



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO
CEARÁ**

IFCE *CAMPUS* FORTALEZA

DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE
TELECOMUNICAÇÕES**

MESTRADO ACADÊMICO EM ENGENHARIA DE TELECOMUNICAÇÕES

JONATHAN RODRIGUES DA SILVA

**APLICAÇÕES DA FUNÇÃO W_q DE LAMBERT-TSALLIS EM LASERS DE
ELÉTRONS LIVRES**

FORTALEZA

2023

JONATHAN RODRIGUES DA SILVA

APLICAÇÕES DA FUNÇÃO $\mathcal{W}_q$ DE LAMBERT-TSALLIS EM LASERS DE ELÉTRONS
LIVRES

Dissertação submetida ao curso de Mestrado acadêmico em Engenharia de Telecomunicações do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Telecomunicações do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Ceará (IFCE) - *Campus* Fortaleza, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia de Telecomunicações. Área de concentração: Informação Quântica.

Orientador: Prof. Dr. Rubens Viana Ramos

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal do Ceará - IFCE
Sistema de Bibliotecas - SIBI
Ficha catalográfica elaborada pelo SIBI/IFCE, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- S586a Silva, Jonathan Rodrigues da.
Aplicações da função Wq de Lambert-Tsallis em Lasers de Elétrons Livres / Jonathan Rodrigues da Silva. - 2023.
65 f. : il. color.
- Dissertação (Mestrado) - Instituto Federal do Ceará, Mestrado em Engenharia de Telecomunicações, Campus Fortaleza, 2023.
Orientação: Prof. Dr. Rubens Viana Ramos.
1. Radiação Coerente. 2. Laser de Elétrons Livres. 3. Raios-X. 4. Função Wq de Lambert-Tsallis. 5. Onduladores. I. Título.

CDD 621.382

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus que sempre me guiou, e me sustentou em todos os momentos dessa minha trajetória e meu deu força e sabedoria para realizar mais uma conquista.

Aos meus pais, que me ensinaram a lutar pela vida com garra e determinação e em especial a minha mãe que sempre esteve comigo, me apoiando e incentivando.

A minha namorada pelo amor, incentivo, apoio e paciência com as minhas ausências.

Ao Prof.º Dr. Rubens Viana Ramos pelo incentivo, amizade, compreensão, dedicação, paciência, aprendizado e pela honra em tê-lo como meu orientador, que me instruiu de forma exímia e fazendo correções necessárias para que eu pudesse aperfeiçoar e garantir um excelente trabalho.

Aos membros da banca, Prof.º Dr. Fábio Alencar Mendonça, Prof.º Dr. José Augusto Oliveira Huguenin, pelas observações, questionamentos e críticas.

Aos meus professores do PPGET - IFCE, pela amizade, apoio e conhecimentos que contribuíram com a minha formação acadêmica.

A todos os colegas e amigos do curso, que foram grandes companheiros durante o curso.

E finalmente agradeço a todos os amigos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

A teoria de fontes de luz síncrotron e de lasers de raios X permite a determinação de parâmetros como o comprimento de onda da radiação emitida, o parâmetro de Pierce e o comprimento de ganho quando variáveis como o parâmetro de espalhamento de energia, e os parâmetros do ondulator (o valor de pico da densidade de fluxo magnético e o período), são conhecidos. Por outro lado, não há fórmulas analíticas que permitam a obtenção dos parâmetros do ondulator quando, por exemplo, o comprimento de onda da radiação emitida é conhecido. Nesta direção, a presente dissertação usa a função W_q de Lambert-Tsallis para inverter algumas fórmulas da teoria de fontes de luz síncrotron e de lasers de elétrons livres com amplificação de emissão espontânea, objetivando fornecer fórmulas para o cálculo analítico do período do ondulator, do parâmetro de dispersão de energia de um ondulator com gradiente transversal e do parâmetro de Pierce na ausência de espalhamento não homogêneo quando o valor do parâmetro de Pierce na presença de espalhamento não homogêneo é conhecido.

Palavras-chave: Radiação coerente. Laser de elétrons livres (FEL). Raios-X. Onduladores. Função W_q de Lambert-Tsallis.

ABSTRACT

The theory of synchrotron light sources (SyncLs) and X-ray free electron lasers (FELs) allows the determination of parameters like the wavelength of the emitted radiation, Pierce parameter and the gain length, when variables like energy spread parameter and undulator's peak magnetic field and period are known. On the other hand, there is not a formula providing the value of the undulator's period when the wavelength of the emitted radiation is known in advance for example. In this direction, the present work uses the Lambert-Tsallis $\mathcal{W}_q$ function to invert some formulas of the synchrotron and self-amplified spontaneous emission free-electron laser theory, aiming to provide new formulas to calculate the undulator's period, the energy dispersion parameter of a transverse gradient undulator and the Pierce parameter in the absence of inhomogeneous broadening when the Pierce parameter value in the presence of inhomogeneous broadening is known.

Keywords: Coherent radiation. Free electron laser (FEL). X ray. Undulators. Lambert–Tsallis function $\mathcal{W}_q$.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Relação entre o número atômico e o número de nêutrons para diferentes isótopos.....	16
Figura 2 – Representação da ionização de um átomo	22
Figura 3 – Radiografia da mão da Sra. Anna Bertha Ludwin.....	23
Figura 4 – Diagrama simplificado de um tubo de raios X.....	25
Figura 5 – Processo de geração de um fóton de raios X de freamento.....	26
Figura 6 – Representação da ejeção do elétron por um elétron incidente no alvo e a posterior emissão de fótons de raios X característicos.....	27
Figura 7 – Representação do espectro de raios X característico emitido por um tubo de alvo de Mo e por outro de W.....	28
Figura 8 – Representação do efeito Rayleigh.....	29
Figura 9 – Representação do espalhamento Compton.....	30
Figura 10 – Ilustração do efeito fotoelétrico.....	32
Figura 11 – Atenuação de um feixe de radiação ao atravessar um meio de espessura x	34
Figura 12 – Exame radiográfico do tórax de um paciente.....	37
Figura 13 – Diagrama esquemático do primeiro FEL.....	39
Figura 14 – Formação de um pulso laser de raio X por um pulso do feixe de elétrons.....	40
Figura 15 – Layouts esquemáticos para a SASE.....	41
Figura 16 – Layout esquemático do XFEL.....	43
Figura 17 – Linha do tempo das instalações FEL em todo o mundo.....	47
Figura 18 – $W_{1/2}(z)$ e $W_{5/4}(z)$ versus z	53
Figura 19 – $\lambda_u \times \lambda_r$	56
Figura 20 – $\lambda_u \times I$	58
Figura 21 – $D \times \frac{L_G}{L_G^0}$	61

LISTA DE SIGLAS

CDI	Coherent Diffraction Imaging
CSR	Camada Semirredutora
DNA	Deoxyribonucleic Acid
FEL	Free-Electron Laser
HGHH	High-Gain Harmonic Generation
LCLS-II-HE	LCLS-II High Energy Upgrade
LCLS	Linac Coherent Light Source
LINAC	Linear Accelerator
LPA	Laser Plasma Accelerator
MBA	Multi-Bend Achromat
PBA	Plasma Based Acceleration
RF	Radio frequency
RFU	Radio-Frequency Undulators
SACLA	SPring-8 Angstrom Compact Laser
SASE	Self Amplified Spontaneous Emission
SI	Sistema Internacional de unidades
SyncLS	Synchrotron Light sources
TGU	Transverse Gradient Undulator
UV	Ultraviolet
UVX	“do Ultravioleta ao Raios-X”
WU	Wave Undulator
XFEL	X-ray Free-Electron Lasers
XFEL0	X-ray Free-Electron Laser Oscillator

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	10
2	REVISÃO DE CONCEITOS E APLICAÇÕES DE RAIOS-X.....	13
2.1	Introdução.....	13
2.2	Fundamentos da Radioatividade.....	15
2.3	O processo de ionização.....	20
2.4	Produção Incoerente de Raios-x.....	22
2.5	Interação de Raios-x com a matéria.....	29
2.6	Aplicações de Raios-x em imagens médicas - Radiografia.....	33
3	REVISÃO DE FONTES DE LUZ SÍNCROTRON E LASER DE RAIOS-X DE ELÉTRONS LIVRES.....	38
3.1	Introdução.....	38
3.2	Aplicações atuais e futuras de XFELs.....	44
3.3	Progresso em direção a XFELs ultracompactos.....	45
3.4	Visão geral das instalações de XFELs.....	46
4	APLICAÇÕES DA FUNÇÃO W_q DE LAMBERT-TSALLIS EM FONTES DE LUZ SÍNCROTRON E LASERS DE RAIOS-X.....	49
4.1	Introdução.....	50
4.2	A função W_q de Lambert-Tsallis.....	51
4.3	Aplicação da função de Lambert-Tsallis em SyncLs e FELs.....	54
4.4	Solução alternativa para equação (28).....	62
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS.....	63
5.1	Conclusões.....	63
5.2	Perspectivas de trabalhos futuros.....	63
	REFERÊNCIAS.....	64

1 INTRODUÇÃO

A descoberta e uso dos raios X foi essencial para o progresso científico em vários ramos da física, química e biologia. Aplicações em diagnósticos médicos por imagem bem como o estudo da estrutura e o comportamento da matéria (orgânica e inorgânica) em escala nanométrica tornam o desenvolvimento de fontes e detectores de raios X uma área de domínio vital para o desenvolvimento de pesquisas no estado da arte naquelas áreas.

Segundo Busheberg, Jerrold (2011), os raios X possibilitaram um grande impulso nas técnicas de diagnose, devido à sua característica de grande penetração nos materiais, foi rapidamente aceita no ramo da medicina pois até então era necessário cortar cirurgicamente as pessoas para que fosse realmente constatado algo de errado, como uma fratura interna por exemplo. Com o desenvolvimento de aparelhos de raios X e dos tomógrafos para visualizar as estruturas anatômicas em formas de cortes do corpo humano, cortes cirúrgicos desnecessários são evitados. .

De acordo com Okuno (2018), com o passar dos tempos e com o avanço da tecnologia, os raios X foram utilizados para outras situações, como por exemplo para localizar falhas internas de fundidos, soldas e outras ligas metálicas evitando que quebras prematuras pudessem passar despercebidas. Outra aplicação dos raios X está na segurança pública com uma grande contribuição para detectar substâncias proibidas como explosivos, drogas e armas nas malas e nas pessoas em aeroportos.

A história dos raios X começa em 8 de novembro de 1895, quando o físico Wilhelm Roentgen, da universidade de Wurzburg, decidiu realizar o experimento com raios catódicos em um tubo, chamado tubo de Crookes. Após a sua descoberta de um novo raio, chamado de raios X por conta da sua natureza desconhecida, a primeira aplicação foi na área médica, pois agora era possível enxergar o interior de um corpo humano sem a necessidade de abri-lo. A descoberta dos raios X abriu as portas para outras descobertas, uma delas foi a descoberta da radioatividade com Becquerel. Portanto, o tubo de Crookes foi a primeira fonte de raios X de laboratório (OKUNO; YOSHIMURA, 2010).

O surgimento da teoria da mecânica quântica de Max Planck, com a definição dos pacotes de energia, o quantum, e logo após as descobertas do efeito fotoelétrico de Albert Einstein e o efeito Compton de Arthur Compton, são os principais fenômenos que explicam a geração dos raios X e sua interação com a matéria (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016).

O avanço da tecnologia permitiu o desenvolvimento de fontes e detectores de raios X de melhor qualidade, o que disseminou seu uso seguro. Segundo Okuno (2018), as características negativas também se tornaram evidentes, como se descobriu posteriormente, a radiação ionizante, como os raios X, destrói o DNA dos seres vivos, causando mutações que podem levar ao aparecimento de cânceres, e que seus efeitos são cumulativos.

Embora os tubos sejam uma forma simples de produzir raios X, a onda eletromagnética produzida por tais dispositivos é incoerente, o que prejudica efeitos de interferência e a focalização da onda. O passo seguinte, então, foi o surgimento de fontes coerentes de raios X. Essas fontes coerentes são chamadas de fontes de luz síncrotron e lasers de elétrons livres de raios X, sendo que este último produz raios X com maior coerência e pode produzir pulsos com largura temporal muito reduzida, sendo mais apropriado no estudo de fenômenos ultra rápidos. “Atualmente existem aproximadamente 50 fontes de luz síncrotron (SyncLSs) em operação em todo o mundo, com várias delas acompanhadas por lasers de elétrons livres de raios X (XFELs) derivados de tecnologia relacionada.” (MTINGWA; WINICK, 2018). Mtingwa; Winick (2018) pontua, que para os países em desenvolvimento, assim como nos países tecnologicamente avançados, o acesso a um SyncLS traz muitos benefícios, sendo os mais importantes:

- a) realizar pesquisa básica e aplicada de alto nível;
- b) não enviar alunos de pós-graduação ao exterior para formação de alto desempenho;
- c) atrair cientistas que realizam pesquisas no exterior para voltar para o país de origem;
- d) abordar questões/preocupações regionais biomédicas, ambientais e de patrimônio cultural;
- e) promover o desenvolvimento da indústria de alta tecnologia.

Por exemplo, empresas taiwanesas que fizeram parceria com centros de pesquisas SyncLS, obtiveram excelentes resultados no desenvolvimento das capacidades de projetar e fabricar. Isso inclui ímãs, dispositivos de inserção (incluindo dispositivos supercondutores), câmaras de ultra-alto vácuo, analisadores de energia de raios-X, tecnologia criogênica, componentes de radiofrequência, eletrônica digital e dentre outras.

Para Mtingwa; Winick (2018), o Brasil não tinha experiência na elaboração ou operação de um SyncLS e tinha poucos colaboradores em instalações internacionais. No entanto, o país embarcou em um programa ambicioso para capacitar estudantes, cientistas, engenheiros e técnicos para desenvolver e operar o SyncLS. Com esses principais esforços, o Brasil passou a construir o primeiro SyncLS, chamado UVX, no Laboratório Nacional de Luz Síncrotron, que iniciou os experimentos em 1997. Porém, o Brasil agora tem um novo SyncLS de quarta geração chamado Sirius, que é um dos SyncLSs mais brilhantes do mundo, graças a um novo design de layout de ímã em seu anel de armazenamento chamado de multi-bend achromat (MBA), permitindo um maior brilho em um SyncLS menor e menor custo.

A presente dissertação faz uma análise de algumas equações importantes na teoria de fontes de raios X coerentes, como as equações para a obtenção do comprimento de onda emitido e a equação do comprimento de ganho de um laser de raios X de elétrons livres, usando a função de Lambert-Tsallis para inverte-las e obter fórmulas analíticas para outras variáveis como o comprimento de onda do ondulator e o parâmetro de dispersão de energia quando um ondulator com gradiente transversal é utilizado. Essas novas fórmulas podem ser úteis no projeto e no ensino da teoria de fontes de raios X coerentes.

A presente dissertação está dividida da seguinte forma: o capítulo 1 traz uma revisão de conceitos e aplicações de raios X e de fontes incoerentes de raios X. O capítulo 2 faz uma breve revisão de fontes de raios X coerentes. O capítulo 3 mostra a aplicação da função W_q de Lambert-Tsallis na inversão de fórmulas da teoria de fontes de raios X coerentes. Por fim, o capítulo 4 traz as conclusões e perspectivas de trabalhos futuros.

2 REVISÃO DE CONCEITOS E APLICAÇÕES DE RAIOS-X

2.1 Introdução

A definição de átomo surgiu com os antigos gregos, onde se idealizava a matéria formada por pequenas partículas chamadas atomon, o que significa indivisível. Durante vários séculos prevaleceram as ideias aristotélicas e com isso os estudos e pensamentos sobre a estrutura da matéria ficaram de lado durante um tempo. Por volta do século XVIII, com a necessidade de um esclarecimento sobre a natureza da matéria, Dalton elaborou a proposição que o átomo é como uma pequena esfera maciça, indivisível, impenetrável e indestrutível, surgindo assim um dos primeiros modelos atômicos, o então “modelo da bola de bilhar (MIZRAHI; GALETTI, 2016).

Segundo Okuno; Yoshimura (2010), indo contra a teoria de indivisibilidade do átomo, em 1876, foi teorizada a primeira partícula subatômica. George Johnstone Stoney nomeou-a com o nome de elétron e em 1897, Joseph John Thomson conseguiu determinar experimentalmente a relação entre a carga e a massa do elétron quando estudava raios catódicos e concluiu que a carga do elétron era negativa, bem como apresentou seu modelo atômico, também conhecido como “pudim de passas”. Sendo o pudim toda a esfera positiva e as passas os elétrons, de carga negativa. E pôr fim a carga do elétron foi descoberta por Robert Andrew Millikan, em 1909, na Universidade de Chicago por meio do experimento da gota de óleo.

Segundo Halliday; Resnick; Walker (2016), em 1911 Ernest Rutherford, sugeriu que a carga positiva estava concentrada no centro do átomo, formando um núcleo e que, além disso, o núcleo era responsável pela maior parte da massa do átomo. Essas afirmações foram baseadas nos resultados obtidos no experimento realizado por Rutherford e seus colaboradores que consistia no bombardeamento de uma lâmina muito fina de ouro com partículas alfas, e que resultou no seu modelo atômico planetário, no qual comparava o átomo como o sistema solar, sendo o núcleo atômico o sol, e os elétrons, semelhante aos planetas, orbitando ao seu redor do núcleo. Entretanto, esse modelo continha problemas porque o elétron está acelerado, uma vez que a direção do vetor velocidade muda constantemente e, pela teoria eletromagnética clássica, uma partícula acelerada emite radiação eletromagnética continuamente. Com isso, o elétron iria perdendo energia e sua trajetória, espiralando-se, acabaria por cair no núcleo, o que, de fato, não acontece.

“Em 1913, Niels Hendrik David Bohr aperfeiçoou o modelo de Rutherford com a introdução do conceito de órbitas eletrônicas quantizadas para explicar a estabilidade atômica, assim como para explicar a emissão e absorção de radiação em quanta de energia” (MIZRAHI; GALETTI, 2016, p.11).

Doze anos após a descoberta do próton, em 1932, o nêutron é descoberto por James Chadwick, discípulo de Rutherford. O nêutron é uma partícula sem carga e com a massa ligeiramente maior que a do próton e que também faz parte do núcleo atômico. Na verdade, já em 1920 Rutherford previu a existência de partículas sem carga no núcleo, que ele chamou de nêutrons, sugerindo que fossem formados pela união de um próton com um elétron, o que, como se sabe hoje, não é bem assim.

Prótons possuem carga positiva de $1,602 \times 10^{-19}$ Coulomb (C) e massa igual a 1,007272 u, (u é a unidade de massa atômica, definida como um doze avos da massa do átomo de carbono eletricamente neutro $1u \equiv \frac{1}{12}M_{^{12}_6C} = 1,660539 \times 10^{-24}g$), nêutrons possui carga total igual a zero e massa igual a 1,008665 u, assim formando o núcleo atômico. O número de prótons no núcleo, conhecido como número atômico, é representado pela letra Z. Define-se também o número de massa (A), que significa a adição da quantidade de prótons e nêutrons em um átomo. Os elétrons, por sua vez, são extremamente leves se equiparado às partículas nucleares, a massa de um elétron é de aproximadamente (1/1800) vezes a massa uma partícula nuclear, além disso a carga do elétron é igual em módulo à carga do próton, porém negativa: $-1,602 \times 10^{-19}$ C.

Nesta dissertação apenas o modelo atômico de Bohr é considerado. Nele, os elétrons se movimentam em regiões específicas com um raio típico da ordem 10^{-10} m – portanto, 10.000 vezes maior que o raio de um núcleo, cada camada comporta um número limitado de elétrons com energias bem definidas. Os elétrons são mantidos em suas órbitas devido à força de atração exercida pela concentração de cargas positivas no núcleo, uma energia chamada energia de ligação. Em camadas mais internas, essa energia de ligação torna-se ainda maior. Nesse modelo, os elétrons podem se mover de uma camada para outra em um processo chamado transição. Nesse processo, os elétrons devem receber energia para saltar para as camadas externas. Ou, ao contrário, os elétrons fornecem energia ao ambiente externo na forma de radiação eletromagnética e decaem para as camadas mais internas.

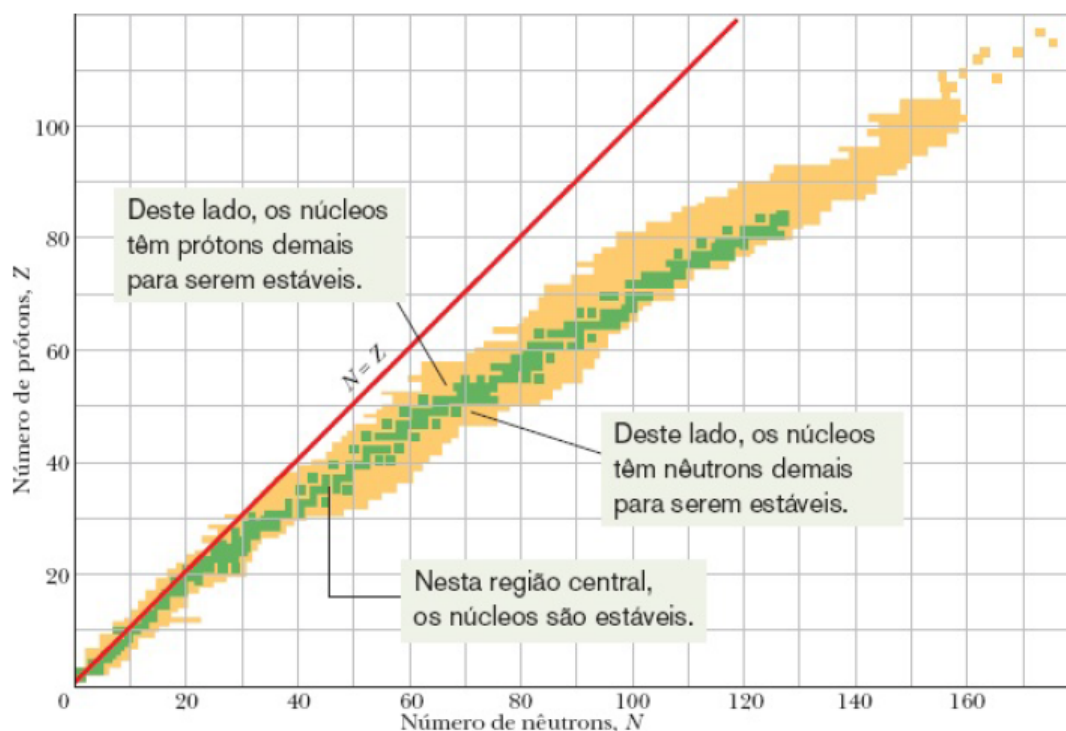
2.2 Fundamentos da Radioatividade

A estabilidade de um núcleo atômico é ditada pelo equilíbrio de força entre os pares próton-próton, próton-nêutron e nêutron-nêutron (força forte) e a força de repulsão Coulombiana entre os prótons, existindo assim uma relação ideal entre o número de nêutrons e de prótons para que um certo núcleo alcance a sua estabilidade: À medida que Z aumenta, o número de nêutrons torna-se maior que o número de prótons, porque à medida que o número de prótons aumenta, a intensidade da força repulsiva entre eles aumenta, o que faz com que o núcleo se divida (OKUNO; YOSHIMURA, 2010). Portanto, para se conseguir o equilíbrio nuclear, é necessário aumentar o número de nêutrons para minimizar as consequências das forças de repulsão Coulombiana entre prótons no núcleo.

Quando os números de prótons e nêutrons são tais que o núcleo se encontre em desequilíbrio, pode ser que o núcleo exclua de forma espontânea uma partícula e/ou energia em forma de radiação eletromagnética, para que esse núcleo atinja a estabilidade. Esse processo é chamado de desintegração radioativa, e o átomo é chamado radioativo. “O núcleo radioativo, após emitir o ‘excesso’ de energia, em geral muda a sua posição na tabela periódica; este processo pode ser também chamado de decaimento radioativo.” (TILLY JUNIOR, 2010, p.7).

Os diferentes arranjos nucleares, com quantidades distintas de prótons e nêutrons, são denominados nuclídeos (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016). Onde podem ser organizados em uma carta de nuclídeos como o da figura 1. Os nuclídeos estáveis estão apresentados na cor verde. Os nuclídeos instáveis e os radioisótopos (mesmo número atômico Z e diferentes números de nêutrons) estão em amarelo acima e abaixo bem como à direita de uma faixa bem definida de nuclídeos estáveis. Os nuclídeos estáveis mais leves estão mais próximos da reta $N = Z$, e os nuclídeos pesados possuem um número de nêutrons muito maior do que de prótons.

Figura 1 – Relação entre o número atômico e o número de nêutrons para diferentes isótopos



Fonte: Fundamentos de física, volume 4: óptica e física moderna / David Halliday , Robert Resnick , Jearl Walker – 10. Ed. – 2016. P.640.

A desintegração radioativa é um processo espontâneo e totalmente aleatório (TILLY JUNIOR, 2010). Foi o primeiro indício de que as leis que regem o mundo subatômico são estatísticas. Entretanto, para uma amostra conhecida de material radioativo, onde há muitos núcleos, sabe-se que uma certa fração se desintegra a cada intervalo de tempo, ou seja, pode-se determinar uma taxa de decaimento. Apesar de ser impossível antever quais serão os núcleos a decair, pode-se dizer que para uma amostra que contém N núcleos radioativos, a taxa de decaimento dos núcleos, $\frac{-dN}{dt}$, é proporcional a N :

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N \quad (1)$$

Na qual λ é a constante de desintegração (ou constante de decaimento) e tem um valor diferente para cada radionuclídeo. A unidade de λ no SI é o inverso do segundo s^{-1} . Para determinar N em função do tempo t , pode-se proceder da seguinte forma:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \Rightarrow \frac{dN}{N} = -\lambda dt \Rightarrow \int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t d\tau \Rightarrow \ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\lambda t \Rightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (2)$$

Em (2) N_0 é o número de núcleos radioativos no instante $t = 0$ e $N(t)$ é o número de núcleos ainda não desintegrados da amostra no instante $t > 0$. Frequentemente, estamos mais interessados na taxa de decaimento $R = -dN/dt$ que no valor de N .

$$R = -\frac{dN}{dt} = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow R = R_0 e^{-\lambda t} \quad (3)$$

“Portanto, a equação acima pode ser considerada uma opção da lei do decaimento radioativo.” (HALLIDAY; RESNICK; WALKER 2016, p. 650). Em (3) R_0 é a taxa de decaimento no instante $t = 0$ e R é a taxa de decaimento em um instante $t > 0$. A soma das taxas de decaimento R de todos os radionuclídeos presentes em uma amostra é chamada de atividade da amostra. A unidade de medida da atividade da amostra no SI, é expressa em becqueréis (Bq), em homenagem a Henri Becquerel, o descobridor da radioatividade.

Existem duas medidas principais do tempo de sobrevivência de um tipo exclusivo de radionuclídeo. A primeira é a meia vida $T_{1/2}$ de um radionuclídeo, que é o intervalo de tempo em que N e R se reduz à metade do valor inicial. O tempo de meia vida pode ser expresso em qualquer unidade de tempo apropriada, ou seja, para fontes de curta meia vida usa-se a hora, o minuto ou segundos enquanto que para fontes de longa meia vida pode-se usar o ano ou o mês. A relação entre $T_{1/2}$ e a constante de desintegração λ é dada por

$$\frac{R_0}{2} = R_0 e^{-\lambda T_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad (4)$$

A outra medida de tempo é a vida média, τ , que é o tempo necessário para que N e R caiam a $1/e$ do valor inicial. De forma semelhante à eq. (4) tem-se que

$$\frac{R_0}{e} = R_0 e^{-\lambda \tau} \Rightarrow \tau = \frac{\ln(e)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \quad (5)$$

Por fim, usando (4) e (5), obtém-se a relação entre a meia vida e a vida média:

$$T_{\frac{1}{2}} = \tau \ln \ln 2 \quad (6)$$

“Para átomos leves ($Z < 82$) há pelo menos um isótopo estável. Em geral, quando o número atômico aumenta a quantidade de isótopos aumenta, aumentando também a quantidade de isótopos estáveis.” (TILLY JUNIOR, 2010, p. 8).

Para alcançar o equilíbrio nuclear, o núcleo radioativo emite espontaneamente partículas nucleares e/ou radiação eletromagnética. Os processos mais importantes pelos quais os átomos radioativos atingem o equilíbrio são os decaimentos alfa (α), beta (β) e gama (γ). O núcleo inicial é chamado de núcleo pai e os núcleos filhos vêm do processo de decaimento. A radiação nuclear é muito energética devido à intensidade das forças que atuam no núcleo.

Uma "partícula" alfa é uma das partículas emitidas espontaneamente de um núcleo atômico radioativo, predominantemente carregado, com número atômico $Z \geq 83$. Neste processo, o núcleo pai decai nos núcleos filhos através da emissão de um grupo de partículas positivas, constituídas por dois prótons e dois nêutrons e da energia a elas associada, ou seja, um núcleo de hélio, He_2^4 . “Em geral, núcleos com números atômicos elevados decaem por emissão alfa.” (OKUNO; YOSHIMURA 2010, p. 122).

Assim, quando um núcleo radioativo emite uma partícula alfa, seu número de massa diminui 4 unidades e seu número atômico diminui 2 unidades: $X_Z^A \rightarrow Y_{Z-2}^{A-4} + He_2^4$. Esse fenômeno ocorre espontaneamente porque é favorecido por questões de energia porque a massa do núcleo pai é maior que a soma da massa do núcleo filho mais a massa da partícula alfa. “Em um processo desse tipo, a diferença entre a energia de repouso inicial e a energia de repouso final é chamada de Q da reação.” (HALLIDAY, RESNICK; WALKER, 2016, p.655). A energia de desintegração Q do núcleo pode ser calculada conhecendo-se as massas atômicas dos núclídeos envolvidos:

$$Q = - \Delta MC^2 \quad (7)$$

$$Q = [M_{Z, A} - (M_{Z-2, A-4} + M_{2, 4})]C^2 MeV \quad (8)$$

Para que ocorra a emissão da partícula alfa espontaneamente, o valor de Q da reação deve ser positivo. A energia Q surge como energia cinética do núcleo filho e da partícula alfa e a energia de excitação do núcleo filho. As partículas alfas são facilmente absorvidas pelo

meio, geralmente são barradas por uma folha de papel, ou por vários centímetros de ar, e perdem consideravelmente a sua energia em ionizações ao longo de sua trajetória até parar, quando captura elétrons que encontra nos arredores e torna-se um átomo neutro de He.

O decaimento β , por sua vez, ocorre quando existe no núcleo um excesso de nêutrons em relação ao número de prótons ou vice-versa. “O decaimento β é isobárico, isto é, o número de massa A mantém-se constante na transição do núcleo inicial para o núcleo final, mas o número atômico muda de uma unidade, portanto, o número de prótons não é conservado.” (MIZRAHI; GALETTI, 2016, p. 295). Basicamente, o decaimento β de um núcleo consiste na transmutação de um de seus núcleons, $n \leftrightarrow p$, acompanhada da emissão e/ou absorção de léptons como elétrons, pósitrons, neutrino e antineutrino (MIZRAHI; GALETTI, 2016). Assim, no decaimento β^- ocorre a transformação de um nêutron em um próton com a emissão de um elétron e um antineutrino:



Por outro lado, no decaimento β^+ ocorre a transformação de um próton em um nêutron com a emissão de um pósitron e um neutrino:



O neutrino foi observado pela primeira vez por Reines e Cowan em 1953 entre as partículas geradas por um reator nuclear de alta potência, sendo detectado mais tarde o antineutrino também por Reines e Cowan. Após a morte de Cowan, Reines recebeu o Prêmio Nobel em Física pela descoberta do neutrino. Em geral, a energia da partícula beta emitida por um núcleo radioativo é menor que a energia da partícula alfa emitida por núcleo radioativo. A maior parte das partículas beta têm energias menores que 4 MeV, enquanto quase todas as partículas alfas têm energia superior a 4 MeV. Por conta de sua alta velocidade, próxima à velocidade da luz, as partículas betas são obrigadas a ter um tratamento relativístico para o cálculo e obtenção da sua energia cinética. Além disso, as partículas betas são muito mais penetrantes que as partículas alfa.

Por fim, o decaimento gama, γ , é a emissão de um fóton pelo núcleo que ainda permanece excitado após um decaimento alfa ou beta. A energia $h\nu$ do fóton emitido

corresponde à diferença entre dois níveis de energia nuclear e se encontra na região do espectro eletromagnético corresponde aos raios gama (energias na ordem de MeV). “Nesse caso, o núcleo não sofre transmutação e, em geral, o estado final é o fundamental.” (OKUNO; YOSHIMURA, 2010, p. 141). A reação típica de decaimento gama é:



O símbolo ** indica o núcleo no estado excitado.

2.3 O Processo de Ionização

A radiação não ionizante possui energia relativamente baixa, radiações eletromagnéticas com energia abaixo da região do ultravioleta são chamados de radiação não ionizante (ondas de rádios, microondas, infravermelho, luz visível). Tal radiação é incapaz de produzir ionização (arrancar elétrons de átomos ou moléculas) e seus efeitos potencialmente prejudiciais podem aparecer como problemas biológicos crônicos e agudos em indivíduos causados, por exemplo, por aquecimento prolongado de regiões do corpo (BUSHEBERG, JERROLD, 2011).

Diz-se que um átomo é neutro quando o mesmo possui uma carga total nula, ou seja, que possui a mesma quantidade de prótons e elétrons. Contudo é possível retirar elétrons de um átomo neutro por diversos processos químicos e físicos; entretanto no ponto de vista radiológico, o procedimento mais importante é o que deriva da incidência de radiação em um meio material. A ionização de um átomo é o início do dano biológico provocado pela radiação ionizante. De acordo com Okuno; Yoshimura (2010), para fótons há a probabilidade de a interação com os átomos do meio não acontecer e isto explica a grande penetrabilidade dos raios X e gama nos materiais, não sendo possível, então, em princípio, blindá-los totalmente e esse é um dos motivos da necessidade de proteção radiológica que dita regras quanto ao nível de radiação que as pessoas expostas podem receber.

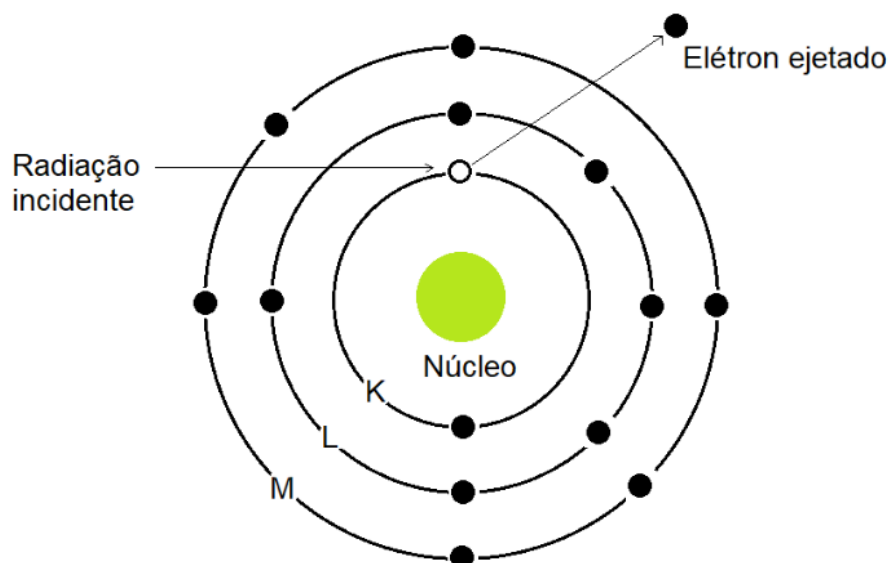
“Convencionou-se chamar de ionizante as radiações, que transportam energia suficiente para a ionização de uma molécula de ar atmosférico, que é aproximadamente de 33 keV, a condições normais de temperatura e pressão.” (TILLY JUNIOR, 2010, p.20).

Os elétrons estão ligados ao núcleo atômico pela força de Coulomb e esta força aumenta à medida que o elétron orbita mais próximo do núcleo. Por exemplo, a energia de ligação de um elétron na camada *K* (mais interna) e de um elétron na camada mais externa de um átomo de Tungstênio são, respectivamente, -69.500 eV e -7,9 eV (o valor é negativo por que é uma energia de ligação), respectivamente. Se a radiação incidente transportar energia igual ou superior à energia de ligação do elétron, o processo de ionização é passível de ocorrer, e a radiação é chamada de radiação ionizante, como ilustrado na figura 2..

As radiações ionizantes podem ser divididas em duas grandes classificações, sendo a primeira as radiações diretamente ionizantes, constituída de partículas com cargas elétricas, e radiação indiretamente ionizante, constituída de radiação sem carga elétrica (fótons e nêutrons). A segunda classificação divide o grupo das radiações diretamente ionizante em partículas carregadas pesadas e leves, sendo a primeira composta por partículas alfas e prótons da radiação cósmicas ou de aceleradores, e a segunda por elétrons e pósitrons com energias cinéticas maior que a energia de ligação do elétron ao átomo, qualquer que sejam suas origens.

A divisão do grupo das radiações indiretamente ionizante, por sua vez, é separada em fótons e nêutrons. A radiação eletromagnética ionizante consiste de fótons de raios X e gama, interagindo esporadicamente com a matéria através dos efeitos fotoelétricos, Compton e criação de par elétron e pósitron. Já os nêutrons são constituintes do núcleo atômico e a sua emissão não ocorre espontaneamente, sendo a sua principal fonte de emissão são as interações da radiação cósmica na alta atmosfera, as fissões nucleares e diversas reações nucleares. “Deve-se acrescentar ainda que a passagem da radiação em um meio pode produzir mais radiação, na forma de radiação secundária, tornando difícil a obtenção de equações analíticas que descrevem por completo a distribuição de energia e de partículas no meio de interação.” (OKUNO; YOSHIMURA, 2010, p.153).

Figura 2 – Representação da ionização de um átomo.



Fonte: O autor

2.4 Produção Incoerente de Raios X

Já na década de 1890, muitos cientistas estudavam as propriedades dos raios catódicos que eram lançados de um tubo de vidro a vácuo (chamado tubo de Crookes), que tinha dois eletrodos de metal aos quais era aplicada uma diferença de potencial. O próprio William Crookes havia percebido que o que veio a ser conhecido como raios catódicos eram as radiações que emanavam do eletrodo negativo e viajavam em linhas retas, e onde esses raios caíam no tubo eles emitiam luz. Ele também foi capaz de desviar os raios, aplicando um campo magnético, o que o fez pensar se eles eram carregados negativamente.

Philipp Lenard foi aquele que mais se aproximou da descoberta dos raios X. Para a realização do experimento, Lenard modificou o tubo de Crookes colocando uma janela de alumínio e passou a observar os raios fora do tubo, através de anteparo fluorescente e notou que esses raios causavam luminescência no anteparo em uma distância de até 8 cm, posteriormente esses raios ficaram conhecidos como raios de Lenard. No dia 8 de novembro de 1895, quando então professor de física da Universidade de Wurzburg, Wilhelm Rontgen decidiu realizar o experimento, enrolou o tubo com um papel preto para que o brilho que emanava do vidro não o atrapalhasse a sua observação de uma tela pintada com platino cianeto de bário. Ligou e desligou o tubo e percebeu que toda vez que desligava o tubo o brilho desaparecia.

Roentgen ficou intrigado, pois o que ele estava observando não eram os efeitos dos raios catódicos, os novos raios eram mais fortes e mais penetrantes que os raios catódicos e não sofriam deflexão na presença de um campo magnético. Durante a colocação de uma peça entre o tubo e a tela, percebeu que os contornos dos ossos dos seus dedos estavam sendo mostrados na tela, logo ele percebeu que esses raios são parcialmente barrados pelos ossos. Em 1896, Roentgen apresenta sua descoberta e expõe a radiografia da mão da sua esposa Anna Bertha, como mostra a figura 3. Roentgen batizou esses raios responsáveis pelo brilho detectado na tela de “raios X” devido a sua natureza desconhecida.

Roentgen foi premiado com o Prêmio Nobel de Física em 1901 e ele não patenteou os raios X pois, segundo ele, esses deveriam ser usados a favor da humanidade. Em consequência do frenesi causado pelos raios X, cientistas passaram a estudar esse fenômeno, o que acabou trazendo outras importantes contribuições. Uma das mais importantes foi a descoberta dos raios gama, raios que são emitidos espontaneamente pelos núcleos radioativos e possui a mesma natureza dos raios X, ou seja, é uma onda eletromagnética.

Figura 3 – Radiografia da mão da Sra. Anna Bertha Ludwing.



Fonte: Física das radiações / Emico Okuno, Elisabeth Mateus Yoshimura. – 2010. p. 49.

Como demonstrado pelo tubo de Crookes, os raios X são gerados quando elétrons, acelerados por alta tensão, colidem contra um meio material, perdendo e transferindo energia para o meio. Sendo uma onda eletromagnética, os raios X obedecem às relações da mecânica quântica em suas interações com a matéria. Os comprimentos de onda típicos de raios X está entre a região 0.001 nm até 1 nm ($10^{-12} m$ até $10^{-9} m$). Portanto, a produção de raios X é, fundamentalmente, um fenômeno elétrico, pois resulta da interação entre elétrons em movimentos e átomos em um meio material.

Em outras palavras, a emissão de raios X é um fenômeno inverso ao que ocorre no efeito fotoelétrico. Na fotoemissão, a energia do fóton é convertida em energia cinética do elétron; na geração de raios X, ocorre o processo oposto, e a energia cinética do elétron é convertida na energia do fóton. Na produção de raios-X, geralmente ignoramos a função trabalho do alvo e a energia dos elétrons "evaporados" do cátodo, porque eles são pequenos em comparação com outras energias.

Dois processos diferentes estão presentes na produção de raios X. Em um deles, chamado de raios X de frenagem ou *Bremsstrahlung*, o espectro da radiação emitida na desaceleração do elétron é contínuo, portanto há produção de ondas eletromagnéticas de vários comprimentos de onda, inclusive de raios X. O outro processo, chamado de raios X característicos, decorre do preenchimento de um nível eletrônico de energia vazio devido à uma ionização por impacto.

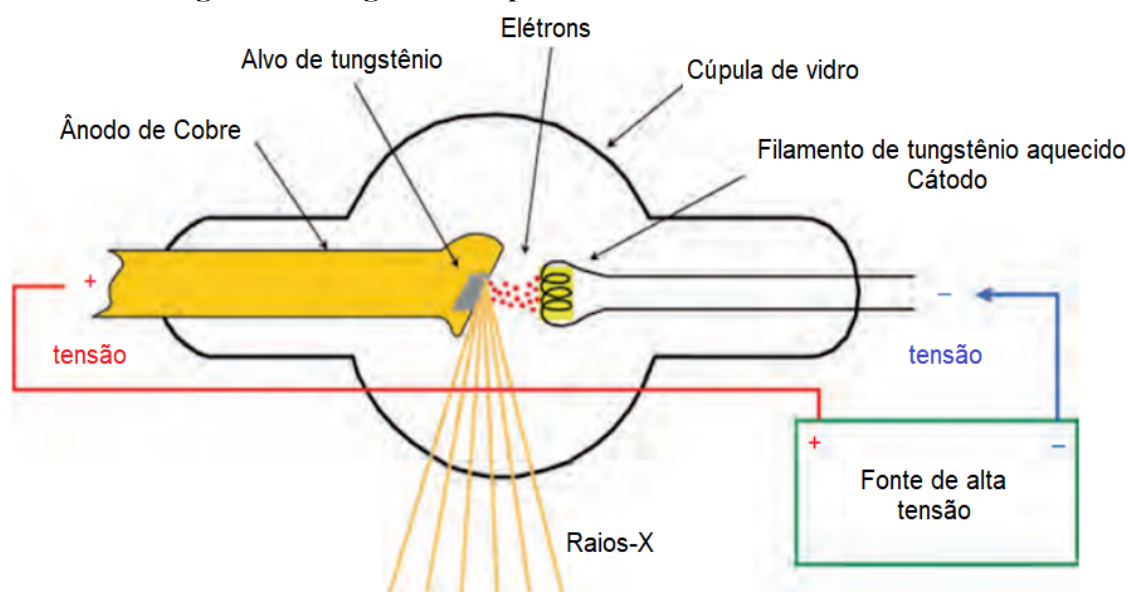
O dispositivo utilizado para a produção de raios X em radiologia é o tubo radiológico, cujos elementos essenciais são:

- a) filamento: fio metálico enrolado que tem a finalidade de distribuir elétrons para a produção de raios X;
- b) anodo: bloco de metal; em geral usa-se tungstênio, por possuir um alto Z e por suportar altas temperaturas;
- c) cúpula de vidro: é usada como apoio para montagem de todos esses elementos e para manter alto vácuo em seu interior, para que os elétrons não venham a colidir com outras partículas antes de atingir o alvo.

O esquema que representa a forma simplificada da produção dos raios X, está representado na figura 4.

“A eficiência dos tubos de raios X é baixa, mesmo nos mais modernos. Aproximadamente 99% da energia dos elétrons em um disparo é transformada em calor e 1% se transforma em raios X.” (TILLY JUNIOR, 2010, p.28). Além disso, o tubo precisa ser resfriado. O calor é extraído do tubo através de um circuito fechado de óleo e água corrente.

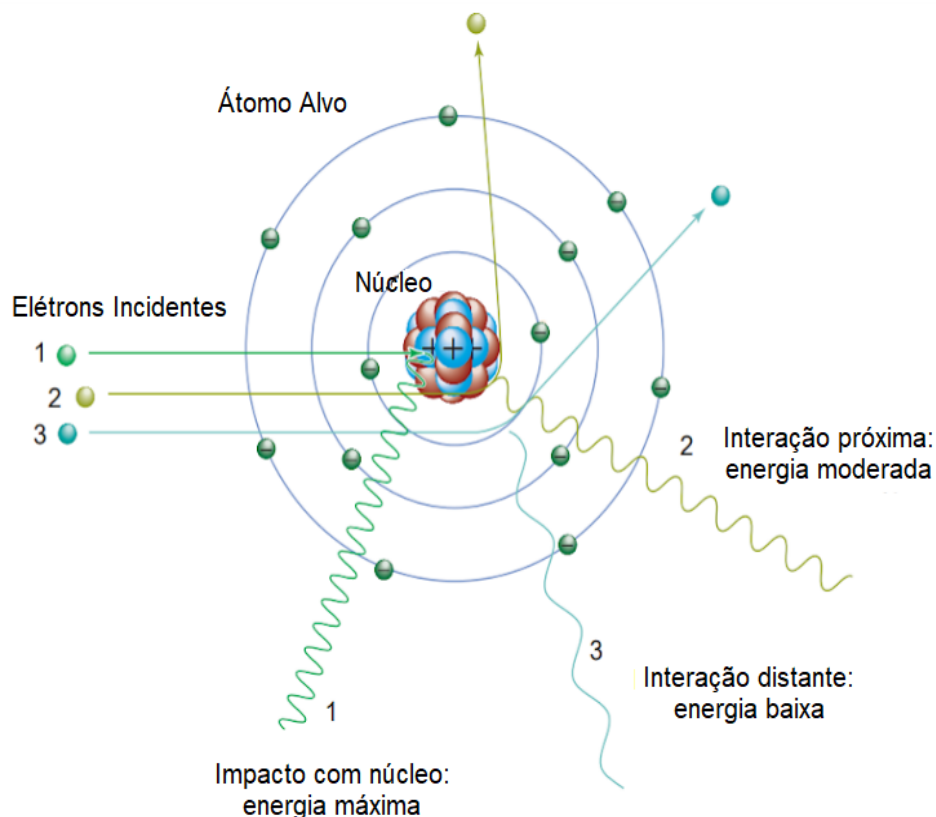
Figura 4 – Diagrama simplificado de um tubo de raios X.



Fonte: Adaptada de The essential physics of medical imaging / Jerrold T. Bushberg. — 2011. p 172.

Quando a trajetória de um elétron é lançada em direção a um átomo passar suficientemente próximo do núcleo, ele sofrerá atração eletrostática devido às cargas positivas nucleares. Sobre esse elétron estará atuando uma força que fará mudar a direção da trajetória. Por conta dessa mudança de direção, um fóton de raios X é criado. A radiação produzida por esse processo é chamada “radiação de freamento” ou *Bremsstrahlung* (brems = frenagem e strahlung = radiação). O processo é ilustrado na figura 5. A radiação de freamento pode ter qualquer energia, uma vez que depende do grau de aproximação do elétron causada pela força de atração Coulombiana, devido a concentração de cargas positivas do núcleo, além da sua energia cinética.

Figura 5 – Processo de geração de um fóton de raios X de freamento.



Fonte: Adaptada de The essential physics of medical imaging / Jerrold T. Bushberg. — 2011. p 172.

Seguindo o desenvolvimento mostrado em Halliday & Resnick, considera-se um elétron de energia cinética inicial K , que interage com um dos núcleos do átomo do material alvo. Nesta interação, o elétron perde uma quantidade de energia cinética ΔK , que é convertida em energia do fóton de raios X, a energia transferida para o núcleo do átomo do alvo é muito pequena, uma vez que sua massa é muito maior do que a do elétron. Se K' é a energia do elétron após a interação com o núcleo, então a energia do fóton de raios X é:

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \Delta K = K - K' \quad (12)$$

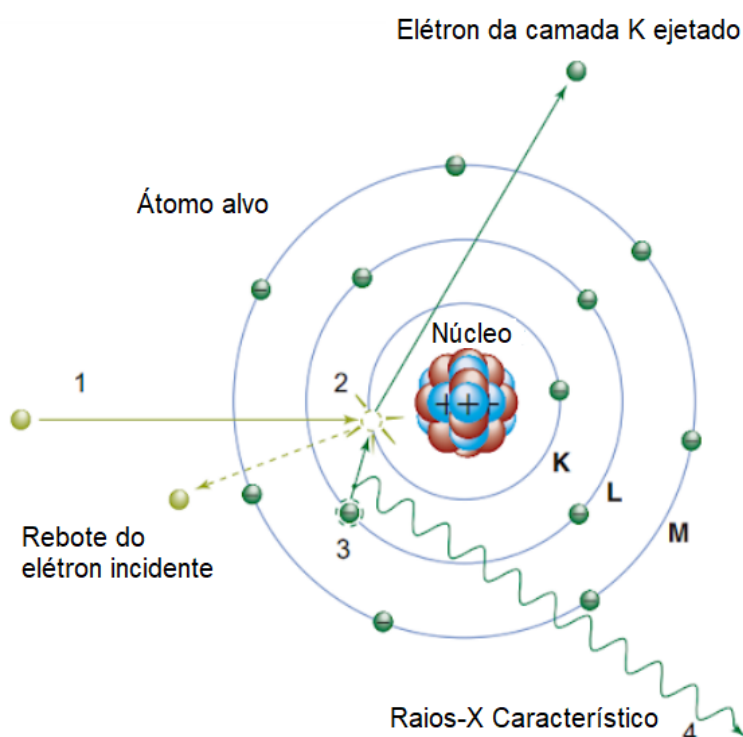
Os elétrons no feixe incidente podem perder diferentes quantidades de energia nessas colisões, portanto o elétron chegará ao repouso apenas depois de várias colisões. O fóton mais energético, ou seja, o de menor comprimento de onda, é aquele que recebe toda a energia cinética do elétron, $K'=0$, portanto, o menor valor do comprimento de onda será

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{K} = \frac{hc}{eV} \quad (13)$$

Em (13) $K = eV$ é a energia adquirida pelo elétron ao ser acelerado pela diferença de potencial V aplicada ao tubo de raios X.

Se em vez de passar próximo ao núcleo, o elétron incidente colidir com um elétron orbital, e se sua energia for suficientemente grande, a colisão arrancará o elétron de sua órbita, gerando o processo de ionização, como ilustra a figura 6

Figura 6 – Representação da ejeção do elétron por um elétron incidente no alvo e a posterior emissão de fótons de raios X característicos.



Fonte: Adaptada de The essential physics of medical imaging / Jerrold T. Bushberg. — 2011. p 175.

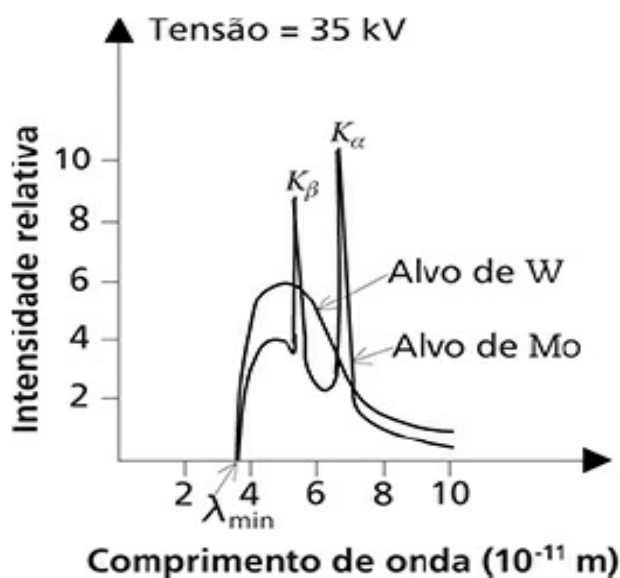
O nível de energia vazio deixado pelo elétron arrancado é decaído para outro de nível mais baixo, a diferença de energia é liberada na forma de fótons. Quando esse processo acontece nas camadas mais internas do átomo, um fóton de raios X é emitido. A radiação emitida dessa maneira é chamada de radiação característica. Diferentemente dos raios X gerados por frenagem, os raios X característicos possuem espectro de energia discreto, sendo que a energia do fóton de raio X corresponde à diferença de energia entre as camadas final e inicial.

Por exemplo, K e L : $E_X = E_L - E_K$. Nos casos dos átomos de tungstênio (W) e molibdênio (Mo), as energias totais dos elétrons da camada K são, respectivamente, -69,5 keV e -20,0 keV, e da camada L, de -12,1 keV e -2,52 keV. Como a diferença de energia entre as camadas varia de átomo para átomo, a energia do fóton de raios X liberado neste processo é

característica do tipo de transição eletrônica e do tipo de átomo, por isso é chamado de radiação característica. Em tubos de raios X, esses fótons constituem o espectro de linhas ou de raios e são produzidos simultaneamente com os fótons de raios X produzidos por frenagem.

A figura 7 mostra o espectro de comprimentos de ondas de raios X produzidos em um tubo com o alvo de W ou de Mo, quando se aplica uma diferença de potencial de 35 kV. Percebe-se que o espectro com o alvo de Mo é a soma do espectro contínuo de Bremsstrahlung mais o de linha dos raios X característicos, K_α e K_β , emitidos quando os elétrons sofrem transição da camada L para camada K , e de M para K , mostrados como dois picos muito estreitos. O espectro com alvo de W só contém radiação de frenagem, pois a energia do elétron de 35 keV incidente no alvo não é suficiente para arrancar um elétron da camada K .

Figura 7 – Representação do espectro de raios X característico emitido por um tubo de alvo de Mo e por outro de W.



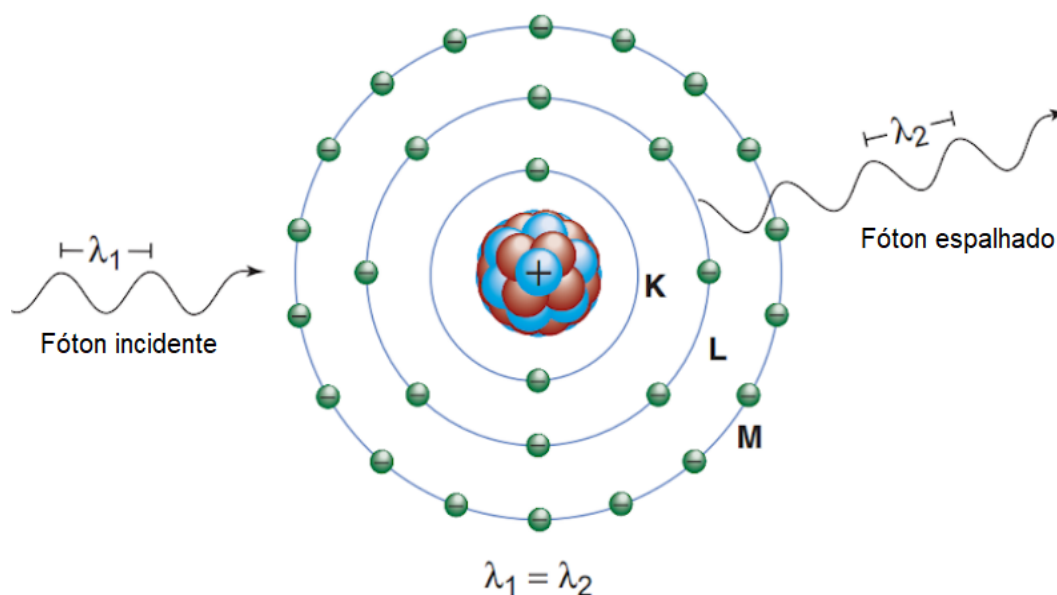
Fonte: Física das radiações / Emico Okuno, Elisabeth Mateus Yoshimura. – 2010. p. 56.

2.5 Interação de Raios X com a Matéria

Toda a matéria é composta de átomos e o átomo é fundamentalmente vazio. Quando um fóton de raio X se propaga na direção de um átomo pode ser que ele interaja ou não com o átomo. Neste primeiro caso três processos de deposição de energia de ionização destacam-se: efeito coerente, efeito Compton e o efeito fotoelétrico e em todos eles deve-se considerar a radiação eletromagnética comportando-se como uma partícula. A ocorrência desses processos varia com a energia do fóton, com o número atômico e a densidade do meio.

O espalhamento coerente ocorre para o fóton de menor energia $hc/\lambda \lesssim 10$ keV. Nesse tipo de processo, os fótons incidentes perturbam as órbitas dos elétrons, fazendo-os vibrar e emitir radiação com o mesmo comprimento de onda. É difícil observar experimentalmente porque o ângulo de espalhamento é tão pequeno que a energia do fóton espalhado é quase a energia original. O fóton incidente e o fóton espalhado têm o mesmo comprimento de onda, ou seja, a mesma energia; portanto, nenhuma energia é transferida para o átomo e, portanto, nenhuma ionização. A figura 8 ilustra esse tipo de interação.

Figura 8 – Representação do efeito Rayleigh.

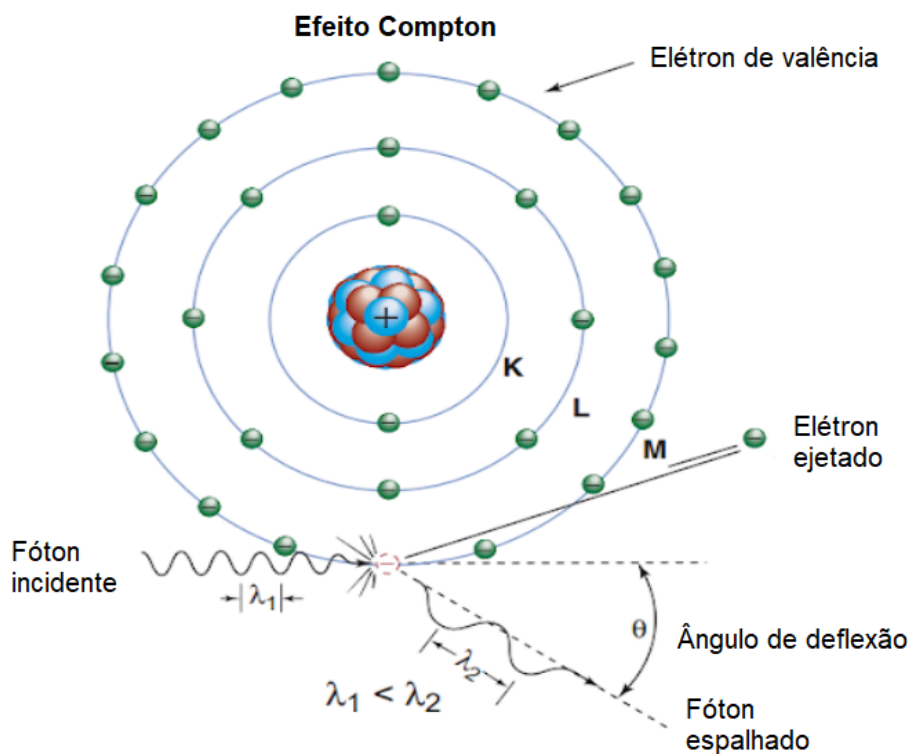


Fonte: Adaptada de The essential physics of medical imaging / Jerrold T. Bushberg. — 2011. p 39.

O espalhamento Compton, por sua vez, é a interação dos fótons de raios X com os elétrons mais externos dos átomos. Nesse tipo de interação, um fóton incidente transfere parte de sua energia para um elétron e muda de direção, fazendo com que o átomo se ionize. Segundo OKUNO; YOSHIMURA, (2010), o estudo sistemático desses fótons espalhados foi feito por Arthur Compton em 1922, e verificou que a mudança do comprimento de onda do fóton observado dependia unicamente do ângulo de espalhamento.

O modelo proposto por Compton consiste em uma colisão entre o fóton e um elétron, geralmente elétrons das camadas mais externas. O elétron ejetado adquire energia cinética (K) e o restante da energia disponível é a energia do fóton espalhado ($h\nu' = h\nu - K$), resultando na ionização do átomo. A figura 9, mostra o plano de colisão entre as duas partículas: fóton incidente de energia $h\nu$ e o elétron em repouso, com detalhe dos ângulos de saída do fóton espalhado de energia $h\nu'$ (θ) e do elétron ejetado (φ), em relação ao ângulo de incidência.

Figura 9 – Representação do espalhamento Compton.



Fonte: Adaptada de The essential physics of medical imaging / Jerrold T. Bushberg. — 2011. p 40.

Como pode ser facilmente encontrado em livros texto de física moderna, a relação entre os comprimentos de onda inicial (λ_1) e final (λ_2), a massa de repouso da partícula (m_0) e o ângulo de espalhamento do fóton (θ) é dada por (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016):

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{h}{m_0 c} (1 + \cos(\theta)) \quad (14)$$

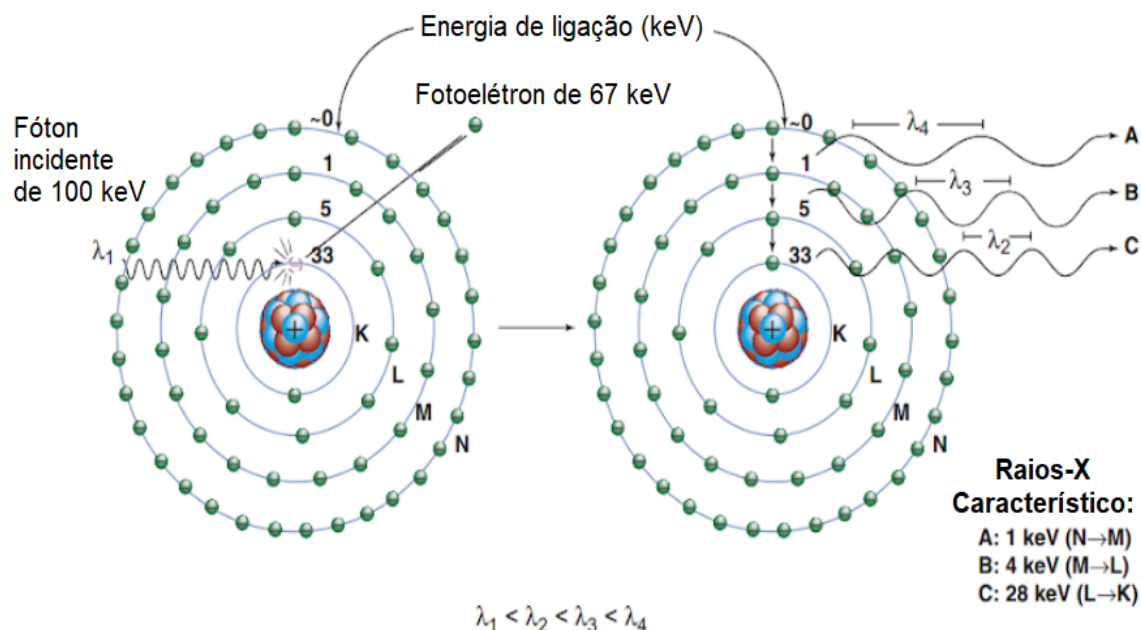
Normalmente, os fótons espalhados e os elétrons secundários têm energia para fazer mais interações até perderem toda a energia e, em sua interação final, os fótons espalhados provavelmente serão absorvidos. Os fótons de raios X podem ser espalhados de 0° a 180° sem transferência de energia para 0° . Quanto maior o ângulo de espalhamento, maior a energia transferida para os elétrons na interação. Os fótons espalhados a 180° formam a chamada radiação retroespalhada.

Finalmente, o efeito fotoelétrico é caracterizado por interações com os elétrons na camada mais interna de um átomo, mas apenas se o fóton transmitir mais energia do que a energia de ligação do elétron; assim, o fóton desaparece porque transfere toda a sua energia para o elétron. Há produção de um íon e o elétron ejetado do átomo é chamado de fotoelétron.

Embora o processo seja fisicamente o mesmo, há uma diferença entre o efeito fotoelétrico usando fótons ionizantes e o efeito fotoelétrico geralmente produzido pela interação da luz e da radiação ultravioleta, que foi explicada por meio dos quanta de luz (1905) deu a Albert Einstein o Prêmio Nobel de Física em 1921. Os fótons de luz ultravioleta removem os elétrons que estão fracamente ligados ao material, e os elétrons recebem energia cinética, cujo valor depende do metal em questão e da frequência da luz.

Para o efeito fotoelétrico causado pelos raios X e raios gama, a faixa de energia dos fótons será diferente por causa de sua forte penetração no meio, fazendo com que o evento ocorra dentro de qualquer material e se conecte com os elétrons. Esses elétrons liberados também formam radiação ionizante porque adquirem alta energia cinética. O processo é mostrado na figura 10..

Figura 10 – Ilustração do efeito fotoelétrico



A energia do fóton é totalmente transferida para retirar o elétron do átomo e transformada em energia cinética do elétron e do átomo. A equação de conservação pode ser escrita como:

$$h\nu = K + K_{at} + B \cong K + B \quad (15)$$

Em (15) B é a energia de ligação do elétron.

De um modo geral, como a massa dos átomos é muito maior que a dos elétrons, a energia cinética K_{at} , dos átomos pode ser ignorada na conservação de energia, mas o momento dos átomos é crucial para resolver problemas. Após a ocorrência do efeito fotoelétrico, é emitida radiação característica, também chamada de radiação secundária neste caso. Normalmente, o elétron secundário tem energia para fazer mais interações até perder toda a sua energia.

2.6 Aplicações de Raios X em Imagens Médicas – Radiografia

A radiografia do interior do corpo usando raios X baseia-se na absorção diferencial de fótons por diferentes tecidos e órgãos do corpo. Elementos com números atômicos altos, como ^{20}Ca , ^{56}Ba e ^{53}I , são melhores absorvedores de raios X. Assim, o osso, que contém cálcio, contrasta com o tecido muscular, que contém muita água. Gordura, músculos, sangue e tumores absorvem os raios X de maneiras semelhantes. Uma alternativa para perceber melhor o tumor é usar algum tipo de substância para ganhar contraste na imagem, se possível. Por exemplo, para observar o fluxo sanguíneo nas artérias, são injetados compostos de iodo.

“As características dos raios X produzidos são expressas em função do que chamamos quantidade e qualidade do feixe. A quantidade refere-se ao número de fótons de um feixe e a qualidade, à energia dos fótons.” (OKUNO; YOSHIMURA, 2010, p.58). Assim a qualidade mede a capacidade de penetração do feixe. A intensidade da radiação é atenuada devido às interações com o meio material de propagação. A principal interação da radiação com nosso assunto de interesse ocorre imediatamente na forma dos já discutidos efeitos fotoelétrico e Compton e produção de pares. Devido à atenuação, a intensidade do feixe de raios X diminui exponencialmente com a distância percorrida no material absorvente. Isso significa que quanto mais espesso o material, menos energia radiante deixará o material depois de passar por ele. Por outro lado, quanto mais energéticos os fótons da radiação incidente, mais penetrante ela é e, portanto, mais provável a sua interação com o meio - mais longe a radiação viaja e, portanto, mais interações.

Considera-se que a variação dN do número de fótons do feixe em uma espessura dx (assume-se a propagação unidimensional na direção x) é dada por $dN = -\mu N dx$, sendo μ o coeficiente de atenuação do meio que depende do material que constitui o meio e do comprimento de onda da radiação incidente. Portanto

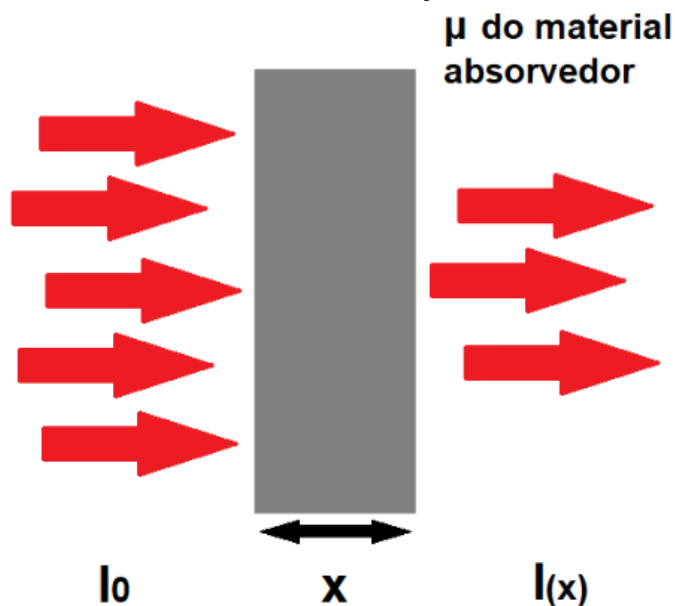
$$\frac{dN}{N} = -\mu dx \Rightarrow N = N_0 e^{-\mu x} \quad (16)$$

Como a intensidade do feixe é proporcional ao número de fótons, tem-se que

$$I = I_0 e^{-\mu x} \quad (17)$$

Em (17) I e I_0 são, respectivamente, a intensidade do feixe antes e depois de atravessar um material com espessura x . A figura 11 ilustra a atenuação de um feixe monocromático ao atravessar um meio. Os valores do coeficiente de atenuação em $[\text{cm}^{-1}]$ para diferentes energias do fóton em algum meio são apresentados na Tabela 1.

Figura 11 – Atenuação de um feixe de radiação monocromático ao atravessar um meio de espessura x .



Fonte: O autor

Tabela 1 – Coeficiente de atenuação linear μ em cm^{-1} em função da energia do fóton, para alguns materiais.

Energia	Meio				
	Água	Ar	Concreto	Alumínio	Chumbo
100 keV	0,170	$1,86 \times 10^{-4}$	0,412	0,459	62,98
500 keV	0,097	$1,05 \times 10^{-4}$	0,211	0,228	1,83
1.000 keV	0,071	$7,65 \times 10^{-5}$	0,154	0,166	0,81
1.500 keV	0,057	$6,23 \times 10^{-5}$	0,125	0,135	0,59

Fonte: Física das radiações / Emico Okuno, Elisabeth Mateus Yoshimura. – 2010. p. 63.

Usando a eq. (17) podemos calcular a espessura $x = X_{1/2}$ de um material que reduz a intensidade da radiação à metade.

$$\frac{I_o}{2} = I_o e^{-\mu X_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow X_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\mu} \quad (18)$$

O comprimento $X_{1/2}$ recebe o nome de camada semirredutora (CSR). Materiais que blindam bem fótons de raios X têm alto valor de coeficiente de atenuação linear μ e por consequência pequeno valor de CSR. A cada CSR que a onda eletromagnética atravessa, sua intensidade se reduz à metade. Assim, após a primeira CSR, tem-se $I = I_0/2$, após a segunda, $I = I_0/4$, após a terceira, $I = I_0/8$, e assim por diante.

Em geral, para que o princípio da incerteza de Heisenberg seja obedecido, os feixes de raios X produzidos são polienergéticos ou policromáticos, ou seja, o espectro de emissão é contínuo em energia, com energia máxima fixada pela diferença de potencial aplicada entre os eletrodos do tubo. Em geral, fótons de energia baixa são atenuados mais do que os de energia maior.

Medições experimentais de espectroscopia contínua de raios-X não são fáceis devido ao equipamento limitado disponível para tais medições. A maneira mais direta de avaliar a dose absorvida em qualquer meio é medir seu aumento de temperatura devido à irradiação. Embora a energia fornecida pela radiação possa ser convertida em calor de forma eficiente, as mudanças de temperatura são muito pequenas, exigindo um sistema de medição de temperatura muito sofisticado (OKUNO; YOSHIMURA, 2010).

A medição indireta da radiação ocorre quando o detector é introduzido no meio material. Devido à presença de materiais de diferentes composições químicas e densidades, que interagem de forma diferente com a radiação, e à presença de distúrbios no campo elétrico polarizador do detector, esta introdução pode causar distúrbios no campo. Essa descontinuidade no ambiente físico é chamada de "cavidade". Dessa forma, o registro do detector será da radiação interagindo com ele, e não no meio material que se pretende medir. Para medições corretas, é necessário introduzir fatores de correção que dependem da relação entre diferentes densidades, coeficientes de absorção de energia dos fótons, faixa de alcance dos elétrons no meio material, etc (TAUHATA et al., 2013).

Uma vez obtido o espectro, é possível entender a qualidade do feixe de raios X e definir a energia média do feixe. Uma especificação completa da qualidade do feixe de raios-X requer a medição de vários parâmetros, um dos quais é a determinação do CSR de um determinado material padrão do feixe, como alumínio ou cobre. Segundo OKUNO; YOSHIMURA, (2010), uma vez determinada a CSR, se conhece possivelmente a energia efetiva do feixe por meio da correlação entre essas duas grandezas, que é conhecida.

Dessa forma, o CSR é medido e a energia efetiva do feixe é obtida usando o conceito de feixe monoenergético com energia semelhante para analisar a atenuação da intensidade da radiação em uma primeira aproximação. Devido à necessidade de obter essa propriedade do feixe na proteção contra radiação, filtros adequados são usados após o feixe de fótons de raios X gerado no tubo para fins de diagnóstico para reduzir o número de fótons de baixa energia que não contribuem para a imagem. Além de não ajudar na formação das imagens, podem causar danos ao interior do corpo (OKUNO; YOSHIMURA, 2010).

Do ponto de vista radiológico, a formação de imagem é resultado da diferença entre os raios que passam através das diferentes estruturas radiografadas e aqueles que são absorvidos, no qual atingem ou não o receptor de imagem. Pode-se chamar esse processo de absorção diferencial (TILLY JUNIOR, 2010). Os raios que não sofrem interações com a matéria atingem o receptor de imagem causando uma área escura sobre o filme, por outro lado, os fótons barrados pela absorção da matéria mais densa (ossos) não atingem o receptor de imagem e, portanto, os ossos aparecem em tons mais claros do que os tecidos moles. A figura 12 ilustra o efeito causado por conta da transmissão e absorção dos feixes dos raios X.

Figura 12 – Exame radiográfico do tórax de um paciente.



Fonte: The essential physics of medical imaging / Jerrold T. Bushberg. — 2011. p 5.

A absorção diferencial possui algumas características fundamentais, e uma delas é que o feixe ao sair do tubo e direcionado ao paciente é quase homogêneo e é modulado pelas diversas estruturas da matéria, onde os fótons são espalhados de acordo com a variação das interações ocorridas nos tecidos e/ou órgãos pelos quais passou permitindo o registro dessa modulação no receptor de imagem, ou seja, na formação da imagem radiográfica. Uma boa parte dos raios que incidem nos pacientes é a radiação espalhada, onde esses raios atingem o receptor de imagem provocando o enegrecimento por toda a área do filme, sem contribuir com informação diagnóstica. Além de comprometer a imagem, a radiação espalhada atinge também todas as áreas não protegidas, sendo a maior contribuição para exposição dos profissionais.

3 REVISÃO DE FONTES DE LUZ SÍNCROTRON E LASER DE RAIOS-X DE ELÉTRONS LIVRES

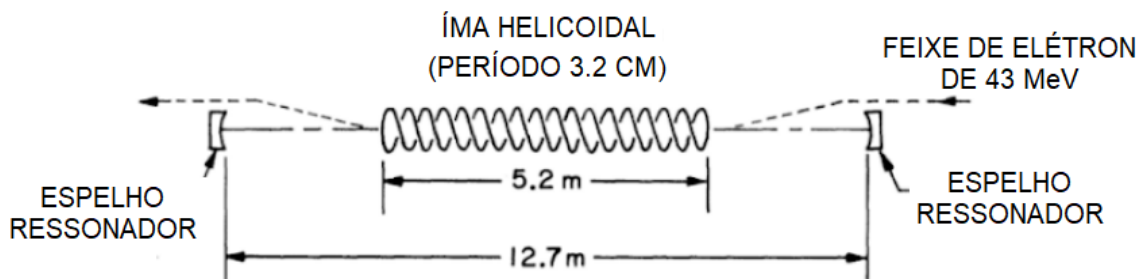
3.1 Introdução

O progresso nas fontes de raios X foi limitado até a década de 1970, e os tubos de raios X ficaram sem quase nenhuma modificação desde 1912. A revolução nas fontes de raios X começou com o início do uso da radiação síncrotron para pesquisa e aplicações físicas de partículas e de alta energia. A radiação síncrotron cobre a faixa espectral de terahertz até os raios X duros (acima de cerca de 5 keV) e fornece ondas de raios X muito mais intensas do que os tubos de raios X (HUANG et al., 2021).

Outro grande salto ocorreu no início dos anos 1990, quando os avanços da física e da tecnologia de aceleradores de partículas possibilitaram a produção de feixes de raios X três vezes mais brilhantes do que os produzidos por fontes síncrotrons com o uso de onduladores. O desenvolvimento de fontes de raios-X baseadas em síncrotron nos últimos 40 anos inaugurou a era moderna da ciência de raios-X.

Os lasers de elétrons livres (FELs – free electron laser), por sua vez, surgiram com um conceito proposto por Madey em 1971. Uma combinação de conceitos de FEL de alto ganho e técnicas de aceleradores levaram ao desenvolvimento de FELs operando no regime de raios X (HUANG et al., 2021). “Os FELs podem ser ajustados para emitir radiação coerente em diversos comprimentos de ondas através da variação de parâmetros dos equipamentos.” (MARTINS, 2018). Como a intensidade do campo magnético utilizado. A emissão de radiação através de FELs se dá pela interação de feixes de elétrons com a onda eletromagnética, gerada pelo próprio feixe, sob ação de um campo magnético. A figura 13 mostra o diagrama esquemático do primeiro FEL proposto, usando um ondulador helicoidal.

Figura 13 – Diagrama esquemático do primeiro FEL. O período espacial λ_u equivale à 3.2 cm.



Fonte: Adaptada de MARTINS, 2018.

O FEL é diferente dos lasers comuns. Nos laser convencionais, o meio laser ativo está localizado entre dois espelhos, o "ressonador". Um desses espelhos é um espelho unidirecional. A radiação do meio laser ativo é amplificada no ressonador. Ao mesmo tempo, o ressonador só pode emitir uma certa quantidade de radiação através do espelho unidirecional. Este grupo de radiação é a radiação laser (AGRAWAL, 2014). Entretanto, os FEL podem produzir ondas eletromagnéticas coerentes com comprimentos de onda mais curtos que o ultravioleta e incluindo raios X duros, ou seja, ondas eletromagnéticas altamente energéticas, não havendo até então cavidades que operassem na faixa espectral dos raios-x.

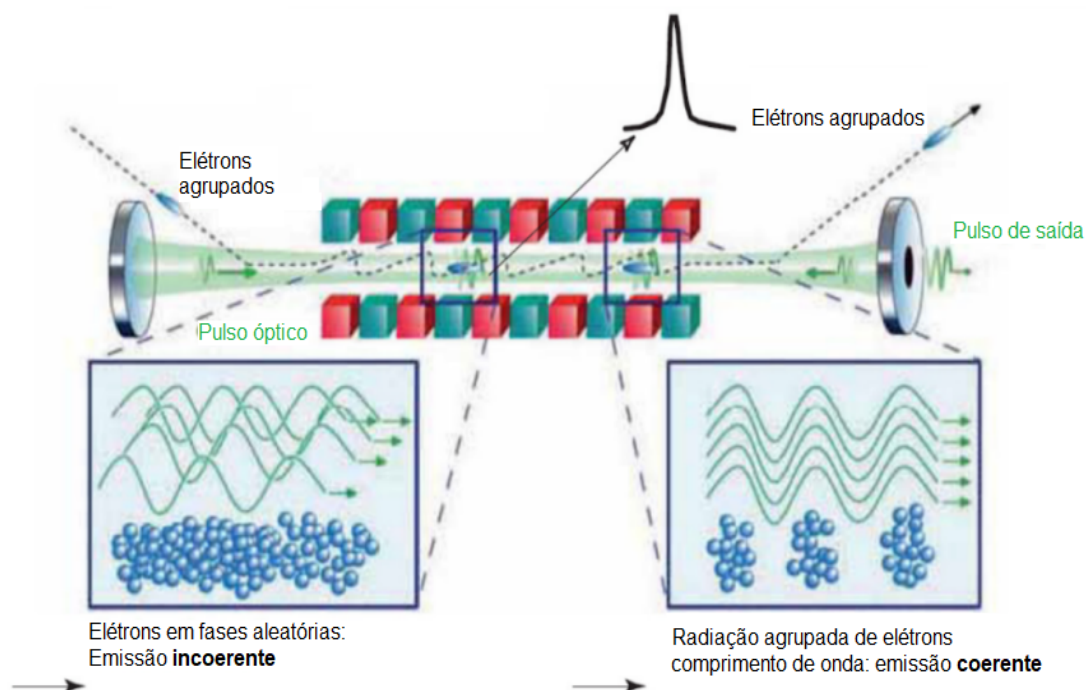
Em um FEL, os seus componentes são: um acelerador (que pode ser executado pela interação de feixes de elétrons com ondas eletromagnéticas), um conjunto de ímãs com pólos alternados, chamados de wiggler ou ondulator dependendo se a variação da trajetória é mais forte (wiggler) ou mais fraca (ondulator), responsável pela mudança de trajetória que causa a emissão da radiação, e finalmente um ressonador formado por pares de espelhos (MARTINS, 2018).

Para Martins (2018), um dos mecanismos do FEL é que a radiação ao se propagar ao longo do campo magnético se acopla ao mesmo, gerando um batimento de forma que os elétrons com velocidade menor que ao batimento desaceleram, isto é, perdem energia cinética que é transferida para o campo eletromagnético causando uma amplificação da radiação, semelhante à emissão estimulada de átomos excitados em um laser óptico, os átomos no estado excitado eventualmente retornam ao seu estado fundamental, emitindo luz no processo.

Na emissão estimulada, ela é induzida por fótons existentes. A característica marcante dessa emissão é que o fóton emitido não só coincide com o fóton existente em energia (ou frequência), mas também em outras características, como a direção de propagação, para emitir luz através do processo de emissão estimulada, ou seja, luz coerente (AGRAWAL, 2014). Portanto em um FEL, por conta da interação entre os elétrons e a radiação gerada tem-se uma modulação espacial com a concentração de elétrons em determinadas regiões, com comprimentos de ondas iguais a da radiação e, graças a essa modulação, tem-se a coerência da radiação emitida (MARTINS, 2018). Esse processo é mostrado na figura 14.

Em suma, os FELs podem fornecer feixes de raios-X de intensidade e coerência sem precedentes, tornando possível estudar a matéria em escalas espaciais de nível atômico e escalas de tempo de femtossegundos. Por exemplo, medições de dinâmica molecular resolvidas no tempo, exploração de propriedades de materiais sob condições extremas e imagens de espalhamento de partícula única são alguns dos objetivos que podem ser alcançados usando FELs.

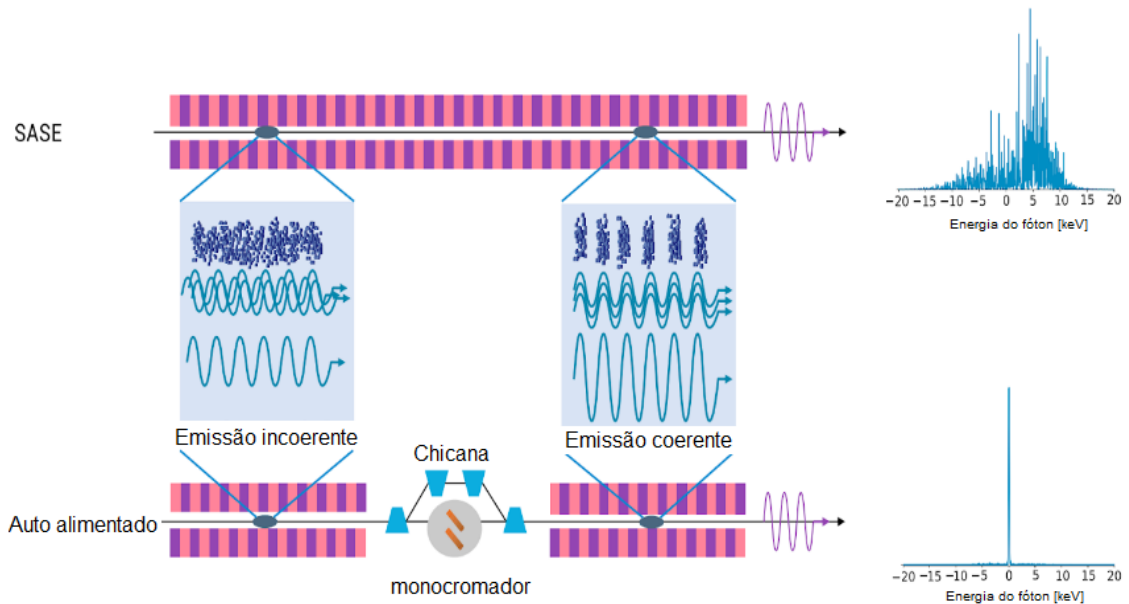
Figura 14 – Formação de um pulso laser de raio X por um pulso do feixe de elétrons.



Fonte: Adaptada de MARTINS, 2018.

De acordo com Milton et al., (2001), outra forma de geração de raios X com alto brilho e coerência é através da emissão espontânea auto-amplificada (SASE), na qual a radiação inicialmente produzida de forma incoerente, cresce exponencialmente durante a propagação no ondulator até atingir um ponto de saturação. Nesse caso, o feixe de elétrons acelerado de alta energia passa pelo ondulator onde cria-se uma instabilidade entre o feixe de elétrons e a radiação produzida e, a partir disto, a potência óptica aumenta exponencialmente até saturar alcançando o nível máximo de radiação emitida. Este processo pode ocorrer em diferentes comprimentos de onda, variando de acordo com a energia do feixe de elétrons incidente no ondulator. A figura 15 mostra o esquema de um SASE FEL.

Figura 15 – Layouts esquemáticos para a SASE.



Fonte: Adaptada de HUANG et al., 2021.

Ao percorrer o ondulator, os elétrons acelerados irradiam ondas eletromagnéticas. O comprimento de onda ressonante no qual a radiação emitida interferem construtivamente no ondulator, é dado por

$$\lambda_r = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2} + \gamma^2 \theta^2 \right) \quad (19)$$

Em (19) λ_u é o comprimento de onda do ondulator e K é o parâmetro adimensional do ondulator dado por $K = eB_0\lambda_u / (2\pi mc)$ no qual B_0 é a amplitude do campo magnético do ondulator, m é a massa do elétron e c é a velocidade da luz. Além disso, $\gamma = E/mc^2$ é a energia relativística de um elétron e h é o número do harmônico da radiação.

O mecanismo de amplificação de FEL pode ser resumido em três processos básicos:

- a) a interação dos elétrons com o campo de radiação faz com que a energia do feixe de elétrons seja modulada;
- b) esta modulação de energia evolui para modulação de densidade longitudinal (micro-agrupamento) na escala do comprimento de onda de radiação ressonante λ_r , conforme determinado pela eq. (19);
- c) o micro-agrupamento resulta na amplificação do campo de radiação através de emissão coerente.

“A radiação produzida pelo SASE tem uma forma transversal coerente devido ao efeito de orientação de ganho. SASE FEL tem uma natureza caótica e exibe instabilidades espectrais e de intensidade inerentes” (HUANG et al., 2021). Até os dias atuais, o SASE XFEL representa o melhor avanço alternativo para a criação de feixes de laser de raios-X duros. Os FELs alimentados externamente podem operar com melhor estabilidade no regime de raios X suaves, enquanto os osciladores FEL estão atualmente limitados ao regime de comprimento de onda longo, por exemplo, terahertz, infravermelho e UV.

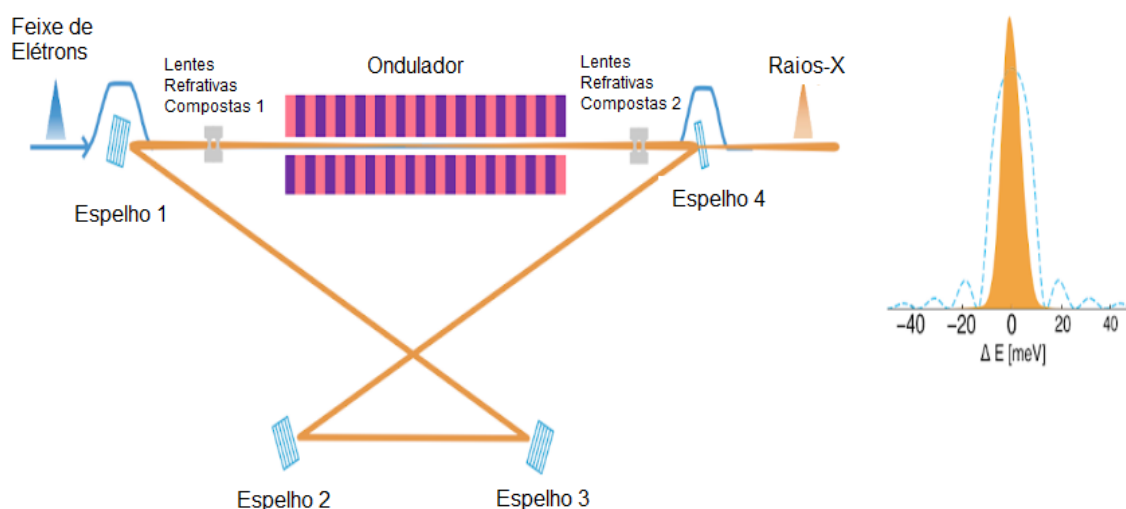
Para Huang et al., (2021), vários esquemas de alimentação externa foram desenvolvidos para gerar pulsos de raios X altamente coerentes com fontes disponíveis comercialmente, além da abordagem SASE XFEL. Para esses esquemas manipulam o espaço de fase do feixe de elétrons em escala óptica para gerar micro-agrupamentos no comprimento de onda harmônico do laser, contornando assim a necessidade de uma fonte em comprimentos de onda curtos e desencadeando amplificação de alto ganho no ondulator. “No entanto, desenvolvimentos recentes mostraram que o estabelecimento de cavidades ópticas no regime de raios X é viável com a ajuda de cristais refletivos de Bragg.” (HUANG et al., 2021).

Inicialmente, os FELs em comprimentos de onda de raios-x não eram possíveis devido à falta de boas cavidades operando na região de raios-x. Entretanto, o problema com a cavidade foi contornado no final dos anos 1970 e 1980 após o desenvolvimento teórico dos FELs de alto ganho. De acordo com Huang et al., (2021), os FELs baseados em cavidades, são candidatos muito promissores para gerar pulsos de raios X altamente coerentes.

Normalmente, essas soluções requerem um feixe de elétrons de alta taxa de repetição junto com um ondulator para fornecer ganho e uma cavidade de cristal para circular e armazenar os pulsos de raios X.

“Seguindo o progresso nas técnicas de óptica de cristal e acelerador necessárias para um XFEL, como cristais de diamante sem defeitos e feixes de elétrons de alta taxa de repetição de LINACS supercondutores, os XFELs agora se tornaram tecnicamente viáveis.” (HUANG et al., 2021). Um esquema do sistema XFEL é mostrado na figura 16. O feixe de elétrons é injetado no ondulator de comprimento apropriado, montado dentro da cavidade de raios X. No ondulator, o feixe de elétrons amplifica o pulso de raios X recirculado à medida que o processo de amplificação ocorre. Quatro cristais de Bragg (espelhos 1, 2, 3 e 4) dispostos simetricamente são usados para recircular a saída de raios X duros, com dois (ou dois conjuntos de) lentes refrativas compostas (CRLs) fornecendo foco de cavidade.

Figura 16 – Layout esquemático do XFEL



Fonte: Adaptada de HUANG et al., 2021.

Para Huang et al., (2021), o diamante é o material escolhido para cavidades de raios X devido à sua alta refletividade, propriedades mecânicas e térmicas. O uso de cristais de diamante estende a faixa de energias dos fótons de 5 a 25 keV e fornece feixes de elétrons de 8 GeV a uma taxa de repetição de 1 MHz, com esses parâmetros normalmente fornecidos no LCLS-II-HE e no XFEL de alta taxa de repetição de Xangai.

Em contraste, a radiação de SASE XFELs é caracterizada por durações ultracurtas (< 1 ns), enquanto suas larguras de banda espectrais atingem algumas dezenas de eV. Portanto, um XFELo pode fornecer alta densidade espectral de fótons, enquanto um SASE XFEL produz uma alta densidade de fótons temporais (HUANG et al., 2021). Segundo Huang et al., (2021), os XFELs baseados em cavidade geram pulsos de raios X altamente estáveis com flutuações de aproximadamente 1%, enquanto os SASE XFELs de alto ganho e os XFELs auto-alimentado apresentam baixa estabilidade pulso a pulso. A física dos XFELs baseados em cavidades, incluindo o processo FEL e a difração de Bragg, é mais complicada do que a de um FEL de alto ganho de passagem única.

Em termos de flexibilidade, os XFELos têm potencial para serem expandidos para uso em uma variedade de aplicações. Para atender às demandas de experimentos de alta energia de fótons, XFELos podem estender a cobertura de energia de fótons executando o XFELo em um harmônico mais alto, ou a saída XFELo pode ser usada como alimentação de entrada para um sistema HGHG externo (HUANG et al., 2021).

3.2 Aplicações Atuais e Futuras de XFELs

Os XFELs estendem a aplicação de lasers ao regime de raios X. Além do uso para investigação por meio de excitações e transições eletrônicas em nível nuclear, os XFELs também induzem interações não lineares de raios X com a matéria e permitem a exploração do material sob condições extremas. Explorar interações não lineares luz-matéria no regime de raios X abre a possibilidade de elucidar a dinâmica dos materiais em energias e resoluções espaciais mais adequadas (HUANG et al., 2021).

Além disso, pulsos coerentes ultracurtos servem não apenas para observar o movimento rápido de elétrons com uma alta resolução espacial e temporal, mas também fornecem as ferramentas para manipular elétrons e controlar a matéria de maneiras sem precedentes. Os pulsos ultracurtos criam excitações eletrônicas coerentes, mostrando excelentes perspectivas para o desenvolvimento de métodos coerentes de controle quântico. (HUANG et al., 2021).

3.3 Progresso em Direção a XFEL Ultracompactos

Para Huang et al., (2021), o sucesso do XFEL está intimamente relacionado ao feixe de elétrons de alto brilho e alta energia produzido pelo LINAC. No entanto, os aceleradores equipados com XFEL são baseados em dispositivos de aceleradores de RF convencionais ou supercondutores, o que limita a compactidade das máquinas. Portanto, os XFELs são grandes instalações, com a menor instalação com cerca de 0,7 km de comprimento. Esforços destinados a reduzir o tamanho e os custos operacionais dos FELs podem fornecer um meio de tornar essas fontes mais acessíveis como uma ferramenta de trabalho em laboratórios menores e mais numerosos (DATTOLI et al., 2015). Portanto, o caminho para o desenvolvimento de XFELs ultracompactos está diretamente relacionado à obtenção de sistemas de aceleração avançados.

De acordo com Huang et al., (2021), aceleradores baseados em plasma (PBAs) acionados por feixes de partículas carregadas ou lasers intensos, onde um feixe é acelerado para energias de vários GeV em distâncias muito curtas (escala de centímetros), são itens atraentes para XFELs ultracompactos. Por exemplo, por aceleração de plasma a laser (LPA), usando um dispositivo eletromagnético chamado ondulador (WU).

A WU substitui os inversores magnéticos padrão em escala centimétrica por inversores eletromagnéticos em escala micrométrica. A opção LPA permite gradientes de aceleração de dezenas de GeV/m em vez de MeV/m, que são fornecidos por dispositivos de aceleração convencionais baseados em RF (DATTOLI et al., 2015). A combinação dessas duas tecnologias (WU e LPA) é uma solução a ser alcançada para miniaturização e custo do sistema. Outro candidato para operação com WU é fornecido pelos chamados onduladores de radiofrequência (RFU), que podem operar razoavelmente com períodos em torno de 1 mm e com valores de K suficientemente grandes (DATTOLI et al., 2015).

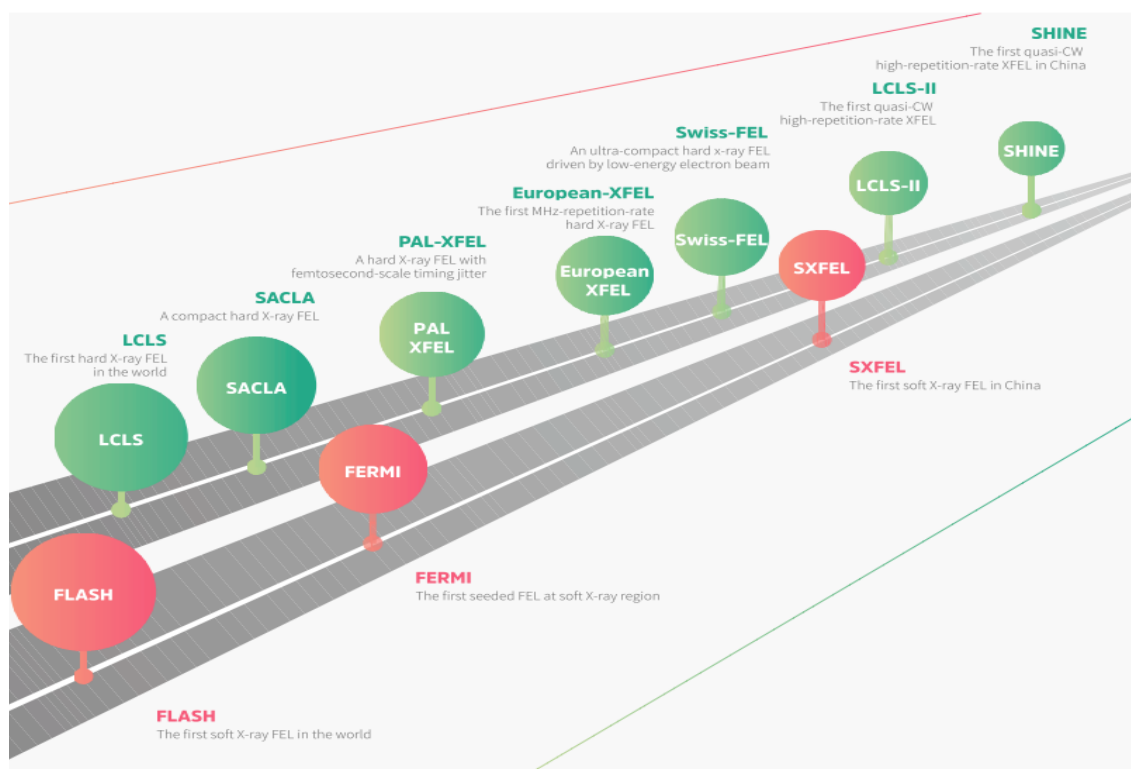
Em particular, a não uniformidade de campo devido ao comprimento de difração finito, pode ser responsável pela não homogeneidade na intensidade causando variação no parâmetro de força equivalente, que por sua vez pode afetar o ganho de comprimento do FEL. Os aceleradores impulsionados pelo LPA fizeram progressos significativos nos últimos anos. Foram obtidos feixes com energias comparáveis aos síncrotrons convencionais. Embora a qualidade do feixe ainda seja insuficiente em termos de dispersão de energia (DATTOLI et al., 2015).

No caso de um SASE FEL acionado por um feixe LPA, o feixe de elétrons é afetado pelo grande espalhamento de energia do feixe de elétrons, que é conhecido por causar alargamento não homogêneo, resultando em ganho reduzido e consequentemente aumento do comprimento de saturação. Este efeito de degradação pode ser neutralizado por um valor maior do parâmetro Pierce do que em um caso particular. Para maior dispersão de energia e menores correntes de feixe, diferentes soluções devem ser pensadas para mitigar essa contribuição deletéria. Uma possibilidade é usar os chamados onduladores de gradiente transversal (TGU), que neutralizam os efeitos devido à distribuição de energia e proporcionam uma operação mais eficiente (DATTOLI et al., 2015).

3.4 Visão Geral das Instalações de XFELs

Em um XFEL típico, um LINAC é utilizado para gerar um feixe de elétrons luminescentes, que são então distribuídos a várias linhas ondulatória para produzir radiação intensa com propriedades especializadas para diferentes experimentos e aplicações (HUANG et al., 2021). A figura 17 mostra uma linha do tempo detalhando ano da primeira aplicação do laser para várias instalações XFEL em todo o mundo. O desenvolvimento e os avanços tecnológicos nessas instalações se concentraram em encurtar os comprimentos de onda gerados na região dos raios-X duros e aumentar a potência média para várias centenas de watts.

Figura 17 – Linha do tempo das instalações FEL em todo o mundo.



Fonte: Huang et al., (2021).

Um marco no desenvolvimento de XFELs foi a operação bem-sucedida da primeira instalação FEL de raios X rígidos, LCLS, em 2009, fornecendo pulsos XFEL com brilho extremamente alto e excelente coerência transversal. No LCLS, feixes de elétrons possui um brilho extremamente alto de 13,6 GeV são gerados em um acelerador linear de condução normal com uma taxa de repetição típica de 10-120 Hz, enquanto um modo SASE FEL de 0,15 nm é gerado no intervalo fixo de 132 m de comprimento sistema ondulatorio. O LCLS produz rotineiramente pulsos de raios X com durações inferiores a 200 fs, energias de fótons variando de 0,28 a 12,8 keV e 1012 fótons por pulso a 8 keV. Um sistema de espelho ajustável de baixa e alta energia direciona os raios X suaves para as estações experimentais para ciência atômica, molecular e óptica, pesquisa de raios X suaves e sonda de bomba de raios X e raios X rígidos em quatro outras estações, incluindo espectroscopia de correlação de raios X, cristalografia macromolecular de femtossegundos, imagens coerentes de raios X e matéria em condições extremas.

Dois anos depois, a instalação SACLA no Japão recebeu seu primeiro laser no modo SASE com 0,06 nm e um feixe de elétrons de 8,5 GeV, tornando a SACLA a instalação XFEL mais compacta até hoje. Comparado ao LCLS, o tamanho geral é aproximadamente três a cinco vezes menor para a mesma faixa de ajuste FEL.

As principais aplicações são a observação de processos ópticos não lineares em átomos e moléculas de gás e a avaliação de fenômenos ultra rápidos em materiais no estado sólido, experimentos orientados para a biologia, física ultrarrápida, química e óptica quântica de raios-X.

4 APLICAÇÕES DA FUNÇÃO W_q DE LAMBERT-TSALLIS EM FONTES DE LUZ SÍNCROTRON E LASERS DE RAIOS-X

A teoria de fontes de luz síncrotron (SyncLs) e de lasers de elétrons livres (FELs) permite a determinação, por exemplo, de parâmetros como o comprimento de onda da radiação emitida, o parâmetro de Pierce e o comprimento de ganho, quando variáveis como o parâmetro de espalhamento de energia e o valor de pico do campo magnético (B_u) e o período do ondulador (λ_u) são conhecidos. Por outro lado, não existe uma fórmula que forneça, por exemplo, o valor do período do ondulador quando o comprimento de onda da radiação emitida é conhecido a priori. Nesta direção, o presente capítulo mostrar como utilizar a função W_q de Lambert-Tsallis W_q para inverter algumas fórmulas da teoria de fontes de luz síncrotron e de lasers de elétrons livres baseados na auto amplificação da emissão espontânea visando obter novas fórmulas para calcular o período do ondulador, o parâmetro de dispersão de energia de um ondulador com gradiente transversal e o parâmetro de Pierce na ausência de alargamento não homogêneo quando o valor do parâmetro de Pierce na presença de alargamento não homogêneo é conhecido.

4.1 Introdução

Como discutido na Seção 2, os principais componentes das fontes de radiação síncrotron e dos lasers de elétrons livres são: 1) A arma de elétrons (elétrons são emitidos por um catodo aquecido a altas temperaturas). 2) Acelerador linear. 3) Anel de armazenagem de elétrons. 4) Dispositivos de inserção. Os dispositivos de inserção mais importante é o ondulator ou wiggler, uma série de dipolos magnéticos com polaridades que se alternam de forma periódica (também é possível utilizar um campo eletromagnético produzido por um laser de alta potência como ondulator/wiggler). Assim, o ondulator/wiggler produz um campo magnético da forma $B(z) = B_u \cos(2\pi z/\lambda_u)$, sendo λ_u a distância entre o começo de um pólo N e o começo do próximo polo N . Essa distância é chamada de período do ondulator/wiggler. Esse componente é caracterizado pelo parâmetro adimensional K dado por

$$K = \frac{eB_u \lambda_u}{2\pi mc} = \xi \lambda_u \quad (20)$$

Na qual m é a massa do elétron, e é a carga de um elétron e c é a velocidade da luz no vácuo. Na prática, quando $K \lesssim 1$ tem-se o regime de ondulator no qual o feixe de elétron sofre ondulações suaves, na ordem do ângulo de emissão natural da radiação. Por outro lado, quando $K \gg 1$ tem-se o regime de Wiggler (KIM; HUANG; LINDBERG, 2017; MTINGWA; WINICK, 2018). Dado que o comprimento de onda da radiação eletromagnética emitida λ_r depende do período do ondulator, a variável λ_u tem um papel importante no projeto de SyncLs e FELs.

Embora o FEL seja um tipo de laser (ele produz ondas eletromagnéticas coerentes), o FEL oscilando em comprimentos de onda mais curtos que o ultravioleta e incluindo raios X duros, é diferente de um laser convencional, uma vez que ele não tem cavidade. A radiação intensa e coerente é obtida por um FEL de alto ganho de passagem única baseado no processo de auto-amplificação de emissão espontânea (SASE). Durante a viagem do feixe acelerado ao longo do ondulator, a interação entre o feixe de elétrons e a onda eletromagnética produzida por esse mesmo feixe resulta na transferência de energia dos elétrons para a onda eletromagnética. Devido a essa amplificação, a potência óptica cresce até que a saturação seja alcançada e a potência de saída seja máxima. Portanto, o ondulator deve ser longo o

suficiente para permitir que a máxima amplificação seja alcançada. Nesse processo, dois parâmetros importantes são I) a distância na qual a potência aumenta por um fator de $\exp(1)$, chamada de comprimento de ganho, L_G , e II) o fator de amplificação, r (MILTON et al., 2001; ZHOLENTS, 2005). Maiores detalhes sobre o funcionamento de fontes síncrotron e FELs podem ser encontrados nas referências (MARGARITONDO, 1995; MARGARITONDO; REBERNIK RIBIC, 2011; TANAKA, 2018; ZENG et al., 2020; ZHOLENTS, 2005).

A teoria bem estabelecida de SyncLs e FEL's permite determinar os valores de λ_r , L_G , r e o parâmetro de Pierce ρ como funções dos parâmetros do ondulator/*wiggler*. Entretanto, não existem na literatura fórmulas analíticas que forneçam os parâmetros do ondulator/*wiggler* quando λ_r , L_G e r são conhecidos a priori. Neste trabalho, usando a função W_q de Lambert-Tsallis (DA SILVA; RAMOS, 2019), são apresentadas fórmulas analíticas para encontrar λ_u e o parâmetro de dispersão de energia de um ondulator com gradiente transversal quando λ_r , L_G e r são conhecidos a priori. O parâmetro de Pierce na ausência de alargamento não homogêneo também é calculado quando o valor do parâmetro de Pierce na presença desse alargamento é conhecido. Essas novas fórmulas permitem analisar o projeto de FELs e SyncLs a partir de um ponto de vista diferente.

4.2 A função W_q de Lambert-Tsallis

A função W_q de Lambert-Tsallis é uma generalização da função W de Lambert W que pode ser usada para resolver algumas equações não lineares cujas variáveis dependente e independente estejam relacionadas por uma lei de potência. Ela é definida como sendo a solução da seguinte equação (DA SILVA; RAMOS, 2019).

$$W_q(z) e_q^{W_q(z)} = z \quad (21)$$

Na qual a q -exponencial de Tsallis é dada por (TSALLIS, 1988)

$$e_q^z = \begin{cases} \exp(z) & q = 1 \\ \left[1 + (1-q)z\right]^{1/(1-q)} & q \neq 1 \text{ \& } 1 + (1-q)z \geq 0 \\ 0 & q \neq 1 \text{ \& } 1 + (1-q)z < 0 \end{cases} \quad (22)$$

A função $W_q(z)$ tem um ponto de ramificação $\{z_b, W_q(z_b)\}$ em $z_b = \exp_q(1/(q-2))/(q-2)$ e $W_q(z_b) = 1/(q-2)$. Não há ponto de ramificação com z_b finito para $q = 2$. Para $q = 1$, o ponto de ramificação da função W de Lambert, $\{-1/\exp(1), -1\}$, é recuperado (DUBINOV; KITAYEV, 2021; VALLURI; JEFFREY; CORLESS, 2000). Por exemplo, para $q = 2$ e $q = 3/2$ tem-se, respectivamente,

$$W_2(z) = \frac{z}{z+1}, \quad z > -1, \quad (23)$$

$$W_{3/2}^\pm(z) = \frac{2(z+1) \pm 2\sqrt{2z+1}}{z}, \quad z > -1/2 \quad (24)$$

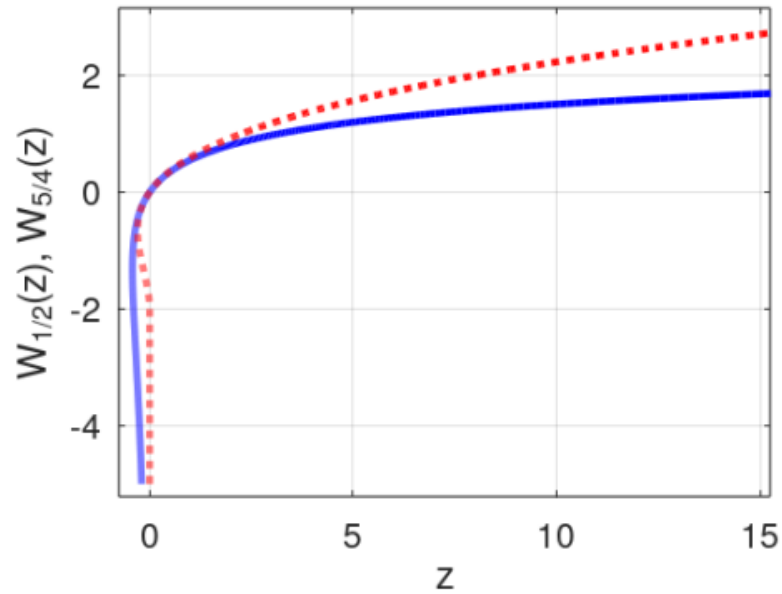
A solução no intervalo $z_b \leq z < 0$ é $W_q^-(z)$ enquanto que a solução no intervalo $z_b \leq z < \infty$ é $W_q^+(z)$. Uma vez que não é possível encontrar uma expressão analítica para todos os valores de q , a função $W_q(z)$ de Lambert-Tsallis pode ser calculada numericamente pelo método de Halley usando o seguinte mapa:

$$w_q(j+1) = w_q(j) - \frac{\left[w_q(j)e_q^{w_q(j)} - z\right]}{\left[e_q^{w_q(j)} + w_q(j)e_q^{qw_q(j)}\right] - \Delta} \quad (25)$$

$$\Delta = \frac{\left[w_q(j)e_q^{w_q(j)} - z\right] \left[2e_q^{qw_q(j)} + \frac{w_q(j)}{q}e_q^{\frac{(2q-1)w_q(j)}{2-1/q}}\right]}{2 \left[e_q^{w_q(j)} + w_q(j)e_q^{qw_q(j)}\right]}. \quad (26)$$

Um bom valor inicial é importante para a convergência do mapa de Halley (DE ANDRADE; NOBREGA; RAMOS, 2022). Por exemplo, na figura 18 podem ser vistos os gráficos de $W_{1/2}(z)$ e $W_{5/4}(z)$ versus z .

Figura 18 – $W_{1/2}(z)$ e $W_{5/4}(z)$ versus z .



Fonte: O autor.

Assim como a função original W , a função W_q encontra aplicações em diferentes áreas da engenharia, física e matemática como, por exemplo, processamento de imagens, circuitos eletrônicos, física de semicondutores, física quântica, física estatística, dentre outras (SILVA, 2021). Outro exemplo da aplicação da função W_q foi utilizada na solução de polinômios cúbicos (RAMOS, 2020)

Maiores detalhes sobre a função W_q de Lambert-Tsallis podem ser encontrados em (DE ANDRADE; NOBREGA; RAMOS, 2022; RAMOS, 2021).

4.3 Aplicação da função de Lambert-Tsallis em SyncLs e FELs

A radiação eletromagnética emitida por um SyncLs depende dos parâmetros B_u e λ_u do ondulador:

$$\lambda_r = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2} + \gamma^2 \theta^2 \right) \quad (27)$$

Na qual $\gamma = \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right]^{\frac{-1}{2}}$ é o fator de contração relativístico de Lorentz, θ é o ângulo entre a direção longitudinal através do componente de inserção e a direção de observação da radiação. Usando eq. (20) na eq. (27) obtém-se:

$$\lambda_u^3 + \frac{2(1+\gamma^2\theta^2)}{\xi^2} \lambda_u - \frac{4\gamma^2}{\xi^2} \lambda_r = 0. \quad (28)$$

Utilizando as seguinte técnicas:

$$e_0^x = 1 + x; \quad (29)$$

$$\left(e_q^x \right)^\alpha = e_{1-\frac{(1-q)}{\alpha}}^{\alpha x}; \quad (30)$$

$$ye_q^y = x \Rightarrow y = W_q(x). \quad (31)$$

A partir das eq. (29), (30) e (31), a solução da eq. (28) pode ser é obtida:

$$\lambda_u^3 + \frac{2(1+\gamma^2\theta^2)}{\xi^2}\lambda_u = \frac{4\gamma^2}{\xi^2}\lambda_r \quad (32)$$

$$\lambda_u \left(1 + \frac{\xi^2}{2(1+\gamma^2\theta^2)}\lambda_u^2 \right) = \frac{4\gamma^2}{\xi^2}\lambda_r \quad (33)$$

$$\lambda_u e^{\frac{\xi^2}{2(1+\gamma^2\theta^2)}\lambda_u^2} = \frac{2\gamma^2}{(1+\gamma^2\theta^2)}\lambda_r \quad (34)$$

$$\lambda_u^2 e^{\frac{\xi^2}{2(1+\gamma^2\theta^2)}\lambda_u^2} = \frac{4\gamma^2}{(1+\gamma^2\theta^2)^2}\lambda_r^2 \quad (35)$$

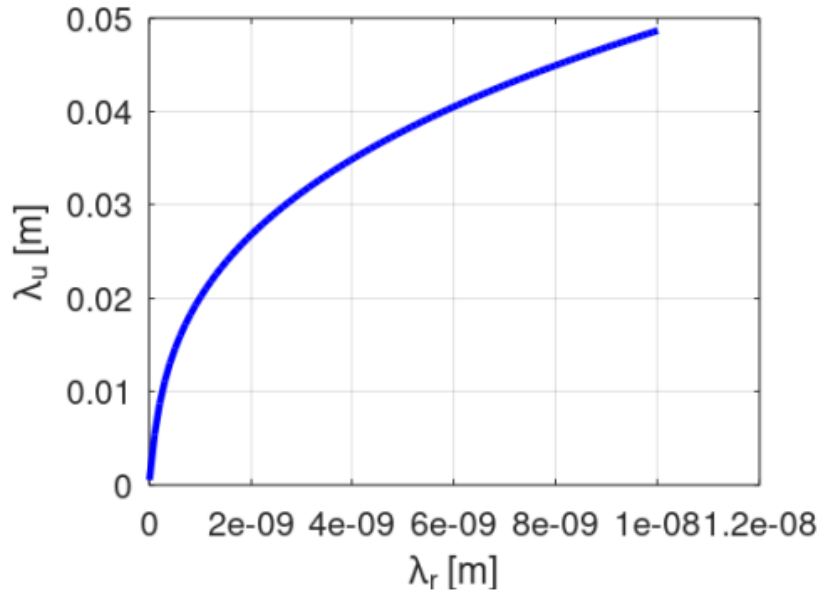
$$\frac{\xi^2}{(1+\gamma^2\theta^2)}\lambda_u^2 e^{\frac{\xi^2}{(1+\gamma^2\theta^2)}\lambda_u^2} = \frac{4\gamma^2\xi^2}{(1+\gamma^2\theta^2)^3}\lambda_r^2 \quad (36)$$

$$\frac{\xi^2}{(1+\gamma^2\theta^2)}\lambda_u^2 = W_{1/2} \left[\frac{4\gamma^2\xi^2}{(1+\gamma^2\theta^2)^3}\lambda_r^2 \right] \quad (37)$$

Cuja solução é

$$\lambda_u = \sqrt{\frac{(1+\gamma^2\theta^2)}{\xi^2} W_{1/2} \left[\frac{4\gamma^2\xi^2}{(1+\gamma^2\theta^2)^3}\lambda_r^2 \right]} \quad (38)$$

Na figura 19 pode-se ver a curva λ_u versus λ_r . Os valores dos parâmetros reais utilizados foram $B_u = 1$ T, $\theta = 0$ e $\gamma = 5244$, disponibilizados por colaboradores que trabalham em um XFEL.

Figura 19 – $\lambda_u \times \lambda_r$ 

Fonte: O autor.

Considerando agora um FEL, uma relação similar à eq. (27) pode também ser encontrada quando se usa um laser óptico e um wiggler objetivando melhorar o pico da corrente de elétrons entrando no SASE FEL (ZHOLENTS, 2005):

$$\lambda_L = \frac{\lambda_w}{2\gamma_w^2} \left(1 + \frac{K_w^2}{2} \right) = \frac{\lambda_w}{2\gamma_w^2} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{eB_w \lambda_w}{2\pi mc} \right)^2 \right) \quad (39)$$

Em que λ_L é o comprimento de onda do laser, λ_w é o período do wiggler, B_w é o pico do campo magnético e γ_w é o fator relativístico para a energia média do feixe de elétrons no Wiggler. Portanto, usando eq. (38) obtém-se

$$\lambda_w = \frac{\sqrt{W_{1/2}} \left[4\gamma_w^4 (eB_w/(2\pi mc))^2 \lambda_L^2 \right]}{eB_w/(2\pi mc)} \quad (40)$$

Um importante parâmetro no projeto de FELs é o parâmetro de Pierce dado por

$$\rho = \left\{ \frac{I}{I_A} \frac{\gamma \lambda_r^2}{16\pi^2 \sigma_{trans}^2} \frac{K^2}{(1 + \frac{K^2}{2})^2} [J_0(x) - J_1(x)]^2 \right\}^{1/3} \quad (41)$$

$$x = \frac{K^2}{4 + 2K^2} \quad (42)$$

Na equação (41) I é a corrente de pico do grupo de elétrons, $I_A = 17,045$ A é a corrente de Alfvén, J_0 e J_1 são funções de Bessel, e σ_{trans} é o tamanho médio quadrático (rms) transversal do grupo de elétrons. O comprimento de ganho L_G está relacionado ao parâmetro de Pierce:

$$L_G = \frac{\chi \lambda_u}{4\pi\sqrt{3}\rho} \quad (43)$$

Na qual o fator de degradação χ leva em consideração as não idealidades do sistema físico (efeitos de espalhamento de energia, divergência angular, tamanho transversal do feixe de elétrons e difração das ondas eletromagnéticas). O crescimento exponencial da intensidade da radiação satura em uma distância z_s , geralmente da ordem de uma centena de períodos do ondulator. O número de períodos necessários para alcançar a saturação é aproximadamente $N_s \sim \chi/\rho$.

Considerando a distância de saturação $z_s = nL_G$ (n é um número inteiro), $\theta = 0$ e um ondulator helicoidal, o fator de amplificação r dado por (MILTON et al., 2001):

$$r = \frac{1.6\rho}{\chi^2} \sqrt{\frac{L_G}{z_s}} \lambda_u \frac{(1 + 0.5K^2)^2}{2\pi^2 K^2 r_e \gamma} = \alpha \lambda_u^{1/3} \left(1 + \frac{\xi^2 \lambda_u^2}{2}\right)^2 \quad (44)$$

$$\alpha = \frac{1.6 \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{I}{I_A} \frac{\gamma}{16\pi^2 \sigma_{trans}^2} \right]^{1/3}}}{2^{5/3} \pi^2 r_e \gamma^{7/3} \chi \xi^{2/3}} \quad (45)$$

Em (44) r_e é o raio clássico do elétron. Usando as técnicas das eqs. (29), (30) e (31), a equação (44) pode ser invertida usando a função W_q de Lambert-Tsallis:

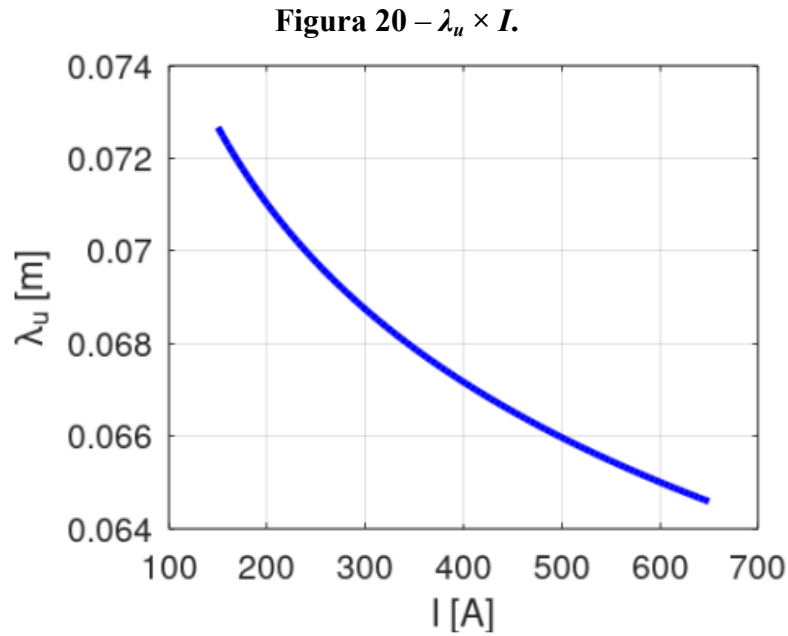
$$r = \alpha \lambda_u^{1/3} \left(1 + \frac{\xi^2 \lambda_u^2}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{r}{\alpha} = \lambda_u^{1/3} \left(1 + \frac{\xi^2 \lambda_u^2}{2}\right)^2 \quad (46)$$

$$\frac{r}{\alpha} = \lambda_u^{1/3} \left(e_0^{\frac{\xi^2 \lambda_u^2}{2}}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{r}{\alpha}\right)^6 = \left(\lambda_u^{1/3}\right)^6 \left(e_0^{\frac{\xi^2 \lambda_u^2}{2}}\right)^{12} \quad (47)$$

$$\left(\frac{r}{\alpha}\right)^6 = \lambda_u^2 e^{\frac{6\xi^2 \lambda_u^2}{12}} \Rightarrow 6\xi^2 \left(\frac{r}{\alpha}\right)^6 = 6\xi^2 \lambda_u^2 e^{\frac{6\xi^2 \lambda_u^2}{12}} \quad (48)$$

$$6\xi^2 \lambda_u^2 = W_{\frac{11}{12}}[6\xi^2 \left(\frac{r}{\alpha}\right)^6] \Rightarrow \lambda_u = \sqrt{\frac{1}{6\xi^2} W_{11/12}\left(6\xi^2 \left(\frac{r}{\alpha}\right)^6\right)}. \quad (49)$$

Na figura 20 pode-se observar a curva λ_u versus I . Os valores dos parâmetros utilizados são $B_u = 1$ T, $n = 22$, $\chi = 1.12$, $\sigma_{trans} = 120$ μm , $r = 10^6$, e $\gamma = 5244$.



Fonte: O autor.

Como pode ser visto na figura 20, quanto maior a corrente menor o período do ondulator necessário para manter um dado valor de ganho.

No caso de um SASE FEL alimentado por feixe LPA (laser plasma acceleration), o parâmetro de Pierce tem que incluir uma correção devido ao alargamento não homogêneo (HUANG et al., 2021; DATTOLI et al., 2015; SMITH et al., 1979):

$$\rho = \frac{\rho_0}{1+0.37\sqrt{3}(\sigma_\varepsilon^2/\rho_0^2)} \quad (50)$$

Sendo ρ_0 o parâmetro de Pierce na ausência de alargamento não homogêneo e σ_ε é o fator de espalhamento de energia (≈ 0.01). A equação (50) pode ser reescrita como

$$\rho_0^3 - \rho\rho_0^2 - 0.37\sqrt{3}\sigma_\varepsilon^2\rho = 0 \quad (51)$$

Usando as técnicas das eqs. (29), (30) e (31), a solução para ρ_0 , usando a função W_q de Lambert-Tsallis é:

$$\rho_0^3 - \rho\rho_0^2 - 0.37\sqrt{3}\sigma_\varepsilon^2\rho = 0 \Rightarrow \rho_0^3 - \rho\rho_0^2 = 0.37\sqrt{3}\sigma_\varepsilon^2\rho. \quad (52)$$

$$\rho_0^3 \left(1 - \frac{\rho\rho_0}{\rho_0^3}\right) = 0.37\sqrt{3}\sigma_\varepsilon^2\rho \Rightarrow \rho_0^3 e^{\frac{\rho\rho_0}{\rho_0^3}} = 0.37\sqrt{3}\sigma_\varepsilon^2\rho. \quad (53)$$

$$(\rho_0^3)^{-\frac{1}{3}} [e^{\frac{\rho\rho_0}{\rho_0^3}}]^{-\frac{1}{3}} = (0.37\sqrt{3}\sigma_\varepsilon^2\rho)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow \rho_0^{-1} e^{-\frac{1}{3}\frac{\rho\rho_0}{\rho_0^3}} = (0.37\sqrt{3}\sigma_\varepsilon^2\rho)^{-\frac{1}{3}}. \quad (54)$$

$$-\frac{1}{3}\rho\rho_0^{-1} e^{-\frac{1}{3}\frac{\rho\rho_0}{\rho_0^3}} = -\frac{1}{3}\rho(0.37\sqrt{3}\sigma_\varepsilon^2\rho)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow -\frac{1}{3}\rho\rho_0^{-1} = W_4[-\frac{\rho}{3}(0.37\sqrt{3}\sigma_\varepsilon^2\rho)^{-\frac{1}{3}}]. \quad (55)$$

$$\rho_0^{-1} = \frac{3W_4[-\frac{\rho}{3}(0.37\sqrt{3}\sigma_\varepsilon^2\rho)^{-\frac{1}{3}}]}{\rho} \Rightarrow \rho_0 = \frac{\rho}{3W_4\left(\frac{\rho}{3}(0.37\sqrt{3}\sigma_\varepsilon^2\rho)^{-\frac{1}{3}}\right)}. \quad (56)$$

Portanto, conhecendo o parâmetro σ_ε e o valor desejado para ρ , pode-se usar a eq. (56) para determinar o valor do parâmetro de Pierce ρ_0 quando não há alargamento.

O espalhamento de energia em FELs induz ao aumento do comprimento de ganho. Quando a energia espalhada é grande, é possível utilizar um ondulador com gradiente transversal (TGU) para mitigar os efeitos deletérios do espalhamento da energia (HUANG et al., 2021; DATTOLI et al., 2015; SMITH et al., 1979). Para TGUs o parâmetro de energia é especificado pela relação $\gamma = \gamma_0(1+x/D)$, na qual D é o parâmetro de dispersão de energia. Neste caso, o comprimento de ganho incluindo as correções requeridas é dado por (DATTOLI et al., 2015):

$$L_G = L_G^0 [(1 + \Delta^2)^{1/6} + b(1 + \Delta^2)^{-1/2}] \quad (57)$$

Na qual L_G^0 é o comprimento de ganho na ausência de espalhamento de energia e

$$\Delta = \frac{D\sigma_\varepsilon}{\sigma_x}, \quad b = 0.16\mu_\varepsilon^2, \quad \mu_\varepsilon = \frac{2\sigma_\varepsilon}{\rho_0} \quad (58)$$

Em (58) σ_x é o comprimento horizontal. A eq. (57) pode ser invertida usando a função W_q de Lambert-Tsallis. Os dois valores possíveis de Δ são dados por:

Usando as técnicas das eqs. (29), (30) e (31). Considerando $(1 + \Delta^2) = x$, a eq. (57) pode ser rescrita:

$$\frac{L_G}{L_G^0} = x^{\frac{1}{6}} + bx^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{L_G}{L_G^0} = bx^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x^{\frac{1}{6}}}{bx^{-\frac{1}{2}}} \right) \quad (59)$$

$$\frac{L_G}{bL_G^0} = x^{-\frac{1}{2}} e_0^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \left[\frac{L_G/L_G^0}{b} \right]^{-\frac{4}{3}} = (x^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{4}{3}} [e_0^{\frac{2}{3}}]^{-\frac{4}{3}} \quad (60)$$

$$\left[\frac{L_G/L_G^0}{b} \right]^{-\frac{4}{3}} = (x^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{4}{3}} [e_0^{\frac{2}{3}}]^{-\frac{4}{3}} \Rightarrow \left[\frac{L_G/L_G^0}{b} \right]^{-\frac{4}{3}} = x^{\frac{2}{3}} e^{\frac{2}{3} \frac{4x^{\frac{2}{3}}}{3b}} \quad (61)$$

$$-\frac{4}{3b} \left[\frac{L_G/L_G^0}{b} \right]^{-\frac{4}{3}} = -\frac{4}{3b} x^{\frac{2}{3}} e^{\frac{2}{3} \frac{4x^{\frac{2}{3}}}{3b}} \quad (62)$$

$$W_{\frac{7}{4}} \left[-\frac{4}{3b} \left[\frac{L_G/L_G^0}{b} \right]^{-\frac{4}{3}} \right] = -\frac{4}{3b} x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \Delta = \sqrt{\left\{ -\frac{3}{4} b W_{\frac{7}{4}} \left[-\frac{4}{3b} \left(\frac{L_G/L_G^0}{b} \right)^{-\frac{4}{3}} \right] \right\}^{3/2} - 1}. \quad (63)$$

Outra forma de obtermos o valor para Δ :

$$\frac{L_G}{L_G^0} = x^{\frac{1}{6}} + bx^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{L_G}{L_G^0} = x^{\frac{1}{6}} \left(1 + \frac{bx^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{6}}} \right) \quad (64)$$

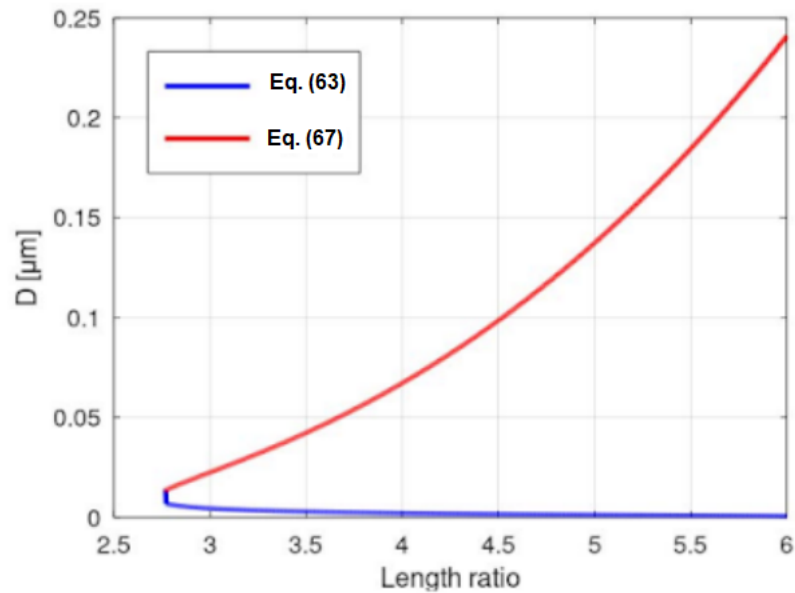
$$\frac{L_G}{L_G^0} = x^{\frac{1}{6}} e_0^{bx^{-\frac{2}{3}}} \Rightarrow \left[\frac{L_G}{L_G^0} \right]^{-4} = (x^{\frac{1}{6}})^{-4} [e_0^{bx^{-\frac{2}{3}}}]^{-4} \quad (65)$$

$$\left[\frac{L_G}{L_G^0} \right]^{-4} = x^{-\frac{2}{3}} e^{\frac{5}{4} - 4bx^{-\frac{2}{3}}} \Rightarrow -4b \left[\frac{L_G}{L_G^0} \right]^{-4} = -4bx^{-\frac{2}{3}} e^{\frac{5}{4} - 4bx^{-\frac{2}{3}}} \quad (66)$$

$$W_{\frac{5}{4}} \left[-4b \left[\frac{L_G}{L_G^0} \right]^{-4} \right] = -4bx^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow \Delta = \sqrt{\left\{ -\frac{1}{4b} W_{\frac{5}{4}} \left[-4b \left(L_G/L_G^0 \right)^{-4} \right] \right\}^{-3/2} - 1}. \quad (67)$$

Na figura 21 pode-se ver o gráfico de D versus a razão de comprimento $\frac{L_G}{L_G^0}$ para $\sigma_\varepsilon = 0.01$, $\sigma_x = 11.3 \mu\text{m}$ e $\mu_\varepsilon = 6$.

Figura 21 – $D \times \frac{L_G}{L_G^0}$



Fonte: O autor.

4.4 Solução alternativa para equação (28)

A solução da eq. (28) mostrada na eq. (39) é obtida usando as técnicas das eqs. (29), (30) e (31). Além da solução encontrada na eq. (39), outra forma de alcançarmos o valor de λ_u pode ser obtido usando:

$$\lambda_u^3 \left[1 + \frac{2(1+\gamma^2\theta^2)}{\xi^2} \lambda_u^{-2} \right] = \frac{4\gamma^2}{\xi^2} \lambda_r \quad (68)$$

Ao invés da eq. (33), utilizando a eq. (68), outra solução pode ser obtida:

$$\lambda_u^3 e_0^{\frac{2(1+\gamma^2\theta^2)}{\xi^2} \lambda_u^{-2}} = \frac{4\gamma^2}{\xi^2} \lambda_r \quad (69)$$

$$(\lambda_u^3)^{-\frac{4}{6}} (e_0^{\frac{2(1+\gamma^2\theta^2)}{\xi^2} \lambda_u^{-2}})^{-\frac{4}{6}} = \left(\frac{4\gamma^2}{\xi^2} \lambda_r \right)^{-\frac{4}{6}} \quad (70)$$

$$\lambda_u^{-2} e^{\frac{-4}{3} \frac{(1+\gamma^2\theta^2)}{\xi^2} \lambda_u^{-2}} = \left(\frac{4\gamma^2}{\xi^2} \lambda_r \right)^{-\frac{4}{6}} \quad (71)$$

$$-\frac{4}{3} \frac{(1+\gamma^2\theta^2)}{\xi^2} \cdot \lambda_u^{-2} e^{\frac{-4}{3} \frac{(1+\gamma^2\theta^2)}{\xi^2} \lambda_u^{-2}} = -\frac{4}{3} \frac{(1+\gamma^2\theta^2)}{\xi^2} \cdot \left(\frac{4\gamma^2}{\xi^2} \lambda_r \right)^{-\frac{4}{6}} \quad (72)$$

$$-\frac{4}{3} \frac{(1+\gamma^2\theta^2)}{\xi^2} \cdot \lambda_u^{-2} = W_{5/2} \left[\frac{-4(1+\gamma^2\theta^2)}{3\xi^2} \left(\frac{4\gamma^2}{\xi^2} \lambda_r \right)^{-2/3} \right] \quad (73)$$

$$\lambda_u = \left\{ \frac{-3\xi^2}{4(1+\gamma^2\theta^2)} \cdot W_{5/2} \left[\frac{-4(1+\gamma^2\theta^2)}{3\xi^2} \left(\frac{4\gamma^2}{\xi^2} \lambda_r \right)^{-2/3} \right] \right\}^{-1/2} \quad (74)$$

Embora as eqs. (39) e (74) sejam diferentes, elas fornecem os mesmos valores para λ_u .

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS

5.1 Conclusões

O presente trabalho usou a função W_q de Lambert-Tsallis para obter fórmulas para calcular alguns parâmetros do ondulador/wiggler quando λ_r (comprimento de onda da radiação emitida), L_G (comprimento de ganho) e r (fator de amplificação) são conhecidos a priori. Por exemplo, a figura 20 mostra claramente que, para um SASE FEL, a diminuição no pico da corrente pode ser compensada por um aumento do período do ondulador/wiggler para manter o mesmo fator de amplificação. Portanto, a função de Lambert-Tsallis é uma ferramenta matemática útil que pode ser usada por engenheiros e físicos durante o projeto de fontes de luz síncrotron e FELs.

5.2 Perspectivas de Trabalhos Futuros

Como perspectivas de trabalhos futuros pode-se citar:

- a) estudar aplicações de fontes coerentes de raios X em telecomunicações, como distribuição quântica de chaves com fótons de raios X.
- b) procurar por novas aplicações da função W_q de Lambert-Tsallis em fontes, guias e detectores de raios X.

REFERÊNCIAS

- AGRAWAL, G. P. **Sistemas de comunicação por fibra óptica**/ Govind P. Agrawal; tradução José Rodolfo Souza. - 4. ed. - Rio de Janeiro : Elsevier, 2014.
- BUSHEBERG, JERROLD T. **The essential physics of medical imaging** / Jerrold T. Bushberg. — 3rd ed, 2011.
- CASTRO, G. S.; RAMOS, R. V. Enhancing eavesdropping detection in quantum key distribution using disentropy measure of randomness. **Quantum Information Processing**, v. 21, n. 2, p. 79, 29 jan. 2022.
- DA SILVA, G. B.; RAMOS, R. V. The Lambert–Tsallis W_q function. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 525, p. 164–170, 1 jul. 2019.
- DATTOLI, G. et al. Pathway to a compact SASE FEL device. **Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment**, v. 798, p. 144–151, 21 out. 2015.
- DE ANDRADE, J. S.; NOBREGA, K. Z.; RAMOS, R. V. Analytical Solution of the Current-Voltage Characteristics of Circuits With Power-Law Dependence of the Current on the Applied Voltage Using the Lambert-Tsallis W_q Function. **IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs**, v. 69, n. 3, p. 769–773, mar. 2022.
- DUBINOV, A. E.; KITAYEV, I. N. Nonlinear periodic backward dust acoustic waves. **Planetary and Space Science**, v. 195, p. 105142, 1 jan. 2021.
- HALLIDAY, D. **Fundamentos de física: óptica e física moderna** . Tradução Ronaldo Sérgio de Biasi. 10.ed. Rio de Janeiro : LTC, 2016. Vol. 4.
- HUANG, N. et al. Features and futures of X-ray free-electron lasers. **The Innovation**, v. 2, n. 2, p. 100097, 28 maio 2021.
- MARCUS, G.; HEMSING, E.; ROSENZWEIG, J. Gain length fitting formula for free-electron lasers with strong space-charge effects. **Physical Review Special Topics - Accelerators and Beams**, v. 14, n. 8, p. 080702, 23 ago. 2011.
- MARGARITONDO, G.; REBERNIK RIBIC, P. A simplified description of X-ray free-electron lasers. **Journal of Synchrotron Radiation**, v. 18, n. 2, p. 101–108, 1 mar. 2011.
- MARTINS, E. E. P. **Free Electron Laser**. Disponível em:
<<https://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:AS7W5wOOz0J:https://www.ifsc.usp.br/~strontium/Teaching/Material2018-1%2520SFI5708%2520Eletromagnetismo/Monografia%2520-%2520Edyvania%2520-%2520Free%2520Electron%2520Laser.pdf&cd=2&hl=pt-BR&ct=clnk&gl=br>>. Acesso em: 12 dez. 2022.
- MILTON, S. V. et al. Exponential gain and saturation of a self-amplified spontaneous emission free-electron laser. **Science (New York, N.Y.)**, v. 292, n. 5524, p. 2037–2041, 15 jun. 2001.

MTINGWA, S. K.; WINICK, H. Synchrotron light sources in developing countries. **Modern Physics Letters A**, v. 33, n. 09, p. 1830003, 21 mar. 2018.

MIZRAHI, S. **Física nuclear e de partículas: uma introdução**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.

OKUNO, E. **Física das radiações**/ Emico Okuno, Elizabeth Mateus Yoshimura. São Paulo: oficina de textos, 2010.

OKUNO, E. **Radiação: efeitos, riscos e benefícios** / Emico Okuno. – São Paulo: Oficina de textos, 2018.

PRAT, E. **Synchrotron light sources and X-ray free-electron-lasers**. arXiv, , 19 jul. 2021. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/2107.09131>>. Acesso em: 16 nov. 2022

RAMOS, R. V. Analytical solutions of cubic and quintic polynomials in micro and nanoelectronics using the Lambert-Tsallis W_q function. **Journal of Computational Electronics**, v. 21, n. 2, p. 396–400, 1 abr. 2022.

RAMOS, R. V. **Lambert-Tsallis Function and Cubic Equation**. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/339274107_Lambert-Tsallis_Function_and_Cubic_Equation>

SILVA, George Barbosa da. **A função W_q de Lambert-Tsallis e suas aplicações** / George Barbosa da Silva. – 2021. Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática, Fortaleza, 2021.

SMITH, T. I. et al. Reducing the sensitivity of a free-electron laser to electron energy. **Journal of Applied Physics**, v. 50, n. 7, p. 4580–4583, jul. 1979.

TANAKA, T. Numerical methods for free electron laser simulations. **Journal of Electromagnetic Waves and Applications**, v. 32, n. 3, p. 371–401, 2018.

TAUHATA, L., SALATI, I. P. A., DI PRINZIO, R., DI PRINZIO, M. A. R. R. **Radioproteção e Dosimetria: Fundamentos** - 9a revisão novembro/2013 - Rio de Janeiro - IRD/CNEN.

TILLY JUNIOR, JOÃO GILBERTO. **Física Radiológica/ João Gilberto Tilly Junior**. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 2010.

TSALLIS, C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. **Journal of Statistical Physics**, v. 52, n. 1, p. 479–487, 1 jul. 1988.

VALLURI, S. R.; JEFFREY, D. J.; CORLESS, R. M. Some applications of the Lambert W function to physics. [s.d.].

ZHOLENTS, A. A. Method of an enhanced self-amplified spontaneous emission for x-ray free electron lasers. **Physical Review Special Topics - Accelerators and Beams**, v. 8, n. 4, p. 040701, 12 abr. 2005.