



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ -
IFCE CAMPUS FORTALEZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA – PGECM**

VERUSCA BATISTA ALVES

**UM ESTUDO SOBRE OS CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS MOBILIZADOS
NO MANUSEIO DO INSTRUMENTO CÍRCULOS DE PROPORÇÃO DE WILLIAM
OUGHTRED**

FORTALEZA

2019

VERUSCA BATISTA ALVES

UM ESTUDO SOBRE OS CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS MOBILIZADOS NO
MANUSEIO DO INSTRUMENTO CÍRCULOS DE PROPORÇÃO DE WILLIAM
OUGHTRED

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) – *Campus* Fortaleza, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira

FORTALEZA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal do Ceará - IFCE
Sistema de Bibliotecas - SIBI
Ficha catalográfica elaborada pelo SIBI/IFCE, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- A474e Alves, Verusca Batista.
 Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos mobilizados no manuseio do instrumento
 círculos de proporção de William Oughtred / Verusca Batista Alves. - 2019.
 153 f. : il. color.
- Dissertação (Mestrado) - Instituto Federal do Ceará, Mestrado em Ensino de Ciências e
 Matemática, Campus Fortaleza, 2019.
 Orientação: Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira.
1. Círculos de Proporção. 2. Interface entre história e ensino de matemática. 3. Formação do
 professor de matemática. I. Título.

CDD 510.07

VERUSCA BATISTA ALVES

UM ESTUDO SOBRE OS CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS MOBILIZADOS NO
MANUSEIO DO INSTRUMENTO CÍRCULOS DE PROPORÇÃO DE WILLIAM
OUGHTRED

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) – *Campus* Fortaleza, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira

Aprovada em: __/12/2019.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira (Orientadora)
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Prof. Dr. Raphael Alves Feitosa (Avaliador Interno)
Universidade Federal do Ceará – UFC

Prof. Dr. Fumikazu Saito (Avaliador Externo)
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP

Profa. Dra. Ana Cláudia Mendonça Pinheiro (Avaliador Externo)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia – IFCE

A Deus.

Aos meus pais, Vera e Antonio.

À minha vó Maria (*in memoriam*).

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me sustentar. Sem Ele, eu não seria capaz de nada.

Aos meus pais, que sempre me apoiaram, seja no âmbito acadêmico ou pessoal. Por todo o amor.

À minha avó, Dona Maria (*in memoriam*), mãezinha, que me criou e com quem fiquei até seu último dia. Obrigada.

Às minhas amigas de curso e de vida. Isabelle, que voou para longe agora para seguir o seu sonho, mas está sempre presente em minha vida. Naiara, que tem um segundo coração no lugar do cérebro e que sempre tem as palavras certas a dizer. Suziê, a mãe de todas, que sempre cuida de nós. Eu agradeço todos os momentos de conversa e desabafo.

Ao meu irmão de vida, Alison (Mateus), com quem compartilhei alegria, tristeza, ansiedade (muita) e paz. Você é um grande amigo. Por seu amor e cuidado.

Aos amigos Wagner e Eugeniano, que dividiram seu conhecimento comigo.

À minha orientadora, Professora Doutora Ana Carolina Costa Pereira, a Carol. Você, na intimidade que me permite, tornou-se uma amiga. Minha formação acadêmica cresce a cada momento por sua causa e serei sempre grata por todas as oportunidades que me concedeu.

À Professora Doutora Ana Cláudia Mendonça Pinheiro, por compor a banca. Você me formou na graduação e me ensinou os primeiros passos da escrita científica. Cada frase dessa dissertação foi feita com o que eu aprendi com você.

Aos Professores Doutores Fumikazu Saito e Raphael Alves Feitosa, por também comporem a banca examinadora. Agradeço as contribuições e o tempo que dedicaram para me ensinar.

Ao Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM), que foi e é fundamental para meu crescimento enquanto professora/pesquisadora.

Ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PGECM), do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE), pela oportunidade de aprendizado.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), que proveu uma bolsa de estudos durante o período do curso.

RESUMO

A área da história da matemática vem se consolidando e apontando cenários para o desenvolvimento de estudos que, articulados com o ensino de matemática, possam promover ressignificações pertinentes. Dentre as possibilidades para esse tipo de investigação, está a exploração de instrumentos matemáticos contidos em tratados históricos, como mobilizadores de conceitos. No entanto, associar esse tipo de pesquisa à formação de professores, ainda, é uma temática pouco abordada, mesmo que o professor seja uma das principais peças em atividade de ensino. Com isso, buscando desenvolver um estudo por meio da construção de uma interface entre a história e o ensino de matemática, escolheu-se o instrumento círculos de proporção, descrito em *The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment* (1633), do inglês William Oughtred (1574-1660). Para isso, formulou-se, como objetivo geral, conhecer como os conhecimentos matemáticos, incorporados nos círculos de proporção, são mobilizados no estudo de seu manuseio, em uma interface entre história e ensino de matemática. Assumindo um caráter qualitativo, de cunho bibliográfico e documental, para atingir o objetivo dito, esta pesquisa foi organizada em quatro fases – 1) estruturação do marco teórico e metodológico; 2) identificação do público-alvo; definição dos instrumentos e métodos para a coleta e o registro de dados; 3) estruturação e aplicação da pesquisa; 4) análise dos dados. A partir dessas ações, foi possível perceber que o estudo do manuseio de um instrumento histórico, do qual emergem conhecimentos matemáticos, pode possibilitar questões relativas à construção de conceitos matemáticos, tais como o seno, cosseno, tangente, logaritmos e suas propriedades. Assim, a formação continuada dos professores participantes do curso apontou que ocorreu uma possível ressignificação de conceitos, já que houveram associações entre conhecimentos matemáticos que, comumente, não há. Também, foi perceptível a ideia de uma matemática somente de fórmulas, por parte desses professores participantes, que muito provavelmente está associada à formação docente. Ainda assim, teve-se um déficit na escrita matemática. Com isso, reforça-se a necessidade de ações formativas como a que foi realizada nesta pesquisa, pois entende-se que a inserção da história da matemática no ensino pode promover uma melhor compreensão da matemática. No entanto, não basta somente fazer o “uso” da história para se tentar ensinar a matemática, é preciso buscar construir conceitos através da articulação com o ensino.

Palavras-chave: Círculos de Proporção. Interface entre história e ensino de matemática. Formação do professor de matemática.

ABSTRACT

The field of history of mathematics history has been consolidating and pointing out scenarios for the development of studies that, articulated with mathematics teaching, can promote relevant resignifications. Among the possibilities for this kind of investigation, it has the exploration of mathematical instrument contained in historical treaties, as mobilizers of concepts. However, associating this type of research with teacher training is still a topic little approached, even if the teacher is one of the main pieces in teaching activity. Therewith, seeking to develop a study by building an interface between history and the mathematics teaching, the instrument of circles of proportion was chosen, described in *The Circles of Proportion and The Horizontal Instrvment* (1633), from English William Oughtred (1574-1660). Thereunto, it was formulated, as a general objective, to know how the mathematical knowledge, incorporated in the circles of proportion, are mobilized in the study of its manipulation, in an interface between history and mathematics teaching. Assuming a qualitative character, of bibliographic and documentary nature, to reach the stated objective, this research was organized in four phases – 1) structuring of the theoretical and methodological basis; 2) identification of the target audience; definition of instruments and methods for data collection and recording; 3) structuring and application of research; 4) data analysis. From these actions, it was possible to realize that the study of the manipulation of a historical instrument, from which mathematical knowledge emerges, can enable questions related to the construction of mathematical concepts, such as sine, cosine, tangent, logarithms and their properties. Therefore, the continuing education of teachers participating in the course pointed out that there was a possible resignification of concepts, since there were associations between mathematical knowledge that, commonly, there is not. Also, it was noticeable the idea of a mathematics only of formulas, on the part of these participating teachers, which is very likely associated with teacher training. Even so, there was a deficit in mathematical writing. Therewith, the need for training actions such as the one carried out in this research is reinforced, as it is understood that the insertion of the history of mathematics in teaching can promote a better understanding of mathematics. However, it is not enough to just “use” history to try to teach mathematics, it is necessary to seek to build concepts through articulation with teaching.

Keywords: Circles of Proportion. Interface between history and mathematics teaching. Mathematics Teacher Training.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Mapa Político da Europa, Reino Unido	23
Figura 2 – Rio Tâmesa, Londres, 1300	24
Figura 3 – William Oughtred	25
Figura 4 – Frontispício de <i>Key of the Mathematicks</i> , edição de 1694.....	27
Figura 5 – Frontispício de <i>The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment</i> , 1633 ...	33
Figura 6 – As duas páginas de título da edição de <i>Grammelogia</i> , de Richard Delamain	34
Figura 7 – Círculos de proporção (1633)	37
Figura 8 – Lista de abreviações utilizadas no capítulo VII	41
Figura 9 – Folha inicial do capítulo III.....	42
Figura 10 – Item 9 do capítulo II – um exemplo de divisão.....	43
Figura 11 – Tabela da correta ascensão e declinação de 40 das principais estrelas	44
Figura 12 – Primeira ilustração para o cálculo de triângulos retângulos planos	45
Figura 13 – Círculos de proporção (1650)	49
Figura 14 – Os círculos de proporção e o instrumento horizontal.....	50
Figura 15 – Escalas dos círculos de proporção.....	52
Figura 16 – Representação do comprimento do arco $\widehat{BB'}$	54
Figura 17 – 4º e 5º círculos no Geogebra.....	55
Figura 18 – Duplo noturno nos círculos de proporção	57
Figura 19 – Linha da Unidade	57
Figura 20 – Os indicadores dos círculos de proporção.....	58
Figura 21 – Posicionamento inicial dos indicadores – multiplicação	65
Figura 22 – Posicionamento final dos indicadores – multiplicação	66
Figura 23 – Posicionamento inicial dos indicadores – divisão.....	68
Figura 24 – Posicionamento final dos indicadores – divisão	69
Figura 25 – Valor aproximado do seno de 23°30' nos círculos de proporção	71
Figura 26 – Exemplo de organização dos Grupos 3 e 4	95
Figura 27 – Grupo discutindo a leitura do excerto	97
Figura 28 – Participantes discutindo a respeito do manuseio do instrumento	98
Figura 29 – Participantes discutindo sobre o instrumento.....	104
Figura 30 – Participantes estudando as escalas do instrumento	105
Figura 31 – Tentativa de relação entre os logaritmos e o instrumento.....	109

Figura 32 – Explicação do Grupo 3 sobre a leitura dos valores no quarto círculo (multiplicação)	110
Figura 33 – Explicação do Grupo 3 sobre a leitura dos valores no quarto círculo (divisão)..	111
Figura 34 – Participante mostrando como manusear o instrumento	112
Figura 35 – Relatório do Grupo 2 do momento 3.....	116
Figura 36 – Descrição do exemplo 3 do Grupo 1.....	121

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Descrição dos capítulos da primeira parte do livro <i>The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment</i> (1633)	38
Quadro 2 – Organização teórica e metodológica.....	75
Quadro 3 – Objetivos e conteúdos programáticos do curso	79
Quadro 4 – Sistematização geral da atividade.....	88
Quadro 5 – Cronograma de atividade do curso	91
Quadro 6 – Núcleo de sentido	99
Quadro 7 – Categorias	102
Quadro 8 – Excerto da obra, capítulo 1	107

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	14
2	UM VISIONÁRIO DO SÉCULO XVII: WILLIAM OUGHTRED E OS SEUS CÍRCULOS DE PROPORÇÃO	22
2.1	William Oughtred no contexto dos séculos XVI – XVII	22
2.2	Tratados, ensino e instrumentos no cenário do século XVII	26
2.3	O tratado <i>The Circles Of Proportion and the Horizontal Instrvmnt</i> (1632, 1633): alguns aspectos contextuais.....	32
2.3.1	<i>Características gerais da obra e sua relação com os círculos de proporção</i>	36
2.3.2	<i>As notações em The Circles of Proportion: um salto para as matemáticas dos séculos XVI – XVII</i>	41
3	DO TRATADO AO INSTRUMENTO: OS CÍRCULOS DE PROPORÇÃO DE WILLIAM OUGHTRED	48
3.1	Os círculos de proporção: características físicas	48
3.1.1	<i>As escalas</i>	51
3.1.2	<i>Os indicadores</i>	58
3.2	Manuseio do instrumento: as matemáticas em <i>The Circles of Proportion</i> (1633)	59
3.2.1	<i>Conceitos matemáticos</i>	60
3.2.2	<i>Utilizando os indicadores</i>	63
3.2.3	<i>A leitura dos valores</i>	70
4	CAMINHO METODOLÓGICO	74
4.1	Caracterização da pesquisa	74
4.2	A coleta de dados	77
4.2.1	<i>O curso de extensão universitária</i>	78
4.2.2	<i>Instrumentos de coleta e registro de dados</i>	81
4.3	Os processos da interface: o contexto de desenvolvimento, o movimento do pensamento e a atividade	82
4.4	Atividade Orientadora de Ensino (AOE) na interface entre história e ensino de matemática	84
4.4.1	<i>O conceito de atividade e sua relação com o ensino</i>	84
4.4.2	<i>Tratamento didático</i>	86
4.4.3	<i>Intencionalidade e plano de ação</i>	88

4.4.4	<i>Desenvolvimento</i>	91
4.5	Os procedimentos de organização e análise de dados	92
5	O MOVIMENTO DO PENSAMENTO NA FORMAÇÃO DO CONCEITO MATEMÁTICO: RECONHECENDO E MAPEANDO AS (RE) SIGNIFICAÇÕES	94
5.1	Apresentando a atividade e as categorias de análise	94
5.2	As partes e o funcionamento dos círculos de proporção: discutindo as interpretações segundo as categorias de análise	103
5.2.1	<i>Categoria 1: Instrumento/Material</i>	103
5.2.2	<i>Categoria 2: Matemática/Conceitual/Manuseio</i>	107
5.2.3	<i>Categoria 3: Facilitador/Dificultador/Didático</i>	114
5.3	Buscando algumas (re)significações: o processo para a compreensão dos conhecimentos matemáticos a partir do manuseio do instrumento	115
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	124
	REFERÊNCIAS	129
	ANEXO A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	136
	APÊNDICE A – PROGRAMA DO CURSO DE EXTENSÃO	139
	APÊNDICE B – CARTÃO DE RECURSO 1	143
	APÊNDICE C – CARTÃO GUIA 1	146
	APÊNDICE D – CARTÃO DE RECURSO 2	147
	APÊNDICE E – CARTÃO GUIA 2	149
	APÊNDICE F – CARTÃO DE RECURSO 3	150
	APÊNDICE G – CARTÃO GUIA 3	152
	APÊNDICE H – GUIA DE RELATÓRIO EM GRUPO	153

1 INTRODUÇÃO

No campo da educação matemática, muitos são os caminhos traçados por pesquisadores que delineiam seus estudos objetivando compreender os aspectos relacionados ao ensino e à aprendizagem de conceitos matemáticos. Relacionado a isso, uma outra área, que vem crescendo no Brasil e que está sendo associada a questões relativas ao ensino, é a história da matemática.

Embora a história da matemática não tenha como objeto de estudo o ensino em si, alguns pesquisadores, como Mendes (2015), Chaquiam (2015) e Sousa (2016), buscaram ampliar as possibilidades e os interesses quanto às possíveis temáticas de investigação, que perpassaram os âmbitos histórico, didático e metodológico, promovendo uma interação entre os campos. Assim, uma investigação que vem sendo delineada é a respeito da relação que a história da matemática tem com o ensino.

Nessa perspectiva, autores, como Dias e Saito (2009), compreendem que a história da matemática pode contribuir para o processo de construção de conceitos pelo sujeito, promovendo a apropriação de significados. Por meio de recursos que a própria história fornece, a história da matemática articulada ao ensino permite refletir sobre o processo de ensino e aprendizagem de conceitos. De forma complementar, Pereira e Saito (2019a), também, discutem a respeito desse papel da história da matemática no ensino, que nomeiam como uma interface.

Essa interface é caracterizada como um conjunto de ações e produções que promovam reflexões sobre o processo histórico relativo aos conhecimentos matemáticos, com o intuito de elaborar atividades didáticas que realizem essa articulação (SAITO; DIAS, 2013a). Para tal, a interface parte do diálogo do historiador com o educador matemático, com base em um documento histórico, que pode ser um tratado, um texto, um instrumento ou, ainda, fotos, imagens, vídeos, dentre outros, e que se constituem como fundamental para a elaboração das atividades propostas (PEREIRA; SAITO, 2019a).

No Brasil, algumas propostas, que visam articular a história com o ensino de matemática, baseiam-se no estudo de instrumentos matemáticos históricos (BATISTA, 2018; PEREIRA; SAITO, 2019a; CASTILLO, 2016, PEREIRA, 2016). No que tange a considerar esses instrumentos no âmbito educacional, Saito (2014) afirma que eles incorporam conteúdos matemáticos, históricos, sociais, econômicos e culturais de uma determinada época e fornecem ao aluno um conjunto de conhecimentos que o auxiliam no processo de construção do

conhecimento.

Castillo e Saito (2016), ainda, reforçam que a mobilização de conhecimentos matemáticos, no estudo desses instrumentos antigos, possibilita a identificação de aspectos do “saber – fazer” matemático de uma época, proporcionando acesso a questões de ordem epistemológica que podem ser exploradas pelo educador matemático. Assim, não se deve tomar esses instrumentos como meros aparatos de museu, mas entendê-los como recursos advindos da história que permitem a construção do conhecimento matemático.

Dentre os instrumentos matemáticos fabricados no século XVII, destaca-se os círculos de proporção, também conhecidos em alguns estudos como régua de cálculo circular, que exerceu importantes contribuições no progresso científico, principalmente, na Europa (ALVES; PEREIRA, 2018a).

Levando em consideração a proposta da interface e a exploração dos instrumentos, para este estudo, escolheu-se o documento histórico intitulado: *The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment (1633)*, de William Oughtred (1574-1660), inglês e ministro anglicano, que dedicava seu tempo a estudar as matemáticas¹.

Associada à proposta da construção de uma interface entre história e ensino de matemática está a formação de professores de matemática, que visa o desenvolvimento de práticas docentes em conformidade com as atuais necessidades educacionais. Nessa perspectiva, é relevante destacar que a identidade profissional é desenvolvida durante a formação, seja ela inicial ou continuada.

Para isso, conhecer novos recursos ou perspectivas relacionadas à ação didática, constitui-se como necessário para o desenvolvimento do saber-fazer desses professores. A partir disso, ressalta-se sobre a importância de cursos de extensão universitária, que possam atender a contextos específicos e direcionados, que no âmbito da formação inicial e continuada não são atendidos.

É, nesse contexto, que o estudo da interface adentra com um diferencial formativo sobre a demanda de alguns processos educacionais, que envolvam o ensino e a aprendizagem de conteúdos matemáticos, associados ao contexto histórico e que unem dois conhecimentos necessários ao professor de matemática, o específico (matemática) e o didático (SILVESTRE, 2016).

¹ No século XVII, o modelo de ciência ainda era o aristotélico e, assim, as matemáticas se referem à Geometria, Aritmética, Astronomia, Música e Óptica (SAITO, 2015).

Foi, a partir do interesse em associar a história da matemática com a formação de professores de matemática, que em 2015, ainda na graduação, iniciaram-se os estudos sobre um instrumento matemático conhecido, até então, por régua de cálculo circular.

Através de uma bolsa de Iniciação Científica, ofertada pela Universidade Estadual do Ceará - UECE, da participação nas reuniões do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática - GPEHM² e da disponibilidade da Professora Doutora Ana Carolina Costa Pereira, que era ministrante da disciplina de História da Matemática e pôde imergir na pesquisa histórica, buscando meios de associá-la ao ensino de matemática. Como fruto desse processo, foram produzidos diversos trabalhos para eventos e artigos na área da história da matemática, assim como uma monografia de conclusão do curso de graduação.

Visando ampliar as relações com essa área de pesquisa, procurou-se continuar diálogos com diversos pesquisadores no Brasil, trazendo novas ideias e perspectivas sobre a relação da história com o ensino de matemática. Logo, deu-se início a uma nova jornada investigativa, com a finalidade de aprofundar os conhecimentos relativos à articulação da educação matemática com a história da matemática. Foi, então, que se conheceu a proposta da construção de uma interface, que trouxe novos caminhos e meios de se elaborar pesquisas que possam chegar até a sala de aula e que auxiliem no processo de ensino de conceitos.

A iniciativa da interface já era tema do grupo de pesquisa em História e Epistemologia na Educação Matemática - HEEMa³, visando discutir as potencialidades pertinentes a essa articulação. O grupo propunha a construção de uma interface entre essas duas grandes áreas (educação matemática e história da matemática), baseado em estudos como o de Saito e Dias (2013a, 2013b).

Com o intuito de imergir no estudo da interface, o Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática - GPEHM, que desenvolve pesquisas sobre as relações pertinentes entre a educação e a história da matemática, voltados, principalmente, à formação de professores, iniciou um diálogo com o HEEMa.

Entre os grupos, há, portanto, um diálogo entre o historiador e o educador matemático, que, como Saito e Dias (2013a) observam, configura-se como determinante para a elaboração de uma interface entre história e ensino de matemática, o que tornou essa interação mais significativa para o estudo. A partir disso, fazendo parte do GPEHM, pôde-se conceber novas ideias para o estudo com os instrumentos matemáticos, agregando-os agora em uma pesquisa

² Para mais, acesse: <http://gpehm.blogspot.com/>

³ Para mais, acesse: <https://heemaweb.wordpress.com/>

de mestrado.

Por isso, no decorrer das investigações realizadas, os grupos se articularam para que a interface caminhe até a sala de aula, já que, nos últimos 10 anos, em correspondência com os estudos sobre esse tipo de pesquisa, ainda há uma deficiência nessa produção (PEREIRA; SAITO, 2018).

Visto que a interface se põe como auxiliadora no processo de ensino e aprendizagem de matemática, um primeiro passo adotado no estudo foi a busca de trabalhos referentes à temática aqui tratada, como forma de se conhecer o que o meio acadêmico já produziu sobre. Para isso, escolheu-se o repositório da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, em seu Catálogo de Teses e Dissertações⁴.

Como critério de pesquisa, adotaram-se as seguintes palavras-chave: interface entre história e ensino de matemática/ história da matemática e ensino/ instrumentos matemáticos, régua de cálculo e história da matemática na formação do professor/ formação do professor de matemática. Ao realizar a busca, teve-se como critérios de inclusão/exclusão: termos contidos no título; ano de desenvolvimento do estudo, no qual se considerou somente a partir de 2015; proximidade com o tema dessa pesquisa; área de concentração em educação matemática/ensino de matemática.

Em relação à primeira palavra-chave, interface entre história e ensino de matemática/ história da matemática e ensino/ instrumentos matemáticos, a busca retornou 26 estudos, sendo que: oito deles não estavam disponíveis para acesso; dois eram de anos anteriores a 2014 e onze não tinham proximidade com o tema.

Dessas pesquisas identificadas, Di Beo (2015), a partir do *Trattato del Radio Latino*, correlacionou informações sobre a construção e o uso de um instrumento denotado por *radio latino*, baseado nos estudos que discutem a interface. Para tal, a autora se apoiou na tradução do tratado, na reconstrução do instrumento e em obras que tratavam do contexto histórico da época. À vista disso, fez a proposta de duas atividades didáticas, porém não realizou a aplicação delas.

Já Castillo (2016) enfocou, principalmente, o contexto no qual os conceitos matemáticos foram desenvolvidos. A autora discorreu sobre um instrumento matemático, o báculo, associado, também, a um tratado, *A Booke Named Tectonicon*, do século XVI e buscou, através

⁴ Para mais, acesse: <https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#/>

da articulação das dimensões históricas, verificar os conhecimentos mobilizados no estudo do manuseio do instrumento.

Da mesma forma, o estudo de Moraes (2017) se apoiou de um tratado intitulado: *The Trigonall Sector (1650)*, para o estudo do instrumento setor trigonal e o seu público-alvo foram alunos da educação básica, especificamente, do ensino médio. Baseada nos pressupostos da interface, a autora procura apresentar o contexto em que os conhecimentos foram elaborados e se aprofunda no movimento do pensamento, elencando algumas potencialidades didáticas.

Outro estudo, o de Batista (2018), traz o instrumento balhestilha inserido no documento *Chronographia Reportorio dos Tempos... (1603)*, investigando o processo de articulação entre a fabricação e o uso, com o intuito de elencar algumas potencialidades didáticas. Assumindo um caráter qualitativo, Batista (2018) mostra alguns aspectos do movimento do pensamento e o contexto no qual os conceitos foram desenvolvidos e o seu público-alvo foi a formação de professores.

Uma outra investigação, que se pode mencionar, é o estudo de Moraes (2018) e que foi elaborada sob a justificativa de uma interface, juntamente com o movimento lógico-histórico. Em seu estudo, o autor optou por uma pesquisa colaborativa e destinou a estudantes do 6º ano do ensino fundamental II. Porém, compreendendo os pressupostos envolvidos na construção de uma interface entre a história e ensino de matemática, ela é utilizada de modo breve em seu estudo.

Com relação à palavra-chave régua de cálculo, inicialmente, buscou-se por “círculos de proporção”, que é o instrumento contido neste estudo. No entanto, nenhum resultado foi obtido. Em seguida, tentou-se o termo “régua de cálculo circular”, que está citado em alguns estudos sobre o mesmo instrumento, mas também sem resultado. Decidiu-se, então, formalizar somente “régua de cálculo”, encontrando-se seis pesquisas, sendo uma desconsiderada, por não estar na mesma área de concentração. Sobre essa palavra-chave, somente o critério de ano não foi adotado, visto que somente três estudos estavam disponíveis e a decisão foi considerar todos.

A pesquisa de Tanonaka (2008) é um exemplo desse achado na literatura. A autora volta seu estudo ao viés histórico sobre a vida de William Oughtred, a quem se atribui a criação dos círculos e alguns outros instrumentos, que são considerados precursores das calculadoras atuais, sendo a régua de cálculo um desses. No entanto, o estudo de Tanonaka (2008) não é direcionado ao ensino de matemática e, portanto, não constrói uma interface entre história e ensino de matemática.

No caso de Soares (2011), o instrumento não estava incorporado em seu estudo como uma temática principal. Ele fazia parte do contexto das Unidades Básicas de Problemática (UBP), sendo retratado apenas como um tipo de calculadora do século XVII e precursora das versões modernas desse instrumento. Assim, Soares (2011) investigou o instrumento por outra perspectiva de associação da história com o ensino de matemática.

Em Pippa (2014), a autora tratou de uma régua, especificamente, no modelo linear, também atribuída a William Oughtred e ela propôs uma sequência didática para a aplicação do instrumento em sala de aula. No entanto, seu estudo seguiu uma abordagem diferente da interface proposta por Saito e Dias (2013a), o que retrata o quadro da pesquisa sobre a interface no Brasil nos últimos 10 anos, conforme Pereira e Saito (2018).

Sobre a última palavra-chave, buscou-se por história da matemática na formação de professores. Somente três resultados foram encontrados, sendo que um deles não atendia ao critério de ano (a partir de 2015). Com isso, a busca foi refeita para a formação do professor de matemática em um âmbito generalizado, no qual 198 estudos foram identificados. Desses, após a aplicação dos critérios, restaram 3 estudos, tendo sido necessário desconsiderar o critério de ano.

Trazendo discussões sobre os próprios cursos de Licenciatura em Matemática, o estudo de Belo (2012) buscou analisar como se dava o processo de formação de professores de matemática na Universidade Federal do Pará. Como resultado, destacou que há necessidade de ações formativas para os professores formadores de professores. Ainda que tenha se constituído em um *lócus* específico, o argumento de Belo (2012) reafirma a necessidade dos cursos de extensão universitária, tanto para a formação inicial ou continuada, que promovam essa ação formativa mencionada, principalmente, com temas específicos, como é o caso do estudo de instrumentos matemáticos históricos.

Reforçando o quesito formação de professores, Santos (2013) realizou uma avaliação de um curso de extensão universitária sobre as mudanças que esse tipo de ação pode ou não promover na prática docente. Os principais destaques da sua investigação estiveram relacionados à metodologia e às atividades desenvolvidas durante o curso, que foram avaliadas pelos professores participantes de forma positiva, sendo as contribuições para uma melhor prática e o aumento da autoconfiança.

Pode-se dizer, também, que a formação de professores está diretamente relacionada à ampliação dos conhecimentos matemáticos. Sobre isso, Silvestre (2016) associou os jogos como temática para essa formação, buscando estabelecer uma relação entre a atividade de

ensino e a formação de professores de matemática. Através de uma pesquisa participante, o autor destacou a importância do recurso, como um jogo, ao ensino de matemática, assim como à formação dos professores.

Visto que os instrumentos, inseridos nos documentos históricos, podem auxiliar no ensino de conteúdos matemáticos, entende-se que se tornam necessárias as pesquisas que investigam essas intervenções por meio da história e do ensino de matemática. Para além disso, como apontam Pereira e Saito (2018), percebe-se que, ainda, são poucos os estudos desenvolvidos através de uma nova perspectiva sobre a escrita dessa história e que busque promover uma reflexão na construção de conceitos.

Compreendendo, também, que a formação de professores, seja ela inicial ou continuada, é peça fundamental para reorientar o ensino de matemática, esse estudo se volta ao seguinte questionamento: como professores de matemática, em formação continuada, mobilizam conhecimentos matemáticos através do manuseio dos círculos de proporção (1633), em uma interface entre história e ensino de matemática?

Buscando responder a esse questionamento, a pesquisa se dirige com o objetivo geral de conhecer como os conhecimentos matemáticos, incorporados nos círculos de proporção, são mobilizados no estudo de seu manuseio, em uma interface entre história e ensino de matemática.

Seguindo a linha de investigação, delinearam-se três objetivos específicos, que foram: 1) conhecer, por meio das dimensões históricas, o cenário no qual os círculos de proporção e o documento *The Circles of Proportion* (1633) esteve inserido; 2) identificar os aspectos físicos e matemáticos dos círculos de proporção, assim como as questões contextuais e epistemológicas que perpassaram o período no qual ele foi concebido; 3) descrever como se afigura o movimento do pensamento de professores de matemática, em formação continuada, em um curso de extensão universitária.

Desse modo, essa pesquisa se encontra dividida da seguinte forma: o primeiro capítulo, a introdução, traz uma breve contextualização sobre a temática que foi investigada e as motivações para o desenvolvimento desse estudo, apresentando algumas lacunas diante da investigação e da problemática concernente. Com isso, são expressos o questionamento e os objetivos geral e específicos, que nortearam o desenvolvimento da pesquisa.

O segundo capítulo aborda os conteúdos referentes às dimensões históricas para a articulação entre a história e o ensino de matemática. Procura-se discursar acerca do cenário no qual os círculos de proporção estavam inseridos, indagando sobre os conhecimentos

matemáticos que se relacionam com o instrumento e as influências que o período percorreu, por meio do estudo do tratado *The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment* (1633).

O terceiro capítulo discorre, especificamente, sobre os círculos de proporção de William Oughtred, denotado como um instrumento matemático, tanto pelo período que ele foi elaborado, quanto por sua finalidade, dando ênfase a questões contextuais e epistemológicas.

O quarto capítulo apresenta o caminho metodológico da pesquisa, o suporte para o desenvolvimento e a análise dos dados do estudo. Aponta-se, de forma resumida, a respeito dos pressupostos da interface, suas fases e a associação a cada momento do estudo. Também, sobre o curso de extensão universitária, elaborado e aplicado para professores de matemática em formação continuada, com base na Atividade Orientadora de Ensino (AOE).

No quinto capítulo, por meio das técnicas de análise de dados pré-definidas, apresenta-se a análise e a discussão dos dados obtidos no curso de extensão. A partir disso, é descrito o desenvolvimento do curso de extensão, assim como o movimento do pensamento de professores de matemática em formação continuada e as possíveis (re)significações que ficaram evidentes.

Assim, o capítulo seguinte discorre sobre o contexto dos séculos XVI e XVII, período em que William Oughtred viveu e publicou seus diversos tratados, que, dentre eles, está o *The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment* (1633), que contém sobre os círculos de proporção.

2 UM VISIONÁRIO DO SÉCULO XVII: WILLIAM OUGHTRED E OS SEUS CÍRCULOS DE PROPORÇÃO

Os séculos XVI e XVII foram marcados pelo aparecimento de diversos instrumentos matemáticos, tais como o barômetro, o relógio de sol, o quadrante, a esfera armilar, a régua de cálculo, dentre outros (BENNETT, 2011). Esses instrumentos estavam contidos em tratados, que expressavam, muitas vezes, as características desses instrumentos e o seu manuseio, de modo a atender o público para o qual estavam destinados. Um desses tratados é o *The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment*, publicado a primeira vez em 1632, cuja autoria é de William Oughtred (1574-1660), um ministro anglicano inglês que se dedicava ao estudo das matemáticas e que aborda o manuseio e questões de uso de um instrumento composto de dois lados (frente e verso), nomeados como círculos de proporção e instrumento horizontal.

Neste capítulo, procura-se discursar acerca do cenário no qual esse instrumento estava inserido, indagando sobre os conhecimentos matemáticos que se relacionam com os círculos de proporção e as influências que o período percorreu, por meio do estudo do tratado. E, com isso, caracterizando um dos momentos da interface, denotado como o contexto no qual os conceitos matemáticos foram desenvolvidos (SAITO; DIAS, 2013a).

2.1 William Oughtred no contexto dos séculos XVI – XVII

Os séculos XVI e XVII representam um período de diversas mudanças para a Inglaterra. Durante o século XVI, no reinado de Henrique VIII, a coroa investiu “[...] na construção de fortificações, organização e expansão de sua marinha e, para isso, importou carpinteiros navais, profissionais com experiência em astronomia e fabricação de instrumentos matemáticos” (CASTILLO, 2016, p. 24). Com isso, a Inglaterra estava se moldando para um momento de valorização das artes mecânicas e das matemáticas, que viriam a auxiliar em diferentes segmentos, desde o comércio até as estratégias militares e políticas.

Nessa época, a ciência⁵ já estava passando por reformulações. O termo “ciência” não estava relacionado a investigações sobre matemática e as físicas naturais até meados do século

⁵ Saito (2015, p. 30) esclarece que “antes do século XIX ainda não existiam ‘cientistas’ e ‘matemáticos’ profissionais embora existisse um corpo de conhecimentos que possamos reconhecer como ‘ciência’ e ‘matemática’”. A matemática organizada e sistematizada, na qual se pode reconhecer em termos atuais só surgiu no século XIX.

XIX. Embora tenha sido usado para os estudos relacionados ao mundo natural, principalmente, para fins lucrativos (comércio, navegação etc.), o termo era alusivo ao desenvolvimento movido pelo interesse de manipular e controlar as propriedades do mundo natural, como forma de crescimento monetário (HARKNESS, 2007).

Com essa finalidade, uma das regiões que se destacou foi a cidade de Londres, que teve sua ascensão comercial atribuída também ao crescimento científico e a sua privilegiada localização em um importante cruzamento pelo Mar do Norte como se vê na figura 1.

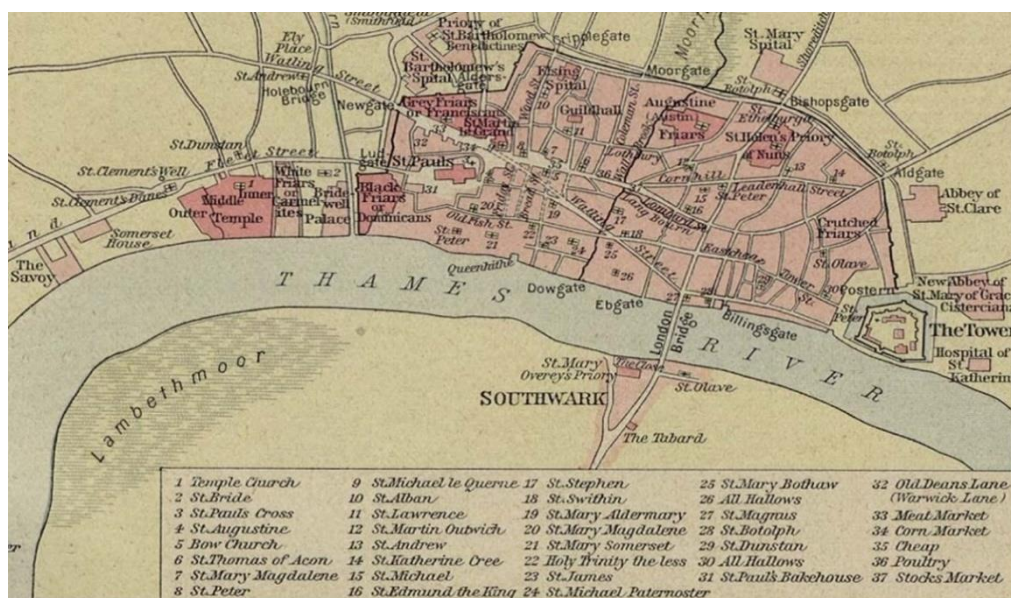
Figura 1 – Mapa Político da Europa, Reino Unido.



Fonte: Guia Geográfico (2018).

Londres está situada na região sudeste da Inglaterra, onde há uma conexão com o Mar do Norte. Quando o mar se aproxima da cidade, ele se torna o rio Tâmesa (figura 2), que passa por dentro da cidade londrina, inclusive próximo a regiões de comércio. É provável que a localização de Londres tenha influenciado para o seu rápido crescimento, já que logo passou de um pequeno centro urbano para a segunda maior cidade Europeia no século XVII (HARKNESS, 2007).

Figura 2 – Rio Tâmis, Londres, 1300.



Fonte: Tracy (2014).

Nessa perspectiva, o ambiente também estava se tornando favorável a uma mudança intelectual e cultural, já que muitos imigrantes chegavam com novas ideias de fabricação de instrumentos e aparatos mecânicos e o mercado passava a ser mais competitivo.

Em 1570, as matemáticas e suas aplicações se tornaram atrativas graças à publicação de uma edição em inglês de *Os Elementos de Euclides*, por Billingsley-Dee⁶. As décadas seguintes, de 1580 e 1590, foram marcadas pelos autores e os que ensinavam as matemáticas, que destacavam, cada vez mais, a potência dela para a solução de problemas e, assim, a alfabetização matemática passou a ser crucial para vários ramos comerciais (HARKNESS, 2007).

Foi, nesse contexto, que viveu William Oughtred (figura 3), um ministro anglicano que dedicou parte de sua vida a estudos relacionados às matemáticas. Ele nasceu em 5 de março de 1574, em Eton, uma cidade localizada no condado de Buckinghamshire, na Inglaterra e faleceu no dia 30 de junho de 1660, em Albury, no condado de Surrey, localizado a 50km de Londres. Aubrey (1898) o descreve como sendo um homem de estatura baixa, cabelos e olhos pretos, cuja mente estava sempre trabalhando.

⁶ Haberdasher Henry Billingsley (d. 1606) era um comerciante que decidiu dedicar seu tempo livre traduzindo *Os Elementos de Euclides* para o inglês. Seu colega e matemático, John Dee (1527-1608/9), escreveu o prefácio (HARKNESS, 2007).

Figura 3 – William Oughtred.



Fonte: Hopp (1999, p. 12).

A respeito de sua carreira acadêmica, aos 17 anos, ele foi admitido como aluno na King's College, em Londres, uma constituinte da Universidade de Cambridge, onde recebeu seu treinamento para o ingresso na Universidade. Mais tarde, ele se tornou membro da instituição aos seus 21 anos, ainda no reinado de Elizabeth⁷ (CAJORI, 1916).

Em 1596, William Oughtred recebeu o grau de Bacharel em Artes e, em 1600, o de Mestre em Artes. Sua passagem por Cambridge é descrita como um tempo em que os estudos matemáticos e suas aplicações foram negligenciados. Cajori (1916, p. 5)⁸ explica que

Alguma atenção foi dada aos matemáticos gregos, mas as obras de algebristas italianos, alemães e franceses da última parte do século XVI e início do século XVII eram completamente desconhecidas em Cambridge nos dias de Oughtred. Fazia parte de sua obra de vida como matemático fazer álgebra, como estava sendo desenvolvido em seu tempo, acessível aos jovens ingleses.

Muito provavelmente, tenha sido por influência de seus estudos, convívio social e costumes de sua época, que Oughtred tenha continuado a se dedicar a estudar as matemáticas, mesmo após sua saída da Universidade, com o intuito de ser um instrutor daquilo que ele mesmo chamava de Artes.

⁷ Vide O' Connor e Robertson (2017).

⁸ Em inglês, lê-se: Some attention was given to Greek mathematicians, but the works of Italian, German, and French algebraists of the latter part of the sixteenth and beginning of the seventeenth century were quite unknown at Cambridge in Oughtred's day. It was part of his life-work as a mathematician to make algebra, as it was being developed in his time, accessible to English youths (CAJORI, 1916, p. 5).

Em 1610, ele se tornou o reitor de uma paróquia em Albury, na qual ele dedicou 50 anos de sua vida sendo pastor. No entanto, enquanto devotava-se à religião, William Oughtred não desistiu de continuar a estudar e dedicava seu tempo livre às matemáticas, como fizera na faculdade.

2.2 Tratados, ensino e instrumentos no cenário do século XVII

William Oughtred escreveu e publicou diversas obras que tratavam dos conhecimentos matemáticos da época. Dentre elas, Cajori (1916) cita que três foram consideradas as mais importantes - *Clavis Mathematicae* (1631), que se tornou um influente guia para os estudos sobre álgebra; *Trigonometrie* (1657), conhecida por ser uma das primeiras obras da história da trigonometria; e *The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment* (1632, 1633), que englobou diversas temáticas práticas que envolviam as matemáticas agregadas ao manuseio de um instrumento. Esta última, sendo o foco desta pesquisa.

Suas obras eram bastante respeitadas e influenciaram os interessados em estudos com as matemáticas no período. Tanonaka (2008) e Cajori (1916) destacam, como algo marcante, a estrutura dos textos de autoria de Oughtred, que, de acordo com os autores, possuíam uma certa “lógica pedagógica”. Cajori (1916) complementa que Oughtred não deixou por escrito nenhuma explicação sistemática de sua visão a respeito do ensino das matemáticas. No entanto, ele tinha preocupações muito específicas sobre o assunto, que é possível de serem percebidas através do estudo de suas obras.

Oughtred (1694) supunha que os leitores iniciantes não tinham condições de compreender um texto com uma sucessão de conteúdos abstratos no estudo da álgebra e que, por isso, necessitavam de uma introdução prévia de certos conceitos. Portanto, há três itens que merecem destaque acerca do modo que Oughtred concebia o ensino de matemática e que caracterizavam a lógica pedagógica mencionada por Cajori (1916) e Tanonaka (2008): “[...] (1) um apelo ao olho através de simbolismo adequado; (2) ênfase no pensamento rigoroso; (3) o adiamento do uso de instrumentos matemáticos até depois que os fundamentos lógicos de um assunto tenham sido completamente dominados” (CAJORI, 1916, p. 84, tradução nossa)⁹.

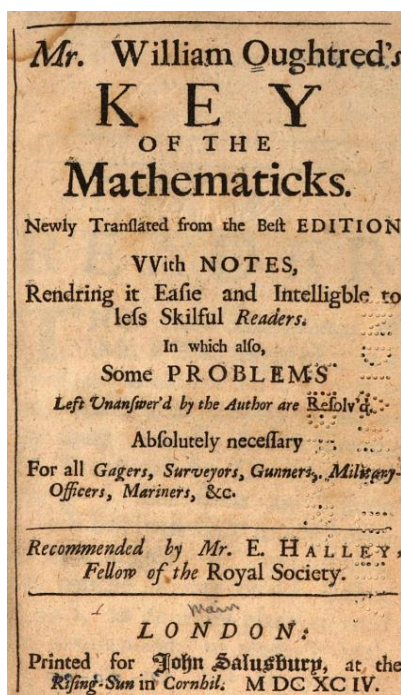
⁹ Em inglês, lê-se: “[...] (1) an appeal to the eye through suitable symbolism; (2) emphasis upon rigorous thinking; (3) the postponement of the use of mathematical instruments until after the logical foundations of a subject have been thoroughly mastered” (CAJORI, 1916, p. 84).

A respeito do ponto (1), Oughtred se refere à falta de símbolos matemáticos para a leitura da matemática. Ele defendia que os símbolos facilitariam a leitura das obras que tratavam das matemáticas, pois ele próprio “[...] experimentou intensamente o que muitos leitores modernos sentiram, a saber, que a ausência quase total de símbolos matemáticos torna desnecessariamente difícil ler seus escritos” (CAJORI, 1916, p. 85, tradução nossa).¹⁰

Como autor de livros, ele buscou contribuir para o desenvolvimento desses símbolos nas matemáticas. Uma das colaborações, que se pode enfatizar, foi a inserção de notações como “ :: ” para proporção e o “ x ” para multiplicação, em sua obra *Clavis Mathematicae*.

A obra foi publicada, inicialmente, em latim e continha em torno de 100 páginas. Era considerada como um fundamento para regras de aritmética e álgebra e, de acordo com Tanonaka (2008), foi elaborada para atender às necessidades do filho do Conde de Arundel, Lord William Howard. Posteriormente, por volta de 1647, foi publicada uma versão em inglês intitulada de *Key of Mathematicks*¹¹. A figura 4, a seguir, mostra a edição de 1694, de *Key of Mathematicks*.

Figura 4 – Frontispício de *Key of the Mathematicks*, edição de 1694.



Fonte: Oughtred (1694, frontispício).

¹⁰ Em inglês, lê-se: “[...] he experienced keenly what many modern readers have felt, namely, that the almost total absence of mathematical symbols renders their writings unnecessarily difficult to read” (CAJORI, 1916, p. 85).

¹¹ A versão desta obra na qual teve-se acesso é a edição de 1694, em inglês.

Com essa reformulação da escrita matemática, a confecção de livros poderia se tornar mais barata, visto que o espaço ocupado por texto contendo símbolos é menor do que pela matemática escrita por extenso. Dessa forma, Oughtred auxiliou, expressivamente, no estudo das matemáticas ao inserir tais símbolos, assim como na produção e publicação de obras.

Quanto ao ponto (2), a ênfase sobre o pensamento rigoroso de Oughtred sobre o ensino de matemática se relaciona, também, com o uso de símbolos. Cajori (1916, p. 87, tradução nossa)¹² destaca um trecho do prefácio de *Clavis Mathematicae*, no qual ele menciona que Oughtred explicita esse rigor matemático:

Que o Tratado não sendo escrito da maneira sintética usual, nem com expressões verbais, mas no modo inventivo de *Analitice*, e com símbolos ou notas em vez de palavras, parecia muito difícil para muitos; embora, na verdade, fosse apenas sua própria desconfiança, ficando assustado com a novidade da natureza; e não a qualquer dificuldade na coisa em si. Por essa maneira especiosa e simbólica, nem agride a memória com múltiplas palavras, nem cativa a fantasia de comparar e juntar as coisas; mas claramente apresenta aos olhos todo o curso e processo de toda operação e argumentação.

A utilização dos símbolos para Oughtred era o passo inicial para uma melhor compreensão das demonstrações dos teoremas. Nota-se que ele defendia e justificava que o uso de símbolos tornava as matemáticas de mais claro entendimento e que o uso desses símbolos, ainda, era um mistério, pois as pessoas não conheciam essa forma de escrever a matemática e, por isso, consideravam-na difícil.

Essa ênfase sobre o rigor, também, é encontrada na dedicatória¹³ de outra obra dele, a *The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment*, escrita por William Forster (fl.1632-1673):

Ele [Oughtred] respondeu que o verdadeiro caminho da Arte não é por instrumentos, mas pela demonstração: e que é um curso de professores vulgares, começar com os Instrumentos, e não com as Ciências, e então em vez de artistas, para fazer seus eruditos, somente praticantes de truques e, por assim dizer, malabaristas: a despeito da Arte, perda de tempo precioso e traição da inteligência disposta e diligente, até a ignorância e a ociosidade. Que o uso dos Instrumentos é de fato excelente, se um homem for um Artista: mas desprezível, sendo estabelecido e oposto à Arte. E, finalmente, que ele queria me recomendar a habilidade dos Instrumentos, mas

¹² Em inglês, lê-se: Which Treatise being not written in the usuall synthetical manner, nor with verbous expressions, but in the inventive way of *Analitice*, and with symboles or notes of things instead of words, seemed imto many very hard; though indeed it was but their owne diffidence, being scared by the newnesse of the dehvery; and not any difficulty in the thing it selfe. For this specious and symbohcall manner, neither racketh the memory with multipUcity of words, nor chargeth the phantasie with comparing and laying things together; but plainly presenteth to the eye the whole course and processe of every operation and argumentation (CAJORI, 1916, p. 87).

¹³ É importante destacar que todos os excertos traduzidos de Oughtred (1633) foram colocados em notas de rodapé em suas versões originais, incluindo erros de grafia, para não se perder a legitimidade.

primeiro ele gostaria que eu fosse bem instruído nas Ciências (OUGHTRED, 1633, dedicatória, tradução nossa).¹⁴

Ao ler essa passagem da obra de Oughtred, vê-se a ênfase que ele promovia a respeito das demonstrações matemáticas. Isso se relaciona, também, ao ponto (3), no qual ele era contra o adiamento do uso de instrumentos matemáticos antes que os fundamentos lógicos de um assunto tenham sido completamente dominados.

Oughtred criticava a utilização de instrumentos de calcular, antes de se conhecer a teoria. Para ele, os instrumentos só poderiam ser introduzidos, aos seus alunos ou a qualquer estudante interessado, quando eles tivessem uma base sólida de conhecimentos matemáticos, compreendidos através de demonstrações matemáticas.

Nisso, Richard Delamain (1600-1644)¹⁵, um aluno de Oughtred, discordava, pois argumentava que os instrumentos poderiam ser manuseados por estudantes iniciais. No entanto, para Oughtred, isso significava que “[...] Delamain já estava corrompido com os instrumentos, e completamente perdido de ser feito um Artista” (CAJORI, 1916, p. 89, tradução nossa)¹⁶.

Com essa sua postura, William Oughtred foi tutor de diversos interessados naquilo que ele chamava de arte, como William Forster (fl.1632-1673). A relação dele com Oughtred é explicitada quando ele menciona na dedicatória da obra de Oughtred “[...] estar no tempo das férias longas [em] 1630, no país, na casa do reverendo¹⁷ e meu mais digno amigo e professor, o Sr. William Oughtred (a cuja instrução eu devo minha iniciação e todo o progresso nessas Ciências” (OUGHTRED, 1633, dedicatória, tradução nossa).¹⁸

¹⁴ Em inglês, lê-se: He says that the true way of Art is not by Instruments, but by Demonstration: and that it is a preposterous course of vulgar Teachers, to begin with Instruments, and not with the Sciences, and so in-stead of Artists, to make their Scholars only doers of tricks, and as it were luglers: to the despite of Art, losse of previous time, and betraying of willing and industrious wits, vnto ignorance, and idlenesse. That the vse of Instruments is indeed excellent, if a man be an Artist: but contemptible, being set and opposed to Art. And lastly, that he meant to commend to me, the skill of Instruments, but first he would haue me well instructed in the Sciences (OUGHTRED, 1633, dedicatorie).

¹⁵ Richard Delamain foi estudioso das matemáticas, tendo sido auxiliado por Oughtred. Ele também foi um marceneiro, sendo esse um dos negócios ao qual se dedicava comercialmente (O’CONNOR; ROBERTSON, 2012a; CAJORI, 1920).

¹⁶ Em inglês lê-se: “[...] Delamain was already corrupted with during upon Instruments, and quite lost from ever being made an Artist” (CAJORI, 1916, p. 89).

¹⁷ Segundo Cajori (1916), era comum que William Oughtred recebesse seus alunos em sua casa, para com ele morar um tempo, enquanto ele os instruía com seus conhecimentos sobre as matemáticas.

¹⁸ O trecho citado é da obra *The Circles of Proportion* de Oughtred, no qual a dedicatória foi escrita por William Forster, aluno de Oughtred.

Em inglês lê-se: “[...] being in the time of the long vacation 1630, in the country, at the houfe of the reverend, and mt moft worthy friend, and teacher, Mr. William Oughtred (to whome inftruction I owe both my initiation, and whole progreffe in thefe Sciences)” (OUGHTRED, 1633, dedicatorie).

Assim como William Oughtred, os tutores de matemáticas, autores de obras e fabricantes de instrumentos respondiam às necessidades da clientela na cidade de Londres, que estava se desenvolvendo. Os londrinos acreditavam, cada vez mais, que sem as matemáticas, “[...] nenhuma soma pode ser continuada por muito tempo, nenhuma barganha sem ela pode ser devidamente encerrada, nenhum negócio que o homem tenha completado justamente” (HARKNESS, 2007, p. 98, tradução nossa)¹⁹. Por isso, durante o reinado de Elizabeth, Londres foi o centro do ensino sobre as matemáticas, assim como também da produção de instrumentos e publicações de tratados.

Considerava-se o estudo das matemáticas como essencial para as trocas e o comércio e, nesse período, as universidades passaram a se dedicar na melhoria da instrução em matemática (O’ CONNOR; ROBERTSON, 2000). Porém, não eram o único local que disseminavam a aprendizagem de assuntos matemáticos. Havia tutores particulares que se ocupavam em ensinar as matemáticas práticas e, na publicação de tratados, anunciavam suas habilidades nesse quesito, como foi o caso da obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (1614), de John Napier (1550-1617), cuja tradução do latim para o inglês ocorreu em apenas 2 anos e tratava de estudos dos logaritmos.

A expansão das vendas dos instrumentos promovia, também, a noção da alfabetização em matemática prática e instrumental. Com isso, ficava, cada vez mais, evidente que o conhecimento matemático e o comércio andavam de mãos dadas em Londres nesse período.

William Oughtred, por exemplo, embora tenha publicado diversas obras com temas variados, em sua aparição nos tradicionais textos históricos, como os estudos de Cajori (1916, 1920), mostra que ele se tornou conhecido por um de seus instrumentos matemáticos²⁰, a régua de cálculo logarítmica.

Mesmo que essas obras se relacionassem a uma temática bastante cobiçada na época, ele não tinha interesse em publicá-las, já que não queria se tornar famoso por tal (CAJORI, 1916). Assim, por exemplo, *The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment*, que contém os seus círculos de proporção e o instrumento horizontal, foi manuscrita por volta de 1622, mas só foi a público em 1632, quando seu aluno William Forste, pediu permissão para publicá-la (ALVES; PEREIRA, 2018a).

¹⁹ Em inglês lê-se: “[...] no tale can be long continued, no bargaining without it can be duly ended, nor no business that man has justly completed” (HARKNESS, 2007, p. 98).

²⁰ Aqui, refere-se a instrumentos matemáticos como aqueles que foram “[...] concebidos para medir aquilo que Aristóteles denominava “quantidades” (distâncias e ângulos)” (SAITO, 2015, p. 187).

Esse destaque às obras que tratavam de instrumentos, muito se deve ao interesse de homens e mulheres que buscavam ampliar ou melhorar seus negócios. Com as matemáticas sendo essenciais para o desenvolvimento comercial de Londres, torna-se claro o atrativo por esses instrumentos, principalmente, quando as matemáticas eram atreladas a eles que, “[...] requeriam algum conhecimento de matemática, incluindo navegação, agrimensura, engenharia, arquitetura, balística, carpintaria e alvenaria [...]” (HARKNESS, 2007, p. 98, tradução nossa)²¹.

Isso esclarece os motivos pelo qual Londres optou por parar de importar profissionais com experiências nessas “ciências” e na fabricação de instrumentos e passou a investir na formação nas matemáticas e na construção própria. Assim, Londres se destacou por se tornar um centro de fabricação de instrumentos, que variavam desde itens populares àqueles que eram destinados a ricos comerciantes e aristocratas.

Havia instrumentos fabricados com materiais caros e destinados aos ricos londrinos e grandes nomes. Existiam outros que estavam ao alcance da classe média, como os astrolábios, quadrantes e outros dispositivos que eram utilizados para medir e mapear os céus (HARKNESS, 2007). Pode-se dizer que esses instrumentos, dependendo do material de fabricação e da finalidade, eram acessíveis a qualquer cidadão.

Através desse entusiasmo que se instaurou em Londres, pela produção e comercialização desses instrumentos, “[...] os londrinos começaram a formar comunidades reconhecíveis de profissionais especialistas durante a era de Elizabeth, e sucessivas gerações dessas comunidades, continuaram a fornecer recursos e a moldar o estudo da natureza até o século XVII” (HARKNESS, 2007, p. 12)²². Assim, nesse período, Londres estava marcada pelo crescimento comercial e intelectual, que trilhavam caminhos paralelos.

No entanto, a alfabetização matemática não era aceita por todos. Algumas pessoas pensavam nos cálculos como mágica, principalmente, quando eram utilizados na astrologia. Havia outros que defendiam a ideia de que as matemáticas eram a linguagem de Deus e, portanto, era divina e não se poderia pensar nela por meio de aparatos mecânicos (HARKNESS, 2007).

²¹ Em inglês, lê-se: “[...] required some knowledge of mathematics, including navigation, surveying, engineering, architecture, ballistics, carpentry, and masonry [...]” (HARKNESS, 2007, p. 98).

²² Em inglês, lê-se: “Londoners began to form recognizable communities of expert practitioners during the age of Elizabeth, and successive generations of these communities continued to provide resources and to shape the study of nature well into the seventeenth century” (HARKNESS, 2007, p. 12).

Leonard Digges²³, por exemplo, escreveu que as matemáticas tinham uma finalidade espiritual. Harkness (2007, p. 100, tradução nossa)²⁴ diz que, para Digges, ajudaria a honrar a Deus, o matemático estudioso, engenhoso, bem experiente, que [...] “recebe diariamente em suas práticas espirituosas uma alegria de espírito mais agradável do que seus bens (o quanto eles podem ser ricos) a qualquer momento”.

O âmbito religioso, acerca das matemáticas, também se destacava, ao passo que muitos consideravam ser possível a absolvição de alguma culpa vinculada ao dinheiro e à prosperidade, se toda a riqueza fosse contemplada matematicamente.

2.3 O tratado *The Circles Of Proportion and the Horizontal Instrvment* (1633): alguns aspectos contextuais

O tratado de Oughtred (1633) atendia à demanda londrina, como se pode notar no frontispício da obra. Nele, é possível ver (figura 5) uma descrição sobre os conteúdos que estão no documento, em que Oughtred (1633, frontispício, tradução nossa)²⁵ descreve:

A primeira [parte da obra] mostrando a maneira de trabalhar proporções ambas simples e compostas: e a pronta e fácil resolução tanto na Aritmética, Geometria & Astronomia. E foi recentemente aumentado com uma adição para Navegação. Todas as regras que também podem ser feitas com a caneta pela Aritmética, e a Regra dos Triângulos. O posterior ensinamento [é] como trabalhar a maioria das questões, que podem ser realizadas pelo Globo: e delinear medidas em qualquer tipo de planície.

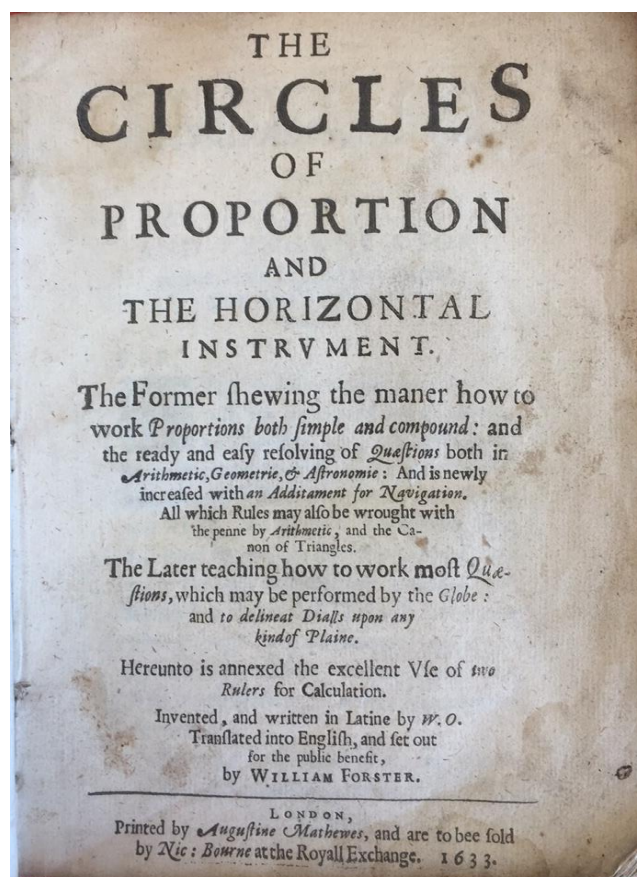
Na leitura do frontispício, nota-se que a obra apresenta uma organização, sendo dividida em duas partes. Tomando como base essa primeira apresentação do conteúdo, compreende-se que *The Circles of Proportion* poderia ser utilizada para auxiliar em diversos segmentos de saber, como aqueles que Harkness (2007) cita – a saber: os navegantes, os agrimensores, os arquitetos, os carpinteiros e todos que necessitassem utilizar do conhecimento matemático de modo prático, já que se constituía como um tipo de livro que estava em destaque no período, por conter um instrumento e seu manuseio atrelado ao conhecimento das matemáticas.

²³ Leonard Digges (1520 - 1559) foi um matemático inglês do século XVI (CASTILLO, 2016).

²⁴ Em inglês, lê-se: “[...] ”receives daily in his witty practices more pleasant joy of mind, than your goods (how rich so ever they be) can at any time purchase” (HARKNESS, 2007, p. 100).

²⁵ Em inglês, lê-se: The former fhewing the maner how to work Proportions both fimple and compound: and the ready and eafy refolving of Quaestions both in Arithmetick, Geometrie, & Aftronomie: And is newly increafed with na Additament for Navigation. All which Rules may also be wrought with the penne by Artitkmetie, and the Canon of Triangles. The later teaching how to work moft quaestions, which may be performed by the Globe: and to delineat Dialls upon any kind of plaine (OUGHTRED, 1633, frontispiece).

Figura 5 – Frontispício de *The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment*, 1633.



Fonte: Oughtred (1633, frontispício).

Apesar de sua obra abranger tais aspectos requisitados na época, Oughtred não publicou sua obra de imediato, pois dizia não ter criado o instrumento para se tornar famoso e, por isso, não fez a publicação de um tratado que versasse sobre ele e seu uso, como era comum naquele período. Seu único intuito era direcionar o texto e o instrumento para auxiliar os seus aprendizes (CAJORI, 1916).

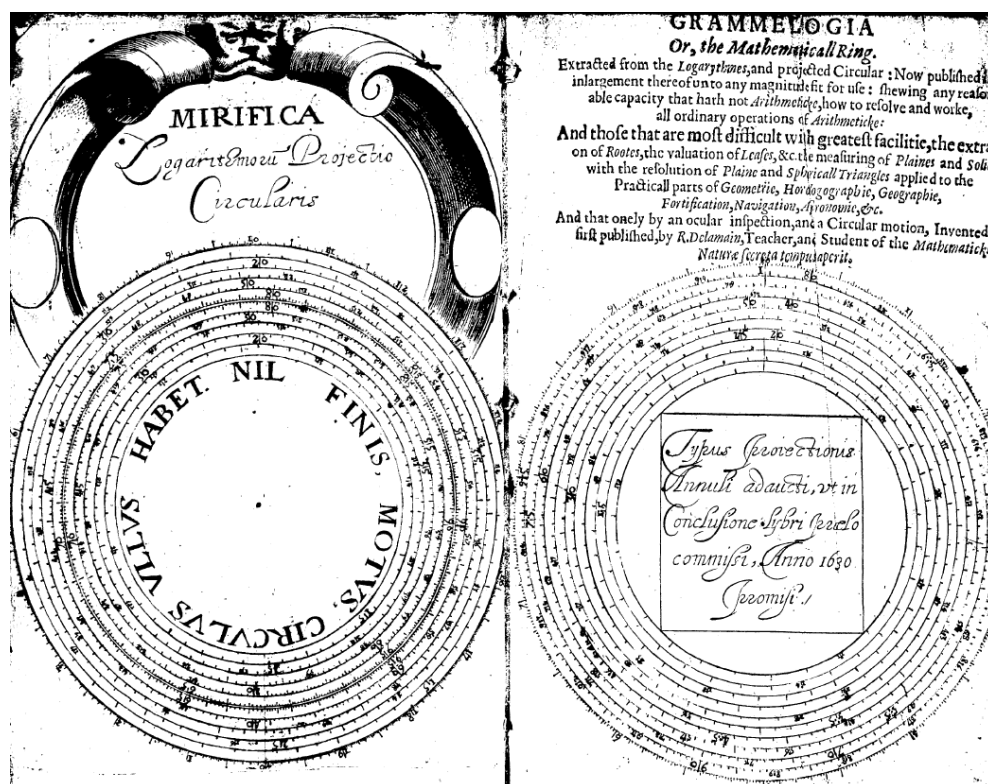
Essa posição de Oughtred, sobre as publicações de seus textos, não se detém somente à *The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment* (figura 5). De acordo com Cajori (1916), quando ele tinha 23 anos, escreveu o *Easy way of Delineating Sun – Dials by Geometry* (Maneira fácil de descrever relógios de sol por meio da Geometria), que só foi publicada meio século depois, na primeira edição, em inglês, de *Clavis Mathematicae*, em 1647. Outro exemplo aconteceu em 1600, quando Oughtred escreveu sobre a construção de um relógio de sol em um plano de qualquer inclinação, mas que, também, só foi publicada por volta de 1632.

Devido à postura de Oughtred de não publicar seus textos, ocorreu um embate entre ele e um de seus alunos, Richard Delamain. Delamain publicou a descrição de um instrumento de

cálculo circular por volta de 1630, na capital londrina, em um panfleto com 32 páginas, intitulado: *Grammelogia IV* ou Anel de Matemática (PEREIRA, 2015) (figura 6). A partir disso, gerou-se um conflito sobre quem havia inventado, primeiramente, as réguas do tipo circular, em Londres.

Ao observar as páginas de título de *Grammelogia IV* (figura 6), é possível perceber um desenho de um instrumento circular que Delamain descreve e demonstra o uso na obra. Por sua vez, o tratado de Oughtred, que também apresentava uma imagem de um instrumento circular, só foi publicado em 1632. Dessa forma, ocorreu uma disputa sobre o inventor das réguas do tipo circulares.

Figura 6 – As duas páginas de título da edição de *Grammelogia IV* de Richard Delamain.



Fonte: Delamain (1630?, frontispício)²⁶.

Apesar de Delamain ter publicado seu tratado primeiro, Oughtred já havia manuscrito, em 1622, um texto em latim que tratava justamente sobre o seu instrumento, que ele chamou

²⁶ Cajori (1920) explica que *Grammelogia IV* não tem data de publicação explícita. No entanto, há escrito, em latim: *Typus projectionis Annuli adaucti vt in Conclufione Lybri praelo commiffi, Anno 1630 promifi* (Tipo de anel de projeção impresso junto de acordo com C. L. ano 1630 da promessa), que possivelmente indica o ano de publicação.

de “[...] *círculos de proporção*” (OUGHTRED, 1633, p. 1, tradução nossa)²⁷. Então, movido pela justiça de levar ao público a obra de seu tutor, William Forster, com autorização de Oughtred, publicou esse manuscrito cerca de 10 anos depois, em 1632. Em seguida, por volta de 1633, Forster traduziu para o inglês o tratado cujo título se tornou: *The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment* e o veiculou em nome de William Oughtred.

Embora a historiografia tradicional queira destacar o precursor das réguas de cálculo circular, sabe-se que, provavelmente, apesar das divergências pessoais, ambos tenham trabalhado de forma independente em seus instrumentos, embora tenham acusado um ao outro sobre o roubo de ideias durante muitos anos (CAJORI, 1916, 1920).

Ao publicar o tratado de Oughtred (1633), William Forster incluiu, logo após o frontispício, uma epístola dedicatória para quem ele tributou ao cavaleiro Sir Kenelm Digby²⁸ (1603-1665), um diplomata e cortesão inglês, que também era um filósofo natural. Nessa dedicatória,

[...] Forster menciona uma conversa com Oughtred, na qual ele questiona ao seu professor a respeito da importância dos instrumentos para os estudos, citando inclusive a régua de Gunter, um instrumento projetado por Edmund Gunter (1581-1626) que tratava de escalas logarítmicas (ALVES; PEREIRA, 2018a, p. 97).

Foi a partir desse questionamento de Forster, que William Oughtred faz menção a primeira vez sobre o seu instrumento círculos de proporção ao seu aprendiz, descrevendo-o como “[...] linhas lançadas em um círculo ou anel, com outro círculo móvel sobre ele” (OUGHTRED, 1633, dedicatória, tradução nossa)²⁹. Forster complementa dizendo que Oughtred o (1633, dedicatória, tradução nossa)³⁰

[...] mostrou muitas notas, e regras para o uso desses círculos, e de seu instrumento horizontal (que ele havia projetado cerca de 30 anos antes), a maioria das partes escritas em Latim. Tudo o que obtive dele levei a traduzir em inglês, e fazer público, para o uso, e benefício dos estudiosos, e amantes destas excelentes ciências.

Nota-se que ele cita dois instrumentos, os círculos de proporção e o instrumento horizontal. Ambos estão dispostos, ao que parece, em um mesmo instrumento com duas faces distintas, no qual Oughtred apresenta, em sua obra, que um lado contém os círculos de

²⁷ Em inglês, lê-se: “[...] circles of proportion” (OUGHTRED, 1633, p. 1).

²⁸ Sir Kenelm Digby (1603-1665), cortesão inglês, foi um filósofo, diplomata e cientista do reinado de Charles I (ENCYCLOPAEDIA BRITANNICA, 2018).

²⁹ Em inglês, lê-se: “[...] lines caft into a circle or ring, with another moveable circle vpon it” (OUGHTRED, 1633, dedicatorie).

³⁰ Em inglês, lê-se: “[...] fhewed me many notes, and Rules for the vfe of thofe circles, and of his Horizontall Infrument, (which he had proieEted about 30 yeares before) the moft partt written in Latine. All which I obtained of him leaue to tranflate into Englifh (OUGHTRED, 1633, dedicatorie).

proporção e, do outro, o instrumento horizontal. Esse duplo instrumento também faz parte da organização do texto de sua obra, pois o documento de Oughtred está dividido em duas partes, sendo cada uma referente a um lado do instrumento.

A partir dessa revelação, Forster trouxe, para benefício público, o tratado de Oughtred (1633), que continha o objetivo de apresentar o instrumento matemático circular, composto de dois lados (frente e verso) e o seu uso, através de vários tópicos matemáticos contidos na obra.

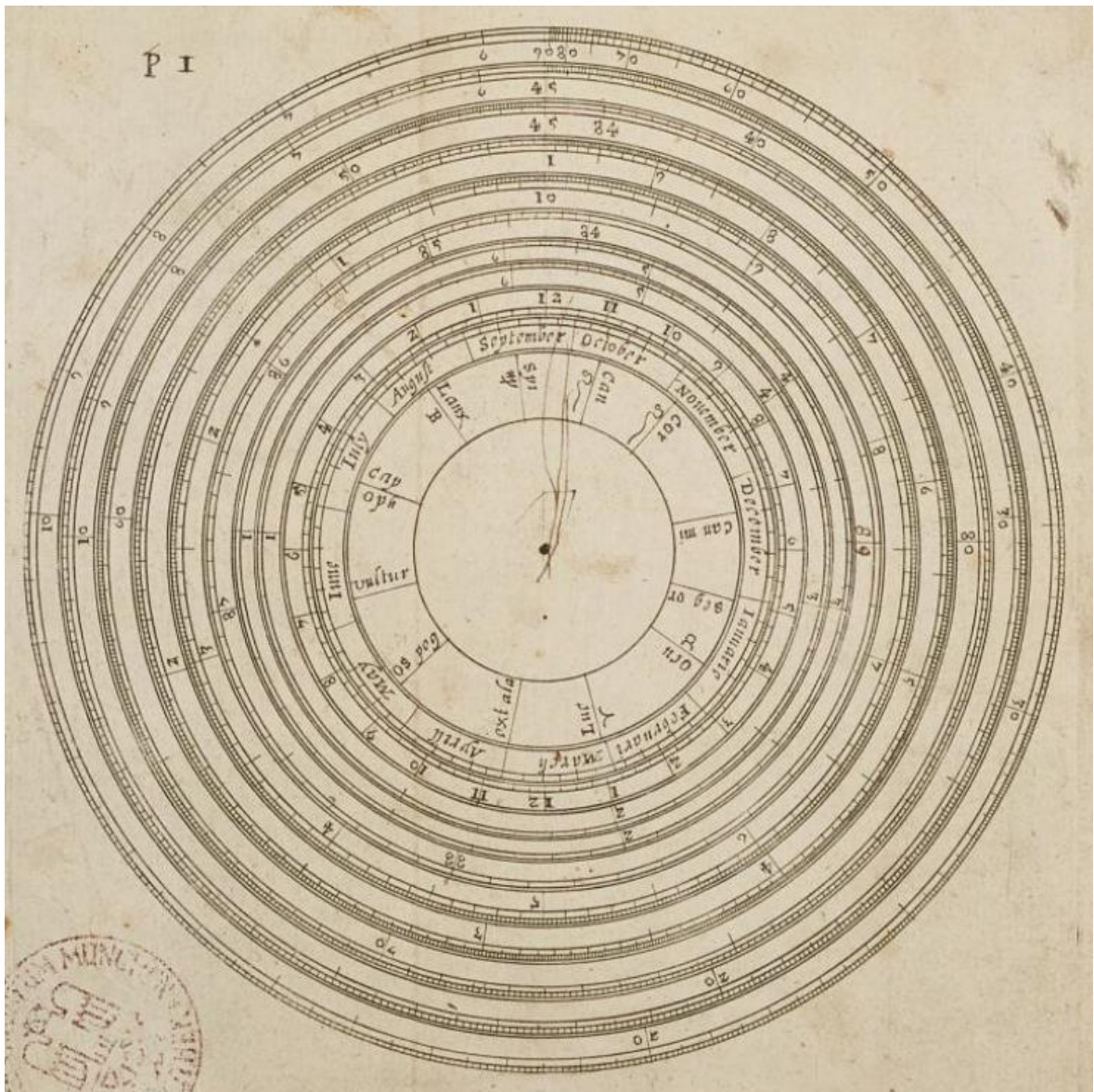
Esse tipo de texto, como menciona Castillo (2016), era comum naquela época e tinha uma característica bem específica de conter sobre a construção do instrumento e sobre o seu uso. Apesar da obra de Oughtred (1633) não conter a fabricação dos círculos de proporção, ela fornece uma descrição de todas as partes e escalas do instrumento.

2.3.1 Características gerais da obra e sua relação com os círculos de proporção

A primeira parte do tratado inicia com uma imagem dos círculos de proporção (figura 7), com um rápido texto informativo, em que Oughtred (1633, p. 1, tradução nossa)³¹ apresenta aos leitores que a obra “[...] mostra o uso *do primeiro lado* do instrumento, para o trabalho de proporções simples e compostas, e para a pronta e fácil resolução de questões tanto na Aritmética, Geometria e Astronomia, por cálculo”. Esse primeiro lado, o qual Oughtred se refere, trata de estudos matemáticos relacionados aos seus círculos de proporção e está dividido em 14 capítulos, como o próprio autor chama e que daremos ênfase nesta pesquisa.

³¹ Em inglês, lê-se: “[...] shewinf the vfe of the *Firft fide* of the infrument, for the working of Proportions both fimple and compounded, and for the ready ande afie refolving of queftions both in Arithmetique, Geometrie, and Afronomie, by Calculation” (OUGHTRED, 1633, p. 01).

Figura 7 – Círculos de proporção (1633).



Fonte: Oughtred (1633, p. P1).

Já na segunda parte, Oughtred (1633, p. 113, tradução nossa)³² segue o mesmo padrão, mostrando aos leitores o seu instrumento horizontal e explicando que “[...] inclui o uso do segundo lado do instrumento, para o trabalho da maioria das questões que podem ser realizadas pelo Globo, e a declinação de medições, em qualquer tipo de planície”. Nessa segunda parte do documento, o leitor pode conhecer o instrumento horizontal apenas com uma imagem disposta

³² Em inglês, lê-se: “the use of the second fise of the instrument, for the working of moft questions, which may be performed by the Globe: and the declination of Dyals, vpon any kinde of Plaine” (OUGHTRED, 1633, p. 113).

no início e se destina a questões relativas ao Globo, sendo listadas em 30 tópicos de um único capítulo.

A partir dessas observações iniciais, a organização revela temas específicos, em que cada capítulo é destinado a um conteúdo, sempre associando ao uso do instrumento. Para uma melhor visualização dessa organização, a seguir, tem-se a relação dos capítulos da primeira parte do livro, listados no quadro 1.

Quadro 1 – Descrição dos capítulos da primeira parte do livro *The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment* (1633).

	CAPÍTULO	CONTEÚDO
	Da descrição e uso dos círculos neste primeiro lado	Descrição e exemplos de uso
Aritmética	Da operação da regra da proporção e também da multiplicação e divisão	2 teoremas e 10 tópicos
	Agora seguem alguns exemplos de Proporção	2 teoremas e 6 exemplos
	De proporção contínua ou de progressão geométrica	17 tópicos com exemplos
	Da quadratura e cubagem de números, lados ou raízes: e da extração do quadrado, e do lado cúbico, ou raiz fora dos números, ou potências dadas	5 tópicos com exemplos
	Da proporção duplicada e triplicada e primeiro da proporção duplicada	2 teoremas com exemplos
	Sobre a medição de círculos, cones, cilindros e esferas	19 tópicos com exemplos
Geometria	Sobre as medidas planas e sólidas	16 tópicos com exemplos
	Sobre a medição ou aferição de vasos	8 tópicos com exemplos
	Sobre a comparação de diversos metais em quantidade e peso	8 tópicos com exemplos
	Sobre o ordenamento de soldados em qualquer tipo de forma retangular de batalhão	10 tópicos com exemplos
	Uma coleção das mais necessárias operações astronômicas	50 tópicos com exemplos; 2 seções extras.
Astronomia		
Trigonometria	De Trigonometria ou as maneiras de calcular ambos os triângulos plano e esférico. E primeiro sobre certas noções gerais e regras necessárias lá.	Texto corrido de considerações sobre os triângulos no plano com 8 exemplos e considerações sobre triângulos esféricos com 18 exemplos
	dos Nocturnos	Considerações sobre o Noturno para medições de tempo

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Percebe-se, pelo quadro 1, que a organização dos capítulos se associa a uma divisão de assuntos de Aritmética, Geometria, Astronomia e Trigonometria. Embora essa organização não esteja descrita na obra, ao fazer a leitura dos títulos de cada capítulo, observa-se essa disposição.

Nota-se, também, que, em todos esses capítulos, há exemplos que são relativos aos teoremas e aos tópicos propostos. Isso demonstra a necessidade que William Oughtred tinha de sempre deixar claro o conteúdo matemático exposto por meio de exemplos práticos, de modo que pudesse auxiliar o leitor. No entanto, ele não gostava de ser repetitivo e explicava, em exemplos limitados, aquilo que queria repassar aos seus leitores. Essa característica dele é vista em vários capítulos da obra, quando ele mesmo cita não ser necessário continuar a aconselhar para não repetir (OUGHTRED, 1633).

E assim, a respeito das operações de Proporção, Multiplicação e Divisão, pensei em me encontrar para aconselhar menos daqui em diante Multiplicando, ou Dividindo, ou buscando uma quarta proporcional, [pois] somos obrigados a repassar as mesmas coisas muitas vezes (OUGHTRED, 1633, p. 7, tradução nossa)³³.

Compreendendo essa ideia de Oughtred, pode-se pensar nos motivos de os capítulos apresentarem uma sequência que demonstra uma ordem progressiva de conteúdo. Assim, o leitor deveria acompanhar o estudo da obra desde o seu capítulo inicial para compreender os seguintes, pois Oughtred não repetiria uma explanação já citada anteriormente. Essa preocupação dele, também, aparece em seu *Clavis Mathematicae*, que foi construído segundo essa sequência. Dessa forma, em ambas as obras, os capítulos iniciais mostram assuntos introdutórios, enquanto os demais apresentam aplicações desses.

A disposição dos capítulos começa com a apresentação de um dos lados do instrumento, em que ele faz uma descrição das partes dos círculos de proporção. Apesar de escrever um tratado com a utilização de um instrumento, Oughtred destaca, logo na dedicatória do tratado, que o verdadeiro caminho para se aprender matemática, era por meio de demonstrações e que o “[...] uso dos instrumentos é de fato excelente, se um homem for um Artista: mas desprezível, sendo estabelecido e oposto à Arte” (OUGHTRED, 1633, dedicatória, tradução nossa).³⁴

³³ Em inglês, lê-se: And thus much concerning the operation of Proportion, Multiplication, and Division, I thought meete to admonifh, leaft hereafter in Multiplying, or Diviging, or feeking out a fourth proportional, wee be constrained to repearte the fame things many times over (OUGHTRED, 1633, p. 7).

³⁴ Em inglês, lê-se: “That the vse of Instruments is indeed excellent, if a man be an Artist: but contemptible, being set and opposed to Art” (OUGHTRED, 1633, dedicatorie).

Nessa perspectiva, o instrumento, para ele, não serviria para matemática, mas apenas para facilitar cálculos quando se já tinha uma base matemática sólida³⁵, ou seja, na visão de Oughtred (1633), o manuseio do instrumento deveria ser precedido de um estudo teórico das matemáticas.

Esse pensamento a respeito dos instrumentos, provavelmente, explica a forma como ele o descreve em seu tratado. Oughtred (1633) detalha, de maneira direta, cada círculo, conforme é apresentado no capítulo 3 deste estudo, sem exemplificar a natureza matemática de cada um, pois, para ele, o instrumento era algo utilizado para otimizar cálculos e que não poderia ser usado no ensino matemática. Então, é provável que ele supunha, que todos aqueles, que tivessem acesso a utilizar os círculos de proporção, sabiam ou, pelo menos, deveriam saber, dos conhecimentos matemáticos necessários ao seu uso³⁶.

Na descrição dos círculos de proporção, Oughtred (1633) apresenta as partes denotadas de braço antecedente e braço consequente, que são dois indicadores utilizados para a realização de cálculos, sugerindo somente um exemplo de uso para que o leitor se familiarize com a mecânica do instrumento. A respeito do manuseio do instrumento, o capítulo, a seguir, detalha sobre os indicadores, os círculos e as possíveis formas de manipulação.

É observável, na obra, que, nos capítulos iniciais, Oughtred (1633), ao sugerir os teoremas e ao exemplificá-los, relaciona-os ao uso do instrumento como é ilustrado no excerto a seguir:

Qualquer fração dada pode ser reduzida a partes decimais nestas condições. Defina o braço antecedente do indicador no Denominador da Fração dada, no quarto círculo, e o braço consequente no Numerador, [e] mantendo a mesma distância, coloque o braço antecedente em 1, e o braço consequente mostrará as partes decimais (OUGHTRED, 1633, p. 8, tradução nossa)³⁷.

No exemplo citado, Oughtred (1633) ensina a posicionar os indicadores do instrumento e, conseqüentemente, o modo de obter a redução da fração em partes decimais. No entanto, essa ação permanece somente nos capítulos iniciais, remetendo-nos a não repetição de explicações. Percebe-se que o descrito, no excerto anterior, não contém as razões matemáticas pelas quais o

³⁵ Aqui, quis se referenciar como *base teórica* os conteúdos de matemática que serão suporte para os assuntos aplicados.

³⁶ Quer-se referir, aqui, ao conhecimento matemático relativo à prática de manipular o instrumento e não os conteúdos que poderiam ser calculados com base no instrumento.

³⁷ Em inglês, lê-se: Any Fraction given may be reduced into Decimal parts, thus. Set the Antecedent arme of the Index at the Denominator of the Fraction given, in the fourth circle, and the Consequent arme at the Numerator, then keeping the same distance, bring the Antecedent arme unto 1, and the consequent arme will shew the *decimal part*” (OUGHTRED, 1633, p. 8).

procedimento relativo à manipulação dos indicadores do instrumento produz o resultado correto.

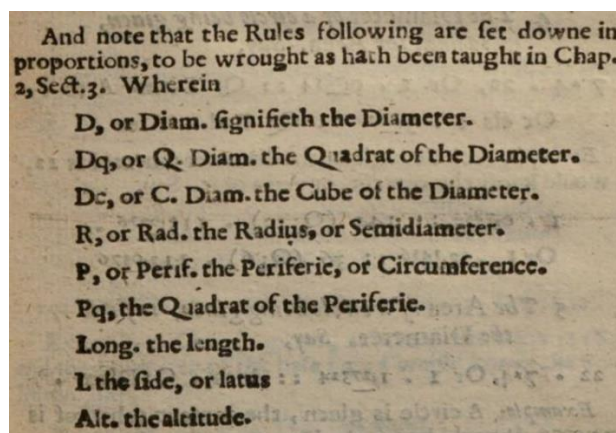
Algumas hipóteses podem ser ditas para explicar os motivos de Oughtred ter agido assim em seu tratado, dentre elas, o próprio tamanho da obra, que, naturalmente, é reduzida, evitando essas repetições. Além disso, o manuseio do instrumento era ensinado oralmente e não havia necessidade de estender o texto com essas explicações.

É provável que isso esteja relacionado, também, à sua lógica pedagógica, citada por Cajori (1916) e Tanonaka (2008), explicada na sessão anterior, que teria finalidade de ensinar algo com essa perspectiva. Por fim, é possível dizer que isso, também, pode estar relacionado ao seu ponto de vista sobre o uso de instrumentos e que, por essa razão, seu texto apresenta mais uma ênfase nos conteúdos teóricos do que nos círculos de proporção em si, já que o próprio autor menciona que os cálculos podem ser realizados à mão.

2.3.2 *As notações em The Circles of Proportion: um salto para as matemáticas dos séculos XVI – XVII*

Outra característica que se destaca no tratado de Oughtred (1633) e que reflete sua lógica pedagógica são os símbolos. O capítulo que trata de medidas geométricas, como os círculos, cones, cilindros e esferas, por exemplo, inicia com uma lista de abreviações (figura 8), que é utilizada durante todo o capítulo.

Figura 8 – Lista de abreviações utilizadas no capítulo VII.



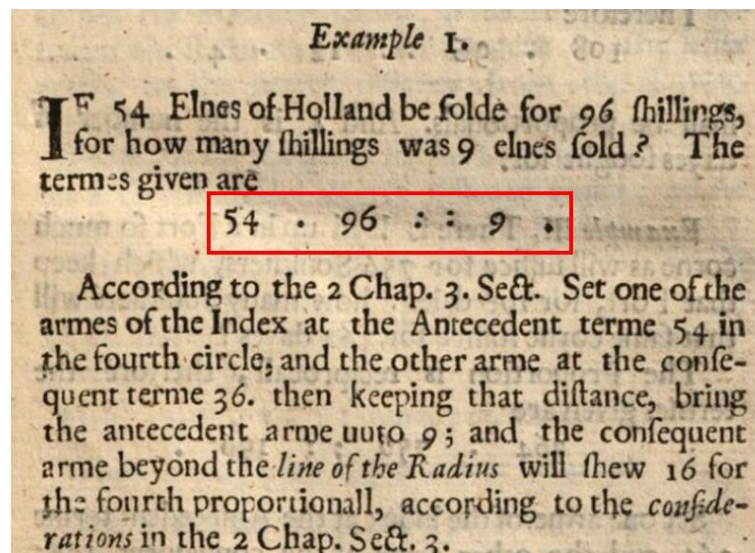
Fonte: Oughtred (1633, p. 37)³⁸.

³⁸ E note que as Regras seguintes são estabelecidas em proporções, para serem trabalhadas como foi ensinado no capítulo 2, seção 3. Onde D, ou Diam, significa o Diâmetro. Dq, ou Q.Diam, o Quadrado do Diâmetro. Dc, ou C.

A figura 8 apresenta símbolos que Oughtred (1633) lista para abreviar alguns termos, como diâmetro, raio, altura etc. e que seriam necessários no decorrer daquele capítulo. Além desses, o uso de símbolos é percebido durante todo o tratado, o que remete ao próprio desejo de William Oughtred de reformular a escrita matemática, substituindo a escrita por extenso por símbolos que facilitassem a leitura (CAJORI, 1916).

Notações como “ :: ” para denotar a proporção, também, são mencionadas em Oughtred (1633) (figura 9). Embora tenha sido utilizada em *Clavis Mathematicae*, publicado em 1631, leva-se a crer que essas notações tenham sido primeiro utilizadas no manuscrito de *The Cirles of Proportion*, de 1622.

Figura 9 – Folha inicial do capítulo III.



Fonte: Oughtred (1633, p. 09).

Percebe-se, na figura 9, um exemplo de símbolos usados por William Oughtred para proporção, no qual ele descreve o cálculo, que seria equivalente à notação algébrica atual, dada por:

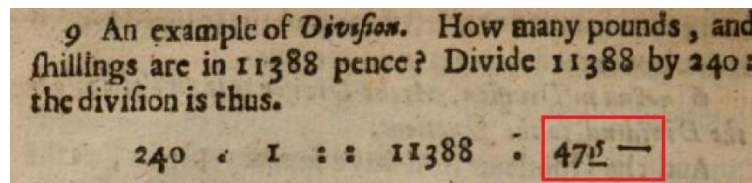
$$\frac{54}{9} = \frac{96}{x} \quad (1)$$

Diam, o Cubo do Diâmetro. R, ou Rad, o Raio, ou Semi-diâmetro. P, ou Perif, a Periferia, ou Circunferência. Pq, o Quadrado da Periferia. Long, o Comprimento. L, o lado ou *latus* Alt, a altitude (OUGHTRED, 1633, p. 37, tradução nossa).

Em que x é a representação atual de um valor que se deseja encontrar. Nessa perspectiva, atenta-se, ainda, ao fato de que Oughtred (1633) não se utiliza de nenhum símbolo para denotar esses valores que ele precisa calcular, como hoje, que se atribui às incógnitas.

Há, também, outro símbolo que Oughtred (1633) utiliza durante todo seu tratado, para se referir à parte decimal dos números, como mostra a figura 10. Essa notação destacada, refere-se, atualmente, à vírgula colocada nos números para a demarcação da parte inteira e decimal. O traçado nos remete ao símbolo moderno para a divisão, sendo uma barra lateral e outra inferior, que é colocada no correspondente à parte decimal. Nesse caso, em termos atuais, Oughtred (1633) se refere ao número 47,5.

Figura 10 – Item 9 do capítulo II – um exemplo de divisão.



Fonte: Oughtred (1633, p. 8)³⁹.

Essa notação, que o autor utiliza, é explicada por ele em seu *Clavis Mathematicae*, em que “[...] as partes decimais levam sua denominação do lugar de seu último número, como 0^{ls} são cinco décimos, 0^{56} são cinquenta e seis centésimos e assim por diante” (OUGHTRED, 1694, p. 3)⁴⁰. Em outras de suas obras, “Oughtred escreveu 0.56 dessa maneira 0^{56} ; o ponto ele usou para designar a razão” (CAJORI, 1916, p. 21)⁴¹.

Na figura 9, vê-se, ainda, que ele já apresenta os valores de todo os cálculos, no qual 47,5 seria a resposta encontrada. Com isso, em notações algébricas atuais, seus dados correspondem a:

$$\frac{240}{11388} = \frac{1}{47,5} \quad (2)$$

Destaca-se, aqui, outra característica da obra de Oughtred (1633), que é o arredondamento de casas decimais. Nos dados acima (2), o valor da proporção que ele cita,

³⁹ “9 Um exemplo de *divisão*. Quantas libras e xelins estão em 11388 centavos? Divida 11388 por 240; a divisão é assim. 240. 1 : : 11388. 47,5” (OUGHTRED, 1633, p. 8, tradução nossa).

⁴⁰ Em inglês, lê-se: “[...] decimal parts take their denomination from the place of their laft Figure, as 0^{ls} are five tenths, 0^{56} are fifty fix hundredths, and fo onwards.” (OUGHTRED, 1694, p. 3).

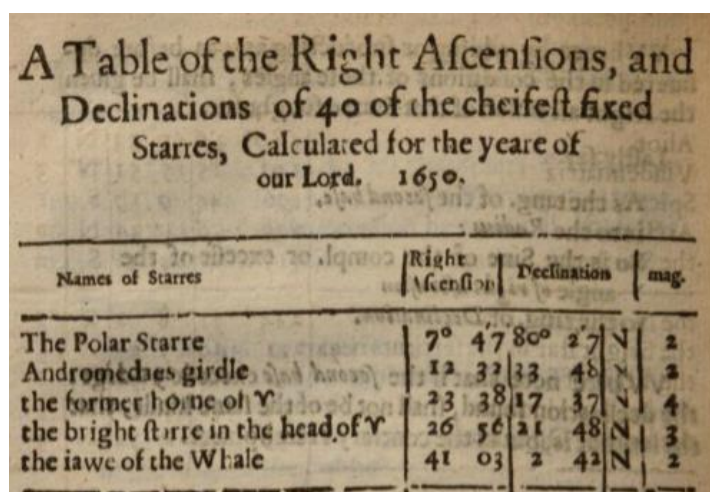
⁴¹ Em inglês, lê-se: “Oughtred wrote 0.56 in this manner 0^{56} ; the point he used to designate ratio.” (CAJORI, 1916, p. 21).

como 47,5, na verdade, corresponde a 47,45. Assim, ele faz a opção por utilizar somente uma casa decimal e, com isso, fez o arredondamento.

É importante mencionar que Oughtred (1633) contém outras várias notações da época. No entanto, para o desenvolvimento deste estudo, limitou-se apenas à utilização de alguns capítulos da obra e, conseqüentemente, às notações que serão necessárias ao entendimento do manuseio do instrumento.

Além das bases teóricas já citadas, o tratado traz aplicações práticas das matemáticas, como o estudo sobre metais diversos, organização de soldados para batalha e uma coletânea de operações astronômicas. Nessa última, Oughtred (1633) afirma serem operações básicas necessárias aos estudos sobre astronomia e apresenta 50 itens que ele considera como essenciais para esse tipo de estudo, anexado a uma tabela com a ascensão e declinação de algumas estrelas (figura 11).

Figura 11 – Tabela da correta ascensão e declinação de 40 das principais estrelas.



Names of Starres	Right Ascension	Declination	mag.
The Polar Starre	7° 47 80° 27	N	2
Andromedæs girdle	12 32 33 48	N	2
the former horne of γ	23 38 17 37	N	4
the bright starre in the head of γ	26 56 21 48	N	3
the iawe of the Whale	41 03 2 42	N	2

Fonte: Oughtred (1633, p. 86).

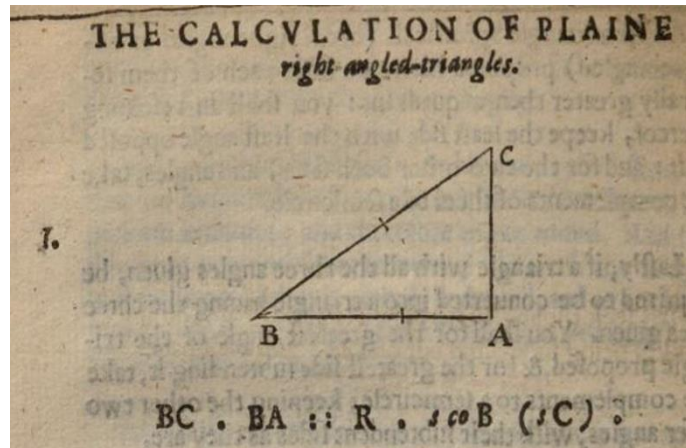
O título da tabela, ilustrada na figura 11, revela que ela contém sobre 40 astros. Optou-se por mostrar apenas uma parte da tabela, como forma de ilustrar, já que não é objetivo do estudo adentrar nesse capítulo de Oughtred (1633).

A primeira parte da obra é finalizada com um capítulo dedicado ao estudo de triângulos planos e esféricos e um capítulo sobre outro instrumento, denotado como Noturno⁴². Sobre o

⁴² NoEturnall Dials (OUGHTRED, 1633, p. 108).

estudo de triângulos, Oughtred (1633) se preocupa em incluir ilustrações (figura 12) associadas às regras por ele apresentadas.

Figura 12 – Primeira ilustração para o cálculo de triângulos retângulos planos.



Fonte: Oughtred (1633, p. 98).

É interessante observar que Oughtred (1633, p. 95, tradução nossa)⁴³ descreve a figura como um “[...] triângulo retângulo, é mais expresso com as letras ABC; assim que BA seja a base, e CA o cateto, e BC a hipotenusa”. Além disso, Oughtred (1633, p. 96, tradução nossa)⁴⁴ também afirma que

[...] algumas magnitudes são desmembradas várias vezes; Como sBA , que é o seno da base; $scoBC$ que é o seno do complemento da hipotenusa; tB que é a tangente do ângulo ABC , na base; $tcoABC$ que é a tangente do complemento do ângulo no cateto.

A partir da explicação acima, ele escreve a seguinte expressão, conforme apresentado na figura 11:

$$BC . BA :: R . scoB (sC) \quad (3)$$

As notações representam: $\overline{BC}$ é a hipotenusa, $\overline{BA}$ um dos lados do triângulo, $scoB$ do seno do complemento do ângulo $C\hat{B}A$, sC é o seno do ângulo $B\hat{C}A$ e R é o raio ou semidiâmetro.

A partir de (3), pode-se escrever:

⁴³ Em inglês, lê-se: “[...] rectangled triangle, is moft fitly noted with the letters ABC; fo that BA may be the Bafe, and CA the Cathetus, and BC the Hypotenufa; and B the angle at the bafe, and C the angle at the Cathetus, and A the right angle” (OUGHTRED, 1633, 95).

⁴⁴ Em inglês, lê-se: “[...] fome magnitudes are taken feuerally and apart; as sBA , that is the Sine of the Base; $sCOBC$, that is the sine of the complement of the Hypotenuse; tB , that is the tangent of the angle abc , at the bafe; $tcoC$, or $tcoABC$, the tangent of the complement of the angle at the cathetus” (OUGHTRED, 1633, p. 96).

$$BC . BA :: R . scoB \quad (4)$$

$$BC . BA :: R . sC \quad (5)$$

O parêntese apresentado parece significar uma opção de substituição e não uma multiplicação, como é em notação atual. Utilizando os conhecimentos proposto por Oughtred (1633), tem-se de (4) e (5)

$$\frac{BC}{R} = \frac{BA}{sC} \quad (6)$$

e

$$\frac{BC}{R} = \frac{BA}{scoB} \quad (7)$$

Assim, $sC = scoB$.

Para compreender a equação citada por Oughtred (1633), tomando as notações algébricas atuais e o raio igual a 1, tem-se que, em um triângulo retângulo, conforme figura 11, a soma dos ângulos internos vale 180° e um dos ângulos mede 90° .

Logo, Oughtred (1633, p. 95, tradução nossa), ao descrever o triângulo, diz: “[...] b o ângulo da base, e c o ângulo do cateto, e a o ângulo reto”, ou seja, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ e $\hat{A} = 90^\circ$. Com isso, as seguintes relações podem ser escritas, segundo Iezzi (2004):

$$\sin \hat{C} = \cos \hat{B} = \frac{c}{a} = \frac{\text{cateto oposto a } \hat{C}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \hat{C} = \sin \hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto adjacente a } \hat{C}}{\text{hipotenusa}}$$

No entanto, Oughtred (1633), também, associa $sC = scoB$, ou seja, que o seno do ângulo $\hat{C}$ é igual ao seno do complemento de $\hat{B}$. Novamente, tomando as notações algébricas atuais, tem-se que dois ângulos são complementares quando a soma deles for igual a 90° . Assim, no exemplo de Oughtred (1633), como $\hat{A} = 90^\circ$, então decorre que $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$.

A partir dessas informações, de (6)

$$\frac{\text{hipotenusa}}{1} = \frac{\text{cateto oposto a } \hat{C}}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \frac{\sin \hat{C}}{1} = \frac{\text{cateto oposto a } \hat{C}}{\text{hipotenusa}} \quad (8)$$

e, de (7)

$$\frac{\text{hipotenusa}}{1} = \frac{\text{cateto oposto } \hat{C}}{\text{seno do compl. de } \hat{C}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\text{seno do compl. de } \hat{C}}{1} = \frac{\text{cateto oposto } \hat{C}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow$$

Como o *complemento de* $\hat{C} = (90^\circ - \hat{C}) = \hat{B}$, então:

$$\Rightarrow \frac{\sin(90 - \hat{C})}{1} = \frac{\text{cateto oposto } \hat{C}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cos \hat{B}}{1} = \frac{\text{cateto oposto } \hat{C}}{\text{hipotenusa}} \quad (9)$$

Daí, $\sin \hat{C} = \cos \hat{B}$, conforme Oughtred (1633) e Iezzi (2004).

Embora as notações algébricas modernas sejam semelhantes às que Oughtred (1633) utilizava, não se pode afirmar que, por causa disso, tenham se formalizado tais conceitos, visto que a construção de conhecimentos matemáticos permeia uma rede de processos muito maior do que a criação de uma única pessoa (SAITO, 2015).

Apesar de não ser possível tratar de toda a obra neste estudo, percebe-se que o documento contém sobre muitos conhecimentos matemáticos, o que leva a se pensar em sua vasta utilidade no período de sua publicação, tanto para necessidades práticas diárias, quanto educacionais e comerciais. Afirma-se, então, que *The Circles of Proportion* (1633) se constituiu como uma obra ampla, que pôde atender a diversas ocupações da época e, com isso, promover o estudo das matemáticas.

Neste capítulo, o foco foi o cenário no qual o instrumento e a obra de William Oughtred estavam imersos. Para isso, fez-se um estudo do documento e se buscou conhecer os aspectos contextuais que influenciaram alguns processos de construção dos conhecimentos matemáticos contidos nos círculos de proporção. Para um estudo mais específico, o capítulo seguinte trata acerca do instrumento de William Oughtred, os círculos de proporção, no qual é detalhado a respeito de suas características físicas e matemáticas.

3 DO TRATADO AO INSTRUMENTO: OS CÍRCULOS DE PROPORÇÃO DE WILLIAM OUGHTRED

Os instrumentos, concebidos em virtude da necessidade por novos métodos matemáticos e experimentais, “[...] entraram em uso para facilitar a resolução de problemas matemáticos e investigar a natureza por meios de recursos observacionais e experimentais” (SAITO, 2015, p. 187). Para estudos classificatórios, esses instrumentos passaram por diversas categorias, que se estabeleceram ao longo dos anos, de acordo com suas funções e finalidades. Dentre essas categorias, estão os denotados instrumentos matemáticos⁴⁵.

Um desses instrumentos são os círculos de proporção de William Oughtred (1574-1660), que foram desenvolvidos na transição dos séculos XVI e XVII e exerceram importantes contribuições para as matemáticas. Desse modo, esse capítulo discorre sobre o instrumento contido no tratado *The Circles of Proportion* (1633), agora dando ênfase ao instrumento em seus aspectos físicos e matemáticos, assim como as questões contextuais que perpassaram o período no qual ele foi concebido.

3.1 Os círculos de proporção: características físicas

Os círculos de proporção (figura 13), de William Oughtred, são descritos, em sua obra, como tendo diversos “[...] tipos de círculos, divididos depois de várias maneiras, junto com um *indicador* a ser aberto depois, à maneira de um par de compassos” (OUGHTRED, 1633, p. 1-2, tradução nossa)⁴⁶. Essas divisões, que o autor menciona, são oito círculos graduados de formas distintas. O par de compassos é referente a dois indicadores, que Oughtred (1633) chama de braço antecedente e braço consequente (figura 13).

É importante mencionar que, embora Oughtred cite dois indicadores, a obra apresenta imagem de apenas um (figura 14), contido no instrumento horizontal, conforme é apresentado no decorrer do capítulo. Desse modo, ao se pensar em dois indicadores nos círculos de proporção, sua forma só pôde ser conhecida por peças encontradas em museus, como no

⁴⁵ Para conhecer mais a respeito das categorias dos instrumentos, vide Van Helden e Hawkins (1994); Taub (2009); Warner (1990).

⁴⁶ Em inglês, lê-se: “[...] there are divers kindes of Circles, divided after many feveral waies together with an *Index* to be opened after the manner of a paire of Compaffes” (OUGHTRED, 1633, p. 1-2).

*National Museum of Scotland*⁴⁷ e no *Collection of Historical Scientific Instruments*⁴⁸, e em livros a respeito da história das régulas de cálculo, como o *Slide Rules: Their History, Models, and Makers* (1999), de Peter M. Hopp, que traz uma imagem, embora desenhada, que possibilitou a visualizar seu formato e suas características.

Figura 13 – Círculos de proporção (1650).



Fonte: National Museum of Scotland (2019).

⁴⁷ Para conhecer sobre a coleção do museu de Scotland, acesse: <<https://www.nms.ac.uk/national-museum-of-scotland/>>.

⁴⁸ Para conhecer sobre a coleção de instrumentos históricos da Universidade de Harvard, acesse: <<https://chsi.harvard.edu/>>.

Ao todo, o instrumento possui oito círculos graduados da seguinte forma: quatro são destinados para as tangentes, dois para senos, um para o que o autor chama de números desiguais e um para o que o autor chama de números iguais (OUGHTRED, 1633).

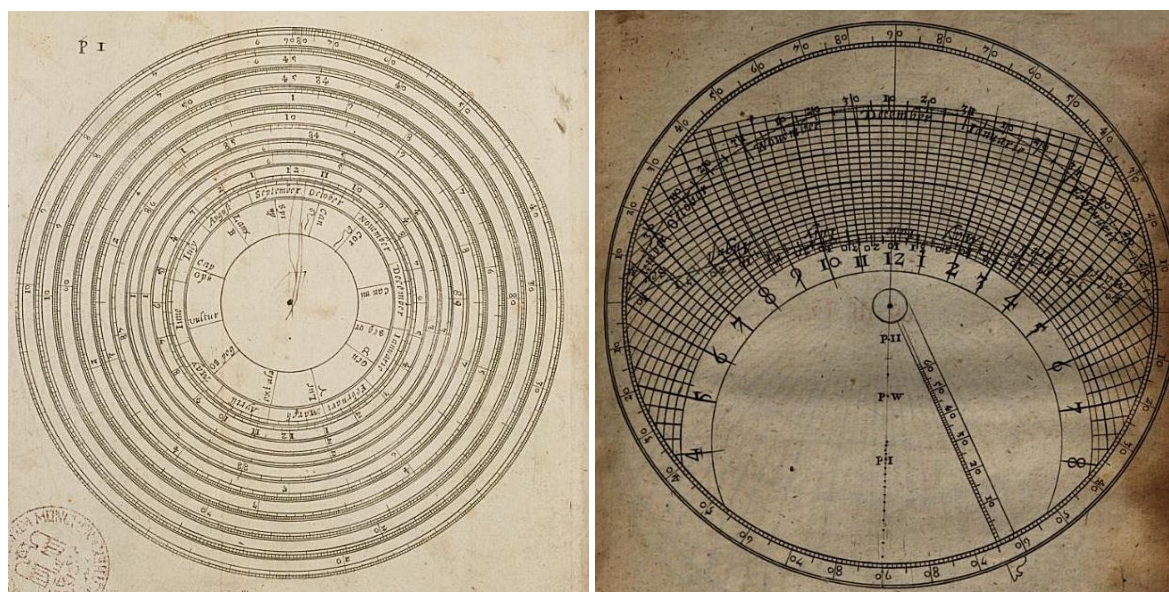
O capítulo inicial, de *The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment* (1633), detalha a descrição do instrumento de Oughtred. No entanto, o autor não explica como proceder para realizar tais divisões e escalas, ou seja, o tratado não traz instrução sobre a construção do instrumento, ele apenas o descreve.

Era comum, nesse período, que os tratados articulassem a construção e o uso de instrumentos. Assim, tais obras eram destinadas a um público que tinha conhecimentos matemáticos, tanto contidos nos instrumentos, quanto nas práticas de seus ofícios (SAITO; DIAS, 2012). Desse modo, os autores desses tratados não se preocupavam com os detalhes matemáticos, pois isso já era conhecido pelo público ao qual a obra estava direcionada.

Isso pode, então, justificar os motivos pelo qual Oughtred (1633) não apresenta os procedimentos matemáticos para a construção de cada círculo e de suas escalas. Como explicam Saito e Dias (2012), os instrumentos, em si, contêm conhecimento matemático de modo implícito e revelam uma associação entre o saber e o fazer.

Oughtred (1633) inicia a descrição explicando que o instrumento possui dois lados (frente e verso), como já apresentado no capítulo 2 deste trabalho. Na figura 14, observa-se, à esquerda, o instrumento horizontal e, à direita, os círculos de proporção.

Figura 14 – Os círculos de proporção e o instrumento horizontal.



Fonte: Oughtred (1633, p. P1, P195).

Ele descreve os círculos de proporção, detalhando-os a partir do círculo mais externo. É interessante destacar que a apresentação dos círculos, em sua obra, não é sequencial, ou seja, ele não explica do primeiro ao oitavo em ordem crescente/decrescente.

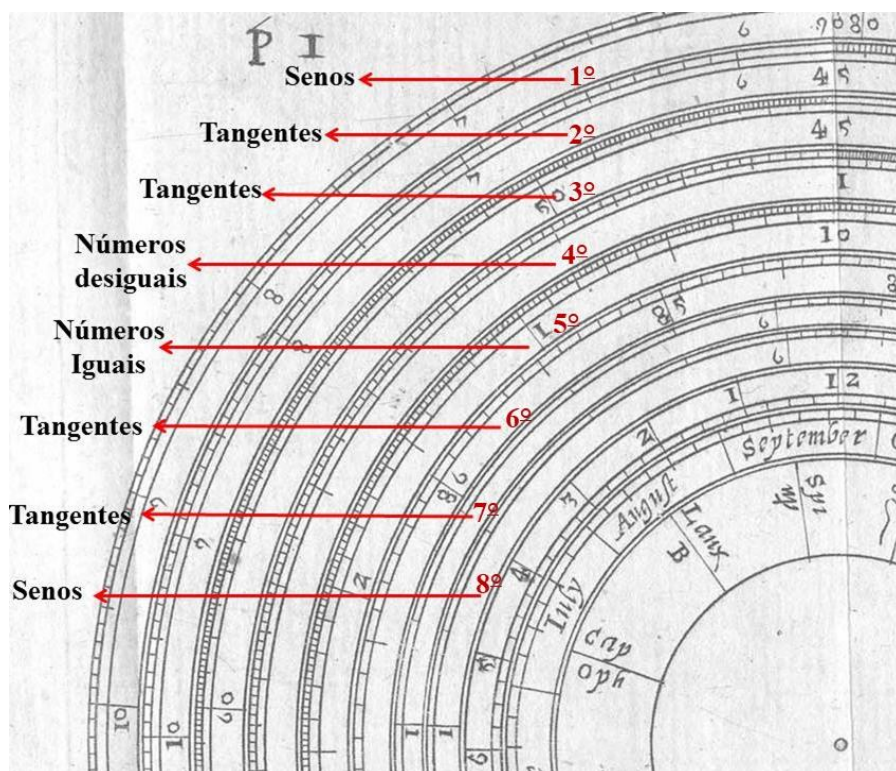
O modo como Oughtred (1633) ilustra para o leitor o instrumento, provavelmente, deve-se à ordem de importância e utilização das escalas, assim, ele inicia explanando sobre os círculos que contêm as escalas de tangente e seno, pois são os que possuem os valores a serem operados. Em seguida, ele trata dos círculos restantes, os de números iguais e desiguais, pois são, a partir deles, que os cálculos com os demais círculos são realizados.

Esse detalhamento, a respeito das oito escalas graduadas presentes no instrumento, é aprofundado na seção 3.1.1 a seguir, na qual é descrito, em detalhes, cada um dos círculos, seguindo a obra de Oughtred (1633). Do mesmo modo que William Oughtred se valeu de uma não ordenação para explicar seu instrumento, aqui, visando que o leitor possa compreender melhor, também não é exposto de forma sequencial, apoiando-se do mesmo encadeamento que Oughtred (1633) empregou. A partir do conhecimento a respeito das escalas, a seção 3.1.2 apresenta o par de indicadores que o instrumento contém e que, com base neles, é realizado o manuseio dos círculos de proporção.

3.1.1 As escalas

Para que seja facilitada a visualização das escalas mencionadas, a seguir, o leitor pode acompanhá-las através da figura 15, que apresenta uma ampliação da imagem do instrumento contido na obra, com as referências de cada um dos círculos.

Figura 15 – Escalas dos círculos de proporção.



Fonte: Oughtred (1633, p. P1).

Sobre o primeiro círculo de senos (mais externo, 1º círculo), Oughtred (1633, p. 2, tradução nossa)⁴⁹ diz se tratar de

[...] *senos* de 5 graus [e] quase 45 minutos, até 90. Cada grau até 30 é dividido em 12 partes, cada [uma delas] de 5 minutos; a partir daí até 50 [graus] em partes fixas que são [de] 10 minutos: o pedaço de lá até 75 graus em duas partes, que são 30 minutos. Depois disso, até 85 graus, ele não é dividido.

É conveniente destacar uma característica na graduação de escalas, citada por Oughtred (1633), nesse círculo. Observe que, nele, os senos partem de, aproximadamente, $5^{\circ}45'$ e chegam até 90° , conforme cita Oughtred (1633). Também, no oitavo círculo (figura 15, 8º círculo), que “[...] é de *senos* de aproximadamente 35 minutos até 6 graus (OUGHTRED, 1633, p. 2, tradução nossa)⁵⁰, o autor apresenta ao que parece um complemento para o primeiro círculo.

⁴⁹ Em inglês, lê-se: “[...] *Sines*, from 5 degrees 45 minuts almoft, vntill 90. Every degree till 30 is divided into 12 parts, each part being 5 min: from thence vntill 50 deg: into fixe parts which are 10 min: a peece: from thence vntill 75 degrees into two parts which are 30 minutes a peece. After that vnto 85 deg: they are not divided” (OUGHTRED, 1633, p. 2).

⁵⁰ Em inglês, lê-se: “[...] *Sines*, from about 35 minutes til 6 degrees” (OUGHTRED, 1633, p. 2).

A partir dessa apresentação, percebe-se a necessidade de haver dois círculos destinados aos senos. Uma hipótese, para isso, é levantada no sentido de que as demarcações muito aproximadas não eram possíveis de serem realizadas. Note, pela descrição dos dois círculos de seno, que o oitavo círculo é um complemento do primeiro. Ainda assim, ele inicia em 35' e essa é a mais precisa aproximação que Oughtred (1633) fornece.

Quanto ao segundo, terceiro, sexto e sétimo círculos, Oughtred (1633, p. 2, tradução nossa)⁵¹ explica que correspondem a:

O *segundo círculo* é de *tangentes*, de 5 graus e 45 minutos aproximadamente, até 45 graus. Cada grau sendo dividido em 12 partes, que são de 5 minutos o pedaço.
O *terceiro círculo* é de *tangentes*, de 45 graus até 84 graus e 15 minutos. Cada grau sendo dividido em 12 partes, que são de 5 minutos o pedaço.
O *sexto círculo* é de *tangentes* de 84 graus até aproximadamente 89 graus e 25 minutos.
O *sétimo círculo* é de *tangentes* de aproximadamente 35 minutos até 6 graus.

Percebe-se, através da explicação de Oughtred (1633), que o mesmo caso que ocorre com a graduação dos ângulos nos círculos de senos, também ocorre com os das tangentes, ou seja, há a necessidade de mais de um círculo para graduar todos os valores correspondentes às tangentes.

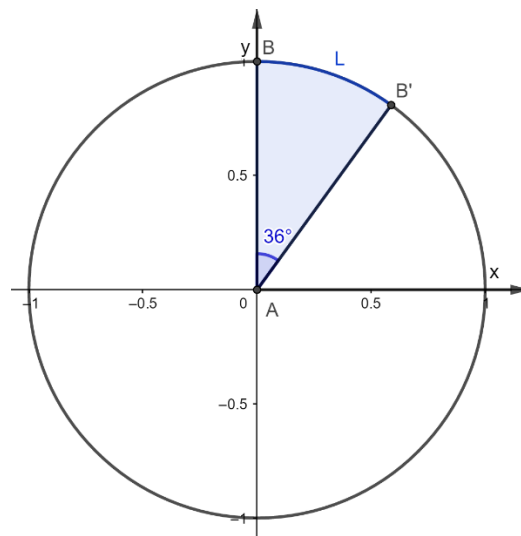
Nesse caso, os valores que correspondem aos graus das tangentes são dispostos em quatro círculos que se complementam, de acordo com o detalhamento feito por Oughtred (1633). Porém, assim como nos círculos de senos, ele faz uma aproximação de valores a serem graduados nos correspondentes aos da tangente, de modo que parece ser o mais preciso e possível de demarcar no instrumento, partindo de 35' até 89° 25'.

Até aqui, as descrições dos círculos se detêm somente nos valores que neles estão dispostos. Oughtred (1633) não explica, matematicamente, a construção do instrumento, ou seja, ele não evidencia como foram feitas essas graduações nas escalas, nem como foram escolhidos os pontos para demarcar as graduações.

O quinto círculo Oughtred (1633) chama de *Equall numbers* (números iguais). Essa nomenclatura parece se relacionar à distribuição dos valores nas escalas do instrumento. Para que o leitor possa compreender melhor, acompanhe pela figura 16 a seguir.

⁵¹ Em inglês, lê-se: The *second circle* is of *tangents*, from 5 degrees 45 min: almoft, until 45 degrees. Every degree being divided into 12 parts which are 5 min: a peece. The *third circle* is of *tangents*, from 45 degrees until 84 degrees 15 minutes. Each degree being divided into 12 parts, which are 5 min: a peece. The *sixt circle* is of *tangents* from 84 degrees till about 89 degrees 25 minutes. The *seventh circle* is of *tangents* from about 35 min: till 6 degrees (OUGHTRED, 1633, p. 2).

Figura 16 – Representação do comprimento do arco $\widehat{BB'}$.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Em termos algébricos atuais, considera-se uma circunferência de centro A (figura 16) e um ângulo central $B\hat{A}B'$, sendo B e B' as extremidades do arco e pontos pertencentes à circunferência (IEZZI, 2004). A partir de dois raios traçados, $\overline{AB}$ e $\overline{AB'}$, forma-se o ângulo central $B\hat{A}B'$, que corresponde a um certo comprimento L .

À vista disso, quando Oughtred (1633) denota os valores do quinto círculo como sendo números iguais, ele quer dizer que, a cada dois pontos adjacentes (B e B'), o comprimento do arco formado por eles é igual, ou seja, o ângulo é sempre o mesmo.

Desse modo, como se tem dez pontos (0 a 9) e a circunferência possui 360° , o ângulo, entre cada dois pontos adjacentes representados, corresponde sempre a 36° . Por exemplo, tomando os pontos pertencentes à circunferência $B = 0, B' = 1$, um terceiro ponto $C = 2, D = 3, \dots, I = 8, J = 9$, tem-se que os ângulos $B\hat{A}B' = B'\hat{A}C = C\hat{A}D = \dots = I\hat{A}J = 36^\circ$.

Além disso, de acordo com Oughtred (1633), esse quinto círculo é utilizado para multiplicar e dividir as distâncias dos valores, conforme o necessário e que, sem isso, ele é raro de qualquer uso.

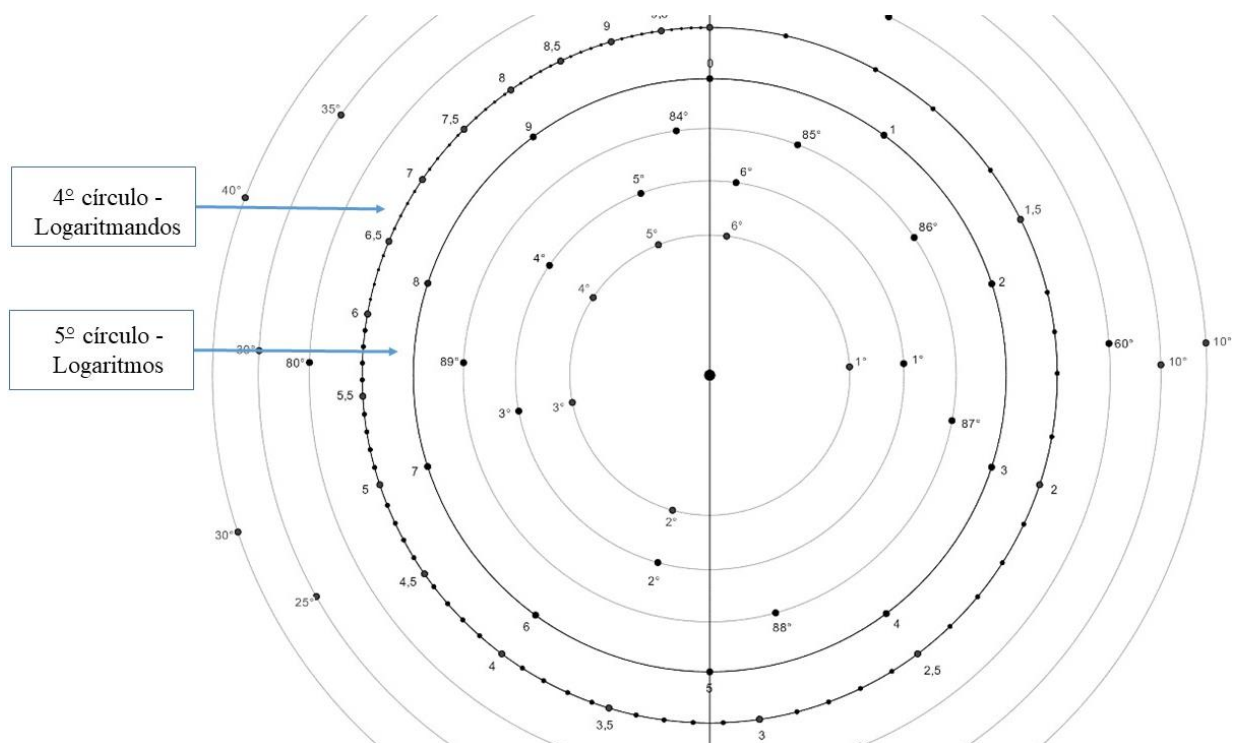
No quarto círculo, os valores mostram o que o autor denota por números desiguais, como se vê no excerto a seguir:

O quarto círculo é de *Números Desiguais*, que são anotados com os números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1. Quer você os compreenda como números únicos, dezenas, centenas ou

milhares, etc. E cada espaço dos números até 5, é dividido em 100 partes, mas depois de 5 até 1, em 50 partes (OUGHTRED, 1633, p. 2, tradução nossa).⁵²

Essa forma de nomenclatura dos valores da escala tem uma razão de ser. A princípio, pode-se pensar nesse nome em contraste ao quinto círculo, que contém os números iguais e do qual se falou anteriormente, já que, nesse quarto círculo, não há um comprimento igual em todos os arcos formados pelos valores graduados. Observando a figura 17 e acompanhando sua descrição, os valores, no quarto círculo, correspondem ao que, na nomenclatura mais atual, chama-se de logaritmandos e, no quinto círculo, aos logaritmos.

Figura 17 – 4º e 5º círculos no Geogebra.



Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Para compreender, primeiramente, é preciso relembrar a definição moderna dos logaritmos – dados dois números a e b reais e positivos, e $0 < a \neq 1$; $b > 0$, então vale:

$$\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b \quad \begin{cases} a = \text{base} \\ b = \text{logaritmando} \\ x = \text{logaritmo} \end{cases}$$

⁵² Em inglês, lê-se: The fourth circle is of Vnequall Numbers, which are noted with the figures 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1. Whether you vnderftand them to bee fingle numbers, or tenns, or hundreds, or thoufands &c. And every fpace of the numbers till 5, is divided into 100 parts, but after 5 till 1, into 50 parts" (OUGHTRED, 1633, p. 2).

Desse modo, ao posicionar o indicador em um valor no quarto círculo, o quinto mostrará o seu logaritmo. Por exemplo, ao posicionar um dos indicadores no número 2 do quarto círculo, o mesmo indicador deverá apontar, no quinto círculo, o valor aproximado 3, que, realizando a leitura de acordo com as regras de Oughtred (1633), deve significar 0,3 e, portanto, $\log 2 \cong 0,3$. Na seção 3.2, a seguir, é tratado com mais detalhes a respeito dessa manipulação e de como fazer a correta leitura dos valores no instrumento.

Também, ao que parece, a relação com os logaritmos está presente, da mesma forma, na construção desse círculo, pois os valores graduados seguem a definição dos logaritmos, como apontam Alves e Pereira (2018b) e dos demais círculos, como apontam Alves e Pereira (2019).

Ele também se refere aos valores no quarto círculo como os números verdadeiros ou naturais e destaca que “[...] se o *indicador* for aplicado a qualquer seno ou tangente, ele será o verdadeiro *seno* ou *tangente* no quarto círculo” (OUGHTRED, 1633, p. 2, tradução nossa)⁵³. A partir dessa observação, já se tem indícios da leitura dos valores no instrumento.

O autor, ainda, menciona que, no meio dos círculos, há um outro instrumento denotado de *Nocturnal*⁵⁴ (figura 18), para mostrar a hora da noite. Observando a figura 18, é possível identificar os meses do ano em um dos círculos mais internos. Também, próximo desse, há uma escala com valores de 1 a 12, que correspondem às horas.

⁵³ Em inglês, lê-se: “[...] if the index bee applied to any sine or tangent, it will cut the true *sine* of *tangent* in the fourth circle” (OUGHTRED, 1633, p. 2).

⁵⁴ O *Nocturnal* foi um instrumento utilizado para medir a hora, baseado na posição de dois ou mais astros no período noturno.

Através de um olhar mais atento nas figuras 15 e 18, é possível perceber, ainda, que as graduações de cada escala estão dispostas no sentido anti-horário. Porém, entende-se que esse modo de graduar o instrumento nada interfere para a produção de resultados satisfatórios, ou seja, se, em uma possibilidade de se construir os círculos de proporção, essa escala fosse realizada no sentido horário, o modo de manusear o instrumento seria análogo e produziria os mesmos resultados.

3.1.2 Os indicadores

Além dos diversos círculos graduados, Oughtred (1633) cita um par de indicadores, que se constitui como duas peças que giram ao serem movimentadas, de acordo com o manuseio do instrumento. Há dois indicadores que Oughtred (1633) nomeia de braço antecedente e braço conseqüente. Como se vê na figura 20, ambos os indicadores possuem o mesmo formato físico, assim, é preciso ressaltar que não há uma especificação para qual deles é o braço antecedente e qual é o conseqüente. No entanto, para operar, é necessário pré-definir qual deles será chamado de braço antecedente e qual será o conseqüente, conforme é explicado na seção 3.2 a seguir.

Figura 20 – Os indicadores dos círculos de proporção.



Fonte: National Museum of Scotland (2019).

Eles partem do centro do instrumento e possuem letras marcadas em sua estrutura, que correspondem às escalas de cada círculo. Desse modo, entende-se que o autor usou as letras S para seno (*sine*), T para tangente (*tangent*), N para natural (*natural*)⁵⁶ e E, do inglês *equal*, que quer dizer igual. Essa característica facilitava aqueles que manuseassem o instrumento, pois indicava em qual círculo se deveria olhar, sem a necessidade de ter que contá-los sempre que precisasse manipular o instrumento.

Para operar com os indicadores, Oughtred (1633) cita duas possibilidades em exemplos na sua obra. Assim, quando se quer saber o valor do seno ou da tangente de qualquer ângulo, basta posicionar um dos indicadores no ângulo desejado e verificar o resultado no quarto círculo. Uma melhor explicação sobre esse manuseio é feita na sessão seguinte, que explica como posicionar os indicadores para obter os resultados pretendidos e como fazer a correta leitura do instrumento, de acordo com Oughtred (1633).

Pode-se dizer que não há qualquer restrição de qual dos indicadores se deve utilizar, visto que ambos possuem a mesma forma e as mesmas marcações. O segundo uso dos indicadores é para o cálculo de valores por meio da proporção explicada por Oughtred (1633). Através do que o autor chama de proporção recíproca, é possível operar valores com a multiplicação e com a divisão. Em ambas as operações, é necessária a manipulação dos dois indicadores, sendo importante definir, previamente, qual será considerado como braço antecedente e qual será o braço conseqüente.

Oughtred (1633) reforça que não há uma ordem para essa escolha, mas é preciso que seja feita antes, para realizar a correta leitura do valor ao final do processo. Na seção 3.2, é aprofundado o manuseio do instrumento em ambas as possibilidades citadas, visando o processo matemático que emerge dessa manipulação.

3.2 Manuseio do instrumento: as matemáticas em *The Circles of Proportion* (1633)

Ao tratar da manipulação dos círculos de proporção, pode-se perceber que, a princípio, ela parece muito simplória, se comparada à utilização de outros instrumentos matemáticos⁵⁷, visto que parte do giro é feito com o par de indicadores. No entanto, Oughtred (1633) determina que, antes da utilização do instrumento, é importante compreender o conceito dos logaritmos.

⁵⁶ “[...] se o *indicador* for aplicado a qualquer seno ou tangente, ele será *seno* ou *tangente* verdadeiro ou natural no quarto círculo” (OUGHTRED, 1633, p. 2, tradução nossa).

⁵⁷ Um desses instrumentos é o báculo. Para conhecer mais sobre ele, vide Pereira e Saito (2019a, 2019b).

A partir disso, ele explica como posicionar o braço antecedente e o braço conseqüente para o cálculo da quarta proporcional.

Desse modo, na seção 3.2.1, a seguir, adentra-se nos conceitos matemáticos presentes no capítulo 2 de Oughtred (1633), que explica os conhecimentos necessários e as instruções para o manuseio do instrumento. Nele, Oughtred (1633) não apresenta a utilização dos oito círculos presentes no instrumento. Assim, são indicados os conhecimentos matemáticos relativos somente aos círculos necessários para os conceitos contidos nesse capítulo.

Após conhecer as matemáticas presentes nessa manipulação, em 3.2.2, detalham-se os procedimentos envolvidos na utilização dos indicadores para as operações exemplificadas por Oughtred (1633). Em seguida, a seção 3.2.3 indica como realizar a leitura dos valores nos círculos de proporção.

3.2.1 *Conceitos matemáticos*

A manipulação do instrumento é exemplificada no segundo capítulo da obra de Oughtred (1633). Nele, Oughtred trata “[...] da operação da regra da proporção e também da multiplicação e divisão” (OUGHTRED, 1633, p. 5, tradução nossa)⁵⁸. Para iniciar sua explicação, Oughtred (1633, p. 5, tradução nossa)⁵⁹ começa com dois teoremas, que dizem:

Teorema: Se de três números dados, o primeiro divide o segundo e o quociente multiplica o terceiro; o produto será o quarto proporcional aos três números indicados.
Teorema: Se três números são dados, o segundo divide o primeiro e o quociente divide o terceiro; este quociente posterior será o quarto proporcional, aos três números dados.

Note que, ambos os teoremas propostos por Oughtred (1633), assemelham-se à ideia atual de razão e proporção. Em termos algébricos atuais, dados a e b , inteiros e b diferente de zero, escreve-se a razão entre eles como $\frac{a}{b}$ (SILVA, 2015). Quando se trata de proporção, tem-se que ela pode ser diretamente ou inversamente proporcional e que Silva (2015, p. 54) define como:

⁵⁸ Em inglês, lê-se: “[...] of the operation of the rule of proportion and also of multiplication and division. (OUGHTRED, 1633, p. 5).

⁵⁹ Em inglês, lê-se: *Theoreme.* If of three numbers given, the first divide the second and the quotient multiply the third, the product shall be the fourth proportionall to the three numbers given. *Theoreme.* If of three numbers given, the second divide the first, and the quotient divide the third, this latter quotient shall be the fourth proportionall, to the three numbers given (OUGHTRED, 1633, p. 5).

Grandezas diretamente proporcionais: duas grandezas variáveis são chamadas de grandezas diretamente proporcionais, quando a razão entre os valores da primeira grandeza e os valores correspondentes da segunda grandeza é sempre a mesma.

Grandezas inversamente proporcionais: duas grandezas variáveis são chamadas de grandezas inversamente proporcionais, quando o produto de cada valor da primeira grandeza pelo valor correspondente da segunda grandeza é sempre o mesmo.

Logo, reescrevendo os teoremas de Oughtred (1633), utilizando a notação algébrica atual para melhor compreensão, tem-se que, dados três valores a, b e c , se o primeiro divide o segundo (10) e o quociente multiplica o terceiro (11):

$$\frac{a}{b} = d \quad (10)$$

e

$$d \cdot c \quad (11)$$

Então, a multiplicação (11) corresponde à quarta proporcional aos valores dados.

De modo análogo, o segundo teorema diz que, dado três valores a', b' e c' , se o segundo divide o primeiro (12) e o quociente divide o terceiro (13), o quociente posterior será o quarto proporcional

$$\frac{b'}{a'} = d' \quad (12)$$

e

$$\frac{c'}{d'} \quad (13)$$

Então, o quociente (13) corresponde à quarta proporcional aos valores dados.

O entendimento desses teoremas, para Oughtred (1633), configura-se como essencial para a manipulação do instrumento. No entanto, retomando a descrição dos círculos, lembra-se que eles estão relacionados aos conceitos de seno e tangente.

Para compreender o instrumento, é preciso associar esses três conhecimentos matemáticos como base (seno, tangente e logaritmos). É provável que essa articulação se dê pela própria construção do instrumento. Embora Oughtred (1633) não apresente detalhes de como isso foi feito, há indícios históricos que podem explicar tal situação.

Uma primeira hipótese decorre do próprio conceito de seno daquela época e as relações com os estudos dos logaritmos. Definia-se o seno como o comprimento de uma semicorda, de um círculo de raio dado (PEREIRA, 2015). Com isso, para construir sua tabela de senos, o estudioso John Napier (1550-1617) adotou um raio igual a 10^7 e usou isso para construir os logaritmos, cuja base está mais relacionada à razão de $\frac{1}{e}$. A escolha, por raios muito grandes,

devia-se ao fato de que isso oferecia melhor precisão aos valores. Assim, não era um valor fixo, como hoje, usualmente, toma-se o raio igual a 1.

Segundo Pereira (2015, p. 24), Napier, a partir das relações de Stifel⁶⁰, observou que tomando duas progressões, uma aritmética e outra geométrica, ele poderia associar a soma ou a diferença à multiplicação e divisão, respectivamente. A partir disso, Napier desenvolveu seu método chamado de *prostaférese*, que consistia em transformar multiplicações em adições e divisões em subtrações, no entanto, como não é objetivo deste estudo, não irá se aprofundar aqui sobre o método de Napier.

Embora Oughtred (1633) não mencione essa relação com Napier, diretamente em seu texto, é possível inferir tal situação pelos seus escritos, quando ele diz que “[...] os números são multiplicados pela adição de seus logaritmos e são divididos pela subtração de seus logaritmos” (OUGHTRED, 1633, p. 4, tradução nossa)⁶¹.

Em termos algébricos atuais, nota-se que o excerto é semelhante às propriedades dos logaritmos:

o logaritmo do produto, em símbolos:

$$\text{Se } 0 < a \neq 1, b > 0 \text{ e } c > 0, \text{ então } \log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c.$$

o logaritmo do quociente, em símbolos:

$$\text{Se } 0 < a \neq 1, b > 0 \text{ e } c > 0, \text{ então } \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c.$$

(IEZZE, DOLCE, MURAKAMI, 2004, p. 63).

Uma segunda hipótese é levantada em estudos que relacionam os logaritmos de base 10 à construção do instrumento. Henry Briggs (1561-1630), que estudou a respeito de uma tabela de logaritmos de base 10, é mencionado por Oughtred (1633) como sendo sua fonte para as denotações de característica e mantissa⁶², que, de modo resumido, pode-se entender como o logaritmo de um número sendo constituído de duas partes: uma antes da vírgula e outra depois da vírgula. A primeira se chama característica e a segunda, mantissa. Portanto, tomando como exemplo $\log 2 \cong 0,3$ ou $\log 20 \cong 1,3$ ou $\log 200 \cong 2,3$, note que a mantissa sempre é 3 (após a vírgula) e a característica segue a quantidade de algarismos do número menos um.

⁶⁰ Michael Stifel (1487-1567), de nacionalidade alemã, foi um estudioso das matemáticas, sendo conhecido pela criação de uma tabela logarítmica anos antes de John Napier (O’CONNOR; ROBERTSON, 2012b).

⁶¹ Em inglês, lê-se: “[...] Numbers are multiplied by addition of their Logarithmes: and they are divided by Subtraction of their Logarithmes” (OUGHTRED, 1633, p. 4).

⁶² [...] logaritmo encontrado você prefixa uma *característica* (como o Mestre Briggs⁶² o denomina) [que é] o número dos lugares dos inteiros propostos (que você pode preferir chamar de número Gradual) (OUGHTRED, 1633, p. 3-4, tradução nossa).

Com isso, provavelmente, a escala dos seus círculos de proporção esteja relacionada à essa base, por isso, “[...] o raio é 10000, que é o número 1 com quatro zeros ou círculos. E assim você pode descobrir tanto a soma [quanto] a diferença de senos e tangentes” (OUGHTRED, 1633, p. 3, tradução nossa).⁶³

Dessa forma, a manipulação do instrumento é feita através da proporção gerada entre os valores por meio do par de indicadores. Essa proporção é dada segundo as propriedades dos logaritmos e estes, por sua vez, utilizam os conceitos de seno e de tangente em seu logaritmando.

3.2.2 Utilizando os indicadores

Para manusear os círculos de proporção, basta girar o par de indicadores, posicionando-os do modo correto, para obter os valores nas operações realizadas. Segundo Oughtred (1633, p. 5, tradução nossa)⁶⁴, essa manipulação deve

[...] partir desses fundamentos assim estabelecidos, (se você corretamente conceber a natureza dos Logaritmos), segue-se a descoberta do quarto proporcional por este Instrumento: do qual esta é a Regra. *Abra os braços do Instrumento à distância do primeiro e do segundo número: depois traga o braço antecedente, ou aquele que permaneceu sobre o primeiro número até o terceiro, e assim o braço consequente, mantendo a mesma abertura, mostrará o quarto número procurado.*

Seguindo a explicação, os cálculos realizados pelos círculos de proporção se baseiam, principalmente, pelo uso da proporção e dos logaritmos, de forma associada. Com isso, o manuseio dos indicadores é, justamente, manter a proporção entre os braços para obter os valores.

Para exemplificar a regra de utilização dos indicadores, Oughtred (1633) cita exemplos de multiplicação e divisão para ilustrar como obter um resultado através dos círculos, por meio da proporção. Na seguinte multiplicação:

$$1.9 :: 12.108 \quad (14)$$

⁶³ Em inglês, lê-se: “[...] the Radius is 10000, that is the figure 1 with foure cyphers, or circles. And hereby you may finde out both the fumme, and alfo the difference of Sines, and Tangents” (OUGHTRED, 1633, p. 3).

⁶⁴ Em inglês, lê-se: “[...] and therefore out of thefe foundations thus layd, (if you rightly conceive the nature of the Logarithmes) doth follow the finding out of the fourth proportionall by this Inftrument: whereof this is the rule. *Open the armes of the Inftrument to the diftance of the firft, and fecund number: then bring the antecedent arme, or that which flood upon the firft number unto the third, and fo the consequent arme, keeping the fame opening, will fhew the fourth number fought for* (OUGHTRED, 1633, p. 5).

Ele diz: “*defina os dois braços do indicador em 1 e 9 no quarto círculo; e traga o braço do antecedente para o 12 e o braço consequente mostrará 108.*” (OUGHTRED, 1633, p. 7, tradução nossa)⁶⁵.

A notação de Oughtred se refere, em termos algébricos atuais, a:

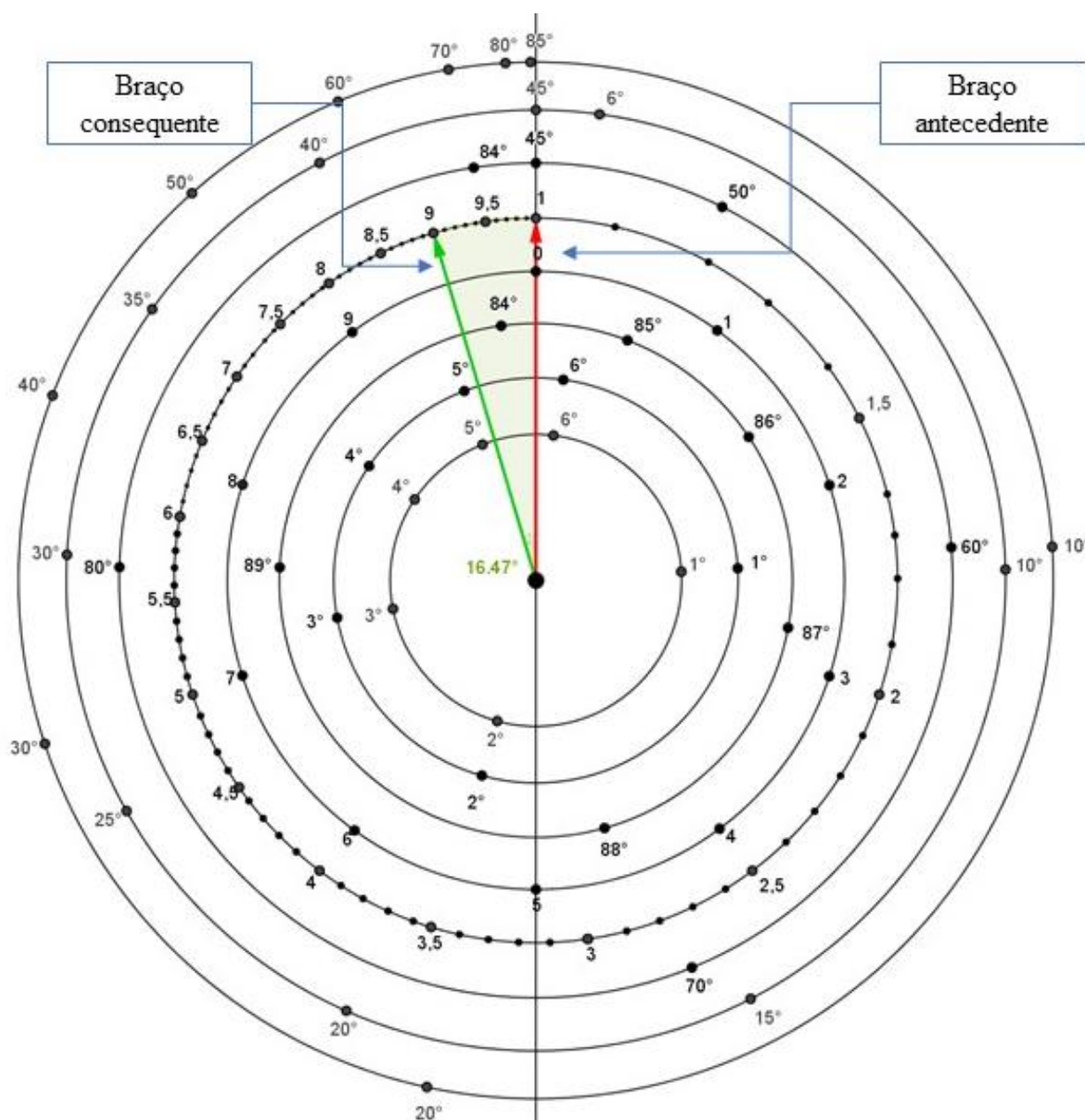
$$\frac{1}{12} = \frac{9}{x} \quad (15)$$

Em que x é o valor que se deseja encontrar e que, pelo resultado de Oughtred, esse deverá corresponder a 108.

Seguindo as orientações de Oughtred (1633), a figura 21 mostra os braços posicionados em 1 e 9. Desse modo, define-se como braço antecedente aquele que ficou em 1, ou seja, o vermelho. O que está em 9, chama-se de braço consequente e é representado na cor verde.

⁶⁵ Em inglês, lê-se: “For fet the Armes of the index 1 and 9 in the fourth circle; and bring the antecedent arme unto 12, and the consequent arme will fhew 108” (OUGHTRED, 1633, p. 7).

Figura 21 – Posicionamento inicial dos indicadores – multiplicação.



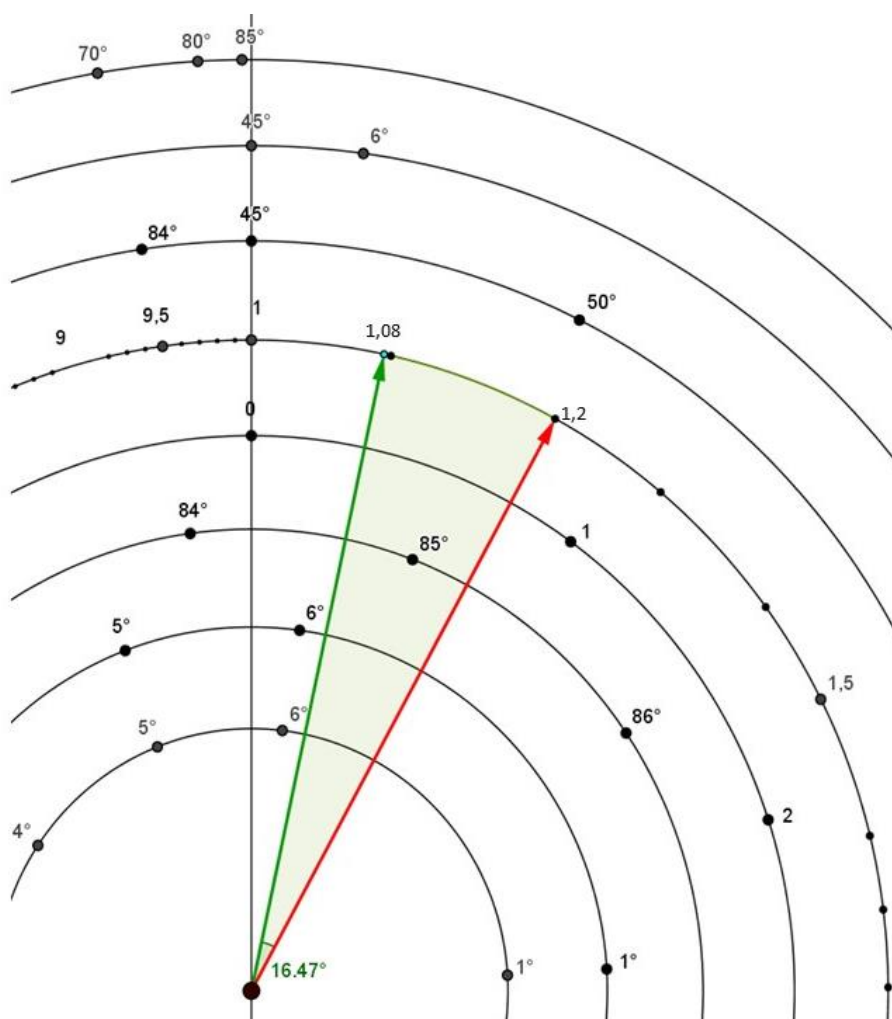
Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Perceba pela figura 21, apresentada através do recurso do Geogebra, os círculos de proporção⁶⁶ de William Oughtred. Note que, ao posicionar os indicadores em 1 e 9, conforme orienta Oughtred (1633), é possível perceber a distância entre os valores que, de acordo com o Geogebra, é correspondente à angulação de aproximadamente 16,47°.

⁶⁶ Os círculos de proporção de Oughtred (1633) foram reconstruídos com o recurso do Geogebra para auxiliar na visualização dos estudos, já que a versão da obra histórica apresenta falhas, devido ao próprio tempo. Para conhecer sobre essa construção vide, Alves e Pereira (2019).

Desse modo, tomando a explicação de Oughtred (1633), os ponteiros devem se movimentar mantendo essa abertura, ou seja, essa distância, entre o braço antecedente e o braço consequente, deve permanecer em $16,47^\circ$, em termos matemáticos. Ainda utilizando os recursos do Geogebra, a figura 22 apresenta a posição final, mantendo-se, então, a mesma abertura (proporção).

Figura 22 – Posicionamento final dos indicadores – multiplicação.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Nesse ponto, é necessário discutir algumas dessas marcações. Primeiramente, o significado de 1,2, nesse exemplo dado por Oughtred (1633). Agora que o leitor já conhece a escala do quarto círculo, deve ter notado e se questionado como obter valores acima de 9. A resposta, para tal questão, está nos logaritmos de base 10.

Embora os círculos de proporção não estejam relacionados diretamente a essa base, como é explicado na seção seguinte. Seguindo a literatura matemática, o $\log_{10} 1,2$ difere do $\log_{10} 12$ pelos conceitos de característica e mantissa. Desse modo, é possível obter os resultados acima de 9, através da leitura correta do instrumento, levando-se por esses conceitos.

Dessa forma, a segunda interpretação necessária é referente ao valor aproximado a 1,1 apresentado pela figura 22. O $\log_{10} 1,1$ difere do $\log_{10} 110$ pelo conceito de característica e de mantissa. Do mesmo modo, $\log_{10} 1,08$ de $\log_{10} 108$. Logo, quer-se aqui mostrar que o resultado próximo ao 1,1, apresentado na figura 21, pode ser 1,09, 1,08, 1,07 e, assim, por diante, pois se trata de uma aproximação e que, seguindo a correta leitura do instrumento, poderia ser 109, 108, 107 e etc.

Oughtred (1633) também exemplifica como manipular o instrumento para operar a divisão. Ele diz:

Divida 11388 por 240 [e] a divisão é assim.

$$240 . 1 :: 11388 . 47,5$$

Defina os dois braços do indicador em 240 e 1 no quarto círculo e, em seguida, traga o braço antecedente (que ficou em 240) até 11388 e o braço consequente mostrará 47 e quase uma metade (OUGHTRED, 1633, p. 8, tradução nossa).⁶⁷

Note qu, em termos algébricos atuais, a expressão que Oughtred (1633) escreveu nesse exemplo equivale a:

$$\frac{240}{11388} = \frac{1}{y} \quad (16)$$

que também pode ser reescrito como:

$$\frac{11388}{240} = \frac{y}{1} \quad (16')$$

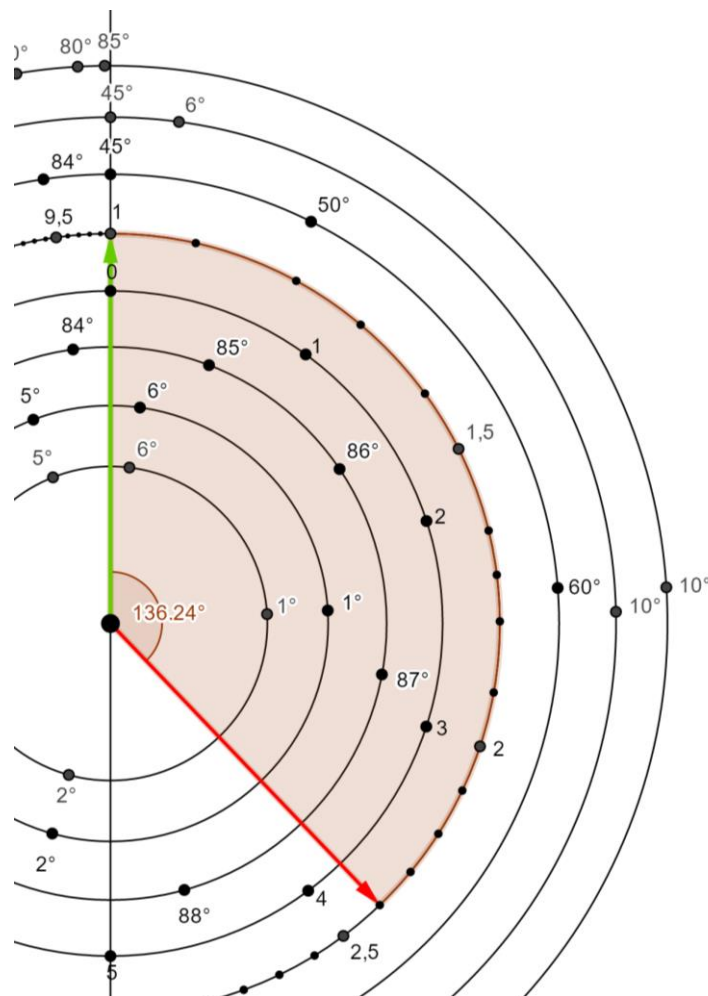
Em que y representa o resultado da divisão. Desse modo, seguindo a explicação do autor, a figura 23 apresenta o posicionamento dos indicadores para operar com a divisão.

⁶⁷ Em inglês, lê-se: Divide 11388 by 240; the divifion is thus.

240.1: : 11388. 47¹⁵

For fet the two armes of the index at 240, and 1 in the fourth circle, and bring the antecedent arme (which ftood at 240) unto 11388, and the confequent arme will fhew 47 and almoft an halfe (OUGHTRED, 1633, p. 8).

Figura 23 – Posicionamento inicial dos indicadores – divisão.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

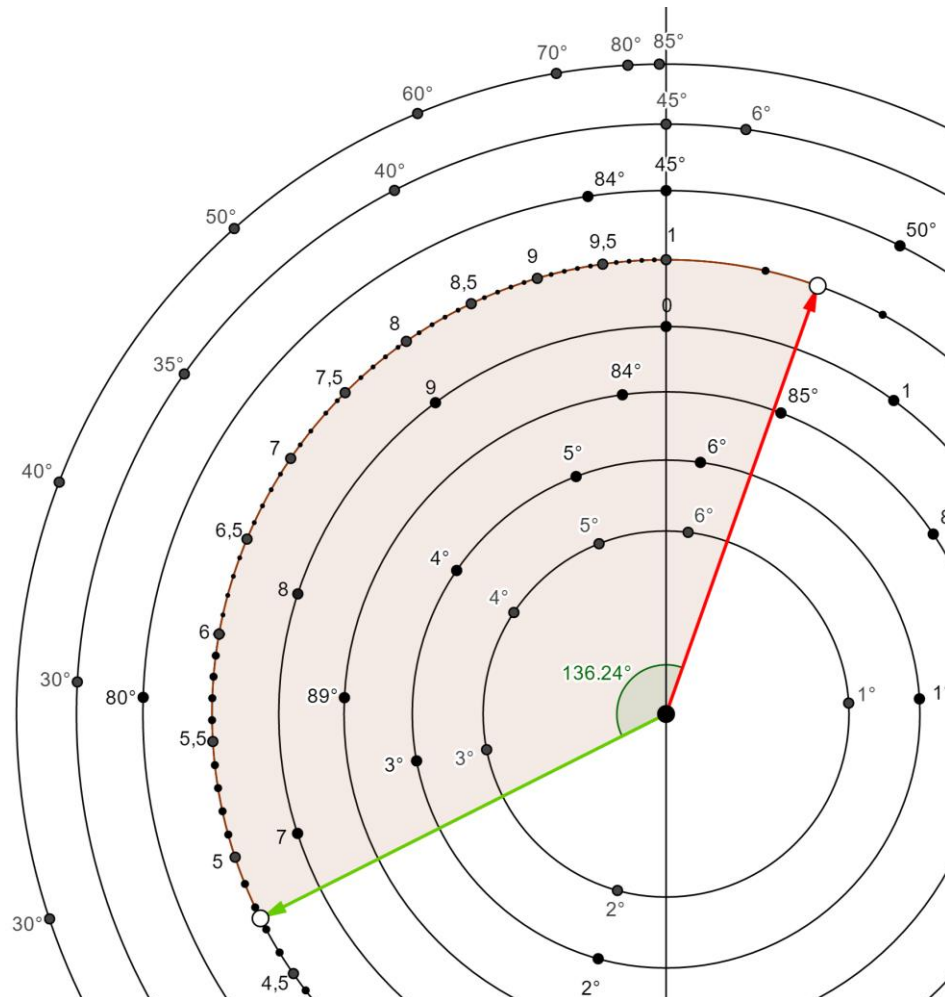
Ao posicionar os indicadores em 1 e 240, é preciso compreender os conceitos matemáticos já explicados, a respeito dos logaritmos. Assim, para o valor de 240, o indicador é posicionado em 2,4. Também, é necessário manter a proporção para manusear ambos os indicadores de forma simultânea⁶⁸.

Oughtred (1633) explica que o braço antecedente (vermelho), ou seja, o que está posicionado no valor correspondente a 240, deve ser levado até 11388. Portanto, o braço antecedente deve ser posicionado agora em um valor aproximado de 1,1388 e, mantendo a proporção, o braço consequente (verde) apresenta o resultado da divisão, ou seja,

⁶⁸ Como o estudo não tem foco no Geogebra, não se dá ênfase aos procedimentos feitos no *software*. No entanto, caso o leitor deseje realizar a utilização dele, a proporção referida no exemplo é a angulação de 136,24°. Também, para aprofundamento no estudo dos círculos de proporção através do Geogebra, vide Alves e Pereira (2019).

aproximadamente 4,75, como mostra a figura 24. Contudo, em uma leitura correta, esse valor corresponde a 47,5.

Figura 24 – Posicionamento final dos indicadores – divisão.



Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Conhecendo a precisão do instrumento histórico de William Oughtred, desse modo, pode-se concluir que ele conseguia conhecer o real valor tanto na multiplicação, quanto na divisão apresentadas. Percebe-se que é preciso conhecer a ordem dos valores nos quais estão se realizando as operações, para ser possível conhecer o valor real obtido pelo instrumento. A respeito da leitura desses valores, de como interpretá-los e, assim, completar a manipulação do instrumento de modo assertivo, é tratado na seção 3.2.3.

3.2.3 A leitura dos valores

Além de compreender os conceitos matemáticos presentes na manipulação do instrumento, é necessário saber como lê-lo. Ainda, em seu capítulo inicial, Oughtred (1633, p. 2-3, tradução nossa) alerta, que

[...] devemos saber que, se o *seno* ou a *tangente* estiverem no *primeiro* ou no *segundo círculo*, os números do *quarto círculo* significam tantos milhares. Mas se o *seno* ou *tangente* estiverem no *sétimo* ou *oitavo círculo*, os algarismos no *quarto círculo* significam tantas centenas. E se a *tangente* estiver no *sexto círculo*, os números do *quarto círculo* significam muitas vezes dez mil, ou todo o *raio*.⁶⁹

Quando o autor especifica uma leitura diferenciada em cada círculo, ele faz referência, também, ao raio 10.000 citado anteriormente, dizendo: “e por estes meios o seno de $23^{\circ}30'$ será encontrado 3987; e o seno de seu complemento 9171” (OUGHTRED, 1633, p. 3, tradução nossa)⁷⁰. Levando em consideração o que Oughtred (1633) menciona, dado o valor $23^{\circ}30'$, seu seno, na leitura dos círculos, corresponde a 3987.

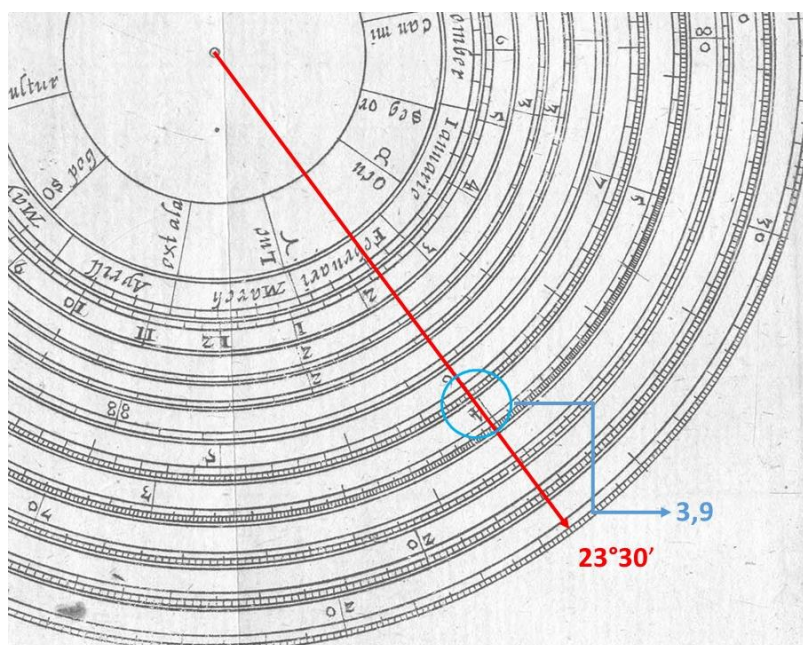
No entanto, sabendo que $23^{\circ}30'$ corresponde ao primeiro círculo, de acordo com Oughtred, esse valor corresponde a milhares. Logo, como se nota a figura 25, no quarto círculo, é identificado o valor 3,9 aproximadamente, que multiplicado por 1000, faz-se 3900, que é próximo a 3987, citado por Oughtred (1633).

Sabe-se que, pela imagem da obra, não se pode obter valores tão precisos como no instrumento físico que Oughtred teria em sua época. Todavia, é possível perceber que as suas escalas possibilitavam identificar valores com várias casas decimais.

⁶⁹ Em inglês, lê-se: “[...] we are to knowe that if the *Sine* or *Tangent* be in the *Firft*, or *Second* circle, the figures of the *Fourth* circle doe fignifie fo many thoufands. But if the *Sine* or *Tangent* be in the *Seventh* or *Eight* circle, the figures in the *Fourth* circle fignifie fo many hundreds. And if the *Tangent* bee in the *Sixt* circle, the figure of the *Fourth* circle, fignifie fo many times tenne thoufand, or whole *Radiy*” (OUGHTRED, 1633, p. 2-3).

⁷⁰ Em inglês, lê-se: “And by this meanes the sine of $23^{\circ}30'$ will bee found 3987: and the sine of it's complement 9171” (OUGHTRED, 1633, p. 3).

Figura 25 – Valor aproximado do seno de $23^{\circ}30'$ nos círculos de proporção.



Fonte: Oughtred (1633, p. P1).

Oughtred (1633, p. 3, tradução nossa)⁷¹ segue afirmando que “[...] a tangente de $23^{\circ}30'$ será encontrada 4348 e a tangente de seu complemento, 22998”. Com isso, também levando em consideração que a tangente do complemento de $23^{\circ}30'$ é a tangente de $66^{\circ}30'$. Dado que $66^{\circ}30'$ se encontra no terceiro círculo e os valores do terceiro e quarto círculos se complementam, então é encontrado nos círculos de proporção 22,9 aproximadamente.

No entanto, para compreender que esse valor é 22,9 e não 2,29, como ocorre no caso anterior, é preciso entender uma outra afirmação que Oughtred (1633, p. 6, tradução nossa, grifo nosso)⁷² faz, quando ele diz que é necessário, primeiramente, “[...] constituir os lugares de cada número no quarto círculo se os algarismos escritos no espaço indicam **unidades, dezenas ou centenas, etc**”. Ou seja, é preciso saber se o valor a ser apontado pelo indicador, será compreendido em casas de unidades, de dezenas, de centenas e, assim, por diante.

É interessante observar os valores citados por Oughtred (1633). Tomando como base o atual, o seno de $23^{\circ}30'$ é igual a 0,3987. Desse modo, a tangente de $23^{\circ}30'$ é 0,4348 e de seu completo, a tangente de $66^{\circ}30'$ é 2,2998. Percebe-se que, em comparativo ao atual, os valores são multiplicados pelo raio proposto por Oughtred (1633), que é 10.000.

⁷¹ Em inglês, lê-se: “[...] and the tangent of $23^{\circ}30'$ will be found 4348: and the tangent of it's complement, 22998” (OUGHTRED, 1633, p. 3).

⁷² Em inglês, lê-se: “[...] in constituting the places of each number in the fourth circle; whether the figures written in the fplaces doe signifie vnites, tenns, or hundreds etc” (OUGHTRED, 1633, p. 6).

Oughtred (1633, p. 6, tradução nossa)⁷³ continua: “em segundo lugar, se aquele braço que mostra o quarto proporcional, ultrapassa *a linha do Raio*; então você conta o quarto [proporcional] em um novo círculo ou grau”. Nessa segunda orientação, Oughtred explica que, ao manusear os indicadores, eles fazem voltas no instrumento e se esse giro for completo e ultrapassar a linha do raio, deve-se multiplicar o valor por 10. Oughtred (1633, p. 6, tradução nossa)⁷⁴ completa dizendo que:

Em terceiro lugar, se o quarto número procurado deveria ser maior ou menor que o terceiro. Pois se um quarto número for maior que o terceiro, quando deveria ser menor ou menor que o terceiro quando deveria ser maior, é um sinal de que esse número pertence a um círculo de outro grau. Em quarto lugar, olhamos qual a verdadeira distância entre o primeiro e o segundo, que o mesmo é suposto entre o terceiro e o quarto, e também na mesma parte.

Nessa continuação, Oughtred (1633) quer explicar ao leitor que é preciso conhecer a ordem dos números, cuja proporção é realizada, para então ser possível determinar a ordem do resultado. Em outras palavras, se os valores são todos na ordem das unidades, será obtida uma unidade ou uma dezena. Se há valores na ordem das unidades e outro na ordem das dezenas, será obtido uma dezena ou uma centena.

E, por fim, Oughtred (1633) apenas afirma a proporção, dizendo que a distância, entre dois valores iniciais, é a mesma que os valores finais, ou seja, dada a distância de a e b igual a c , mantendo-se a proporção (a abertura dos indicadores), a distância entre d e e também deverá ser c .

Oughtred (1633) sempre chama atenção para a leitura dos valores no quarto círculo, visto que esse deve ser compreendido como o principal quando se realiza o manuseio do instrumento. Assim, quando se posiciona os indicadores em qualquer um dos círculos, deve-se olhar para o ponto em que, no quarto, esse corresponde.

Ao quinto círculo, também, é dada ênfase e a razão matemática se dá, pois, ele mostra os logaritmos dos números. Com isso, “[...] se o indicador for aplicado a qualquer número no quarto círculo, ele será, no quinto círculo, cortado no logaritmo do mesmo número”.

⁷³ Em inglês, lê-se: “Secondly, if that arme which fhewth the fourth proportionall, doe reach beyond the line of the radius, that then you doe account the fourth in a new circle or degree” (OUGHTRED, 1633, p. 6).

⁷⁴ Em inglês, lê-se: Thirdly, whether the fourth number fought ought to be greater, or leffer then the third. For if a fourth number bee offered greater then the third, when it fhould be leffe, or leffe then the third when it fhould be greater, it is a figne that number doth appertaine to a circle of another degree. Fourthly, that looke what true diftance was betweene the firft and fecund, that the fame bee fupposed betweene the third and the fourth, and alfo on the fame part (OUGHTRED, 1633, p. 6).

(OUGHTRED, 1633, p. 3, tradução nossa)⁷⁵ e, dessa forma, ele parece ter justificado as operações realizadas no instrumento.

William Oughtred transferiu seus conhecimentos matemáticos para um instrumento que se tornou famoso e facilitou os cálculos em sua época. Após conhecer o instrumento, sabe-se que há diversos conhecimentos matemáticos incorporados, além dos que foram citados neste capítulo, no entanto, é impossível listar todos, visto que se deu ênfase ao seu manuseio baseado em apenas dois dos quatorze capítulos que formam o conjunto da primeira parte de *The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment* (1633).

O capítulo seguinte se refere ao caminho metodológico desta pesquisa, apresentando uma interface entre história e ensino de matemática como base desse estudo. Seguindo o que se propõe nessa interface, apresenta-se, também, a aplicação de um curso de extensão universitária, voltado a alunos de uma pós-graduação, que objetivou a (re)significação de alguns conceitos matemáticos, através da manipulação dos círculos de proporção reconstruídos.

⁷⁵ Em inglês, lê-se: “[...] if the Index be applied unto any number in the fourth circle, it will in the Fift circle cut upon the logarithme of the fame number” (OUGHTRED, 1633, p. 3).

4 CAMINHO METODOLÓGICO

O desenvolvimento de toda pesquisa científica segue uma estrutura pré-definida, na qual uma das etapas é a construção metodológica que o investigador tomará como base (FIORENTINI; LORENZATO, 2006). Desse modo, caracterizar a pesquisa, construir um caminho, definir um processo de coleta e análise de dados são alguns dos procedimentos a serem adotados.

Neste capítulo, é designado todo percurso adotado para o desenvolvimento desses procedimentos, em que, inicialmente, sugere-se a caracterização da pesquisa, que engloba as definições das modalidades, segundo os objetivos e os processos de coleta de dados (GIL, 2010). Em seguida, apresenta-se a estrutura de um curso de extensão que foi elaborado, assim como o público-alvo, o *lócus* no qual ele foi desenvolvido e os instrumentos para a coleta de dados que foram utilizados.

Posteriormente, mostram-se os processos para a elaboração da atividade, que seguiu os pressupostos da construção de uma interface entre história e ensino de matemática e da Atividade Orientadora de Ensino (AOE). Por fim, listam-se os procedimentos de sistematização e análise das informações coletadas durante a aplicação desse curso.

4.1 Caracterização da pesquisa

Em uma pesquisa, há de se considerar algumas etapas para a sua construção. Uma dessas consiste na identificação e na escolha dos pressupostos teóricos e metodológicos que sustentaram a investigação. De modo primário, pode-se dizer que, neste estudo, elencaram-se, como base teórica, as pesquisas que buscam desenvolver uma interface entre história e ensino de matemática (SAITO; DIAS, 2013a, 2013b; PEREIRA; SAITO, 2019a, 2019b) e a Atividade Orientadora de Ensino (MOURA *et al.*, 2016).

Além disso, considerando o cunho sociológico e educacional com desdobramentos metodológicos, adentrou-se em um estudo com bases etnográficas em educação para embasar alguns posicionamentos tomados na pesquisa. Assim, é importante ressaltar que a pesquisa não é um estudo etnográfico puro, mas que possui traços relacionados à etnografia em educação.

Com um caráter qualitativo, o método etnográfico “se caracteriza fundamentalmente por um contato direto do pesquisador com a situação pesquisada, permite reconstruir os processos e as relações que configuram a experiência escolar diária (ANDRÉ, 2013, p. 34). André (2013),

ainda, reforça que esse contato direto não se refere somente a conhecer e retratar o cotidiano, mas também envolve o processo de reconstrução da prática escolar.

Portanto, entende-se esta pesquisa em uma concepção multirreferencial, concebida por Borba (1998) como “bricolagem”, que se refere “à capacidade de empregar abordagens de pesquisa e construtos teóricos múltiplos” (KINCHELOE; BERRY, 2007, p. 10), pois se concorda com Rodrigues *et al.* (2016, p. 970) de que “[...] instalou-se a necessidade premente de se refletir acerca de novas possibilidades investigativas, considerando-se a constituição de caminhos teórico-metodológicos alternativos”. Essa ideia é reforçada por Borba (1998, p. 17), quando se compreende que “[...] é na construção do campo de pesquisa que se define a elaboração (*in loco*) das metodologias (a composição inteligente das mesmas) e não o inverso. Não é a ciência que deve andar a reboque (servilmente) da metodologia e sim o contrário”.

A partir disso, voltando-se a alguns conceitos da etnografia para a educação (ANDRÉ, 2013), algumas características podem ser destacadas: 1) uso de técnicas específicas de coleta de dados que, neste estudo, correspondem, principalmente, à observação e à análise de documentos; 2) interação entre o pesquisador e o objeto, na qual se considera o pesquisador como instrumento principal na coleta de dados, uma vez que ele, como pessoa, responde ativamente às situações que o cercam e as modifica, conforme necessidade; 3) trabalho de campo; 4) descrição, na qual o pesquisador se utiliza de dados descritivos, pessoas, ambientes, diálogos e outros; e 5) formulação de hipóteses, conceitos e abstrações, que consistem em um plano flexível, em que o foco de investigação deve sempre ser revisto. Baseada nessas cinco características, a pesquisa foi estruturada em quatro fases, como o quadro 2:

Quadro 2 – Organização teórica e metodológica.

ORGANIZAÇÃO TEÓRICA E METODOLÓGICA	
FASE	O QUE É?
1ª fase: estruturação do marco teórico e metodológico;	- Levantamento; - Pesquisa documental; - Definição de uma interface entre história e ensino de matemática como pressuposto teórico; - Definição da Atividade Orientadora de Ensino como perspectiva teórica organizacional para a atividade.
2ª fase: identificação do público-alvo; definição dos instrumentos e métodos para a coleta e o registro de dados;	- Método para coleta de dados: curso de extensão universitária; - Instrumento para coleta e registro de dados: observação participante; relatórios; gravação de áudio e vídeo e foto.

3ª fase: estruturação e aplicação da pesquisa;	- Organização estrutural com base em uma interface entre história e ensino de matemática (constituição da pesquisa); - Atividade Orientadora de Ensino (construção da atividade).
4ª fase: análise dos dados.	- Análise de Conteúdo.

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Para compor o que se denotou de primeira fase, partiu-se de um levantamento de materiais que, de acordo com Marconi e Lakatos (2003), é o primeiro passo de qualquer pesquisa científica e pode ser feito a partir de duas técnicas: através de uma pesquisa bibliográfica e de uma pesquisa documental.

Pode-se dizer que toda pesquisa é, de certa forma, bibliográfica, pois

[...] abrange toda bibliografia já tornada pública em relação ao tema de estudo, desde publicações avulsas, boletins, jornais, revistas, livros, pesquisas, monografias, teses, material cartográfico etc., até meios de comunicação orais: rádio, gravações em fita magnética e audiovisuais: filmes e televisão (MARCONI; LAKATOS, 2003, p. 182).

As pesquisas bibliográficas muito se assemelham às documentais, no entanto, há uma principal diferença entre elas e essa é na natureza das fontes. Enquanto uma pesquisa bibliográfica é desenvolvida fundamentalmente de contribuições de vários autores, “[...] a pesquisa documental vale-se de materiais que não receberam ainda um tratamento analítico, ou que ainda podem ser reelaborados de acordo com os objetos da pesquisa” (GIL, 2010, p. 45). Esses materiais são puramente documentos, escritos ou não, que se constituem como “fontes primárias” (MARCONI; LAKATOS, 2003).

É preciso não confundir o termo em destaque, pois, aqui, baseado nos estudos de Silva (2018, p. 41), seguindo uma vertente historiográfica mais atualizada, considera-se como uma fonte primária, “[...] aquela que está sendo analisada, independentemente de ser um documento ou um texto original”. Assim, qualquer documento que seja tomado como a base da investigação da pesquisa, não sendo necessariamente elaborado pelo autor principal, é fonte primária.

Em uma pesquisa documental, além de contribuir no levantamento de dados, para Gil (2010, p. 87), seguindo algumas etapas, é possível: “a) determinação dos objetivos; b) elaboração do plano de trabalho; c) identificação das fontes; d) localização das fontes e obtenção do material [...]”.

Seguindo a organização proposta por Gil (2010), pode-se dizer que a determinação do objetivo na pesquisa documental se aproxima ao objetivo do estudo, uma vez que se desenvolve com base na investigação de um documento histórico para a construção da pesquisa como um todo. Dessa forma, definiu-se buscando, em âmbito geral, saber como os conhecimentos matemáticos incorporados nos círculos de proporção são mobilizados no estudo de seu manuseio, em uma interface entre história e ensino de matemática.

Entende-se também, que a respeito da elaboração do plano de trabalho, este representa o caminho metodológico escolhido para a identificação, seleção e tratamento das fontes documentais utilizadas no estudo. Em relação a esses documentos, Saito (2015, p. 27) explica que fazem parte “[...] não só livros e tratados, mas também cartas, manuscritos, minutas e outros documentos não só escritos, mas também aqueles da cultura material, tais como instrumentos, monumentos, máquinas etc.”. Apesar de o estudo focar na manipulação de um instrumento, esta não pode ser considerado a fonte primária.

Dados os tipos de documentos possíveis de serem inseridos no estudo, a seleção de quais utilizar teve base no pressuposto da construção da interface de Saito e Dias (2013a) para construir o contexto. Assim, o documento *The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment*, publicado em 1633, de William Oughtred, é, para esta pesquisa, a fonte primária, pois é a partir dele que se deram as investigações a respeito do instrumento círculos de proporção. Além dele, outros textos do mesmo autor, como *Clavis Mathematicae (1631)* e *Trigonometrie (1657)* e biografias de Oughtred, como a de Cajori (1916), constituíram a seleção de documentos do estudo, porém em ordem secundária.

É importante destacar que, além dos textos referentes à história, foram selecionados, classificados na pesquisa, textos relativos à didática e à epistemologia para a complementação da dissertação. Portanto, diz-se que, a partir da pesquisa bibliográfica e documental, foi possível a construção dos capítulos 2 e 3 deste estudo, seguindo as bases de uma interface entre história e ensino de matemática, como é relatado na seção 4.3.

4.2 A coleta de dados

Uma vez delineada a pesquisa, segue-se para fase dois – definição dos instrumentos e métodos para a coleta e o registro de dados – na qual se aborda o *lócus*, o público-alvo e as técnicas adotadas. Considerando que o estudo se volta para a formação de professores, pautou-se no desenvolvimento de um curso de extensão universitária, que é um dos meios pelo qual

um docente em formação inicial ou continuada pode adquirir novos conhecimentos para compor sua prática profissional. Com isso, nas seções seguintes, apresentam-se a estrutura, os participantes e o *lócus* do curso de extensão.

4.2.1 O curso de extensão universitária

Com a finalidade de estruturar o curso de extensão descrito nesta sessão, organizou-se um estudo piloto, para conhecer e evitar as possíveis falhas na execução dele. Assim, o piloto, de título aproximado: *Estudando os elementos matemáticos incorporados no manuseio dos círculos de proporção de William Oughtred*, teve a carga horária de 20h/a, sendo 12h presenciais e 8h à distância. Ele ocorreu nos dias 7 a 9 de janeiro de 2019, no horário de 8h às 12h, com intervalo de 20 minutos e seu público foram os alunos de licenciatura em matemática, da Universidade Estadual do Ceará – UECE, tendo sido ofertadas e preenchidas 12 vagas.

A partir das situações ocorridas durante a aplicação do piloto, organizou-se então o curso de extensão universitária “*Estudando os conhecimentos matemáticos incorporados no manuseio dos círculos de proporção de William Oughtred*”. Ele ocorreu aos sábados, nos dias 02/02/2019 e 09/02/2019, de 8h às 17h, com intervalo para almoço, totalizando uma carga horária de 16h/a presenciais e foi ministrado no Laboratório de Matemática e Ensino⁷⁶, da Universidade Estadual do Ceará, Campus Itaperi, em Fortaleza.

Além da pequena mudança no título, a carga horária também foi alterada, já que, baseado no desenvolvimento do piloto, algumas ações foram modificadas, tais como o tempo para a execução de cada momento e o tamanho de excertos históricos a serem estudados, visto que não foram necessárias para atingir o objetivo principal.

A realização de ambos os cursos foi em parceria com o Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM) (<http://gpehm.blogspot.com/>) e da coordenadoria do curso de Licenciatura de Matemática da UECE, que disponibilizaram o espaço físico no qual eles ocorreram.

Também, seus desenvolvimentos foram baseados na proposta do projeto Guarda-Chuva, institucionalizado pela UECE e que tem o intuito de investigar a construção de interfaces, a partir da articulação de instrumentos matemáticos históricos. O projeto é uma iniciativa do

⁷⁶ O nome oficial é Laboratório de Matemática e Ensino Professor Bernardo Rodrigues Torres (LAbMatEn/UECE), mais conhecido como Laboratório de Matemática e Ensino, oficializado em 1998 (PEREIRA; VASCONCELOS, 2014).

Programa de Formação Docente (PFD) do GPEHM, em que foi tomado como base o processo organizacional para a proposta de aplicação.

Desse modo, seguindo a operacionalização do projeto, foram ofertadas 12 vagas para os participantes. Esse número foi pré-determinado pela técnica escolhida de ação, no qual se considerou a utilização da observação para a coleta de dados e pelo desenvolvimento do piloto. Com isso, ao se limitar a quantidade de participantes, o processo de observação pôde tornar-se mais eficaz.

O público-alvo, para essa aplicação principal, foram alunos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), da Universidade Estadual do Ceará (UECE), convidados a participar, em período extracurricular à sua formação, que tivessem interesse e disponibilidade de estar presentes em todos os dias do curso. O quadro 3, a seguir, mostra como o conteúdo do curso foi esquematizado, segundo os objetivos destinados para o docente e para o discente (participante do curso) e o conteúdo abordado em cada momento.

Quadro 3 – Objetivos e conteúdos programáticos do curso.

OBJETIVOS		CONTEÚDOS	CH
<i>Para o discente:</i> - Reconhecer o contexto do século XVII e o papel dos instrumentos para o desenvolvimento das matemáticas. - Compreender a importância dos instrumentos matemáticos no século XVII, em especial os círculos de proporção.		UNIDADE 1: Ensino e instrumentos: conhecendo a história dos círculos de proporção 1.1.O contexto do século XVII e alguns instrumentos matemáticos ingleses. 1.2.Algumas considerações sobre os círculos de proporção.	1h/a
<i>Para o docente:</i> Introduzir os participantes ao estudo sobre os instrumentos matemáticos do século XVII, em específico, os círculos de proporção inseridos no documento <i>The Circles of Proportion (1633)</i>.			
<i>Para o discente:</i> Debater sobre algumas características da obra <i>The Circles of Proportion 1633</i>, e sua relação com o instrumento.			
<i>Para o docente:</i> Apresentar aos participantes o documento que será estudado, assim como seu autor e sua importância para o desenvolvimento das matemáticas no século XVII.			
		UNIDADE 2: William Oughtred e o documento, <i>The Circles of Proportion (1633)</i> 2.1 Alguns aspectos da vida e da obra de William Oughtred. 2.2 Algumas considerações sobre a obra <i>The Circles of Proportion (1633)</i> .	

<i>Para o discente:</i> • Conhecer os círculos de proporção de William Oughtred a partir da leitura da descrição do instrumento contida na obra <i>The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment</i> (1633). • Identificar as partes do instrumento através do seu manuseio com suporte a leitura do excerto.	UNIDADE 3: A descrição e a manipulação: conhecendo o instrumento círculos de proporção de William Oughtred 3.1 Estudo da descrição dos círculos de proporção no <i>The Circles of Proportion</i> (1633). 3.2 Sobre as partes e o funcionamento do instrumento, a partir da leitura do texto. 3.3 Estudo do manuseio dos círculos de proporção no <i>The Circles of Proportion</i> (1633). 3.4 Sobre o manuseio do instrumento, a partir da leitura do texto.	7h/a
<i>Para o docente:</i> • Fazer com que os participantes compreendam a manipulação do instrumento para que possam formular os conhecimentos matemáticos incorporados nos círculos de proporção por meio do seu manuseio.		
<i>Para o discente:</i> • Compreender o processo de manipulação do instrumento círculos de proporção de William Oughtred através de situações práticas. • Identificar os conhecimentos matemáticos presentes no manuseio do instrumento com suporte à leitura do excerto.	UNIDADE 4: Identificando os elementos matemáticos presentes nos círculos de proporção 4.1 Manipulando o instrumento a partir de situações práticas. 4.2 Ação sobre o manuseio do instrumento, a partir da leitura do texto com situações práticas e da manipulação. 4.3 Ação sobre os elementos matemáticos presentes no manuseio.	8h/a
<i>Para o docente:</i> • Estimular os participantes a explorarem, formularem e expressarem os conhecimentos matemáticos mobilizados no manuseio dos círculos de proporção, que foram identificados, questionando o processo de construção e justificando seus passos.		

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Essa proposta se baseou em recentes estudos a respeito da construção de uma interface entre história e ensino de matemática, sob uma perspectiva historiográfica atualizada, como os de Pereira e Saito (2019a, 2019b) e teve como principal objetivo mobilizar alguns conhecimentos matemáticos através do manuseio de um instrumento matemático, denominado por círculos de proporção, cuja autoria é de William Oughtred (1574-1660) e que foi exposto em seu tratado *The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment*, em 1633.

4.2.2 Instrumentos de coleta e registro de dados

Baseado nos objetivos desta pesquisa e do curso, partiu-se para a demarcação dos instrumentos de coleta e registro de dados, no qual, com base etnográfica, escolheram-se: observação; relatórios (registro dos participantes); gravação de áudios e vídeos e fotos (ANDRÉ, 2013). Esses instrumentos foram, convenientemente, escolhidos, pois são, a partir deles, que se pode obter as características do grupo que se está estudando.

Em relação à observação, para André (2013, p. 24), “[...] é chamada de participante porque parte do princípio de que o pesquisador tem sempre um grau de interação com a situação estudada, afetando-a e sendo por ela afetado”. Marconi e Lakatos (2003, p. 190-191), ainda, explicam que

A observação é uma técnica de coleta de dados para conseguir informações e utiliza os sentidos na obtenção de determinados aspectos da realidade. Não consiste apenas em ver e ouvir, mas também em examinar fatos ou fenômenos que se desejam estudar [...] A observação ajuda o pesquisador a identificar e a obter provas a respeito de objetivos sobre os quais os indivíduos não têm consciência, mas que orientam seu comportamento.

Ainda, assim, buscou-se o auxílio de uma professora pesquisadora para também se agregar ao estudo no momento da aplicação e desenvolver, junto à pesquisadora principal, a observação, conforme a organização do projeto Guarda-Chuva do PFD/GPEHM. Dessa forma, pode-se definir esse tipo de ação conjunta como uma observação em equipe, que se constitui como uma rede de observadores, registrando a mesma ocorrência em vários ângulos (MARCONI; LAKATOS, 2003).

Os relatórios se enquadram como os materiais produzidos durante o processo de constituição da pesquisa e têm o objetivo de auxiliar no entendimento do que se está investigando.

A gravação de áudios foi realizada com o objetivo de captar, na fala desses participantes, informações que possam complementar esses relatórios. Em cada grupo formado durante o curso de extensão, foi disponibilizado um *smartphone* para gravar as discussões de modo separado em cada grupo.

A gravação de vídeo também foi adotada, visto que, como se trata de um estudo que envolve o manuseio de um instrumento, é importante verificar a postura dos participantes e as escolhas feitas por eles durante a utilização dos círculos de proporção. Desse modo, dispuseram-se 3 câmeras de vídeos, posicionadas de forma estratégica, de maneira a obter todos

os movimentos realizados por cada grupo de participantes, para auxiliar no processo de observação, já definido anteriormente.

Todos os instrumentos de coleta de dados aplicados foram autorizados pelos participantes e pelo Comitê de Ética do IFCE e da UECE⁷⁷, a serem analisados e publicados através do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE (ANEXO A) e do parecer de ambas as instituições⁷⁸.

4.3 Os processos da interface: o contexto de desenvolvimento, o movimento do pensamento e a atividade

Na construção de uma interface entre história e ensino de matemática, Pereira e Saito (2019a) ponderam que o princípio desse estudo parte da escolha de um documento, que pode ser um tratado histórico, um instrumento antigo, uma foto, um vídeo, um excerto de um texto, dentre outras possibilidades. Assim, escolheu-se o tratado do século XVII, *The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment* (1633), para a realização de um estudo que enfocasse a construção dessa interface, pois nele há considerações sobre a descrição e o manuseio do instrumento círculos de proporção.

Em conjunto, realizou-se uma leitura de outros dois documentos de William Oughtred, *Key of Mathematicks* (1694), para compreender algumas notações matemáticas presentes na obra principal desta investigação e *The Description and use of the Double Horizontall Dyall* (1632), como forma de conhecer outros aspectos matemáticos relacionados aos conhecimentos que o autor tinha naquele período.

Também, para esse estudo, teve-se acesso a outras edições de *The Circles of Proportion* (1632, 1639, 1660), que auxiliaram tanto na leitura da edição de 1633, devido alguns erros de impressão, quanto ao viés contextual e historiográfico, pois o contato com essas outras edições do texto permitiu, ainda, a identificação de aspectos relativos ao século XVII e pertinentes ao estudo.

Entende-se que essa ação com outras obras do período é importante, porue é, a partir delas, que se pode conhecer outros aspectos inerentes à construção de conhecimentos

⁷⁷ Houve a necessidade de submeter o projeto também para a avaliação pelo CEP da UECE, pois a pesquisa foi aplicada nas dependências da Universidade Estadual do Ceará.

⁷⁸ Parecer do CEP do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, sob nº 3.207.189 e CAAE: 08817119.5.0000.5589. E parecer do CEP da Universidade Estadual do Ceará, sob nº 3.285.573 e CAAE: 08817119.5.3001.5534.

matemáticos, socialização de uma comunidade específica, questões de desenvolvimento político e econômico, dentre outros, permitindo uma melhor contextualização da época. (SAITO; DIAS, 2013a; PEREIRA; SAITO, 2019a).

Com isso, a construção da interface, aqui proposta, parte do diálogo do historiador com o educador matemático, com base em um documento histórico (PEREIRA, SAITO, 2019a) e visa dois movimentos – o movimento do contexto na qual os conceitos foram desenvolvidos e o movimento do pensamento na formação do conceito matemático (SAITO; DIAS, 2013a).

O primeiro movimento citado busca, por meio da análise do viés contextual, historiográfico e epistemológico, observar alguns aspectos referentes ao desenvolvimento do conceito matemático da seguinte forma: 1) na dimensão epistemológica, o foco permeia na compreensão de aspectos conceituais referentes àquilo que se deseja investigar. 2) a análise sob o viés historiográfico considera a vertente atualizada como forma de compreender os aspectos concernentes ao desenvolvimento do conceito. 3) a articulação dessas duas dimensões citadas à contextual se conecta para buscar expor como ocorreu o desenvolvimento dos conteúdos envolvidos na pesquisa.

O segundo, o movimento do pensamento, enfoca através do processo histórico, a formação do conceito matemático em si, pautando-se no objeto matemático em formação que permite a construção de ideias lógicas que componham o movimento do pensamento. É preciso destacar que o movimento do pensamento ocorre mais de uma vez no processo aqui descrito. A primeira vez é quando o próprio pesquisador e/ou professor busca, em um processo natural, compreender aspectos de cultura matemática não familiar a ele, através da utilização de conhecimentos matemáticos modernos.

A segunda vez está mais relacionada à aplicação de atividades, descritas a seguir, no qual os sujeitos praticantes dessa atividade se deparam com a mesma tentativa de compreender as matemáticas do passado se utilizando de conceitos modernos, observando o movimento que é feito. Embora o movimento do pensamento inicie de um processo que pode remeter ao anacronismo, ele é natural, pois só se pode manipular os conhecimentos que se tem e esses são modernos.

Desse, pode-se dizer que ambos os movimentos ocorrem de modo simultâneo, uma vez que, como cita Pereira e Saito (2019a), não há uma ordem de execução desses dois movimentos, já que isso depende da forma como a construção da interface será conduzida.

Além disso, não se pode separar a relação de ambos os movimentos, pois a construção deles é um processo contínuo, que pode surgir em qualquer etapa da pesquisa. O estudo de

ambos os movimentos resultou na construção dos capítulos 2 e 3 deste texto.

Assim, buscou-se realizar esse processo mediante algumas considerações de ordem histórica e didática, de maneira que se possa conceber uma interface entre essas áreas da educação matemática e história da matemática. Esses estudos se referem a um conjunto de ações e produções que promovam reflexões sobre o processo histórico relativo aos conhecimentos matemáticos, com o intuito de elaborar atividades didáticas que realizem essa articulação (SAITO; DIAS, 2013a).

A partir do estudo sobre a construção de uma interface entre história e ensino de matemática, a seção 4.3, a seguir, apresenta a Atividade Orientadora de Ensino (AOE), que serviu de base para o desenvolvimento das atividades propostas para o curso de extensão universitária.

4.4 Atividade Orientadora de Ensino (AOE) na interface entre história e ensino de matemática

No desenvolvimento do curso de extensão, voltado a docentes em formação continuada, realizou-se uma atividade que foi construída com base na proposta da Atividade Orientadora de Ensino (AOE) (MOURA *et al.*, 2016). Para isso, foram associados os estudos da construção de uma interface entre história e ensino de matemática de Saito e Dias (2013a), Pereira e Saito (2019a), pois a AOE “[...] se apresenta como uma possibilidade de realizar a atividade educativa, tendo por base o conhecimento produzido sobre os processos humanos de construção de conhecimento” (MOURA *et al.*, 2016, p. 95).

Nas seções seguintes, é exposto o conceito de atividade que fornece a base para a compreensão de como elaborar uma ação docente seguindo os pressupostos citados. Além disso, também se mostram os procedimentos realizados com o documento histórico utilizado para a construção dessa atividade, os objetivos e o desenvolvimento.

4.4.1 O conceito de atividade e sua relação com o ensino

Antes de iniciar o processo de construção de uma atividade para a formação de professores, entende-se que há a necessidade de se compreender o que é *atividade* em si. Para Moura *et al.* (2016), é fundamental analisar o desenvolvimento do que Leontiev (2009) chama

de atividade, pois é, a partir dessa ideia, que se pode compreender o papel da educação e da organização do ensino.

Entendendo que “[...] compreender o conceito de atividade como unidade de análise do desenvolvimento humano e as principais relações que o caracterizam, pode orientar a organização do ensino” (MOURA *et al.* 2016, p. 109), tal conceito de atividade pode fundamentar o trabalho docente.

Considerando, também, os pressupostos vigotskianos, Davidov (1988) *apud* Moura *et al.* (2016) explicita outros três conceitos importantes, que são denominados como **atividade de estudo** e se compõem de: *tarefa de estudo, ações de estudo e ações de autoavaliação e regulação*.

Para Moura *et al.* (2016, p. 97), a **tarefa de estudo** “[...] tem por finalidade a transformação do próprio sujeito, transformação essa que não é possível fora das ações objetivas que este realiza” e ela está associada à generalização teórica do conhecimento. Já as **ações de estudo** proporcionam ao estudante condições individuais para construir relações gerais, identificar conceitos principais e estruturar relações (MOURA *et al.*, 2016). Por fim, a **ação de autoavaliação e regulação** está relacionada à capacidade do estudante de avaliar suas próprias ações, no início, no percurso e no resultado de seu trabalho, no decorrer da atividade (MOURA *et al.*, 2016).

Os três componentes citados permitem que o estudante, mediado pela ação do professor, “[...] se aproprie de conceitos historicamente construídos, de forma sistematizada e intencional [...]” (MOURA *et al.*, 2016, p. 98). Assim, é preciso, inicialmente, definir o objetivo que se busca alcançar com a atividade de estudo, para que ocorra uma aproximação do estudante ao determinado conhecimento.

Esse objetivo principal deve ser estruturado de modo a

[...] possibilitar aos estudantes a apropriação dos conhecimentos e das experiências histórico-culturais da humanidade. Entretanto, dada a vastíssima experiência da humanidade, mais importante do que ensinar todo e qualquer conhecimento, o que seria tarefa impossível, é ensinar ao estudante um modo de ação generalizada de acesso, utilização e criação do conhecimento, o que torna possível ao considerar-se a formação do pensamento teórico (MOURA *et al.*, 2016, p. 112).

Levando isso em consideração, entende-se que a Atividade Orientadora de Ensino (AOE) articula objetivos, ações e operações para organizar o processo de ensino e defende que essa estruturação deve refletir na própria necessidade do aluno em se apropriar do conceito, permitindo, também, um processo de aprendizagem.

Segundo Moura *et al.* (2016), os elementos que a compõem permitem que ela se torne mediadora dos processos de ensino e de aprendizagem. Há que se destacar que, na AOE, as atividades de ensino e de aprendizagem são separadas somente para fins de explicação didáticas, pois ambas precisam concordar para se concretizar.

Também na AOE, tanto o professor quanto o aluno são sujeitos em atividade e se constituem de indivíduos portadores de conhecimentos, valores e afetividade, que influenciaram no modo em como realizaram as ações que objetivam o conhecimento novo. (MOURA *et al.*, 2016).

Em relação à atividade do professor, ou seja, à **atividade de ensino**, ela “[...] tem objetivos (individuais e coletivos), define ações para atingi-los e, conforme as condições reais, executa as operações [...] que sustentam as ações” (MOURA *et al.*, 2016, p. 116). Desse modo, uma estrutura que pode ser articulada para a elaboração da atividade do professor são as etapas inter-relacionadas, que orientam o desenvolvimento de uma atividade na interface história e ensino de matemática, que, segundo Saito e Dias (2013a), são: 1) tratamento didático; 2) intencionalidade e plano de ação; 3) desenvolvimento. Tais etapas são descritas nas seções seguintes.

4.4.2 Tratamento didático

Para elaborar uma atividade seguindo os pressupostos da construção de uma interface entre história e ensino de matemática, inicialmente, tem-se o tratamento didático que consiste em “[...] tratar o texto de acordo com os propósitos didáticos, sem invadir o texto” (SAITO; DIAS, 2013a, p. 102). Ou seja, é preciso adaptar o material a partir da finalidade da atividade a ser proposta, no entanto, sem descaracterizar esse material.

Além disso, esse tratamento didático é necessário, pois já que se refere a um documento histórico, nem sempre ele, em sua forma original, é compreendido pelos leitores (alunos), aos quais está destinada a atividade. No caso do tratado *The Circles of Proportion* (1633), de William Oughtred, foi necessário realizar uma tradução para o português brasileiro, assim como adaptar a escrita do texto, de modo a facilitar, para o público-alvo, a compreensão daquilo que se está objetivando realizar com aquele texto.

Com isso, para a ação que foi desenvolvida no curso de extensão, escolheram-se os capítulos 1 e 2 do documento *The Circles of Proportion* (1633), que abordava a descrição e a manipulação do instrumento círculos de proporção e alguns excertos dos capítulos 8, 9 e 10 por

conterem questões práticas. Essa escolha se deu, principalmente, por se tratarem dos conteúdos que se quis explorar no curso.

Nesses capítulos do documento, fez-se a tradução do texto para o português e, em seguida, uma adaptação dessa tradução, para amenizar os possíveis obstáculos durante a leitura dos excertos. É preciso levar em consideração que, na ação de traduzir e adaptar um texto, é preciso mantê-lo o mais original possível, pois, de acordo com Saito e Dias (2013a, p. 101), um tratamento adequado dos documentos, “[...] associada a tendências didático-pedagógicas da Educação Matemática, pode conduzir a uma profícua articulação entre a história e ensino de matemática”. Além disso, cabe ressaltar que esse tratamento deve ser realizado com um objetivo didático, uma vez que a finalidade é o ensino.

Pode-se dizer, também, que o tratamento didático permite que o docente organize suas ideias de modo distinto ao que é proposto pelo ensino por meio da história da matemática, segundo uma vertente historiográfica mais tradicional (MORAES, 2017).

No primeiro excerto (capítulo 01) da obra de Oughtred (1633), o tratamento didático realizado consistiu, em primeiro lugar, da omissão de algumas partes do texto, que não se faziam necessárias para a compreensão da descrição do instrumento matemático apresentado aos participantes do curso.

Essa ação foi importante, pois, na aplicação do curso piloto, percebeu-se que a leitura do excerto demandou um tempo maior e confundiu a compreensão de alguns participantes, já que eles acompanhavam a leitura junto com a manipulação da reconstrução do instrumento e esse não possuía determinadas escalas graduadas expostas no texto.

Além disso, foi preciso a inclusão de algumas palavras para completar o sentido de algumas frases, como por exemplo, quando Oughtred (1633, p. 4, tradução nossa) cita : “[...] em 90 e 45, eu a chamo de Linha da Unidade, ou do raio”, ele se referiu a 90 e 45 **graus**. Assim, foi incluída a palavra, conforme mostra o Apêndice B. Também, foram incluídas notas de rodapé, a respeito do valor do raio, que Oughtred (1633) considera como 10000 e explicando quem foi Henry Briggs (1561-1630), mencionado por ele em seu tratado.

Já no capítulo 02 da obra, foi importante também selecionar parte do capítulo, uma vez que não seria necessário a leitura, naquele momento, de todo ele. Alguns termos apresentados, em Oughtred (1633), como “proporção recíproca” e “proporção direta” foram mantidos por se tratarem de definições apresentadas em teoremas necessários para a compreensão da matemática que fundamenta a manipulação. Também, a apresentação de símbolos, tais como

“::” e “.” para indicar o cálculo de uma proporção, foram mantidas visando a proximidade com a originalidade, como se vê no Apêndice D.

Por fim, no terceiro excerto selecionado da obra, que consistiu em partes dos capítulos 8, 9 e 10, foram escolhidos exemplos resolvidos e, desse modo, foram selecionadas partes do texto para compor as práticas da atividade. De acordo com o Apêndice F, também foram mantidos os símbolos utilizados por Oughtred (1633).

4.4.3 *Intencionalidade e o plano de ação*

Quando se parte para a intencionalidade e o plano de ação, o pesquisador tem seu olhar voltado aos propósitos do processo de ensino da atividade, que está diretamente relacionado à organização de como ela será realizada e as potencialidades didáticas pertinentes. Com isso, deve-se estabelecer o objetivo e definir quais os detalhes referentes à aplicação da atividade, tais como, o tipo - uma aula, oficina ou minicurso; o tempo; o local; o público-alvo, dentre outros de ordem organizacional.

Uma vez definida a intenção, parte-se para o planejamento da execução e aplicação dessas atividades. Seguindo os pressupostos da interface, a etapa da intencionalidade e o plano de ação é explicada por Pereira e Saito (2019a, p. 349) como:

Nesta etapa, o que está em questão é o olhar do pesquisador para a potencialidade didática no intuito de articulá-la com o ensino de algum conceito matemático. Assim, uma vez delineada a intenção pela qual atividade foi elaborada, parte-se para o plano de ação, que consiste em planejar a aplicação das atividades. É por meio deste planejamento que a ação é orientada tendo em vista a prática em sala de aula.

Desse modo, para o desenvolvimento das aulas do curso, foi sistematizada uma atividade construída em quatro momentos, no qual, em cada um, buscou-se atingir um objetivo em específico, como mostra o quadro 4.

Quadro 4 – Sistematização geral da atividade.

Título da atividade		A descrição e manipulação: identificando os conhecimentos matemáticos no instrumento círculos de proporção.
Objetivo Geral		(Re)significar alguns conceitos matemáticos através da manipulação dos círculos de proporção reconstruídos.
Objetivo específicos	Momento 1	Conhecer os círculos de proporção de William Oughtred a partir da leitura da descrição do instrumento contida na obra <i>The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment</i> (1633).

	Momento 2	Compreender o processo de manipulação do instrumento círculos de proporção de William Oughtred, através de situações práticas.
	Momento 3	Identificar os elementos matemáticos presentes no manuseio do instrumento com suporte a leitura do excerto.
	Momento 4	

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Além de adotar um objetivo a cada momento do curso, também foi esquematizado os materiais de aplicação dele, baseado na proposta do PFD/GPEHM e em estudos como o de Pereira e Saito (2019a, 2019b). Assim, o curso teve a seguinte configuração de materiais:

- Atividade: chama-se de atividade a ação tomada pelos participantes, orientada pelo docente, que foi dividida em quatro momentos.
- Momentos: é o conjunto de ações, diálogos e tarefas realizados pelos grupos participantes, compostos pelos seguintes itens:
 - Ficha de Relatórios: destinados aos grupos do curso. Constitui-se como parte seguinte a cada momento proposto, no qual os participantes, em forma de um relatório, produziram anotações referentes às ações que eles realizaram. Cada momento, teve um relatório próprio.
 - Cartão de Recurso: destinado aos grupos do curso, é o material histórico, já feito o tratamento didático, que foi utilizado nos momentos (APÊNDICES B, D e F).
 - Cartão Guia: destinado aos grupos do curso, é um guia que contém a explicação do momento proposto e que serviu de base para a construção do relatório (APÊNDICES C, E, G e H).
- Cartão de Hipóteses: destinado à docente pesquisadora, são as hipóteses de ordem matemática, textual, material que foram levantadas e investigadas no decorrer do curso de extensão e da análise dos dados coletados.
- Bloco de Observações: destinado à professora pesquisadora e à observadora. É um bloco no qual são feitas anotações no decorrer da atividade do curso, visando complementar outros materiais de coleta de dados.

Além de conter os itens citados anteriormente, também foi pré-estabelecida a organização dos participantes no ambiente, que consistiu em dividi-los em equipes com, no máximo, 3 integrantes. A opção pelo trabalho coletivo “[...] ancora o desenvolvimento das funções psíquicas superiores, ao configurar-se no espaço entre a atividade intersíquica e a

atividade intrapsíquica” (MOURA *et al.*, 2016, p. 101). Assim, para caracterizar uma atividade de aprendizagem coletiva, entende-se que ela precisa conter:

[...] **a repartição das ações e das operações iniciais**, segundo as condições da transformação comum do modelo construído no momento da atividade; **a troca de modos de ação**, determinada pela necessidade de introduzir diferentes modelos de ação, como meio de transformação comum do modelo; **a compreensão mútua**, permitindo obter uma relação entre, de um lado, a própria ação e seu resultado e, de outro, as ações de um dos participantes em relação a outro; **a comunicação**, assegurando a repartição, a troca e a compreensão mútua; **o planejamento das ações individuais**, levando em conta as ações dos parceiros com vistas a obter um resultado comum; **a reflexão**, permitindo ultrapassar os limites das ações individuais em relação ao esquema geral da atividade (assim, é graças à reflexão que se estabelece uma atitude crítica dos participantes com relação às suas ações, a fim de conseguir transformá-las, em função de seu conteúdo e da forma do trabalho em comum) (RUBTSOV, 1996, p. 136, grifo nosso).

Seguindo o modelo de Rubtsov (1996), fez-se a separação das funções de cada participante nos grupos formados da seguinte maneira:

Facilitador – Certifica-se de que todos obtenham a ajuda de que precisam para realizar a tarefa; é responsável por procurar respostas para as perguntas dentro do grupo; o professor só é consultado apenas se ninguém do grupo puder ajudar. **Verificador** – Certifica-se de que todo mundo tenha completado seu relatório individual. **Relator** – É responsável por organizar o relatório do grupo e sua apresentação para a turma. **Gerenciador de Materiais (monitor)** – É responsável por obter materiais e recursos e por retirá-los adequadamente. **Controlador de tempo** – É responsável por regular o tempo da atividade proposta. **Harmonizador** – É responsável por resolver os possíveis conflitos que venham a existir no grupo (COHEN; LOTAN, 2017, p. 112, grifo nosso).

É necessário destacar que haviam seis funções a serem executadas e, assim, cada participante poderia assumir até duas funções. Após a organização do ambiente, seria então iniciada a atividade proposta, construída em quatro momentos, que são descritos, detalhadamente, no capítulo 5 em conjunto com a análise dos dados.

Como foram pré-objetivados quatro momentos, seguindo também aquilo que Rubtsov (1996) sugere, em cada um, houveram a troca dos modos de ação dos participantes, permitindo que eles tivessem diferentes posicionamentos dentro dos grupos.

A divisão do tempo, estabelecida das ações em cada momento, também compõe a organização da atividade e é melhor detalhada na seção a seguir. Adianta-se que o tempo destinado, em cada momento, buscou permitir que os participantes pudessem discutir a respeito das suas ações em cada etapa.

Além disso, a ação da docente e da observadora, durante a atividade, ocorreu de duas formas: primeiro não houve interferência nas ações dos participantes; em seguida, a partir de

hipóteses previamente estabelecidas, teve-se discussões voltadas à reflexão dos participantes. O detalhamento do tempo está melhor descrito no capítulo seguinte, na descrição da atividade.

4.4.4 Desenvolvimento

Determinados os objetivos e traçado o plano, segue-se para o desenvolvimento que se refere à realização da atividade em si. Nesse processo, ocorre a interação de alguns elementos, tais como os sujeitos praticantes da atividade, o conhecimento incorporado e o professor responsável pela situação (PEREIRA; SAITO, 2019a).

É preciso destacar que, nesse momento, é que surgem os questionamentos dos sujeitos, que se desenvolvem pelo movimento do pensamento deles e pode promover uma diferente concepção dos conhecimentos matemáticos incorporados no estudo. Com isso, nessa etapa,

[...] buscam-se considerar todas as variáveis delineadas no plano de ação de modo a propor o ensino do conceito (ou algo relacionado a ele), bem como investigar sobre os processos de ensino e de aprendizagem que emergiram da interface entre história e ensino de matemática (PEREIRA; SAITO, 2019a, p. 349).

Desse modo, o curso ocorreu segundo o cronograma exposto no quadro 5 a seguir, que consistiu, principalmente, em fornecer tempo para a leitura e a interpretação do que foi chamado de Cartão de Recurso e para a manipulação do instrumento reconstruído.

Quadro 5 – Cronograma de atividade do curso.

	ATIVIDADE	TEMPO	HORÁRIO	MODO	PRODUTO
Dia 01	Apresentação do Curso e da Atividade Assinatura do termo de concessão	30 min	8h às 8h30min	Individual	Termos assinados
	Momento 1	210 min	8h30min às 12h	Grupo	Relatório 1
	Discussão do Momento 1				
	Almoço		12h às 13h	Grupo	-
	Momento 2	240 min	13h às 17h	Grupo	Relatório 2
	Discussão do Momento 2				
Dia 02	Momento 3	240 min	8h às 12h	Grupo	Relatório 3
	Discussão do Momento 3				
	Almoço	30 min	12h às 13h	Grupo	
	Momento 4	240 min	13h às 17h	Grupo	Relatório 4
	Discussão do Momento 4				

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

O desenvolvimento, de cada momento apresentado, foi realizado objetivando a construção do conhecimento por meio da descrição e da manipulação do instrumento. Para isso, no início de cada um, os grupos participantes eram convidados a fazer a leitura do excerto disponibilizado e a manusearem os círculos de proporção reconstruídos.

4.5 Os procedimentos de organização e análise de dados

Uma vez que o curso de extensão universitária foi aplicado e as informações obtidas nele tenham sido reunidas, a fase da análise de dados envolve, inicialmente, uma organização desse material que foi, convenientemente, submetido aos processos da Análise de Conteúdo de Bardin (2011), que tem como ponto de início “[...] a **mensagem**, seja ela verbal (oral ou escrita), gestual, silenciosa, figurativa, documental ou diretamente provocada” (FRANCO, 2005, p. 13).

A Análise de Conteúdo prevê três pontos a serem executados para organizar a análise a ser desenvolvida, que são: a pré-análise, a exploração do material e o tratamento dos resultados com a inferência e a interpretação (BARDIN, 2011).

De acordo com Bardin (2011), o momento da pré-análise corresponde aos processos intuitivos iniciais que têm como objetivo tornar operacional e sistematizar as primeiras ideias de organização da análise de dados. Refere-se, então, a estabelecer uma sequência para analisar as informações coletadas, de modo flexível e preciso.

A pré-análise é executada mediante três pontos, que são: 1) escolha dos documentos; 2) formulação de hipóteses e objetivos; 3) indicadores que fundamentaram a interpretação final. Essas três etapas citadas não se constituem, necessariamente, de forma ordenada, no entanto, estão estreitamente relacionadas.

Para isso, Bardin (2011, p. 126) ressalta que a leitura flutuante deve ser a primeira atividade de uma pré-análise e “[...] consiste em estabelecer contato com os documentos a analisar e em conhecer o texto deixando-se invadir por impressões e orientações”. Em outras palavras, consiste em ler todo o material a ser submetido à análise, sem determinar, a princípio, nenhuma ação com eles, para que, então, em seguida, seja possível a associação dos dados com as hipóteses emergentes. Assim, inicialmente, tomaram-se todos os relatórios produzidos durante a atividade e se fez uma primeira leitura, buscando conhecer, de modo geral, o que estava posto nesses documentos a serem analisados.

Quanto à escolha dos documentos, primeiro ponto na pré-análise, eles representam o universo de instrumentos de coleta de dados que foram, previamente, selecionados e que serão

submetidos à análise, segundo Bardin (2011). No caso desta pesquisa, o processo de tratamento de dados consiste em sistematizar os relatórios escritos, os áudios, os vídeos e a entrevista.

No entanto, é necessário destacar que se considera os relatórios como as principais fontes de coleta de dados utilizadas nesta pesquisa, pois, devido ao tempo do curso de um mestrado ser de dois anos, não há como analisar todo o material de áudio e vídeo, juntamente com os relatórios escritos. Ainda, assim, os vídeos e áudios são considerados como um suporte aos relatórios, uma vez que, a partir deles, pode-se compreender alguns aspectos encontrados nos textos escritos.

Em relação ao segundo ponto da pré-análise, a formulação de hipóteses e objetivos, podem ser explicadas de modo separado. Levantar uma hipótese é elaborar uma afirmação, na qual se propõe verificar mediante os procedimentos de análise, que permanecem em suspenso até a aplicação de uma prova (para confirmar ou infirmar) (BARDIN, 2011). Já definir um objetivo é fornecer uma finalidade geral para o estudo.

A respeito dos indicadores que fundamentaram a interpretação final, terceiro ponto da pré-análise, Bardin (2011) explica os índices podem ser a menção de um tema em uma mensagem. Uma vez que se escolhem esses índices, os indicadores são construídos de forma precisa.

De acordo com Bardin (2011), se a etapa da pré-análise for bem compreendida e executada, a fase de análise, propriamente dita, é a aplicação sistemática do que foi decidido na pré-análise. Com isso, a exploração do material, dita segunda etapa da análise, foi realizada através de uma descrição dos dados, utilizando o Excel, em que se puderam elaborar os núcleos temáticos e, então, categorizar as informações. A etapa da análise consistiu na discussão reflexiva e crítica sobre cada categoria identificada mediante à fundamentação teórica do estudo, que é apresentada no capítulo 5 a seguir.

5 O MOVIMENTO DO PENSAMENTO NA FORMAÇÃO DO CONCEITO MATEMÁTICO: RECONHECENDO E MAPEANDO AS (RE)SIGNIFICAÇÕES

Com base nos procedimentos descritos no capítulo 4, elaborou-se um curso de extensão universitária para a formação continuada de professores de matemática, cujo público foram os discentes do Mestrado Profissional de Matemática – PROFMAT, da Universidade Estadual do Ceará - UECE. A partir disso, coletaram-se, através de relatórios, áudios, vídeos e discussões em aula, materiais que compuseram os dados deste estudo.

Assim, neste capítulo, apresenta-se a descrição desses dados, explicando de forma detalhada as etapas do desenvolvimento da atividade. Inerente à discussão do material obtido, deu-se em dois momentos. A primeira etapa da análise, conforme as sessões 5.1 e 5.2, foi realizada por meio da Análise de Conteúdo (BARDIN, 2011), que deu suporte para o momento 1 e 2 da Atividade, pois se teve como objetivo, nesta etapa, organizar as compreensões tidas durante o início do curso. Na segunda etapa da análise, na sessão 5.3, adotou-se um cunho descrito, para a discussão de cada tarefa executada nos momentos 3 e 4, já que, nesses, pretendeu-se conhecer as possíveis (re)significações de alguns conceitos matemáticos.

5.1 Apresentando a atividade e as categorias de análise

Como já apresentado no capítulo anterior, chama-se de atividade de estudo a ação tomada pelos participantes e que foi orientada pela docente ministrante do curso. A atividade foi realizada durante dois sábados e composta de quatro momentos construídos de forma sequencial, conforme descritos no Apêndice A.

Essa atividade representa o conjunto de todas as ações tomadas no curso (tarefa de estudo, ações de estudo e ação de autoavaliação e regulação) e que teve um objetivo pré-determinado – (re)significar alguns conceitos matemáticos através da manipulação dos círculos de proporção reconstruído, sendo dividida nesses quatro momentos para fins organizacionais.

Inicialmente, pretendia-se realizar a atividade descrita em três encontros, no entanto, os grupos participantes tiveram um desenvolvimento considerado satisfatório em cada momento e, por isso, a quantidade de aulas foi reformulada, passando a serem necessários dois dias de encontro.

Considerou-se, como um desenvolvimento satisfatório, quando os quatro grupos de participantes esgotaram as discussões a respeito de cada momento e responderam às hipóteses

de base etnográfica levantadas nesta ação, conforme (ANDRÉ, 2013), sem a intervenção direta da pesquisadora.

No primeiro sábado de encontro, quando os participantes adentraram na sala de aula, eles já estavam divididos em grupos com três participantes em cada (figura 26), que são, aqui, nomeados de Grupos 1, 2, 3 e 4. Eles receberam um instrumento reconstruído e uma cesta organizadora com lápis, borracha, caneta e um esquadro para ser utilizado como régua, caso necessitassem, e crachás de identificação para facilitar a análise dos dados.

Figura 26 – Exemplo de organização dos Grupos 3 e 4.



Fonte: Acervo pessoal da autora (2019).

Iniciou-se a conversa com os participantes explicando os procedimentos que seriam realizados por eles durante o curso, tais como a leitura de um excerto histórico, a manipulação do instrumento reconstruído e a produção de materiais escritos (relatórios). Além disso, fez-se uma breve contextualização histórica, apresentando aos alunos a respeito de alguns instrumentos matemáticos do século XVI e XVII, tais como as réguas de cálculo, os báculos e

as barras de Napier, quem os fabricava, para quem eram destinados e suas principais finalidades, pois,

A situação desencadeadora de aprendizagem deve contemplar a gênese do conceito, ou seja, a sua essência; ela deve explicitar a necessidade que levou a humanidade à construção do referido conceito, como foram aparecendo os problemas e as necessidades humanas em determinada atividade e como os homens foram elaborando as soluções ou sínteses no seu movimento lógico-histórico (MOURA *et al.*, 2016, p. 118).

Ainda acompanhando a proposta de Moura *et al.* (2016), em seguida, deu-se ênfase a William Oughtred (1574-1660) e os seus círculos de proporção, apresentando aos participantes uma visão geral do tratado, como o seu conteúdo e a relação com o instrumento. Por fim, destacou-se que eles iriam estudar mais a fundo dois capítulos do documento de Oughtred (1633).

Planejou-se que essa etapa inicial de apresentação do curso deveria durar até 30 minutos, para que o resto do dia pudesse ser direcionado para o desenvolvimento dos momentos 1 e 2 da atividade. Com isso, após finalizar a explicação dos encaminhamentos, teve-se a assinatura dos Termos de Consentimento Livre e Esclarecido (ANEXO A) e se deu prosseguimento para a etapa seguinte, que é descrita na seção a seguir.

O primeiro momento do curso de extensão foi elaborado para ser desenvolvido em até 210 minutos, desde a leitura inicial até a entrega dos relatórios elaborados pelos grupos. Esse tempo programado foi dividido da seguinte forma: os 120 minutos iniciais foram destinados à leitura e à exploração do material disponibilizado aos grupos, em que não poderia haver interferência da docente ministrante e da observadora; os 90 minutos finais, para instigar os participantes a levantarem questionamentos a respeito de suas compreensões.

Com o desenvolvimento da leitura e da manipulação, os participantes deveriam discutir entre seu próprio grupo, as percepções iniciais sobre o conteúdo do excerto disponibilizado (Figura 27). Devido à postura inicial da docente ministrante, de não realizar intervenções, alguns dos participantes, mesmo sendo professores atuantes, tiveram dificuldade em se desenvolverem sozinhos durante o momento 1. No entanto, era algo esperado, já que essa postura de ação docente não é comum nas salas de aula.

Figura 27 – Grupo discutindo a leitura do excerto.



Fonte: Acervo pessoal da autora (2019).

Inicialmente, foi entregue, a cada participante do grupo, um Cartão de Recurso 1 intitulado: “a descrição dos círculos de proporção de William Oughtred” (APÊNDICE B) e que possuía o detalhamento de cada parte dos círculos de proporção de acordo com Oughtred (1633). Nele, também havia uma imagem, contida na obra, de como seria o instrumento que estava sendo descrito.

Foi orientado que eles deveriam ler o excerto, tentando compreender as partes dos círculos de proporção. Após perceber que os grupos haviam realizado a leitura de, pelo menos, duas vezes do Cartão de Recurso 1 (APÊNDICE B) e iniciado algumas discussões, foi entregue a eles o Cartão Guia 1 (APÊNDICE C) e folhas A4, em que se pedia que eles registrassem as suas primeiras impressões sobre **as partes** e o **funcionamento do instrumento**, a partir do texto da **descrição**. O objetivo desse momento 1 foi que os participantes pudessem conhecer os círculos de proporção de William Oughtred, a partir da leitura da descrição do instrumento contida na obra *The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment* (1633).

Em relação ao segundo e terceiro momentos do curso, os procedimentos, a serem desenvolvidos pelos participantes, foram semelhantes aos do primeiro, que consistiu na leitura de um excerto da obra e na manipulação do instrumento. Para isso, planejou-se que a execução deles tivesse em torno de 240 minutos de duração em cada, sendo 120 minutos iniciais para que

os participantes explorassem o material sem a intervenção da docente ministrante e os 120 minutos restantes para discussões.

Para tal, foi entregue a cada participante do grupo o Cartão de Recurso 2, intitulado: “a manipulação do instrumento círculos de proporção” (APÊNDICE D) e o Cartão de Recurso 3, intitulado: “identificando os conhecimentos matemáticos presentes no manuseio do instrumento círculos de proporção” (APÊNDICE F), ambos compostos por parte do texto do capítulo 2, da obra de Oughtred (1633).

De modo análogo, logo após o início da leitura, também foi entregue o Cartão Guia 2 (APÊNDICE E), que orientava os participantes a buscarem compreender sobre o **funcionamento do instrumento** e sobre os passos realizados para o **manuseio**. O objetivo desse segundo momento foi de que os participantes pudessem compreender o processo de manipulação do instrumento círculos de proporção, através de situações práticas. Também, foi entregue o Cartão Guia 3 (APÊNDICE G), que sugeriu aos alunos, através do manuseio, examinar os **conteúdos matemáticos** presentes em cada situação do Cartão de Recurso 3, cujo objetivo foi de identificar os elementos matemáticos presentes no manuseio do instrumento com suporte à leitura do excerto.

Diferente do momento 1, os momentos 2 e 3 se constituíram na prática do manuseio (figura 28), no entanto, isso já estava sendo buscado pelos participantes desde o seu primeiro contato com os círculos de proporção.

Figura 28 – Participantes discutindo a respeito do manuseio do instrumento.



Fonte: Acervo pessoal da autora (2019).

Em uma primeira leitura dos relatórios, foi possível perceber que a estratégia de 3 dos 4 grupos, a respeito de como eles relatavam o que compreendiam, modificou, conforme é discutido na seção a seguir. Para a escrita de suas impressões, eles se ativeram, especificamente, a responder de modo direto o Cartão Guia 2. Assim, os grupos, ao construírem seus relatórios, optaram por uma descrição objetiva de suas ações. Também, é interessante destacar que, nesse segundo momento, três dos quatro grupos produziram relatórios que não foram constituídos de uma reescrita do texto histórico, de acordo com o que ocorreu no momento 1. Apenas o Grupo 4 reescreveu, com outros termos, aquilo que já estava em Oughtred (1633).

Feita a leitura e análise dos relatórios dos momentos 1 e 2, produzidos pelos quatro grupos, identificaram-se 25 núcleos de sentido a partir das falas extraídas, seguindo o referencial de análise de dados de Bardin (2011), conforme é apresentado no quadro 6.

Quadro 6 – Núcleo de sentido.

FALA EXTRAÍDA DOS RELATÓRIOS	NÚCLEO DE SENTIDO
"Compreendemos que o 6º, 7º e 8º círculos complementam os círculos maiores [1, 2 e 3] com os ângulos não contemplados por eles" (GRUPO 4).	1. Completude entre os círculos de seno (1º e 8º) 2. Completude entre os círculos de tangente (2º, 3º, 6º e 7º)
"Numa segunda leitura, observamos que o primeiro, segundo, terceiro, sexto, sétimo e oitavo círculo correspondem aos ângulos, em graus. [...] o quarto círculo, de números desiguais, indicam os valores de senos e tangentes dos ângulos dos círculos citados. [...] o texto descreve a linha da unidade e o braço indicador do círculo de proporção. [...] O quinto círculo é de 'números iguais' que entendemos corresponder à distância circular entre os números." (GRUPO 4) "Observamos a ausência da escala do cosseno, porém os valores das razões cosseno podem ser obtidos realizando a divisão entre os valores obtidos da razão seno e tangente, de acordo com os indicadores" (GRUPO 1).	3. Identificação das partes do instrumento
"Com o indicador e com o auxílio dos círculos 4º e 5º, obtemos os valores dos logaritmos de base 10" (GRUPO 1). "As respostas logarítmicas estão no 5º círculo, devendo ser interpretadas decimalmente" GRUPO 2).	4. Obtenção de logaritmos decimais
"Com o indicador e com o auxílio dos 1º, 8º e o 4º círculos, obtemos os valores das razões senos [...] Com o	5. Obtenção de valores para seno no 4º círculo

indicador e com o auxílio dos 2º, 3º, 6º e 7º, obtemos os valores das razões tangente" (GRUPO 1).	6. Obtenção de valores para tangente no 4º círculo
"Observação dos senos: entre 0,5° e 6°, teremos valores centesimais (8º círculo); entre 5° e 90°, teremos valores decimais (1º círculo)" (GRUPO 2). "O texto cita um exemplo para o seno de 23° 30' obtendo 3987, ou seja, o valor aproximado do seno multiplicado por 10.000, que é todo o raio." (GRUPO 4)	7. Relação entre a leitura do instrumento com a ordem numérica (unidade, dezena, centena, etc.)
"É possível também realizar somas ou subtrações de logaritmos decimais, fazendo o produto ou divisão dos números do quarto círculo" (GRUPO 4).	8. Propriedade de Logaritmos decimais (produto e quociente)
"Segundo os procedimentos, é possível obter a quarta proporcional conhecendo os três primeiros números com auxílio dos indicadores (braços) e do 4º círculo" (GRUPO 1).	9. Propriedade de Proporção
"O círculo possui dois ponteiros para a realização de operações binárias" (GRUPO 2). "O texto também relata que dessa forma é possível somar ou subtrair os valores de senos e tangente. Entendemos que isto deve ser feito obtendo cada valor individualmente com cada ponteiro, e realizando a operação adequada" (GRUPO 4).	10. Operação com um ou dois indicadores 11. Operação com logaritmos decimais
"Pelo que percebemos também, William Oughtred percebeu que se usasse o raio 10.000 facilitaria os seus cálculos diminuiria os erros na notação científica, tendo o seno pela sua escala, variando de 1 a 10.000" (GRUPO 3).	12. Função do raio igual a 10.000
"[...] foi possível perceber que quando um indicador (braço) ultrapassava p raio era necessário multiplicar o resultado por 10 ou dividir por 10, afinal cada volta apresenta uma unidade decimal" (GRUPO 1). "[...] calcular com o círculo o quarto proporcional, observando quantas voltas foram dadas; pois dependendo do número de voltas fazemos multiplicações (divisões) sucessivas por potências de 10" (GRUPO 2).	13. Função da linha do raio/unidade
"Observamos a ausência da escala do cosseno, porém os valores das razões cosseno podem ser obtidos realizando a divisão entre os valores obtidos da razão seno e tangente, de acordo com os indicadores" (GRUPO 1). "Todas as respostas trigonométricas estão no 4º círculo (de fora para dentro)" (GRUPO 2).	14. Relação trigonométrica (seno e tangente) entre o 4º círculo com o 1º, 2º, 3º, 6º, 7º, 8º círculos;

"Com o indicador e com o auxílio dos círculos 4º e 5º, obtemos os valores dos logaritmos de base 10" (GRUPO 1). "Entendemos que uma das funções do quinto círculo é o cálculo de logaritmos na base 10. Para isso, um dos ponteiros é colocado nos números do quarto círculo (aplicando logaritmo decimal em cada um deles), o resultado estará no quinto círculo, no número em que o ponteiro sobrepõe" (GRUPO 4).	15. Relação logarítmica entre o 4º círculo com o 5º círculo
"Segundo os procedimentos, é possível obter a quarta proporcional conhecendo os três primeiros números com auxílio dos indicadores (braços) e do 4º círculo" (GRUPO 1). "Com base nas experiências com o instrumento de proporção, percebemos que a ideia de proporção de William está diretamente ligada à ideia de logaritmo decimal" (GRUPO 3).	16. Relação entre a Proporção e o Logaritmo
"Quanto à ideia dos logaritmos, tivemos uma dificuldade inicial, pois não havíamos percebido que o círculo já trabalhava com a ideia das propriedades dos logaritmos (no caso o logaritmo do produto e do quociente" (GRUPO 3).	17. Dificuldade de visualizar as propriedades dos Logaritmos (produto e quociente)
"No primeiro momento, tivemos uma dificuldade de relacionar os valores obtidos no quarto círculo e os valores obtidos numa calculadora, relacionados no cálculo de senos e tangentes" (GRUPO 4).	18. Dificuldade na leitura do resultado obtido no instrumento 19. Comparação/ Verificação entre os resultados obtidos no instrumento e na calculadora 20. Comparação entre as notações de Oughtred (1633) x atual
"[...] os ponteiros abertos ajudam a agilizar o processo de cálculo dos logaritmos com as suas propriedades" (GRUPO 3).	21. Agilizar o processo dos cálculos
"Percebemos que é uma ferramenta complexa de ser construída, todavia bem útil, pois agiliza bastante os cálculos e vale enfatizar que, em alguns momentos, tivemos uma certa dúvida pois esquecemos de trabalhar com a ideia do raio ser diferente, já que estamos condicionados a usar o raio unitário" (GRUPO 3).	22. Dificuldade na compreensão do raio igual a 10.000 23. Ferramenta complexa
"[...] trata-se de uma ótima ferramenta que, apesar de antiga, pode ser usada até mesmo em aulas do ensino	24. Ferramenta lúdica

médio/superior em momentos lúdico ou que tratem de história da matemática" (GRUPO 2).	
"Tivemos dificuldade na interpretação do texto, devido isso passamos muito tempo tentando perceber as relações envolvendo logaritmo" (GRUPO 1).	25. Dificuldade na interpretação do texto
"[...] o texto apresenta uma linguagem de difícil acesso, pois se trata de algo escrito há muito tempo" (GRUPO 2).	

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

A partir dos núcleos apresentados no quadro 6, eles foram agrupados em 3 categorias de análise (quadro 7), que englobam esse estudo da descrição e manuseio do instrumento: Instrumento/ Material, Matemática/ Conceitual/ Manuseio e Facilitador/ Dificultador/ Didático.

Quadro 7 – Categorias.

NÚCLEO DE SENTIDOS	CATEGORIAS
1. Completude entre os círculos de seno (1° e 8°); 2. Completude entre os círculos de tangente (2° , 3° , 6° e 7°); 3. Identificação das partes do instrumento.	Instrumento/Material
4. Obtenção de logaritmos decimais; 5. Obtenção de valores para seno no 4° círculo; 6. Obtenção de valores para tangente no 4° círculo; 7. Relação entre a leitura do instrumento com a ordem numérica (unidade, dezena, centena, etc.); 8. Propriedade de Logaritmos decimais (produto e quociente); 9. Propriedade de Proporção; 10. Operação com um ou dois indicadores; 11. Operações com logaritmos decimais; 12. Função do raio igual a 10.000; 13. Função da linha da unidade; 14. Relação trigonométrica (seno e tangente) entre o 4° círculo com o 1° , 2° , 3° , 6° , 7° , 8° círculos; 15. Relação logarítmica entre o 4° círculo com o 5° círculo; 16. Relação entre a Proporção e o Logaritmo.	Matemática/Conceitual/Manuseio
17. Dificuldade de visualizar as propriedades dos Logaritmos (produto e quociente); 18. Dificuldade na leitura do resultado obtido no instrumento; 19. Comparação/Verificação entre os resultados obtidos no instrumento e na calculadora; 20. Comparação entre as notações de Oughtred (1633) x atual;	Facilitador/Dificultador/Didático

21. Agilizar o processo dos cálculos; 22. Dificuldade na compreensão do raio igual a 10.000; 23. Ferramenta complexa; 24. Ferramenta lúdica; 25. Dificuldade na interpretação do texto.	
---	--

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

A primeira categoria – Instrumento/ Material – trata da compreensão das partes do instrumento, no que diz respeito ao seu quesito físico. Já a segunda – Matemática/ Conceitual/ Manuseio – está relacionada ao conhecimento matemático identificado durante o processo de manipulação do instrumento reconstruído. Por fim, a terceira categoria – Facilitador/ Dificultador/ Didático – compreende as concepções sobre as facilidades e os obstáculos referentes ao uso do instrumento para fins didáticos, já que o público do curso foram professores de matemática. A sessão, a seguir, discute cada uma delas com base no referencial teórico desse estudo.

5.2 As partes e o funcionamento dos círculos de proporção: discutindo as interpretações segundo as categorias de análise

O instrumento, conforme apresentado no capítulo 3, mobiliza diversos conteúdos matemáticos, tais como seno, cosseno, tangente, logaritmos, proporção algébrica/geométrica, dentre outros, e no qual era esperado que os participantes, como professores de matemática atuantes, conhecessem os conteúdos da educação básica.

5.2.1 Categoria 1: Instrumento/ Material

A primeira ação dos quatro grupos formados foi a leitura do texto acompanhada, diretamente, da manipulação do instrumento que estava disponível, como se vê na figura 29, no qual era perceptível essa tentativa de comparação entre os conteúdos matemáticos do século XVII com os do século XXI, conforme o movimento do pensamento (SAITO; DIAS, 2013a).

Figura 29 – Participantes discutindo sobre o instrumento.



Fonte: Acervo da autora (2019).

As primeiras tentativas de manipular o instrumento foram direcionadas a testar valores, consoante ao que menciona o Grupo 4 (2019) – “Fizemos testes com os valores de senos e tangentes de ângulos notáveis, e obtivemos o valor esperado para o seno de 30° e tangente de 45° ”. Esse movimento de “testar” o instrumento é um processo pelo qual todos se deparam em um primeiro momento.

Com isso, é a partir do manuseio inicial do instrumento, que se pode buscar por novos conhecimentos, de diversas ordens, inclusive, matemática. Ainda, sobre os círculos do instrumento, esperava-se que os grupos percebessem, também, que as escalas se complementavam. Apenas o Grupo 4 deixa claro essa informação em sua escrita, quando relatam que “para finalizar esse momento de compreensão dos círculos, compreendemos que o 6° , 7° , e 8° círculos complementam os círculos maiores com os ângulos não contemplados por eles”.

Com efeito, Oughtred (1633), ao falar dos círculos de proporção, relaciona uma escala em cada círculo, no qual podemos perceber que o primeiro e o oitavo se complementam proporcionando valores de senos e, do mesmo modo, o segundo, o terceiro, o sexto e o sétimo, em relação às tangentes, conforme Oughtred (1633, p. 1-2, tradução nossa)⁷⁹:

⁷⁹ Em inglês, lê-se: The *First*, or outermoft circle is of *sines*, from 5 degrees 45 minuts almost, vntill 90. [...] The *second circle* is of *tangents*, from 5 degrees 45 min: almoft, untill 45 degrees [...]. The *third circle* is of *tangents*,

O primeiro, ou círculo mais externo é de *senos*, de 5 graus [e] quase 45 minutos até 90 [...]. O segundo círculo é de *tangentes* de 5 graus e 45 minutos aproximadamente, até 45 graus [...]. O terceiro círculo é de *tangentes* de 45 graus até 84 graus e 15 [...]. O sexto círculo é de *tangentes* de 84 graus até aproximadamente 89 graus e 25 minutos [...]. O sétimo círculo é de *tangentes* de aproximadamente 35 minutos até 6 graus [...]. O oitavo círculo é de *senos* de aproximadamente 35 minutos até 6 graus [...]. O quarto círculo é de *Números Desiguais* [...]. O quinto círculo é de *Números Iguais*.

Além das escalas correspondentes aos senos e às tangentes, apenas o Grupo 1 (2019) (figura 30) relatou a falta de uma escala que correspondesse aos cossenos, porém o próprio grupo justificou isso, dizendo que “[...] os valores das razões cosseno podem ser obtidas realizando a divisão entre os valores obtidos da razão seno e tangente, de acordo com os indicadores” (GRUPO 1, 2019).

Figura 30 – Participantes estudando as escalas do instrumento.



Fonte: Acervo da autora (2019).

from 45 degrees untill 84 degrees 15 minuts [...]. The sixth circle is of *tangents* from 84 degrees till about 89 degrees 25 minutes [...]. The seventh circle is of *tangents* from about 35 min: till 6 degrees [...]. The eighth circle is of *sines*, from about 35 min ill 6 degrees [...]. The Fourth circle is of *Vnequall Numbers* [...]. The fifth circle is of *Equall numbers* (OUGHTRED, 1633, p. 1-2).

Pode-se pensar nas razões que o Grupo 1 (2019) pode ter tido para considerar, inicialmente, ser necessário uma escala para cosseno. Uma possível hipótese de base etnográfica para isso se dá a partir da própria estruturação do ensino das razões trigonométricas, que ocorrem sobre as três principais (seno, cosseno e tangente) e por meio de uma ordem (primeiro seno, em seguida o cosseno e posteriormente a tangente). Ainda sobre isso, há a informação de que a tangente é a razão entre o seno e cosseno.

Isso explica o motivo pelo qual o mesmo Grupo 1, logo após, considerou que não era necessário haver uma escala de cosseno, dado então que seria possível obter valores para cosseno a partir da tangente e do seno. Porém, em nenhum momento, o Grupo 1 deixa claro o que é o seno, o cosseno e a tangente, reforçando a ideia de que, para eles, essas relações trigonométricas representam uma razão matemática sem um significado claro.

Esse trecho destaca bem o movimento do pensamento na formação do conceito matemático, mencionado por Saito e Dias (2013a) e Pereira e Saito (2019a), em que, ao identificarem as razões trigonométricas de seno e tangente, naturalmente, buscaram pela existência do cosseno. No entanto, ao notarem que ela não estava presente de forma explícita, concluíram que ela existia no instrumento, ao manipularem as outras relações (seno e tangente) para obter o cosseno. Então, esse movimento do pensamento releva que é possível deduzir o cosseno a partir do seno e da tangente e significá-lo, caracterizando-se, então, como uma potencialidade didática.

Sobre as demais partes que compunham o instrumento, apenas o Grupo 4 (2019) descreveu suas impressões a respeito.

Numa segunda leitura, observamos que o primeiro, segundo, terceiro, sexto, sétimo e oitavo círculo corresponde aos ângulos, em graus, onde o primeiro e o oitavo são de senos e os demais de tangentes. O quarto círculo, de números desiguais, indicam os valores de senos e tangentes dos ângulos dos círculos citados multiplicando por uma potência de base 10. [...] o texto descreve a linha da unidade e o braço indicador do círculo de proporção. [...] O quinto círculo é de 'números iguais' que entendemos corresponder à distância circular entre os números (GRUPO 4, 2019).

Note que o Grupo 4, ao relatar sobre as partes do instrumento, buscou reescrever as informações contidas no excerto entregue (APÊNDICE B) (quadro 8). Uma outra característica observada, é que o Grupo 4 relaciona os círculos aos ângulos, em graus, e não a uma escala graduada com esses ângulos. Isso pode ter ocorrido pela não apropriação do conceito de ângulo e de escala. A partir disso, entende-se, também, que os círculos de proporção incorporam

conhecimento que pode ser uma segunda potencialidade didática, no qual é possível significar a ideia de ângulo e escala.

Quadro 8 – Excerto da obra, capítulo 1.

1. Existem vários tipos de círculos, divididos depois de várias maneiras, junto com um indicador a ser aberto depois, à maneira de um par de compassos.
2. O *primeiro* ou círculo mais externo é de *senos*, de 5 graus [e] quase 45 minutos, até 90 graus.
3. O *segundo círculo* é de *tangentes* de 5 graus e 45 minutos aproximadamente, até 45 graus.
4. O *terceiro círculo* é de *tangentes* de 45 graus até 84 graus e 15.
5. O *sexto círculo* é de *tangentes* de 84 graus até aproximadamente 89 graus e 25 minutos.
O *sétimo círculo* é de *tangentes* de aproximadamente 35 minutos até 6 graus.
O *oitavo círculo* é de *senos* de aproximadamente 35 minutos, até 6 graus.
6. O quarto círculo é de *Números Desiguais*, que são anotados com os números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1. Quer você os compreenda como números únicos, dezenas, centenas ou milhares, etc.
7. O quinto círculo é de *Números Iguais*, que são anotados com os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Fonte: Oughtred (1633) e Apêndice B.

Ainda sobre o Grupo 4 (2019), quando é citado sobre a potência de base 10, percebe-se, também, que, associadas a isso, algumas concepções de ordem matemática a respeito da manipulação e da leitura de valores já foram iniciadas pelo grupo. Isso fica evidente quando eles relacionam a necessidade de operar com a multiplicação, em potências de base 10, embora não desenvolvam esse raciocínio matematicamente.

5.2.2 Categoria 2: Matemática/ Conceitual/ Manuseio

Os guias (APÊNDICE C, E) para a produção dos relatórios pediam que os grupos buscassem reconhecer e mapear os diferentes conhecimentos matemáticos incorporados no instrumento, a partir da descrição contida no excerto e em que consistia o manuseio dos círculos

de proporção. Pode-se dizer que, grande parte dos relatórios produzidos por todos os grupos, estiveram direcionados para essa busca específica.

O conhecimento matemático que foi, primeiramente, citado em todos os grupos, foram as razões trigonométricas de seno, cosseno e tangente, como já apresentado na categoria anterior. Além disso, esse conhecimento foi diretamente associado à compreensão da leitura dos valores no instrumento, quando surgiu a relação com o raio igual a 10.000, citado por Oughtred (1633). Sobre isso, os Grupos 2 e 3, em seus relatórios, listaram as seguintes observações:

Entre 0,5° e 6° teremos valores centesimais; (8º círculo)
 Entre 5° e 90° teremos valores decimais; (1º círculo)
 Entre 0,5° e 6° temos valores centesimais; (7º círculo)
 Entre 5° e 45° temos valores decimais; (2º círculo)
 Entre 45° e 84,25° temos valores tais quais estão no círculo; (3º círculo)
 Entre 84° e 89,5° os valores serão multiplicados por 10 (6º círculo)
 (GRUPO 2, 2019).

Observamos que os valores de seno e tangente no 1º e 2º círculos são divididos por 10. Todavia, como o raio tomado é 10000, logo o resultado realmente bate com o texto. Também testamos os valores de seno e tangente no 7º e 8º círculos e os resultados são divididos por 100. Já no 6º círculo, a tangente é multiplicada por 10, tomando o raio como 10000 (GRUPO 3, 2019).

Apesar de ter sido proposto, inicialmente, conhecer o instrumento e suas partes, pode-se dizer que esse movimento releva que isso já era uma tentativa de manusear os círculos de proporção, uma vez que estavam tentando compreender como fazer a leitura do mesmo. Essa ação já era esperada, pois a formação do professor de matemática, por vezes, influencia na ideia de que ela é apenas um conjunto de teoremas e demonstrações, regras e fórmulas e, ao deparar-se com um instrumento em que se calcula valores, os resultados são, na maioria das vezes, priorizados.

Escrevendo, em termos algébricos atuais, o que o Grupo 4 (2019) menciona, de que “[...] é possível somar ou subtrair os valores de senos e tangente [...] obtendo cada valor individualmente com cada ponteiro, e realizando a operação adequada”, compreende-se, então, a seguinte relação:

$$\sin a + \sin b = x \quad (17)$$

$$\tan a + \tan b = y \quad (18)$$

No entanto, não fica claro o que esse grupo entende pelos valores de x e y . De todo modo, é preciso recorrer ao que a literatura cita. De (17), tem-se que:

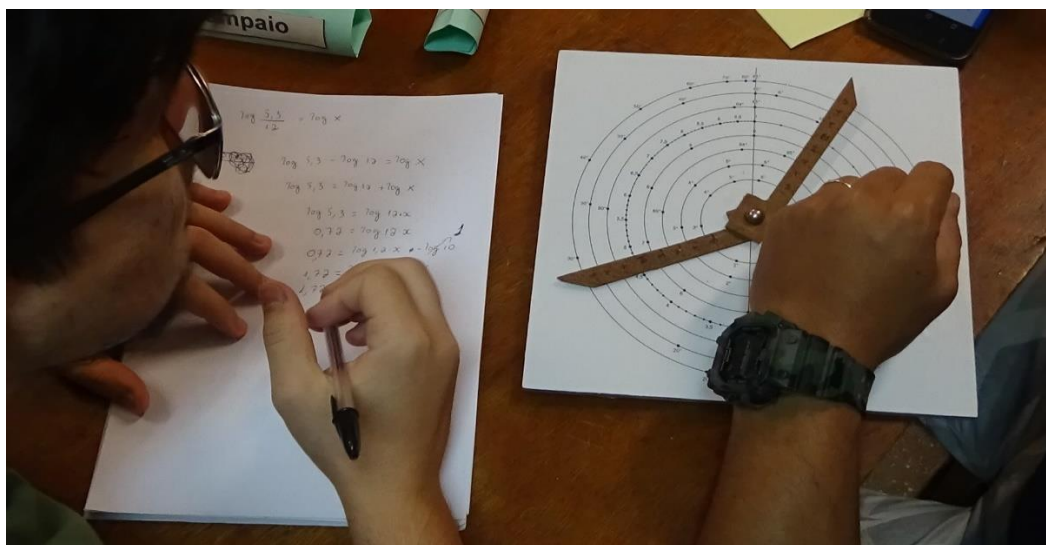
$$\sin a + \sin b \neq \sin (a + b) \quad (19)$$

Logo, os valores de x e y não podem corresponder a arcos de seno ou tangente. Assim, pode-se pensar que o grupo não soube expressar o conhecimento que estavam mobilizando ou, de fato, não o compreenderam. Isso revela um déficit na escrita matemática desses participantes e na própria compreensão dos conceitos e definições que buscaram relatar.

Uma outra relação estabelecida, feita pelos Grupos 1 e 2 (2019), afirma que as respostas trigonométricas podem ser obtidas associando os círculos 1, 2, 3, 6, 7 e 8 com o 4º. Porém, eles apenas citam a obtenção de um valor de seno ou de tangente, sem associar operações que envolvam as razões trigonométricas. Isso mostra que eles associaram a utilização dos braços antecedente e consequente a indicadores de valores como numa tabela, conforme uma das possibilidades de uso em Oughtred (1633). Em uma segunda compreensão, eles associaram a existência desses círculos pelos resultados obtidos através de testes realizados, confirmando para eles mesmos aquilo que Oughtred (1633) menciona.

Outro conhecimento matemático associado foram os logaritmos decimais e suas propriedades. Isso fica claro na escrita dos Grupo 2 (2019) - “As respostas logarítmicas estão no 5º círculo, devendo ser interpretadas decimalmente” e Grupo 3 (2019) - “[...] Testamos para saber se seria logaritmo natural ou decimal e concluímos que é decimal [...] podemos fazer o produtor dos valores no 4º círculo e teremos como resultado a soma dos valores do 5º círculo, bem como a divisão”. Mais uma vez, a estratégia utilizada pelos grupos foi o teste de valores e, a partir do relato, percebe-se que eles mobilizaram esses conhecimentos ao manusearem o instrumento, conforme figura 31.

Figura 31 – Tentativa de relação entre os logaritmos e o instrumento.



Fonte: Acervo da autora (2019).

Uma descrição parecida ocorreu no relatório do Grupo 4 (2019):

Entendemos que uma das funções do quinto círculo é o cálculo de logaritmos na base 10. Para isso, um dos ponteiros é colocado nos números do quarto círculo (aplicando logaritmo decimal em cada um deles) o resultado estará no quinto círculo, no número em que o ponteiro sobrepôr. É possível também realizar somas ou subtrações de logaritmos decimais, fazendo o produto ou divisão dos números do quarto círculo (GRUPO 4, 2019).

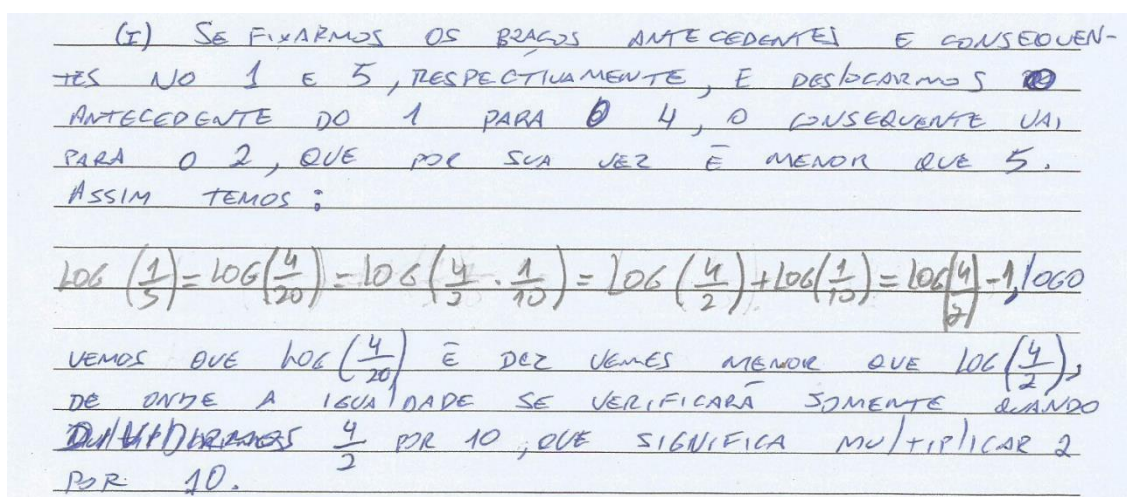
No Grupo 4, fica claro essa associação com as propriedades dos logaritmos (produto e quociente) que, em termos algébricos atuais, equivale a:

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \quad (20)$$

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c \quad (21)$$

Apesar de eles não expressarem as condições de existência dos logaritmos ($0 < a \neq 1, b > 0$ e $c > 0$), tomando como verdade, já que o próprio Oughtred (1633) apenas relaciona com a possibilidade de operar com as propriedades dos logaritmos. Com relação à leitura dos valores, o Grupo 3 (2019) (figura 32) buscou relacionar, também, ao conteúdo de logaritmos decimais.

Figura 32– Explicação do Grupo 3 sobre a leitura dos valores no quarto círculo (multiplicação).



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Vê-se, pela figura 33, que o Grupo 3 associou aos logaritmos decimais, utilizando as propriedades para concluir que, na seguinte proporção, o resultado no instrumento seria 2, mas que a leitura deveria significar 20. Note que, apesar de não escrito no relatório, ao definirem

que o resultado seria 20 e não 2, eles mobilizaram outro conhecimento matemático, que foi a ordem de valores e a característica e mantissa dos logaritmos decimais, além das propriedades dos logaritmos. Apesar de não explicitarem a relação entre esses conhecimentos, aqui, pode-se citar uma terceira potencialidade didática no que diz respeito à significação da ordem e sobre a característica e a mantissa.

Outra potencialidade didática pode ser mencionada na relação entre a manipulação do instrumento e a construção do conhecimento sobre as propriedades dos logaritmos (soma/ produto e subtração/ divisão), quando os grupos estabeleceram que o instrumento tem incorporado os logaritmos decimais e que os indicadores podem ser utilizados para as propriedades dos logaritmos. De modo análogo, fizeram o mesmo com o exemplo de divisão apresentado no excerto, como mostra a figura 33.

Figura 33 – Explicação do Grupo 3 sobre a leitura dos valores no quarto círculo (divisão).

(II) DE MODO ANÁLOGO, SE FIXARMOS, A PRIOR, OS
BRACOS EM 5 e 1, RESPECTIVAMENTE, APÓS O RESUL-
TAMENTO ENCONTRAREMOS 4 e 8 RESPECTIVAMENTE,
ONDE 8, EM VEZ DE MENOR, É MAIOR QUE 1.

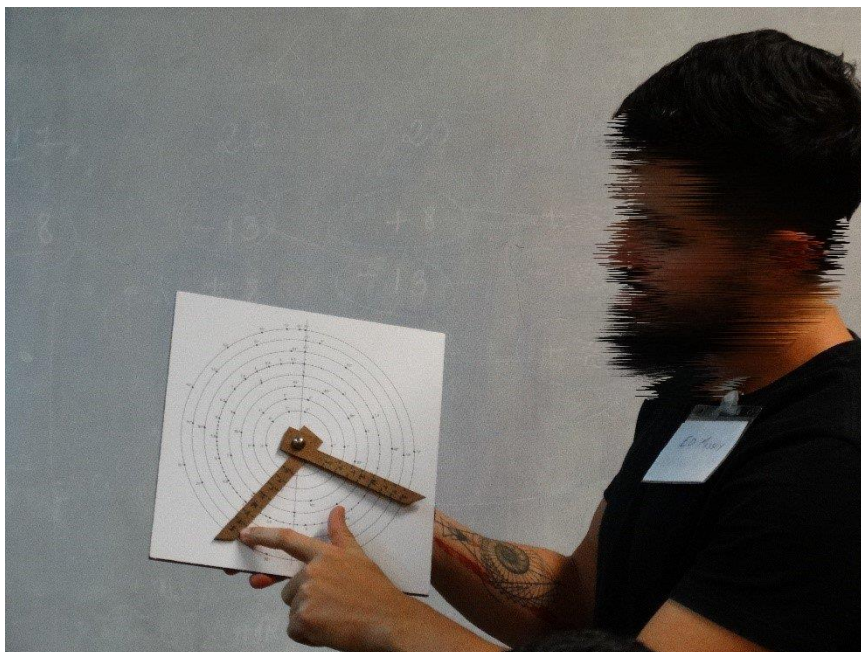
SOBEMOS QUE $\log\left(\frac{5}{1}\right) = \log\left(\frac{4}{0,8}\right) = \log\left(\frac{4 \times 10}{8}\right) =$
 $\log\left(\frac{4}{8}\right) + 1$, DE ONDE VEMOS QUE MULTIPLICAR O LOGARIT-
 MANDO POR 10, EQUIVALE A DIVIDIR O DENOMINADOR
 8 POR 10, O QUE JUSTIFICA A MULTIPLICAÇÃO DE
 A DUISA MENCIONADA POR OUGHTRED.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Note, também, que tanto na figura 32, quanto na 33, ao operarem com os logaritmos, ao final, é feita uma subtração (figura 32) de uma unidade e uma soma (figura 33) de uma unidade. Esse registro representa o movimento feito em relação ao que Oughtred (1633, p. 6, tradução nossa) explica, sobre os lugares dos números no instrumento – “[...] se um quarto número for maior que o terceiro, quando deveria ser menor ou menor que o terceiro quando deveria ser maior, é um sinal de que esse número pertence a um círculo de outro grau”. Na figura 34, vê-

se um participante apresentando a ideia do seu grupo, de como operar com os círculos de proporção.

Figura 34 – Participante mostrando como manusear o instrumento.



Fonte: Acervo da autora (2019).

Uma observação importante de destacar é que apenas o Grupo 3 (2019) citou uma compreensão do valor do raio ser igual a 10.000, conforme o excerto de Oughtred (1633). Apesar de todos os grupos citarem a existência desse raio, não explicam qual a compreensão deles por esse valor escolhido.

O Grupo 3 (2019) afirma que “[...] William Oughtred percebeu que se usasse o raio 10000 facilitaria os seus cálculos, diminuiria os erros na notação científica”. De fato, retomando a definição de seno desse período, a escolha por raios muito grandes tinha relação com a precisão de valores (PEREIRA, 2015). Quanto maior fosse o valor do raio, mais precisas eram descritas as tabelas de seno. Com isso, entende-se que o Grupo 3 estabeleceu uma relação entre os logaritmos, os senos e as tangentes e esse movimento releva a construção de um novo conhecimento, uma vez que essa associação foi percebida através do manuseio do instrumento. Assim, pode-se estabelecer uma quarta potencialidade didática, no que diz respeito à construção do conceito de logaritmos através da manipulação dos círculos de proporção.

A ideia de que os logaritmos são um conhecimento incorporado no instrumento é evidente na concepção do Grupo 3 (2019), quando eles afirmam que os círculos de proporção

têm como base o círculo dos logaritmos e complementa dizendo que, em relação “[...] à ordem dos círculos, acreditamos que não influencia no resultado, onde a ordem escolhida foi apenas para facilitar a compreensão de quem manipularia o objeto”. A ordem, a qual o grupo se refere, está na sequência de disposição dos círculos.

Um outro conhecimento incorporado surgiu no relatório do Grupo 4 (2019), que afirma sobre o quinto círculo ser “[...] de ‘números iguais’ que entendemos corresponder à distância angular entre os números”. De fato, como quando se relaciona com os termos algébricos atuais, o quinto círculo possui uma distância angular entre os pontos (0, 1, 2, ..., 9) igual.

Isso corresponde ao que já foi apresentado no capítulo 3 desta pesquisa, no qual, a partir de conceitos geométricos, a distância angular corresponde a um certo arco, que é igual para cada dois pontos. Assim, como se têm dez pontos (0 a 9), o ângulo equivale a 36° . Com isso, o Grupo 4 (2019) levantou a suposição de que essa nomenclatura de Oughtred (1633) nada mais é do que a explicação direta dessa marcação de pontos, conforme apresentado no capítulo 03 desta pesquisa.

Relativo à leitura dos valores obtidos, de acordo com o Grupo 2 (2019), “seguindo as especificações dadas, conseguimos calcular com o círculo o quarto proporcional, observando quantas voltas foram dadas, pois dependendo do número de voltas faremos multiplicações sucessivas por potências de 10”. Ou seja, para eles, a leitura deve ser feita mediante à contagem de voltas completas que os indicadores fazem no instrumento. Do mesmo modo, o Grupo 1 (2019) cita que “[...] no decorrer do experimento, foi possível perceber que quando um indicador (braço) ultrapassa o raio era necessário multiplicar o resultado por 10 ou dividir por 10, afinal cada volta representa uma unidade decimal”.

No entanto, Oughtred (1633, p. 6, tradução nossa)⁸⁰ lista uma série de observações que precisam ser percebidas antes de iniciar o cálculo com os círculos.

Primeiro, em constituir os lugares de cada número no quarto círculo se os algarismos escritos no espaço indicam unidades, dezenas ou centenas, etc. Em segundo lugar, se aquele braço que mostra o quarto proporcional, ultrapassa a *linha do Raio*; então você conta o quarto [proporcional] em um novo círculo ou grau. Em terceiro lugar, se o

⁸⁰ Em inglês, lê-se: Firft, in confituting the places of each number in the forth circle; whether the figure written in the fpces. Doe fignifie Vnites, Tenns, or Hundreds, &c. Secondly, if that arme which fhewth the fourth proportionall, doe reach beyond the line of the Radius; that then you doe account the fourth in a new circle or degree. Thirdly, whether the fourth number fought, ought to be greater, or leffer then the third. For if a fourth number bee offered greater then the third, when it fhould be leffe, or leffe then the third when it fhould be greater; it is a figne thatthat number doth appertaine to a circle of another degree. Fourthly, that looke what true diftance was betweene the fifts and fecund, that the fame bee fupposed betweene the third and the fourth, and alfo on the fame part (OUGHTRED, 1633, p. 6).

quarto número procurado deveria ser maior ou menor que o terceiro. Pois se um quarto número for maior que o terceiro, quando deveria ser menor ou menor que o terceiro quando deveria ser maior, é um sinal de que esse número pertence a um círculo de outro grau. Em quarto lugar, olhamos qual a verdadeira distância entre o primeiro e o segundo, que o mesmo é suposto entre o terceiro e o quarto, e também na mesma parte.

Tanto o Grupo 1, quanto o 2, de modo genérico, fizeram suas observações com base na quantidade de voltas que o instrumento realiza, seja de modo horário ou anti-horário. Porém, apesar da explicação de Oughtred (1633) destacar que não é necessário realizar essa contagem, os grupos mobilizaram seus conhecimentos pré-concebidos e, ao realizarem essa contagem, estavam buscando dar significado aos conceitos incorporados no instrumento.

5.2.3 *Categoria 3: Facilitador/ Dificultador/ Didático*

Além dos aspectos relativos aos conhecimentos matemáticos em si e à manipulação do instrumento, os grupos relataram, também, questões de ordem facilitadora e dificultadora no âmbito didático. Apenas duas menções facilitadoras foram feitas a respeito dos círculos de proporção, em que o Grupo 3 (2019) cita que com “[...] os ponteiros abertos ajudam a agilizar o processo de cálculo dos logaritmos com as suas propriedades”. Isso mostra a concepção que eles têm sobre o instrumento ser um aparato com a finalidade de calcular algo.

O mesmo grupo afirma que o instrumento “[...] em alguns momentos tivemos uma certa dúvida pois esquecemos de trabalhar com a ideia do raio ser diferente, já que estamos condicionados a usar o raio unitário” (GRUPO 3, 2019). É interessante destacar a menção que o Grupo 3 faz em relação ao raio. Não ficou claro o motivo pelo qual o grupo possa ter chegado à conclusão de que o fato de o raio não ser unitário, influenciaria no manuseio do instrumento. Com isso, pode-se pensar em questionamentos do tipo: qual o conhecimento estabelecido referente ao raio que esse grupo pode ter? O que significa para eles o raio “ser diferente”?

Em relação ao instrumento, outro ponto considerado positivo é que “[...] trata-se de uma ótima ferramenta que, apesar de antiga, pode ser usada até mesmo em aulas do ensino médio/superior em momentos lúdicos ou que tratem de história da matemática”. (GRUPO 2, 2019). Esse pensamento reflete uma abordagem *whiggy*⁸¹ da história da matemática, quando se busca

⁸¹ O termo foi cunhado por Herbert Butterfield (1900-1979) e significa que “[...] o historiador Whig produz o que *parece* ser uma imagem clara e determinada de o passado, mas *na verdade* o que é produzido é uma distorção”, pois o presente é a medida para a escrita desse passado (FRIED, 2001, p. 395, tradução nossa). Assim, nesse tipo de historiografia, o presente só teve um caminho verdadeiro para a progressão.

por “[...] anedotas históricas, biografias curtas, problemas isolados [...] [e que] pode ser uma estratégia muito passiva, como quando os professores mostram para seus alunos imagens de matemáticos” (FRIED, 2001, p. 393). Essa postura dos participantes já era algo esperada, uma vez que os estudos com a história, por meio de uma vertente mais atualizada, ainda é algo recente no Brasil (PEREIRA; SAITO, 2018).

Já a respeito da leitura dos excertos entregues (APÊNDICES B, D e F), o Grupo 2 (2019) relata que “o texto apresenta uma linguagem de difícil acesso, pois se trata de algo escrito a muito tempo”. Como já explicado no capítulo 4, o documento histórico, após a seleção dos excertos a serem utilizados, passou por um tratamento didático, que consistiu, principalmente, na tradução para o português, conforme Saito e Dias (2013a). Baseado no relato do grupo, reforça-se a importância da intenção da atividade e de conhecer o público ao qual ela está destinada para que a adaptação seja feita de acordo.

O Grupo 4 (2019), em específico, relatou dificuldade “[...] de relacionar os valores obtidos no quarto círculo e os valores obtidos numa calculadora, relacionados ao cálculo de senos e tangentes”, seguindo essa estratégia. No entanto, após novas leituras do excerto, também demonstrou ter compreendido o processo. Como já mencionado anteriormente, a principal estratégia dos grupos foi testar valores em busca de comprovações/ validações do instrumento, reforçando que a formulação e significação dependem das ações interiorizadas e das verificações que realizam.

5.3 Buscando algumas (re) significações: o processo para a compreensão dos conhecimentos matemáticos a partir do manuseio do instrumento

A partir do estudo da descrição e manipulação do instrumento, de acordo com Oughtred (1633), foram propostas, aos participantes, situações práticas, também da obra. Teve-se como objetivo que eles identificassem os conhecimentos matemáticos presentes no manuseio do instrumento, com suporte às leituras realizadas até então e manipulando o instrumento reconstruído. Conforme mostra o Cartão de Recurso 3 (APÊNDICE F), foram apresentados quatro exemplos com as soluções, semelhantes ao que mostra Oughtred (1633).

É preciso destacar que o Grupo 4 não teve membros presentes nessa proposta. Em relação ao Grupo 2, eles apenas afirmaram no relatório que haviam obtido êxito nos cálculos, segundo a figura 35, no entanto, não apresentaram justificativa para essa afirmação. Desse modo, os dados desse ficaram restritos aos Grupos 1 e 3.

Figura 35 – Relatório do Grupo 2 do momento 3.

TENHO QUE OBSERVAR QUE AS OPERAÇÕES FORAM REALIZADAS POR MEIO DE LOGARITMOS, MOSTRANDO-SE BEM EFICIENTE, PORÉM, O MÍNIMO CONHECIMENTO SOBRE OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS E PROPRIEDADES LOGARÍTMICA FAZ-SE NECESSÁRIAS.

OBTIVEMOS ÊXITO, TAMBÉM, NA TRANSIÇÃO DE MINUTOS/SEGUNDO PARA GRAUS. NOVAMENTE OPTAMOS POR REALIZAR O EXERCÍCIO USANDO LOGARITMOS E NÃO QUARTA PROPORCIONAL, POR UMA QUESTÃO DE CONVENIÊNCIA.

Por fim, foi feito um debate interno em relação à eficácia da régua segundo o debate geral, expondo dúvidas e outras considerações por parte dos colegas.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Para resolverem os exemplos propostos por Oughtred (1633), os grupos parecem que tentaram solucionar usando seus conhecimentos matemáticos modernos, sem manipular o instrumento. Todos buscaram, primeiramente, calcular, com lápis e papel, visando que o instrumento apenas confirmasse o resultado, conforme é apresentado a seguir.

Exemplo 01

No primeiro exemplo, Oughtred (1633) trata de conversão de unidades. Ele questiona: “quantos pés e partes decimais de um pé têm em 17,3 polegadas?” (OUGHTRED, 1633, p. 42, tradução nossa)⁸². Além disso, ele aconselha que, “se as medidas tomadas com uma régua [forem] divididas em polegadas e décimas de uma polegada, primeiro tire todos os pés inteiros e depois divida as polegadas restantes, com suas partes decimais, se houver 12” (OUGHTRED,

⁸² Em inglês, lê-se: “How many feet and decimal parts of a foot, are in 17¹³?” (OUGHTRED, 1633, p. 42).

1633, p. 42, tradução nossa)⁸³. Na resolução, Oughtred (1633, p. 42, tradução nossa)⁸⁴ sugere que:

Primeiro tire o pé inteiro que é de 12 polegadas, e lá permanecerá 5,3 polegadas, que sendo dividido por 12, você terá quase 442 mil partes. Portanto 17,3 polegadas é 1,442 pés. E ao contrário 1,442 pés, serão reduzidos em 17,3 polegadas, sendo multiplicados por 12.

Para o primeiro exemplo, o Grupo 1 (2019) afirma ter usado a ideia da quarta proporcional para a resolução. De fato, tratando-se de uma conversão de unidades, a questão fornece, como dados, quanto vale um pé inteiro em polegadas e, desse modo, remete-nos aos teoremas explicitados por Oughtred (1633, p. 5, tradução nossa)⁸⁵:

Teorema: Se de três números dados, o primeiro divide o segundo e o quociente multiplica o terceiro; o produto será o quarto proporcional aos três números indicados.
Teorema: Se três números são dados, o segundo divide o primeiro e o quociente divide o terceiro; este quociente posterior será o quarto proporcional, aos três números dados.

Ilustrando a ideia, o Grupo 1 (2019) escreve: “usamos a quarta proporcional, $1:12 = x:17,3$, para determinar usamos o 4º círculo, onde o 1º braço em 1 e o 2º braço em 12, depois o 1º braço [deveria ser o 2º braço] em 17,3 e obtemos 1,442 aproximadamente [resultado no primeiro]”. Nota a expressão escrita pelo Grupo 1 (2019), que, algebricamente, eles operaram corretamente, pois, associando aos conhecimentos matemáticos atuais, tem-se que:

$$\frac{1}{12} = \frac{x}{17,3} \therefore 12x = 17,3 \therefore x = \frac{17,3}{12} \cong 1,442$$

No entanto, ao descrever como manipularam o instrumento, o posicionamento dos indicadores (braços) corresponde ao cálculo da operação de multiplicação e não da divisão, conforme a questão indica. Assim, pode-se pensar que o Grupo 1 não utilizou o instrumento para o cálculo proposto, relatando somente a álgebra indicada, já que o fato ocorreu somente nesse exemplo. Já o Grupo 3 (2019) relata uma abordagem diferente. Eles descrevem:

⁸³ Em inglês, lê-se: “If the meafures be taken vpon a Ruler diuvided into Inches and tenth parts of an Inch, fift take out all the whole feet, and then diuide the Inches remaining, with their decimall parts if there be any by 12” (OUGHTRED, 1633, p. 42).

⁸⁴ Em inglês, lê-se: Firft take out the whole foot which is 12 Inches, and there will remine Inches 5¹³: which being diuided by 12, you fhall haue 442 thoufand parts almoft: wherefore Inches 17¹³, is feet 1⁴⁴². And contariwife, feet 1⁴⁴², fhall be reduced into Inches 17¹³, being multiplied by 12 (OUGHTRED, 1633, p. 42).

⁸⁵ Em inglês, lê-se: “*Theoreme.* If of three numbers given, the firft divide the fecond and the quotient multiply the third, the product fhall be the fourth proportionall to the three numbers given. *Theoreme.* If of three numbers given, the second divide the firft, and the quotient divide the third, this later quotient fhall be the fourth proportionall, to the three numbers given (OUGHTRED, 1633, p. 5).

Entendemos que o texto propõe a conversão de polegadas em pés. Para tanto, ele propõe retirar ‘um pé inteiro’ que são 12 polegadas do valor a ser convertido. [...] para transformar 17,3 polegadas em pés, subtraímos 12 restando 5,3 que dividido por 12 dá aproximadamente 0,442 que somado ao pé inteiro temos 1,442 que é o valor convertido.

Vê-se que a primeira interpretação da questão foi relacionada à conversão de unidades de medida. Ao continuar, descrevem os procedimentos de modo semelhante a Oughtred (1633), não ficando claro se houve a manipulação do instrumento ou se realizaram cálculos somente algébricos.

Observamos que os cálculos feitos no círculo de proporção são feitos pelos logaritmos. Pela régua,

$$\log 5,3 \cong 0,724 \text{ e } \log 12 = \log(4.3) = \log 4 + \log 3 = 0,602 + 0,477.$$

Assim,

$$\log 12 \cong 1,079.$$

Subtraindo 0,742 e 1,079 temos $-0,355$.

Pela régua [os círculos],

$$10^{-0,355} \cong 0,442$$

que “bate” com a resposta. (GRUPO 3, 2019)

Na explicação, o Grupo 3 (2019) faz associação com as propriedades dos logaritmos, com a proporção da questão, mostrando que o processo matemático (algébrico) foi compreendido. No entanto, não fica claro, se para eles, essa mesma relação pôde ser observada ao manipularem o instrumento, já que eles não relatam essa utilização.

Exemplo 02

No exemplo 02, Oughtred (1663, p. 48, tradução nossa)⁸⁶ diz:

Primeiro, portanto, a base deve ser encontrada, de que forma ela é, e então divida 1 por essa mesma base e o quociente será a altura de uma seção dele, que é igual a um pé sólido. [...] uma coluna ou pedaço de madeira, cujos lados são todos paralelos, tem a largura de 1,75 pés, e sua espessura é de 1,25 pés que, multiplicados juntos, o produto será de 2,1875. Divida, portanto, 1 por 2,1875 e o quociente será aproximadamente 0,457143. E tanto é a altura de um pé sólido, daquele pedaço de madeira.

Para esse exemplo, o Grupo 1 (2019, grifo nosso) toma o mesmo posicionamento e usa a quarta proporcional. No entanto, dessa vez, eles relatam o seguinte processo de manuseio: “1: 2,1875 = y: 1, para determinar usamos o 4º círculo onde o primeiro braço em 1 e o segundo braço em 2,1875, depois o **segundo braço** em 1 e o primeiro vai aproximadamente 0,457143”

⁸⁶ Em inglês, lê-se: Firft therefore the bafe is to be found, of what fafhion foeuer it is, as hath euen now beene fhewed, either in this Chapter, or in the laft before and then diuided 1 by that fame bafe: th quotient fhall bee, the height of a Se&tion, which is equall to one foot folid. [...] a colume, or peece of tymber, whofe (OUGHTRED, 1633, p. 48).

(GRUPO 1, 2019). Percebe-se que, agora, diferente do que ocorreu no exemplo 1, eles utilizam o procedimento indicado para a divisão, conforme Oughtred (1633) explica.

A partir disso, é possível levantar outra hipótese, com base em André (2013), para compreender o que ocorreu entre o exemplo 1 e 2, feito pelo Grupo 1, já que, apenas no segundo, eles descreveram corretamente o manuseio do instrumento para chegarem ao mesmo resultado de Oughtred (1633). É provável que eles não tenham compreendido o correto posicionamento/ manuseio dos indicadores.

Segundo o que explica Oughtred (1633), inicialmente, é preciso definir qual indicador será o **braço antecedente (1º)** e qual será o **consequente (2º)**, pois somente, dessa forma, é possível operar com a multiplicação e a divisão de valores corretamente. Isso ocorre porque o movimento para a multiplicação preza o reposicionamento do braço antecedente e o consequente apontará o resultado. Já, na divisão, o braço antecedente aponta o resultado.

Outro ponto a ser citado é que, no relatório do Grupo 1(2019), eles descrevem valores com aproximações de quatro e seis casas decimais. No entanto, o instrumento reconstruído apenas fornece essas aproximações até duas casas decimais. Desse modo, pode-se questionar se o instrumento foi utilizado para os cálculos ou se, novamente, apenas o suporte algébrico descrito.

Já o Grupo 3 (2019) utiliza a mesma técnica para a resolução, que consistiu em descrever, minuciosamente, os cálculos tomados. Sobre o exemplo 2, eles relatam que “[...] fala sobre a altura de um pé sólido de um pedaço de madeira. Para o cálculo, de multiplicar a largura e a espessura, $1,75 \times 1,25 = 2,1875$. Dividindo 1 por 2,1875, teremos 0,457143 que é o valor do pé sólido”. (GRUPO 3, 2019). Até então, eles apenas reescrevem o mesmo procedimento adotado por Oughtred (1633). Eles continuam:

Observando no círculo de proporção fizemos,

$$\log(1,75 \cdot 1,25) = \log(1,75) + \log(1,25) = 0,243 + 0,096 = 0,339.$$

Assim,

$$10^{0,339} = 2,1875.$$

Seguindo o exemplo fizemos,

$$\log(1 : 2,1875) = \log(1) - \log(2,1875) = 0 - 0,339 = \log 10^{-0,339} = 0,457143$$

que é o valor procurado. (GRUPO 3, 2019).

Fica claro que o Grupo 3 conseguiu associar as proporções nas questões ao conteúdo de logaritmos e suas propriedades. Porém, além de apenas descrever algebricamente e não mencionar o movimento do instrumento, eles também realizam aproximações com até 6 casas decimais, ao buscar associar com a descrição de Oughtred (1633).

Nesse ponto, é possível inferir que os grupos priorizaram, a todo instante, o resultado contido no excerto de Oughtred (1633), provavelmente, tendo como base somente o cálculo algébrico e não utilizando o instrumento.

Nota-se que, a todo instante da resolução dos exemplos, os grupos movimentam seus conhecimentos matemáticos atuais para compreender as matemáticas em Oughtred (1633) e nos círculos de proporção, caracterizando o movimento do pensamento de Saito e Dias (2013a) e Pereira e Saito (2019a).

Exemplo 3

A respeito do exemplo 3, Oughtred (1633, p. 58, tradução nossa)⁸⁷ explica e, em seguida, questiona:

O conteúdo de um vaso, sendo dado em polegadas cúbicas, ou em [partes] décimas cúbicas de um pé, para descobrir quantos galões ele contém. Isto é feito facilmente se você dividir o conteúdo dado em polegadas, por 272,25 para medida de cerveja inglesa e por 231, para medida de vinho. Mas se o conteúdo for dado em partes decimais de um pé, divida-o por 157,5521 para a medida de cerveja inglesa e por 133,6803 para a medida do vinho.

Quantos galões de vinho estão em um vaso contendo 24839,56 polegadas cúbicas, ou 14374,746 partes cúbicas de um pé?

Divida 24839,56 por 231 ou divida 14374,746 por 133,68 e o quociente será 107,53 galões de vinho.

Para buscar a compreensão sobre o exemplo 3, o Grupo 1 (2019) novamente se utiliza do cálculo algébrico para encontrar os resultados questionados, conforme a figura 36. Vê-se que eles optaram pela descrição algébrica utilizando notações atuais, diferentemente do que ocorreu nos exemplos 1 e 2, utilizando o símbolo $\div$ para divisão e a barra correspondente aos números fracionários para a escrita de uma equação de primeiro grau, com a incógnita x .

⁸⁷ Em inglês, lê-se: The contente of a vefell, being giuven in cubic inches, or in cubic tenth parts of a foot, to finde how many gallons it containeth. This is eafily done if you diuide the content giuven in inches, by 275^[25] for ale meafure, and by 231, for wine meafure. But if the content be giuven in decimall parts of a foote diuide it by 157^[5521], for ale meafure; and by 133^[6803] for wine meafure.

How many wine gallons are in a vefesll containing 24839^[56] cubic inches, or 14374^[746] tenth parts of a foote. Diuide 24839^[56] by 231, or diuide 14374^[746] by 133^[68], and the quotient fhall be 107^[53] wine gallons (OUGHTRED, 1633, p. 58).

Figura 36 – Descrição do exemplo 3 do Grupo 1.

Exemplo-3

Usando a quarta proporcional

$$24,83956 \div 0,231 = 107,53$$

$$\frac{24,83956}{0,231} = \frac{x}{1} \quad \text{com o manuseio do } 4^\circ$$

pelo círculo e dos pontos obtemos o resultado da divisão $24,83956 \div 0,231$

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Apesar de não estar claro se foi feita a utilização do instrumento para o cálculo, o Grupo 1 mobilizou seus conhecimentos a respeito das ordens dos valores escolhidos para as expressões. É provável que isso tenha ocorrido, por já ser algo incorporado no conhecimento matemático tido por eles. Assim, não houve a necessidade de **anotar** ao “[...] constituir os lugares de cada número no quarto círculo se os algarismos escritos no espaço indicam unidades, dezenas ou centenas, etc.” (OUGHTRED 1633, p. 6, tradução nossa)⁸⁸.

Assim, como nos outros exemplos apresentados pelo Grupo 1 (2019), percebe-se a necessidade do grupo em reafirmar a veracidade do instrumento, pois eles sempre confrontam o resultado expresso no excerto pelo cálculo algébrico atual e, sem deixar claro, com o que o instrumento aponta. Uma outra situação é que, na resolução do Grupo 1 (2019), eles apresentam apenas uma parte da solução, enquanto a questão sugere quatro etapas. No entanto, isso não confirma que toda a questão não foi compreendida, uma vez que eles relatam apenas o que seria a parte final.

Já o Grupo 3 (2019) descreve com detalhes os procedimentos tomados: “convertemos 24839,56 polegadas³ em galões de vinho, ou 14374,746 em pés³. A solução é uma simples divisão de 24839,56 por 231 ou 14374,756 por 133,6803”. Para realizar essa conversão de valores, eles continuam:

Pelos círculos de proporção

$$\log 24839,56 = \log 2,483956 + \log 10000 = 0,3954 + 4 \quad \text{e} \quad \log 231 = \log 2,31 + \log 100 = 0,3636 + 2.$$

Assim,

$$4,3951 - 2,3636 = 2,0315. 10^{2,0315} = 107,53$$

⁸⁸ Em inglês, lê-se: “[...] in constituting the places of each number in the fourth circle, whether the figures written in the spaces do finifie Vnites, Tenss, or Hundreds, &c.” (OUGHTRED, 1633, p. 6).

que é o valor da conversão de polegadas para galões de vinho. De forma análoga para converter pés para galões de vinho (GRUPO 3, 2019).

Eles mobilizaram a ideia de característica e mantissa, dos logaritmos decimais, para determinar a ordem dos valores a serem escolhidos nos círculos de proporção. Como já apresentado no capítulo 3 desta pesquisa, o logaritmo de um número pode ser compreendido como duas partes: uma inteira e outra decimal. Assim, a parte inteira corresponde à característica e a decimal, à mantissa. Desse modo, para manipular o instrumento, é preciso ter compreendido que os logaritmos decimais de dois valores, que diferem entre si, em relação à posição da vírgula, têm em comum a mesma mantissa.

Exemplo 04

O último exemplo (4), Oughtred (1633, p. 66, tradução nossa)⁸⁹ diz:

Antes de entregarmos as regras de tais operações, não será inconveniente estabelecer certas Reduções, das quais podemos ter uso frequente.

Reduzir as partes sexagesimais em decimais. Divida os sexagésimos dados por 60.

Quantos decimais são 34'12''?

Aqui são necessárias duas reduções, primeiro de segundos em demais de minutos, então de minutos com seus decimais, em decimais de graus. Assim,

$$60 . 1 :: 12'' . 0,2$$

novamente

$$60 . 1 :: 34,2' . 0,57^\circ$$

Por isso, 34'12'' é igual a 0,57 de um grau.

E contrariamente para reduzir em partes decimais de graus em sexagesimais. Multiplique a parte decimal dada por 60.

O Grupo 1 (2019) buscou utilizar a notação de Oughtred (1633) ao escrever a proporção, no entanto, ainda usou x para simbolizar a incógnita procurada. Eles relatam: “usando a quarta proporcional, temos, fazendo as devidas alterações que $60 : 12 :: x : 1$, usando o círculo 4, colocando primeiro braço 6 e o segundo no 1,2, em seguida o primeiro no 1 teremos 0,2” (GRUPO 1, 2019).

Isso expressa que foi compreendida a ideia da ordem dos valores dispostos no instrumento. Para confirmar esse entendimento, a leitura final no instrumento, ao ser

⁸⁹ Em inglês, lê-se: Before wee deliuer the rules of such operations, it will not be inconuenient, to fet downe certaine RedEtions, wherof we may haue frequent vfe. To reduce fexagefime parts into decimals. Diuide the fexagefimes giuen by 60. How many decimals are 34', 12''? Here are required two reduEtion, firft of the feconds into decimals of minutes: then of the minutes with their decimals, into decimals of degrees, thus, $60 . 1 :: 12'' . 0^{12}$ againe $60 . 1 :: 34^{12} . 0^{57}$. Wherefore 34', 12'' are equall to 0^{57} of a degree. And contrariwife to reduce decimall parts of a degrees in fexagefimes. Multiply the decimall part giuen by 60 (OUGHTRED, 1633, p. 66).

manuseado, corresponde a 2 e o grupo descreve que esse valor é lido como 0,2. Porém, o exemplo apresentava duas partes e o Grupo 1 apenas relatou sua compreensão da primeira.

O Grupo 3 (2019) descreveu sua compreensão baseado nas operações básicas (divisão) e nas propriedades dos logaritmos:

No exemplo 04, $34'12''$ sofre duas reduções. Primeiro $12'':60 = 0,2'$. Assim $34,2':60 = 0,57^\circ$. Logo, $34'12'' = 0,57^\circ$. Observado os círculos de proporção,

$$\log\left(\frac{12}{60}\right) = \log\left(\frac{1}{5}\right) = \log(1) - \log(5) = 0 - 0,69897 = -0,69897$$

Assim, $10^{-0,69897} = 0,2$. Logo $12'' = 0,2'$. Assim $34'12'' = 34,2'$.

Fazendo agora $\log\left(\frac{34,2}{60}\right) = \log(3,42) - \log(6) = 0,5340 - 0,7781 = -0,2441$.

Assim, $34'12'' = 0,57^\circ$ como queríamos. (GRUPO 3, 2019).

Perceba que, sempre ao se referir ao instrumento, o Grupo 3 enfoca os logaritmos, já o Grupo 1 prioriza as proporções. No entanto, compreender ambas as ideias como complementares (re)significa a ideia dos logaritmos e das proporções, pois ambos estão incorporados no instrumento.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Dentro dos estudos no âmbito da educação matemática, buscar meios que possibilitem auxiliar o ensino e a aprendizagem de conceitos é um tema que tem destaque nas pesquisas acadêmicas. Um deles são os estudos que buscam articular a história da matemática, visando à utilização de recursos fornecidos por ela.

Apesar disso, percebe-se que a associação entre a educação matemática e a história da matemática, que, aqui, chamou-se de uma interface entre história e ensino de matemática, ainda, precisa ser esclarecida, no que diz respeito às formas de realizá-la. A respeito, um meio para essa articulação se pauta na utilização de recursos da história, dentre eles, os instrumentos matemáticos inseridos em tratados, que podem ser fonte para o desenvolvimento de um estudo que envolva a construção de conceitos matemáticos.

Entendendo, portanto, que é uma abordagem recente nas pesquisas brasileiras, conforme Pereira e Saito (2018), decerto, uma das principais formas de auxiliar nos processos de ensino de conteúdos matemáticos é através de uma estrutura formativa, que possa possibilitar ao professor de matemática conhecer um novo posicionamento para suas ações docentes.

Por isso, considera-se importante o desenvolvimento de cursos de extensão, voltados à formação docente, em aspecto inicial ou continuado, para reorientar o ensino de matemática, visto que o professor é peça fundamental nesse processo.

Sabendo-se disso e tomando o referencial para a construção de uma interface entre história e ensino de matemática, buscou-se, através de um estudo contextual e epistemológico e de caráter historiográfico atualizado, promover uma aproximação entre essa articulação a um grupo de professores de matemática participantes de um curso de extensão.

Essa ação foi tomada mediante à elaboração de uma questão que norteou todo o estudo e de objetivos que sustentaram as ações estabelecidas na pesquisa. Dessa forma, levando-se em consideração a formação de professores, teve-se como questionamento: *como professores de matemática, em formação continuada, mobilizam conhecimentos matemáticos através do manuseio dos círculos de proporção (1633), em uma interface entre história e ensino de matemática?*

Para isso, considerou-se como essencial a compreensão de como realizar estudos na área da história da matemática, associado a aspectos matemáticos, didáticos e pedagógicos, pois entende-se que o objetivo de construir uma interface é propor uma articulação entre os conceitos matemáticos com a história.

Para conduzir a pesquisa, baseado na questão a ser estudada, teve-se como objetivo geral conhecer como os conhecimentos matemáticos, incorporados nos círculos de proporção, são mobilizados no estudo de seu manuseio, em uma interface entre história e ensino de matemática. De modo mais específico, formulou-se três objetivos específicos para delinear o estudo.

O primeiro objetivo específico foi conhecer, por meio das dimensões históricas, o cenário no qual os círculos de proporção e o documento *The Circles of Proportion* (1633) esteve inserido. Para tanto, fez-se um estudo bibliográfico e documental, reunindo fontes históricas e textos diversos para a construção dos aspectos contextuais e epistemológicos.

Com isso, notou-se que os séculos XVI e XVII, em Londres, foram palco de diversas mudanças, no que diz respeito ao desenvolvimento dos estudos das matemáticas. Nesse contexto, William Oughtred, um ministro anglicano, dedicou parte de sua vida ao estudo das matemáticas. Sobre isso, uma de suas ações era a escrita e a publicação de tratados que versavam sobre os conteúdos matemáticos do período, voltados a um público específico, que tivesse interesse em estudar suas obras.

Um de seus tratados, o documento *The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment*, continha sobre um instrumento matemático que Oughtred (1633) chamou de círculos de proporção. Sabe-se que William Oughtred, detentor do título de “criador” do instrumento, direcionou-o para fins didáticos, uma vez que ele também ensinava matemática.

No entanto, ele prezava pelo manuseio do instrumento somente após uma boa compressão dos conteúdos matemáticos que estão incorporados. Oughtred o defendia apenas para facilitar cálculos matemáticos e não poderia ser feita antes de uma compreensão sólida dos conhecimentos matemáticos.

Em um âmbito didático, voltado ao ensino de matemática, considera-se que a manipulação dos círculos de proporção, conforme é descrito no tratado de Oughtred (1633), pode levantar questões sobre a construção e ressignificação de conceitos matemáticos.

A obra também engloba outras artes, como chamava William Oughtred, tais como a astronomia, a navegação e a aritmética. Em sua escrita, ele tinha uma característica específica nos tratados, que ele se preocupava em inserir símbolos para uma melhor escrita matemática e a utilização de instrumentos matemáticos associado ao estudo das teorias. A partir daí, podem surgir diversas possibilidades didáticas relativas às notações utilizadas em Oughtred (1633).

Apesar disso, não se pode afirmar que foi William Oughtred quem introduziu, primeiramente, essas notações vistas em seu tratado, uma vez que o estudo está baseado em

uma concepção historiográfica atualizada. Dessa forma, a reescrita da história se dá de modo amplo, fornecendo compreensões contextualizadas sobre o instrumento investigado.

Observou-se, também, na construção do contexto (capítulos 2 e 3 dessa pesquisa), que os estudos referentes às matemáticas estiveram relacionados a conteúdos práticos e que o saber-fazer estava presente em Londres, no século XVII, principalmente, pelos fabricantes dos instrumentos. Pode-se destacar que uma principal dificuldade foi a escrita da história em uma vertente atualizada, na qual se teve que buscar elaborar um contexto diferentemente do que se tem nos tradicionais estudos que envolvem a história da matemática.

O segundo objetivo se direcionava a identificar os aspectos físicos e matemáticos dos círculos de proporção, assim como as questões contextuais e epistemológicas que perpassaram o período no qual ele foi concebido. Para esse fim, adotou-se, também, uma postura de cunho bibliográfico e documental.

Ao se constituir uma investigação sobre o instrumento físico, percebeu-se, inicialmente, que a construção do mesmo não pôde ser considerada uma cópia, uma vez que, ao se compreender a vertente historiográfica atualizada, não há materiais e nem tampouco o saber-fazer da época. Com isso, a princípio, pode-se dizer que o instrumento círculos de proporção de William Oughtred exerceu significativa contribuição para a resolução de questões práticas no século XVI e XVII, visto que o instrumento incorporava diversos conteúdos matemáticos.

Em uma leitura do tratado, notou-se que Oughtred (1633) não se preocupava em descrever os detalhes matemáticos referentes à construção dos círculos de proporção, pois isso já deveria ser de conhecimento dos fabricantes desses instrumentos, conforme Saito (2012) e relevam uma associação entre o saber e o fazer. Com isso, os seus círculos de proporção foram descritos no capítulo 1 de Oughtred (1633), de modo a apenas apresentar as escalas do instrumento.

Através de suas escalas, sabe-se que há diversos conhecimentos matemáticos incorporados no instrumento em sua descrição, dentre os quais, seno, tangente e logaritmos. Sobre o seu manuseio, pode-se complementar com a ideia de razão e proporção. Porém, é impossível listar todos os saberes contidos no instrumento.

Com isso uma dificuldade, foi o estudo desses conhecimentos matemáticos incorporados no instrumento, uma vez que, nessa perspectiva historiográfica atualizada, teve-se que imergir nos conhecimentos matemáticos de um outro período, no caso, dos séculos XVI e XVII, buscando não produzir ideias anacrônicas.

O terceiro e último objetivo específico, conforme o foco na formação de professores, foi de descrever como se afigura o movimento do pensamento de professores de matemática, em formação continuada, em um curso de extensão universitária. Para isso, elaborou-se um curso de extensão universitária, voltado a professores em formação continuada, em específicos discentes do Mestrado Profissional de Matemática (PROFMAT).

O curso teve o objetivo de (re)significar alguns conceitos matemáticos através da manipulação dos círculos de proporção reconstruídos. E, uma vez definido os instrumentos de coleta e análise de dados, estabeleceu-se a Análise de Conteúdo de Bardin (2011), para organizar e categorizar as compreensões do curso e uma abordagem de cunho descritivo para a discussão das tarefas executadas, na qual se pretendeu pelas possíveis ressignificações.

Ao analisar os instrumentos de coleta de dados, a primeira parte dessa análise resultou na identificação de 25 núcleos de sentido, que foram organizados em três categorias: Instrumento/Material, Matemática/Manuseio e Facilitador/Dificultador/ Didático.

Assim, no segundo momento de análise, a discussão descritiva das tarefas executadas aponta para uma possível compreensão da manipulação do instrumento para a ressignificação de conceitos, já que houveram associações entre conhecimentos matemáticos que, comumente, não há, tais como as relações trigonométricas de seno, cosseno e tangente e os logaritmos e suas propriedades.

Também, ficou claro que a posição de uma matemática compreendida somente como um conjunto de fórmulas, ainda, é presente e fortemente vinculada à formação desses professores de matemática e isso foi uma dificuldade no momento de aplicação do curso. Em contrapartida, durante o curso notou-se um déficit na escrita matemática dos participantes, nos relatórios produzidos. No entanto, é preciso ressaltar que a experiência da manipulação do instrumento mostrou uma relação com a reflexão para o entendimento dos conceitos matemáticos.

Desse modo, uma perspectiva para futuras investigações se pauta, especificamente, no incentivo à construção de outras interfaces entre a história e o ensino de matemática através do estudo de documentos históricos, pois se entende que eles possuem uma gama de conhecimentos capazes de promover a compreensão e a ressignificação da ideia de uma matemática pronta. Entende-se que isso pode auxiliar nos processos de ensino e de aprendizagem.

Uma outra perspectiva está na modificação do que se entende por “usar” a história da matemática em sala de aula. Após o estudo aqui apresentado, fica claro que a história da

matemática pode ser incorporada nas aulas de matemática para além de curiosidades, biografias e fatos destacados como importantes.

Seguindo essa perspectiva, pretende-se dar continuidade ao estudo, no âmbito agora de um doutorado, visando ao desenvolvimento de ações que possam contribuir para os processos de ensino e de aprendizagem de matemática, acompanhando os aspectos didáticos-pedagógicos, associadas à história.

REFERÊNCIAS

ALVES, Verusca Batista. PEREIRA, Ana Carolina Costa. A reconstrução dos círculos de proporção no geogebra como uma atividade para a mobilização de conhecimentos matemáticos. **RHMP**, local, v. 5, n. 1, p. 21-28, 2019. Disponível em: <<http://www.rhmp.com.br/index/index.php/rhmp/article/view/69>>. Acesso em: 01 jan. 2020.

ALVES, Verusca Batista. PEREIRA, Ana Carolina Costa. O instrumento “círculos de proporção” exposto na obra de William Oughtred (1633): um elemento na interface entre história e ensino de matemática. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, São Paulo, v. 7, n. 2, p.89-108, 2018a.

ALVES, Verusca Batista. PEREIRA, Ana Carolina Costa. A matemática por trás da construção física e graduação da régua de cálculo circular. **Caminhos da Educação Matemática em Revista/Online**, v. 8, n. 2, p. 11-30, 2018b.

ANDRÉ, Marli Eliza Dalmazio Afonso de. **Etnografia da prática escolar**. Campinas: Papirus, 2013.

AUBREY, John. **Brief Lives**. Oxford: Clarendon Press, 1898. Vol. II. Edição de Andrew Clark.

BATISTA, Antonia Naiara de Sousa. **Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos incorporados e mobilizados na construção e no uso da balhastilha, inserida no documento Chronographia, Reportorio dos Tempos..., aplicado na formação de professores**. 2018. 114f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal do Ceará, Fortaleza, 2018.

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2011. Tradução de: Luís Antero Reto, Augusto Pinheiro.

BELO, Edileusa do Socorro Valente. **Professores formadores de professores de matemática**. 2012. 150f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2012.

BENNETT, Jim. Early Modern Mathematical Instruments. **Isis**, Sl, v. 102, n. 1, p.697-705, Jan., 2011.

BORBA, Sérgio da Costa. Aspectos do conceito de multirreferencialidade nas ciências e nos espaços de formação. In: BORBA, Sérgio da Costa (Org.). **Reflexões em torno da abordagem multirreferencial**. São Carlos: EdUFSCar, 1998.

CAJORI, Florian. **William Oughtred: a great seventeenth-century teacher of mathematics**. Chicago: The Open Court Publishing Company, 1916.

CAJORI, Florian. **On the history of Gunter's scale and the slide rule during the seventeenth century**. University of California Press, 1920.

CASTILLO, Ana Rebeca Miranda. **Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos incorporados e mobilizados na construção e no uso do báculo (cross-staff) em A Boked Named Tectonicon de Leonard Digges**. 2016. 121 f. Tese (Doutorado) - Curso de Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=4460446>. Acesso em: 8 ago. 2018.

CASTILLO, Ana Rebeca Miranda; SAITO, Fumikazu. Algumas considerações sobre o uso do báculo (baculum) na elaboração de atividades que articulam história e ensino de matemática. In: SALAZAR, Jesús Flores; GUERRA, Francisco Ugarte. **Investigaciones En Educación Matemática**. Lima: Fondo Editorial PUCP, 2016. p. 237-251.

CHAQUIAM, Miguel. **História da matemática em sala de aula**: proposta para integração aos conteúdos matemáticos. São Paulo: Livraria da Física, 2015. 10 v. (História da matemática para o ensino).

COHEN, Elizabeth G.; LOTAN, Rachel A.. **Planejando o trabalho em grupo**. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2017. Tradução de: Luís Fernando Marques Dorvillé, Mila Molina Carneiro, Paula Márcia Schmaltz Ferreira Rozin.

DELAMAIN, Richard. **Grammelogia or, The Mathematicall Ring**. [S.l.:s.n], [1630?].

DI BEO, Nara. **O estudo do *Trattato del Radio Latino***: possíveis contribuições para a articulação entre História da Matemática e Ensino. 2015. 115f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=3217079>. Acesso em: 10 set. 2018.

DIAS, Marisa da Silva; SAITO, Fumikazu. Interface entre história da matemática e ensino: uma aproximação entre historiografia e perspectiva lógico-histórica. In: IV SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2009, Brasília, **Anais...**. Brasília: SBEM, 2009.

ENCYCLOPAEDIA BRITANNICA. **Sir Kenelm Digby**. Disponível em: <<https://www.britannica.com/biography/Kenelm-Digby>> Acesso em: 04 fev. 2019.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

FRANCO, Maria Laura Puglisi Barbosa. **Análise de conteúdo**. 2 ed. Brasília: Liber Livro Editora, 2005.

FRIED, Michael N.. Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? **Science And Education**, [s.l.], v. 10, n. 4, p.391-408. 2001. Springer Nature. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1023/a:1011205014608>>.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2010.

GUIA GEOGRÁFICO. **Mapa político da Europa**. Disponível em: <<https://www.guiageo-europa.com/mapas/europa.htm>>. Acesso em 22 jan. 2019.

HARKNESS, Deborah E. **The Jewel House: Elizabethan London and the Scientific Revolution**. London: Yale University Press, 2007.

HOPP, Peter M. **Slide Rules: Their History, Models, and Makers**. New Jersey: Astragal Press, 1999.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos da Matemática Elementar: Trigonometria**. São Paulo: Editora Atual, 2004.

KINCHELOE, Joe L.; BERRY, Kathleen. S. **Pesquisa em educação: conceituando a bricolagem**. Porto Alegre: Artmed, 2007.

LEONTIEV, Alexei, Nikolaevich. **Atividade, Consciência e Personalidade**. The Marxists Internet Archive, 1978. Tradução de: Maria Silvia Cintra Martins, 2009.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de Metodologia Científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MENDES, Iran Abreu. **História da Matemática no Ensino: Entre trajetórias profissionais, epistemologias e pesquisas**. São Paulo: Livraria da Física, 2015. (História da Matemática para Professores).

MORAES, Edvaldo Alves de. **Interface entre História e Ensino de Matemática: um movimento lógico-histórico da medição do tempo e a atividade orientadora de ensino**. 2018. 137f. Dissertação (Mestre em Docência para Educação Básica) – UNESP, Faculdade de Ciências, Bauru, 2018. Disponível em: <<https://repositorio.unesp.br/handle/11449/153084>>. Acesso em: 10 set. 2018.

MORAES, Michelle de Sousa. **Setor Trigonal: Contribuições de uma atividade didática na formação de conceitos matemáticos na interface entre história e ensino de matemática**. 2017. 113f. Dissertação (Mestre em Docência para Educação Básica) – UNESP, Faculdade de Ciências, Bauru, 2017. Disponível em: <<https://repositorio.unesp.br/handle/11449/150647>>. Acesso em: 10 set. 2018.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de *et al.* (Org.). A Atividade Orientadora de Ensino como Unidade entre Ensino e Aprendizagem. In: MOURA, Manoel Oriosvaldo de (Org.). **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. 2. ed. Campinas: Autores Associados, 2016. Cap. 4. p. 93-125.

NATIONAL MUSEUM OF SCOTLAND. **Calculating instrument, Sundial instrument, Double horizontal dial, Circles of proportion**. Disponível em: <https://www.nms.ac.uk/explore-our-collections/collection-search-results/?item_id=218890>. Acesso em: 14 mar. 2019.

O'CONNOR, J. J; ROBERTSON, E. F. **William Oughtred**. 2017. School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Oughtred.html>>. Acesso em: 03 jul. 2018.

O'CONNOR, J. J; ROBERTSON, E. F. **Richard Delamain**. 2012a. School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Delamain.html>>. Acesso em: 09 nov. 2018.

O'CONNOR, J. J; ROBERTSON, E. F. **Michael Stifel**. 2012b. School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Stifel.html>>. Acesso em: 09 nov. 2018.

O'CONNOR, J. J; ROBERTSON, E. F. **The teaching of mathematics in Britain in the Seventeenth Century**. 2000. School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Education/seventeenthc.html>>. Acesso em: 13 ago. 2018.

OUGHTRED, William. **The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment**. London: Augustine Mathewes, 1633.

_____. **The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment**. London: Elias Allen, 1632.

_____. **The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment**. London: Elias Allen, 1639.

_____. **The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment**. London: W. Hall, 1660.

_____. **The Description and use of the Double Horizontall Dyall**. London: M. Flesher, 1632.

_____. **Key of Mathematicks**. London: John Salusburn, 1694

_____. **Trigonometrie**. London: Thomas Johnson, 1657.

PEREIRA, Ana Carolina Costa. Investigando as potencialidades didáticas dos instrumentos históricos no ensino de matemática. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA CIÊNCIA E DA TECNOLOGIA, 15., 2016, Florianópolis. **Anais 15º Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de História da Ciência, 2016. p. 1 - 16. Disponível em: <[https://www.15snhct.sbhct.org.br/resources/anais/12/1473990795_ARQUIVO_INVESTIGANDOASResumoEstendido\(SNHCT\).pdf](https://www.15snhct.sbhct.org.br/resources/anais/12/1473990795_ARQUIVO_INVESTIGANDOASResumoEstendido(SNHCT).pdf)>. Acesso em: 16 jan. 2019.

PEREIRA, Ana Carolina Costa. **Aspectos históricos da régua de cálculo para a construção de conceitos matemáticos**. São Paulo: Livraria da Física, 2015. (História da Matemática para o Ensino).

PEREIRA, Ana Carolina Costa; SAITO, Fumikazu. A reconstrução do báculo de Petrus Ramus na interface entre história e ensino de matemática. **Revista Cocar**, Belém, v. 25, n. 13,

p.342-372, Jan./Abr., 2019a. Disponível em:

<<https://paginas.uepa.br/seer/index.php/cocar/article/view/2164/1085>>. Acesso em: 04 mar. 2019.

PEREIRA, Ana Carolina Costa; SAITO, Fumikazu. Os conceitos de perpendicularidade e de paralelismo mobilizados em uma atividade com o uso do báculo (1636) de Petrus Ramus.

Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 21, n. 1, p.405-432, 2019b. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/41337/pdf>>. Acesso em: 02 mai. 2019.

PEREIRA, Ana Carolina Costa; SAITO, Fumikazu. Os instrumentos matemáticos na interface entre história e ensino de matemática: compreendendo o cenário nacional nos últimos 10 anos. In: SEMINÁRIO CEARENSE DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 3., 2018, Fortaleza. **Anais...** . Fortaleza: EDUECE, 2018. p. 1 - 12.

PEREIRA, Ana Carolina Costa; VASCONCELOS, Cleiton Batista. Construindo uma proposta pedagógica por meio de materiais manipulativos: Apresentando a fatoração algébrica estudada no LABMATEN/UECE. In: PEREIRA, Ana Carolina Costa. **Educação Matemática no Ceará**. Fortaleza: Premium Editora, 2014. Cap. 1. p. 9-27.

PIPPA, Tania Cristina Maggioni. **A função logaritmo e a régua de cálculo**. 2014. 62 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014. Disponível em: <<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-09062014-095044/pt-br.php>>. Acesso em: 10 set. 2018.

RODRIGUES, Cicera Sineide Dantas *et al.*. Pesquisa em educação e bricolagem científica: rigor, multirreferencialidade e interdisciplinaridade. **Cadernos de Pesquisa**, [s.l.], v. 46, n. 162, p.966-982, dez. 2016. FapUNIFESP (SciELO). Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/198053143720>>. Acesso em: 24 set. 2019.

RUBTSOV, V. A atividade de aprendizado e os problemas referentes à formação do pensamento teórico dos escolares. In: GARNIER, C. *et al.*. (Org.). **Após Vygotsky e Piaget: perspectivas social e construtivista escolas russa e ocidental**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

SAITO, Fumikazu. **História da matemática e suas (re) construções contextuais**. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

SAITO, Fumikazu. Instrumentos matemáticos dos séculos XVI e XVII na articulação entre história, ensino e aprendizagem de Matemática. **Rematec: História de Práticas Matemáticas**, Natal, v. 16, n. 9, p.25-47, maio/ago. 2014.

SAITO, Fumikazu; DIAS, Marisa da Silva. Interface entre história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. **Ciênc. educ. (Bauru)**, Bauru, v. 19, n. 1, p. 89-111, 2013a.

SAITO, Fumikazu; DIAS, Marisa da Silva. Interface entre história e ensino de matemática: aspectos teóricos e metodológicos. In: CIBEM, 8., 2013b, Montevideo. **Anais...**

. Montevideo: Anais, 2013b. p. 7502 - 7509. Disponível em:
<<http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/645.pdf>>. Acesso em: 03 ago. 2018.

SAITO, Fumikazu; DIAS, Marisa da Silva. Possíveis fontes para a História da Matemática: Explorando os tratados que versam sobre construção e o uso de instrumentos “matemáticos do século XVI”. In: **Anais do 13 Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia – FFLCH USP**, v. 13, p. 1099-1110, 2012.

SANTOS, Maria Lucia Brandão dos. **Avaliação do curso de extensão “Formação Continuada e Currículos Praticados”**: uma abordagem qualitativa. 75f. Dissertação (Mestrado), Fundação Cesagranrio, Rio de Janeiro, 2013.

SILVA, Maria Eugênia Carvalho e. **Fundamentos da matemática elementar**. Curitiba: Fael, 2015.

SILVESTRE, Bruno Silva. **A formação do professor de matemática**: o jogo como recurso de ensino. 2016. 214f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2016. Disponível em:<
<http://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/6484>>. Acesso em: 10 set. 2018.

SILVA, Isabelle Coelho da Silva. **Um estudo da incorporação de textos originais para a educação matemática**: buscando critérios na articulação entre história e ensino. 2018. 92f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal do Ceará, Fortaleza, 2018.

SOARES, Evanildo Costa. **Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula**. 2011. 141f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática). – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. – Centro de Ciências Exatas e da Terra. Disponível em:
<<http://repositorio.ufrn.br:8080/jspui/handle/123456789/16070>>. Acesso em: 10 set. 2018.

SOUSA, Giselle Costa de. História da Matemática e Tecnologias de Informação e da Comunicação. In: PEREIRA, Ana Carolina Costa; ALVES, Francisco Régis Vieira (Org.). **Ciências e Matemática**: investigações no ensino. Curitiba: CRV, 2016. p. 51-66.

TANONAKA, Elisa Missae. **A Régua de Cálculo**: Uma contribuição de William Oughtred para a Matemática. 2008. 103f. Dissertação (Mestrado em História da Ciência) – Departamento de História da Ciência, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008. Disponível em:
<<https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/13397/1/Elisa%20Missae%20Tanonaka.pdf>>. Acesso em: 10 set. 2018.

TAUB, Liba. On scientific instruments. **Studies In History And Philosophy Of Science Part A**, v. 40, n. 4, p. 337-343, dez. 2009. Elsevier BV. Disponível em:
<<http://dx.doi.org/10.1016/j.shpsa.2009.10.002>>.

TRACY, Kisha. **English Studies Abroad: “London, thou art the flour of Cities all”**. Disponível em: <<https://massmedieval.com/2014/02/05/english-studies-abroad-london-thou-art-the-flour-of-cities-all/>>. Acesso em: 21 out. 2018.

VAN HELDEN, Albert; HAWKINS, Thomas L.. **Introduction: Instruments in the History of Science.** *Osiris*, v. 9, p. 1-6, jan. 1994.

WARNER, Deborah Jean. **What is a scientific instrument, when did it become one, and why?** *British Journal for the History of Science*, n. 23, p. 83-96, 1990.

ANEXO A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

**INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA**
Ceará

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Título da pesquisa: Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos mobilizados no manuseio do instrumento círculos de proporção de William Oughtred

Pesquisadora: Verusca Batista Alves

Orientadora: Ana Carolina Costa Pereira

Você está sendo convidado a participar como voluntário de uma pesquisa. Este documento, chamado Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, visa assegurar seus direitos como participante e é elaborado em duas vias, uma que deverá ficar com você e outra com o pesquisador.

Por favor, leia com atenção e calma, aproveitando para esclarecer suas dúvidas. Se houver perguntas antes ou mesmo depois de assiná-lo, você poderá esclarecê-las com o pesquisador. Se preferir, pode levar este Termo para casa e consultar seus familiares ou outras pessoas antes de decidir participar. Não haverá nenhum tipo de penalização ou prejuízo se você não aceitar participar ou retirar sua autorização em qualquer momento.

Justificativa e objetivos:

Este estudo tem como questionamento norteador: Quais os direcionamentos iniciais aos professores de matemática, para que possam construir uma atividade voltada a educação básica a partir das potencialidades didáticas que emergem do manuseio do instrumento círculos de proporção, na interface entre história e ensino de matemática?

Objetivo Geral da pesquisa:

Conhecer como as atividades didáticas para a educação básica podem ser elaboradas na interface entre história e ensino de matemática, por meio do estudo do manuseio de um instrumento matemático do século XVII, denotado círculos de proporção.

Objetivos Específicos:

- Construir uma interface entre história e ensino de matemática por meio das dimensões históricas e pedagógicas, a partir do estudo do manuseio dos círculos de proporção do tratado *The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment de 1633*.
- Identificar algumas potencialidades didáticas que surgem mediante o manuseio do instrumento círculos de proporção, em um curso de extensão universitária voltado a professores de matemática em formação continuada;
- Descrever alguns possíveis direcionamentos para a elaboração de uma atividade que explore algumas das potencialidades didáticas que emergem do manuseio do instrumento na interface entre história e ensino de matemática.

Procedimentos:

Participando do estudo você está sendo convidado a fazer o preenchimento de relatórios, gravação de entrevista em áudio e/ou vídeo, gravação das aulas ministradas em vídeo e/ou áudio. Estes procedimentos descritos acima ocorrerão nas dependências da Universidade Estadual do Ceará - UECE do cronograma do curso do PROFMAT, não sendo necessário o deslocamento ao campus em outros períodos. Somente a pesquisadora e a orientadora terão acesso ao material coletado e a identidade dos participantes será mantida em sigilo absoluto. Os relatórios deverão ser preenchidos no decorrer de cada atividade proposta do curso, sendo disponível aos participantes o tempo de toda a aula para o seu preenchimento. Ao fim da pesquisa, os dados serão discutidos pelas pesquisadoras envolvidas e, em seguida, o material coletado na forma de relatório, áudio e vídeo serão descartados, ficando de posse dos pesquisadores por um período máximo de 12 meses.

Desconfortos e riscos:

Os sujeitos que serão selecionados a participar da pesquisa são pessoas que estão em formação inicial e continuada de professores de matemática. Focaremos, a **não** participação deste estudo, sujeitos que sintam algum tipo de desconforto com registro de fotos, áudios, vídeos e transcrição de material escrito que forem coletados durante a aplicação dessa pesquisa.

Dessa forma, de modo a evitar possíveis constrangimentos, o participante terá a liberdade de sair desse estudo sem nenhum prejuízo, a qualquer momento, durante a coleta de dados da pesquisa.

Benefícios:

Ao participar desta pesquisa, o docente em formação na área de matemática terá a oportunidade de aprender e compreender o papel dos instrumentos matemáticos na articulação entre história e ensino de matemática, por meio de atividades orientadoras de ensino (AOE), como uma possibilidade didática para ser inserida na Educação Básica e Superior. A pesquisa é uma ação formativa que visa contribuir com recursos didáticos no ensino de matemática que possa beneficiar a formação inicial e continuada de professores, e consequentemente, melhorar a educação básica brasileira.

Dessa maneira, os resultados coletados serão utilizados somente com a finalidade de publicar os dados obtidos em revistas e/ou encontros especializados na área de ensino de matemática.

Acompanhamento e assistência:

Caso o participante necessite de algum acompanhamento ou assistência poderá solicitar as pesquisadoras responsáveis pela pesquisa. Se assim o desejar, poderá solicitar a interrupção da participação na pesquisa, se a mesma estiver lhe causando algum desconforto.

Sigilo e privacidade:

Você tem a garantia de que sua identidade será mantida em sigilo e nenhuma informação será dada a outras pessoas que não façam parte da equipe de pesquisadoras. Na divulgação dos resultados desse estudo, seu nome não será citado. Qualquer gravação (áudio e/ou vídeo) e/ou relatórios aplicados durante a pesquisa será(ão) mantido(s) em posse da pesquisadora responsável por um período de 12 meses. Após passado esse tempo todo o material será descartado.

Ressarcimento e indenização:

Você terá direito ao ressarcimento das despesas diretamente decorrentes de sua participação na pesquisa e à indenização pelos danos resultantes desta, nos termos da Lei.

Contato:

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, você poderá entrar em contato com as pesquisadoras Verusca Batista Alves ou Ana Carolina Costa Pereira, na Universidade Estadual do Ceará, Av. Silas Munguba, 1700 – Campus Itaperi, Serrinha, Fortaleza - CE, 60740-903, Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática – GPEHM, sala 18, prédio do Centro de Educação Telefone: (85) 31019775; e-mail: veruscah.alves@gmail.com.

Em caso de denúncias ou reclamações sobre sua participação e sobre questões éticas do estudo, você poderá entrar em contato com a secretaria do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) do IFCE das 08:00hs às 12:00hs e das 13:00hs as 17:00hs no IFCE Reitoria - R. Jorge Dumar, 1703 - Jardim América, Fortaleza - CE, 60410-426; fone (85) 34012332 e-mail: cep@ifce.edu.br

Consentimento livre e esclarecido:

Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais riscos e o incômodo que esta possa acarretar, aceito participar e declaro estar recebendo uma via original deste documento assinada pelo pesquisador e por mim, tendo todas as folhas por nós rubricadas:

Nome do(a) participante:

Contato telefônico (opcional):

e-mail (opcional):

(Assinatura do participante ou nome e assinatura do seu RESPONSÁVEL LEGAL)

Data: ____/____/____.

Responsabilidade do Pesquisador:

Asseguro ter cumprido as exigências da resolução 466/2012 CNS/MS e complementares na elaboração do protocolo e na obtenção deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Asseguro, também, ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Informo que o estudo foi aprovado pelo CEP perante o qual o projeto foi apresentado. Comprometo-me a utilizar o material e os dados obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

Nome do(a) pesquisador(a):

[Assinatura do(a) pesquisador(a)]

Data: ____/____/____.

APÊNDICE A – PROGRAMA DO CURSO DE EXTENSÃO



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ – IFCE GRUPO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO E HISTÓRIA DA MATEMÁTICA – GPEHM/CCT-UECE

PROGRAMA DE FORMAÇÃO DOCENTE – PFD/GPEHM/UECE

PROGRAMA DE ENSINO

CURSO: Estudando os conhecimentos matemáticos incorporados no manuseio dos círculos de proporção de William Oughtred

CARGA HORÁRIA: 16 h/a

HORÁRIO: 8h as 17h, intervalo para almoço.

PERÍODO: 02/02/2019 e 09/02/2019.

LOCAL: Laboratório de Matemática e Ensino da UECE

PÚBLICO: Alunos PROFMAT/UECE

VAGAS: 12 participantes

PROFESSORA: Verusca Batista Alves

OBSERVADORA: Suziê Maria de Albuquerque

ORIENTADORA: Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira

EMENTA

O curso tem a pretensão de mobilizar alguns elementos matemáticos através do manuseio de um instrumento matemático, denominado por “círculos de proporção”, cuja autoria é do vigário inglês William Oughtred (1574-1660) e foi exposto em seu tratado *The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment*, em 1633. A proposta se baseia em recentes estudos a respeito da construção de uma interface entre a história o ensino de matemática, sob uma perspectiva historiográfica atualizada.

OBJETIVOS / CONTEÚDOS

OBJETIVOS	CONTEÚDOS	CH
<i>Para o discente:</i> - Reconhecer o contexto do século XVII e o papel dos instrumentos para o desenvolvimento das matemáticas. - Compreender a importância dos instrumentos matemáticos no século	UNIDADE 1: Ensino e instrumentos: conhecendo a história dos círculos de proporção 1.3.O contexto do século XVII e alguns instrumentos matemáticos ingleses.	1h/a

XVII, em especial os círculos de proporção.	1.4. Algumas considerações sobre os círculos de proporção.	
<i>Para o docente:</i> Introduzir os participantes ao estudo sobre os instrumentos matemáticos do século XVII, em específico, os círculos de proporção inseridos no documento <i>The Circles of Proportion (1633)</i>.		
<i>Para o discente:</i>	UNIDADE 2: William Oughtred e o documento, <i>The Circles of Proportion (1633)</i>	
Debater sobre algumas características da obra <i>The Circles of Proportion 1633</i>, e sua relação com o instrumento.		
<i>Para o docente:</i> Apresentar aos participantes o documento que será estudado, assim como seu autor e sua importância para o desenvolvimento das matemáticas no século XVII.	2.3 Alguns aspectos da vida e da obra de William Oughtred. 2.4 Algumas considerações sobre a obra <i>The Circles of Proportion (1633)</i> .	
<i>Para o discente:</i>	UNIDADE 3: A descrição e a manipulação: conhecendo o instrumento círculos de proporção de William Oughtred	7h/a
- Conhecer os círculos de proporção de William Oughtred a partir da leitura da descrição do instrumento contida na obra <i>The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment (1633)</i>. - Identificar as partes do instrumento através do seu manuseio com suporte a leitura do excerto.		
<i>Para o docente:</i> Fazer com que os participantes compreendam a manipulação do instrumento para que possam formular os conhecimentos matemáticos incorporados nos círculos de proporção por meio do seu manuseio.	3.5 Estudo da descrição dos círculos de proporção no <i>The Circles of Proportion (1633)</i> . 3.6 Sobre as partes e o funcionamento do instrumento, a partir da leitura do texto. 3.7 Estudo do manuseio dos círculos de proporção no <i>The Circles of Proportion (1633)</i> . 3.8 Sobre o manuseio do instrumento, a partir da leitura do texto.	
<i>Para o discente:</i>	UNIDADE 4: Identificando os elementos matemáticos presentes nos círculos de proporção	8h/a
- Compreender o processo de manipulação do instrumento círculos de proporção de William Oughtred através de situações práticas. - Identificar os conhecimentos matemáticos presentes no manuseio do instrumento com suporte à leitura do excerto.		

<i>Para o docente:</i> Estimular os participantes a explorarem, formularem e expressarem os conhecimentos matemáticos mobilizados no manuseio dos círculos de proporção, que foram identificados, questionando o processo de construção e justificando seus passos.	manipulação. 4.6 Ação sobre os elementos matemáticos presentes no manuseio.	
--	---	--

CRONOGRAMA DE AULAS PRESENCIAIS

	ATIVIDADE	TEMPO	HORÁRIO	MODOS	PRODUTO
Dia 01	Apresentação do Curso e da Atividade	30 min	8h às 8h30min	Individual	Termos assinados
	Assinatura do termo de concessão				
	Momento 1	210 min	8h30min às 12h	Grupo	Relatório 1
	Discussão do Momento 1				
	Almoço		12h às 13h	Grupo	-
	Momento 2	240 min	13h às 17h	Grupo	Relatório 2
	Discussão do Momento 2				
Dia 02	Momento 3	240 min	8h às 12h	Grupo	Relatório 3
	Discussão do Momento 3				
	Almoço	30 min	12h às 13h	Grupo	
	Momento 4	240 min	13h às 17h	Grupo	Relatório 4
	Discussão do Momento 4				

METODOLOGIA

Como estratégia metodológica, será proposta, aos participantes, situações que irão estimular desencadeamento de ações que tem como objetivo oportunizar condições de estudar alguns conceitos matemáticos a partir da construção e do manuseio de um instrumento matemático do século XVII. Para isso, será utilizado o estudo colaborativo centrado no trabalho em grupo, com discussões de ideias e a mobilização de conhecimentos matemáticos a partir da vivência e formação dos participantes.

AVALIAÇÃO

O processo de avaliação será formativo, constituído do trabalho em grupo em que cada componente tem seu papel no desenvolvimento da atividade, socializando no final de cada etapa um relatório. No curso será proposto quatro atividades. Em todas, haverá o processo de compreensão de excertos do texto de William Oughtred, *The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment*, 1633, adaptado para o português, visando auxiliar os participantes; A primeira e a segunda atividade, estão direcionadas a conhecer o instrumento. Desta forma, os participantes devem conhecer e identificar as partes que compõem o instrumento, realizando a leitura do material de recurso e uma manipulação inicial. Após conhecer o instrumento, a terceira atividade propõe a compreensão do seu manuseio, através de outro fragmento do tratado, adaptado também para o português. Com isso, os participantes devem compreender o

processo de manipulação do instrumento, por meio de situações práticas apresentadas na obra. Por fim, dado um desenvolvimento satisfatório, a quarta e última atividade propõe a identificação de conhecimentos matemáticos presentes no instrumento, quando se é realizado o seu manuseio. Assim, os participantes devem identificar os elementos matemáticos presentes na manipulação dos círculos de proporção, com suporte a leitura do material de recurso. Ressalta-se que todas as atividades serão orientadas por meio de uma sequência didática entregue pela docente que está ministrando o curso. Ainda para a avaliação do curso também será contabilizada a participação dos cursistas nas discussões sobre a temática abordada, a entrega das atividades e pontualidade em sala de aula.

REFERÊNCIAS

OUGHTRED, William. **The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment.** London: Augustine Mathewes, 1633.

APÊNDICE B – CARTÃO DE RECURSO 1



A descrição dos círculos de proporção de William Oughtred

CARTÃO DE RECURSO - 1

1. Existem vários tipos de círculos, divididos depois de várias maneiras, junto com um indicador a ser aberto depois, à maneira de um par de compassos.
2. O *primeiro*, ou círculo mais externo é de *senos*, de 5 graus [e] quase 45 minutos até 90.
3. O *segundo círculo* é de *tangentes* de 5 graus e 45 minutos aproximadamente, até 45 graus.
4. O *terceiro círculo* é de *tangentes* de 45 graus até 84 graus e 15.
5. O *sexto círculo* é de *tangentes* de 84 graus até aproximadamente 89 graus e 25 minutos.

O *sétimo círculo* é de *tangentes* de aproximadamente 35 minutos até 6 graus.

O *oitavo círculo* é de *senos* de aproximadamente 35 minutos até 6 graus.

6. O *quarto círculo* é de *Números Desiguais*, que são anotados com os números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1. Quer você os compreenda como números únicos, dezenas, centenas ou milhares, etc.

O *quarto círculo* também mostra os *verdadeiros* ou *senos naturais*, e *tangentes*. Pois, se o indicador for aplicado a qualquer seno ou tangente, ele será o *verdadeiro seno* ou *tangente* no *quarto círculo*. E devemos saber que, se o *seno* ou a *tangente* estiverem no *primeiro* ou no *segundo círculo*, os números do *quarto círculo* significam tantos *milhares*. Mas se o *seno* ou *tangente* estiverem no *sétimo* ou *oitavo círculo*, os algarismos no *quarto círculo* significam tantas *centenas*. E se a *tangente* estiver no

sexto círculo, os números do *quarto círculo* significam muitas vezes dez mil, ou todo o raio⁹⁰.

E por estes meios o seno de $23^{\circ}30'$ será encontrado 3987; e o seno de seu complemento 9171. E a tangente de $23^{\circ}30'$ será encontrada 4348 e a tangente de seu complemento, 22998. E o raio é 10000, que é o número 1 com quatro zeros ou círculos. E assim você pode descobrir tanto a soma [quanto] a diferença de senos e tangentes.

7. O *quinto círculo* é de *Números Iguais*, que são anotados com os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Este *quinto círculo* é raro de qualquer uso, mas [é] somente por meio dele, [que] a distância dada de números pode ser multiplicada ou dividida, conforme necessário.

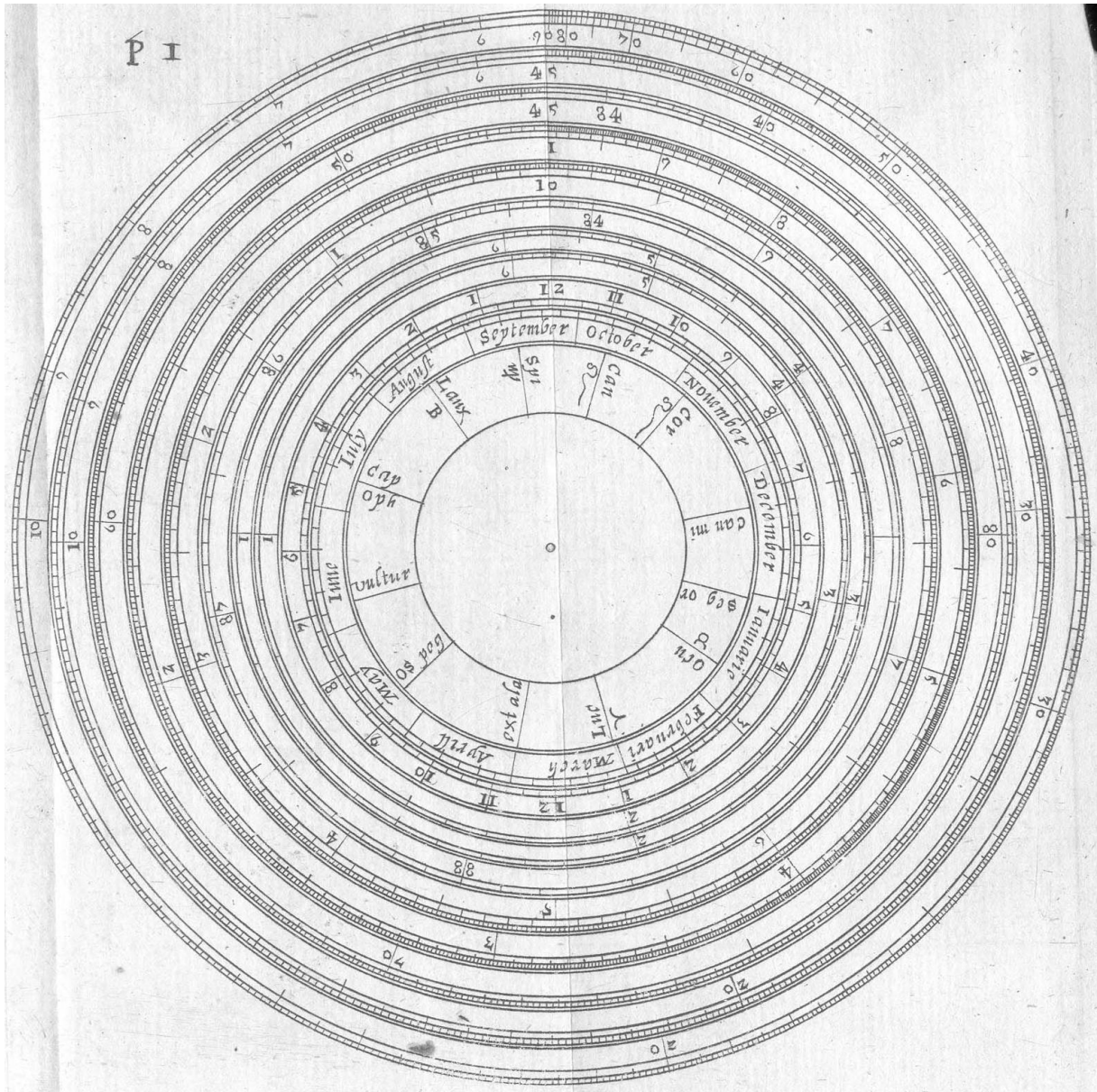
A razão no qual [a] operação é, [dá-se] porque este quinto círculo mostra os *Logaritmos* dos números. Pois, se o indicador for aplicado a qualquer número no *quarto círculo*, ele será, no *quinto círculo*, cortado no *Logaritmo* do mesmo número, de modo que, ao logaritmo encontrado você prefixa uma *característica* (como o Mestre Briggs⁹¹ o denomina) [que é] o número dos lugares dos inteiros propostos (que você pode preferir chamar de número Gradual). Assim, o logaritmo do número 2 será encontrado 0,30103. E o logaritmo do número 43,6 será encontrado 1,63949.

Os números são multiplicados pela adição de seus logaritmos; e eles são divididos pela subtração de seus logaritmos.

8. A linha direita passando pelo Centro, em 90 e 45 [graus], eu chamo a *Linha da Unidade*, ou do *Raio*.
9. Aquele *Braço do Indicador* que em cada Operação é colocado no antecedente, ou primeiro termo, eu chamo de *Braço Antecedente*; e aquele que é colocado no termo consequente, eu chamo de *Braço Consequente*.

⁹⁰ Na notação da época, o raio equivalia a 10.000.

⁹¹ **Henry Briggs** (1561-1630), matemático Inglês responsável por estudos referentes aos Logaritmos de base 10.



Retirado de: OUGHTRED, William. **The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment**. London: Augustine Mathewes, 1633.

APÊNDICE C – CARTÃO GUIA 1



A descrição dos círculos de proporção de William Oughtred

Cartão Guia - 1

A partir do instrumento (físico) e do texto que traz a descrição dos **círculos de proporção**:

- Busque compreender cada círculo e sua finalidade no instrumento.
- Procure reconhecer e mapear os diferentes conhecimentos matemáticos incorporados no instrumento, a partir da descrição dos círculos.

Produto do grupo

Registre as suas primeiras impressões sobre **as partes** e o **funcionamento do instrumento**, a partir do texto da **descrição**.

APÊNDICE D – CARTÃO DE RECURSO 2



A manipulação do instrumento círculos de proporção

CARTÃO DE RECURSO – 2

Teorema: Se de três números dados, o primeiro divide o segundo e o quociente multiplica o terceiro; o produto será o quarto proporcional aos três números dados.

Teorema: Se de três números são dados, o segundo divide o primeiro e o quociente divide o terceiro; este último quociente será o quarto proporcional, aos três números dados.

Também não é importante se os dois números após o primeiro serem segundo ou o terceiro.

E note na Proporção Recíproca, aquele termo pelo qual a pergunta é feita; Mas, na Proporção Direta, o termo que é homogêneo a isso é o primeiro termo, ou o antecedente da primeira proporção.

E, portanto, a partir desses fundamentos assim estabelecidos, (se você corretamente conceber a natureza dos Logaritmos), segue-se a descoberta do quarto proporcional por este Instrumento, do qual esta é a Regra.

Abra os braços do Instrumento à distância do primeiro e do segundo número: depois traga o braço antecedente, ou aquele que permaneceu sobre o primeiro número até o terceiro, e assim o braço consequente, mantendo a mesma abertura, mostrará o quarto número procurado.

Em que, [a] operação dessas quatro coisas são minuciosamente consideradas:

Primeiro, em constituir os lugares de cada número no quarto círculo se os algarismos escritos no espaço indicam **unidades, dezenas ou centenas, etc.**

Em segundo lugar, se aquele braço que mostra o quarto proporcional, ultrapassa a *linha do Raio*; então você conta o quarto [proporcional] em um novo círculo ou grau.

Em terceiro lugar, se o quarto número procurado deveria ser maior ou menor que o terceiro. Pois se um quarto número for maior que o terceiro, quando deveria ser menor ou menor que o terceiro quando deveria ser maior, é um sinal de que esse número pertence a um círculo de outro grau.

Em quarto lugar, olhamos qual a verdadeira distância entre o primeiro e o segundo, que o mesmo é suposto entre o terceiro e o quarto, e também na mesma parte.

E por causa da Multiplicação e Divisão, temos [uma] certa proporção implícita: falaremos deles em primeiro lugar.

Na multiplicação, como uma unidade é um dos fatores (de números serem multiplicados) assim é o outro como os fatores, para o produto.

$$1.5 :: 4.20$$

E o produto de dois números terá tantos lugares como os dois fatores, quanto menos deles exceder tantos dos primeiros números do produto: Mas se não exceder, terá um a menos.

E na Divisão, como o Divisor é para uma Unidade; assim é o Dividendo, para o Quociente.

$$5.1 :: 4.\frac{4}{5}$$

E o Quociente terá tantos lugares, como o Dividendo tem mais que o Divisor se o Divisor exceder tantos [lugares] dos primeiros números do Dividendo, mas se não exceder, terá um lugar a mais.

Portanto, tenha esta regra cuidadosamente em mente: que na Multiplicação o primeiro termo da proporção implícita é sempre 1: E na divisão, o primeiro termo é o Divisor.

E assim, a respeito das operações de Proporção, Multiplicação e Divisão, pensei em me encontrar para aconselhar menos daqui em diante Multiplicando, ou Dividindo, ou buscando uma quarta proporcionalidade, [pois] somos obrigados a repassar as mesmas coisas muitas vezes.

APÊNDICE E – CARTÃO GUIA 2



A manipulação do instrumento círculos de proporção

Cartão Guia - 2

A partir do instrumento (físico) e do texto que traz algumas considerações sobre o **manuseio** dos círculos de proporção:

- Acompanhe e entenda no que consiste o manuseio do instrumento e procure reconhecer e mapear os diferentes conhecimentos matemáticos nele incorporado.
- Discuta com o grupo as razões pelo qual o manuseio dos indicadores gera nos círculos as respostas esperadas

Produto do grupo

Relate suas compreensões sobre e o **funcionamento** do instrumento e descreva os passos realizados durante o **manuseio**.

APÊNDICE F – CARTÃO DE RECURSO 3



Identificando os elementos matemáticos presentes no manuseio do instrumento círculos de proporção

CARTÃO DE RECURSO – 3

Exemplo 1:

Se as medidas tomadas com uma régua [forem] divididas em polegadas e décimas de uma polegada, primeiro tire todos os pés inteiros e depois divida as polegadas restantes, com suas partes decimais, se houver 12.

Quantos pés e partes decimais de um pé têm em 17,3 polegadas?

Primeiro tire o pé inteiro que é de 12 polegadas, e lá permanecerá 5,3 polegadas, que sendo dividido por 12, você terá quase 442 mil partes. Portanto 17,3 polegadas é 1,442 pés. E ao contrário 1,442 pés, serão reduzidos em 17,3 polegadas, sendo multiplicados por 12.

Exemplo 2:

[...] Primeiro, portanto, a base deve ser encontrada, de que forma ela é, e então divida 1 por essa mesma base e o quociente será a altura de uma seção dele, que é igual a um pé sólido.

Uma coluna ou pedaço de madeira, cujos lados são todos paralelos, tem a largura de 1,75 pés, e sua espessura é de 1,25 pés que, multiplicados juntos, o produto será de 2,1875. Divida, portanto, 1 por 2,1875 e o quociente será aproximadamente 0,457143. E tanto é a altura de um pé sólido, daquele pedaço de madeira.

Exemplo 3:

[...] O conteúdo de um vaso, sendo dado em polegadas cúbicas, ou em [partes] décimas cúbicas de um pé, para descobrir quantos galões ele contém.

Isto é feito facilmente se você dividir o conteúdo dado em polegadas, por 272,25 para medida de cerveja inglesa e por 231, para medida de vinho. Mas se o conteúdo for dado em partes decimais de um pé, divida-o por

157,5521 para a medida de cerveja inglesa e por 133,6803 para a medida do vinho.

Quantos galões de vinho estão em um vaso contendo 24839,56 polegadas cúbicas, ou 14374,746 partes cúbicas de um pé?

Divida 24839,56 por 231 ou divida 14374,746 por 133,68 e o quociente será 107,53 galões de vinho.

Exemplo 4:

[...] Antes de entregarmos as regras de tais operações, não será inconveniente estabelecer certas Reduções, das quais podemos ter uso frequente.

Reduzir as partes sexagesimais em decimais. Divida os sexagésimos dados por 60.

Quantos decimais são 34'12''?

Aqui são necessárias duas reduções, primeiro de segundos em demais de minutos, então de minutos com seus decimais, em decimais de graus. Assim,

$$60 . 1 :: 12'' . 0,2$$

novamente

$$60 . 1 :: 34,2' . 0,57^{\circ}$$

Por isso, 34'12'' é igual a 0,57 de um grau.

E contrariamente para reduzir em partes decimais de graus em sexagesimais. Multiplique a parte decimal dada por 60.

APÊNDICE G – CARTÃO GUIA 3



Identificando os conhecimentos matemáticos presentes no manuseio do instrumento círculos de proporção

Cartão Guia - 3

A partir do instrumento (físico) e do texto que traz algumas situações de **manuseio** dos círculos de proporção:

- Através do manuseio, examine quais **os conhecimentos matemáticos** presentes em cada situação do Cartão de Recurso - 3.

Produto do grupo

Relate os conceitos matemáticos identificados durante a atividade de **manuseio**.

