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	termocorrigido.pdf	23/03/2020 14:04:15	ROSALIDE CARVALHO DE SOUSA	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	projetocomitedeetica.pdf	23/03/2020 13:58:33	ROSALIDE CARVALHO DE SOUSA	Aceito
Outros	img20200218_19431222.pdf	18/02/2020	ROSALIDE	Aceito

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703

Bairro: Jardim América

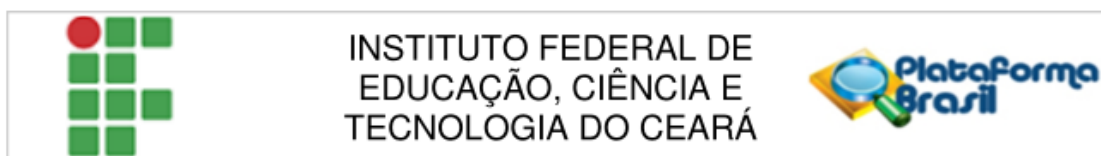
CEP: 60.410-426

UF: CE

Município: FORTALEZA

Telefone: (85)3401-2332

E-mail: cep@ifce.edu.br



Continuação do Parecer: 4.141.474

Outros	img20200218_19431222.pdf	20:27:28	CARVALHO DE SOUSA	Aceito
Outros	img20200218_19491057.pdf	18/02/2020 20:24:38	ROSALIDE CARVALHO DE SOUSA	Aceito
Orçamento	img20200218_19473191.pdf	18/02/2020 20:20:27	ROSALIDE CARVALHO DE SOUSA	Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	img20200218_19505765.pdf	18/02/2020 20:17:34	ROSALIDE CARVALHO DE SOUSA	Aceito
Cronograma	img20200218_19455768.pdf	18/02/2020 20:14:38	ROSALIDE CARVALHO DE SOUSA	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	termo.pdf	19/12/2019 21:08:10	ROSALIDE CARVALHO DE SOUSA	Aceito
Folha de Rosto	img20191219_20581994.pdf	19/12/2019 20:59:59	ROSALIDE CARVALHO DE SOUSA	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	PROJETO.pdf	19/12/2019 20:51:37	ROSALIDE CARVALHO DE SOUSA	Aceito

Situação do Parecer:

Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:

Não

FORTALEZA, 08 de Julho de 2020

Assinado por:
Jefté Ferreira da Silva
(Coordenador(a))

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703**Bairro:** Jardim América**CEP:** 60.410-426**UF:** CE**Município:** FORTALEZA**Telefone:** (85)3401-2332**E-mail:** cep@ifce.edu.br

ANEXO C — TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO



INSTITUTO FEDERAL
CEARÁ
Campus Fortaleza

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DO ESTADO DO CEARÁ - IFCE
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA - PGECEM

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

“Engenharia Didática de Formação (EDF): uma aplicação do GeoGebra com os alunos da Universidade Estadual Vale do Acaraú no ensino do conceito de volumes”

Pesquisadora: Rosalide Carvalho de Sousa

Orientador: Dr. Francisco Regis Vieira Alves

1. Identificação

Você está sendo convidado a participar como voluntário de uma pesquisa de tema: “Engenharia Didática de Formação (EDF): uma aplicação do GeoGebra com os alunos da Universidade Estadual Vale do Acaraú no ensino do conceito de volumes” pesquisado pela aluna Rosalide Carvalho de Sousa. Este documento nominado de termo de consentimento livre e esclarecido, visa assegurar os seus direitos como participante, sendo elaborado em duas vias, uma que deverá ficar com você e a outra com a pesquisadora.

Leia atentamente todo o documento, caso haja dúvidas favor comunicar à pesquisadora para que essas sejam sanadas. Você poderá leva-lo para casa, a fim de ler com mais calma e tranquilidade, consultando os seus familiares quando necessário. Não haverá nenhum tipo de penalidade, caso não concorde em participar ou retirar a sua autorização em qualquer momento.

2. Justificativa e objetivos

Justifica-se esta pesquisa no fato de que desenvolver competências que possibilite a transposição de alguns conteúdos aos modos operandi de resoluções matemáticas, apresentam grandes dificuldades no contexto escolar para os estudantes. Diante de tais pressupostos, esta pesquisa foi norteadada pela seguinte questão: como estruturar situações didáticas para modelar problemas matemáticos de volumes, que possam ser solucionados por meio da transposição e manipulação do *software* GeoGebra, fazendo uso de uma Engenharia Didática de Formação?

Objetivo geral:

Compreender aspectos didáticos relativos ao ensino de cálculos de volumes aprimorados com o suporte do *software* GeoGebra, fazendo uso da Engenharia Didática de Formação.

Objetivos Específicos:

- a. Identificar os problemas que envolvem o ensino e a aprendizagem da geometria espacial do ENEM para o cálculo de volume que tenha potencial para o uso do *software* GeoGebra com facilitador na dedução de possíveis soluções.
- b. Estruturar uma Situação Didática para o ensino do conceito de volumes, fazendo o uso do *software* GeoGebra.

Rubrica do pesquisador: _____

Rubrica do participante: _____



**INSTITUTO FEDERAL
CEARÁ
Campus Fortaleza**

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DO ESTADO DO CEARÁ - IFCE
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA - PGECM**

- c. Apresentar uma proposta de Engenharia Didática de Formação para os professores de matemática em formação inicial, com ênfase na Teoria das Situações Didáticas.

3. Procedimentos

Participando do estudo você será convidado a:

- ✓ Participar da pesquisa que será aplicada em forma de aulas com duração de noventa (90) minutos, na Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA), em Sobral-Ce.
- ✓ A previsão de início das aulas de aplicação é de:
- ✓ As aulas serão registradas através de fotos, gravações de áudio e anotações das produções dos participantes. Sendo tais registros mantidos arquivados por um período de 02 (dois) anos, no qual poderá servir de aporte para pesquisa de mestrado, produções de artigos e encontros científicos.
- ✓ Serão aplicados questionários, com situações-problema propostos de forma de lista de exercícios, com tempo de noventa (90) minutos para as respostas.
- ✓ Os dados coletados serão utilizados somente para a pesquisa e os resultados serão mostrados através de revistas especializadas na área de investigação e/ou encontros científicos e na dissertação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, promovido pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (PGECM/IFCE) no campus Fortaleza, sem expor a identificação dos participantes.

4. Desconfortos e Riscos

Você não deve participar deste estudo, caso venha sentir-se constrangido com algum dos procedimentos anteriormente citados, ou entenda que corra riscos financeiros, físicos ou psicológicos, tendo a liberdade de deixar de participar do estudo em qualquer momento, sem haver nenhum prejuízo para a sua conduta. Cabendo ao pesquisador arcar com quaisquer ônus financeiro, de assistência médica ou psicológica caso seja comprovada tal necessidade.

5. Benefícios

Os participantes terão oportunidade de participarem de situações didáticas que proporcione aos discentes da Licenciatura em Matemática desenvolver uma concepção de um modelo didática através de estudos de uma teoria de ensino aliada a um *software* educativo e aplicados ao conteúdo de volumes. Contribuindo assim, com a formação inicial dos professores.

6. Acompanhamento e Assistência

Rubrica do pesquisador: _____

Rubrica do participante: _____



INSTITUTO FEDERAL
CEARÁ
Campus Fortaleza

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DO ESTADO DO CEARÁ - IFCE
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA - PGECM

O participante tem a garantia ao acesso, em qualquer etapa do estudo para esclarecimentos de eventuais dúvidas na instituição em que você estuda. Para maiores informações nosso contato é (88) 9 94210612, e-mail: rosalidecarvalho@hotmail.com. Cabendo ao pesquisador encaminhar o participante para assistência médica hospitalar, arcando com quaisquer despesas necessárias, caso seja comprovada tal necessidade.

7. Sigilo e Privacidade

Você tem a garantia de que a sua identidade será mantida em sigilo e nenhuma informação será dada à terceiros que não faça parte da equipe de pesquisadores. Durante a divulgação dos resultados desse estudo, o seu nome não será revelado.

8. Ressarcimento e Indenização

Não existirão despesas para o participante em qualquer fase da pesquisa e também o mesmo não receberá nenhuma remuneração para participar do estudo. Você terá garantia ao direito de indenização caso algum dos itens anteriores seja violado. Bem como, o ressarcimento de quaisquer despesas provocadas pela realização da pesquisa, caso seja comprovada tal necessidade.

9. Contato

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, você poderá entrar em contato com a pesquisadora Rosalide Carvalho de Sousa pelo celular (88) 9 94210612 ou pelo e-mail: rosalidecarvalho@hotmail.com. Em caso de dúvidas e reclamações sobre a sua participação, além de questões de ética do estudo, você deverá entrar em contato com a secretaria do Comitê de Ética e Pesquisa (CEP) do IFCE, das 8h às 12h e das 13h às 17h, localizada na Rua Jorge Dumar, nº 1703, Jardim América, no IFCE Reitoria, Fortaleza-CE, 60410-426, fone: (85) 34012332, e-mail: cep@ifce.edu.br

10. Observações Finais

Ao assinar este termo, o participante concorda voluntariamente em participar desta pesquisa e permite o registro de fotos, áudios e anotações de suas produções durante a aplicação da pesquisa, desde que possa retirar seu consentimento a qualquer momento sem penalidade ou prejuízos de qualquer natureza.

11. Consentimento Livre e Esclarecido

Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais de riscos e o incômodo que esta possa acarretar, aceito participar e declaro estar recebendo uma via original deste documento assinada pelo pesquisador e por mim, tendo todas as folhas por nós rubricadas:

Nome do(a) participante:

e-mail (opcional):

Rubrica do pesquisador: _____

Rubrica do participante: _____



INSTITUTO FEDERAL
CEARÁ
Campus Fortaleza

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DO ESTADO DO CEARÁ - IFCE
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA - PGECM

(Assinatura do participante ou nome e assinatura do seu RESPONSÁVEL LEGAL)

Data: ____/____/____.

Responsabilidade do Pesquisador:

Asseguro ter cumprido as exigências da resolução 510/2016 CNS/MS e complementares na elaboração do protocolo e na obtenção deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Asseguo também, ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Informo que o estudo foi aprovado pelo CEP perante o qual o projeto foi apresentado e pela CONEP, quando pertinente. Comprometo-me a utilizar o material e os dados obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

Pesquisadora,

Rosalide Carvalho de Sousa

Sobral, ____ de _____ de ____

Rubrica do pesquisador: _____

Rubrica do participante: _____