



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ
IFCE *CAMPUS* FORTALEZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE TELECOMUNICAÇÕES
MESTRADO ACADÊMICO EM ENGENHARIA DE TELECOMUNICAÇÕES

RODRIGO OLIVEIRA DE QUEIROZ

SELEÇÃO ESPECTRAL ADAPTATIVA E GEOMETRIA RIEMANNIANA APLICADAS
NA SEPARABILIDADE DE IMAGINAÇÃO MOTORA EM SINAIS DE EEG

FORTALEZA

2025

RODRIGO OLIVEIRA DE QUEIROZ

SELEÇÃO ESPECTRAL ADAPTATIVA E GEOMETRIA RIEMANNIANA APLICADAS NA
SEPARABILIDADE DE IMAGINAÇÃO MOTORA EM SINAIS DE EEG

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia de Telecomunicações do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Telecomunicações do *Campus* Fortaleza da Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia de Telecomunicações. Área de Concentração: Processamento Digital de Sinais.

Orientador: Prof. Dr. Regis Cristiano Pinheiro Marques.

FORTALEZA

2025

RODRIGO OLIVEIRA DE QUEIROZ

**SELEÇÃO ESPECTRAL ADAPTATIVA E GEOMETRIA RIEMANNIANA APLICADAS
NA SEPARABILIDADE DE IMAGINAÇÃO MOTORA EM SINAIS DE EEG**

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia de Telecomunicações do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Telecomunicações do *Campus* Fortaleza da Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia de Telecomunicações. Área de Concentração: Processamento Digital de Sinais.

Aprovado em: 03/09/2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Regis Cristiano Pinheiro Marques (Orientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará

Prof. Dr. Auzuir Ripardo de Alexandria
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará

Prof. Dr. Geraldo Luis Bezerra Ramalho
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará

Prof. Dr. Iális Cavalcante de Paula Júnior
Universidade Federal do Ceará

AGRADECIMENTOS

Aos professores que muito contribuíram para minha formação acadêmica, agradeço os ensinamentos. Pela orientação recebida, meu agradecimento.

RESUMO

Este trabalho propõe um método para melhorar a separabilidade de tarefas de imaginação motora (MI) em sinais de eletroencefalografia (EEG), por meio da seleção do conteúdo espectral. O método é desenvolvido para a classificação no espaço Riemanniano, levando em conta a natureza das matrizes de covariância (simétricas definidas positivas, SPD). A proposta central consiste em um algoritmo de seleção adaptativa de sub-bandas de frequências. Os sinais são projetados em uma base senoidal e ponderados por funções Gaussianas, realçando sub-bandas candidatas para a seleção adaptativa no espaço Riemanniano. É utilizada a métrica de distintividade entre classes (classDis), permitindo avaliar a separabilidade entre classes independentemente do processo de classificação. O procedimento é aplicado aos dados do conjunto BCI Competition IV – Dataset 2a, abrangendo nove sujeitos em quatro tarefas motoras, a fim de avaliar o desempenho da seleção pelo classificador de Mínima Distância à Média Riemanniana (MDRM). Os resultados indicam que a estratégia proposta é eficaz na identificação de regiões espectrais relevantes e na melhoria da separação entre padrões neurais de diferentes classes. Em comparações com abordagens de referência, a metodologia apresentou uma melhora na acurácia do classificador e mitigou limitações observadas em outros métodos, especialmente no que se refere à dificuldade de selecionar faixas de frequência não adjacentes.

Palavras-chave: EEG; Imaginação Motora; Geometria Riemanniana; Matrizes de Covariância; BCI.

ABSTRACT

This work proposes a method to improve the separability of motor imagery (MI) tasks in electroencephalography (EEG) signals through spectral content selection. The method is developed for classification in the Riemannian space, taking into account the nature of covariance matrices (symmetric positive definite, SPD). The central proposal consists of an adaptive sub-band frequency selection algorithm. Signals are projected onto a sinusoidal basis and weighted by Gaussian functions, enhancing candidate sub-bands for adaptive selection in the Riemannian space. The class distinctiveness metric (classDis) is employed to assess class separability independently of the classification process. The procedure is applied to the BCI Competition IV – Dataset 2a, comprising nine subjects performing four motor tasks, in order to evaluate the selection performance using the Minimum Distance to Riemannian Mean (MDRM) classifier. The results indicate that the proposed strategy is effective in identifying relevant spectral regions and in improving the separation between neural patterns of different classes. In comparisons with reference approaches, the methodology achieved higher classifier accuracy and mitigated limitations observed in other methods, particularly regarding the difficulty of selecting non-adjacent frequency bands.

Keywords: EEG; Motor Imagery; Riemannian Geometry; Covariance Matrices; BCI.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplos de aplicações de BCIs (1/2)	18
Figura 2 – Exemplos de aplicações de BCIs (2/2)	19
Figura 3 – Funcionamento do sistema BCI no jogo BrainRunners do Cybathlon. Os participantes realizam três comandos distintos no jogo (correr, pular e deslizar) a partir da imaginação motora dos membros superiores, inferiores ou sequência combinada.	20
Figura 4 – Arquitetura básica de um sistema de Interface Cérebro-Computador (BCI), composta pelas etapas de aquisição de sinais, pré-processamento, extração de características, classificação, controle de dispositivos e retroalimentação (feedback). Cada módulo contribui para a conversão de sinais neurais em comandos interpretáveis por sistemas externos.	21
Figura 5 – Fontes dos sinais de EEG.	26
Figura 6 – Representação topográfica dos eletrodos no sistema internacional 10-20 expandido.	28
Figura 7 – Sinais EEG extraídos dos canais Fz, C3, Cz, C4 e Pz.	28
Figura 8 – Mapas topográficos com curvas médias de ERD/ERS — Cada gráfico mostra as curvas médias obtidas para 10 participantes durante o movimento voluntário da mão direita, processadas em duas subfaixas da banda mu: linha sólida (8–10 Hz) e linha pontilhada (10–12 Hz). Os mapas estão organizados por posição de eletrodo, representando a distribuição espacial e temporal do ERD/ERS.	30
Figura 9 – Comparação do ERD/ERS entre movimentos do dedo e do punho — Linhas finas representam os valores individuais por sujeito e a linha espessa indica a média geral. A parte superior mostra os resultados para o movimento do dedo indicador e a parte inferior para o movimento do punho. Em cada caso, o painel esquerdo apresenta o ERD na banda mu sincronizado ao início do movimento, e o painel direito mostra o ERS na banda beta sincronizado ao término do movimento.	31

Figura 10 – Representação estrutural de algumas linhas da matriz B , composta por funções senoidais e cossenoidais, associadas a diferentes frequências. Cada linha representa um vetor harmônico discretizado ao longo do tempo, utilizado para projetar o sinal de EEG em uma base espectral.	36
Figura 11 – Ilustração da função de pertinência gaussiana utilizada para compor a diagonal da matriz H ₀ , responsável por ponderar seletivamente as componentes espectrais extraídas da base senoidal.	38
Figura 12 – Resposta em frequência dos filtros Butterworth de 4ª ordem utilizados para compor o banco de filtros, conforme descrito por Yamamoto <i>et al.</i> (2022). . .	42
Figura 13 – Seleção de canais para aplicação de um filtro laplaciano, em vermelho o canal selecionado e em verde os vizinhos.	45
Figura 14 – Ilustração dos bancos de filtros, cada um associado a um desvio padrão. . .	47
Figura 15 – Exemplo da análise com filtros de banda larga: na figura da esquerda, o espectro de <i>classDis</i> ; na da direita, a gaussiana resultante.	48
Figura 16 – Exemplo da análise com filtros de banda estreita: na figura da esquerda, o espectro de <i>classDis</i> ; na da direita, as gaussianas resultantes.	48
Figura 17 – Algoritmo MDRM no domínio do tempo	50
Figura 18 – Algoritmo MDRM no Domínio da Frequência com filtro gaussiano.	51
Figura 19 – Fluxograma.	51
Figura 20 – Posicionamento dos eletrodos segundo o sistema 10–20.	52
Figura 21 – Esquema temporal de cada ensaio.	54
Figura 22 – Posicionamento dos eletrodos segundo o sistema 10–20.	54
Figura 23 – Distribuição da métrica <i>ClassDis</i> para todos os sujeitos (1 a 9) na tarefa de imaginação motora ME (mão esquerda) vs. MD (mão direita), utilizando o método proposto com filtros Gaussianos de desvio-padrão de 2 Hz e 5 Hz. . .	59
Figura 24 – Distribuição da métrica <i>ClassDis</i> para o sujeito 1, considerando todas as classes (ME: mão esquerda, MD: mão direita, P: pés, L: língua) simultaneamente. O método proposto foi aplicado com filtros Gaussianos de desvio-padrão de 2 Hz e 5 Hz.	63
Figura 25 – Distribuição da métrica <i>ClassDis</i> para o sujeito 2, considerando todas as classes (ME: mão esquerda, MD: mão direita, P: pés, L: língua) simultaneamente. O método proposto foi aplicado com filtros Gaussianos de desvio-padrão de 2 Hz e 5 Hz.	63

Figura 26 – Distribuição da métrica <i>ClassDis</i> para o sujeito 3, considerando todas as classes (ME: mão esquerda, MD: mão direita, P: pés, L: língua) simultaneamente. O método proposto foi aplicado com filtros Gaussianos de desvio-padrão de 2 Hz e 5 Hz.	64
Figura 27 – Distribuição da métrica <i>ClassDis</i> para o sujeito 4, considerando todas as classes (ME: mão esquerda, MD: mão direita, P: pés, L: língua) simultaneamente. O método proposto foi aplicado com filtros Gaussianos de desvio-padrão de 2 Hz e 5 Hz.	64
Figura 28 – Distribuição da métrica <i>ClassDis</i> para o sujeito 5, considerando todas as classes (ME: mão esquerda, MD: mão direita, P: pés, L: língua) simultaneamente. O método proposto foi aplicado com filtros Gaussianos de desvio-padrão de 2 Hz e 5 Hz.	65
Figura 29 – Distribuição da métrica <i>ClassDis</i> para o sujeito 6, considerando todas as classes (ME: mão esquerda, MD: mão direita, P: pés, L: língua) simultaneamente. O método proposto foi aplicado com filtros Gaussianos de desvio-padrão de 2 Hz e 5 Hz.	65
Figura 30 – Distribuição da métrica <i>ClassDis</i> para o sujeito 7, considerando todas as classes (ME: mão esquerda, MD: mão direita, P: pés, L: língua) simultaneamente. O método proposto foi aplicado com filtros Gaussianos de desvio-padrão de 2 Hz e 5 Hz.	66
Figura 31 – Distribuição da métrica <i>ClassDis</i> para o sujeito 8, considerando todas as classes (ME: mão esquerda, MD: mão direita, P: pés, L: língua) simultaneamente. O método proposto foi aplicado com filtros Gaussianos de desvio-padrão de 2 Hz e 5 Hz.	66
Figura 32 – Distribuição da métrica <i>ClassDis</i> para o sujeito 9, considerando todas as classes (ME: mão esquerda, MD: mão direita, P: pés, L: língua) simultaneamente. O método proposto foi aplicado com filtros Gaussianos de desvio-padrão de 2 Hz e 5 Hz.	67
Figura 33 – Distribuição da métrica <i>ClassDis</i> para o sujeito 1, utilizando o método proposto por Yamamoto <i>et al.</i> (2022) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).	76

Figura 34 – Distribuição da métrica <i>fscore</i> para o sujeito 1, utilizando o método proposto por Blankertz <i>et al.</i> (2008) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).	76
Figura 35 – Distribuição da métrica <i>ClassDis</i> para o sujeito 2, utilizando o método proposto por Yamamoto <i>et al.</i> (2022) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).	77
Figura 36 – Distribuição da métrica <i>fscore</i> para o sujeito 2, utilizando o método proposto por Blankertz <i>et al.</i> (2008) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).	77
Figura 37 – Distribuição da métrica <i>ClassDis</i> para o sujeito 3, utilizando o método proposto por Yamamoto <i>et al.</i> (2022) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).	78
Figura 38 – Distribuição da métrica <i>fscore</i> para o sujeito 3, utilizando o método proposto por Blankertz <i>et al.</i> (2008) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).	78
Figura 39 – Distribuição da métrica <i>ClassDis</i> para o sujeito 4, utilizando o método proposto por Yamamoto <i>et al.</i> (2022) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).	79
Figura 40 – Distribuição da métrica <i>fscore</i> para o sujeito 4, utilizando o método proposto por Blankertz <i>et al.</i> (2008) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).	79
Figura 41 – Distribuição da métrica <i>ClassDis</i> para o sujeito 5, utilizando o método proposto por Yamamoto <i>et al.</i> (2022) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).	80
Figura 42 – Distribuição da métrica <i>fscore</i> para o sujeito 5, utilizando o método proposto por Blankertz <i>et al.</i> (2008) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).	80
Figura 43 – Distribuição da métrica <i>ClassDis</i> para o sujeito 6, utilizando o método proposto por Yamamoto <i>et al.</i> (2022) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).	81
Figura 44 – Distribuição da métrica <i>fscore</i> para o sujeito 6, utilizando o método proposto por Blankertz <i>et al.</i> (2008) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).	81

Figura 45 – Distribuição da métrica <i>ClassDis</i> para o sujeito 7, utilizando o método proposto por Yamamoto <i>et al.</i> (2022) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).	82
Figura 46 – Distribuição da métrica <i>fscore</i> para o sujeito 7, utilizando o método proposto por Blankertz <i>et al.</i> (2008) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).	82
Figura 47 – Distribuição da métrica <i>ClassDis</i> para o sujeito 8, utilizando o método proposto por Yamamoto <i>et al.</i> (2022) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).	83
Figura 48 – Distribuição da métrica <i>fscore</i> para o sujeito 8, utilizando o método proposto por Blankertz <i>et al.</i> (2008) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).	83
Figura 49 – Distribuição da métrica <i>ClassDis</i> para o sujeito 9, utilizando o método proposto por Yamamoto <i>et al.</i> (2022) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).	84
Figura 50 – Distribuição da métrica <i>fscore</i> para o sujeito 9, utilizando o método proposto por Blankertz <i>et al.</i> (2008) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).	84

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Bandas rítmicas do EEG. Faixas típicas segundo Bear, Connors e Paradiso (2017). Valores alternativos para a banda beta são reportados como 13–30 Hz em Engel e Fries (2010), 13–35 Hz em Plate <i>et al.</i> (2022), Neuper e Pfurtscheller (2001), 14–30 Hz em Sutter, Kaplan e Schomer (2017), e 15–30 Hz em Bear, Connors e Paradiso (2017)	29
Tabela 2 – Matriz de confusão para o caso binário	39
Tabela 3 – Acurácia do MDRM na classificação binária ME (mão esquerda) vs. MD (mão direita) para cada sujeito, utilizando quatro diferentes métodos de análise espectral.	56
Tabela 4 – Acurácia por pares de classes com o método proposto, por sujeito. Abreviações: ME = Mão Esquerda; MD = Mão Direita; P = Pés; L = Língua. A última coluna reporta, por sujeito, o maior valor entre as seis comparações. .	62
Tabela 5 – Comparação padronizada entre <i>classDis</i> (métrica) e acurácia (ME vs. MD) por sujeito. Em negrito, o maior valor dentro de cada par DV2 (junção) vs. DV5.	68
Tabela 6 – Acurácia do MDRM na classificação binária ME vs. MD para cada sujeito do conjunto alternativo de dados, utilizando três diferentes métodos de análise espectral.	69

LISTA DE SIGLAS

AIRM	Affine-Invariant Riemannian Metric
BCI	Interface Cérebro–Computador (Brain–Computer Interface)
CT	Tomografia Computadorizada (Computed Tomography)
ECG	Eletrocardiograma
EEG	Eletroencefalograma
EGG	Eletrogastrografia
EMG	Eletromiograma
EOG	Eletrooculograma
ERD	Dessincronização Relacionada a Evento (Event-Related Desynchronization)
ERS	Sincronização Relacionada a Evento (Event-Related Synchronization)
fMRI	Ressonância Magnética Funcional (functional MRI)
GDF	Formato Geral de Dados para Sinais Biomédicos (General Data Format)
MDRM	Distância Mínima à Média Riemanniana (Minimum Distance to Riemannian Mean)
MEG	Magnetoencefalografia (Magnetoencephalography)
MI	Imaginação Motora (Motor Imagery)
MRI	Ressonância Magnética (Magnetic Resonance Imaging)
P300	Componente positivo em ~ 300 ms (ERP)
PET	Tomografia por Emissão de Pósitrons (Positron Emission Tomography)
SDP	Matriz Simétrica Definida Positiva (Symmetric Positive Definite)
SPECT	Tomografia Computadorizada por Emissão de Fóton Único (Single Photon Emission CT)

LISTA DE SÍMBOLOS

$C \in \mathbb{R}^{M \times M}$	Matriz de covariância (simétrica definida positiva).
$Z \in \mathbb{R}^{M \times N}$	Segmento do EEG (canais $\times$ amostras).
$B \in \mathbb{R}^{2m \times q}$	Matriz de projeção senoidal/cossenoidal (base com m frequências).
$H_0 \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$	Matriz de ponderação espectral (Gaussiana).
$X \in \mathbb{R}^{n \times n}$	Matriz invertível na transformação por congruência.
$\Gamma(C)$	Operador de congruência: $\Gamma(C) = X^\top CX$.
$\delta_{\text{AIRM}}(C_1, C_2)$	Distância Riemanniana (Affine-Invariant) entre matrizes SPD.
$\delta_R(C_1, C_2)$	Distância Riemanniana genérica entre C_1 e C_2 .
$\log(\cdot)$	Logaritmo matricial.
$\exp(\cdot)$	Exponencial matricial.
$\ \cdot\ _F$	Norma de Frobenius.
f	Frequência (Hz) considerada na sub-banda.
f_s	Frequência de amostragem (Hz).
f_0	Frequência inicial usada na busca/expansão de bandas (Hz).
f_c	Frequência central do filtro (Hz).
σ	Desvio padrão do filtro Gaussiano (Hz).
θ	Limiar para expansão/seleção de sub-bandas.
n	Índice de amostra temporal.
i	Índice de componente/frequência.
m	Número de pares seno–cosseno na base.
q	Número de amostras temporais do segmento (colunas de B).
M, N	Número de canais (M) e número de amostras por segmento (N).

π	Constante pi (em expressões senoidais).
$\text{classDis}(f)$	Escore de distintividade entre classes para a sub-banda centrada em f (adimensional).
$\text{fscore}(f)$	F-score univariado entre classes para a sub-banda centrada em f ; razão entre variância interclasse e intraclasse (adimensional).
Hz	Hertz (frequência).
s	Segundo (tempo).
V	Volt (potencial elétrico).
mV	Milivolt.
μV	Microvolt.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Motivação	23
1.2	Objetivos	24
1.3	Estrutura da Dissertação	25
2	SINAIS DE EEG E SUA CARACTERIZAÇÃO	26
2.1	Introdução ao Eletroencefalograma	26
2.1.1	<i>Coleta de Sinais e Sistema de Posicionamento de Eletrodos</i>	<i>26</i>
2.2	Ritmos Cerebrais Detectados no EEG	27
2.3	Estados de Sincronia	29
2.3.1	<i>Exemplos de ERD e ERS</i>	<i>30</i>
3	GEOMETRIA RIEMANNIANA PARA ANÁLISE DE COVARIÂNCIAS EM EEG	32
3.1	Formulação da Matriz de Covariância e Interpretação Geométrica na Análise de EEG	32
3.1.1	<i>Distância entre matrizes de covariância: AIRM</i>	<i>34</i>
3.2	Classificador de Mínima Distância à Média Riemanniana (MDRM) . . .	34
3.2.1	<i>Média Riemanniana</i>	<i>35</i>
3.3	Projeção do Sinal no Domínio da Frequência	35
3.4	Filtragem Espectral com Função Gaussiana	38
3.5	Métricas para BCI	39
3.5.1	<i>Distintividade entre classes</i>	<i>40</i>
3.6	Seleção de banda de frequência com a métrica <i>classDis</i>	41
3.7	Seleção de banda de frequência pela correlação entre a potência espectral	43
4	METODOLOGIA	46
4.1	Método Proposto	46
4.1.1	<i>Passo 1: Projeção Espectral</i>	<i>46</i>
4.1.2	<i>Passo 2: Cálculo dos Espectros de Distintividade</i>	<i>47</i>
4.1.3	<i>Passo 3: Análise com Filtros de Banda Larga (Máximo Global)</i>	<i>47</i>
4.1.4	<i>Passo 4: Análise com Filtros de Banda Estreita (Máximos Locais)</i>	<i>47</i>
4.1.5	<i>Passo 5: Seleção da Configuração Ótima e Retorno</i>	<i>48</i>
4.2	Banco de Dados	52

4.2.1	<i>Conjunto Principal: BCI Competition IV – Dataset 2a</i>	52
4.2.2	<i>Aquisição de Sinais</i>	52
4.2.3	<i>Pré-processamento e Filtragem</i>	53
4.2.4	<i>Protocolo do Ensaio</i>	53
4.2.5	<i>Conjunto Adicional: BCI Competition III – Dataset IIIa</i>	54
5	RESULTADOS	55
5.1	Comparação entre os métodos	55
5.2	Desempenho por Par de Classes	62
5.3	Parâmetros e Limitações	68
6	CONCLUSÃO	70
6.1	Trabalhos futuros	71
	REFERÊNCIAS	72
	APÊNDICE A – GRÁFICOS	76
	ANEXO A – ALGORITMO DE ESTIMATIVA DA MÉDIA DE RIE- MANN PARA MATRIZES SPD	85
	ANEXO B – MÉTRICAS RIEMANNIANAS NO ESPAÇO DE MATRI- ZES SPD	86

1 INTRODUÇÃO

Ao longo de várias décadas, pesquisadores têm se dedicado ao desenvolvimento de Interfaces Cérebro-Computador, conhecidas internacionalmente pela sigla Brain-Computer Interfaces (BCIs), sistemas capazes de estabelecer um canal de comunicação direto entre o cérebro humano e dispositivos externos, sem a necessidade de atividade muscular. Essa tecnologia tem sido amplamente investigada por seu potencial em aplicações assistivas, de reabilitação motora e de ampliação das habilidades cognitivas e motoras (Saha *et al.*, 2021). Essas interfaces abrangem um conjunto diversificado de aplicações, que variam conforme o propósito do sistema (Mridha *et al.*, 2021). No contexto biomédico, as BCIs permitem o controle de próteses robóticas em casos de paralisia ou lesões, contribuem para o diagnóstico de distúrbios, são empregadas na reabilitação motora e no tratamento de doenças neurológicas, além de possibilitarem o monitoramento da atividade mental (Mridha *et al.*, 2021). Em aplicações não clínicas, as BCIs também são utilizadas em jogos e simuladores, bem como em ambientes industriais e de transporte, nos quais podem interromper o controle manual de máquinas mediante a detecção de fadiga ou condição adversa (Mridha *et al.*, 2021). No campo artístico, permitem o gerenciamento de ferramentas utilizadas em processos criativos (Mridha *et al.*, 2021).

A Figura 1 apresenta um conjunto de aplicações práticas de interfaces cérebro-computador. A Figura 1(a) exibe um sistema de comunicação por meio do paradigma P300, comumente utilizado em sistemas de comunicação assistiva (Wolpaw *et al.*, 2002). A Figura 1(b) mostra um sistema de controle em ambiente simulado (Saichoo; Boonbrahm; Punsawad, 2022). A Figura 1(c) ilustra o uso de uma cadeira de rodas controlada por imaginação motora (Palumbo *et al.*, 2021). A Figura 1(d) apresenta uma aplicação de BCI em ambiente de jogo, evidenciando o potencial dessas interfaces em contextos de reabilitação e entretenimento (Wolpaw *et al.*, 2002). Por fim, a Figura 2(a), extraída de um projeto brasileiro apresentado durante a Copa do Mundo de 2014, mostra o uso de BCI no controle de um exoesqueleto para pacientes com paralisia motora (Associação Alberto Santos Dumont para Apoio à Pesquisa, 2020).

O principal desafio das BCIs é detectar e interpretar estímulos sensoriais, comportamento motor e imaginação. Esses eventos podem se manifestar como alterações na conectividade funcional dentro do córtex cerebral, resultando em mudanças de amplitude em faixas de frequências específicas (Pfurtscheller; Neuper, 2001). As variações de amplitude podem ser registradas por meio de eletrodos de EEG (Maby, 2016). Entre os diversos métodos de aquisição de sinais neurais, a eletroencefalografia (EEG) é amplamente utilizada devido à sua natureza não invasiva,

Figura 1 – Exemplos de aplicações de BCIs (1/2)

Sistema P300 para escrita assistida com EEG e teclado virtual.



Fonte: Wolpaw *et al.* (2002).

Controle em ambiente simulado com headset EEG.



Fonte: Saichoo, Boonbrahm e Punsawad (2022).

Cadeira de rodas controlada por imaginação motora.



Fonte: Wolpaw *et al.* (2002).

Jogo interativo controlado por BCI.

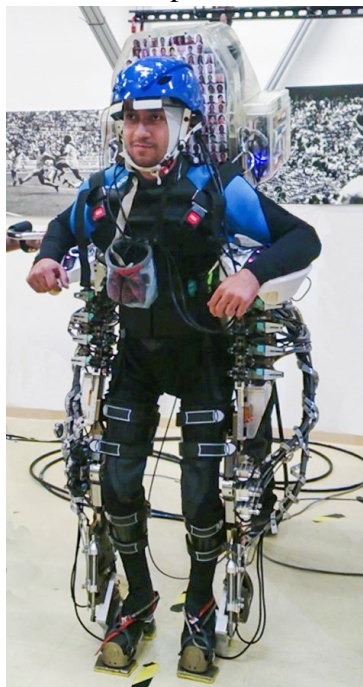


Fonte: Palumbo *et al.* (2021).

alta resolução temporal, portabilidade e baixo custo quando comparada a outros métodos (Saha *et al.*, 2021). Os eventos associados a essas alterações são chamados de ERD (dessincronização relacionada a eventos), quando há supressão da amplitude, e ERS (sincronização relacionada a eventos), quando há aumento da amplitude (Pfurtscheller; Neuper, 2001). Esses padrões refletem a ativação ou inibição de regiões específicas do córtex e são amplamente utilizados em sistemas BCI como sinais discriminativos para diferentes tarefas mentais (Pfurtscheller; Neuper, 2001). Evidenciar os padrões de ERD e ERS relacionados às tarefas de imaginação motora é o foco de diversas pesquisas no campo das BCIs (Bougrain, 2016).

A Figura 3 ilustra o funcionamento de um sistema BCI utilizado para gerar comandos no jogo, no qual os pilotos realizam tarefas de imaginação motora com o objetivo de modular conscientemente a atividade elétrica cerebral captada pelos eletrodos (Perdikis; Tonin; Millan, 2017).

Figura 2 – Exemplos de aplicações de BCIs (2/2)
Exoesqueleto controlado por BCI na Copa do Mundo de 2014.



Fonte: Associação Alberto Santos Dumont para Apoio à Pesquisa (2014). Disponível em: <<https://www.aasdap.org.br/projeto-andar-de-novo>>. Acesso em: 8 ago. 2025.

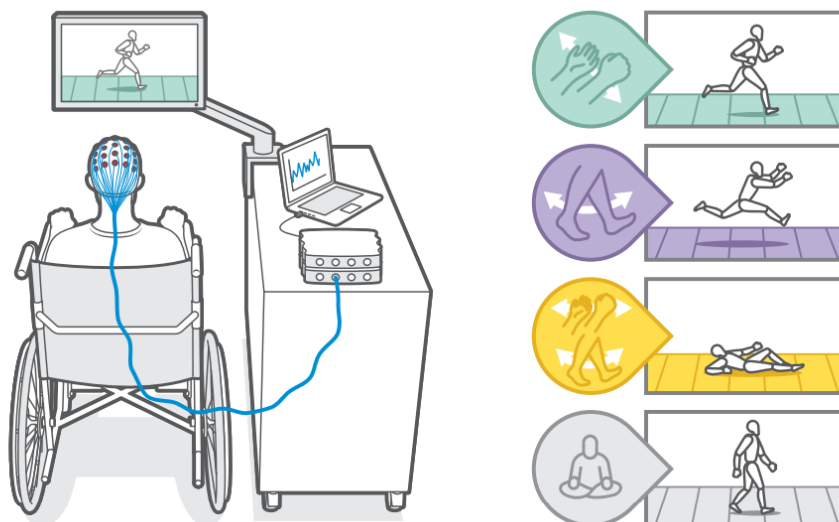
A habilidade em sistemas BCI baseados em imaginação motora está associada à capacidade do usuário de modular voluntariamente padrões cerebrais distintos e estáveis entre diferentes tarefas mentais, de forma que esses padrões possam ser reconhecidos e traduzidos em comandos de controle pelo sistema (Lotte; Jeunet, 2018).

Porém, mecanismos emocionais e mentais, fatores neurofisiológicos relacionados à cognição e variáveis neurológicas, como a funcionalidade e a arquitetura cerebral, e que exercem papel fundamental no desempenho de sistemas BCI, resultam em ampla variabilidade intra e entre sujeitos (Mridha *et al.*, 2021). O cérebro é um sistema altamente complexo e não linear, no qual pode ser observada a atividade caótica de populações de neurônios (Mridha *et al.*, 2021). Por isso, técnicas não lineares tendem a descrever os sinais de EEG de forma mais adequada do que abordagens lineares (Mridha *et al.*, 2021).

A natureza não estacionária dos sinais eletrofisiológicos cerebrais representa um obstáculo relevante para o desenvolvimento de sistemas BCI (Mridha *et al.*, 2021). Essa característica implica em alterações contínuas nos sinais ao longo do tempo, tanto entre diferentes sessões quanto dentro de uma mesma sessão (Mridha *et al.*, 2021).

A necessidade de personalização para cada indivíduo pode resultar em longos períodos de calibração (Yger; Berar; Lotte, 2017). Além disso, sistemas BCI precisam ser periodicamente recalibrados para refletir as alterações na atividade cerebral do usuário (Perdikis; Tonin; Millan,

Figura 3 – Funcionamento do sistema BCI no jogo BrainRunners do Cybathlon. Os participantes realizam três comandos distintos no jogo (correr, pular e deslizar) a partir da imaginação motora dos membros superiores, inferiores ou sequência combinada.



Fonte: Perdakis, Tonin e Millan (2017).

2017).

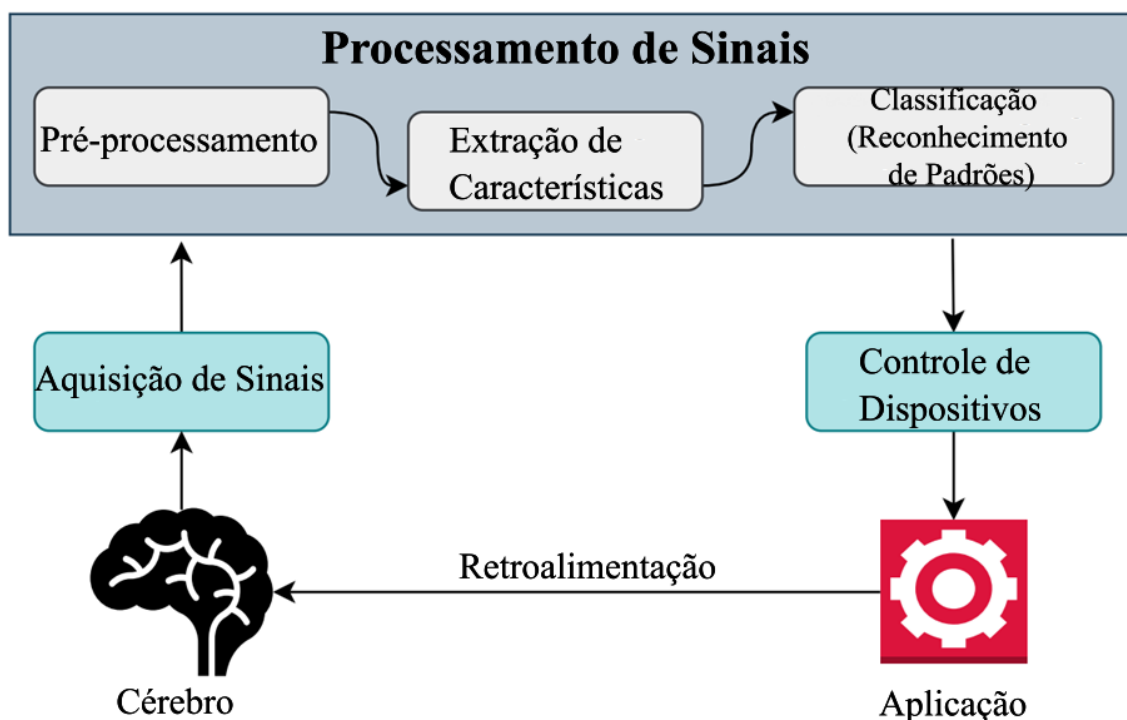
Um dos principais desafios para reconhecer corretamente estados mentais a partir da atividade cerebral observada é desenvolver um modelo que mantenha acurácia frente a variações e distorções do sinal nos domínios espacial, temporal e espectral, causadas por diferenças intra e entre sujeitos (Bashivan *et al.*, 2015). O sistema BCI precisa identificar os parâmetros ideais que equilibrem a precisão e a velocidade dos comandos (Perdakis; Tonin; Millan, 2017).

Durante processos de imaginação motora, os eletrodos de EEG captam padrões em diferentes faixas de frequência, provenientes de diversas regiões do córtex (Perdakis *et al.*, 2014). A seleção da faixa de frequência é um parâmetro crítico para o desempenho de sistemas BCI (Yamamoto *et al.*, 2022). No entanto, definir uma faixa ideal para cada usuário é uma tarefa complexa, uma vez que essas faixas podem variar consideravelmente entre indivíduos (Kwon *et al.*, 2020). As bandas comumente associadas à imaginação motora situam-se entre 8 e 30 Hz, correspondendo aos ritmos mu e beta (Bougrain, 2016), e o procedimento mais frequente consiste na seleção prévia dessas bandas (Kwon *et al.*, 2020).

O funcionamento de um sistema BCI pode ser representado por um conjunto modular de etapas organizadas sequencialmente (Mridha *et al.*, 2021). Conforme ilustrado na Figura 4, esse tipo de sistema inicia com a aquisição dos sinais neurais, geralmente por eletroencefalografia (EEG), seguida por etapas de pré-processamento, extração de características e classificação dos padrões extraídos (Mridha *et al.*, 2021). A saída dessa cadeia de processamento é então

utilizada para o controle de dispositivos externos, com a possibilidade de retorno (feedback) ao usuário (Mridha *et al.*, 2021). Essa estrutura reflete a arquitetura típica de sistemas BCI conforme apresentada por Mridha *et al.* (2021), sendo amplamente adotada na literatura para descrever o fluxo funcional de tais sistemas.

Figura 4 – Arquitetura básica de um sistema de Interface Cérebro-Computador (BCI), composta pelas etapas de aquisição de sinais, pré-processamento, extração de características, classificação, controle de dispositivos e retroalimentação (feedback). Cada módulo contribui para a conversão de sinais neurais em comandos interpretáveis por sistemas externos.



Fonte: Adaptado de Mridha *et al.* (2021).

Para lidar com a dificuldade de extrair características discriminativas dos sinais de EEG diretamente no domínio dos sensores, Barachant *et al.* (2012) propõem o uso de matrizes de covariância como representação dos sinais, uma vez que estas encapsulam a informação espacial presente no EEG e permitem integrar a filtragem espacial ao processo de classificação em uma única etapa. Neste contexto, os autores fazem então uso da geometria riemanniana, por esta fornecer uma estrutura matemática apropriada para lidar com matrizes simétricas definidas positivas, categoria à qual pertencem as matrizes de covariância (Barachant *et al.*, 2012; Yger; Berar; Lotte, 2017). As operações realizadas nesse espaço, no domínio dos sensores¹, apresentam comportamento equivalente àquelas que seriam realizadas no espaço das fontes² (Congedo;

¹ Espaço definido pelos eletrodos na superfície do couro cabeludo, onde se medem os sinais de EEG.

² Espaço interno do cérebro, referente ao local de origem da atividade elétrica registrada pelos eletrodos.

Barachant; Bhatia, 2017). Essa perspectiva geométrica não apenas respeita a natureza não euclidiana dos dados de EEG, como também explora suas propriedades estruturais para favorecer um melhor desempenho dos classificadores (Tibermacine *et al.*, 2024).

A métrica riemanniana invariável por transformações afins, conhecida como Affine-Invariant Riemannian Metric (AIRM), é amplamente utilizada em aplicações de geometria riemanniana com matrizes de covariância no contexto de interfaces cérebro-computador (Barachant *et al.*, 2012; Congedo; Barachant; Bhatia, 2017; Yger; Berar; Lotte, 2017; Tibermacine *et al.*, 2024). Essa métrica é empregada, por exemplo, no classificador Minimum Distance to Mean (MDM), o qual compara a matriz de covariância de um sinal de teste com a média geométrica das matrizes de covariância de cada classe (Barachant *et al.*, 2012).

Na etapa de pré-processamento, Silva (2017) realiza a projeção dos sinais de EEG em uma base senoidal como alternativa à filtragem, permitindo representar explicitamente o conteúdo espectral dos sinais e, ao mesmo tempo, reduzir sua dimensionalidade. Essa projeção é realizada por meio de uma matriz composta por senoides e cossenoides que formam uma base ortonormal, com frequências igualmente espaçadas dentro da faixa de interesse. A partir dessa nova representação, calcula-se a matriz de covariância no domínio da frequência, juntamente com uma matriz diagonal que atua como filtro espectral sobre os coeficientes projetados (Silva, 2017).

Com o objetivo de realçar seletivamente regiões espectrais relevantes dos sinais de EEG, Alves, Teixeira e Silva (2021) propuseram a parametrização da matriz diagonal por meio de uma função de pertinência gaussiana. Nesse caso, os elementos da diagonal são atribuídos conforme uma função gaussiana centrada em uma frequência específica, com dispersão controlada por um desvio padrão, a fim de selecionar sub-bandas de interesse. A técnica foi empregada por Alves, Teixeira e Silva (2021), os quais realizaram uma varredura exaustiva sobre diferentes valores de frequência central e desvio padrão para avaliar sua influência no desempenho da classificação, evidenciando o potencial da seleção espectral.

Já no contexto da classificação com base em matrizes de covariância, a Distintividade entre classes pode ser utilizada como uma métrica para quantificar o quão distintos são os padrões médios de EEG associados a diferentes tarefas de imaginação motora, independentemente de um classificador específico (Lotte; Jeunet, 2018). Essa métrica é baseada na geometria riemanniana e leva em consideração a distância entre as médias das matrizes de covariância de cada classe, bem como a dispersão dos dados em torno dessas médias (Lotte; Jeunet, 2018). Valores mais elevados dessa métrica indicam maior separabilidade entre os estados mentais, sendo úteis para

caracterizar a capacidade do usuário em modular diferentes padrões neurais (Lotte; Jeunet, 2018).

Yamamoto *et al.* (2022) propuseram um método de otimização espectral que utiliza a métrica de distintividade entre classes (classDis) para identificar as bandas mais relevantes no espaço riemanniano das matrizes de covariância. A abordagem consiste na construção de um banco de filtros passa-banda com larguras fixas e frequências centrais variadas, aplicados aos sinais de EEG brutos. Para cada banda filtrada, calcula-se a métrica classDis, e a banda com o maior valor é selecionada. A partir dela, um procedimento iterativo de expansão é realizado com o objetivo de identificar um intervalo espectral com base na variação da distintividade entre classes (Yamamoto *et al.*, 2022). A estratégia possibilitou a análise de bandas de frequência fora do intervalo convencional de 8–30 Hz, o que permitiu identificar regiões espectrais mais discriminativas para determinados usuários que, inicialmente, apresentavam desempenho reduzido com a faixa padrão, obtendo, assim, melhora significativa na acurácia após a seleção personalizada de bandas (Yamamoto *et al.*, 2022).

1.1 Motivação

A classificação de sinais eletroencefalográficos (EEG) em tarefas de imaginação motora representa um dos principais desafios em sistemas de Interface Cérebro-Computador (BCI), devido à variabilidade inter e intra sujeitos, à natureza não estacionária dos sinais cerebrais e à complexidade das dinâmicas neurais envolvidas (Mridha *et al.*, 2021; Perdakis *et al.*, 2014). Métodos tradicionais de seleção espectral frequentemente utilizam faixas de frequência fixas, como o intervalo de 8–30 Hz, o que pode restringir a identificação de padrões relevantes, especialmente em contextos com alta variabilidade individual (Bougrain, 2016; Lotte; Jeunet, 2018; Kwon *et al.*, 2020; Yamamoto *et al.*, 2022). Nesse cenário, torna-se necessário o desenvolvimento de abordagens adaptativas que considerem tanto a natureza espectral dos sinais quanto suas propriedades estruturais no espaço de covariância (Yger; Berar; Lotte, 2017; Yamamoto *et al.*, 2022).

Este trabalho propõe um método de seleção espectral automática voltado à classificação de sinais de EEG em tarefas de imaginação motora. A abordagem fundamenta-se na geometria riemanniana das matrizes de covariância e busca identificar, de forma individualizada, as regiões espectrais que maximizam a separabilidade entre classes. Ao explorar tanto a estrutura espectral do sinal quanto as propriedades não euclidianas do espaço de covariância, o método permite

selecionar bandas de frequência mais informativas sem depender de intervalos fixos pré-definidos.

Integrando a projeção dos sinais de EEG à filtragem espectral por funções de pertinência gaussianas proposta por (Alves; Teixeira; Silva, 2021), o algoritmo proposto encontra uma forma de utilizar a métrica de distintividade entre classes como critério para selecionar, de forma automática, configurações adequadas dos parâmetros das gaussianas, tornando a abordagem mais aderente a cenários práticos de classificação. Além disso, diferentemente da estratégia apresentada por Yamamoto *et al.* (2022), que utiliza um único banco de filtros passa-faixa com larguras fixas, seleção com base no máximo global e faixas adjacentes de frequência, a proposta atual adota dois bancos de filtros construídos com base em uma janela deslizante sobre a frequência central das gaussianas. Cada banco opera com um valor distinto de desvio padrão. No banco com desvio padrão maior, a seleção é feita com base no valor máximo global. No banco com desvio padrão menor, ela é guiada pelos máximos locais ao longo do espectro. E tanto o máximo global quanto os máximos locais são analisados para selecionar as sub-bandas que maximizam a separabilidade entre classes.

Em seguida, a distintividade da configuração resultante do banco com menor desvio padrão é recalculada, combinando as múltiplas gaussianas correspondentes aos máximos locais. Esse valor é então comparado à distintividade obtida com o máximo global do banco com desvio padrão maior, sendo selecionada a configuração que apresentar o maior valor.

A proposta busca unir os benefícios de diferentes abordagens de seleção espectral em um único processo. Por um lado, aproveita a adaptabilidade da filtragem gaussiana, que permite selecionar regiões espectrais sem se restringir a faixas padronizadas como 8–30 Hz; por outro, incorpora uma lógica baseada em bancos de filtros para identificar, de forma automatizada, os parâmetros que maximizam a separabilidade entre classes. Além disso, ao considerar múltiplas gaussianas centradas em diferentes frequências, o método possibilita a combinação de sub-bandas não necessariamente adjacentes, ampliando a capacidade de captar padrões discriminativos distribuídos ao longo do espectro.

1.2 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver e avaliar um método de seleção espectral automática baseado em geometria riemanniana para sinais de EEG adquiridos durante tarefas de imaginação motora.

Objetivos específicos

- Propor um algoritmo que combine a projeção espectral dos sinais de EEG com filtragem gaussiana e a métrica de distintividade entre classes para identificar sub-bandas informativas.
- Implementar uma estratégia de otimização espectral adaptativa utilizando bancos de filtros com diferentes desvios padrões, visando maximizar a separação entre classes no espaço riemanniano.
- Avaliar o desempenho do método proposto utilizando o banco de dados *BCI Competition IV – Dataset 2a* (Brunner *et al.*, 2008), considerando métricas de acurácia e separabilidade entre classes.
- Comparar o desempenho do algoritmo proposto com outras abordagens da literatura para imaginação motora baseadas em EEG.

1.3 Estrutura da Dissertação

Além desta introdução, esta dissertação está organizada da seguinte forma:

- **Seção 2:** apresenta fundamentos dos sinais de EEG e suas características;
- **Seção 3:** introduz os conceitos de geometria Riemanniana e sua aplicação na análise de sinais de EEG;
- **Seção 4:** descreve a metodologia empregada, incluindo os bancos de dados utilizados;
- **Seção 5:** apresenta e discute os resultados obtidos a partir da aplicação do método;
- **Seção 6:** conclui o trabalho e propõe direções para pesquisas futuras.

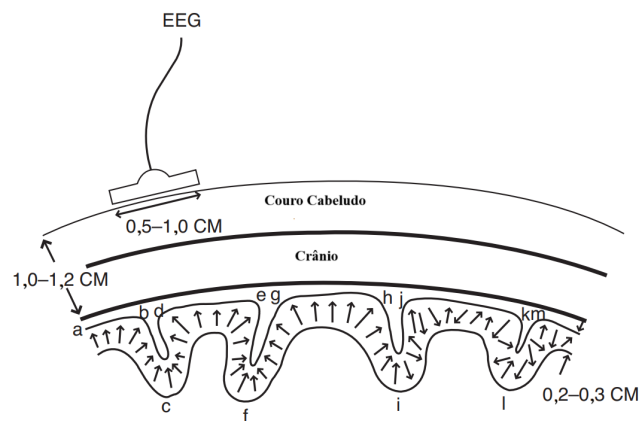
2 SINAIS DE EEG E SUA CARACTERIZAÇÃO

Na atualidade, há uma ampla variedade de técnicas para adquirir sinais do corpo humano. O conjunto de medições eletrobiológicas abrange métodos como eletrocardiografia (ECG, para o coração), eletromiografia (EMG, para contrações musculares), eletroencefalografia (EEG, para o cérebro), magnetoencefalografia (MEG, para o cérebro), eletrogastrografia (EGG, para o estômago) e eletrooculografia (EOG, para o campo dipolar dos olhos). Já as técnicas de imagem baseadas em princípios físicos distintos incluem tomografia computadorizada (CT), ressonância magnética (MRI), ressonância magnética funcional (fMRI), tomografia por emissão de pósitrons (PET) e tomografia computadorizada por emissão de fóton único (SPECT) (Teplan, 2002). Nesta seção, apresentaremos conceitos sobre a origem e a coleta dos sinais de EEG, assim como algumas de suas principais características.

2.1 Introdução ao Eletroencefalograma

O eletroencefalograma (EEG) é um método de registro da atividade elétrica do cérebro, captada no couro cabeludo (Figura 5), permitindo a observação da atividade global do córtex cerebral (Bear; Connors; Paradiso, 2017; Teplan, 2002).

Figura 5 – Fontes dos sinais de EEG.



Fonte: Adaptado de Wolpaw e Wolpaw (2012).

2.1.1 Coleta de Sinais e Sistema de Posicionamento de Eletrodos

Quando os neurônios são ativados, geram fluxos de corrente local. O EEG registra predominantemente as correntes que surgem durante as excitações sinápticas de inúmeros

neurônios. Somente grandes grupos de neurônios ativos conseguem gerar sinais elétricos detectáveis na superfície do crânio (Teplan, 2002). Antes de atingir os eletrodos, a corrente atravessa a pele, o crânio e outros tecidos. Os sinais elétricos, que chegam aos eletrodos do couro cabeludo com intensidade reduzida, são amplificados significativamente antes de serem registrados em papel ou armazenados digitalmente em um dispositivo eletrônico (Teplan, 2002).

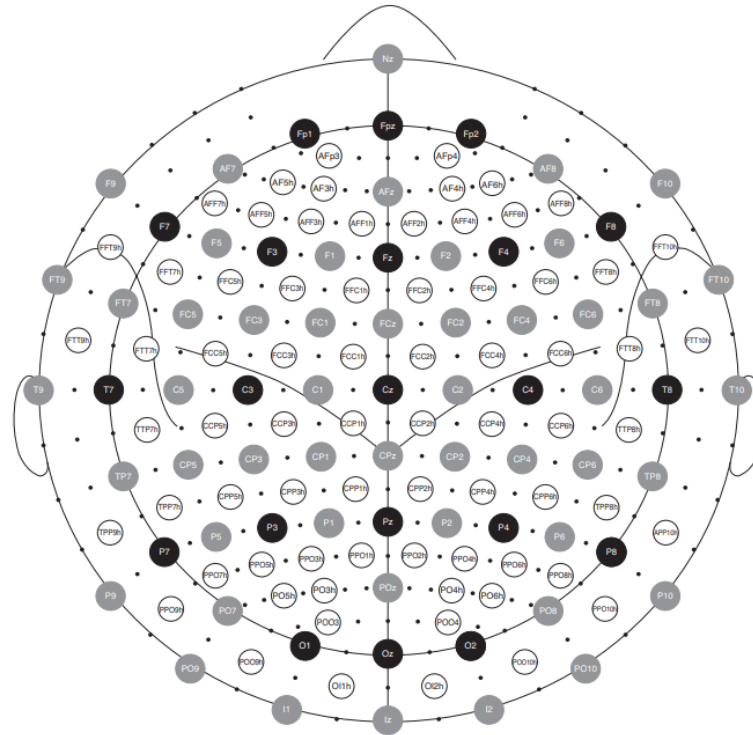
Para padronizar o posicionamento dos eletrodos entre estudos e garantir cobertura uniforme das regiões cerebrais, a Federação Internacional de Eletroencefalografia e Neurofisiologia Clínica estabeleceu, em 1958, o sistema 10–20. O nome "10-20" refere-se às distâncias percentuais entre os pontos de referência na cabeça (ouvidos e nariz), onde os eletrodos são posicionados, que padronizou tanto a disposição física quanto as designações dos eletrodos no couro cabeludo. Na Figura 6, a cabeça é dividida em proporções baseadas em pontos anatômicos proeminentes do crânio, como o násio, os pontos pré-auriculares e o ílion, garantindo uma cobertura uniforme de todas as regiões cerebrais. Cada posição dos eletrodos é identificada com base nas áreas cerebrais adjacentes: F (frontal), C (central), T (temporal), P (parietal) e O (occipital). Os números associados às letras indicam o lado da cabeça, sendo ímpares para o lado esquerdo e pares para o lado direito. A Figura 7 apresenta um exemplo de atividade elétrica registrada nos canais centrais do couro cabeludo durante uma tarefa de imaginação motora, ilustrando o tipo de sinal bruto utilizado em sistemas BCI. Os eletrodos mais comuns são de prata-cloreto de prata (Ag/AgCl), por apresentarem boa estabilidade eletroquímica e baixa impedância de contato, fatores que contribuem para a obtenção de sinais com melhor relação sinal-ruído (Teplan, 2002).

2.2 Ritmos Cerebrais Detectados no EEG

Os encéfalos desenvolveram mecanismos para o controle de diferentes ritmos. Entre os mais evidentes estão os ciclos de sono e vigília, que representam os comportamentos periódicos mais marcantes. Contudo, certos ritmos cerebrais apresentam períodos muito mais longos, como a hibernação em alguns animais, enquanto outros possuem ciclos mais breves, incluindo a respiração, os movimentos durante a caminhada, os estágios repetitivos do sono e os ritmos elétricos do córtex cerebral. Embora algumas dessas oscilações tenham funções claramente identificáveis, outras permanecem pouco compreendidas, e algumas podem estar associadas a condições patológicas (Bear; Connors; Paradiso, 2017).

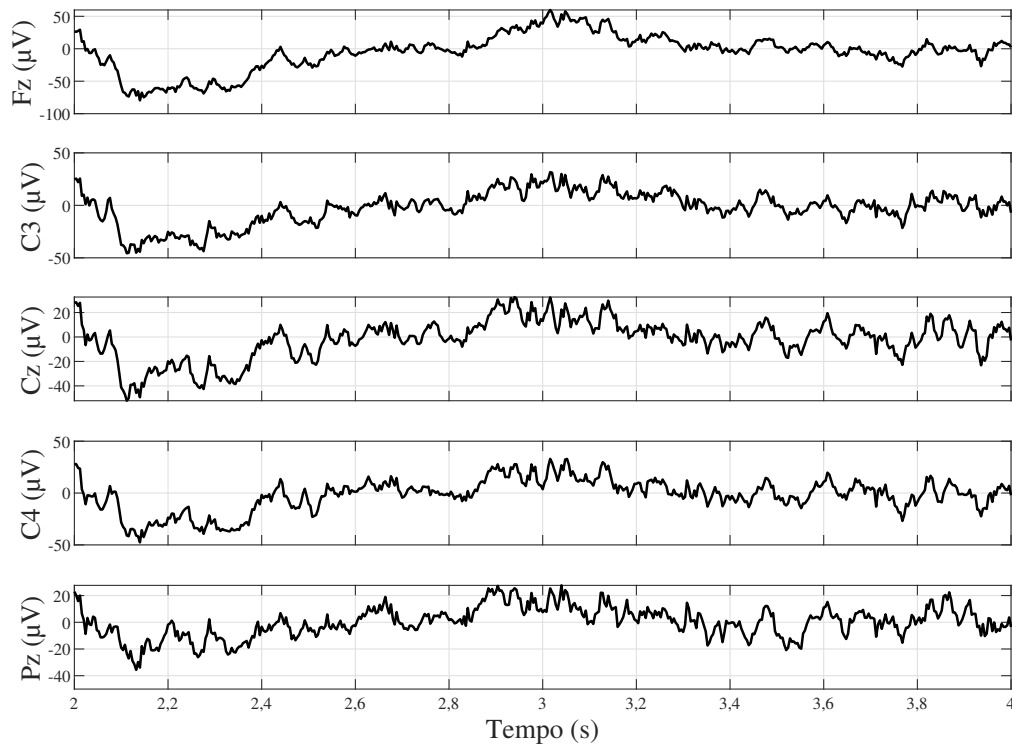
O encéfalo é capaz de gerar ritmos que variam desde ritmos lentos, por volta de 0,05 Hz, até ritmos rápidos, ultrapassando 500 Hz. No contexto do EEG, os principais ritmos cerebrais

Figura 6 – Representação topográfica dos eletrodos no sistema internacional 10-20 expandido.



Fonte: Adaptado de Wolpaw e Wolpaw (2012).

Figura 7 – Sinais EEG extraídos dos canais Fz, C3, Cz, C4 e Pz.



Fonte: Obtidos a partir do conjunto de dados da *BCI Competition IV, Dataset 2a* (Brunner *et al.*, 2008).

são classificados de acordo com suas frequências e designados por letras gregas. Os ritmos delta apresentam frequências inferiores a 4 Hz, têm geralmente alta amplitude e são característicos do sono profundo. Os ritmos teta variam de 4 a 7 Hz e ocorrem tanto em estados de sono quanto de vigília. Os ritmos alfa possuem frequências de 8 a 13 Hz, sendo mais pronunciados sobre o córtex occipital e associados a estados de vigília relaxada. Já os ritmos mu têm frequências similares aos ritmos alfa, mas são predominantes nas áreas motoras e somatossensoriais. Os ritmos beta estão na faixa de 15 a 30 Hz, enquanto os ritmos gama abrangem frequências entre 30 e 90 Hz, indicando um estado cortical ativado ou alerta. Outros ritmos incluem os fusos, com frequências de 8 a 14 Hz e relacionados ao sono, e os ripples, que consistem em curtos surtos de oscilações entre 80 e 200 Hz (Bear; Connors; Paradiso, 2017).

A Tabela 1 apresenta um resumo dessas bandas rítmicas, incluindo variações de faixas reportadas por diferentes autores.

Tabela 1 – Bandas rítmicas do EEG. Faixas típicas segundo Bear, Connors e Paradiso (2017). Valores alternativos para a banda beta são reportados como 13–30 Hz em Engel e Fries (2010), 13–35 Hz em Plate *et al.* (2022), Neuper e Pfurtscheller (2001), 14–30 Hz em Sutter, Kaplan e Schomer (2017), e 15 –30 Hz em Bear, Connors e Paradiso (2017)

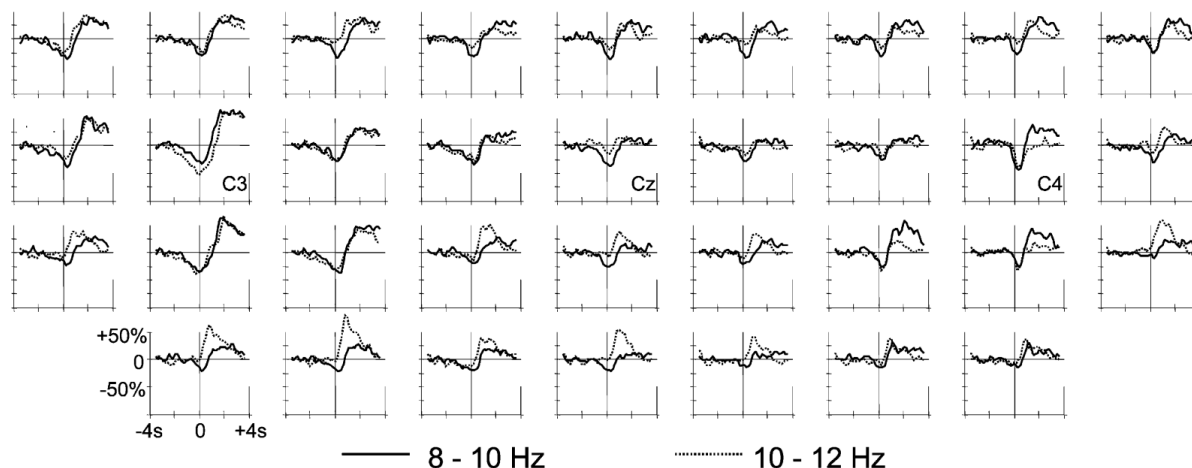
Ritmo	Frequência (Hz)
Delta	0,5 – 4
Teta	4 – 7
Alfa	8 – 13
Mu	8 – 12
Beta	13 – 30 (até 35)
Gama	30 – 90
Fusos (sigma)	8 – 14
Ripples	80 – 200

2.3 Estados de Sincronia

As funções cognitivas e motoras dependem da ação coordenada de populações de neurônios organizadas em redes. A dinâmica dessas redes, que pode exibir diferentes estados de sincronia em resposta a eventos internos ou externos, manifesta-se no EEG, ao menos, em dois padrões rítmicos: (i) atenuação de amplitude ou redução de potência de componentes específicos de frequência (ERD) e (ii) aumento de amplitude ou elevação de potência desses componentes (ERS) (Neuper; Pfurtscheller, 2001) .

2.3.1 Exemplos de ERD e ERS

Figura 8 – Mapas topográficos com curvas médias de ERD/ERS — Cada gráfico mostra as curvas médias obtidas para 10 participantes durante o movimento voluntário da mão direita, processadas em duas subfaixas da banda mu: linha sólida (8–10 Hz) e linha pontilhada (10–12 Hz). Os mapas estão organizados por posição de eletrodo, representando a distribuição espacial e temporal do ERD/ERS.



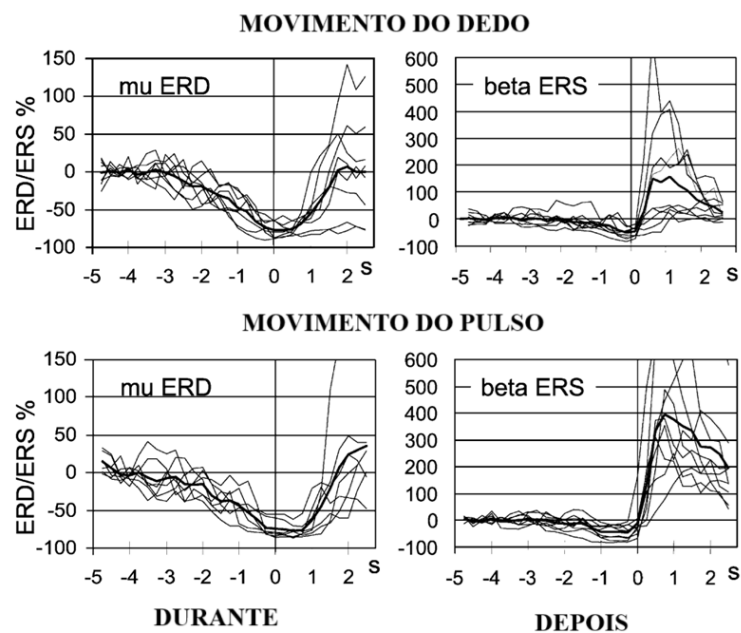
Fonte: Adaptado de Pfurtscheller, Neuper e Krausz (2000).

A diminuição de potência (ERD) cresce à medida que a tarefa exige mais atenção. Em ações motoras, observa-se que, antes do movimento, a potência diminui primeiro no hemisfério oposto ao membro que vai se mover e, pouco antes do início, também no mesmo lado do movimento (Neuper; Pfurtscheller, 2001). Por exemplo, a Figura 8 ilustra padrões distintos de reatividade para 8–10 Hz e 10–12 Hz em um experimento de movimento voluntário do dedo indicador direito, caracterizados como ritmos mu (Neuper; Pfurtscheller, 2001).

Há evidências de que o ERS beta no período subsequente ao movimento é influenciado por diversas variáveis, como duração e velocidade do movimento, lado executado, dominância da mão e parte do corpo envolvida (dedo, mão, membro superior) (Neuper; Pfurtscheller, 2001). Por exemplo, na Figura 9, observa-se que o movimento de punho, por envolver maior massa muscular do que o movimento de um único dedo, está associado a uma sincronização em beta mais intensa. Isso sugere uma relação entre o ERS beta pós-movimento e a massa ou força muscular mobilizada. Em contraste, o ERD pré-movimento parece ser independente desses fatores (Neuper; Pfurtscheller, 2001). Ao analisar ERD e ERS na banda beta, é essencial especificar a faixa de frequência para cada sujeito (Neuper; Pfurtscheller, 2001).

Não só a preparação motora, mas também a imaginação de movimento geram padrões reprodutíveis de EEG nas áreas sensoriais e motoras primárias, em linha com a ideia de que

Figura 9 – Comparação do ERD/ERS entre movimentos do dedo e do punho — Linhas finas representam os valores individuais por sujeito e a linha espessa indica a média geral. A parte superior mostra os resultados para o movimento do dedo indicador e a parte inferior para o movimento do punho. Em cada caso, o painel esquerdo apresenta o ERD na banda mu sincronizado ao início do movimento, e o painel direito mostra o ERS na banda beta sincronizado ao término do movimento.



Fonte: Adaptado de Pfurtscheller, Pichler-Zalaudek e Neuper (1999).

imaginar o movimento recruta as mesmas estruturas envolvidas no planejamento e na preparação do ato motor (Neuper; Pfurtscheller, 2001). Por exemplo, imaginar movimentos de mão direita ou esquerda produz dessincronização dos ritmos mu e beta sobre a área da mão no hemisfério contralateral, semelhante ao planejamento e à execução de movimentos reais (Neuper; Pfurtscheller, 2001).

3 GEOMETRIA RIEMANNIANA PARA ANÁLISE DE COVARIÂNCIAS EM EEG

Nos últimos anos, surgiram diversas técnicas que exploram a geometria riemanniana do espaço das matrizes simétricas positivas definidas (SPD). Cada ensaio de EEG é caracterizado pela sua matriz de covariância, e distâncias geodésicas são então empregadas para comparar padrões de atividade neuronal. Nesta seção, serão apresentados os princípios fundamentais de algumas dessas técnicas aplicadas à BCI, que servem de base para a formulação do algoritmo proposto.

3.1 Formulação da Matriz de Covariância e Interpretação Geométrica na Análise de EEG

Seja $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{M \times T}$ o conjunto de dados de EEG pré-processado por filtragem passa-faixa, com o objetivo de selecionar as bandas de frequência relevantes para imaginação motora (Barachant *et al.*, 2012). Em que M representa o número de canais e T o número de amostras temporais. A matriz de covariância $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{M \times M}$ é definida como:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{T-1} \mathbf{X} \mathbf{X}^T. \quad (3.1)$$

A multiplicação $\mathbf{X} \mathbf{X}^T$ resulta em uma matriz simétrica de dimensão $M \times M$, conforme a equação a seguir:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,T} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{M,1} & x_{M,2} & \cdots & x_{M,T} \end{bmatrix}}_{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{M \times T}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{2,1} & \cdots & x_{M,1} \\ x_{1,2} & x_{2,2} & \cdots & x_{M,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1,T} & x_{2,T} & \cdots & x_{M,T} \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}^T \in \mathbb{R}^{T \times M}} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1M} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{M1} & c_{M2} & \cdots & c_{MM} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C} = \frac{1}{T-1} \mathbf{X} \mathbf{X}^T \in \mathbb{R}^{M \times M}} \quad (3.2)$$

A matriz $\mathbf{C}$ é simétrica e definida positiva (SPD), agregando informações estatísticas fundamentais sobre os sinais de EEG. A simetria decorre do fato de que $(\mathbf{X} \mathbf{X}^T)^T = \mathbf{X} \mathbf{X}^T$, enquanto a propriedade de definição positiva é garantida desde que $\mathbf{X}$ possua posto completo em suas linhas, o que usualmente ocorre quando $T > M$ e os dados apresentam variabilidade suficiente (Tibermachine *et al.*, 2024).

Matrizes simétricas definidas positivas (SPD) apresentam propriedades matemáticas relevantes para a modelagem de sinais de EEG. Formalmente, uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é definida positiva se, para todo vetor não nulo $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^n$, a seguinte condição for satisfeita:

$$\mathbf{V}^T \mathbf{A} \mathbf{V} > 0. \quad (3.3)$$

Aplicando essa definição à matriz de covariância, obtém-se:

$$\mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V} = \mathbf{V}^T \left(\frac{1}{T-1} \mathbf{X} \mathbf{X}^T \right) \mathbf{V} = \frac{1}{T-1} \|\mathbf{X}^T \mathbf{V}\|^2 > 0, \quad (3.4)$$

em que $\|\mathbf{X}^T \mathbf{V}\|$ denota a norma euclidiana (L_2) de $\mathbf{X}^T \mathbf{V}$, que é sempre positiva, exceto quando $\mathbf{V}$ é ortogonal a todas as linhas de $\mathbf{X}$. Dessa forma, a matriz $\mathbf{C}$ preserva as propriedades essenciais das matrizes SPD, permitindo a definição de um espaço métrico apropriado (Tibermacine *et al.*, 2024).

A matriz de covariância $\mathbf{C}$, como elemento do conjunto das matrizes simétricas positivas definidas (SPD), pode ser analisada sob a perspectiva da geometria Riemanniana. Os elementos diagonais de $\mathbf{C}$ representam a variância do sinal de EEG em cada canal, refletindo a distribuição de potência ao longo do tempo. Já os elementos fora da diagonal expressam a covariância entre diferentes canais, capturando a interdependência dos sinais (Tibermacine *et al.*, 2024). A estrutura geral da matriz $\mathbf{C}$ é dada por:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1M} \\ c_{21} & \sigma_2^2 & c_{23} & \cdots & c_{2M} \\ c_{31} & c_{32} & \sigma_3^2 & \cdots & c_{3M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{M1} & c_{M2} & c_{M3} & \cdots & \sigma_M^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{M \times M}. \quad (3.5)$$

Métricas geodésicas são funções de distância definidas na variedade das matrizes SPD e podem ser utilizadas para medir a similaridade entre dois estados cerebrais distintos, representados por suas matrizes de covariância. Essas métricas respeitam a curvatura do espaço Riemanniano e permitem calcular a menor distância geodésica entre dois pontos. Essa abordagem favorece a classificação e a segmentação de padrões em aplicações de BCI, fornecendo um método para a análise de dados neurofisiológicos (Tibermacine *et al.*, 2024).

Na Subseção 3.1.1, detalharemos a métrica AIRM e apresentaremos o principal motivo de sua utilização neste e em outros trabalhos. Outras métricas para conferência estão listadas no Anexo B.

3.1.1 Distância entre matrizes de covariância: AIRM

A *Affine-Invariant Riemannian Metric* (AIRM) define a distância entre duas matrizes de covariância simétricas definidas-positivas $\mathbf{C}_1$ e $\mathbf{C}_2$ por meio da norma de Frobenius do logaritmo da matriz $\mathbf{C}_1^{-1/2}\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1^{-1/2}$ (Congedo; Barachant; Bhatia, 2017; Yger; Berar; Lotte, 2017):

$$\delta_{\text{AIRM}}(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2) = \|\log(\mathbf{C}_1^{-1/2}\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1^{-1/2})\|_F. \quad (3.6)$$

A principal característica da AIRM é sua invariância por congruência, dada pela transformação:

$$\Gamma(\mathbf{C}) = \mathbf{X}^T \mathbf{C} \mathbf{X}, \quad (3.7)$$

com $\mathbf{X}$ sendo uma matriz invertível de ordem n . Essa propriedade garante que

$$\delta_{\text{AIRM}}(\Gamma(\mathbf{C}_1), \Gamma(\mathbf{C}_2)) = \delta_{\text{AIRM}}(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2) \quad (3.8)$$

isto é, a distância entre duas matrizes permanece inalterada mesmo após a transformação Γ de ambas (Bhatia, 2009).

Além de possibilitar a construção de diversos métodos, essa invariância permite a equivalência no espaço de sensores, garantindo que qualquer transformação linear invertível (por exemplo, filtros espaciais, normalizações ou mudanças de referência) não altere as distâncias fundamentais entre as matrizes de covariância (Congedo; Barachant; Bhatia, 2017; Yger; Berar; Lotte, 2017).

3.2 Classificador de Mínima Distância à Média Riemanniana (MDRM)

Proposto por Barachant *et al.* (2012), o Classificador de Mínima Distância à Média Riemanniana (MDRM) foi desenvolvido utilizando conceitos de geometria riemanniana para a classificação de tarefas de imaginação motora, fundamentando-se na representação de cada ensaio de EEG por sua matriz de covariância, a partir das quais se calcula a distância geodésica até as médias das classes estimadas na fase de calibração. O ensaio recebe o rótulo correspondente àquela cuja média apresenta a menor dessas distâncias.

3.2.1 Média Riemanniana

Diferente da média aritmética euclidiana, que trata o espaço como vetorial plano, a média riemanniana incorpora a curvatura da variedade SPD, fornecendo uma representação da tendência central nessa geometria (Pennec; Fillard; Ayache, 2006).

Sejam $\{\mathbf{C}_i\}_{i=1}^N$ as matrizes de covariância associadas a diferentes ensaios de EEG. A média Riemanniana $\bar{\mathbf{C}}$ é definida como a solução do seguinte problema de minimização (Barachant *et al.*, 2012):

$$\bar{\mathbf{C}} = \arg \min_{\mathbf{C}} \sum_{i=1}^N \delta_R^2(\mathbf{C}_i, \mathbf{C}). \quad (3.9)$$

em que δ_R representa a *Affine-Invariant Riemannian Metric* (AIRM)

A média $\bar{\mathbf{C}}$ não possui uma forma fechada, é usualmente estimada por meio de um algoritmo de otimização (Barachant *et al.*, 2012; Yger; Berar; Lotte, 2017). O algoritmo utilizado neste trabalho para esse cálculo está descrito no Anexo A

3.3 Projeção do Sinal no Domínio da Frequência

Como forma alternativa às técnicas convencionais de filtragem espectral e redução de dimensionalidade, Silva (2017) propõe o uso da projeção dos sinais de EEG em uma base ortonormal composta por funções senoidais.

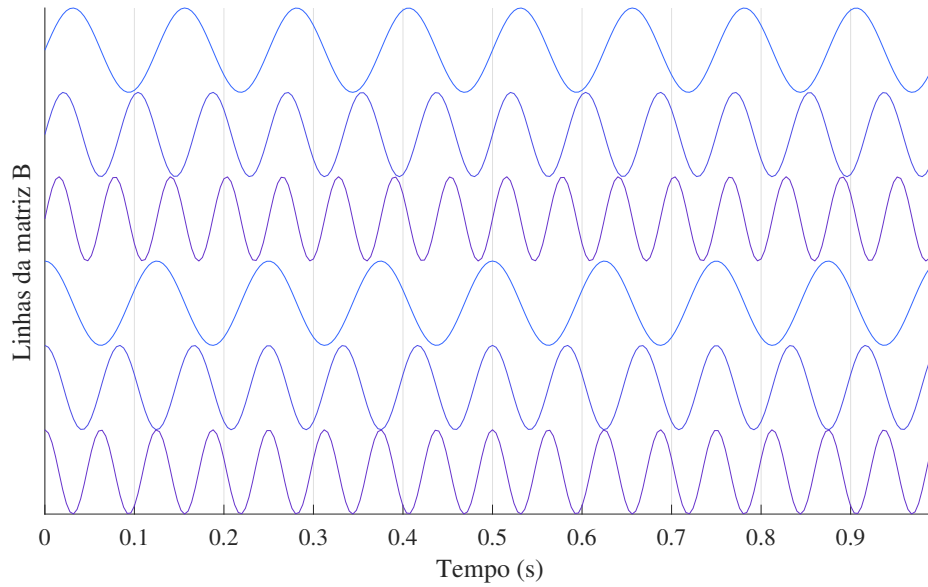
Seja $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ a matriz representando um segmento de EEG, onde p é o número de canais e q , o número de amostras. Define-se uma base $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2m \times q}$ contendo sinais senoidais e cossenoidais de m frequências discretizadas e igualmente espaçadas, de modo que:

$$b_i(n) = \sin\left(2\pi \frac{f_i}{f_s} n\right), \quad b_{m+i}(n) = \cos\left(2\pi \frac{f_i}{f_s} n\right), \quad i = 1, \dots, m \quad (3.10)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sin\left(2\pi\frac{f_1 n}{f_s}\right) \\ \vdots \\ \sin\left(2\pi\frac{f_m n}{f_s}\right) \\ \cos\left(2\pi\frac{f_1 n}{f_s}\right) \\ \vdots \\ \cos\left(2\pi\frac{f_m n}{f_s}\right) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m \times q}, \quad (3.11)$$

em que $n = 1, \dots, q$ representa o índice de tempo discreto, e f_s é a frequência de amostragem. A estrutura das linhas da matriz $\mathbf{B}$ pode ser visualizada de forma ilustrativa na Figura 10.

Figura 10 – Representação estrutural de algumas linhas da matriz $\mathbf{B}$, composta por funções senoidais e cossenoidais, associadas a diferentes frequências. Cada linha representa um vetor harmônico discretizado ao longo do tempo, utilizado para projetar o sinal de EEG em uma base espectral.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A projeção do sinal na base $\Gamma \in \mathbb{R}^{p \times 2m}$ é realizada resolvendo o seguinte problema de minimização:

$$\Gamma^* = \arg \min_{\Gamma} \|\mathbf{Z} - \Gamma \mathbf{B}\|_F^2. \quad (3.12)$$

cuja solução é dada por:

$$\Gamma^* = \mathbf{Z}\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1}. \quad (3.13)$$

A matriz Γ representa os coeficientes compactos, contendo a informação espectral relevante do sinal de EEG original (Silva, 2017).

Considere $\hat{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ a aproximação resultante do sinal projetado de $\mathbf{Z}$, em que:

$$\hat{\mathbf{X}} = \Gamma\mathbf{B}. \quad (3.14)$$

Para permitir maior flexibilidade na etapa de extração de características, aplica-se uma transformação linear adicional por meio de uma matriz $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, resultando em um novo sinal $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ (Silva, 2017):

$$\mathbf{Y} = \hat{\mathbf{X}}\mathbf{G} = \Gamma\mathbf{B}\mathbf{G}, \quad (3.15)$$

A covariância resultante do sinal $\mathbf{Y}$, considerando $q \gg p$, é:

$$\text{Cov}\{\mathbf{Y}\} = \frac{1}{q} \mathbf{Y}\mathbf{Y}^T, \quad (3.16)$$

e pode ser expressa em função de $\mathbf{G}$ como:

$$\text{Cov}\{\mathbf{Y}\} = \frac{1}{q} \Gamma\mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{G}^T\mathbf{B}^T\Gamma^T. \quad (3.17)$$

Com o objetivo de parametrizar $\mathbf{G}$ e reduzir o custo computacional, podemos realizar uma mudança de variável (Silva, 2017):

$$\mathbf{H}_0 = \frac{1}{q} \mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{G}^T\mathbf{B}^T, \quad (3.18)$$

e, assim, expressar a matriz de covariância como:

$$\text{Cov}\{\mathbf{Y}\} = \Gamma\mathbf{H}_0\Gamma^T. \quad (3.19)$$

Como destacado por Alves, Teixeira e Silva (2021), a matriz $\mathbf{H}_0 \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$ atua como um operador de ponderação, modulando a contribuição relativa das componentes espectrais e permitindo alterar seletivamente a ênfase sobre diferentes faixas de frequência.

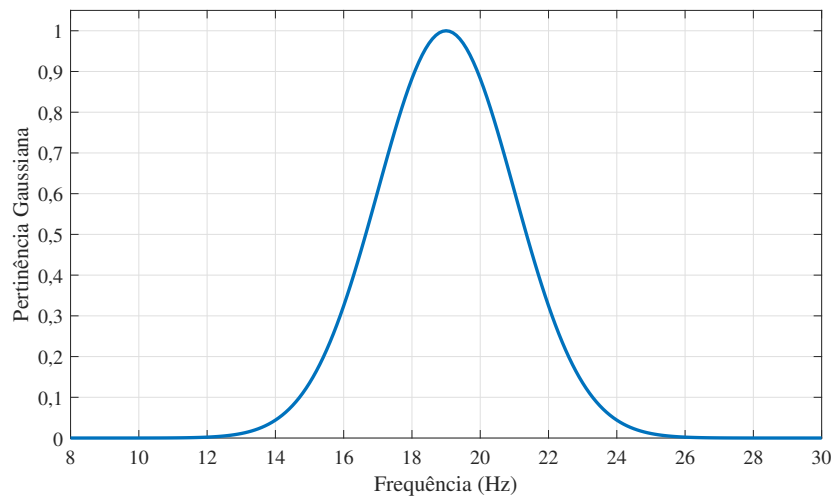
3.4 Filtragem Espectral com Função Gaussiana

Com o objetivo de realçar seletivamente regiões espectrais relevantes dos sinais de EEG, Alves, Teixeira e Silva (2021) propuseram uma abordagem baseada na parametrização da matriz $\mathbf{H}_0$ por meio de uma função de pertinência gaussiana, aplicada diretamente sobre a representação no domínio da frequência. Nessa proposta, os elementos da matriz diagonal $\mathbf{H}_0$ são definidos segundo uma curva gaussiana centrada em uma determinada frequência c , com dispersão controlada por um desvio padrão σ , tal que:

$$\mathbf{H}_0(i, i) = \mathbf{H}_0(m + i, m + i) = e^{-\frac{(f(i) - c)^2}{2\sigma^2}}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.20)$$

A ideia central consiste em atribuir pesos maiores às componentes espectrais próximas à frequência de interesse, atenuando gradualmente as demais, o que equivale à aplicação de um filtro suave e contínuo sobre a base senoidal, como ilustrado na Figura 11, permitindo a ênfase em sub-bandas específicas do sinal.

Figura 11 – Ilustração da função de pertinência gaussiana utilizada para compor a diagonal da matriz $\mathbf{H}_0$, responsável por ponderar seletivamente as componentes espectrais extraídas da base senoidal.



Fonte: Elaborado pelo autor.

No estudo conduzido por Alves, Teixeira e Silva (2021), os autores realizaram uma

varredura exaustiva dos parâmetros da função, testando diferentes valores de frequência central e desvio padrão, com o intuito de analisar o impacto dessa ponderação na taxa de acurácia da classificação. Os resultados experimentais indicaram que a parametrização espectral baseada na função gaussiana possui potencial para melhorar significativamente o desempenho do sistema BCI, evidenciando sua eficácia na seleção adaptativa de regiões espectrais discriminativas.

3.5 Métricas para BCI

A métrica mais comum para avaliar o desempenho de Interfaces Cérebro-Computador (BCIs) baseadas em imagem mental é a acurácia de classificação (AC), calculada como a porcentagem de ensaios corretamente classificados em relação ao total realizado (Lotte; Jeunet, 2018). A AC é obtida a partir da matriz de confusão, que expressa a relação entre classes reais e estimadas, conforme ilustrado na tabela abaixo para o caso binário:

Tabela 2 – Matriz de confusão para o caso binário

Classe Real	Classe 1 estimada	Classe 2 estimada
Classe 1	a	b
Classe 2	c	d

Dessa forma, a AC pode ser expressa matematicamente por:

$$AC = \frac{a + d}{a + b + c + d} \times 100\% \quad (3.21)$$

Um valor mínimo de 70% de acurácia é amplamente reconhecido na literatura como um limiar típico de controle voluntário em sistemas BCI, sendo utilizado para distinguir usuários com desempenho funcional daqueles que não conseguem atingir um controle suficiente. Esse valor é reportado como referência para avaliar a proficiência de usuários em tarefas de imaginação motora e no uso geral de interfaces cérebro-computador (Angulo-sherman *et al.*, 2025; Halder *et al.*, 2013; Williamson *et al.*, 2009; Kübler *et al.*, 2001). No entanto, esse limiar pode variar conforme a aplicação, e em alguns contextos, como em interfaces de comunicação com seleção de letras, valores mínimos próximos de 80% são requeridos para garantir usabilidade e confiabilidade suficientes (Perdikis *et al.*, 2014).

Além da AC, outras métricas têm sido propostas para medir diferentes aspectos do desempenho em BCIs, como o coeficiente Kappa, que ajusta a acurácia considerando a chance aleatória de acerto, a Taxa de Verdadeiros Positivos, que representa a proporção de ensaios

corretamente classificados como pertencentes à classe positiva em relação ao total de ensaios realmente positivos, e a Taxa de Transferência de Informação, que considera tanto a precisão quanto o tempo necessário para realizar seleções. Outras abordagens específicas também podem ser aplicadas dependendo do contexto da aplicação (Lotte; Jeunet, 2018).

Contudo, apesar de amplamente utilizadas, tais métricas apresentam limitações importantes. Elas são geralmente discretas, não captando variações graduais no desempenho; dependem fortemente do classificador e dos dados usados para treinamento, podendo não refletir a real capacidade de controle do usuário, ignoram os padrões de EEG durante o repouso, e avaliam predominantemente o desempenho do sistema de decodificação, não a capacidade do usuário em gerar padrões cerebrais estáveis e distintivos (Lotte; Jeunet, 2018).

3.5.1 Distintividade entre classes

Com o objetivo de quantificar o quão distintos e consistentes são os padrões de atividade cerebral gerados por diferentes tarefas de imagem mental, Lotte e Jeunet (2018) propõem o uso da geometria Riemanniana para calcular métricas baseadas em distâncias entre matrizes de covariância.

Nessa abordagem, σ_{C_A} a dispersão de um padrão para uma classe (A) quantificada como o desvio médio absoluto em relação à média Riemanniana $\bar{C}_A$ da classe, sendo uma medida da variabilidade interna dos padrões, é definida como:

$$\sigma_{C_A} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_R(C_i, \bar{C}_A). \quad (3.22)$$

A distintividade entre duas classes A e B , denominada *classDis*, é formulada como a razão entre a distância média das classes e a dispersão interna média de ambas:

$$\text{classDis}(A, B) = \frac{\delta_R(\bar{C}_A, \bar{C}_B)}{\frac{1}{2}(\sigma_{C_A} + \sigma_{C_B})}. \quad (3.23)$$

Essa expressão pode ser vista como uma generalização do critério de Fisher para o caso de matrizes de covariância, em que padrões mais afastados entre si e com menor dispersão interna são considerados mais distintivos (Lotte; Jeunet, 2018).

Vale destacar que essas métricas são independentes de classificadores, sendo, portanto, especialmente úteis para avaliar as habilidades do usuário em gerar padrões neurais estáveis

e distintivos, independentemente do desempenho do sistema de decodificação (Lotte; Jeunet, 2018).

3.6 Seleção de banda de frequência com a métrica *classDis*

Com o objetivo de desenvolver um método de seleção de bandas de frequência que aproveitasse as propriedades das matrizes de covariância no espaço riemanniano, e utilizando a métrica de distintividade *classDis*, Yamamoto *et al.* (2022) propuseram um procedimento de otimização espectral voltado à identificação das bandas mais relevantes. Para isso, inicia-se com a aplicação de um banco de filtros passa-banda sobre os sinais de EEG brutos de treinamento. Esse banco é composto por múltiplas sub-bandas com larguras e sobreposições fixas, como, por exemplo, 14 sub-bandas com 4 Hz de largura e 2 Hz de sobreposição, cobrindo a faixa de 5 a 35 Hz, conforme ilustrado na Figura 12. Cada um desses filtros é aplicado aos sinais de EEG e, para cada sub-banda filtrada, calcula-se o valor da métrica *classDis*. A sub-banda que apresentar o maior valor de distintividade é utilizada como ponto inicial para um processo iterativo de expansão espectral. Esse procedimento adiciona gradualmente bandas vizinhas, desde que apresentem valores de *classDis* superiores a um limiar definido empiricamente com base na diferença entre os valores mínimo e máximo da métrica, conforme descrito no Algoritmo 3.6. Assim, o método busca identificar uma faixa contínua de frequências com alta separabilidade entre classes, adaptada ao perfil espectral de cada usuário, sem a necessidade de processos exaustivos de otimização (Yamamoto *et al.*, 2022).

Algoritmo – Seleção de Banda de Frequência com a métrica *classDis*

Adaptado de Yamamoto et al. (2022).

Entradas:

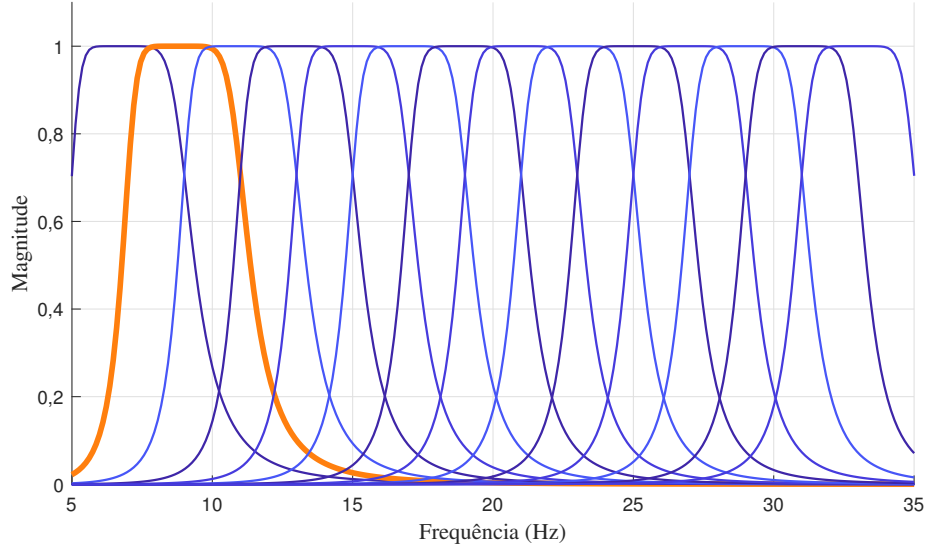
- $\mathbf{X}_{\text{train}} = \{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_N\}$: sinais de EEG de treinamento;
- $\{f^{(s)} = [f_0^{(s)}, f_1^{(s)}]\}_{s=1}^S$: conjunto de S sub-bandas de frequência.

Saída:

- Banda de frequência ótima $[f_0, f_1]$ específica ao sujeito.

Procedimento:

Figura 12 – Resposta em frequência dos filtros Butterworth de 4ª ordem utilizados para compor o banco de filtros, conforme descrito por Yamamoto *et al.* (2022).



Fonte: Elaborado pelo autor.

1. Para cada sub-banda $f^{(s)}$, aplique um filtro passa-banda aos dados X_{train} .
2. Estime as matrizes de covariância $\mathbf{C}^{(s)} = \{\mathbf{C}_1^{(s)}, \dots, \mathbf{C}_N^{(s)}\}$ para cada sub-banda.
3. Calcule o valor de $\text{classDis}(f^{(s)})$ para cada sub-banda.
4. Identifique a sub-banda $f^{\max}$ com o maior valor de classDis .
5. Inicialize:

$$f_0^{\text{start}} \leftarrow f_0^{\max}, \quad f_1^{\text{end}} \leftarrow f_1^{\max}$$

6. Calcule o limiar:

$$\theta \leftarrow (\max(\text{classDis}) - \min(\text{classDis})) \times 0,4$$

7. Expanda para sub-bandas anteriores enquanto $\text{classDis} \geq \theta$:

$$\text{enquanto } \text{classDis}(f_{\text{start}} - 1) \geq \theta, \quad f_{\text{start}} \leftarrow f_{\text{start}} - 1$$

8. Expanda para sub-bandas posteriores enquanto $\text{classDis} \geq \theta$:

$$\text{enquanto } \text{classDis}(f_{\text{end}} + 1) \geq \theta, \quad f_{\text{end}} \leftarrow f_{\text{end}} + 1$$

9. Retorne: $[f_0, f_1] = [f_0^{\text{start}}, f_1^{\text{end}}]$

3.7 Seleção de banda de frequência pela correlação entre a potência espectral

Com o objetivo de identificar a banda de frequência mais discriminativa para tarefas de imaginação motora em sinais de EEG, Blankertz *et al.* (2008) propuseram um método baseado na análise da correlação entre a potência espectral e os rótulos das classes. Inicialmente, o sinal de EEG é filtrado em diferentes frequências dentro da faixa de 5 a 35 Hz, e, para cada canal selecionado, calcula-se a potência em banda para cada ensaio. Em seguida, para cada frequência, estima-se o coeficiente de correlação de Pearson entre a potência dos sinais e os rótulos das classes, produzindo um escore discriminativo por frequência. A frequência com maior escore agregado entre os canais é considerada o centro da banda ótima, que então é expandida iterativamente em ambas as direções, incluindo frequências adjacentes cuja discriminatividade permaneça acima de um limiar proporcional ao pico observado, conforme descrito no Algoritmo 3.7. O resultado final é uma banda de frequência personalizada por sujeito, que maximiza a separação entre as classes com base nas variações espectrais dos sinais (Blankertz *et al.*, 2008).

Algoritmo – Seleção de Banda de Frequência da correlação entre a potência

Adaptado de Blankertz et al. (2008)

Entradas:

- $\mathbf{X}(c, i)$: sinal do ensaio i no canal c ;
- $y_i \in \{-1, +1\}$: rótulo do ensaio i ;
- $f = \{f_1, \dots, f_K\}$: conjunto de frequências (de 5 a 35 Hz).

Saída:

- Banda de frequência ótima $[f_0, f_1]$.

Procedimento:

1. Para cada frequência f e canal c , calcule:

$$dB_c(f, i) \leftarrow \log(\text{potência em banda de } \mathbf{X}(c, i) \text{ em } f)$$

2. Para cada canal c , calcule:

$$\text{score}_c(f) \leftarrow \text{corrcoef}(dB_c(f, i), y_i)_i$$

3. Determine a frequência de correlação máxima para cada canal:

$$f_{\max} \leftarrow \arg \max_f \sum_{c \in C} \text{score}_c(f)$$

4. Para cada canal c , defina a versão ajustada da correlação:

$$\text{score}_c^*(f) \leftarrow \begin{cases} \text{score}_c(f), & \text{se } \text{score}_c(f_{\max}) > 0 \\ -\text{score}_c(f), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

5. Agregue a pontuação total por frequência:

$$\text{fscore}(f) \leftarrow \sum_{c \in C} \text{score}_c^*(f)$$

6. Localize o pico da função de pontuação:

$$f_{\max}^* \leftarrow \arg \max_f \text{fscore}(f)$$

7. Inicialize:

$$f_0 \leftarrow f_{\max}^*, \quad f_1 \leftarrow f_{\max}^*$$

8. Enquanto $\text{fscore}(f_0 - 1) \geq 0,05 \times \text{fscore}(f_{\max}^*)$, faça:

$$f_0 \leftarrow f_0 - 1$$

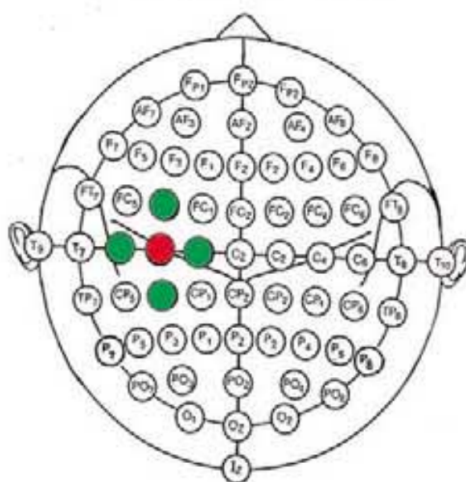
9. Enquanto $\text{fscore}(f_1 + 1) \geq 0,05 \times \text{fscore}(f_{\max}^*)$, faça:

$$f_1 \leftarrow f_1 + 1$$

10. Retorne: banda de frequência $[f_0, f_1]$.

Para a seleção de bandas de frequência baseada na potência por canal, é usual aplicar previamente um filtro laplaciano (Blankertz *et al.*, 2008). Trata-se de uma derivação espacial de segunda ordem que combina o potencial do eletrodo central com o de seus vizinhos, aproximando o laplaciano da distribuição de potencial e realçando atividade local (atenuando componentes difusos) (Wolpaw *et al.*, 2002). A vizinhança pode ser definida conforme ilustrado na Figura 13 (Wolpaw *et al.*, 2002).

Figura 13 – Seleção de canais para aplicação de um filtro laplaciano, em vermelho o canal selecionado e em verde os vizinhos.



Fonte: Wolpaw *et al.* (2002).

4 METODOLOGIA

Nesta seção, apresentaremos o método proposto e detalharemos a metodologia de ensaio, aquisição e pré-processamento utilizados para gerar a base de dados com a qual avaliaremos e compararemos o desempenho deste método com outros existentes na literatura.

4.1 Método Proposto

Nossa proposta é de um método para identificar, de maneira automática e personalizada para cada sujeito, as regiões espectrais que maximizam a separabilidade entre classes em tarefas de imaginação motora. Métodos alternativos foram sugeridos para personalizar a seleção espectral por sujeito, baseando-se na seleção e expansão por meio de limiares proporcionais a valores máximos de suas métricas. Essas abordagens possibilitam identificar a banda mais relevante do sinal mesmo fora da faixa padrão (de 8 a 30 Hz) definindo as frequências de corte ao redor desses máximos encontrados. Entretanto, um limiar excessivamente baixo pode comprometer a eficácia da filtragem ao incluir bandas não relevantes, enquanto um limiar muito alto pode selecionar apenas parte da banda relevante. Os métodos de Yamamoto *et al.* (2022) e Blankertz *et al.* (2008) são exemplos disso.

A abordagem proposta neste trabalho combina estratégias com o intuito de se adequar a diferentes padrões espectrais. Essa combinação inclui a busca por um máximo global associada à análise de múltiplos máximos locais, permitindo capturar padrões distribuídos ao longo do espectro. Com isso, objetiva-se minimizar simultaneamente a perda de conteúdo espectral relevante e a inclusão indesejada de conteúdo não relevante.

A seguir, apresentaremos os passos da metodologia proposta, com destaque para os modelos, equações e, principalmente, as diferenças e modificações em relação às abordagens existentes na literatura.

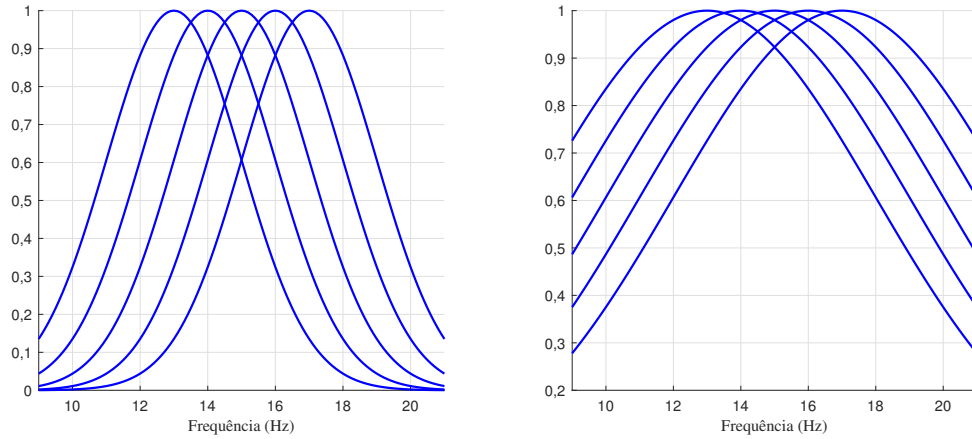
4.1.1 Passo 1: *Projeção Espectral*

Inicialmente, cada ensaio de EEG, representado pela matriz $\mathbf{Z}_n$, é projetado em uma base ortonormal de senos e cossenos para obter sua representação compacta no domínio da frequência, Γ_n , como na Equação 3.13.

4.1.2 Passo 2: Cálculo dos Espectros de Distintividade

O algoritmo utiliza dois bancos de filtros, cada um associado a um desvio padrão, um menor (σ_{menor}) e um maior (σ_{maior}), como ilustrado na Figura 14. Para cada frequência central f_c em um vetor de frequências pré-definido, constrói-se uma matriz de ponderação diagonal $\mathbf{H}_0$, cujos elementos são definidos por uma função gaussiana, como na Equação 3.20. As matrizes de covariância ponderadas são calculadas para cada ensaio, e a métrica *classDis* é então computada para cada configuração de filtro. Esse processo é repetido para todas as frequências centrais, gerando dois espectros de distintividade: um para o filtro de desvio padrão menor ($\text{classDis}_{\text{menor}}$) e outro para o de desvio padrão maior ($\text{classDis}_{\text{maior}}$).

Figura 14 – Ilustração dos bancos de filtros, cada um associado a um desvio padrão.



Fonte: Elaborado pelo autor.

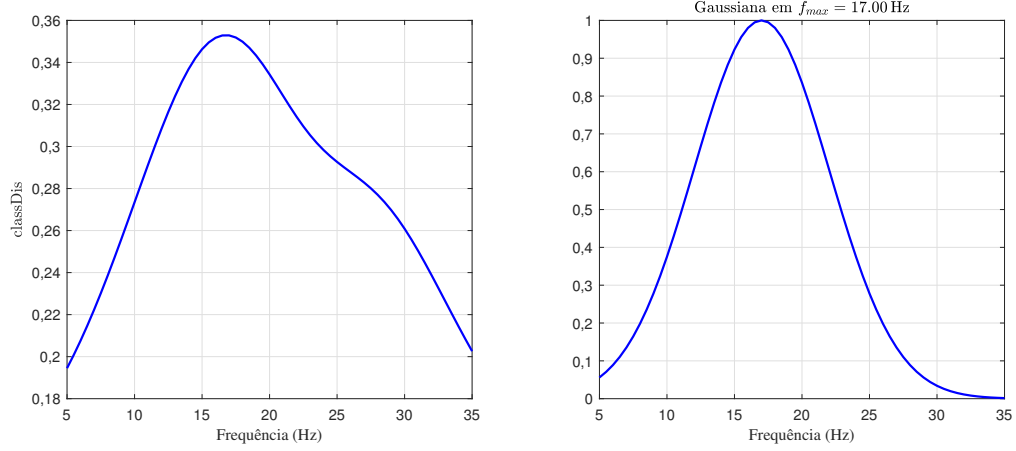
4.1.3 Passo 3: Análise com Filtros de Banda Larga (Máximo Global)

Utilizando o espectro gerado com o desvio padrão maior (σ_{maior}), o algoritmo identifica a frequência central f_{global} que resulta no valor máximo global de distintividade, d_{global} (Figura 15).

4.1.4 Passo 4: Análise com Filtros de Banda Estreita (Máximos Locais)

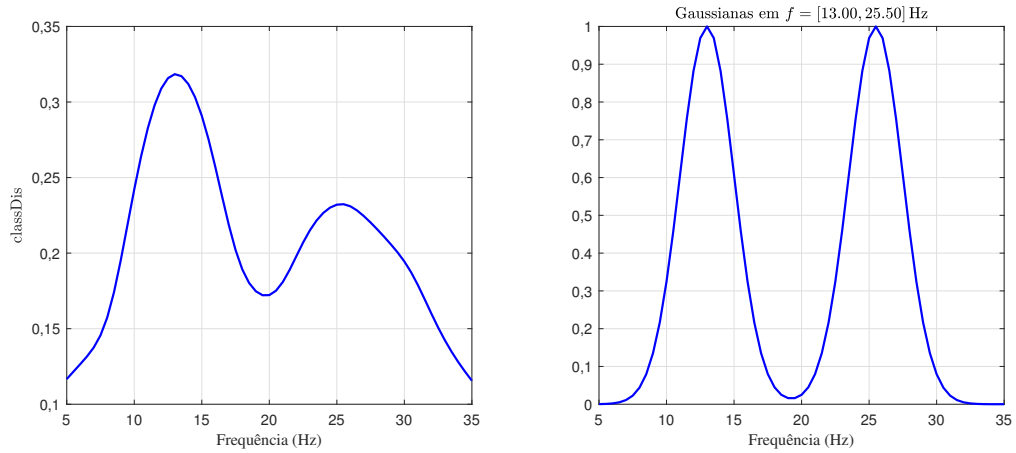
No espectro gerado com o desvio padrão menor (σ_{menor}), o algoritmo identifica todas as frequências $\mathcal{P}$ que correspondem a máximos locais, conforme ilustrado na Figura 16. Em seguida, constrói-se um filtro combinado $\mathbf{H}_0^{\text{comb}}$ somando as gaussianas centradas em cada elemento de $\mathcal{P}$, e a distintividade resultante, d_{comb} , é recalculada.

Figura 15 – Exemplo da análise com filtros de banda larga: na figura da esquerda, o espectro de *classDis*; na da direita, a gaussiana resultante.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 16 – Exemplo da análise com filtros de banda estreita: na figura da esquerda, o espectro de *classDis*; na da direita, as gaussianas resultantes.



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.1.5 Passo 5: Seleção da Configuração Ótima e Retorno

Os valores de distintividade das duas estratégias (d_{global} e d_{comb}) são comparados. Se d_{comb} for maior que d_{global} , a configuração ótima selecionada será o conjunto de frequências dos máximos locais ($\mathcal{P}$) e o desvio padrão menor (σ_{menor}). Caso contrário, a configuração ótima será a frequência do máximo global (f_{global}) e o desvio padrão maior (σ_{maior}). O algoritmo retorna o vetor de frequências centrais ótimas (f^*) e o desvio padrão ótimo (σ^*) como saída.

Algoritmo — Seleção Espectral Adaptativa com Filtragem Gaussiana e *classDis*

Entradas:

- Conjunto de ensaios de EEG: $\mathbf{Z} = \{\mathbf{Z}_n\}_{n=1}^N$.

- Desvios padrão para os filtros gaussianos: $\sigma_{\text{menor}}, \sigma_{\text{maior}}$.
- Vetor com m frequências para análise: $\mathbf{f}$.

Saídas:

- Vetor de frequências centrais ótimas $\mathbf{f}^*$ e desvio padrão ótimo σ^* .

Procedimento:

1. **Projeção Espectral:** Para cada ensaio $\mathbf{Z}_n$, calcule sua representação no domínio da frequência.

$$\Gamma_n = \mathbf{Z}_n \mathbf{B}^T (\mathbf{B} \mathbf{B}^T)^{-1}$$

2. **Cálculo dos Espectros de Distintividade:**

- a) Para cada frequência central $f_c \in \mathbf{f}$ e para cada $\sigma \in \{\sigma_{\text{menor}}, \sigma_{\text{maior}}\}$:

- i. Construa a matriz de ponderação diagonal $\mathbf{H}_0$:

$$\mathbf{H}_0(i, i) = \mathbf{H}_0(m + i, m + i) = \exp\left(-\frac{(\mathbf{f}(i) - f_c)^2}{2\sigma^2}\right), \quad i = 1, \dots, m$$

- ii. Calcule as matrizes de covariância filtradas: $\mathbf{C}_n(f_c, \sigma) = \Gamma_n \mathbf{H}_0 \Gamma_n^T$.

- b) Calcule a métrica *classDis* para cada configuração, gerando os espectros $\text{classDis}_{\text{menor}}(f_c)$ e $\text{classDis}_{\text{maior}}(f_c)$.

3. **Estratégia 1: Análise com Filtro de Banda Larga (Máximo Global)**

- a) Encontre a frequência central que maximiza a distintividade para o filtro amplo:

$$f_{\text{global}} = \arg \max_{f_c \in \mathbf{f}} \text{classDis}_{\text{maior}}(f_c)$$

- b) Armazene o valor máximo de distintividade: $d_{\text{global}} = \text{classDis}_{\text{maior}}(f_{\text{global}})$.

4. **Estratégia 2: Análise com Filtros de Banda Estreita (Máximos Locais)**

- a) Identifique o conjunto de frequências $\mathcal{P} = \{f_k\}$ correspondente aos máximos locais do espectro $\text{classDis}_{\text{menor}}(f_c)$.

b) Construa um filtro combinado $\mathbf{H}_0^{\text{comb}}$:

$$\mathbf{H}_0^{\text{comb}}(i, i) = \mathbf{H}_0^{\text{comb}}(m + i, m + i) = \sum_{f_k \in \mathcal{P}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{f}(i) - f_k)^2}{2\sigma_{\text{menor}}^2}\right)$$

c) Recalcule as covariâncias $\{\mathbf{C}_n^{\text{comb}}\}$ usando $\mathbf{H}_0^{\text{comb}}$ e compute a distintividade resultante: d_{comb} .

5. Seleção da Configuração Ótima:

a) Compare a distintividade das duas estratégias.

b) Se $d_{\text{comb}} > d_{\text{global}}$:

$$\mathbf{f}^* \leftarrow \mathcal{P}; \quad \sigma^* \leftarrow \sigma_{\text{menor}}$$

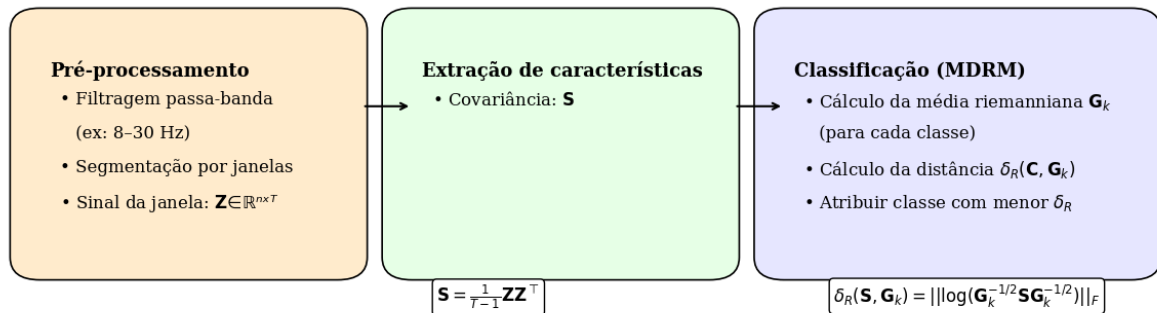
c) Senão:

$$\mathbf{f}^* \leftarrow \{f_{\text{global}}\}; \quad \sigma^* \leftarrow \sigma_{\text{maior}}$$

6. Retorne $\mathbf{f}^*$ e σ^* .

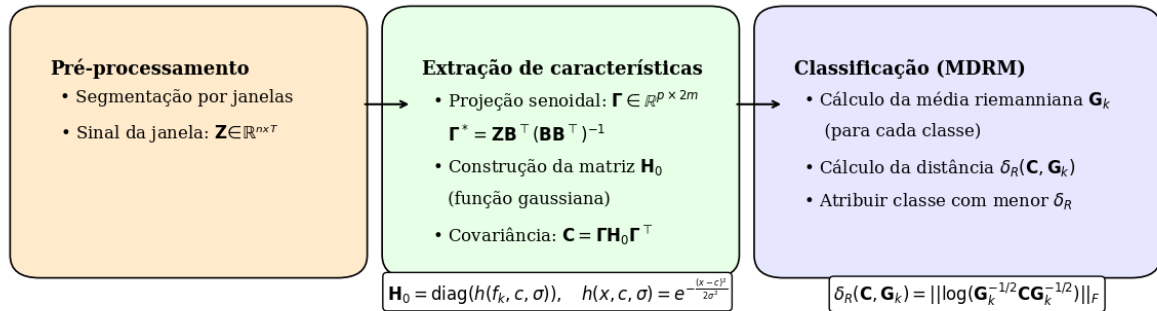
Na formulação original do MDRM, a matriz de covariância é estimada diretamente a partir do sinal de EEG no domínio do tempo, conforme ilustrado no diagrama da Figura 17. Neste trabalho, adota-se uma variante do MDRM no domínio da frequência, na qual a informação espectral do sinal é incorporada diretamente ao processo de extração de características, conforme apresentado na Figura 18.

Figura 17 – Algoritmo MDRM no domínio do tempo



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 18 – Algoritmo MDRM no Domínio da Frequência com filtro gaussiano.

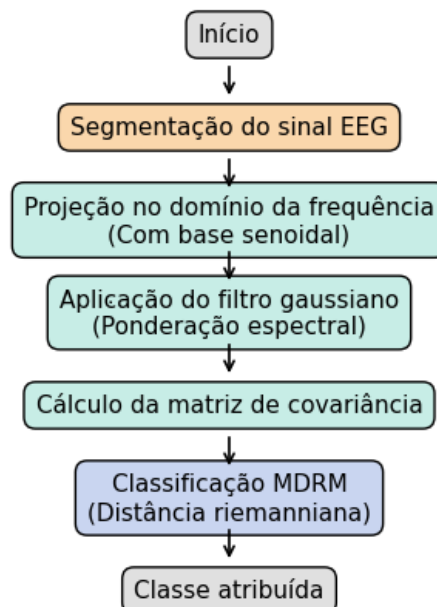


Fonte: Elaborado pelo autor.

Na etapa de aplicação do classificador MDRM, pressupõe-se que as médias riemannianas de cada classe já foram previamente estimadas durante a fase de treinamento. Assim, para cada novo ensaio de EEG, não é necessário recalculas as médias de referência nem a matriz base utilizada para realizar a projeção, é suficiente extrair a matriz de covariância correspondente ao sinal de teste e compará-la com as médias de classe previamente obtidas.

O procedimento de classificação consiste, portanto, no cálculo da distância riemanniana entre a matriz de covariância do ensaio de teste e cada uma das médias riemannianas associadas às classes. A atribuição de classe ao ensaio é realizada com base na menor distância observada. O fluxograma da Figura 19 apresenta a sequência resumida das etapas essenciais para a fase de teste.

Figura 19 – Fluxograma.



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.2 Banco de Dados

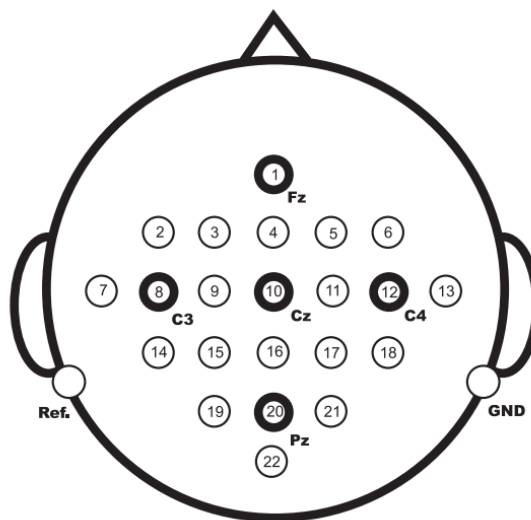
O presente trabalho utiliza, como base principal para os testes de classificação, o conjunto de dados *BCI Competition IV – Dataset 2a* (Brunner *et al.*, 2008). Adicionalmente, emprega-se o conjunto *BCI Competition III – Dataset IIIa* (Schlögl, 2005) como referência comparativa. Nas seções a seguir, apresentam-se inicialmente as características do conjunto principal e, em seguida, as particularidades do conjunto adicional.

4.2.1 Conjunto Principal: *BCI Competition IV – Dataset 2a*

Este conjunto é composto por sinais de EEG de 9 voluntários, coletados em duas sessões distintas realizadas em dias diferentes. Cada sessão é formada por 6 blocos (*runs*), contendo 48 ensaios cada (12 por classe), totalizando 288 ensaios por sessão. As quatro classes de imaginação motora correspondem a: **mão esquerda, mão direita, pés e língua** (Brunner *et al.*, 2008).

4.2.2 Aquisição de Sinais

Figura 20 – Posicionamento dos eletrodos segundo o sistema 10–20.



Fonte: (Brunner *et al.*, 2008).

Segundo Brunner *et al.* (2008), os parâmetros de aquisição dos sinais são:

- **Eletrodos EEG:** 22 eletrodos Ag/AgCl dispostos segundo o sistema 10–20, com interdistância de 3,5 cm. Referência: mastoide esquerda; terra: mastoide direita. O posicionamento dos eletrodos está ilustrado na Figura 20.

- **Canais EOG:** 3 canais monopolares posicionados lateralmente e acima dos olhos, utilizados para identificação de artefatos oculares.
- **Taxa de amostragem:** 250 Hz.
- **Ganho do amplificador:** 100 μ V/divisão para EEG e 1 mV/divisão para EOG.

4.2.3 Pré-processamento e Filtragem

O banco de dados passou por um pré-processamento conforme citado por Brunner *et al.* (2008), os processos submetidos foram:

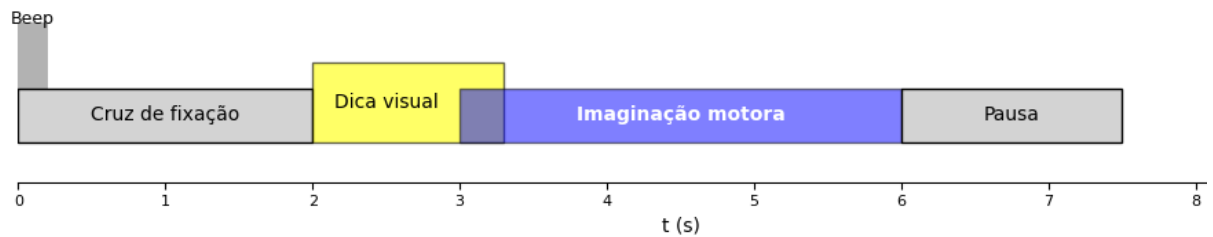
- **Filtragem passa-banda:** 0,5–100 Hz para EEG e EOG.
- **Filtro *notch*:** 50 Hz, para supressão da interferência da rede elétrica.
- **Deteção de artefatos:** os ensaios contendo artefatos são previamente marcados no cabeçalho do arquivo.

4.2.4 Protocolo do Ensaio

O esquema temporal de cada ensaio é ilustrado na Figura 21 e segue o seguinte protocolo (Brunner *et al.*, 2008):

1. **Início ($t = 0$ s):** uma cruz de fixação aparece no centro de uma tela preta, acompanhada por um breve sinal acústico.
2. **Apresentação do estímulo ($t = 2$ s):** uma seta apontando para a esquerda, direita, para cima ou para baixo (indicando uma das quatro classes) é exibida por 1,25 s.
3. **Imaginação motora ($2\text{ s} < t \leq 6\text{ s}$):** o participante realiza a tarefa de imaginação motora correspondente até o desaparecimento da cruz em $t = 6$ s. Não há feedback visual ou auditivo durante essa fase.
4. **Intervalo de descanso:** após $t = 6$ s, a tela retorna a preto para um breve período de repouso antes do próximo ensaio.

Figura 21 – Esquema temporal de cada ensaio.



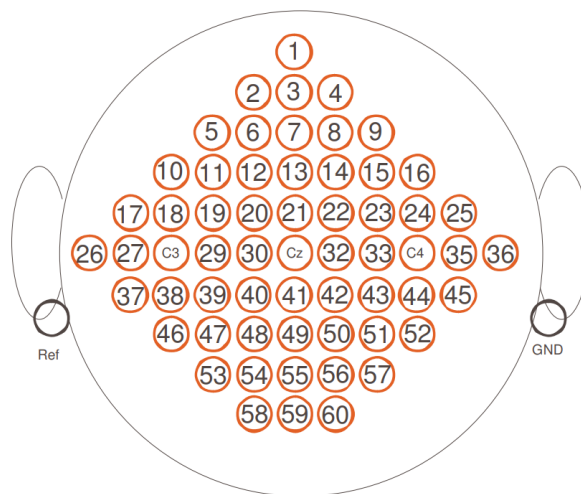
Fonte: Adaptado de Brunner *et al.* (2008).

4.2.5 Conjunto Adicional: BCI Competition III – Dataset IIIa

As principais características do conjunto adicional estão listadas a seguir (Schlögl, 2005):

- **Participantes:** 3 sujeitos.
- **Canais de EEG:** 60 canais registrados (ver Figura 22).
- **Filtragem:** passa-banda entre 1–50 Hz, com filtro *notch* em 50 Hz.
- **Ensaio:** 60 ensaios por classe, totalizando 240 ensaios distribuídos em 6 blocos.
- **Classes:** imaginação de **mão esquerda, mão direita, pés e língua**.
- **Paradigma temporal:** após 2 s de tela em branco, a cruz de fixação e o sinal acústico são apresentados em $t = 2$ s; a seta é exibida em $t = 3$ s por 1 s; a imaginação motora continua até $t = 7$ s.

Figura 22 – Posicionamento dos eletrodos segundo o sistema 10–20.



Fonte: Schlögl (2005).

5 RESULTADOS

Os resultados e discussões apresentados nesta seção são baseados na capacidade dos métodos em melhorar o desempenho do Classificador de Mínima Distância à Média Riemanniana (MDRM) em classificações binárias, em que cada um deve classificar corretamente uma, entre duas possíveis ações. Primeiramente, é realizada uma avaliação comparativa entre os diferentes métodos (os da literatura e o proposto). Em seguida, o método proposto é avaliado isoladamente em todos os cenários. Por fim, apresenta-se uma análise dos parâmetros e limitações do método proposto, incluindo uma avaliação comparativa utilizando um banco de dados adicional (Schlögl, 2005).

5.1 Comparação entre os métodos

Para a comparação entre os métodos, foram selecionadas as classes correspondentes aos movimentos de mão direita e mão esquerda, conforme disponibilizadas no banco de dados principal. A análise considerou uma janela temporal de 2 segundos, iniciada 0,5 segundo após a apresentação do estímulo visual. Utilizou-se o classificador MDRM, e a análise espectral foi realizada na faixa de 5 a 35 Hz.

A separação entre os conjuntos de treino e teste seguiu a estrutura do banco de dados, organizado em sessões realizadas em dias distintos, de modo a considerar explicitamente a variabilidade entre dias e sessões.

Os parâmetros a seguir são os adotados para cada método avaliado:

- **Barachant *et al.* (2012)**: Emprega filtragem passa-banda Butterworth de 10ª ordem, com banda fixa entre 8 e 30 Hz, conforme amplamente utilizado na literatura para tarefas de imaginação motora. Este método foi adotado como referência comparativa.
- **Blankertz *et al.* (2008)**: Representa uma abordagem alternativa que não opera originalmente no espaço Riemanniano. O limiar sugerido de 5% foi ajustado para 20% neste trabalho, uma vez que valores inferiores resultaram na ausência de filtragem em mais da metade dos indivíduos, dentro da faixa de frequência analisada. Foram utilizados os canais C3 e C4, com aplicação de filtro espacial Laplaciano baseado nos canais vizinhos. A filtragem espectral foi realizada com filtros passa-banda Butterworth de 8ª ordem, com largura fixa de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz. Embora não seja originalmente formulado

no espaço Riemanniano, os resultados deste método foram posteriormente projetados nesse espaço, visando à comparação com os demais algoritmos.

- **Yamamoto *et al.* (2022)**: Utiliza um banco de filtros passa-banda Butterworth de 8ª ordem, com largura fixa de 4 Hz, conforme proposto originalmente. Neste trabalho, a sobreposição entre bandas foi ajustada para 0,5 Hz, a fim de manter a comparabilidade com o método proposto. O limiar não precisou ser alterado, pois o método já havia sido previamente validado neste mesmo conjunto de dados.
- **Método Proposto**: Foram adotados desvios-padrão de 2 Hz e 5 Hz, correspondentes aos filtros estreito e amplo, respectivamente, com resolução espectral de 0,5 Hz.

Adicionalmente, destaca-se que as amostras identificadas como contendo artefatos no banco de dados principal (Brunner *et al.*, 2008) foram mantidas na análise. Para os algoritmos baseados na média Riemanniana, a inicialização foi realizada por meio da média Euclidiana, conforme sugerido por Silva (2017), visando maior estabilidade numérica e eficiência computacional nas iterações iniciais.

Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 3. Neste trabalho, o operador “vs.” denota um problema de classificação binária entre as duas classes explicitadas à esquerda e à direita do operador. Assim, “ME vs. MD” corresponde à classificação entre Mão Esquerda (ME) e MD.

Tabela 3 – Acurácia do MDRM na classificação binária ME (mão esquerda) vs. MD (mão direita) para cada sujeito, utilizando quatro diferentes métodos de análise espectral.

Sujeito	Blankertz <i>et al.</i> (2008)	Barachant <i>et al.</i> (2012)	Yamamoto <i>et al.</i> (2022)	Algoritmo Proposto (2025)
A01	89,58	94,44	90,97	96,53
A02	54,86	59,03	47,92	62,50
A03	88,89	92,36	89,58	92,36
A04	72,92	76,39	53,47	74,31
A05	59,03	63,19	87,50	86,81
A06	70,83	71,53	59,03	70,83
A07	65,97	65,28	62,50	81,25
A08	95,14	97,22	95,14	94,44
A09	92,36	93,06	90,28	93,06
Média	76,62% ($\pm 15,22$)	79,17% ($\pm 15,19$)	75,15% ($\pm 18,94$)	83,57% ($\pm 12,05$)

Filtrar o sinal de forma fixa nos valores padrão (8 Hz -30 Hz), para a maioria dos casos, resultou em uma acurácia média superior à obtida pelos métodos de seleção de comparação.

Embora possuam capacidade de identificar e, conseqüentemente, aprimorar a seleção de frequências para determinados sujeitos, existe, em termos gerais, a possibilidade de perda de conteúdo espectral relevante e a inclusão de frequências não pertinentes, dependendo da faixa analisada. Em muitos casos, essa perda pode estar associada à forma de seleção baseada na expansão por limiares ao redor de um ponto máximo.

No método de Yamamoto *et al.* (2022), o problema associado a limiares baixos foi mitigado ao utilizar como referência não apenas o valor máximo, mas também o valor mínimo, diferentemente da abordagem de Blankertz *et al.* (2008), que consideravam, exclusivamente o valor máximo como referência. Contudo, em ambos os métodos, persiste o risco de perda de conteúdo espectral relevante, uma vez que a expansão da banda pode ser interrompida por mínimos locais. Mesmo ao ajustar o limiar para ultrapassar esses mínimos, ainda existe a possibilidade de inclusão indevida de faixas não relevantes, o que dificulta sua posterior filtragem.

Na Figura 20 são apresentados os gráficos da métrica *classDis* obtidos pelo método proposto para a tarefa de imaginação motora ME (mão esquerda) vs. MD (mão direita). Os resultados correspondentes aos métodos de Blankertz *et al.* (2008) e Yamamoto *et al.* (2022) seguem o mesmo formato e encontram-se disponíveis no Apêndice A. Observa-se que, no método proposto, os gráficos apresentaram maior suavidade em comparação aos métodos de referência, resultado da combinação entre as gaussianas e a métrica *classDis*, que contribuiu para uma melhor definição das regiões espectrais relevantes.

Um contraste relacionado à forma de seleção dos limiares pode ser observado nos gráficos dos sujeitos 1 e 9. Em ambos os casos, a banda mais relevante para os resultados está localizada na faixa de frequência μ , entretanto, as faixas beta também apresentam boa representatividade e poderiam ser utilizadas para diferenciar os movimentos.

No método de Yamamoto *et al.* (2022), essa faixa beta foi excluída, resultando em perda de acurácia. Já no método de Blankertz *et al.* (2008), a faixa foi incluída, mas acompanhada de outras adjacentes, o que reduziu a seletividade espectral. O método proposto, por sua vez, foi capaz de produzir acurácia superior em ambos os casos, considerando as faixas situadas entre os máximos.

No caso do sujeito 1, o método optou pelos máximos locais, reduzindo a influência das faixas intermediárias e obtendo desempenho superior ao método de referência. Já para o sujeito 9, a seleção foi centralizada, abrangendo toda a faixa relevante, situação em que o método proposto manteve a acurácia obtida pelo melhor método comparativo.

Em alguns casos, os métodos podem detectar faixas relevantes fora da faixa-base, como

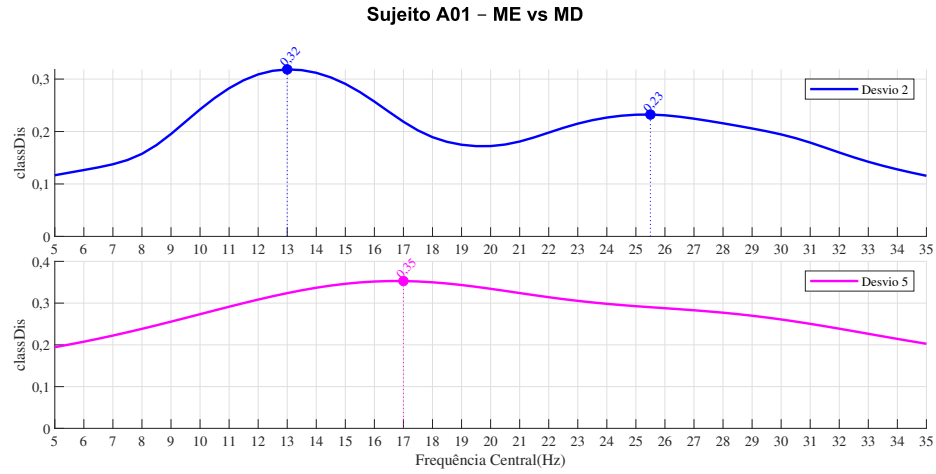
ocorreu com o sujeito 5. Em todos os três métodos avaliados, foi identificado um máximo em 31,5 Hz, valor acima do limite superior da base, que se estende apenas até 30 Hz, resultando em perda significativa de desempenho.

No método de Blankertz *et al.* (2008), mesmo havendo a detecção desse máximo, a métrica selecionou outra faixa como máximo global, e a expansão por limiares foi interrompida por um mínimo local antes de atingir a faixa relevante. Esse resultado evidencia não apenas o problema do ajuste dos limiares, mas também as diferenças inerentes entre as métricas utilizadas.

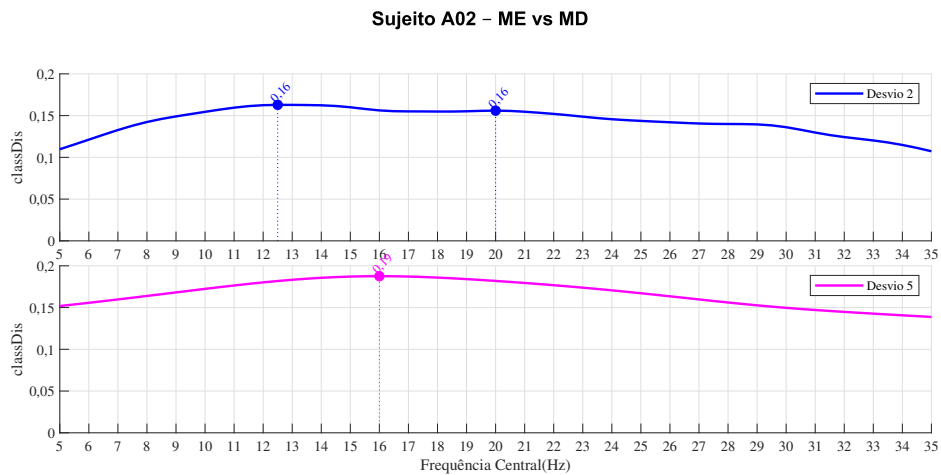
De modo geral, o método proposto, com exceção do sujeito 2, manteve acurácia superior a 70% para todos os participantes. Apesar dessa exceção, ainda apresentou o melhor resultado para o sujeito 2. Nos casos em que não obteve a melhor performance, a diferença em relação ao método de maior acurácia não ultrapassou 3%.

Em algumas situações, em comparação ao método base de referência, observou-se um ganho expressivo, como nos sujeitos 5 e 7, cujas acurácias, inicialmente inferiores a 70%, ultrapassaram 80% com o método proposto, possibilitando atender aos requisitos de BCIs mais rigorosas. No total, 6 dos 9 sujeitos alcançaram acurácia superior a 80% utilizando o método proposto.

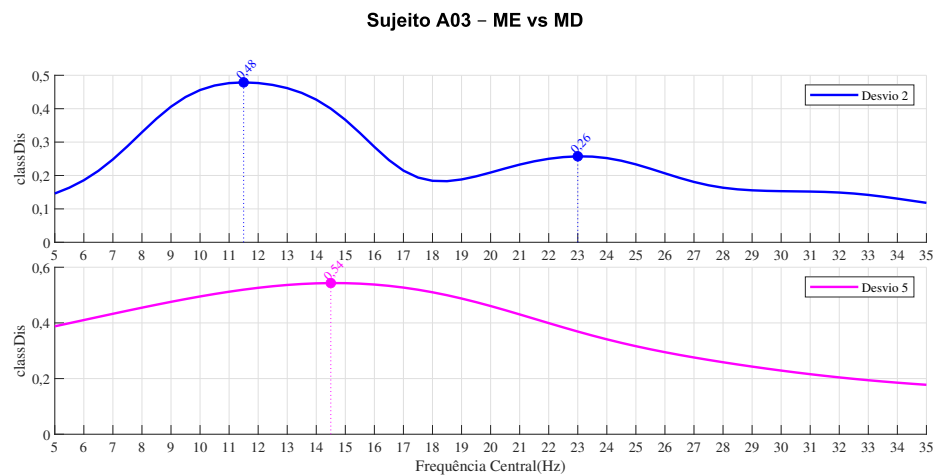
Figura 23 – Distribuição da métrica *ClassDis* para todos os sujeitos (1 a 9) na tarefa de imaginação motora **ME** (mão esquerda) vs. **MD** (mão direita), utilizando o método proposto com filtros Gaussianos de desvio-padrão de 2 Hz e 5 Hz.



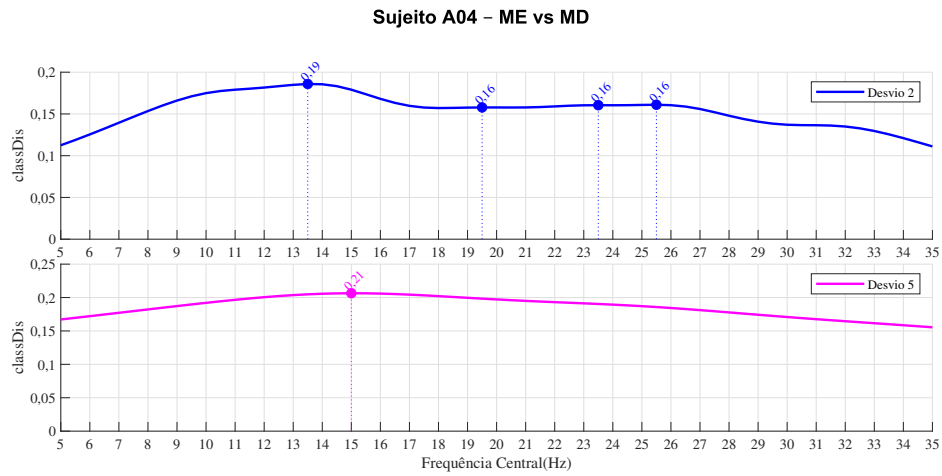
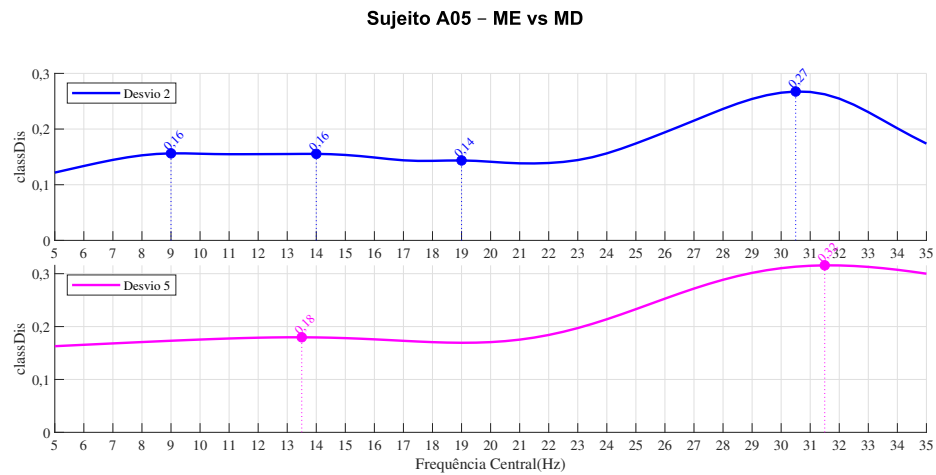
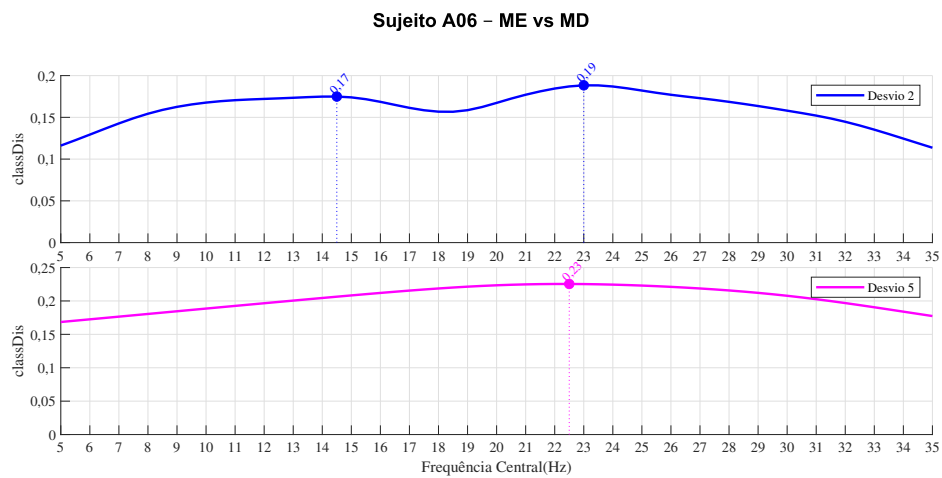
(a) Sujeito 1: *ClassDis* com filtros Gaussianos de 2 Hz e 5 Hz.

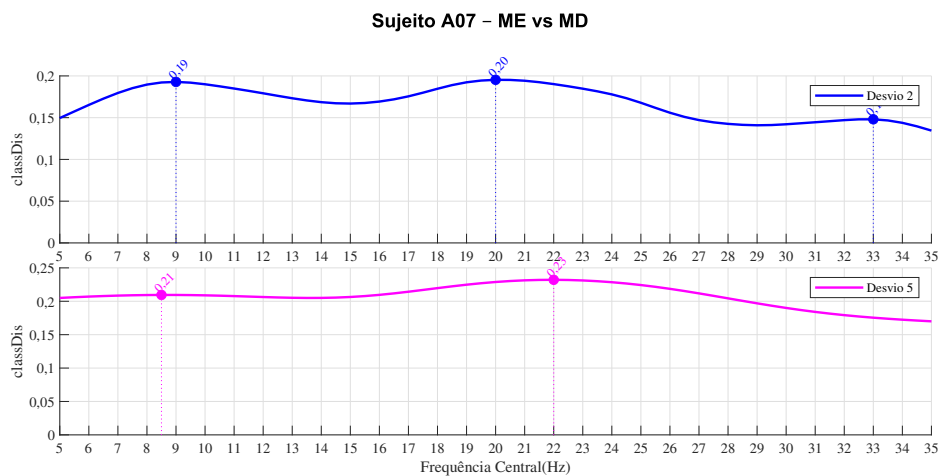


(b) Sujeito 2: *ClassDis* com filtros Gaussianos de 2 Hz e 5 Hz.

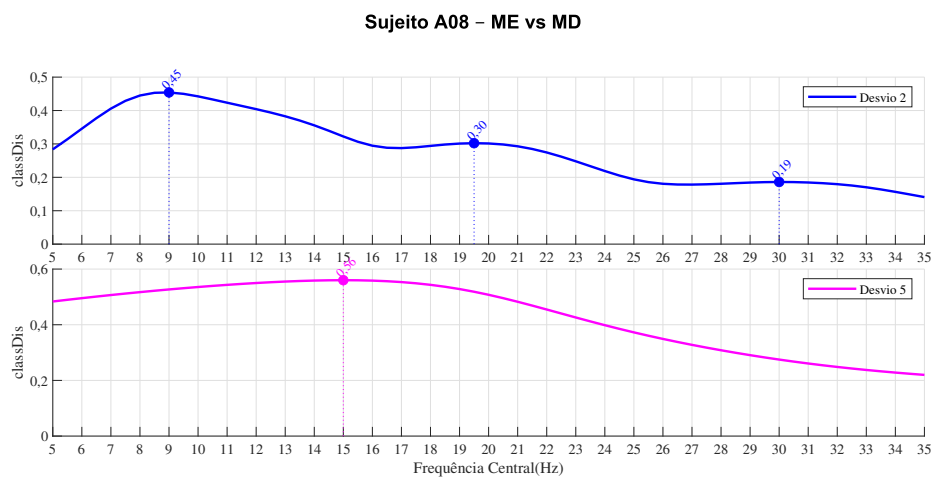


(c) Sujeito 3: *ClassDis* com filtros Gaussianos de 2 Hz e 5 Hz.

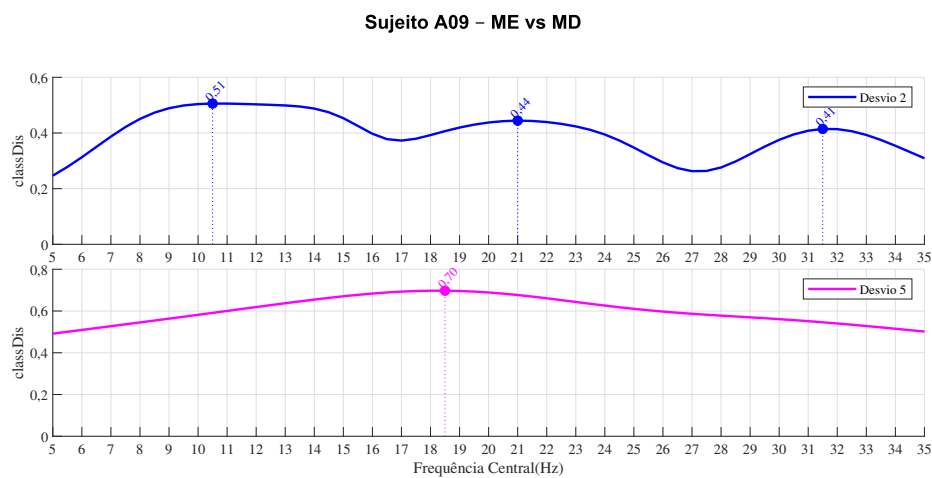
(d) Sujeito 4: *ClassDis* com filtros Gaussianos de 2 Hz e 5 Hz.(e) Sujeito 5: *ClassDis* com filtros Gaussianos de 2 Hz e 5 Hz.(f) Sujeito 6: *ClassDis* com filtros Gaussianos de 2 Hz e 5 Hz.



(g) Sujeito 7: *ClassDis* com filtros Gaussianos de 2 Hz e 5 Hz.



(h) Sujeito 8: *ClassDis* com filtros Gaussianos de 2 Hz e 5 Hz.



(i) Sujeito 9: *ClassDis* com filtros Gaussianos de 2 Hz e 5 Hz.

Fonte: Elaborado pelo autor.

5.2 Desempenho por Par de Classes

A Tabela 4 apresenta, por sujeito, as acurácias obtidas com o *método proposto* nas seis comparações binárias (pares de classes). Observa-se a ocorrência de diversas combinações que atingiram ou superaram os requisitos mínimos de acurácia de 70% e 80%, indicando que o desempenho obtido não se restringe a uma única combinação específica, mas se mantém consistente em múltiplos cenários de classificação.

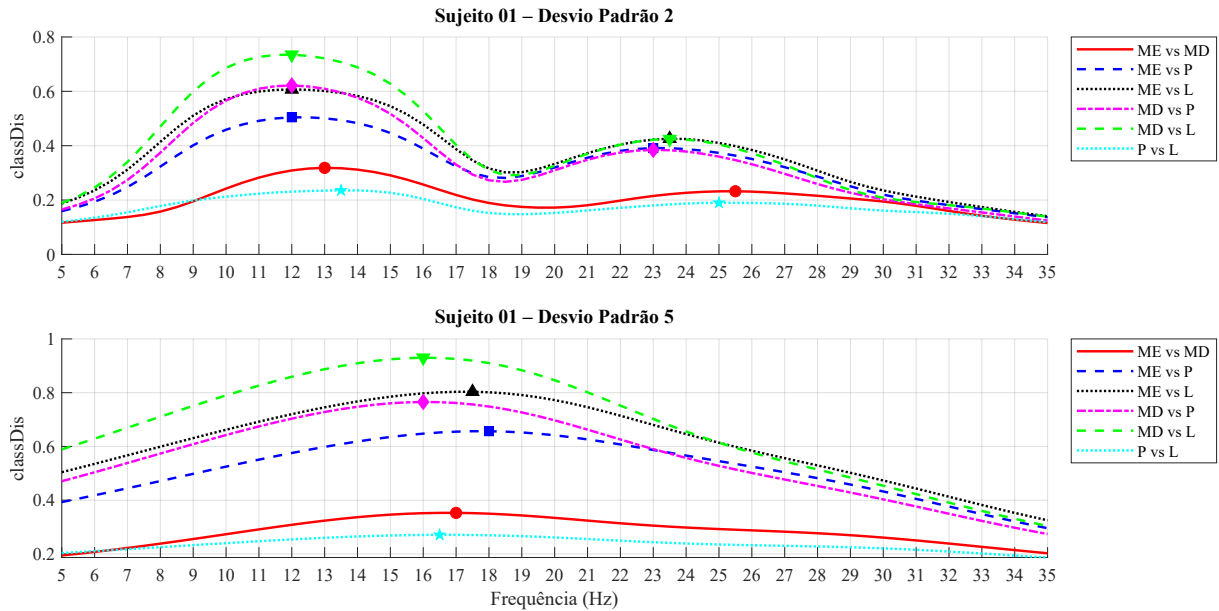
Tabela 4 – Acurácia por pares de classes com o método proposto, por sujeito. Abreviações: ME = Mão Esquerda; MD = Mão Direita; P = Pés; L = Língua. A última coluna reporta, por sujeito, o maior valor entre as seis comparações.

Sujeito	ME vs. MD	ME vs. P	ME vs. L	MD vs. P	MD vs. L	P vs. L	Máx.
A01	0,9653	0,9444	0,9931	0,9792	1,0000	0,7917	1,0000
A02	0,6250	0,7986	0,6944	0,8264	0,7014	0,7708	0,8264
A03	0,9236	0,9514	0,8819	0,9583	0,9653	0,7083	0,9653
A04	0,7431	0,9028	0,8889	0,9236	0,8611	0,7500	0,9236
A05	0,8681	0,7083	0,7639	0,6806	0,8264	0,6667	0,8681
A06	0,7083	0,7083	0,7222	0,6528	0,6597	0,7222	0,7222
A07	0,8125	0,9375	0,9167	0,9444	0,9236	0,8403	0,9444
A08	0,9444	0,8264	0,8403	0,8750	0,7569	0,7153	0,9444
A09	0,9306	0,9236	0,9792	0,7014	0,7986	0,8750	0,9792

As Figuras 24 a 32 apresentam a distribuição espectral da métrica *ClassDis* considerando simultaneamente todas as classes do paradigma experimental (ME, MD, P e L) para cada um dos nove sujeitos. A análise conjunta permite observar a contribuição relativa de cada faixa de frequência na separabilidade entre todas as classes, fornecendo uma visão mais abrangente do comportamento espectral.

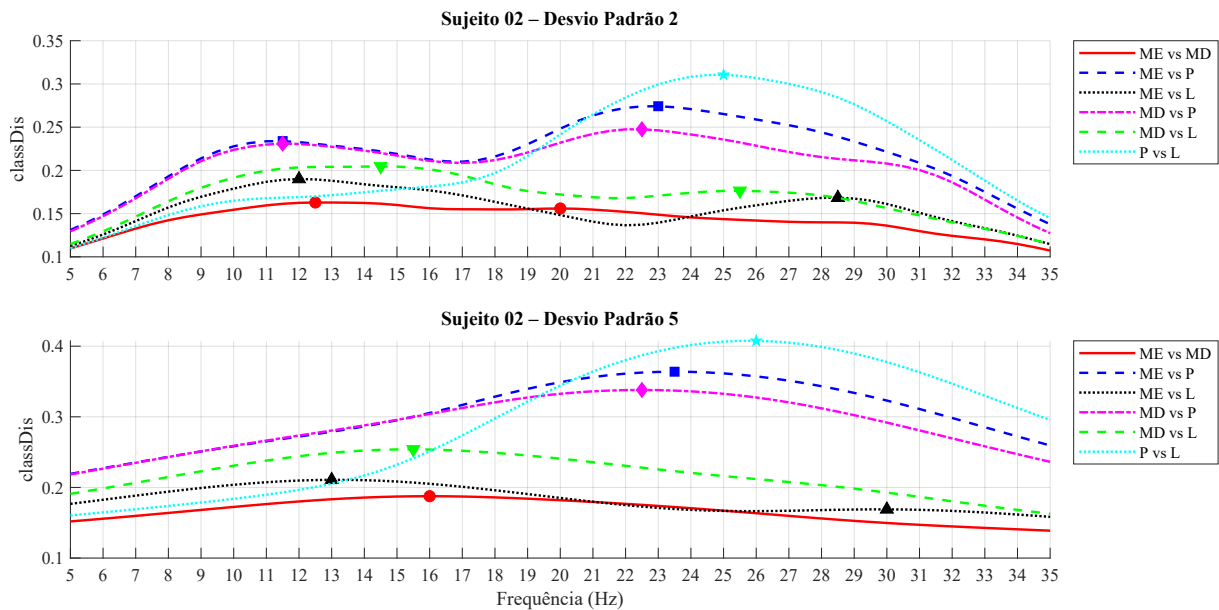
Como se observa nos gráficos, as combinações de maior distintividade variam entre os sujeitos, e as curvas com maiores valores da métrica *ClassDis* tendem a corresponder às maiores acurácias. Na Figura 24, por exemplo, a combinação mão direita vs. língua (MD vs. L) para o sujeito 01 apresentou as curvas de maior magnitude e o melhor resultado de classificação, já a combinação pés vs. língua (P vs L) exibiu as curvas mais baixas e o pior desempenho. Na Figura 25, o sujeito 02 apresentou acurácia inferior para mão direita vs. mão esquerda (MD vs ME) em comparação aos demais sujeitos, no gráfico, observa-se também que a curva correspondente a essa faixa é a de menor magnitude.

Figura 24 – Distribuição da métrica *ClassDis* para o sujeito 1, considerando todas as classes (ME: mão esquerda, MD: mão direita, P: pés, L: língua) simultaneamente. O método proposto foi aplicado com filtros Gaussianos de desvio-padrão de 2 Hz e 5 Hz.



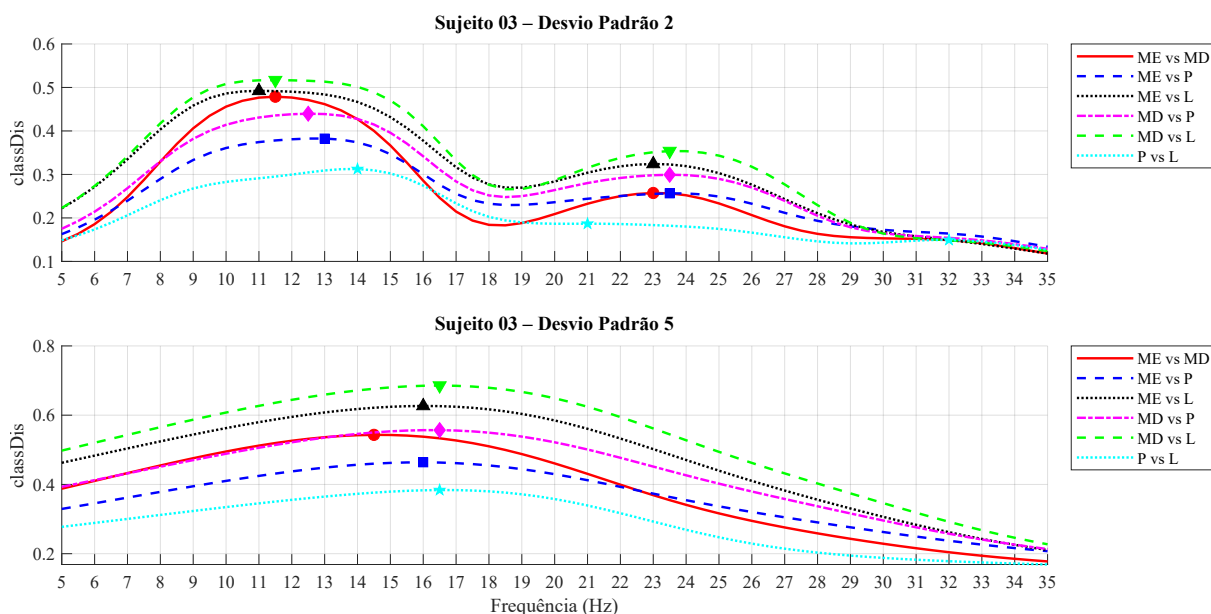
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 25 – Distribuição da métrica *ClassDis* para o sujeito 2, considerando todas as classes (ME: mão esquerda, MD: mão direita, P: pés, L: língua) simultaneamente. O método proposto foi aplicado com filtros Gaussianos de desvio-padrão de 2 Hz e 5 Hz.



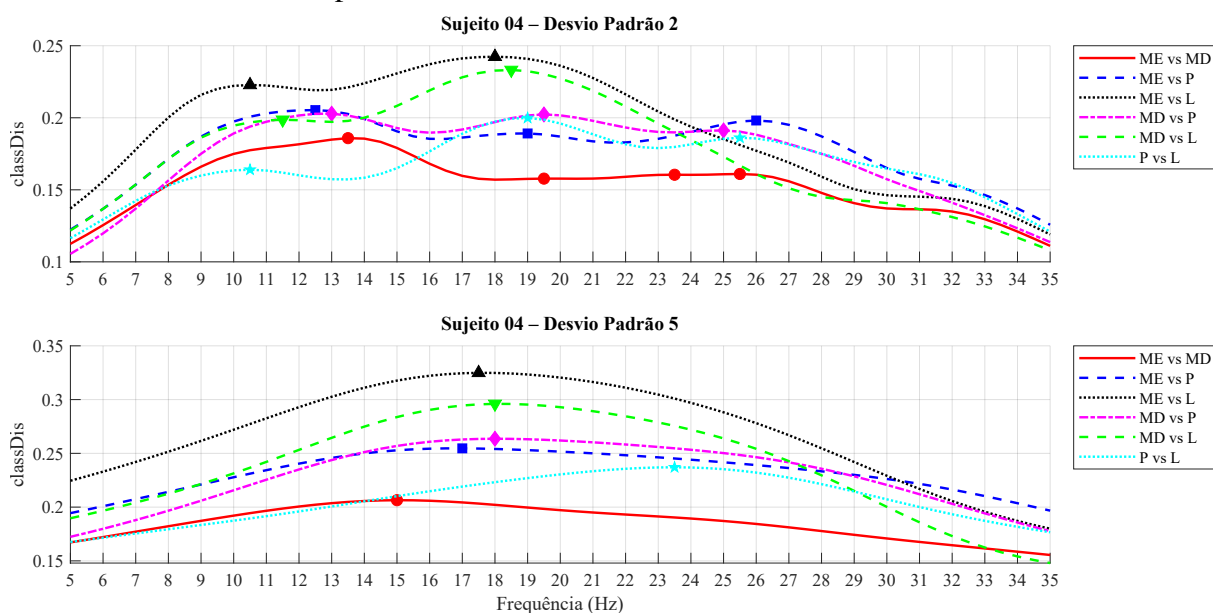
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 26 – Distribuição da métrica *ClassDis* para o sujeito 3, considerando todas as classes (ME: mão esquerda, MD: mão direita, P: pés, L: língua) simultaneamente. O método proposto foi aplicado com filtros Gaussianos de desvio-padrão de 2 Hz e 5 Hz.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 27 – Distribuição da métrica *ClassDis* para o sujeito 4, considerando todas as classes (ME: mão esquerda, MD: mão direita, P: pés, L: língua) simultaneamente. O método proposto foi aplicado com filtros Gaussianos de desvio-padrão de 2 Hz e 5 Hz.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 28 – Distribuição da métrica *ClassDis* para o sujeito 5, considerando todas as classes (ME: mão esquerda, MD: mão direita, P: pés, L: língua) simultaneamente. O método proposto foi aplicado com filtros Gaussianos de desvio-padrão de 2 Hz e 5 Hz.

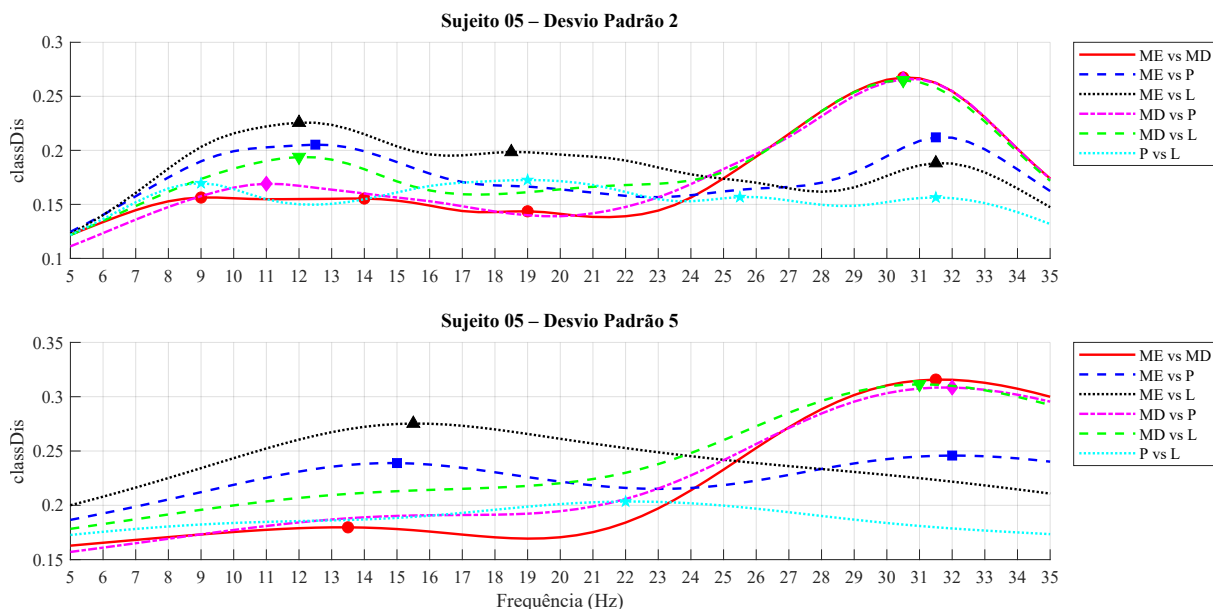


Figura 29 – Distribuição da métrica *ClassDis* para o sujeito 6, considerando todas as classes (ME: mão esquerda, MD: mão direita, P: pés, L: língua) simultaneamente. O método proposto foi aplicado com filtros Gaussianos de desvio-padrão de 2 Hz e 5 Hz.

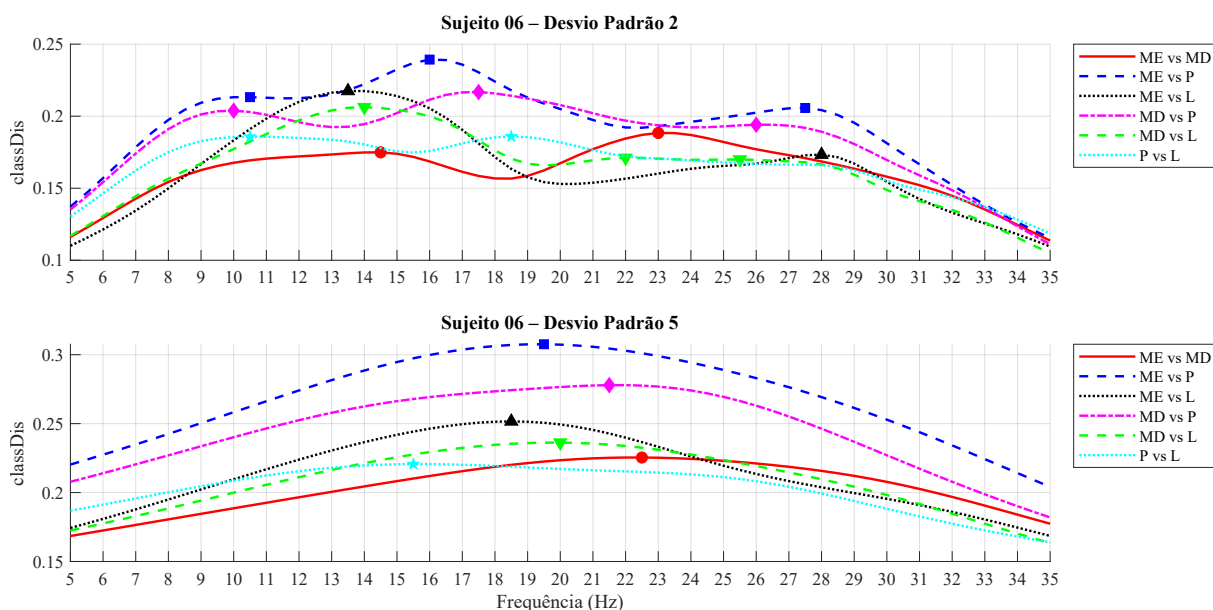
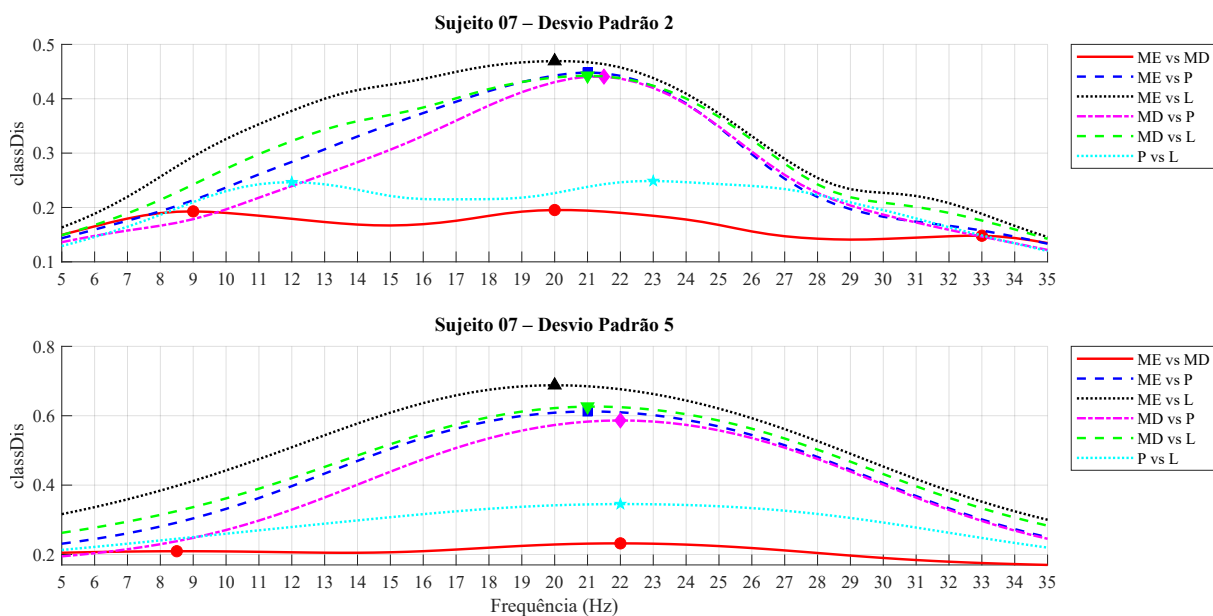
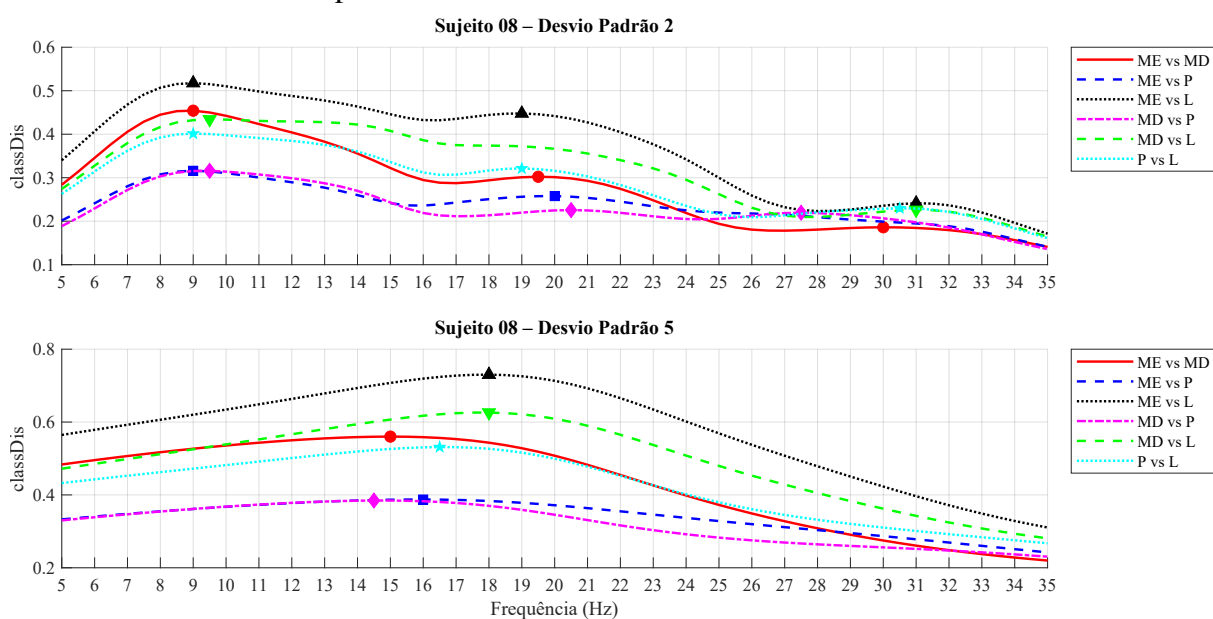


Figura 30 – Distribuição da métrica *ClassDis* para o sujeito 7, considerando todas as classes (ME: mão esquerda, MD: mão direita, P: pés, L: língua) simultaneamente. O método proposto foi aplicado com filtros Gaussianos de desvio-padrão de 2 Hz e 5 Hz.



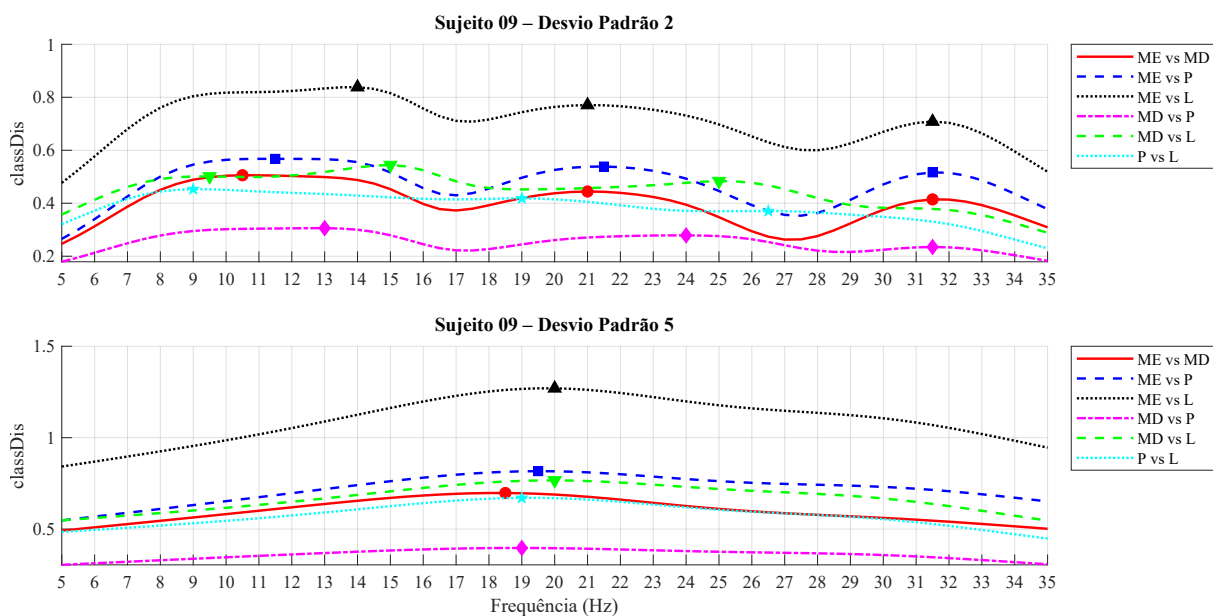
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 31 – Distribuição da métrica *ClassDis* para o sujeito 8, considerando todas as classes (ME: mão esquerda, MD: mão direita, P: pés, L: língua) simultaneamente. O método proposto foi aplicado com filtros Gaussianos de desvio-padrão de 2 Hz e 5 Hz.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 32 – Distribuição da métrica *ClassDis* para o sujeito 9, considerando todas as classes (ME: mão esquerda, MD: mão direita, P: pés, L: língua) simultaneamente. O método proposto foi aplicado com filtros Gaussianos de desvio-padrão de 2 Hz e 5 Hz.



Fonte: Elaborado pelo autor.

5.3 Parâmetros e Limitações

O método proposto compara os dois bancos de filtros pelo maior valor da métrica *classDis* e seleciona a configuração correspondente ao maior valor obtido. Essa escolha, porém, não garante necessariamente a maior acurácia de classificação. A métrica *classDis* avalia separabilidade espectral, enquanto a acurácia decorre da etapa de classificação (MDRM) em dados de teste. Pode ocorrer divergência entre a configuração com maior *classDis* e a que produz a maior acurácia (Tabela 5), porém na maioria dos casos as acurácias resultantes variam menos que 3%.

Tabela 5 – Comparação padronizada entre *classDis* (métrica) e acurácia (ME vs. MD) por sujeito. Em negrito, o maior valor dentro de cada par DV2 (junção) vs. DV5.

Sujeito	A01	A02	A03	A04	A05	A06	A07	A08	A09
DV2 (junção) — <i>classDis</i>	0,3921	0,1860	0,5724	0,2047	0,1856	0,2119	0,2167	0,6195	0,6923
DV5 — <i>classDis</i>	0,3528	0,1876	0,5432	0,2064	0,3158	0,2254	0,2321	0,5600	0,6973
DV2 (junção) — Acurácia	96,53	61,81	92,36	75,69	58,33	70,83	56,25	94,44	92,36
DV5 — Acurácia	87,50	62,50	91,67	74,31	86,81	70,83	81,25	97,22	93,06

Os valores de desvio padrão utilizados foram de 2 Hz e 5 Hz. A escolha desses parâmetros deve considerar aspectos importantes: um desvio padrão muito alto no filtro de banda larga pode resultar em combinações que permitam a passagem excessiva do conteúdo de todas as frequências analisadas, por outro lado, um desvio padrão muito baixo no filtro de banda estreita pode alterar as propriedades das matrizes de covariância, fazendo com que deixem de ser simétricas definidas positivas (SDP). Mesmo aplicando técnicas de regularização, essa condição pode comprometer a precisão de diversos métodos. Esse problema pode ser identificado já na fase de treinamento, sem a necessidade de executar todo o processo de classificação, por meio da verificação das matrizes de covariância. Além disso, um indício de que o desvio padrão escolhido está excessivamente baixo é a ocorrência de múltiplas gaussianas próximas, separadas por variações mínimas de dois ou três passos de frequência.

Essa limitação não é exclusiva do método proposto, no método de Yamamoto *et al.* (2022), larguras de banda mais estreitas também o tornam suscetível ao mesmo problema. No banco de dados principal, valores de desvio abaixo de 2 Hz já ocasionaram essa falha, enquanto os valores adotados produziram bons resultados. Contudo, ao aplicar em outro banco de dados, com maior número de sensores, o sistema mostrou-se novamente mais sensível a essa limitação,

exigindo ajustes nos parâmetros. Assim, o desvio padrão no método proposto foi aumentado de 2 Hz para 3 Hz, e a largura de banda no método de Yamamoto *et al.* (2022) foi ampliada de 4 Hz para 6 Hz.

Os principais problemas foram observados nas matrizes de covariância correspondentes às faixas próximas das bordas do espectro analisado. Em todos os casos, as análises foram conduzidas no intervalo de 5 Hz a 35 Hz. Reduzir essa faixa poderia evitar o problema, mas com o risco de eliminar informações relevantes para alguns sujeitos.

Na Tabela 6, são apresentados os resultados para a combinação mão direita vs. mão esquerda. Para esses sujeitos, o método base apresentou duas situações com desempenho já satisfatório e uma com desempenho inferior. O método proposto, embora não tenha proporcionado uma melhoria tão significativa como no banco de dados principal (Brunner *et al.*, 2008), não ocasionou perdas, diferentemente do método de comparação Yamamoto *et al.* (2022) em relação ao método base.

Tabela 6 – Acurácia do MDRM na classificação binária ME vs. MD para cada sujeito do conjunto alternativo de dados, utilizando três diferentes métodos de análise espectral.

Sujeito	Barachant <i>et al.</i> (2012)	Yamamoto <i>et al.</i> (2022)	Algoritmo Proposto (2025)
K3	97,78	82,22	97,78
K6	51,67	46,67	51,67
L1	95,00	83,33	96,67
Média	81,48% ($\pm 23,65$)	70,74% ($\pm 18,41$)	82,05% ($\pm 23,30$)

6 CONCLUSÃO

Os objetivos estabelecidos neste trabalho foram alcançados. O objetivo geral, de desenvolver e avaliar um método de seleção espectral automática baseado em geometria riemanniana para sinais de EEG de imaginação motora, foi cumprido, uma vez que o algoritmo proposto foi implementado, validado e comparado com métodos de referência da literatura, potencializando o desempenho do classificador usado para avaliar a qualidade das bandas selecionadas. Em relação aos objetivos específicos:

- **Proposição do algoritmo:** o método que combina projeção espectral com filtragem gaussiana e a métrica *classDis* mostrou-se eficaz em selecionar sub-bandas relevantes, preservando faixas mu e beta. Diferentemente das abordagens que expandem apenas em torno de um máximo global, o algoritmo conseguiu manter ou elevar a acurácia do classificador ao contemplar frequências situadas em mais de uma faixa.
- **Implementação da estratégia de otimização:** a proposta foi validada com filtros gaussianos de 2 Hz e 5 Hz. Observou-se que valores muito baixos no filtro de banda estreita podem comprometer a SPD das matrizes de covariância, enquanto valores muito altos no filtro de banda larga permitem a passagem excessiva de conteúdo. A escolha adotada permitiu equilibrar essas restrições e garantiu a separação entre classes.
- **Avaliação no banco de dados *BCI Competition IV – Dataset 2a*:** o método foi avaliado em um regime rigoroso de treino e teste, com dias e sessões distintos, mantendo desempenho consistente mesmo diante da variabilidade temporal. Na média dos nove sujeitos, o classificador com a seleção de bandas feita pelo método proposto apresentou a maior acurácia ($83,57\% \pm 12,05$), superando Blankertz *et al.* (2008) ($76,62\% \pm 15,22$), Barachant *et al.* (2012) ($79,17\% \pm 15,19$) e Yamamoto *et al.* (2022) ($75,15\% \pm 18,94$). Destaca-se ainda que seis dos nove sujeitos atingiram acurácia superior a 80%.
- **Comparação com métodos da literatura:** a análise demonstrou que o método proposto, ao aprimorar a seleção espectral, melhorou o desempenho do classificador no espaço riemanniano em comparação com abordagens consolidadas. Mesmo nos casos em que não obteve o melhor resultado absoluto, a diferença não excedeu 3%.

Adicionalmente, a análise por pares de classes mostrou que o desempenho da classificação, ao incorporar o método proposto, não se restringe a uma única diferenciação, atingindo ou

superando os limiares de 70% e 80% reportados na literatura. A métrica *classDis*, por sua vez, revelou-se útil para indicar bandas relevantes, ainda que nem sempre tenha coincidido com as maiores acurácias.

Com base nos resultados apresentados, o método proposto, ao considerar a natureza espectral dos sinais, nos quais diferentes movimentos podem apresentar bandas relevantes distintas, apresentou, de modo geral, maior ganho de acurácia para o classificador no espaço riemanniano em comparação com outros métodos. O trabalho também evidenciou fragilidades de abordagens que utilizam expansão a partir do máximo global e indicou maneiras de mitigar esse problema na própria formulação.

6.1 Trabalhos futuros

Trabalhos futuros podem incluir:

- **Classificação multiclasse:** busca por melhores parâmetros e/ou desenvolvimento de técnicas para fusão de dados individuais, considerando as semelhanças observadas nas curvas de um mesmo sujeito.
- **Projeção para espaços tangentes:** investigar formas de transportar os resultados da técnica proposta no espaço riemanniano para um espaço euclidiano próximo, de modo a aproveitar técnicas de classificação consolidadas.

REFERÊNCIAS

- ALVES, D. R. d. S., TEIXEIRA, O. N., SILVA, C. D. Analisando o impacto do espectro do sinal de eeg na abordagem via geometria riemanniana. In: **Anais do 15. Congresso Brasileiro de Inteligência Computacional**. Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Inteligência Computacional, 2021. (CBIC 2021), p. 1–6.
- ANGULO-SHERMAN, I. N., LEÓN-DOMÍNGUEZ, U., MARTINEZ-TORTEYA, A., FRAGOSO-GONZÁLEZ, G. A., MARTÍNEZ-PÉREZ, M. V. Proficiency in motor imagery is linked to the lateralization of focused erd patterns and beta pdc. **Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation**, Springer Science and Business Media LLC, v. 22, n. 1, fev. 2025. ISSN 1743-0003.
- ARSIGNY, V., FILLARD, P., PENNEC, X., AYACHE, N. Log-euclidean metrics for fast and simple calculus on diffusion tensors. **Magnetic Resonance in Medicine**, Wiley, v. 56, n. 2, p. 411–421, jun. 2006. ISSN 1522-2594.
- Associação Alberto Santos Dumont para Apoio à Pesquisa. **Projeto Andar de Novo**. São Paulo, SP: Associação Alberto Santos Dumont para Apoio à Pesquisa, 2020. Disponível em: <<https://www.aasdap.org.br/projeto-andar-de-novo>>.
- BARACHANT, A., BONNET, S., CONGEDO, M., JUTTEN, C. Multiclass brain–computer interface classification by riemannian geometry. **IEEE Transactions on Biomedical Engineering**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 59, n. 4, p. 920–928, abr. 2012. ISSN 1558-2531.
- BASHIVAN, P., RISH, I., YEASIN, M., CODELLA, N. Learning representations from eeg with deep recurrent-convolutional neural networks. arXiv, 2015.
- BEAR, M. F., CONNORS, B. W., PARADISO, M. A. **Neurociências: Desvendando o Sistema Nervoso**. 4. ed.. ed. Porto Alegre: Artmed, 2017. EBook ISBN: 978-85-8271-433-1. ISBN 978-85-8271-432-4.
- BHATIA, R. **Positive Definite Matrices**. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2009. ISBN 9781400827787.
- BLANKERTZ, B., TOMIOKA, R., LEMM, S., KAWANABE, M., MULLER, K.-r. Optimizing spatial filters for robust eeg single-trial analysis. **IEEE Signal Processing Magazine**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 25, n. 1, p. 41–56, 2008. ISSN 1053-5888.
- BOUGRAIN, L. Medical applications: Neuroprostheses and neurorehabilitation. In: CLERC, M., BOUGRAIN, L., LOTTE, F. (Ed.). **Brain–Computer Interfaces 2**. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd, 2016. cap. 2, p. 29–41. ISBN 9781119332428. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781119332428.ch2>>.
- BRUNNER, C., LEEB, R., MÜLLER-PUTZ, G. R., SCHLÖGL, A., PFURTSCHELLER, G. **BCI Competition 2008 – Graz data set A**. 2008. Disponível em: <<http://www.bbc.de/competition/iv/>>. Acesso em: 7 ago. 2025. EEG de 9 sujeitos com imaginação motora (mão esquerda, mão direita, pés e língua), 2 sessões por sujeito, formato GDF.
- CONGEDO, M., BARACHANT, A., BHATIA, R. Riemannian geometry for eeg-based brain-computer interfaces; a primer and a review. **Brain-Computer Interfaces**, Informa UK Limited, v. 4, n. 3, p. 155–174, mar. 2017. ISSN 2326-2621.

DRYDEN, I. L., MARDIA, K. V. **Statistical Shape Analysis, with Applications in R**. Chichester: Wiley, 2016. ISSN 1940-6347. ISBN 9781119072492.

ENGEL, A. K., FRIES, P. Beta-band oscillations—signalling the status quo? **Current Opinion in Neurobiology**, v. 20, n. 2, p. 156–165, 2010. ISSN 0959-4388. Cognitive neuroscience. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0959438810000395>>.

FLETCHER, P., LU, C., PIZER, S., JOSHI, S. Principal geodesic analysis for the study of nonlinear statistics of shape. **IEEE Transactions on Medical Imaging**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 23, n. 8, p. 995–1005, ago. 2004. ISSN 0278-0062.

HALDER, S., VARKUTI, B., BOGDAN, M., KÜBLER, A., ROSENSTIEL, W., SITARAM, R., BIRBAUMER, N. Prediction of brain-computer interface aptitude from individual brain structure. **Frontiers in Human Neuroscience**, Frontiers Media SA, v. 7, 2013. ISSN 1662-5161.

KWON, O.-Y., LEE, M.-H., GUAN, C., LEE, S.-W. Subject-independent brain-computer interfaces based on deep convolutional neural networks. **IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 31, n. 10, p. 3839–3852, out. 2020. ISSN 2162-2388.

KÜBLER, A., NEUMANN, N., KAISER, J., KOTCHOUBEY, B., HINTERBERGER, T., BIRBAUMER, N. P. Brain-computer communication: Self-regulation of slow cortical potentials for verbal communication. **Archives of Physical Medicine and Rehabilitation**, Elsevier BV, v. 82, n. 11, p. 1533–1539, nov. 2001. ISSN 0003-9993.

LOTTE, F., JEUNET, C. Defining and quantifying users' mental imagery-based bci skills: a first step. **Journal of Neural Engineering**, IOP Publishing, v. 15, n. 4, p. 046030, jun. 2018. ISSN 1741-2552.

MABY, E. Technical requirements for high-quality eeg acquisition. In: KOTZ, S., JOHNSON, N. L. (Ed.). **Brain-Computer Interfaces 2**. Springer New York, 2016. cap. 8, p. 143–161. ISBN 9781119332428. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781119332428.ch8>>.

MOAKHER, M. A differential geometric approach to the geometric mean of symmetric positive-definite matrices. **SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications**, Society for Industrial & Applied Mathematics (SIAM), v. 26, n. 3, p. 735–747, jan. 2005. ISSN 1095-7162.

MRIDHA, M. F., DAS, S. C., KABIR, M. M., LIMA, A. A., ISLAM, M. R., WATANOBE, Y. Brain-computer interface: Advancement and challenges. **Sensors**, MDPI AG, v. 21, n. 17, p. 5746, ago. 2021. ISSN 1424-8220.

NEUPER, C., PFURTSCHELLER, G. Event-related dynamics of cortical rhythms: frequency-specific features and functional correlates. **International Journal of Psychophysiology**, v. 43, n. 1, p. 41–58, 2001.

PALUMBO, A., GRAMIGNA, V., CALABRESE, B., IELPO, N. Motor-imagery eeg-based bcis in wheelchair movement and control: A systematic literature review. **Sensors**, MDPI AG, v. 21, n. 18, p. 6285, set. 2021. ISSN 1424-8220.

PENNEC, X., FILLARD, P., AYACHE, N. A riemannian framework for tensor computing. **International Journal of Computer Vision**, Springer Science and Business Media LLC, v. 66, n. 1, p. 41–66, jan. 2006. ISSN 1573-1405.

- PERDIKIS, S., LEEB, R., WILLIAMSON, J., RAMSAY, A., TAVELLA, M., DESIDERI, L., HOOGERWERF, E.-J., AL-KHODAIRY, A., MURRAY-SMITH, R., MILLÁN, J. d. R. Clinical evaluation of braintree, a motor imagery hybrid bci speller. **Journal of Neural Engineering**, IOP Publishing, v. 11, n. 3, p. 036003, abr. 2014. ISSN 1741-2552.
- PERDIKIS, S., TONIN, L., MILLAN, J. del R. Brain racers. **IEEE Spectrum**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 54, n. 9, p. 44–51, set. 2017. ISSN 0018-9235.
- PFURTSCHELLER, G., NEUPER, C. Motor imagery and direct brain-computer communication. **Proceedings of the IEEE**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 89, n. 7, p. 1123–1134, jul. 2001. ISSN 0018-9219.
- PFURTSCHELLER, G., NEUPER, C., KRAUSZ, G. Functional dissociation of lower and upper frequency mu rhythms in relation to voluntary limb movement. **Clinical Neurophysiology**, v. 111, n. 10, p. 1873–1879, 2000. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S1388-2457\(00\)00428-4](https://doi.org/10.1016/S1388-2457(00)00428-4)>.
- PFURTSCHELLER, G., PICHLER-ZALAUDEK, K., NEUPER, C. Erd and ers in voluntary movement of different limbs. In: PFURTSCHELLER, G., SILVA, F. H. Lopes da (Ed.). **Event-Related Desynchronization**. Amsterdam: Elsevier Science B.V., 1999, (Handbook of Electroencephalography and Clinical Neurophysiology. Revised Series, v. 6). p. 245–268.
- PLATE, A., HELL, F., MEHRKENS, J. H., KOEGLSPERGER, T., BOVET, A., STANSLASKI, S., BÖTZEL, K. Peaks in the beta band of the human subthalamic nucleus: a case for low beta and high beta activity. **Journal of Neurosurgery**, Journal of Neurosurgery Publishing Group (JNSPG), v. 136, n. 3, p. 672–680, mar. 2022. ISSN 1933-0693.
- POURAHMADI, M. **High-Dimensional Covariance Estimation**. Hoboken, NJ: Wiley, 2013. ISSN 1940-6347. ISBN 9781118573617.
- RAO, C. R. Information and the accuracy attainable in the estimation of statistical parameters. In: KOTZ, S., JOHNSON, N. L. (Ed.). **Breakthroughs in Statistics**. New York, NY: Springer, 1992, (Springer Series in Statistics). p. 235–247. ISBN 9781461209195.
- SAHA, S., MAMUN, K. A., AHMED, K., MOSTAFA, R., NAIK, G. R., DARVISHI, S., KHANDOKER, A. H., BAUMERT, M. Progress in brain computer interface: Challenges and opportunities. **Frontiers in Systems Neuroscience**, Frontiers Media SA, v. 15, fev. 2021. ISSN 1662-5137.
- SAICHO, T., BOONBRAHM, P., PUNSAWAD, Y. Investigating user proficiency of motor imagery for eeg-based bci system to control simulated wheelchair. **Sensors**, MDPI AG, v. 22, n. 24, p. 9788, dez. 2022. ISSN 1424-8220.
- SCHLÖGL, A. **BCI Competition III – Dataset IIIa**. 2005. Disponível em: <<http://www.bbci.de/competition/iii/>>. Acesso em: 7 ago. 2025. EEG de 3 sujeitos com imaginação motora de quatro classes (mão esquerda, mão direita, pé, língua); 60 canais, 60 ensaios por classe; formato GDF.
- SILVA, C. D. **Processamento de sinais de EEG para classificação de tarefas motoras em sistemas de interface cérebro-máquina**. Tese (Tese (Doutorado em Engenharia de Automação e Sistemas)) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2017. Defendida em 9 de maio de 2017.
- SUTTER, R., KAPLAN, P. W., SCHOMER, D. L. **Historical Aspects of Electroencephalography**. New York, NY: Oxford University Press, 2017.

TEPLAN, M. Fundamental of eeg measurement. **MEASUREMENT SCIENCE REVIEW**, v. 2, p. 1–11, 01 2002. Disponível em: <<https://www.measurement.sk/2002/S2/Teplan.pdf>>.

TIBERMACHINE, I. E., RUSSO, S., TIBERMACHINE, A., RABEHI, A., NAIL, B., KADRI, K., NAPOLI, C. **Riemannian Geometry-Based EEG Approaches: A Literature Review**. Ithaca, NY, USA: arXiv, 2024. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2407.20250>>.

WILLIAMSON, J., MURRAY-SMITH, R., BLANKERTZ, B., KRAULEDAT, M., MÜLLER, K.-R. Designing for uncertain, asymmetric control: Interaction design for brain–computer interfaces. **International Journal of Human-Computer Studies**, Elsevier BV, v. 67, n. 10, p. 827–841, out. 2009. ISSN 1071-5819.

WOLPAW, J., WOLPAW, E. W. **Brain–Computer Interfaces Principles and Practice**. New York, NY: Oxford University Press, 2012. ISBN 9780195388855.

WOLPAW, J. R., BIRBAUMER, N., MCFARLAND, D. J., PFURTSCHELLER, G., VAUGHAN, T. M. Brain–computer interfaces for communication and control. **Clinical Neurophysiology**, Elsevier BV, v. 113, n. 6, p. 767–791, jun. 2002. ISSN 1388-2457.

YAMAMOTO, M. S., LOTTE, F., YGER, F., CHEVALLIER, S. Class-distinctiveness-based frequency band selection on the riemannian manifold for oscillatory activity-based bcis: preliminary results. In: Ieee engineering in medicine and biology society. **2022 44th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine & Biology Society (EMBC)**. Glasgow, United Kingdom: IEEE, 2022. p. 3690–3693.

YGER, F., BERAR, M., LOTTE, F. Riemannian approaches in brain-computer interfaces: A review. **IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 25, n. 10, p. 1753–1762, out. 2017. ISSN 1558-0210.

APÊNDICE A – GRÁFICOS

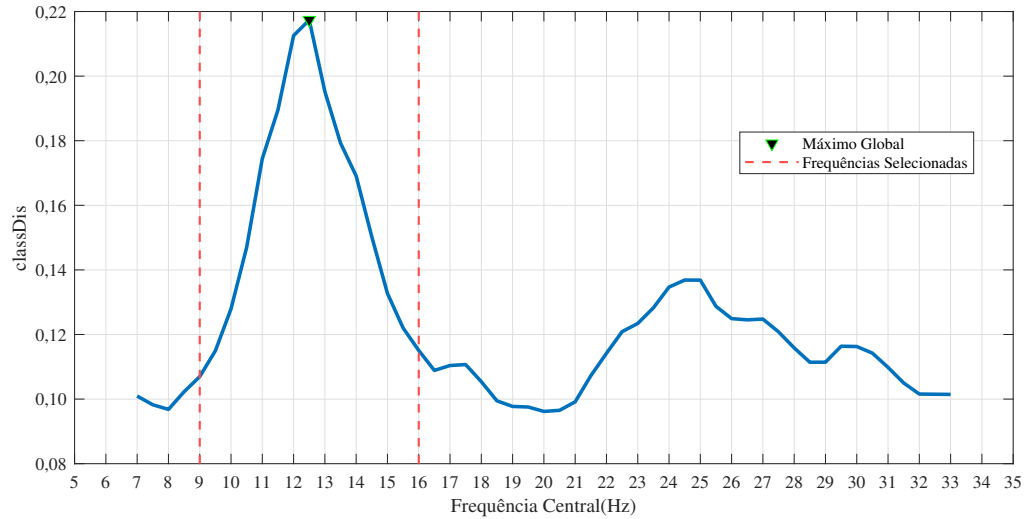


Figura 33 – Distribuição da métrica *ClassDis* para o sujeito 1, utilizando o método proposto por Yamamoto *et al.* (2022) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).

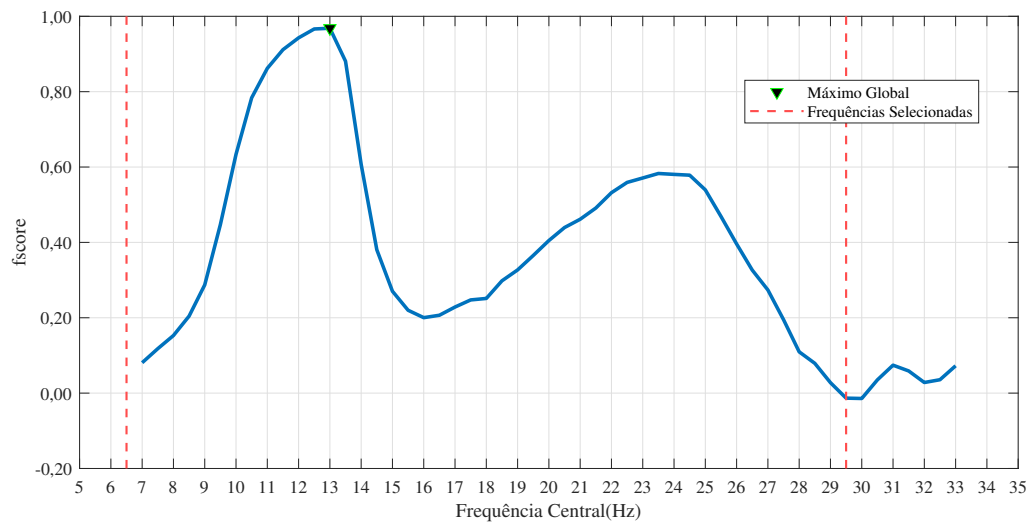


Figura 34 – Distribuição da métrica *fscore* para o sujeito 1, utilizando o método proposto por Blankertz *et al.* (2008) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).

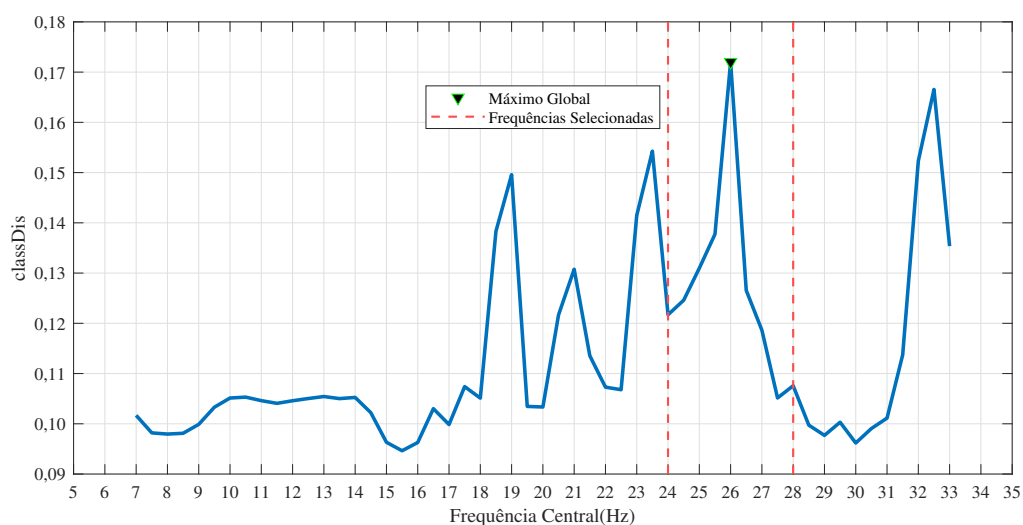


Figura 35 – Distribuição da métrica *ClassDis* para o sujeito 2, utilizando o método proposto por Yamamoto *et al.* (2022) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).

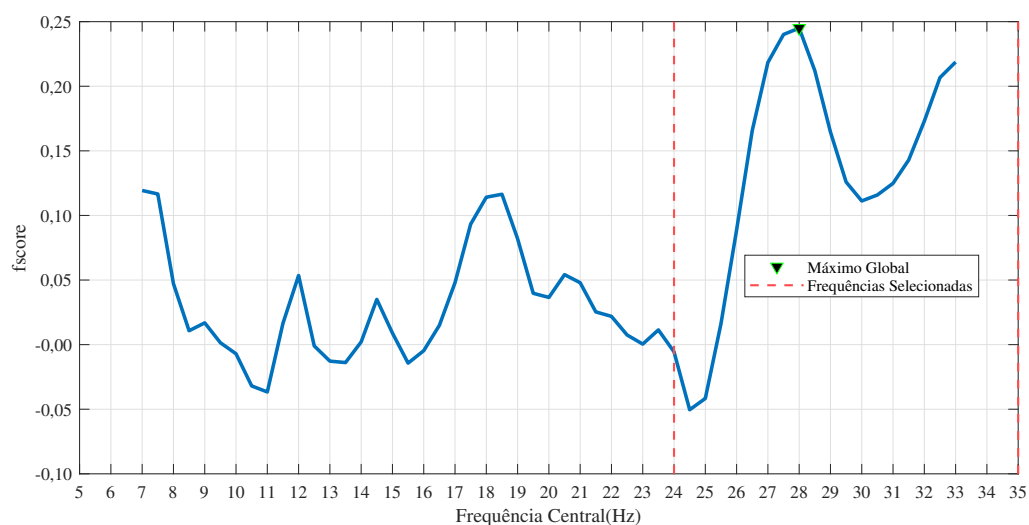


Figura 36 – Distribuição da métrica *fscore* para o sujeito 2, utilizando o método proposto por Blankertz *et al.* (2008) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).

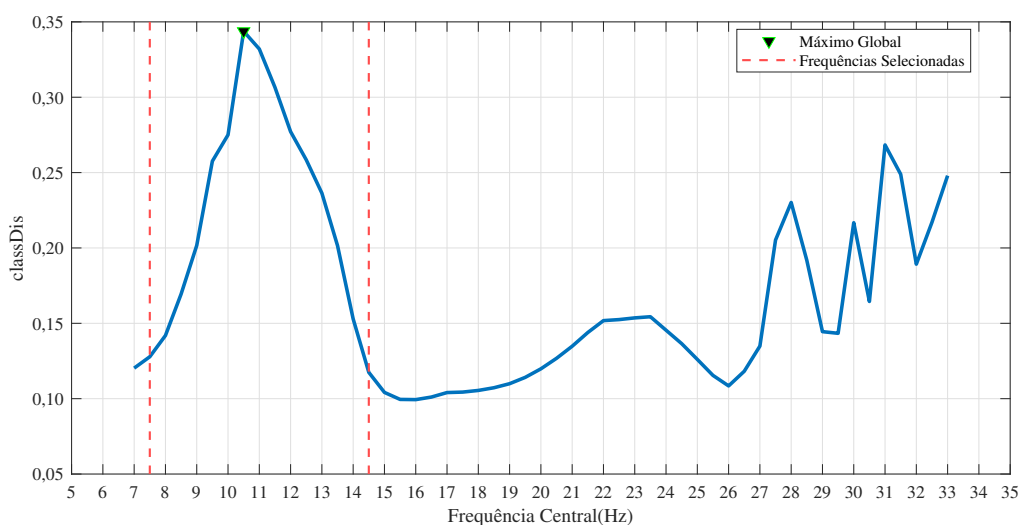


Figura 37 – Distribuição da métrica *ClassDis* para o sujeito 3, utilizando o método proposto por Yamamoto *et al.* (2022) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).

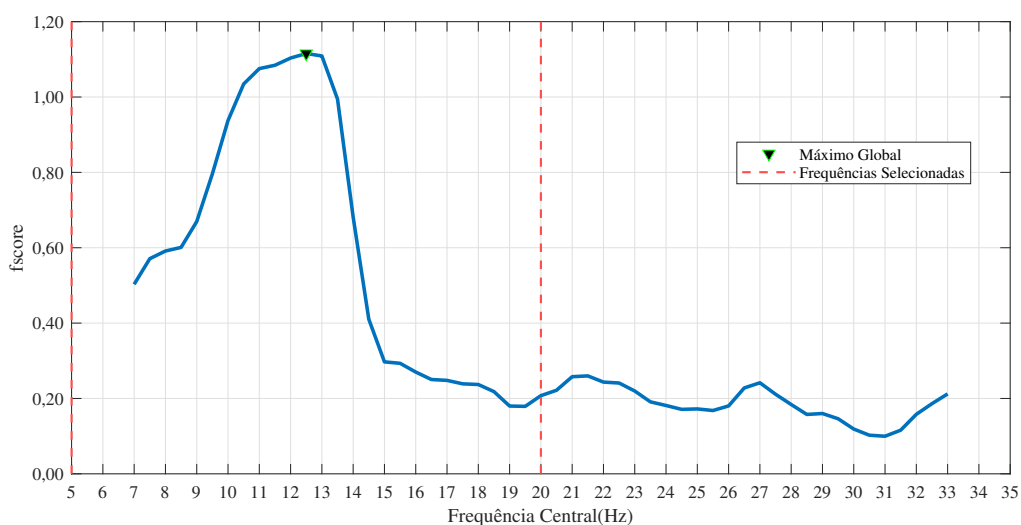


Figura 38 – Distribuição da métrica *fscore* para o sujeito 3, utilizando o método proposto por Blankertz *et al.* (2008) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).

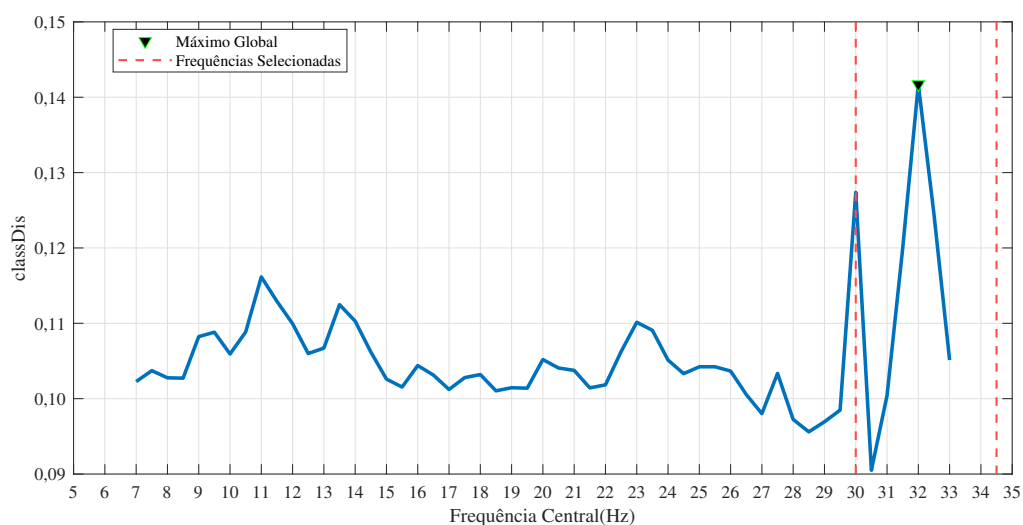


Figura 39 – Distribuição da métrica *ClassDis* para o sujeito 4, utilizando o método proposto por Yamamoto *et al.* (2022) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).

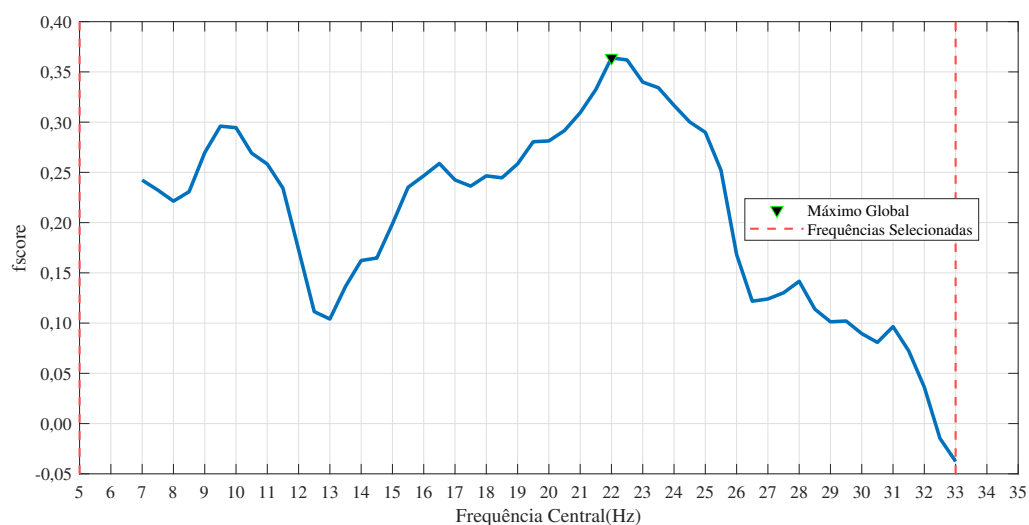


Figura 40 – Distribuição da métrica *fscore* para o sujeito 4, utilizando o método proposto por Blankertz *et al.* (2008) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).

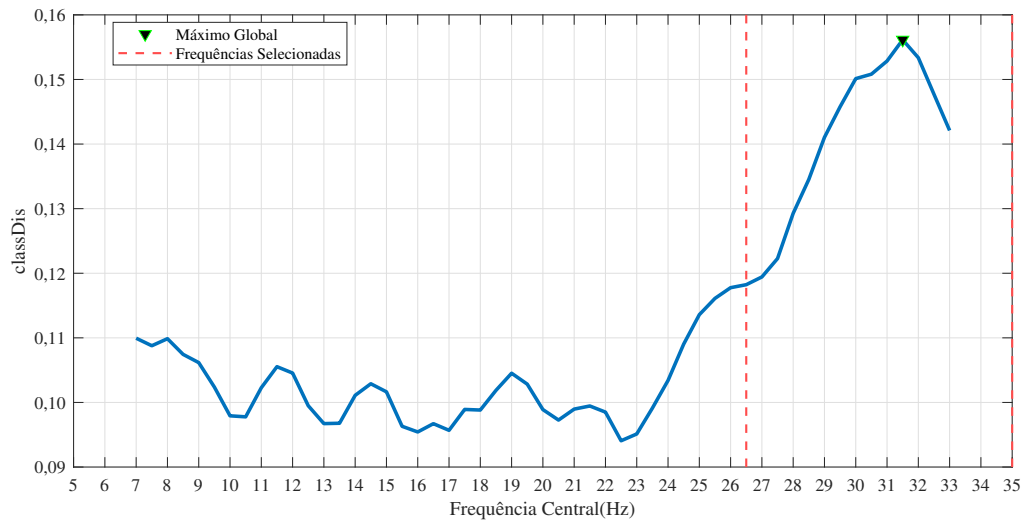


Figura 41 – Distribuição da métrica *ClassDis* para o sujeito 5, utilizando o método proposto por Yamamoto *et al.* (2022) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).

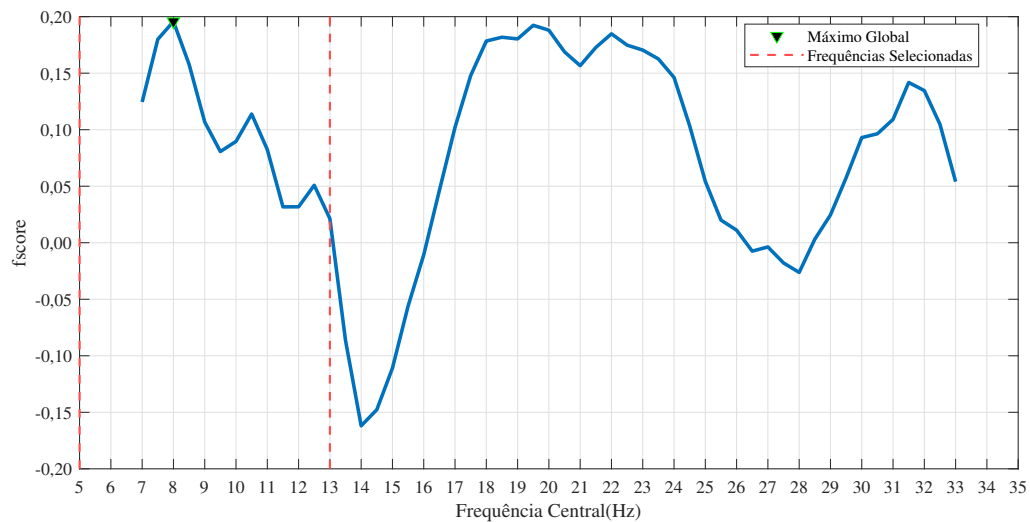


Figura 42 – Distribuição da métrica *fscore* para o sujeito 5, utilizando o método proposto por Blankertz *et al.* (2008) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).

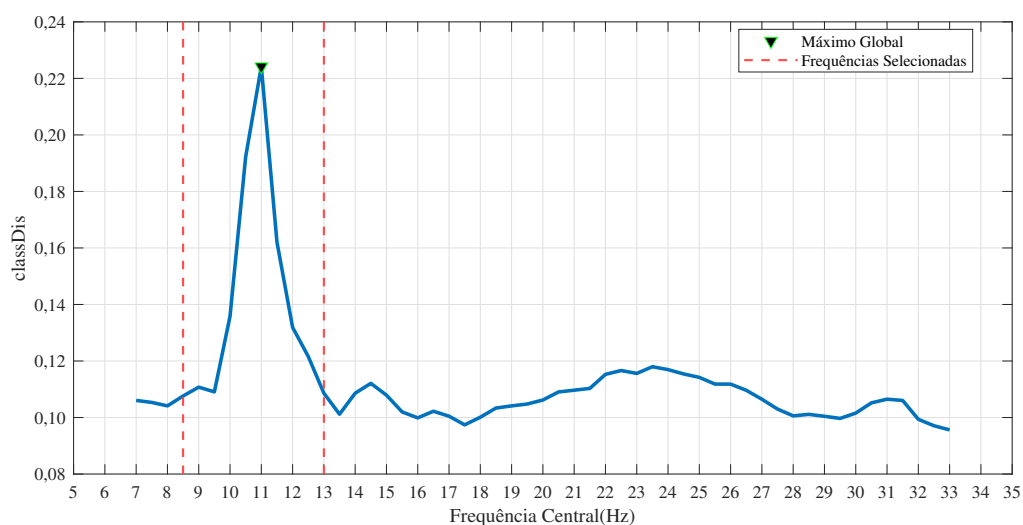


Figura 43 – Distribuição da métrica *ClassDis* para o sujeito 6, utilizando o método proposto por Yamamoto *et al.* (2022) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).

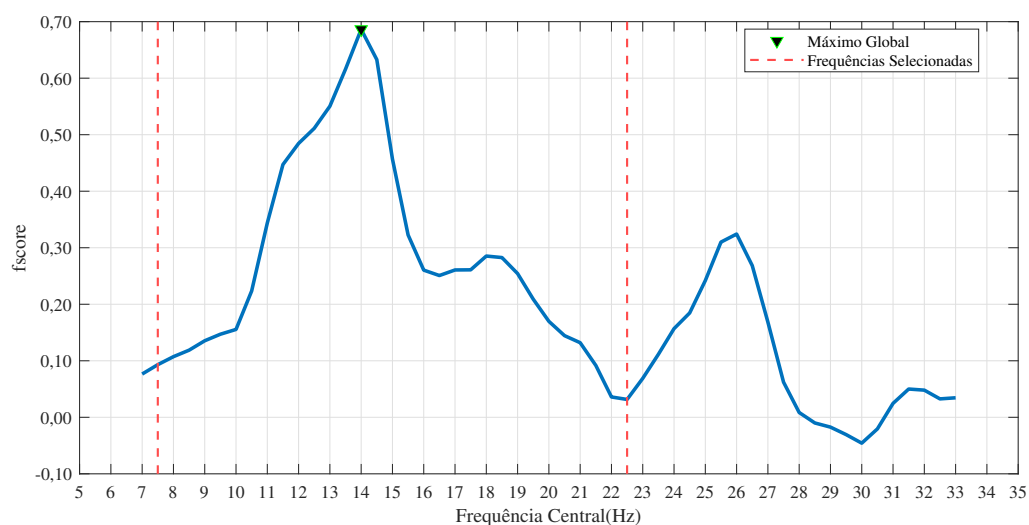


Figura 44 – Distribuição da métrica *fscore* para o sujeito 6, utilizando o método proposto por Blankertz *et al.* (2008) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).

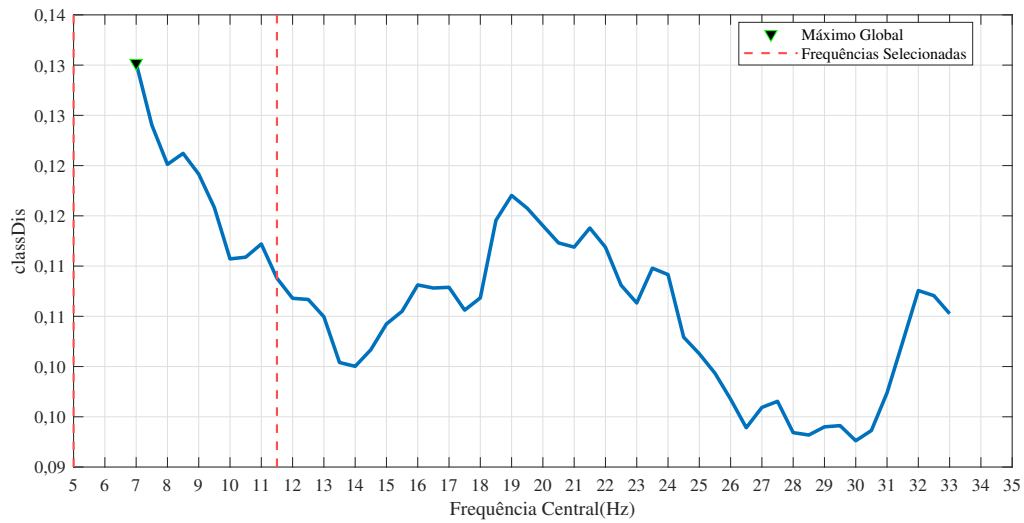


Figura 45 – Distribuição da métrica *ClassDis* para o sujeito 7, utilizando o método proposto por Yamamoto *et al.* (2022) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).

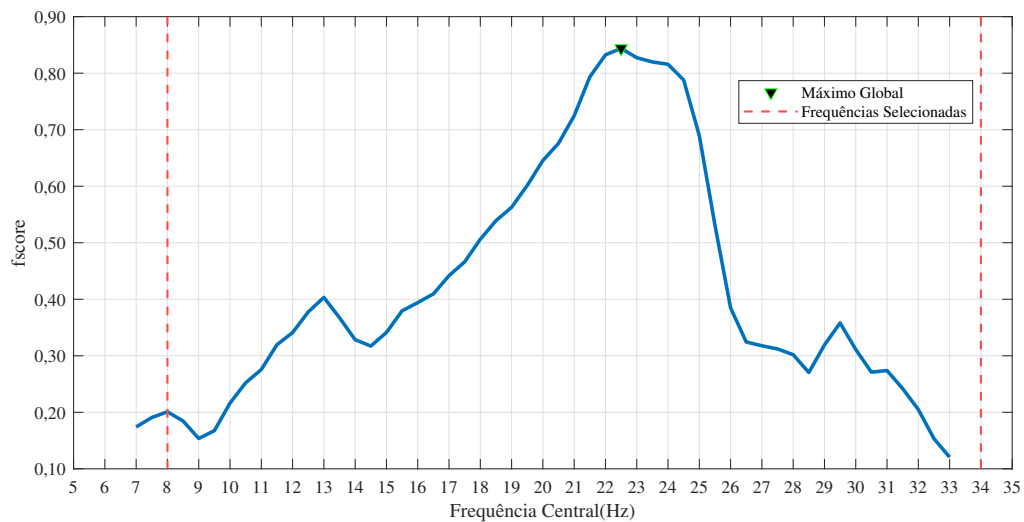


Figura 46 – Distribuição da métrica *fscore* para o sujeito 7, utilizando o método proposto por Blankertz *et al.* (2008) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).

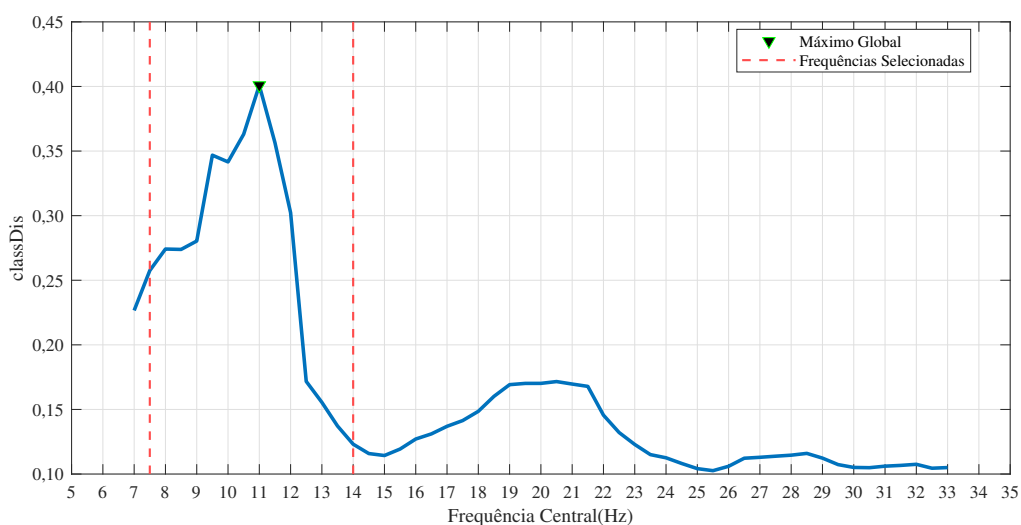


Figura 47 – Distribuição da métrica *ClassDis* para o sujeito 8, utilizando o método proposto por Yamamoto *et al.* (2022) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).

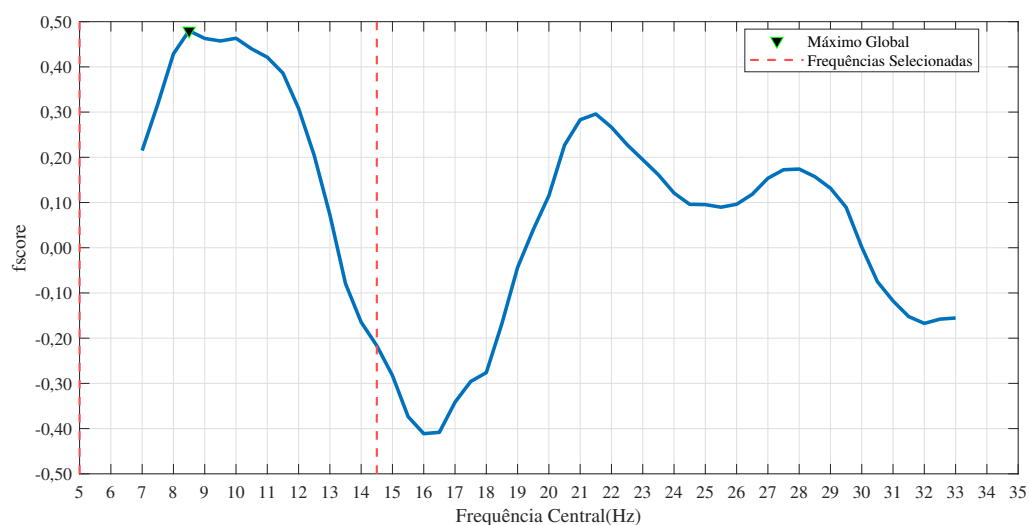


Figura 48 – Distribuição da métrica *fscore* para o sujeito 8, utilizando o método proposto por Blankertz *et al.* (2008) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).

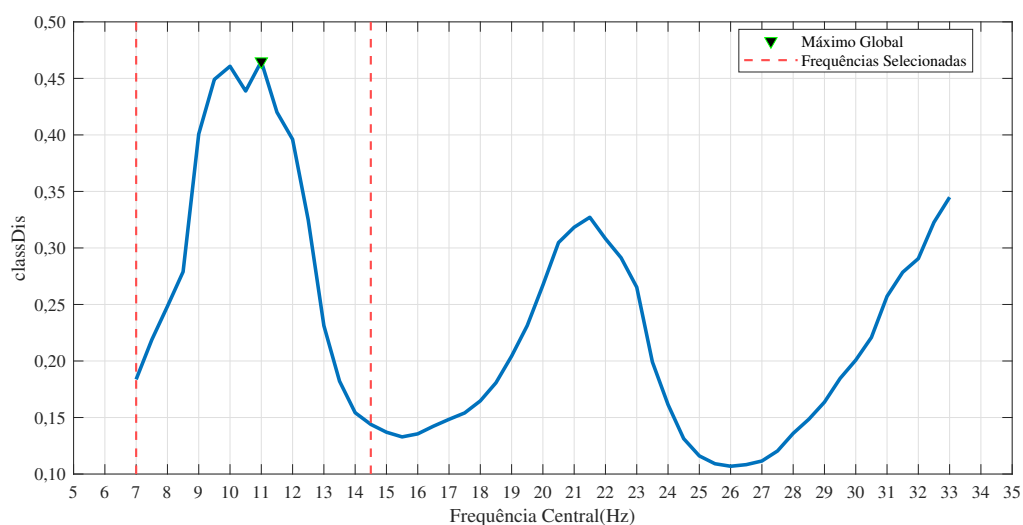


Figura 49 – Distribuição da métrica *ClassDis* para o sujeito 9, utilizando o método proposto por Yamamoto *et al.* (2022) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).

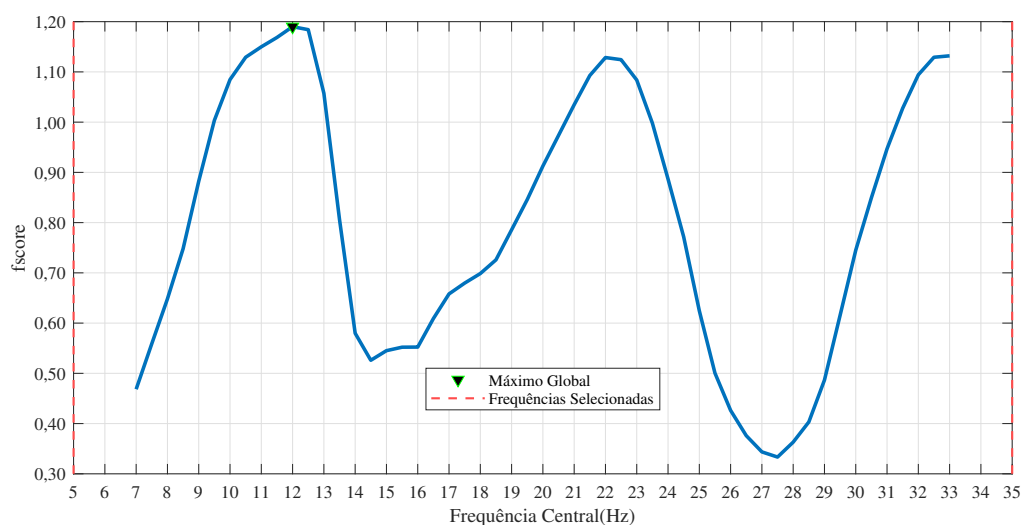


Figura 50 – Distribuição da métrica *fscore* para o sujeito 9, utilizando o método proposto por Blankertz *et al.* (2008) com filtros passa-banda Butterworth de 4ª ordem (largura de banda de 4 Hz e sobreposição de 0,5 Hz).

ANEXO A – ALGORITMO DE ESTIMATIVA DA MÉDIA DE RIEMANN PARA MATRIZES SPD

Algoritmo A – Estimativa da Média Riemanniana

Adaptado de (Silva, 2017; Moakher, 2005)

Entradas:

- $\{C_i\}_{i=1}^N \subset \mathcal{P}_M$: conjunto de N matrizes de covariância SPD;
- $\varepsilon > 0$: tolerância para o critério de parada;
- $T_{\max}$: número máximo de iterações.

Saída:

- $\bar{C} \in \mathcal{P}_M$: média Riemanniana das matrizes $\{C_i\}$.

Procedimento:

1. Inicialize:

$$\bar{C}^{(0)} \leftarrow \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i, \quad t \leftarrow 0$$

2. **Repita**

a) Calcule:

$$S \leftarrow \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log \left((\bar{C}^{(t)})^{-1/2} C_i (\bar{C}^{(t)})^{-1/2} \right)$$

b) Atualize:

$$\bar{C}^{(t+1)} \leftarrow \bar{C}^{(t)1/2} \exp(S) \bar{C}^{(t)1/2}$$

c) $t \leftarrow t + 1$

3. **Até que** $\|S\|_F < \varepsilon$ **ou** $t \geq T_{\max}$

ANEXO B – MÉTRICAS RIEMANNIANAS NO ESPAÇO DE MATRIZES SPD

O espaço das matrizes simétricas definidas positivas (SPD) possui uma estrutura de variedade Riemanniana que permite a aplicação de ferramentas geométricas avançadas na análise de sinais de EEG, especialmente em Interfaces Cérebro-Computador (BCIs). Neste apêndice, são descritas algumas das principais métricas utilizadas para medir distâncias entre matrizes SPD, conforme discutido (Tibermacine *et al.*, 2024).

Métrica Affine-Invariant (AIRM)

A métrica affine-invariant é uma das mais utilizadas na análise de matrizes SPD, por ser invariante sob transformações lineares congruentes (Tibermacine *et al.*, 2024; Fletcher *et al.*, 2004). A distância geodésica entre duas matrizes P_1 e P_2 com essa métrica é dada por:

$$\delta_{\text{AIRM}}(P_1, P_2) = \left\| \log \left(P_1^{-1/2} P_2 P_1^{-1/2} \right) \right\|_F, \quad (\text{B.1})$$

onde $\log(\cdot)$ é o logaritmo matricial e $\|\cdot\|_F$ é a norma de Frobenius.

Métrica Log-Euclidiana (LEM)

A métrica log-euclidiana transforma as matrizes SPD para o domínio Euclidiano via logaritmo matricial, permitindo aplicar medidas convencionais (Tibermacine *et al.*, 2024; Arsigny *et al.*, 2006):

$$\delta_{\text{LEM}}(P_1, P_2) = \|\log(P_1) - \log(P_2)\|_F. \quad (\text{B.2})$$

Sua média é computada por:

$$G = \exp \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log(P_i) \right), \quad (\text{B.3})$$

com $\exp(\cdot)$ sendo a exponencial matricial.

Outras Métricas Complementares

Além da AIRM e da LEM, outras métricas também são exploradas:

- **Fisher-Rao:** com base em geometria da informação, útil para interpretação estatística (Tibermachine *et al.*, 2024; Rao, 1992).
- **Cholesky:** baseada na decomposição triangular inferior, facilita cálculos em otimização (Tibermachine *et al.*, 2024; Pourahmadi, 2013).
- **Procrustes:** usada para comparação de formas estruturais em matrizes SPD (Tibermachine *et al.*, 2024; Dryden; Mardia, 2016).