



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ
IFCE *CAMPUS* FORTALEZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

FRANCILIANE ALBUQUERQUE FORMIGA

VISUALIZAÇÕES E PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS E RECURSIVAS DOS
NÚMEROS METÁLICOS À LUZ DA ENGENHARIA DIDÁTICA: USO DAS
BARRAS DE CUISENAIRE, TABULEIRO E LADRILHOS

FORTALEZA

2026

FRANCILIANE ALBUQUERQUE FORMIGA

VISUALIZAÇÕES E PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS E RECURSIVAS DOS
NÚMEROS METÁLICOS À LUZ DA ENGENHARIA DIDÁTICA: USO DAS BARRAS
DE CUISENAIRE, TABULEIRO E LADRILHOS

Dissertação apresentada ao Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) - *Campus* Fortaleza, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Francisca Helena de Oliveira Holanda.

Coorientadora: Prof.^a Dr.^a Maria José Costa dos Santos.

FORTALEZA

2026

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal do Ceará - IFCE
Sistema de Bibliotecas - SIBI
Ficha catalográfica elaborada pelo SIBI/IFCE, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F723v Formiga, Franciliane Albuquerque.

Visualizações e propriedades fundamentais e recursivas dos números metálicos à luz da engenharia didática: uso das barras de cuisenaire, tabuleiro e ladrilhos / Franciliane Albuquerque Formiga. - 2026.
163 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado) – Instituto Federal do Ceará, Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Campus Fortaleza, 2026.
Orientação: Profa. Dra. Francisca Helena de Oliveira Holanda.
Coorientação: Profa. Dra. Maria José Costa dos Santos.

1. Números metálicos. 2. Engenharia didática. 3. Barras de cuisenaire. 4. Tabuleiro. 5. Ladrilhos. I. Título.

CDD 510.07

FRANCILIANE ALBUQUERQUE FORMIGA

VISUALIZAÇÕES E PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS E RECURSIVAS DOS
NÚMEROS METÁLICOS À LUZ DA ENGENHARIA DIDÁTICA: USO DAS BARRAS
DE CUISENAIRE, TABULEIRO E LADRILHOS

Dissertação apresentada ao Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) - *Campus* Fortaleza, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 12/08/2026.

BANCA EXAMINADORA

Prof.^a Dr.^a Francisca Helena de Oliveira Holanda. (Orientadora)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) – *Campus* Fortaleza

Prof.^a Dr.^a Maria José Costa dos Santos (Coorientadora)
Universidade Federal do Ceará (UFC) – *Campus* Fortaleza

Prof. Dr. Cleidivan Alves dos Santos
Universidade Federal do Delta do Parnaíba (UFDPAr)

Prof.^a Dr.^a Silvany Bastos Santiago
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Prof.^a Dr.^a Glessiane Coeli Freitas Batista Prata
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Francisco José Alves de Aquino
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) – *Campus* Fortaleza

A Deus, antes de tudo.

A minha mãe, dona Eliane, eterna professora de matemática (*in memoriam*),
meu pai, Francisco Paulo. Ao meu esposo Jean Carlos e aos meus filhos Johnatan e Jelyane, como inspiração aos estudos. Aos mestres com admiração e respeito.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo discernimento, força e por me sustentar até aqui. Agradeço à minha família, pelo amor, apoio e incentivo incondicional, fundamentos indispensáveis para que eu pudesse trilhar esta caminhada acadêmica. Em especial, ao meu pai, Francisco Paulo de Albuquerque, homem simples e de pouco estudo; por outro lado, possuidor de uma sabedoria imensurável, que, mesmo distante dos espaços formais de escolarização, sempre me ensinou os valores da honestidade, da dignidade, do trabalho e da perseverança.

À minha mãe, Raimunda Eliane de Sousa Albuquerque (*in memoriam*), eterna professora de matemática, cuja ausência física é marcada por uma saudade perene. No entanto, sua presença afetiva permanece viva em cada conquista alcançada. Mulher guerreira, resiliente e inspiradora, deixou em mim marcas profundas de amor, coragem e determinação, que continuam a iluminar e fortalecer minha trajetória. Ao meu irmão, Francisco José (*in memoriam*), a quem dedico esta vitória, por ter sido parte essencial da minha história e por permanecer eternamente presente em meu coração.

Ao meu esposo, Jean Carlos, amor da minha vida e companheiro de todas as horas, pela compreensão diante das ausências, pela paciência nos momentos difíceis e por incentivar-me quando eu achava que não daria certo. Sua presença é abrigo, zelo e força, amo-te!

Aos meus filhos, Jelyane Albuquerque Formiga e Johnatan Albuquerque Formiga, por serem fonte constante de amor, inspiração e motivação para seguir em frente. À minha nora, Aline Frota, exemplo de sensibilidade e dedicação familiar. E à minha neta, Lis Frota, cuja inocência traduz, em gestos simples e sorrisos sinceros, a leveza, a alegria e a esperança que renovam meus dias e dão sentido às minhas conquistas.

Aos meus amigos do coração, que compreenderam minhas ausências, dividiram comigo os desafios da caminhada escolar e estiveram presentes nos momentos mais delicados desta jornada: Keila Rodrigues, Karine Gomes, Karine Ferreira, Israel Bezerra, Régis Wendel, Aline Praxedes, Danilson Oliveira e tantos outros que fazem parte da família Diva Cabral. O carinho, a escuta, as palavras de incentivo, a confiança e o acolhimento de vocês foram essenciais para que eu permanecesse firme diante das adversidades.

Aos professores e professoras do Grupo de Estudos Tecendo Redes Cognitivas de Aprendizagem (G-TERCOA/CNPq/UFC), pelos conhecimentos compartilhados, reflexões construídas coletivamente e pelo compromisso com a produção científica, gratidão! Ao meu amigo Arnaldo Dias, pelo incentivo constante, pela generosidade e por sempre acreditar no meu potencial, expresso o meu mais profundo respeito e sinceros agradecimentos.

De maneira especial, à minha coorientadora, Professora Dr.^a Maria José Costa dos Santos, por sua sabedoria, sensibilidade e inestimáveis contribuições acadêmicas. Sua dedicação incansável à pesquisa, ao ensino e à extensão inspira diariamente nosso grupo de pesquisa e todos aqueles que têm o privilégio de aprender com seu exemplo. Registro meu mais profundo respeito, admiração e eterna gratidão pelo acolhimento, pela confiança, pelos ensinamentos e por tudo o que fez por mim ao longo desta trajetória. Sua generosidade, compromisso com a formação de pesquisadores e inabalável dedicação à educação permanecerão para sempre como inspiração, não apenas em minha caminhada acadêmica e profissional, mas também na de tantos outros que acreditam no poder transformador da educação.

À minha orientadora, Professora Dr.^a Francisca Helena de Oliveira Holanda, por ter me acolhido neste momento tão desafiador e decisivo da minha trajetória acadêmica, conduzindo-me com sensibilidade e confiança até a concretização deste antigo sonho.

Aos professores e às professoras do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PGECEM/IFCE) e da Rede Nordeste de Ensino (RENOEN/UFC), pelos conhecimentos compartilhados, pelo compromisso com a formação acadêmica e pelas valiosas contribuições ao meu crescimento intelectual. De modo especial, ao Prof. Dr. Francisco José Alves de Aquino, por sua maestria, serenidade e disponibilidade em me orientar e auxiliar ao longo deste percurso, tornando as aprendizagens ainda mais significativas. Às servidoras da secretaria, Raquel e Raquel Leal, pela atenção, disponibilidade e acolhimento, sempre demonstrados com profissionalismo, gentileza e dedicação.

De modo especial, ao Professor Dr. Francisco Régis Vieira Alves, expresse minha mais profunda gratidão pela dedicação e excelência acadêmica. Seus ensinamentos, reflexões, incentivo constante e experiências formativas iluminaram esta caminhada e contribuíram de maneira decisiva para minha constituição como pesquisadora.

A todos que direta ou indiretamente reforçaram o compromisso de carinho, amizade e colaboração para que a caminhada ficasse mais leve: obrigada!

"A matemática deriva seu saber, não dos conceitos, mas da construção deles."
(Kant, 2003, p. 590).

RESUMO

Sequências Numéricas Recorrentes ganharam maior notoriedade a partir da década de 1960, consolidando-se, na literatura contemporânea, como um campo profícuo de estudos. Nesse contexto, emerge o interesse em aprofundar os estudos acerca da Família dos Números Metálicos, representada por sequências recorrentes de segunda ordem, que se configura como um objeto epistêmico de elevada ubiquidade, embora ainda pouco estudada e explorada no âmbito da Educação Básica. Outrossim, esta pesquisa justifica-se por propor estratégias didático-pedagógicas capazes de favorecer a visualização, a interpretação, a generalização e a formalização das propriedades fundamentais e recursivas dessa família de sequências, contribuindo para a ampliação das possibilidades no ensino da Matemática. Nessa perspectiva, a investigação foi orientada pela seguinte questão: como ocorre o processo de ensino-aprendizagem das propriedades fundamentais e recursivas dos Números Metálicos (NM) a partir de um Curso de Extensão estruturado à luz da Engenharia Didática (ED) e mediado pelas barras de *Cuisenaire*, pelo tabuleiro $1 \times n$ e pelos ladrilhos? Diante disso, objetiva-se analisar o ensino-aprendizagem das propriedades fundamentais e recursivas dos NM por meio das contribuições de um Curso de Extensão fundamentado na Engenharia Didática e mediado pelas barras de *Cuisenaire*, pelo tabuleiro $1 \times n$ e pelos ladrilhos. O estudo fundamenta-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), cujos pressupostos subsidiaram a análise e a interpretação dos dados produzidos ao longo da dissertação. Metodologicamente, trata-se de uma pesquisa de natureza básica, com abordagem qualitativa e delineada como pesquisa participante, estruturada nas quatro fases da Engenharia Didática: Análises Preliminares, Concepção e Análise *a Priori*, Experimentação e Análise *a Posteriori*, e Validação. Na primeira etapa foi realizado um levantamento bibliográfico em produções disponíveis no Portal de Periódicos da CAPES e uma análise documental da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), identificando lacunas relacionadas ao ensino-aprendizagem dessas estruturas e de suas representações apoiadas em materiais manipuláveis. Na fase de Concepção e Análise *a Priori* foi elaborado um Curso de Extensão com seis tarefas didáticas progressivas, que permitiu antecipar possíveis estratégias de resolução e dificuldades passíveis de emergir durante a Experimentação, subsidiando a organização e as análises das vivências pedagógicas. A Experimentação contou com a participação de 15 professores que ensinam matemática na Educação Básica. A produção dos dados contemplou observações, registros escritos e gravações audiovisuais realizadas durante o desenvolvimento das seis tarefas didáticas, mediante aprovação do Comitê de Ética em Pesquisa do Instituto Federal de Educação, Ciência

e Tecnologia do Ceará (IFCE). As Análises *a Posteriori* e a Validação elucidaram que a articulação entre a Engenharia Didática, a TRRS e o uso das barras de *Cuisenaire*, do tabuleiro $1 \times n$ e dos ladrilhos potencializou a coordenação e as conversões entre registros de representação semiótica, favorecendo a compreensão das propriedades fundamentais e recursivas dos Números Metálicos e evidenciando as potencialidades didático-pedagógicas desses artefatos para o ensino-aprendizagem dessas estruturas matemáticas abstratas. Os resultados alcançados evidenciaram que as vivências progressivas do Curso de Extensão contribuíram para a compreensão das propriedades fundamentais e recursivas dos NM, ampliando as possibilidades de investigação nesse campo conceitual e apontando perspectivas promissoras para a continuidade desta pesquisa em estudos futuros.

Palavras-chave: Números Metálicos. Engenharia Didática. Barras de Cuisenaire. Tabuleiro. Ladrilhos.

ABSTRACT

Recurrent Numerical Sequences gained greater prominence from the 1960s onward, becoming established in contemporary literature as a fruitful field of study. In this context, there is a growing interest in deepening studies on the Family of Metallic Numbers, represented by second-order recurrent sequences, which constitutes an epistemic object of considerable ubiquity, although it remains relatively underexplored in Basic Education. Furthermore, this research is justified by proposing didactic-pedagogical strategies capable of fostering the visualization, interpretation, generalization, and formalization of the fundamental and recursive properties of this family of sequences, thereby broadening possibilities for Mathematics teaching. From this perspective, the investigation was guided by the following question: how does the teaching-learning process of the fundamental and recursive properties of Metallic Numbers (MN) occur through an Extension Course structured according to Didactical Engineering (DE) and mediated by Cuisenaire rods, a $1 \times n$ board, and tiles? Accordingly, the objective is to analyze the teaching-learning process of the fundamental and recursive properties of MN through the contributions of an Extension Course grounded in Didactical Engineering and mediated by Cuisenaire rods, a $1 \times n$ board, and tiles. The study is theoretically grounded in the Theory of Registers of Semiotic Representation (TRSR), whose assumptions supported the analysis and interpretation of the data produced throughout the dissertation. Methodologically, this is basic research with a qualitative approach, designed as participatory research and structured according to the four phases of Didactical Engineering: Preliminary Analyses, Design and *A Priori* Analysis, Experimentation, and *A Posteriori* Analysis and Validation. In the first phase, a bibliographic survey of studies available in the CAPES Journal Portal and a documentary analysis of the Brazilian National Common Core Curriculum (BNCC) were conducted, identifying gaps related to the teaching and learning of these structures and their representations supported by manipulatives. During the Design and *A Priori* Analysis phase, an Extension Course consisting of six progressive didactic tasks was developed, which made it possible to anticipate potential solution strategies and difficulties that could emerge during the Experimentation phase, thereby supporting the organization and analysis of the pedagogical experiences. The Experimentation phase involved 15 teachers who teach Mathematics in Basic Education. Data production included observations, written records, and audiovisual recordings made throughout the six didactic tasks, following approval by the Research Ethics Committee of the Federal Institute of Education, Science and Technology of Ceará (IFCE). The *A Posteriori* Analyses and Validation revealed that the articulation between

Didactical Engineering, TRSR, and the use of Cuisenaire rods, the $1 \times n$ board, and tiles enhanced the coordination and conversion between registers of semiotic representation, fostering an understanding of the fundamental and recursive properties of Metallic Numbers and highlighting the didactic-pedagogical potential of these artifacts for the teaching and learning of such abstract mathematical structures. The results showed that the progressive experiences developed throughout the Extension Course contributed to the understanding of the fundamental and recursive properties of MN, broadening the possibilities for research in this conceptual field and pointing to promising perspectives for the continuation of this research in future studies.

Keywords: Metallic means. Didactic Engineering. Cuisenaire Rods. Game Board. Tiles.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Desenho da pesquisa	32
Figura 2 –	Saber e conhecimento	34
Figura 3 –	Leonardo de Pisa	47
Figura 4 –	O Módulo de <i>Le Corbusier</i> (1948).....	47
Figura 5 –	Segmento Áureo.....	50
Figura 6 –	Barras de Cuisenaire ou Barras “C”	58
Figura 7 –	A noção de n – tabuleiro e a Sequência de Fibonacci	60
Figura 8 –	Representação primária da Sequência de Ouro via tabuleiro $1 \times n$	60
Figura 9 –	Representação didática da relação entre os tabuleiros.....	61
Figura 10 –	Os ladrilhos do tabuleiro físico	64
Figura 11 –	As barras de Cuisenaire e manipulações primárias	70
Figura 12 –	Estabilidade da Razão de Ouro da Sequência de Fibonacci.....	71
Figura 13 –	Manipulações prévias dos ladrilhos no tabuleiro $1 \times n$	73
Figura 14 –	Vivência com professores que lecionam matemática	91
Figura 15 –	Experimentação com barras de <i>Cuisenaire</i> (Módulo 1)	95
Figura 16 –	Momentos empíricos evidenciados no módulo 2.....	98
Figura 17 –	Representação semiótica da sequência de Fibonacci.....	100
Figura 18 –	Momentos empíricos evidenciados no módulo 3.....	104
Figura 19 –	Registro de representação semiótica da Sequência de Ouro.....	107
Figura 20 –	Momento empírico do módulo 4.....	110
Figura 21 –	Representações semióticas.....	111
Figura 22 –	Momentos de inflexões acerca das representações diversas.....	115
Figura 23 –	Momentos de variadas representações.....	117
Figura 24 –	Registro de representação matemática.....	118
Figura 25 –	Registro de validação dos momentos empíricos.....	121

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 –	Resumo metodológico segundo Bardin (2016)	37
Quadro 2 –	Artigos sobre BNCC e Sequências Numéricas/Padrões	38
Quadro 3 –	Artigos sobre representações de SNR via ladrilhos e tabuleiros.....	39
Quadro 4 –	Objetos de conhecimento e habilidades sobre sequências na BNCC.....	42
Quadro 5 –	Quadro representativo de SNR definidas por valores iniciais.....	46
Quadro 6 –	Sequências Metálicas definidas por seus valores iniciais.....	52
Quadro 7 –	Representação em Tabuleiro Abstrato da SF	62
Quadro 8 –	Questionário-Professor em Formação	83
Quadro 9 –	Módulo 1 do curso de extensão (AVA/G-TERCOA).....	90
Quadro 10 –	Módulo 2 do curso de extensão (AVA/G-TERCOA).....	97
Quadro 11 –	Módulo 3 do curso de extensão (AVA/G-TERCOA)	103
Quadro 12 –	Módulo 4 do curso de extensão (AVA/G-TERCOA)	109
Quadro 13 –	Módulo 5 do curso de extensão (AVA/G-TERCOA)	114
Quadro 14 –	Módulo 6 do curso de extensão (AVA/G-TERCOA)	119

LISTA DE SIGLAS

AVA	Ambiente Virtual de Aprendizagem
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior
CEP	Comitê de Ética e Pesquisa
CAEE	Certificado de Apresentação e Apreciação Ética
CNE	Conselho Nacional de Educação
ED	Engenharia Didática
FNM	Família dos Números Metálicos
FACED	Faculdade de Educação
G-TERCOA	Grupo Tecendo Redes Cognitivas de Aprendizagem
IFCE	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
LDBEN	Lei de Diretrizes e Base da Educação Nacional
NM	Números Metálicos
SNR	Sequências Numéricas Recorrentes
SF	Sequência de Fibonacci
TO	Teoria da Objetivação
TRRS	Teoria dos Registro de Representação Semiótica
TCLE	Termo de Consentimento e Livre Esclarecido
TD	Transposição Didática
UNICEF	Fundo das Nações Unidas para a Infância
UNESCO	Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura
UFC	Universidade Federal do Ceará

LISTA DE SÍMBOLOS

φ – Razão de Ouro

Ag - Razão de Prata

Br - Razão de Bronze

τ - Letra Tau

$\mathbb{N}$ - Conjunto dos Números Naturais

$\mathbb{Z}$ - Conjunto dos Números Inteiros

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	19
2	DELINEAMENTO METODOLÓGICO E PROCEDIMENTOS DA PESQUISA: A ORQUESTRAÇÃO DOS ASPECTOS TEÓRICO-PRÁTICOS	26
2.1	A Engenharia Didática como suporte metodológico da investigação.....	26
2.2	Natureza da pesquisa.....	28
2.3	Participantes da pesquisa.....	29
2.4	<i>Lócus</i> da pesquisa.....	31
2.5	Instrumentos de pesquisa.....	34
3	CATEGORIAS EPISTEMOLÓGICAS, HISTÓRICAS, DIDÁTICAS E MATEMÁTICAS DOS NÚMEROS METÁLICOS: ANÁLISES PRELIMINARES DA PESQUISA.....	36
3.1	Sequências numéricas recorrentes via tabuleiro $1 \times n$ e ladrilhos: um estudo à luz da BNCC.....	36
3.1.1	<i>Análise documental à luz da BNCC.....</i>	39
3.2	Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRSS): categoria de ordem teórica-didática.....	43
3.3	Do “Saber Sábio” ao “Saber Ensinado” de Chevallard (1986).....	45
3.4	Estudos emergentes das sequências numéricas recorrentes: categoria de ordem matemática.....	45
3.4.1	<i>A Sequência de Fibonacci e a Sequência dos Números Metálicos.....</i>	46
3.4.2	<i>Os números metálicos (NM): categorias de ordem matemática.....</i>	48
3.4.3	<i>Propriedades fundamentais dos números metálicos.....</i>	53
3.5	Os artefatos semióticos: categorias de ordem didática.....	56
3.5.1	<i>As barras de Emile-Georges Cuisenaire (1891–1980).....</i>	57
3.5.2	<i>Tabuleiro $1 \times n$, ladrilhos e ladrilhamento.....</i>	59
3.5.3	<i>O Tabuleiro físico.....</i>	63

4	CONCEPÇÕES E ANÁLISE <i>A PRIORI</i>: OBSERVAÇÕES A PARTIR DAS TAREFAS DIDÁTICAS.....	65
4.1	O curso de extensão: Sequências Numéricas Recorrentes para Educação Básica.....	68
4.1.1	<i>Tarefa didática 1: construindo a recursividade de segunda ordem com barras de Cuisenaire.....</i>	68
4.1.2	<i>Tarefa didática 2: explorando a razão áurea por meio das barras de Cuisenaire....</i>	70
4.1.3	<i>Tarefa didática 3: explorando a sequência de ouro por meio de ladrilhos e tabuleiro $1 \times n$.....</i>	73
4.1.4	<i>Tarefa didática 4: revestimento de tabuleiros $1 \times n$ e recursividade dos números metálicos.....</i>	75
4.1.5	<i>Tarefa didática 5: explorando a relação recursiva $M_n = M_{n-1} + M_{n-2}$</i>	77
4.1.6	<i>Tarefa didática 6: sequências numéricas e configurações de ladrilhamentos coloridos.....</i>	79
5	EXPERIMENTAÇÃO: A VISUALIZAÇÃO CONCRETA DAS SEQUÊNCIAS METÁLICAS.....	81
5.1	Contexto empírico da pesquisa: tratamento dos dados.....	81
5.1.1	<i>Caracterização dos sujeitos via Google Forms.....</i>	82
5.2	Planejamento do curso de extensão: sequências numéricas recorrentes para educação básica.....	87
5.2.1	<i>Experimentação do curso de extensão: sequências numéricas para educação básica.....</i>	87
6	ANÁLISE <i>A POSTERIORI</i> E VALIDAÇÃO: DADOS DE PESQUISA.....	89
6.1	<i>Análise a posteriori e validação do módulo I.....</i>	90
6.2	<i>Análise a posteriori e validação do módulo II.....</i>	97
6.3	<i>Análise a posteriori e validação do módulo III.....</i>	103
6.4	<i>Análise a posteriori e validação do módulo IV.....</i>	108
6.5	<i>Análise a posteriori e validação do módulo V.....</i>	114

6.6	Análise a posteriori e validação do módulo VI.....	119
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	127
	REFERÊNCIAS.....	131
	APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE).....	139
	APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO: PROFESSOR EM FORMAÇÃO CONTINUADA.....	148
	ANEXO A – EDITAL CURSOS DE EXTENSÃO 2026.....	150
	ANEXO B – CRONOGRAMA DO CURSO DE EXTENSÃO.....	156
	ANEXO C – PARECER DO COMITÊ DE ÉTICA E PESQUISA (CEP/IFCE)	159

1 INTRODUÇÃO

“A renda de bilro nos leva a pensar em muitas outras artes que podem e devem ser exploradas pela escola, no intuito de dar significado à Matemática” (Santos, 2012, p. 172).

Essa reflexão de Santos (2012) elucida a relevância de aproximar o conhecimento matemático dos contextos culturais e das experiências vivenciadas pelos estudantes, favorecendo a construção de significados matemáticos e a atribuição de sentido aos conceitos abordados em sala de aula. Vale salientar que o ensino-aprendizagem de Matemática ainda enfrenta desafios importantes decorrentes do distanciamento entre os avanços das teorias educacionais contemporâneas e sua efetiva incorporação às práticas pedagógicas.

Esse cenário, frequentemente marcado por metodologias centradas na reprodução de procedimentos, na execução de tarefas prescritas e descontextualizadas da realidade do aluno, limita a compreensão de certos conteúdos abstratos. Tais aspectos refletem fragilidades e necessidades de estratégias didática-metodológicas que promovam um ensino-aprendizagem mais acessível, questões que serão discutidas ao longo desta dissertação (Silva; Alves; Menezes, 2021).

Dito isso, é importante inferir acerca de alguns conceitos abstratos, tais como as sequências numéricas recorrentes, em particular, a Família dos Números Metálicos, que constitui um profícuo campo de investigação. Em razão de sua elevada complexidade conceitual, torna-se relevante propor arquiteturas didáticas que auxiliem na visualização, compreensão, generalização e formalização dessas estruturas. Nessa perspectiva, este estudo alinha-se às demandas do cenário educacional brasileiro e é corroborada pelas orientações da Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) e pela literatura especializada contemporânea.

Cumprе destacar que o documento normativo supracitado, homologado em sua versão para a Educação Infantil e Ensino Fundamental em 2017 e expandido para o Ensino Médio em 2018, prescreve dimensões acerca de regularidades, razão e generalização de padrões que representam a gênese desta investigação. Essas diretrizes refletem a centralidade da unidade temática Álgebra como eixo integrador da Matemática Básica (Brasil, 2017).

Nesse ínterim, emergem como premissa os desafios da introdução de conceitos e métodos matemáticos considerados avançados para estudantes em idades escolares iniciais, especialmente no âmbito das discussões sobre a denominada álgebra precoce. Acerca da abordagem da *Early Algebra*, destaca-se que não se trata de antecipar, de forma premente, os conteúdos formais da Álgebra. Antes, busca-se promover modos de pensar algebricamente,

respeitando o desenvolvimento cognitivo dos estudantes e fortalecendo sua base conceitual, oferecendo, assim, um suporte sólido para aprendizagens posteriores. Essa perspectiva reforça a pertinência da investigação nas sequências recorrentes (Kaput; Carraher; Blanton, 2008).

É importante ainda inferir que o ensino-aprendizagem desta unidade temática para os Anos Finais da Educação Básica configura-se como outro grande desafio didático, principalmente em razão do caráter abstrato dos conceitos envolvidos, que demandam a transição do pensamento aritmético para o pensamento algébrico. Em torno disso, resgata-se a importância de que os estudantes precisam ser estimulados a desenvolver competências relacionadas à generalização de propriedades, à investigação de regularidades em sequências numéricas e ao estabelecimento de relações de variação entre grandezas, conforme orienta a BNCC (Brasil, 2017).

De modo complementar às referências dos excertos anteriores, faz-se necessário reportar que a compreensão histórica, didática e matemática dos Números Metálicos (NM) (Vieira, 2024; Alves; Catarino; Spreafico, 2023; Spinadel, 1997), objeto epistêmico e matemático desta dissertação acadêmica, surge como um exemplar de sequências numéricas recorrentes de segunda ordem, configurando um campo interessante de estudo.

De modo estrutural, fundamentou-se nas etapas interdependentes da Engenharia Didática (ED): Análises Preliminares, Concepção e Análise *a Priori*, Experimentação, Análise *a Posteriori* e Validação, articulando os conhecimentos prévios dos participantes à construção e à representação do conhecimento matemático por meio de tarefas progressivas, reflexivas e dialógicas, mediado por materiais concretos.

A investigação caracterizou-se de natureza básica, abordagem qualitativa e delineada como pesquisa participante. Os dados foram derivados a partir de um Curso de Extensão promovido pela Universidade Federal do Ceará (UFC) e o Grupo de Estudo Tecendo Redes Cognitivas de Aprendizagem (G-TERCOA/CNPq/UFC), com foco no ensino-aprendizagem das propriedades fundamentais e recursivas dessas estruturas e na promoção de espaços colaborativos com docentes licenciados em Matemática e/ou em Pedagogia que lecionam matemática.

De modo complementar, vale relembrar que o tratamento desses tópicos na formação docente de modo corriqueiro ocorre de forma incipiente, não evidenciando a evolução conceitual necessária (Alves, 2022). Postula-se, ainda, que a discussão de casos como a Sequência de Fibonacci (SF) e suas generalizações tende a ocorrer sob uma ótica de curiosidade

basilar, negligenciando o rigor da Matemática implicado e as aplicações práticas, validando, assim, sua relevância para pesquisas futuras.

Na perspectiva de ampliar os cânones desta investigação, apresenta-se a Razão Áurea $\varphi \approx 1,618$, reconhecida por sua presença em fenômenos naturais, estruturas arquitetônicas, produções artísticas e diferentes formas de representação matemática. Tal ubiquidade evidencia relações de harmonia, proporcionalidade e interconectividade frequentemente associadas à compreensão estética e estrutural do universo.

A densidade dessa discussão revela, contudo, que a Razão Áurea não constitui um caso isolado entre os números irracionais notáveis. A investigação demonstra que φ integra uma família mais ampla denominada Família dos Números Metálicos (FNM), definida pelas raízes positivas da equação quadrática:

$$x^2 - px - q = 0 \text{ com } p, q \in \mathbb{N} \text{ (Spinadel, 1997)} \quad (1)$$

Nessas condições, destacam-se, além da Razão Áurea, a Razão de Prata $Ag \approx 2,414$ e a Razão de Bronze $Br \approx 3,303$, entre outras constantes irracionais associadas à generalização da Sequência de Fibonacci e às propriedades recursivas que estruturam a Família dos Números Metálicos, categoria matemática que será evidenciada durante as linhas desta dissertação de Mestrado Acadêmico.

No campo teórico-metodológico, esta investigação fundamenta-se, principalmente, na Engenharia Didática (Artigue *et al.*, 1995) e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (Duval, 1995), referenciais que subsidiaram a Experimentação, a Análise *a posteriori* e a interpretação dos dados produzidos ao longo da pesquisa. Esses aportes dialogam com a Didática da Matemática e a Educação Matemática, reconhecendo que a construção do conhecimento matemático ocorre mediante a mobilização de diferentes linguagens, registros de representação e artefatos semióticos.

Diante desse cenário, a problemática central de pesquisa consubstancia-se em elucidar: como ocorre o processo de ensino-aprendizagem das propriedades fundamentais e recursivas dos Números Metálicos a partir de um Curso de Extensão estruturado à luz da Engenharia Didática e auxiliado pelas barras de *Cuisenaire*, tabuleiro $1 \times n$ e ladrilhos, em um *locus* acadêmico? Parte-se da hipótese de que este Curso de Extensão, delineado segundo os pressupostos desses referenciais e articulado via materiais manipuláveis propostos, favorece o

processo de ensino-aprendizagem das propriedades algébricas e recursivas dos Números Metálicos em contexto acadêmico.

Define-se, nesse enquadramento investigativo, como variável independente a utilização de um curso de extensão fundamentado na Engenharia Didática e mediado por materiais manipuláveis. Em contrapartida, a variável dependente refere-se aos processos de visualização, compreensão e aprendizagem das propriedades fundamentais, algébricas e recursivas dos Números Metálicos.

Em consonância com a questão orientadora, estabelece-se como objetivo geral: analisar o processo de ensino-aprendizagem das propriedades fundamentais e recursivas dos NM a partir das contribuições de um Curso de Extensão, fundamentado na ED e auxiliado pelas barras de *Cuisenaire*, tabuleiro e ladrilhos em locus acadêmico. Para alcançar este objetivo geral e responder ao problema de pesquisa asseverado, define-se os seguintes objetivos específicos:

- a) Analisar as categorias matemáticas, históricas e epistemológicas da Família dos Números Metálicos, contemplando suas propriedades fundamentais e os teoremas associados às sequências recorrentes;
- b) Desenvolver um Curso de Extensão, estruturado à luz da Engenharia Didática, composto por seis tarefas progressivas auxiliadas pelos materiais manipulativos, as barras de *Cuisenaire*, ladrilhos e tabuleiro $1 \times n$;
- c) Discutir a importância das seis vivências para o processo de ensino-aprendizagem das propriedades fundamentais e recursivas dos Números Metálicos em contexto acadêmico.

Desse modo, a investigação assume referenciais que serão apresentados nas seções que seguem como pilares estruturantes de seu percurso analítico e metodológico. Esses pressupostos orientaram a organização e o desenvolvimento da pesquisa, delineado da seguinte forma:

Na Seção 1, intitulada Introdução, fazem parte da primeira fase da ED, as Análises Preliminares de pesquisa, que compreendem: o objeto de estudo, a relevância da investigação, a hipótese norteadora, as variáveis consideradas, bem como os objetivos geral e específicos e a problemática que orienta o percurso de pesquisa.

A Seção 2, nomeada “Delineamento Metodológico e Procedimentos da Pesquisa: a Orquestração dos Aspectos Teórico-Práticos”, apresenta-se como a fase destinada à descrição

dos procedimentos e ao delineamento da pesquisa que antecederam os resultados da Experimentação. Nesse capítulo, explicitam-se o método, os sujeitos participantes, os instrumentos de coleta de dados, o *lôcus* da investigação, bem como outros elementos constitutivos. Ainda se discutem as abordagens didáticas e a natureza da pesquisa, bem como se apresentam as previsões e discussões prévias.

Na Seção 3, nomeada “Categorias Epistemológicas, Históricas, Didáticas e Matemáticas dos Números Metálicos: Análises Preliminares da Pesquisa”, apresentam-se as concepções e o arcabouço teórico que fundamentaram o estudo, constituído pelo delineamento estrutural da Engenharia Didática (ED) e por teorias que proporcionaram o entendimento acerca das potencialidades dos meios semióticos como facilitadores do ensino e da aprendizagem dessas construções. Alguns conceitos, como os meios semióticos, artefatos e registros de representação semiótica, generalização de padrões e recursividade, fizeram jus aos preceitos substanciais das linhas desta dissertação.

Esses referenciais foram auxiliados por meio de um levantamento bibliográfico que possibilitou uma abordagem didática, epistemológica e matemática voltada à identificação e descrição dos Números Metálicos, destacando suas propriedades fundamentais e sua relevância no contexto acadêmico. Tal etapa configurou-se como a fase de Análises Preliminares, segundo os pressupostos da Engenharia Didática.

Na Seção 4, apresenta-se a segunda fase da pesquisa que, conforme os pressupostos da Engenharia Didática, corresponde à etapa de Concepção e Análise *a Priori*: Observações a partir das Tarefas Didáticas. Com base nos excertos discutidos nas Análises Preliminares, foi planejado um curso de extensão composto por seis tarefas didáticas progressivas, mediadas por materiais manipuláveis e estruturadas com o propósito de favorecer processos investigativos, reflexivos e colaborativos no ensino-aprendizagem dos Números Metálicos, sendo fiel ao segundo objetivo específico da pesquisa.

Nessa etapa, foram delineadas as estratégias de ensino, antecipadas as possíveis ações e manifestações dos participantes, bem como identificadas as variáveis didáticas envolvidas no desenvolvimento das atividades. As tarefas favoreceram o entendimento acerca da articulação entre representações concretas e abstratas, possibilitando que os participantes mobilizassem diferentes recursos semióticos na construção e significação dos conhecimentos matemáticos.

Na Seção 5, apresenta-se a etapa de Experimentação, momento em que se ratifica a necessidade da implementação do curso de extensão em *lôcus* acadêmico. Nessa fase, ocorreu a etapa empírica propriamente dita, bem como a coleta de dados provenientes das vivências a

partir de alguns instrumentos, tais como: registros audiovisuais e escritos, questionário do professor, artefatos semióticos e manifestações discursivas dos participantes durante o desenvolvimento das atividades.

As seis tarefas didáticas foram aplicadas no âmbito do Curso de Extensão intitulado Sequências Numéricas para Educação Básica, realizado na Universidade Federal do Ceará (UFC), com inscrição inicial e participação de 15 professores que lecionam matemática. O curso possibilitou a compreensão de representações matemáticas por meio da utilização dos artefatos semióticos, como barras de Cuisenaire, tabuleiro $1 \times n$ e ladrilhos, contribuindo para a apropriação de conceitos relacionados as propriedades fundamentais e recorrentes dos Números Metálicos e suas potencialidades em contextos de investigação acadêmica.

A etapa experimental possibilitou observar os processos de ensino-aprendizagem mobilizados ao longo das tarefas didáticas progressivas, evidenciando as estratégias construídas coletivamente, os processos de significação matemática, além das relações estabelecidas entre os participantes e os artefatos semióticos utilizados.

Outrossim, essa fase permitiu analisar como as vivências favoreceram a visualização de padrões, a formulação de conjecturas, a validação de estratégias e a compreensão das propriedades recursivas e algébricas dos Números Metálicos em um ambiente investigativo, colaborativo e reflexivo, validando o terceiro objetivo específico da pesquisa.

De modo similar, a Seção 6 corresponde aos resultados da Experimentação, conforme os pressupostos da Engenharia Didática. Compreende a Análise *a Posteriori* e Validação: Confronto dos Dados Empíricos, obtidos na experimentação, com as previsões formuladas na Análise *a Priori*, possibilitando a validação interna e externa das escolhas didáticas e metodológicas adotadas na pesquisa. Nesse capítulo, os dados provenientes desses momentos foram organizados e analisados à luz do referencial teórico adotado.

Ao articular os pressupostos da Engenharia Didática ao referencial teórico-metodológico adotado, a pesquisa contribui para o desenvolvimento de um percurso formativo que integra ação, visualização e formalização matemática, favorecendo a apropriação conceitual dos Números Metálicos e o desenvolvimento de uma postura investigativa por parte dos docentes, por meio da manipulação progressiva de ferramentas didáticas concretas, as barras de Cuisenaire e os ladrilhos metálicos, em um curso de extensão promovido em ambiente de pesquisa com professores que lecionam Matemática.

As Considerações Finais, na Seção 7, salientam a necessidade de pesquisas futuras, reafirmando o compromisso com uma trajetória investigativa planejada, metodologicamente

estruturada e sustentada pelo rigor científico no campo da Didática da Matemática e da Educação Matemática.

Na sequência, apresenta-se a arquitetura da pesquisa, de modo a explicitar o desenho investigativo, os procedimentos metodológicos e as etapas que orientaram o desenvolvimento deste estudo.

2 DELINEAMENTO METODOLÓGICO E PROCEDIMENTOS DA PESQUISA: A ORQUESTRAÇÃO DOS ASPECTOS TEÓRICO-PRÁTICOS

"A Engenharia Didática constitui um ambiente privilegiado para a articulação entre pesquisa, ensino e formação docente"(Alves, 2021).

Ademais, a investigação avança para o delineamento metodológico e os procedimentos da pesquisa, evidenciando sua relevância e os aspectos teórico-práticos ancorados na Engenharia Didática. Nesse sentido, compreender a orquestração metodológica proposta implica reconhecer um espaço privilegiado de articulação entre pesquisa, ensino e atualização docente, no qual teoria e prática se integram na ressignificação dos conhecimentos.

2.1 A Engenharia Didática como suporte metodológico da investigação

A Engenharia Didática (ED) teve sua gênese no início da década de 1980, na França, e se expandiu como campo importante da Didática da Matemática, configurando-se como uma metodologia de pesquisa inspirada na práxis do engenheiro. Segundo Artigue et al. (1995), essa abordagem compara o trabalho do professor ao de um pesquisador que arquiteta e desenvolve um projeto, fundamentando-se em conhecimentos científicos consolidados de sua área e aceitando submeter sua produção a um controle de natureza científica.

Além disso, a Engenharia Didática destaca-se por constituir um método orientado à consecução de objetivos previamente definidos, indicando, durante o desenvolvimento da pesquisa, os obstáculos epistemológicos, didáticos e metodológicos que necessitam ser dirimidos. Neste viés, a ED assume a função de um guia teórico-metodológico que auxilia o professor-pesquisador na organização, sistematização e condução de práticas investigativas (Pommer, 2013).

Vale salientar que a Engenharia Didática também se articula ao que Sampieri, Collado e Lúcio (2013) denominam de orquestração da pesquisa, entendida como a estruturação sistemática dos procedimentos que orientaram a produção e a análise dos dados investigados. Outrossim, este processo foi desenvolvido em consonância com tais pressupostos, respeitando suas quatro fases constitutivas e interdependentes, articuladas a teoria, prática e validação empírica ao longo de toda a dissertação. De modo simplificado, a ED estrutura esta pesquisa a partir de suas fases, a saber:

Na etapa de Análises Preliminares, realizou-se a delimitação do contexto investigativo, a revisão da literatura pertinente, a identificação dos desafios epistemológicos, didáticos e matemáticos relacionados ao objeto de estudo, bem como a fundamentação da investigação nos referenciais teóricos adotados.

Em seguida, na fase de Concepção e Análise *a Priori*, foi elaborado o curso de extensão composto por seis tarefas didáticas, contemplando a definição das estratégias de ensino-aprendizagem, a antecipação das possíveis ações dos participantes, a formulação das hipóteses investigativas e a identificação das variáveis envolvidas na pesquisa.

A Experimentação consistiu na implementação do curso de extensão em um *locus* acadêmico de formação docente, mediante a aplicação das tarefas didáticas e a coleta de dados provenientes das interações, dos registros e das produções dos participantes. Por fim, na fase de Análise *a Posteriori* e Validação, realizou-se o confronto entre os dados empíricos obtidos durante a experimentação e as previsões formuladas na Análise *a Priori*, possibilitando a validação interna e externa das escolhas didáticas e metodológicas que orientaram esta investigação.

No que concerne à tradição investigativa que fundamenta este estudo, é importante destacar que suas bases não emergiram de forma isolada, mas se inserem em uma trajetória acadêmica consolidada no campo da Didática da Matemática, especialmente no estudo das Sequências Numéricas Recorrentes e de suas generalizações. Essa perspectiva ancorou-se, de modo particular, nos trabalhos de Alves (2016, 2017, 2018, 2019, 2021, 2024), que, ao longo de mais de uma década, vêm consolidando uma vertente de investigação sistemática fundamentada na Engenharia Didática (ED) e na Engenharia Didática de Formação (EDF), pertencente à segunda geração da ED, tendo como objeto epistêmico o estudo das Sequências Numéricas Recorrentes Generalizadas.

Sendo assim, a pesquisa contribuiu significativamente para a compreensão das tarefas didáticas progressivas e da ação conjunta entre o professor-pesquisador e os professores participantes ao longo do percurso investigativo. Nessa perspectiva, a Engenharia Didática configura-se como um campo profícuo para a elaboração, análise e validação de percursos didáticos, bem como para o aprimoramento das condições de ensino-aprendizagem dessas estruturas, conforme destacam Almouloud e Silva (2012).

Desse modo, esses materiais deixam de assumir apenas uma função meramente instrumental, passando a constituir-se como articuladores semióticos capazes de potencializar transformações didáticas, favorecer e ampliar as possibilidades de produção de significados

matemáticos em contexto acadêmico. Outrossim, as teorias mobilizadas transcendem uma perspectiva exclusivamente epistemológica, incorporando também dimensões sociais, culturais e éticas, aspectos que as tornam adequadas para sustentar essas práticas pedagógicas voltadas aos professores que lecionam matemática.

2.2 Natureza da pesquisa

Metodologicamente, a investigação caracteriza-se como uma pesquisa de natureza básica, de abordagem qualitativa e delineada como pesquisa participante. Justifica-se pelo propósito de aprofundar bases teóricas existentes relacionadas ao ensino-aprendizagem das propriedades fundamentais e recursivas da Família dos Números Metálicos. A abordagem qualitativa possibilita compreender os fenômenos investigados a partir da interpretação dos significados, atitudes e das vivências apresentadas durante o desenvolvimento das tarefas didáticas progressivas, privilegiando as narrativas, os registros de representações semióticas e as produções em detrimento de dados exclusivamente numéricos (Prodanov; Freitas, 2013).

Por sua vez, a pesquisa participante fundamenta-se no envolvimento ativo dos sujeitos ao longo de todas as etapas da investigação, valorizando a coletividade, o diálogo e o compartilhamento do conhecimento entre professora-pesquisadora e participantes, conforme defende Brandão (2006). Considerando a natureza qualitativa do estudo, as variáveis investigativas não são compreendidas sob uma perspectiva estritamente quantitativa ou numérica, mas interpretadas como categorias analíticas que surgiram das experiências, dos discursos, das produções e das práticas desenvolvidas ao longo dos momentos empíricos.

Nesse viés, a variável independente corresponde ao curso de extensão, concebido como um dispositivo didático estruturado à luz da Engenharia Didática e mediado por materiais manipuláveis e/ou artefatos semióticos. Por sua vez, a variável dependente refere-se aos processos de ensino-aprendizagem das propriedades fundamentais, algébricas e recursivas dos Números Metálicos, analisados a partir das manifestações de visualização, compreensão, generalização, significação e mobilização conceitual evidenciadas pelos participantes durante o desenvolvimento da pesquisa.

A professora-pesquisadora atuou como agente didático responsável pelo planejamento, elaboração, implementação, experimentação e análise crítica das situações propostas ao longo da investigação. Sua atuação compreendeu a organização dos momentos empíricos e a

observação participante no processo de ensino-aprendizagem das propriedades fundamentais e recursivas dos NM, desenvolvidas com os participantes durante o curso de extensão.

Vale salientar que, conforme Gil (2008), tanto a pesquisa participante quanto a pesquisa-ação conferem o envolvimento ativo entre pesquisadores e participantes no processo investigativo, distinguindo-se, sobretudo, pelas formas de cooperação, interação e participação estabelecidas entre os sujeitos envolvidos. Neste viés, o estudo fundamentou-se em uma dinâmica colaborativa, na qual os participantes não atuaram apenas como sujeitos observados, mas como agentes ativos na produção, discussão e significação dos conhecimentos matemáticos mobilizados ao longo das tarefas desenvolvidas.

A coleta de dados ocorreu por meio de gravações em áudio e vídeo, registros fotográficos, observações sistemáticas, produções escritas dos participantes e aplicação de um formulário, todos realizados mediante autorização prévia dos envolvidos, em conformidade com os princípios éticos da pesquisa científica. Ressalta-se que o acesso aos dados coletados ficou restrito à professora-pesquisadora e aos participantes da investigação, sendo utilizados exclusivamente para fins acadêmicos e analíticos.

Na subseção seguinte, apresentam-se o *lôcus* da pesquisa e os critérios adotados para a seleção dos participantes envolvidos na investigação.

2.3 Participantes da pesquisa

As seis tarefas didáticas progressivas foram desenvolvidas em *lôcus* acadêmico, no âmbito de um Curso de Extensão intitulado Sequências Numéricas Recorrentes para a Educação Básica, que fez parte do projeto de pesquisa submetido ao Comitê de Ética em Pesquisa do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (CEP/IFCE) e aprovado sob o CAAE nº 94119125.2.0000.5589.

O Curso de Extensão foi validado pelo Edital nº 01/2026 UFC/FACED, Campus Fortaleza–CE, cujo documento encontra-se depositado no Anexo A desta dissertação, e contou com a inscrição e participação de 15 professores que lecionam matemática na Educação Básica. Sua estrutura contemplou o planejamento e a elaboração de seis tarefas fundamentadas nos conceitos de recursividade e generalização de padrões, explorados por meio de artefatos semióticos, como as barras de *Cuisenaire*, os ladrilhos e o tabuleiro $1 \times n$. Tais recursos foram utilizados como instrumentos auxiliares da aprendizagem, favorecendo a transposição

didática de conceitos matemáticos abstratos e promovendo processos de visualização, investigação e formalização do conhecimento matemático.

Os critérios de inclusão e exclusão dos sujeitos de pesquisa encontram-se delineados no Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) e estabeleceram-se a partir de cada momento empírico. Nos critérios de exclusão, foram observados os aspectos da voluntariedade e o enquadramento, por exemplo, se o sujeito pertence ao universo ao qual a pesquisa está focada, a saber, se é professor de Matemática e/ou pedagogo que leciona Matemática na Educação Básica.

De modo preliminar, ocorreu a solicitação do preenchimento de um formulário *online* para caracterização dos sujeitos de pesquisa; logo em seguida, foram proporcionadas seis vivências progressivas a partir de um curso de extensão com validação ao final de cada momento empírico, contendo aspectos subjetivos relacionados às experiências oriundas da pesquisa. Ressalta-se, contudo, que todas as informações coletadas foram tratadas com absoluto sigilo ético e científico, garantindo-se, em todas as etapas, a preservação da identidade dos participantes e a confidencialidade dos dados produzidos.

As vivências formativas vinculadas ao curso de extensão do Edital 01/2026 da Universidade Federal do Ceará (UFC) foram planejadas em duas modalidades complementares: presencial e assíncrona, no período compreendido entre 14 de março de 2026 e 06 de junho de 2026. Os encontros presenciais foram realizados quinzenalmente, aos sábados, no horário das 8h às 12h, constituindo espaços de discussão, experimentação e desenvolvimento das tarefas didáticas propostas.

Nos períodos intercalados entre os encontros presenciais, as atividades ocorreram de forma assíncrona por meio do Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) do G-TERCOA. Nesse espaço virtual, os participantes desenvolveram fóruns de discussão, reflexões colaborativas, registros das atividades e tarefas complementares, contribuindo para a continuidade do processo formativo, para as movimentações manifestadas entre os participantes e para a ampliação das discussões teóricas e metodológicas relacionadas ao objeto investigado.

Cada momento presencial teve duração de quatro horas, as quais, complementadas pelos momentos assíncronos, totalizaram 60 horas, no geral. Os dados coletados foram armazenados pela professora-pesquisadora por um prazo máximo de cinco anos, conforme orientações do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE). O questionário do professor foi proposto via grupo de mensagens instantâneas

administrado pelo grupo de pesquisa Tecendo Redes Cognitivas de Aprendizagem (G-TERCOA) e encontra-se depositado no Apêndice B desta dissertação.

O objetivo do questionário foi conhecer melhor o perfil dos sujeitos da pesquisa. Muito embora não exista uma regra exclusiva para a sua aplicação dentro do contexto empírico, buscou-se garantir que a amostra estivesse totalmente em conformidade com as especificações necessárias para o estudo proposto, a saber: esperavam-se professores voluntários que atuassem diretamente com a disciplina de Matemática na Educação Básica e que tivessem interesse na manipulação concreta de materiais para representar e visualizar propriedades fundamentais e recursivas dos NM.

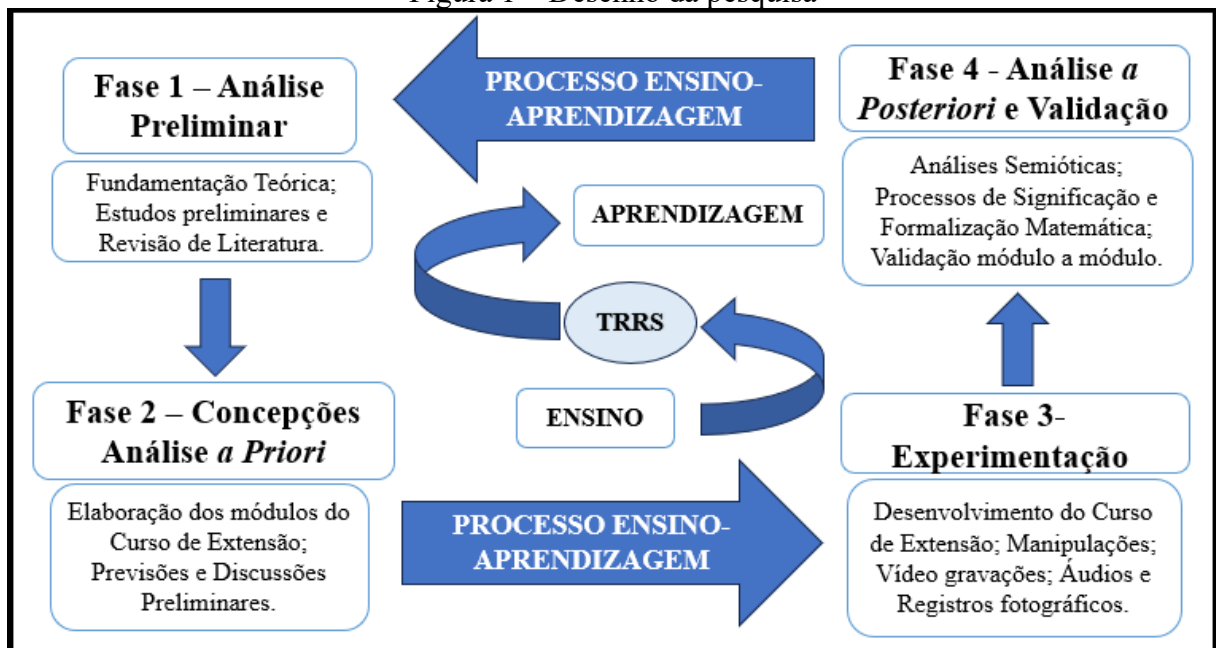
2.4 *Lócus da pesquisa*

O estudo foi realizado na Universidade Federal do Ceará (UFC), especificamente no Núcleo de Estudos e Pesquisas Regionais (NUPER), localizado na Faculdade de Educação (FACED), Rua Waldery Uchôa, 01 - Benfica, Fortaleza - CE, 60020-110. O edital do Curso de Extensão sugerido para esta investigação, bem como o Termo de Consentimento e Livre Esclarecimento (TCLE) e outros documento utilizados nesta investigação, seguem anexos a esta dissertação acadêmica.

Com a finalidade de ilustrar a proposta da pesquisa e evidenciar a articulação entre as etapas investigativas, a seguir na Figura 1, há um desenho representativo da organização da Engenharia Didática auxiliada pelas categorias de ordem epistemológicas, históricas, didáticas e matemáticas que serão tratadas nas seções subsequentes.

Esta figura configura-se como o desenho metodológico da pesquisa estruturado à luz da Engenharia Didática (ED), evidenciando a articulação entre os referenciais teóricos, os processos de ensino-aprendizagem e as etapas investigativas desenvolvidas ao longo do estudo. O esquema demonstra uma organização sistemática e cíclica da investigação, destacando a interdependência entre teoria, prática e validação dos resultados obtidos.

Figura 1 – Desenho da pesquisa



Fonte: elaborado pela autora.

A Análise Preliminar contemplou as categorias epistemológicas, históricas, didáticas e matemáticas dos Números Metálicos, bem como a revisão de literatura e a fundamentação teórica da pesquisa. Essa etapa constituiu a base científica da investigação, permitindo que a professora-pesquisadora identificasse os principais obstáculos epistêmicos, os referenciais conceituais e as potencialidades didáticas relacionadas ao objeto de estudo. Observou-se, ainda, a presença da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (Duval, 1995), a qual evidenciou as manipulações e transformações de registro em outros dentro do mesmo objeto de pesquisa, aproximando os conhecimentos matemáticos abstratos e formais de apresentações mais acessíveis e tangíveis dentro das vivências progressivas propostas no curso de extensão.

Na sequência, a Concepção e Análise *a Priori* evidenciou o planejamento das tarefas didáticas e a elaboração do curso de extensão promovido pela UFC em parceria com o Grupo de Pesquisa Tecendo Redes Cognitivas de Aprendizagem (G-TERCOA/CNPq/UFC), *campus* Fortaleza. Nessa etapa, foram observadas previsões e discussões preliminares acerca das possíveis estratégias, dificuldades e manifestações dos participantes durante a aplicação das tarefas. Esta etapa permite antecipar comportamentos didáticos e matemáticos, funcionando como um mecanismo de organização e validação prévia das atividades investigativas.

No centro do esquema, constata-se uma dinâmica em formato de espiral entre os conceitos de ensino-aprendizagem em articulação com os diferentes registros de representação semiótica. Essa representação adverte que o conhecimento matemático não é concebido como um mero elemento estanque ou linear, mas como uma movimentação dinâmica, coletiva e

evolutiva, permeada pelos momentos empíricos com os participantes, artefatos semióticos e observações pedagógicas.

A penúltima fase, a Experimentação, corresponde ao momento das vivências progressivas do curso de extensão. Essa etapa envolveu a utilização de diferentes instrumentos de produção de dados, tais como questionários, gravações em vídeo, registros em áudio, fotografias e artefatos. Trata-se da etapa empírica da pesquisa, na qual os professores participantes, em momentos colaborativos com a professora-pesquisadora e auxiliados pelos materiais manipuláveis, desenvolvem as seis tarefas didáticas propostas.

A *Análise a Posteriori* e Validação representa o momento de análise crítica dos dados produzidos durante a experimentação. Nessa etapa, realizou-se o confronto entre o que foi previsto na *Análise a Priori* e os resultados obtidos empiricamente na Experimentação. A figura destaca, ainda, a relevância da análise de representação semiótica e a importância dos materiais concretos como auxiliares do processo de ensino-aprendizagem, indicando que a investigação pretende compreender não apenas aspectos cognitivos da aprendizagem, mas também processos de significação e mobilização conceitual, fomentando transformações das práticas docentes.

De maneira geral, este desenho elucida a coerência estrutural e a articulação entre os fundamentos teóricos, as etapas metodológicas e os objetivos investigativos. A representação reforça a natureza dinâmica, reflexiva e dialógica da Engenharia Didática, demonstrando que o processo de ensino-aprendizagem é concebido como uma manifestação coletiva mediada por artefatos e práticas investigativas.

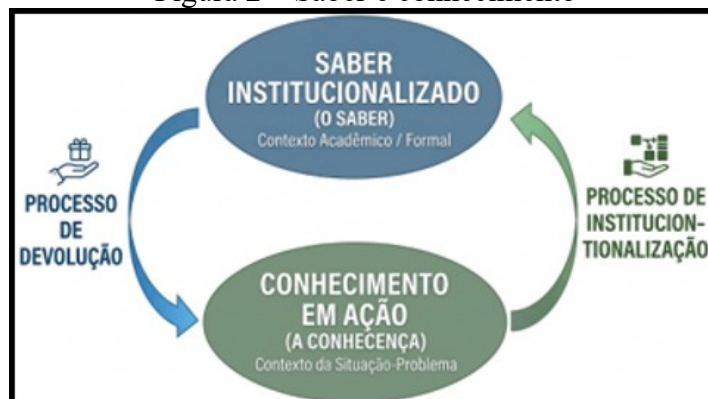
Enquanto metodologia de investigação, a ED valoriza as produções do professor-pesquisador, reconhecendo-o como sujeito ativo no processo. Nessa perspectiva, possibilita que o docente mobilize suas concepções e produções matemáticas “em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado objeto matemático e, em particular, a elaboração de gênesis artificiais para um dado conceito” (Almouloud, 2007, p. 171).

Ainda, conforme enfatizam Artigue et al. (1995), a ED lida com objetos consideravelmente mais complexos do que aqueles tradicionalmente tratados pelas ciências naturais, o que exige enfrentar, de maneira prática e com múltiplos recursos, problemas que a ciência clássica “não deseja ou não pode assumir” (Artigue et al., 1995, p. 33-34).

Para que tal abordagem assinalada se concretize, torna-se imprescindível a definição de variáveis didáticas relevantes, capazes de orientar o processo de ensino-aprendizagem, estimular a criatividade e a formulação de estratégias próprias de resolução, a partir de

conhecimentos prévios e intuitivos. Na fase de Análise *a Posteriori*, realizou-se a comparação entre os objetivos inicialmente definidos e o desempenho efetivamente observado no curso de extensão, após a aprovação pelo Comitê de Ética em Pesquisa, com o intuito de validar a hipótese didática estabelecida neste percurso.

Figura 2 – Saber e conhecimento



Fonte: adaptado de Margollinas (2012, p. 8), elaborado pela autora com auxílio da Gemini IA.

De modo complementar, a Figura 2 representa a movimentação do saber em direção ao conhecimento. É na fase de experimentação, sustentada pelos pressupostos teóricos, que se fundamenta a interpretação dos dados, ao considerar os processos mobilizados pelos participantes durante o curso de extensão, fomentados pelos artefatos semióticos (barras de *Cuisenaire*, Tabuleiro $1 \times n$ e Ladrilhos).

2.5 Instrumentos de pesquisa

A coleta de dados ocorreu por meio de diferentes fontes, buscando contemplar a complexidade dos processos de objetivação e significação emergentes durante o desenvolvimento das atividades. Para tanto, foram utilizados os seguintes instrumentos de produção de dados:

- a) **Videograções:** utilizadas para registrar as contribuições verbais, gestuais e a manipulação dos artefatos semióticos pelos participantes, possibilitando a análise detalhada dos processos de aprendizagem, das estratégias mobilizadas e das formas de comunicação matemática evidenciadas durante as atividades.
- b) **Registros fotográficos:** consistiram na coleta e no registro fotográfico das mobilizações produzidas pelos participantes, incluindo representações com barras de *Cuisenaire*, ladrilhos, tabuleiro $1 \times n$, desenhos, esquemas, anotações

e demais produções matemáticas desenvolvidas ao longo do Curso de Extensão.

- c) **Gravações em áudio:** utilizadas para registrar diálogos, argumentações e discussões coletivas consideradas significativas para a investigação. Após transcrição, esses registros possibilitaram analisar indícios de aprendizagem colaborativa, processos de generalização e o fortalecimento de práticas matemáticas mais reflexivas e significativas.
- d) **Questionários via formulário eletrônico:** aplicados com o objetivo de caracterizar os sujeitos participantes da pesquisa, bem como coletar percepções, avaliações e feedbacks relacionados ao desenvolvimento e às contribuições do Curso de Extensão.

Em atendimento ao primeiro objetivo específico desta dissertação, apresenta-se, a seguir, as análises das categorias históricas, epistemológicas, didáticas e matemáticas da Família dos Números Metálicos, contemplando a apresentação das propriedades fundamentais e os principais teoremas associados às sequências recorrentes, de modo a fundamentar teoricamente a investigação e assegurar a compreensão do objeto matemático proposto.

3 CATEGORIAS EPISTEMOLÓGICAS, HISTÓRICAS, DIDÁTICAS E MATEMÁTICAS DOS NÚMEROS METÁLICOS: ANÁLISES PRELIMINARES DA PESQUISA

Apresentam-se, nesta seção, os fundamentos epistemológicos, históricos, didáticos e matemáticos que embasaram a investigação acerca das sequências dos Números Metálicos (NM) e de suas propriedades. Ademais, evidenciam-se limitações relacionadas aos processos de abstração dessas estruturas, bem como desafios identificados em estudos bibliográficos, produções acadêmicas e revisões de literatura sobre a temática.

Nesse ínterim, a Engenharia Didática (ED) assumiu um papel estrutural na orquestração e condução da pesquisa, delineando um percurso metodológico consistente, articulado para a implementação das etapas investigativas. Além disso, apresentaram-se os aspectos do arcabouço teórico e a sua importância para as observações empíricas, como a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (Duval, 1995), dentre outras.

De maneira preliminar, evidenciou-se a revisão de literatura que envolveu uma visita ao documento normativo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2017), considerando suas competências e habilidades para o ensino-aprendizagem da Matemática, no tocante à unidade temática Álgebra.

3.1 Sequências numéricas recorrentes via tabuleiro $1 \times n$ e ladrilhos: um estudo à luz da BNCC

A etapa inicia-se com uma revisão de literatura desenvolvida com o propósito de fundamentar e justificar a relevância da investigação proposta. O estudo foi elaborado por meio de uma abordagem de natureza qualitativa, bibliográfica e interpretativa, utilizando como *corpus* de análise artigos e produções publicados no interstício entre 2015 e 2025, localizados no Portal de Periódicos CAPES, além de uma análise do documento norteador, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2017).

A interpretação dos dados textuais fundamentou-se na Análise de Conteúdo, segundo o modelo proposto por Bardin (2016). Esse procedimento metodológico compreende três etapas interdependentes: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados com posterior interpretação.

Na fase de pré-análise, concebeu-se o levantamento do arcabouço teórico da revisão mediante a utilização dos seguintes descritores: “SNR e BNCC”, destinados à primeira categorização; seguidos pelos descritores “SNR”, “Ladrilhos” e “Tabuleiros”, articulados ao objeto central da investigação.

Na etapa subsequente, as produções selecionadas foram submetidas à análise dos títulos, resumos e considerações finais, permitindo a aplicação dos critérios de inclusão e exclusão previamente estabelecidos. Esse procedimento possibilitou a seleção dos estudos mais consistentes em relação ao objeto investigativo e aos objetivos da pesquisa.

Por fim, os dados textuais extraídos das produções selecionadas foram dispostos nos Quadros 2 e 3, apresentados a seguir, tomando como referência o objeto de investigação e a questão norteadora desta revisão de literatura. Essa sistematização favoreceu a realização de análises comparativas entre os estudos revisados, bem como a identificação de possíveis lacunas, especialmente quanto à representatividade das Sequências Numéricas Recorrentes em contextos de ensino mediados por tabuleiros e ladrilhos, tanto nos pressupostos da Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2017) quanto nas produções científicas da área.

A revisão de literatura evidenciou a relevância da investigação e a necessidade de ampliar os estudos sobre as Sequências Numéricas Recorrentes (SNR) na Educação Matemática, com base em critérios metodológicos que garantiram rigor na seleção, organização e análise dos dados.

Quadro 1 – Resumo metodológico segundo Bardin (2016)

ELEMENTOS METODOLÓGICOS	DESCRIÇÃO/ESPECIFICAÇÃO
Natureza Investigativa	Qualitativa, bibliográfica e interpretativa
Interstício	Compreendido entre 2015 e 2025
Fonte de dados	Artigos científicos (período 2015-2025) do Portal Capes (2025) e BNCC (Brasil, 2017)
Recurso Metodológico	Análise de Conteúdo, segundo Bardin (2016)
Fases da Análise de Conteúdo	1. Pré-análise; 2. Exploração do Material; 3. Tratamento dos Resultados e Interpretação
Descritores (Pré-análise)	Primeira Categorização: "SNR e BNCC". Segunda Categorização: "SNR, Ladrilhos e Tabuleiros".
Crítérios de Seleção (Exploração)	Análise dos resumos, títulos e considerações finais para inclusão/exclusão de artigos.
Organização dos Resultados	Quadros 2 e 3, estruturados no objeto investigativo e na pergunta central.
Estrutura da Interpretação	Agrupamentos temáticos, orientados pela aplicação das palavras-chave definidas anteriormente.
Objetivo da Organização	Análise e identificação de lacuna acerca da representação de sequências numéricas via tabuleiro

	e ladrilhos na BNCC
--	---------------------

Fonte: elaborado pela autora, a partir de dados da pesquisa.

A abordagem adotada conferiu consistência às conclusões da investigação, ao assegurar rigor metodológico no levantamento, na seleção e na análise das produções científicas. Os Quadros 2 e 3 apresentam os estudos identificados a partir dos descritores “BNCC” (Brasil, 2018) e “SNR”, publicados entre 2015 e 2025 e classificados segundo o Portal de periódicos da CAPES. As produções concentraram-se, predominantemente, nas áreas de Educação Matemática e Ensino, evidenciando a relevância e a qualidade científica das pesquisas analisadas.

Quadro 2 – Artigos sobre BNCC e Sequências Numéricas/Padrões

Título do artigo	Autores	Periódicos	Qualis	Ano
O estudo de sequências na Educação Algébrica nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental	Adriana Jungblut, Everaldo Silveira, Regina Célia Grado	Educação Matemática Pesquisa (EMP)	A2	2019
O estudo de sequências numéricas para o ensino de matemática: publicações em periódicos de 2017 a 2022	Renata Passos Machado Vieira, Francisco Regis Vieira Alves, Paula Maria Machado Cruz Catarino	Revista Contrapontos	A3	2023
Organização Curricular de Matemática no Novo Ensino Médio: aspectos da BNCC e do Currículo de Referência de Mato Grosso do Sul	Thaynara Pereira da Silva Isidoro, Helena Alessandra Scavazza Leme	Educação Matemática em Revista (EMR)	A3	2025

Fonte: elaborado pela autora, a partir de dados da pesquisa.

O Quadro 2 mostra a investigação das produções científicas a partir de descritores que correlacionam as Sequências Numéricas Recorrentes (SNR) às representações por meio de tabuleiros e ladrilhos, considerando o mesmo recorte temporal. Os estudos selecionados foram organizados e classificados de acordo com os critérios definidos pela CAPES.

A identificação dos seis artigos foi contemplada no Quadro 3, a seguir, e ocorreu por meio da leitura e da análise das palavras-chave previamente definidas para esta revisão. Contudo, a categorização das produções, constituídas por artigos publicados em periódicos Qualis A e B no período de 2015 a 2025, não evidenciou estudos que articulassem, de forma explícita, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) às representações das Sequências Numéricas Recorrentes (SNR) por meio de tabuleiros e ladrilhos.

Quadro 3 – Artigos sobre representações de SNR via ladrilhos e tabuleiros

Título do artigo	Autores	Periódicos	Qualis	Ano
História da Matemática e Tecnologia: visualização de sequências recorrentes, algumas propriedades e a noção de tabuleiro 2D/3D	Francisco Regis Vieira Alves	Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo	A2	2024
Propriedades Combinatórias sobre a sequência de Jacobsthal, a noção de tabuleiro e alguns apontamentos históricos	Francisco Regis Vieira Alves	Revista Cearense de Educação Matemática	B1	2022
Combinatorial approach on the recurrence sequences: An evolutionary historical discussion about numerical sequences and the notion of the board	Francisco Regis Vieira Alves, Paula Maria Machado Cruz Catarino, Renata Passos Machado Vieira, Eleonora Viana Pinto Spreafico	International Electronic Journal of Mathematics Education	A1	2024

Fonte: elaborado pela autora, a partir de dados da pesquisa.

Os resultados da revisão de literatura confirmaram a existência de uma lacuna quanto às representações visuais das Sequências Numéricas Recorrentes por meio de tabuleiros e ladrilhos, tanto nas produções científicas analisadas quanto no documento curricular. Desse modo, a investigação aponta para a necessidade de ampliar os estudos que integrem essas representações ao contexto curricular, favorecendo o aprofundamento conceitual e o aprimoramento das práticas de ensino e aprendizagem da Matemática e no campo da Educação Matemática.

3.1.1 Análise documental à luz da BNCC

Ainda acerca do ensino-aprendizagem da unidade temática Álgebra, é importante refletir sobre a implementação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), em 1997. O ensino passou por uma reorganização curricular, sendo incorporado ao bloco temático Números e Operações (Brasil, 1997). A partir dessa movimentação, o desenvolvimento algébrico passou a ser enfatizado, com vistas a proporcionar que os estudantes mobilizem processos de abstração e generalização na resolução de diferentes situações-problema (Scremin; Righi, 2020; Bezerra, 2023).

Posteriormente, com a homologação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em 2017, novas diretrizes foram introduzidas no debate sobre currículo, ensino e formação de

professores no âmbito da Educação Básica. No que se refere à Matemática, o documento estrutura o conhecimento em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, e Probabilidade e Estatística, as quais, embora recebam diferentes ênfases ao longo dos anos do Ensino Fundamental, articulam-se com o objetivo de promover o desenvolvimento progressivo de habilidades matemáticas (Brasil, 2017; Bezerra, 2023).

É importante considerar que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento normativo fundamental aprovado pelo Conselho Nacional de Educação (CNE) e homologado pelo Ministério da Educação (MEC), teve sua versão referente à Educação Infantil e ao Ensino Fundamental homologada em 20 de dezembro de 2017, sendo complementada pela etapa do Ensino Médio, homologada em 14 de dezembro de 2018, consolidando, assim, o documento que orienta toda a Educação Básica.

Em diferentes trechos, a BNCC enfatiza que o estudo das regularidades e da generalização de padrões deve ser introduzido desde os Anos Iniciais, conferindo centralidade a essa dimensão do conhecimento no currículo de Matemática (Brasil, 2018). Nesse contexto, as sequências numéricas recorrentes configuram-se como um campo profícuo para essa exploração, uma vez que favorecem o desenvolvimento do pensamento algébrico de forma intuitiva, gradual e significativa, possibilitando aos estudantes a construção de uma base conceitual sólida para a compreensão de conteúdos matemáticos mais complexos.

Diversas pesquisas vêm sendo desenvolvidas em torno do estudo de padrões e dos processos de generalização no ensino-aprendizagem da unidade temática Álgebra na Educação Básica. Emergem, então, questionamentos relacionados à introdução de conceitos e métodos matemáticos considerados avançados para estudantes em idades escolares iniciais, especialmente no âmbito das discussões sobre a denominada *álgebra precoce*.

No âmbito da abordagem da *Early Algebra*, destaca-se a premissa de que não se trata de antecipar, de forma prematura, os conteúdos formais da Álgebra. Antes, busca-se promover, desde os primeiros anos de escolarização, modos de pensar algebricamente, respeitando o desenvolvimento cognitivo dos estudantes e fortalecendo sua base conceitual. Essa perspectiva visa oferecer um suporte sólido para aprendizagens posteriores ao longo das etapas subsequentes da trajetória escolar (Carraher; Schliemann; Schwarz, 2008).

A esse respeito, investigações têm se concentrado na compreensão das capacidades de crianças e adolescentes para lidar com construções algébricas e com processos de abstração a elas conferidas, sendo evidenciados avanços substanciais nesse campo de estudo (Kaput; Carraher; Blanton, 2008).

É sabido que o trabalho com essa unidade temática, conforme orienta a BNCC (Brasil, 2017) para os Anos Finais da Educação Básica, configura-se como um dos maiores desafios pedagógicos da área de Matemática. Tal complexidade decorre, sobretudo, do caráter abstrato dos conceitos algébricos, que exigem dos estudantes a transição do pensamento aritmético — centrado em procedimentos operatórios — para o pensamento algébrico, marcado pela generalização, pela simbolização e pela análise de relações (analiticidade).

Nesse movimento de reorganização do pensamento, os estudantes são convocados a desenvolver competências que envolvem a investigação de regularidades em sequências numéricas e o estabelecimento de relações de variação entre grandezas. Tais competências, previstas na BNCC (Brasil, 2017), demandam não apenas o domínio de técnicas operatórias, mas a construção de significados que possibilitem compreender padrões, expressar relações por meio de diferentes representações e argumentar matematicamente de forma coerente e fundamentada.

Analizando sob um *modus operandi* mais conciso, tem-se que, para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, a relevância do ensino dessas estruturas curriculares engloba objetivos de conhecimento direcionados ao desenvolvimento da compreensão de regularidades, à construção de sequências e à identificação de padrões. Todavia, a aplicação de variáveis literais nesta etapa pedagógica é considerada inadequada, em função do processo ontogenético¹ da construção do conhecimento algébrico (Brasil, 2017).

De modo complementar, nos Anos Finais do Ensino Fundamental, o estudo algébrico é retomado, aprofundado e expandido em relação ao estágio precedente. Postula-se que os discentes nesta fase devem desenvolver a capacidade de discernir os significados das variáveis numéricas em uma expressão algébrica, formular generalizações de propriedades fundamentais, investigar a regularidade de sequências numéricas, identificar valores desconhecidos em sentenças algébricas e estabelecer as relações de covariância entre duas grandezas (Brasil, 2017).

Considera-se fulcral, no contexto da Educação Básica, que os estudantes sejam incentivados a compreender os conceitos introdutórios relacionados a essa temática. Corroborando essa perspectiva, torna-se relevante analisar o Quadro 4, no qual se evidenciam as habilidades explicitamente contempladas na Base Nacional Comum Curricular (Brasil,

¹ O processo ontogenético refere-se ao desenvolvimento do indivíduo ao longo de sua vida, desde as fases iniciais até a maturidade, envolvendo transformações biológicas, cognitivas, sociais e culturais, (Vygotsky, 2007; Radford, 2021).

2017), favorecendo a compreensão das competências matemáticas associadas ao objeto de estudo.

Quadro 4 – Objetivos de conhecimento e habilidades sobre sequências na BNCC

UNIDADE	OBJETIVOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Álgebra - 1º Ano EF	Padrões figurais numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências. Sequências recursivas: observação de regras utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, ...)	(EF01MAT08) (EF01MAT10)
Álgebra 2º Ano EF	Construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas. Identificação de regularidade de sequências e determinação de elementos ausentes na sequência.	(EF02MA09) (EF02MAT10) (EF02MAT11)
Álgebra 3º Ano EF	Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas	(EF03MAT10)
Álgebra 4º Ano EF	Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural. Sequência numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao ser dividido por um mesmo número natural diferente de zero	(EF04MAT08) (EF04MAT11) (EF04MAT12)
Álgebra 7º Ano EF	Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica	(EF07MAT14) (EF07MAT15)
Álgebra 8º Ano EF	Sequências recursivas e não recursivas	(EF08MAT10) (EF08MAT11)

Fonte: BNCC (Brasil, 2017, p. 278-290), elaborada pela autora.

O quadro apresentado evidencia aspectos relevantes para o desenvolvimento dos processos de ensino-aprendizagem, ao destacar possibilidades para a abordagem de diferentes conteúdos matemáticos. Em consonância com a BNCC (Brasil, 2017), observa-se que a unidade temática Álgebra enfatiza o reconhecimento de padrões, regularidades e sequências como elementos essenciais para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A partir dessa análise preliminar do documento curricular vigente, constatou-se que a BNCC (Brasil, 2017) contempla explicitamente o estudo de sequências numéricas, padrões e regularidades. Entretanto, não apresenta orientações específicas acerca da utilização de representações visuais concretas ou de artefatos didático-pedagógicos que potencializem a construção desses conhecimentos. Da mesma forma, não explicita o papel dos diferentes registros de representação e de outros meios semióticos no processo de apropriação dos conceitos matemáticos. Nesse contexto, recursos como as barras de *Cuisenaire*, o tabuleiro $1 \times n$ e os ladrilhos configuram-se como importantes instrumentos didáticos para fortalecer a visualização, a compreensão e a generalização das propriedades das Sequências Numéricas Recorrentes.

Essa lacuna curricular constitui um importante ponto de partida para a presente investigação, que busca ampliar as possibilidades de ensino-aprendizagem dessas estruturas por meio da articulação entre materiais manipuláveis, representações semióticas e os pressupostos da Engenharia Didática e da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

A seguir se fará presente o delinear de um dos arcabouços teóricos relevantes que fundamentaram as linhas desta escrita e fortaleceram o diálogo acerca do assunto matemático.

3.2 Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS): categoria de ordem teórica didática

A ideia desta seção é identificar possíveis contribuições da TRRS para a compreensão de conceitos matemáticos abstratos como os NM, de modo específico aqueles que demandam resolução de problemas, neste caso, para professores que lecionam Matemática na Educação Básica. Deriva-se o entendimento de como as representações semióticas (números, barras de Cuisenaire, ladrilhos, tabuleiro e a língua materna) são tratadas e convertidas para auxiliar na resolução das situações didáticas propostas nesta dissertação.

A TRRS foi desenvolvida por Raymond Duval (1995), que realizou trabalhos no campo de investigação referente à aprendizagem matemática focando na compreensão dos conceitos matemáticos a partir das representações semióticas em sua obra *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentizagens intellectuels*.

Essas representações constituem elementos fundamentais para favorecer a compreensão das propriedades fundamentais e recursivas dos Números Metálicos (NM) em espaços dialógicos de aprendizagem. Nessa perspectiva, os fundamentos apresentados coadunam-se com a seção anterior ao reforçarem a relevância dos registros e dos meios semióticos na construção e na significação de conceitos matemáticos abstratos. Assim, esta seção busca compreender os aspectos teóricos e práticos que sustentam a investigação, fundamentando-se nos pressupostos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), de Duval (1995), segundo a qual a aprendizagem matemática ocorre por meio da articulação, coordenação e conversão entre diferentes registros de representação semiótica, tais como os registros numérico, figural, concreto e discursivo.

Convém destacar que, segundo o autor, o acesso ao objeto matemático não ocorre de forma direta, mas por meio de suas representações em diferentes registros semióticos. Nessa perspectiva, o estudo dessas representações torna-se essencial para explicitar os processos de

compreensão e aprendizagem das construções matemáticas relacionadas aos NM, especialmente aquelas mediadas pelas barras de Cuisenaire, tabuleiros e ladrilhos enquanto artefatos manipuláveis e recursos de visualização matemática.

De modo complementar, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) parte do pressuposto de que os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis ao pensamento humano, sendo apreendidos apenas por meio de suas representações. Nesse sentido, gráficos, expressões algébricas, tabelas, figuras geométricas, textos e demais formas de representação constituem registros semióticos que possibilitam a construção e a comunicação do conhecimento matemático. Para Duval (1995), a compreensão efetiva de um conceito depende da capacidade do sujeito de realizar tratamentos, entendidos como transformações efetuadas no interior de um mesmo registro, e conversões, caracterizadas pela passagem de um registro de representação para outro.

Nessa perspectiva, os artefatos semióticos configuraram-se como recursos fundamentais para a aprendizagem dessas estruturas, abrangendo desde a linguagem natural e os sistemas de escrita até materiais manipuláveis, tais como as barras de Cuisenaire, tabuleiro e ladrilhos, dentre outros dispositivos de mediação.

Esses artefatos — barras de Cuisenaire, ladrilhos e tabuleiro — não apenas tornaram as representações mais visíveis e acessíveis, como também favoreceram a coordenação entre diferentes registros de representação semiótica, ampliando as possibilidades de compreensão efetiva do conceito matemático, ou seja, da construção do conhecimento acerca do objeto representado, neste estudo, as sequências dos NM.

Ainda sobre o assunto, Duval afirma que "Não existe noésis sem semiósis; é a semiósis que determina as condições de possibilidade e de exercício da noésis" (Duval, 1995, p. 4). Isso significa que a compreensão dos objetos matemáticos depende da mobilização e da articulação de diferentes sistemas de representação, uma vez que tais objetos não são diretamente acessíveis à percepção.

Desse modo, ao evidenciarem aspectos complementares de um mesmo conceito, as barras de Cuisenaire, o tabuleiro e os ladrilhos auxiliam na conversão e na coordenação entre os diferentes registros, evitando a identificação equivocada entre o objeto matemático e suas representações. Nessa perspectiva, as vivências e os materiais atuaram como mediadores semióticos e suportes cognitivos fundamentais para a construção de significados, a generalização de regularidades e a consolidação do pensamento algébrico (Duval, 1995).

O excerto evidencia que, para que ocorra a compreensão do objeto matemático investigado nesta dissertação, torna-se necessária a articulação e a correspondência entre diferentes registros de representação semiótica, contexto analisado de forma empírica nas seções de Experimentação e Análise *a Posteriori*. Sendo assim, as barras de Cuisenaire e os ladrilhos metálicos, embora constituam representações distintas, remetem à mesma categoria de ordem matemática: as propriedades fundamentais e recursivas dos Números Metálicos (NM).

3.3 Do “Saber Sábio” ao “Saber Ensinado” de Chevallard (1986)

O “saber sábio” no ensino dos Números Metálicos está fundamentado na compreensão das propriedades das equações quadráticas da forma:

$$x^2 - px - q = 0 \quad (2)$$

Nesse ínterim, a transposição didática opera por meio de suportes de representação que convertem processos abstratos em modelos de ladrilhamento físicos. Outrossim, o conceito de recorrência é deslocado para o domínio das combinações numéricas que seguem um padrão, em que se determina o número de maneiras de preencher um $n \times n$ -tabuleiro, ou de se trabalhar com as barras de Cuisenaire para identificar padrões, tornando o ensino dessas estruturas particularmente instigante.

Neste estudo, o ponto de partida recai precisamente sobre essas duas formas de representação dos Números Metálicos. Além disso, diante das tarefas progressivas que serão apresentadas na Seção 5, mostraram-se relevantes as abordagens teóricas que serviram de arcabouço para esta escrita dissertativa, sustentando a análise das práticas e dos recursos mobilizados para auxiliar a formação de professores.

3.4 Estudos emergentes das Sequências Numéricas Recorrentes: categoria de ordem matemática

O estudo das Sequências Numéricas Recorrentes (SNR), em especial da família dos Números Metálicos, consolidou-se como um campo profícuo de investigação a partir da década de 1960, impulsionado pelos trabalhos de Brousseau (1965, 1971), Hoggatt (1969) e Bicknell

e Hoggatt (1971), e ampliado por estudos contemporâneos, como os de Alves et al. (2024), Alves e Catarino (2022), Gullberg (1997), Alves (2017) e Alves, Catarino e Spreafico (2023).

Essas investigações favoreceram o desenvolvimento de propostas didáticas voltadas ao ensino-aprendizagem dessas estruturas, cuja gênese remonta ao clássico problema da reprodução de coelhos associado à sequência de Fibonacci. Mais recentemente, novas sequências, como as de Leonardo, ampliaram esse campo de investigação ao evidenciarem relações matemáticas com as sequências de Lucas e Fibonacci (Catarino; Borges, 2020).

A seguir, alguns exemplares de SNR.

Quadro 5 – Quadro representativo de SNR definidas por valores iniciais

SEQUÊNCIA NUMÉRICA	RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA ALGÉBRICA
Fibonacci	$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, com $F_0 = 0, F_1 = 1$
Padovan ou Coordonner	$C_{n+1} = C_{n-1} + C_{n-2}$, com $C_0 = 1, C_1 = 0$
Peel	$P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$, com $P_0 = 0, P_1 = 1$
Lucas	$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$, com $L_0 = 1, L_1 = 3$
Perrin	$Q_{n+1} = Q_{n-1} + Q_{n-2}$, com $Q_0 = 3, Q_1 = 0$
Oreste	$O_{n+2} = O_{n+1} - \left(\frac{1}{4}\right) O_n$, com $O_0 = 0, O_1 = 2$
Narayanna	$N_{n+1} = N_n + N_{n-2}$, com $N_0 = 1, N_1 = 1$
Jacobsthal	$J_{n+1} = J_n + 2J_{n-1}$, com $J_0 = 0, J_1 = 1$
Mersenne	$M_{n+2} = 3M_{n+1} - 2M_n$, com $M_0 = 0, M_1 = 1$

Fonte: Alves (2024), adaptado pela autora.

O Quadro 5 reúne exemplos representativos dessas sequências matemáticas, destacando suas leis de formação e valores iniciais. Essa organização evidenciou as relações estruturais entre as Sequências Numéricas Recorrentes (SNR), ampliando o campo de investigação dessas sequências e oferecendo subsídios para o desenvolvimento de propostas didático-pedagógicas voltadas ao ensino-aprendizagem dessas estruturas.

3.4.1 A Sequência de Fibonacci e a Sequência dos Números Metálicos

O matemático Leonardo de Pisa, o Fibonacci (1170 – 1250), nasceu em Pisa, um grande centro comercial italiano. Por ser filho de um comerciante com negócios no norte da África, viajou por várias regiões do Mediterrâneo, como Egito, Síria e Grécia. Nessas viagens, Fibonacci aglutinou inúmeros conceitos, dentre eles: a álgebra árabe e o sistema de numeração indo-arábico. Ao retornar à Itália, reuniu e divulgou esses conhecimentos orientais em sua obra mais famosa, o *Liber Abaci* ("Livro do Ábaco"), publicada em 1202.

Figura 3 – Leonardo de Pisa



Fonte: Zahan (2011, p. 9).

Muito além de um manual sobre cálculos, o *Liber Abaci* (1202) consolidou-se como um marco histórico ao introduzir métodos algébricos e defender o sistema numérico indo-arábico na Europa. A obra é considerada célebre por apresentar a Sequência de Fibonacci, uma sucessão ubíqua de segunda ordem com profundas aplicações na natureza e na ciência.

Essa sequência surge a partir de um problema clássico que descreve o crescimento populacional de coelhos sob condições ideais, segue o problema: “Quantas ninhadas de coelhos podem ser produzidas em um ano a partir de uma única ninhada, se cada ninhada gera uma nova ninhada a cada mês, cada nova ninhada se reproduz a partir de um mês de idade e os coelhos nunca morrem?” (Sigler, 2002, p. 404-405). A solução matemática possível para esta questão gira em torno da série com termos 1, 1, 2, 3, 5, 8, 11, ..., expressada pela recursão $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para $F_0 = 1$ e $F_1 = 1$.

O excerto anterior configura-se com uma tradução livre da famosa questão sobre os coelhos imortais, idealizado por Leonardo de Pisa (1170 - 1217). Desse modo, é possível perceber a recursividade presente nesta sequência onde a partir do terceiro mês, o número de casais de coelhos, num certo mês, é exatamente igual à soma do número de casais dos dois meses anteriores (Sigler, 2002).

Definição 1: "Chama-se de sequência de Fibonacci a sequência definida por: (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...) onde os termos presentes na sequência denominam-se números de Fibonacci" (Zahn, 2011, p. 6).

Apesar de sua relevância científica e cultural, Alves (2022) adverte que essas estruturas, os Números Metálicos, são frequentemente negligenciados nos currículos de Matemática, o que limita o entendimento de suas propriedades recursivas e conexões interdisciplinares.

3.4.2 Os Números Metálicos (NM): categorias de ordem matemática

A Matemática, enquanto linguagem universal e ferramenta necessária para a compreensão das questões naturais e culturais, revela uma diversidade de conceitos de elevada sofisticação e significância. Dentre essas, destaca-se a Família dos Números Metálicos (FNM), que incluem a Razão Áurea (ϕ), a Razão de Prata (δS) e a Razão de Bronze (δB), dentre outros. Os conceitos supracitados emergem de estruturas algébricas e geométricos fascinantes, e manifestam-se em características da natureza, nas artes, na música e na arquitetura, refletindo uma harmonia intrínseca a natureza (Livio, 2003; Posamentier; Lehmann, 2007).

Nesse cenário, a História da Matemática (HM) desempenha um papel importante, pois sua inserção no ensino transcende a mera contextualização cronológica e proporciona uma compreensão profunda da gênese, do desenvolvimento e da evolução dos conceitos matemáticos, revelando desafios, intuições e paradigmas que configuraram essas construções ao longo do tempo (Miguel; Fiorentini; Miorim, 2017).

A Família dos Números Metálicos (FNM), iniciada pela Dra. Spinadel em 1997, consubstanciou o estudo de um conjunto infinito de números irracionais quadráticos positivos. O membro mais relevante dessa família é o Número de Ouro (ϕ), dentre outros, tais como: o Número de Prata, o de Bronze, o de Cobre, o de Níquel (Spinadel, 1997). Essa nomenclatura de “família” discorre pelo fato que todos compartilham propriedades matemáticas e físicas relevantes e essenciais para pesquisas que investigam sistemas de origem micro e macro-físicos, que vão desde a estrutura interna do DNA até a organização de galáxias no universo (Spinadel, 2011).

Toma-se como ponto de partida o estudo do Número de Ouro, representado por:

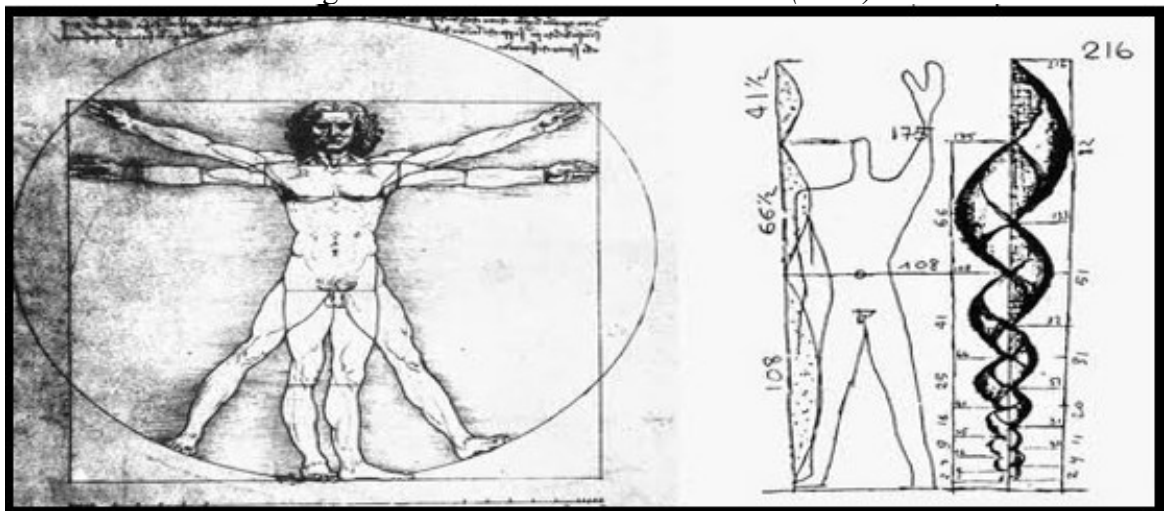
$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618 \text{ (phi)} \quad (3)$$

De modo peculiar, amplamente reconhecido por sua presença em fenômenos naturais, produções artísticas e construções arquitetônicas. Essa ubiquidade foi, durante muito tempo, compreendida como um número único e singular devido às suas propriedades matemáticas e estéticas. Entretanto, Vera W. de Spinadel (1995) demonstrou que o Número de Ouro integra uma família mais ampla denominada Família dos Números Metálicos, composta pelas raízes positivas da equação quadrática:

$$x^2 - px - q = 0 \text{ com } p, q \in \mathbb{N} \quad (4)$$

Outrossim, esse valor foi utilizado ao longo do desenvolvimento da cultura humana até o nosso atual século XXI. Dentro de nossa cultura, constatou-se que, segundo Spinadel (2011, p. 14) “o sistema de proporções musicais utilizado durante o Renascimento italiano, assim como o *Módulo* criado pelo famoso arquiteto suíço *Le Corbusier*, basearam-se no Número de Ouro,” revelando sua ubiquidade representada nas artes e em contextos gerais.

Figura 4 - o Módulo de *Le Corbusier* (1948)



Fonte: Curtis (1986).

Em 1948, o arquiteto Charles-Édouard Jeanneret-Gris, mundialmente conhecido como *Le Corbusier*, publicou uma de suas obras mais influentes, *O Módulo*, complementada, em 1953, por *O Módulo 2*. Nessas duas publicações, o autor sistematizou sua proposta de um sistema de proporções baseado na figura humana, retomando e ampliando investigações iniciadas por Vitruvius, Leonardo da Vinci e Leon Battista Alberti. Seu objetivo consistia em estabelecer intrínsecas relações matemáticas entre as proporções do corpo humano e as formas presentes na natureza, oferecendo um referencial para a arquitetura, o design e outras manifestações artísticas (Curtis, 1986).

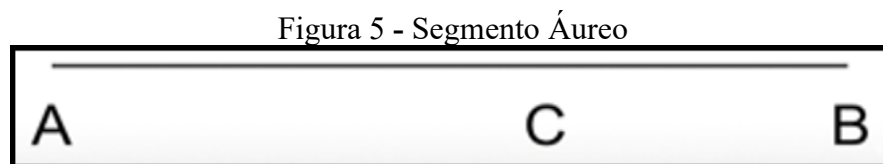
Ao longo da história, alguns nomes importantes como Pitágoras, Euclides, Leonardo de Pisa (Fibonacci), e outros destacados estudiosos contemporâneos, dedicaram-se à elucidação da Razão Áurea (ϕ) e à sistematização dos princípios que regem suas propriedades matemáticas (Livio, 2002).

Historicamente, a razão de Ouro era representada pela letra grega Tau (τ). No entanto, conforme aponta Lívio (2002), o matemático Mark Barr propôs, no início do século XX, a

adoção da letra Phi (ϕ ou φ) para simbolizar essa proporção. Essa nomenclatura é uma homenagem ao célebre escultor grego Fídias (Phidias), que teria aplicado a proporção áurea na construção do Pártenon em Atenas (447 - 432 a.C.). Assim, o número de ouro é aproximadamente $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (phi), carrega em seu símbolo o reconhecimento à estética clássica da Grécia Antiga, Lívio (2002).

Ainda segundo esses conceitos, tem-se que esta proporção segue definições e propriedades:

Definição 4: Dizemos que um ponto C divide um segmento AB na razão áurea se:



Fonte: elaborado pela autora.

Segundo Zahn (2011, p. 6), Figura 7, “A razão da medida do segmento AB para a medida AC é denominada de razão extrema e a medida do segmento AC para a medida do segmento CB. É denominada razão média.” Desse modo, AB = a e AC = x , tem-se que CB = $a - x$, logo, pode-se obter o número à proporção:

$$\frac{\underline{AB}}{\underline{AC}} = \frac{\underline{AC}}{\underline{CB}} \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} \Leftrightarrow x^2 + ax - a^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \text{ e } x_2 = a\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \quad (5)$$

Consideram-se raízes desta equação. Observa-se que como x é um valor positivo,

$$x = a\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \quad (6)$$

e que a razão áurea é:

$$\frac{a}{x} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad (7)$$

este número obtido é considerado o número de ouro representado pela letra grega φ (phi).

Apesar desse vasto potencial formativo, o ensino de sequências nos cursos de formação inicial de professores costuma restringir-se quase exclusivamente à sequência de Fibonacci (SF), muitas vezes apresentada apenas em função de sua origem histórica e de sua relação com personagens clássicos da matemática (Vieira; Alves; Catarino, 2020). Essa abordagem, embora relevante, limita a compreensão de propriedades algébricas mais gerais e reduz a possibilidade de explorar sobre as estruturas numéricas relacionadas às sequências numéricas, dentre elas os Números Metálicos.

Doravante, reveste-se de relevância o estudo proposto, pois aponta que autores como Grimaldi (2012) e Stillwell (2010) destacam que os livros de história da matemática frequentemente relegam a um segundo plano as generalizações e os aprofundamentos conceituais das sequências. Nessa direção, Alves (2018) observa que não é suficiente tratar tais números como simples curiosidades históricas, sendo necessário fundamentá-los matematicamente.

Esse cenário reforça a pertinência de pesquisas contemporâneas voltadas ao estudo de sequências numéricas, que não apenas ampliam o conhecimento teórico em matemática pura, mas também oferecem subsídios para suprir lacunas presentes neste campo investigativo, conforme postulam Alves (2017; 2022) Alves e Catarino (2020); Alves, Catarino e Vieira (2023) e Alves e Catarino (2022).

Ainda no contexto da Família dos Números Metálicos (FNM), considerando a nomenclatura contemporânea, Vieira (2024) acrescenta que a sequência associada ao Número de Ouro apresenta uma lei de recorrência da forma:

$$M_n = kM_{n-1} + M_{n-2}, \text{ com } M_0 = 0 \text{ e } M_1 = 1 \quad (8)$$

Essas relações estabelecem vínculos diretos entre as propriedades recursivas e algébricas que caracterizam os elementos pertencentes à Família dos Números Metálicos. Sob a perspectiva da notação matemática contemporânea, pode-se considerar a seguinte definição como representação formal das propriedades aritméticas associadas aos Números Metálicos:

Definição 5: Para todo inteiro, $n \geq 0$ e $k \geq 1$ o conjunto dos NM, $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ fica determinado pela seguinte recorrência homogênea e de 2ª ordem, $M_n = kM_{n+1} + M_{n+2}$ com valores inicial $M_0 = 0$ e $M_1 = 1$. Podemos determinar a seguinte equação característica associada com a recorrência anterior, da forma $x^2 = kx + 1$ e que é possível determinar as

raízes $r^1 = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$ e $r^2 = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$. Com os valores correspondentes com a seguinte raiz positiva, passamos a descrever certas razões associadas aos números metálicos. Considerado $k = 1 \therefore x^2 = kx + 1$, a partir da definição 1, estabelece-se a seguinte razão de ouro:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} \Rightarrow r^1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618 \quad (9)$$

Segundo Spinadel (1995), essa manifestação constitui um campo de estudo instigante, ao evidenciar uma conexão profunda entre a Matemática e o meio físico-natural. Em continuidade, Spinadel (1997), no artigo *La Familia de Números Metálicos y el Diseño (A Família dos Números Metálicos e o Design)*, destaca a relevância dessa família numérica em diferentes contextos de investigação, especialmente nas relações entre proporção, forma e design. Essa articulação pode ser observada no Quadro 6, apresentado a seguir.

Quadro 6 – Sequências Metálicas definidas por seus valores iniciais

O Objeto Matemático: A Família Metálica				
Metal	Constante (k)	Lei de Formação (M_n)	Sequência de Números (M_0 to M_6)	Razão/Limite
Ouro	k=1	$M_n = 1M_{n-1} + M_{n-2}$	0, 1, 1, 2, 3, 5, 8 ...	$(1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,618$
Prata	k=2	$M_n = 2M_{n-1} + M_{n-2}$	0, 1, 2, 5, 12, 29, 70 ...	$1 + \sqrt{2} \approx 2,414$
Bronze	k=3	$M_n = 3M_{n-1} + M_{n-2}$	0, 1, 3, 10, 33, 109, 360 ...	$(3 + \sqrt{13})/2 \approx 3,303$
Cobre	k=4	$M_n = 4M_{n-1} + M_{n-2}$	0, 1, 4, 17, 72, 305, 1292 ...	$2 + \sqrt{5} \approx 4,236$
Níquel	k=5	$M_n = 5M_{n-1} + M_{n-2}$	0, 1, 5, 26, 135, 701, 3640 ...	$(5 + \sqrt{29})/2 \approx 5,192$

Valores Iniciais para todos: $M_0 = 0$, $M_1 = 1$.
 Família iniciada pela Dra. Spinadel (1997).
 Limites corrigidos de acordo com a formulação geral: $\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$.

Fonte: Vieira (2024) e Spinadel (2011), elaborada pela autora com auxílio da IA Gemini (2026).

Nesse contexto, observa-se que algumas das razões mais representativas da Família dos Números Metálicos, como o número de ouro $= \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, prata $= 1 + \sqrt{2}$, bronze $= \frac{3+\sqrt{13}}{2}$, estão presentes em diferentes manifestações artísticas e arquitetônicas. Tais razões, caracterizadas por propriedades aditivas, multiplicativas e recursivas, encontram aplicações em sistemas proporcionais, composições geométricas e construções desenvolvidas ao longo da história, desde a Antiguidade até os dias atuais. Essa presença reforça a importância dos Números

Metálicos como um elo entre a Matemática e as Artes, evidenciando a riqueza de suas aplicações e interpretações (Spinadel, 1998).

3.4.3 Propriedades fundamentais dos Números Metálicos

Nesta seção apresenta-se algumas propriedades fundamentais da sequência de Ouro e a fórmula de Binet ou fórmula do termo geral. Pode-se associar ainda a relação da sequência de Ouro e a de Fibonacci como ampliação do conceito dentro do mesmo constructo.

Ramos (2013) salienta a relação entre os quadrados de φ com sua parte decimal. Sabe-se que:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887... \quad (10)$$

$$\varphi - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,6180339887... \quad (11)$$

Segue que:

$$\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+2+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{2} = \varphi + 1 = 2,6180339887... \quad (12)$$

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{2-2\sqrt{5}}{-4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi - 1 = 0,6180339887... \quad (13)$$

Não obstante, conclui-se que φ , φ^2 e $\frac{1}{\varphi}$ tem os mesmos resultados na sua parte decimal. Assim φ tem a propriedade de produzir seu quadrado apenas adicionando 1 e seu inverso apenas subtraindo 1.

Propriedade 2: "Somando-se duas potências inteiras consecutivas de φ tem-se a potência de φ seguinte".

$$\varphi^n + \varphi^{n+1} = \varphi^{n+2}, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (14)$$

Demonstração: A referida prova será feita por indução sobre n . considerando $n \geq 0$

(i) Fazendo $n = 0$, tem-se: $\varphi^0 + \varphi^1 = \varphi^2 \Leftrightarrow 1 + \varphi = \varphi^2$ estando de acordo com a base de indução conforme propriedade 2;

(ii) Deseja-se mostrar que é válida para $n + 1$. Multiplicando por φ , tem-se: $\varphi^n \cdot \varphi +$

$$\varphi^{n+1} \cdot \varphi = \varphi^{n+2} \cdot \varphi \Rightarrow \varphi^{n+1} + \varphi^{n+2} = \varphi^{n+3} \quad \text{conforme se queria demonstrar.}$$

Outras propriedades que se pretende observar em contexto das situações didáticas são as propriedades fundamentais da adição e multiplicação, bem como a estabilidade da somatória dos resultados das razões consecutivas das sequências metálicas, essas construções poderão fortalecer o ensino-aprendizagem de matemática relativos as generalizações de padrões e recursividade.

Segundo Ramos (2013, p. 35), encontra-se definida a fórmula de Binet:

Proposição 1: “A fórmula de Binet pode ser escrita em função do número de ouro φ .”

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} [\varphi^n - (-\varphi)^{-n}] \quad (15)$$

Demonstração: A Fórmula de Binet é dada por:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \quad (16)$$

Sendo:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (17)$$

$$1 - \varphi = 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{2-1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad (18)$$

Substituindo, tem-se:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} [\varphi^n - (1 - \varphi)^n] \quad (19)$$

Importante lembrar que

$$\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}, \text{ vale dizer que } 1 - \varphi = -\frac{1}{\varphi} \quad (20)$$

Desta forma, tem-se que:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} [\varphi^n - (-\frac{1}{\varphi})^n] \Rightarrow f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} [\varphi^n - (-\varphi)^{-n}] \quad (21)$$

A Fórmula de Binet permite calcular o n -ésimo termo de uma sequência de recursão linear, sendo mais famosa por encontrar números de Fibonacci/Ouro de forma direta, sem precisar somar os anteriores.

Ela é expressa por:

$$F_n = \frac{\varphi^n - \beta^n}{\varphi - \beta} \text{ onde } \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad (22)$$

Vale salientar que com a Fórmula de Binet é possível encontrar qualquer termo da sequência de Ouro.

Em se tratando de recursividade, algumas tarefas didáticas propostas foram desenvolvidas com o intuito de compreender a estabilidade das razões consecutivas da sequência de Ouro, favorecendo o fortalecimento da compreensão dos padrões recursivos e das relações algébricas presentes na sequência.

Doravante, torna-se necessária a introdução de algumas propriedades matemáticas fundamentais para o desenvolvimento da investigação.

Teorema 1: Sejam m, n e p números naturais arbitrários. São verdadeiras as afirmações (Ferreira, 2013, p. 29):

- $m + (n + p) = (m + n) + p$ (Propriedade associativa da adição);
- $n + m = m + n$ (Propriedade comutativa da adição).

A formalização desse processo se dá através do Princípio de Indução e acrescenta que a soma $m + n$ está definida para m, n dos naturais. Um comentário importante acerca do teorema anterior é que outras definições podem ser aplicadas de forma recursiva, como a multiplicação de naturais, dentre outras (Ferreira, 2013).

Definição 6: A multiplicação de dois números naturais, m e n , é designado por $m.n$ e definida recursivamente da seguinte maneira (Ferreira, 2013, p. 31):

- $m \cdot 0 = 0$ (Propriedade elemento neutro);
- $m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m$ (Propriedade distributiva da multiplicação).

Tem-se que esta definição fornece a multiplicação de um número m arbitrário por 0. Através do qual percebe-se as demais propriedades da multiplicação que se deseja elucidar através do teorema abaixo:

Teorema 2: Para m, n e $p \in \mathbb{N}$, valem as seguintes proposições abaixo (Ferreira, 2013, ps. 31 e 32):

- $mn \in \mathbb{N}$, dar-se-á que a multiplicação é de fato uma operação em $\mathbb{N}$;
- Ocorre a existência do elemento neutro multiplicativo: $1 \cdot n = n \cdot 1 = n$;
- Distributividade: $m(n + p) = mn + mp$ e $(m + n)p = mp + np$;
- Associatividade: $m(np) = (mn)p$;
- $mn = 0 \Rightarrow m = 0$ ou $n = 0$;
- Comutatividade: $nm = mn$.

Nesse contexto, as propriedades acima foram visualizadas pelos os participantes na hora da experimentação formativa e pelas ferramentas manipuláveis, como as barras de *Cuisenaire* e o Tabuleiro Metálico, os quais atuaram como instrumentos potencializadores coletiva do conhecimento acerca do objeto matemático em estudo. Esta análise preliminar contribuída pelo referencial teórico preocupou-se na concretização do texto e foi fulcral para que ocorresse o *link* inicial com as abordagens teóricas manifestadas acerca da historicidade entre as SF e dos NM.

Segue-se nas linhas desta investigação a próxima seção que contribuiu, apresentando os materiais manipulativos que fortaleceram os momentos formativos entre professores participantes e professora pesquisadora.

3.5 Os artefatos semióticos: categorias de ordem didática

As ferramentas manipulativas consideradas para esta dissertação fazem parte das representações semióticas (Duval, 1995) e configuram-se como recursos pedagógicos que potencializaram a visualização, a exploração e a compreensão de propriedades matemáticas na hora da experimentação. Ao possibilitarem experimentação direta entre os participantes e a

pesquisadora os conceitos, promoveram a articulação entre dimensões táteis e visuais do conhecimento, ressignificando o processo de ensino e aprendizagem.

Além disso, esse tipo de experiência ocorreu em contexto de um Curso de Extensão cuja a organização, significado e aplicação contribuiu para a efetivação da transposição didática, conforme proposto por Chevallard (1996), ao tornar latente saberes matemáticos abstratos por meio de representações concretas, sob uma perspectiva teórico-prático, nas seções subsequentes.

3.5.1 As barras de Emile-Georges Cuisenaire (1891-1980)

A evolução dos materiais didáticos no que concerne ao ensino de Matemática repercute, na contemporaneidade, como elemento fundamental para a transformação das práticas pedagógicas e para a ressignificação dos processos de construção do conhecimento abstrato. Nesse contexto, destaca-se a criação das barras de Cuisenaire, desenvolvidas pelo professor belga Émile-Georges Cuisenaire (1891–1980), cuja gênese está associada às dificuldades de aprendizagem apresentadas por um de seus alunos.

Tal episódio constituiu-se como elemento catalisador para a busca de uma abordagem pedagógica que transcendesse os limites da abstração puramente formal, favorecendo processos de visualização, manipulação e significação dos conceitos matemáticos (Abreu; Santos; Rodrigues, 2018).

Esse marco histórico reforça a relevância dos artefatos semióticos no ensino de Matemática, evidenciando a necessidade de estratégias didáticas que articulem experiências concretas e construções conceituais abstratas. Nessa perspectiva, Cuisenaire foi sensibilizado pela angústia de um estudante diante da incompreensão de conceitos matemáticos, fato que impulsionou o desenvolvimento de materiais manipuláveis voltados à mediação do pensamento matemático e à ampliação das possibilidades de aprendizagem (Abreu; Santos; Rodrigues, 2018).

Esse material didático — as barras de Cuisenaire — visa a corroborar a visualização e a manipulação de conceitos numéricos fundamentais, como adição, subtração, frações e razões. Conforme Abreu, Santos e Rodrigues (2018), os materiais manipulativos são essenciais para a compreensão do conhecimento matemático, ao promoverem a objetivação de conceitos e uma apreensão mais profunda. Nesse sentido, torna-se imperativo considerar cada "signo e artefato" (Radford, 2021) que contribui para a materialização do pensamento abstrato.

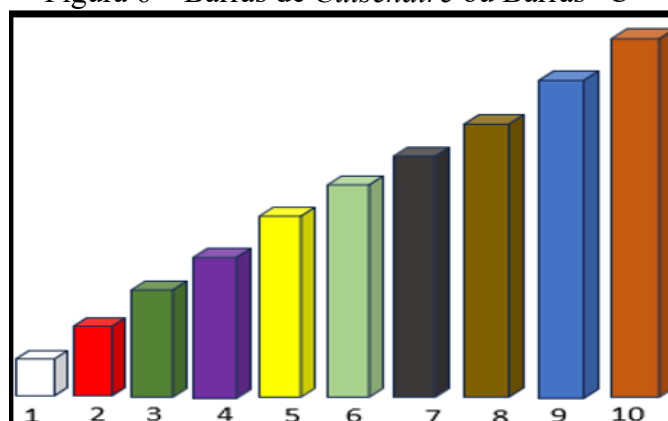
Segundo Gattegno (1974), os materiais manipuláveis não devem ser compreendidos apenas como instrumentos de demonstração, mas como elementos constitutivos do pensamento matemático. Essa perspectiva alinha-se com Radford (2021), ao afirmar que os signos e artefatos integram a própria atividade cognitiva. Nesse diapasão, as barras de Cuisenaire, conforme descritas por Hare e Chinn (1996), constituem um sistema padronizado de cores e comprimentos que favorece a compreensão intuitiva de diversos conceitos matemáticos ao longo da escolaridade.

Diante desse potencial didático, a manipulação concreta é adotada como artefato semiótico central no processo de ensino e aprendizagem dos conceitos relacionados aos Números Metálicos, contribuindo para a materialização do pensamento abstrato. Com base nesse referencial teórico, a pesquisa avança para a descrição dos procedimentos metodológicos, visando explicitar o método adotado e os processos de objetivação esperados.

A invenção desse recurso didático exemplifica uma resposta pragmática a um desafio pedagógico, transformando uma experiência de dificuldade em um artefato que promove a concretização do pensamento abstrato (Abreu; Santos; Rodrigues, 2018).

Dessa forma, a visualização em Matemática, que abrange desde o uso de gráficos até a manipulação de objetos concretos, torna-se um instrumento cognitivo fundamental. Configura-se, assim, como um exemplo dessa evolução, ilustrando uma mudança de paradigma no ensino-aprendizagem da Matemática, ao oferecer uma abordagem mais concreta e acessível para o ensino dessas estruturas, ver Figura 6:

Figura 6 – Barras de *Cuisenaire* ou Barras “C”



Fonte: baseada na obra de Abreu, Santos e Rodrigues (2018, p. 286), adaptado pela autora.

A utilização desses artefatos está em profunda sintonia com as diretrizes da BNCC (Brasil, 2018). Embora o documento não as mencione especificamente, preconiza um ensino de Matemática mais contextualizado e menos intimidante, em que os estudantes possam

desenvolver habilidades de raciocínio, comunicação e resolução de problemas. A Base ainda enfatiza que a aprendizagem deve ser construída por meio da exploração, investigação e descoberta (Brasil, 2017).

Segundo Gattegno (1974), a manipulação de materiais concretos favorece a passagem do nível intuitivo para o abstrato, contribuindo para a consolidação da compreensão dos conceitos matemáticos. Essa interação com os objetos possibilita que os estudantes expressem seus raciocínios, argumentem sobre suas estratégias e justifiquem as descobertas realizadas durante o processo de aprendizagem.

Nessa direção, Hare e Chinn (1996) destacam que as barras de Cuisenaire foram amplamente utilizadas desde a Educação Infantil até o 8º ano do Ensino Fundamental, auxiliando os alunos no desenvolvimento de uma compreensão intuitiva de conceitos matemáticos, tais como números inteiros, frações, padrões e funções, entre outros conteúdos fundamentais.

Procurar entender como a movimentação dessas ferramentas pode possibilitar a aprendizagem de padrões recursivos e outras definições constitui tarefa *sine qua non*, não apenas na descrição de sua eficácia, mas também na fundamentação teórica do processo pelo qual elas atuam como mediadoras na construção do conhecimento matemático (Radford, 2021; Duval, 1995).

Decerto que, a partir de um estudo bibliográfico e de aplicações práticas por meio das atividades do itinerário metodológico proposto, as relações proporcionais puderam ser visualizadas mediante o estudo de combinações específicas de objetos, ferramentas e dispositivos linguísticos, relatados no decorrer do texto. Esses elementos fomentaram a transformação do saber em conhecimento.

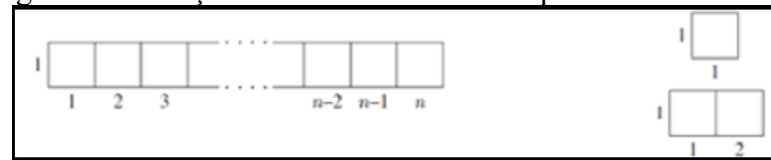
3.5.2 Tabuleiro $1 \times n$, ladrilhos e ladrilhamento

De modo complementar, esta pesquisa fundamentou-se na exploração de um campo conceitual e material relevante para a Matemática contemporânea. Os estudos de Benjamin e Quinn (2003) evidenciaram o potencial dos tabuleiros unidimensionais ($1 \times n$) na investigação combinatória de propriedades aritméticas e recursivas, enquanto Spreafico (2014) amplia essa perspectiva ao discutir o uso de tabuleiros e ladrilhos como representações visuais dessas estruturas.

Tais referenciais, alicerçados pela Figura 7 abaixo, coadunam com a presente

investigação ao reconhecer esses artefatos aliados a vivências colaborativas favorecem a visualização, a coordenação entre diferentes registros de representação e a compreensão das Sequências Numéricas Recorrentes, em consonância com os pressupostos da Engenharia Didática e da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Figura 7 – A noção de n – tabuleiro e a Sequência de Fibonacci

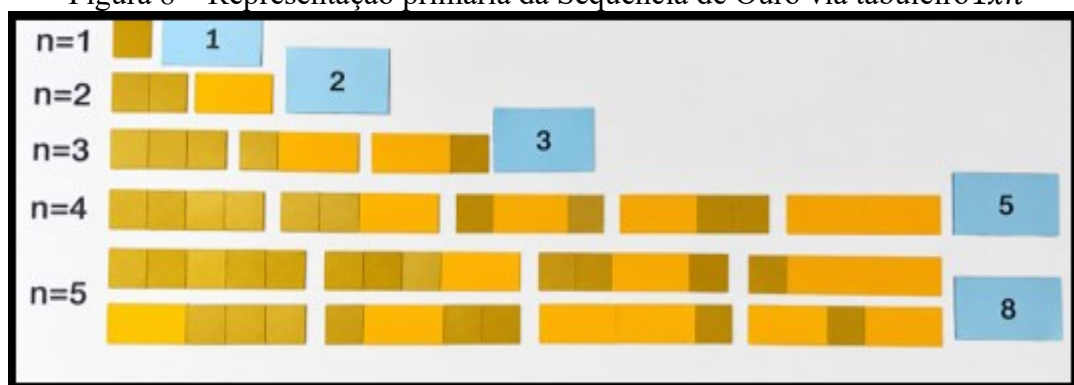


Fonte: Benjamin; Quinn (2003b, p. 12).

De modo complementar, tem-se que, em estudos atuais, o Tabuleiro Concreto é caracterizado como um n -tabuleiro com dimensão $1 \times n$, onde um conjunto $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, L_3, \dots, L_k\}$ ($1 < k \leq n$), denominado ladrilhamento, corresponde às composições dos conjuntos de ladrilhos organizados conforme o preenchimento do tabuleiro em ordem crescente das células (Alves *et al.*, 2024).

Vale salientar que por definição, as formações quadráticas denominados por casas ou células são enumeradas e descrevem a posição das composições ou combinações de ladrilhos utilizando um quadrado de dimensão  1×1 e um dominó (coringa) de dimensão  1×2 , (Spreafico, 2014).

Figura 8 – Representação primária da Sequência de Ouro via tabuleiro $1 \times n$



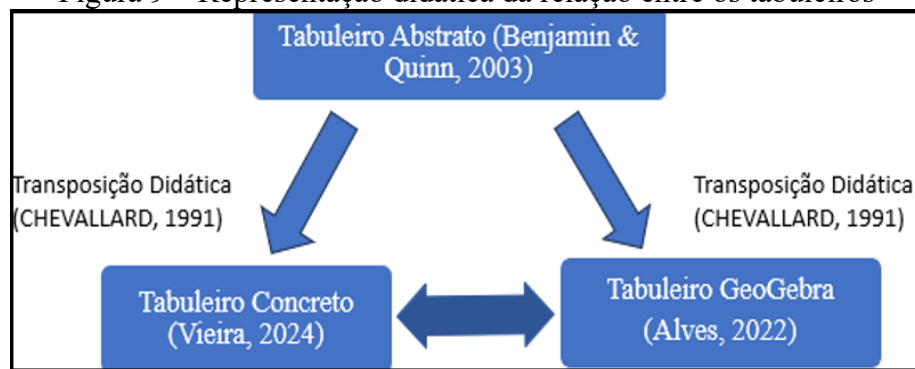
Fonte: dados da pesquisa, idealização da autora com o aperfeiçoamento da IA Gemini

Dessa forma, seja pela atribuição de cores ao preenchimento das células, seja pela marcação das posições correspondentes aos termos da sequência, favorece-se a identificação de padrões visuais e a construção de uma compreensão mais concreta das propriedades e da estrutura das sequências numéricas.

A escolha desses materiais específicos para esta dissertação será detalhada nas Seções 4 e 5, mas a premissa é que estes possam configurar uma extensão na representação dos NM, haja vista que, por sua simplicidade e versatilidade, promovem adaptações para uma ampla gama de propriedades dessas estruturas, desde suas definições algébricas até suas manifestações em padrões de crescimento e proporções passíveis de replicação em outros ambientes de aprendizagem.

Diante do contexto histórico e do pressuposto de ordem didática, é fundamental incorporar teorias que expliquem o comportamento de sequências recorrentes, cujo interesse inicial restringia-se ao estudo de sequências generalizadas de Fibonacci, Lucas, Pell, Jacobsthal e Narayana, conforme destacam Alves et al. (2024). Esses autores evidenciaram a evolução e o reconhecimento de novas abordagens das relações entre tabuleiros que passaram a interpretar propriedades sequenciais por meio de conceitos abstratos (Benjamin; Quinn, 2003).

Figura 9 – Representação didática da relação entre os tabuleiros

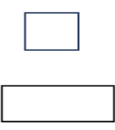
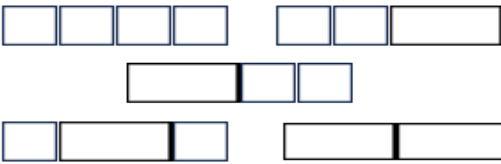


Fonte: Alves; Catarino (2026), adaptado pela autora.

Esta abordagem contemporânea, orquestrada por pesquisadores de diversos países, ampliou o estudo, utilizando noções de Tabuleiros para entender, através da Transposição Didática (Chevallard, 1986), a relação entre eles. Outrossim, para esta investigação o tabuleiro concreto $1 \times n$ foi amplamente apresentado desde de sua compreensão até sua manipulação didática, alinham-se às propostas de Benjamin e Quinn (2003) e de outros destacados na literatura.

A trajetória de triangulação entre os tabuleiros fundamenta os mecanismos de Transposição Didática (Chevallard, 1986) operando na conversão do “saber acadêmico” em “saber ensinado” por meio de diferentes registros representacionais. Observa-se no Quadro 7 na representação em tabuleiro abstrato a sequência de Fibonacci, com os mesmos artefatos sugeridos para esta pesquisa.

Quadro 7 – Representação em Tabuleiro Abstrato da SF

LADRILHOS	TAMANHO	POSSIBILIDADES	LADRILHAMENTO
	N = 0	$\emptyset$	$f_0 = 1 = F_1$
	N = 1		$f_1 = 1 = F_2$
	N = 2		$f_2 = 2 = F_3$
	N = 3		$f_3 = 3 = F_4$
	N = 4		$f_4 = 5 = F_5$

Fonte: Formiga (2025, p. 6); Alves, Catarino e Vieira (2024), elaborado pela autora

Neste íterim, o Quadro 7 caracteriza-se por $\{fn\}$ $n \geq 0$ e representa o número de ladrilhos que cobrem um tabuleiro $1 \times n$, utilizando um quadrado de dimensão 1×1 e um dominó (coringa) de dimensão 1×2 . Ciente destas considerações, o estudo das produções acadêmicas encontradas em estudos recentes que postularam o modelo Combinatório da SF, definida por $fn = Fn + 1$, (Spivey, 2019).

Observa-se que esse modelo de ladrilhamento abstrato, proposto por Alves *et al.* (2024), apresenta desafios inerentes à representação concreta, figura 7, especialmente no que se refere ao uso de cores como categoria de distinção e às dificuldades de visualização dessas estruturas no contexto do ensino de Matemática.

Vale salientar que a similaridade entre a Sequência de Fibonacci e a sequência de Ouro, especialmente em contextos de ladrilhamento no Tabuleiro $1 \times n$, reside no fato de ambas serem geradas por relações de recorrência lineares de segunda ordem. Considerando a lei de formação da Sequência de Fibonacci:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ com } F_0 = 0, F_1 = 1 \quad (24)$$

De maneira complementar, pode-se interpretar combinatoriamente o número de maneiras de ladrilhar um tabuleiro $1 \times n$. Se a última peça utilizada for um quadrado 1×1 , restará um tabuleiro $1 \times (n - 1)$, o qual pode ser preenchido de F_{n-1} maneiras. Por outro lado, se a última peça utilizada for um dominó 1×2 , restará um tabuleiro $1 \times (n - 2)$, que poderá ser ladrilhado de F_{n-2} maneiras. Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem, a soma dessas possibilidades conduz naturalmente à recorrência da Sequência de Fibonacci (Benjamin; Quinn, 2003b).

De maneira análoga, a representação dos Números Metálicos também pode ser interpretada por meio de recorrências associadas a processos de ladrilhamento, considerando-se a lei:

$$M_n = kM_{n-1} + M_{n-2}, M_0 = 0, M_1 = 1 \quad (25)$$

em que k representa o parâmetro de recorrência. Desse modo, por meio de procedimentos dedutivos e argumentativos semelhantes aos utilizados na Sequência de Fibonacci, torna-se possível estabelecer analogias entre as representações combinatórias e algébricas dos Números Metálicos, aspecto que será aprofundado nas tarefas didáticas apresentadas posteriormente.

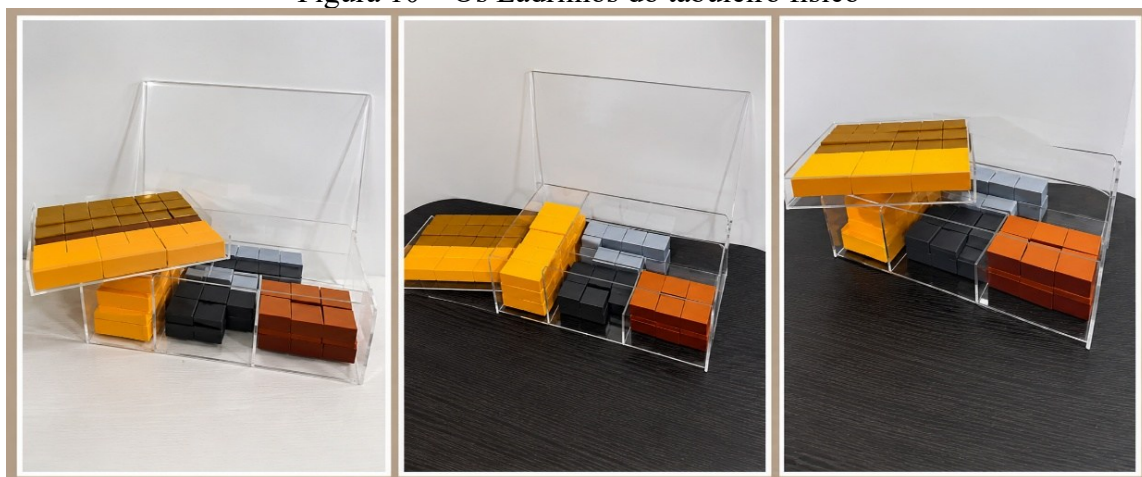
3.5.3 O Tabuleiro físico

Atua no estágio inicial permitindo a apropriação do conceito de sucessão. A manipulação física de quadrados de dimensões (1x1) e dominós (1x2) ou como nomeamos para esta investigação, os coringas, em um tabuleiro $1 \times n$ fomentou que o participante pudesse desenvolver uma percepção sensorial combinatória da estrutura recursiva.

Sendo assim, o Curso de Extensão com esses artefatos semióticos tornou-se uma experiência inovadora e consolidou-se na promoção de habilidades no que tange o desenvolvimento pensamento abstrato por parte dos professores participantes, à medida que, fomentaram novas abordagens replicáveis em sala de aula.

Nesse sentido, o material manipulável, Figura 10, atua como um ponto de observação privilegiado para a identificação de lacunas conceituais, configurando-se como ferramenta importante para atenuar fragilidades. Ao fortalecer a compreensão dos aspectos estruturais e algébricos dos Números Metálicos, esses suportes têm o potencial de mitigar dificuldades, e o “erro” na hora da manipulação configurou-se um elemento norteador do processo ensino-aprendizagem.

Figura 10 – Os Ladrilhos do tabuleiro físico



Fonte: baseado em Alves *et al.* (2024), idealização da autora.

Nessa perspectiva, as categorias estudadas na Seção 3 coadunam com o primeiro objetivo específico anunciado no início deste texto dissertativo: analisar as categorias epistemológicas, históricas, didáticas e matemáticas dos Números Metálicos. Para tanto, a investigação ancorou-se em teorias e produções existentes nas bases de dados consolidadas, como o Portal CAPES, Google Acadêmico e demais repositórios científicos.

De modo geral, esta seção evidenciou uma abordagem integrada, na qual as Análises Preliminares transcendem a perspectiva de um simples levantamento bibliográfico e documental, configurando-se como um processo investigativo fundamental para a construção do percurso metodológico da pesquisa, salienta-se que os demais objetivos específicos serão atendidos nas seções que seguem.

4 CONCEPÇÕES E ANÁLISE *A PRIORI*: OBSERVAÇÕES A PARTIR DAS TAREFAS DIDÁTICAS

"Á Análise a Priori representa o momento em que o pesquisador antecipa, fundamentado teoricamente, os possíveis caminhos de aprendizagem, as dificuldades e as estratégias que poderão emergir durante a experimentação didática" (Artigue, 1996).

A pesquisa foi conduzida em consonância com as quatro fases da Engenharia Didática, tomando como arcabouço metodológico os pressupostos apresentados nas seções anteriores. O processo investigativo desenvolveu-se por meio da aplicação de seis módulos, os quais foram observados a partir de diferentes manifestações de apropriação conceitual, estratégias de resolução e processos de abstração relacionados às propriedades fundamentais e recursivas dos Números Metálicos.

As subseções apresentam, de maneira sistematizada, o percurso metodológico trilhado e os resultados produzidos a partir do curso de extensão desenvolvido em *locus* acadêmico com professores que lecionam Matemática. Com base nas Análises Preliminares, formularam-se as Análises *a Priori*, que anteciparam possíveis lacunas, "erros" ou dificuldades de manipulação dos materiais, equívocos conceituais e obstáculos epistemológicos relacionados à compreensão das propriedades fundamentais e recursivas dos Números Metálicos.

Tal antecipação possibilitou prever desafios que foram confrontados nas Análises *a Posteriori* e validados módulo a módulo durante a manipulação concreta dos artefatos semióticos, fortalecendo o processo de ensino-aprendizagem dessas manifestações e elucidando a potencialidade dos materiais utilizados.

Diante desse contexto, constatou-se que a Professora-Pesquisadora desempenhou papel importante na criação e organização das tarefas didáticas que compuseram o curso de extensão. Tal atuação possibilitou investigar as dificuldades apresentadas pelos professores participantes na compreensão dos processos de transposição didática entre o conhecimento matemático abstrato e suas representações concretas, conforme discutido por Chevallard (1986).

Nesse sentido, as subseções coadunam com os três objetivos específicos delineados a partir das Análises Preliminares da pesquisa, dentre os quais se têm: analisar as categorias matemáticas, históricas e epistemológicas da família dos Números Metálicos, contemplando suas propriedades fundamentais e os teoremas associados às sequências recorrentes; desenvolver um curso de extensão, estruturado à luz da Engenharia Didática, composto por seis tarefas progressivas auxiliadas pelos materiais manipulativos — as barras de Cuisenaire, ladrilhos e tabuleiro $1 \times n$; Discutir a importância das seis vivências para o processo de ensino-

aprendizagem das propriedades fundamentais e recursivas dos Números Metálicos em contexto acadêmico.

Além disso, as tarefas contribuíram para a troca de saberes inerente aos processos de ensino-aprendizagem, utilizando-se de signos, artefatos e outras representações semióticas que, neste caso, configuraram-se como: a linguagem, os gestos, o tabuleiro $1 \times n$, os ladrilhos e as barras de Cuisenaire, possibilitando o confronto de formações e a observação de possíveis lacunas existentes em relação às propriedades dos NM (Duval, 1995).

Com base nas Análises a Priori, foram introduzidos materiais manipuláveis específicos, dentre eles as barras de Cuisenaire, disponíveis comercialmente, e os ladrilhos, confeccionados pelos pesquisadores para subsidiar as vivências empíricas do curso de extensão. A utilização desses artefatos teve como finalidade materializar conceitos matemáticos abstratos por meio de representações concretas, favorecendo a aproximação dos professores que lecionam Matemática na Educação Básica com conhecimentos pouco explorados, especialmente aqueles relacionados às propriedades fundamentais dos Números Metálicos (NM). Nesse sentido, o curso de extensão constituiu a etapa experimental da pesquisa, integrando a fase empírica da Engenharia Didática e possibilitando a análise dos processos de ensino e aprendizagem desenvolvidos ao longo da investigação.

É importante destacar que o planejamento detalhado do curso de extensão encontra-se no Anexo A, localizado na última seção desta dissertação. Nesse documento, estão explicitados os pressupostos teórico-metodológicos que orientaram a proposta formativa, bem como as atividades presenciais e assíncronas desenvolvidas ao longo do percurso investigativo. Também constam os períodos de realização das etapas empíricas. Ademais, observou-se, ao longo da estruturação do curso, uma intencionalidade voltada à transposição didática dos saberes algébricos relacionados aos Números Metálicos.

Tal estrutura foi concebida para favorecer a construção gradual dos conhecimentos relativos às Sequências Numéricas Recorrentes, com ênfase nos Números Metálicos, mediante a mobilização de diferentes artefatos semióticos. Desse modo, o percurso formativo buscou promover a visualização, a interpretação e a formalização de propriedades matemáticas, contribuindo para a compreensão conceitual dessas estruturas em locus acadêmico.

Os seis módulos organizaram-se em tarefas formativas estruturadas por níveis crescentes de complexidade. O primeiro introduziu os fundamentos teóricos e promoveu as primeiras interações com as barras de Cuisenaire. Nesse momento, buscou-se observar de modo

progressivo a manifestação dos saberes relacionada ao ensino de sequências numéricas recorrentes favorecidas pela sua conversão em objeto de aprendizagem (Chevallard, 1986).

No segundo, elucidou-se um avanço em direção às propriedades operatórias, com ênfase na adição e na recursividade, incorporando a razão limite das sequências recursivas de segunda ordem. Tal ampliação dos diversos registros de representação contribuirá para a consolidação de regularidades, ao passo que o saber se transforma gradativamente, tornando-se mais "sensível" e "tangível".

O terceiro encontro constituiu um ponto de inflexão no percurso formativo, ao introduzir o ladrilhamento associado à sequência de Fibonacci, concebido como base epistemológica e didática para a compreensão da Sequência de Ouro. Nesse contexto, articulou-se a relação entre diferentes registros de representação e a explicitação de regras, elementos fundamentais para a emergência e a movimentação de saberes algébricos por meio dos ladrilhos e do tabuleiro $1 \times n$.

A partir do quarto e do quinto encontros, a proposta avança para um nível mais abstrato, ao explorar o modelo combinatório das sequências de Ouro, Prata e Bronze com o apoio dos ladrilhos e das barras de Cuisenaire. As ações dos professores participantes tornaram-se mais reflexivas e dialógicas, ao mesmo tempo em que lacunas conceituais emergiram, segundo as Análises *a Priori*, sinalizando um movimento em direção à generalização. Nesse momento, observou-se um breve comentário acerca de um possível itinerário de transição entre materiais concretos a partir das diversas manipulações, observações importantes sujeitas a verificações futuras.

Os módulos entrelaçaram-se e ampliaram o escopo do processo de ensino-aprendizagem ao possibilitar uma retomada de conceitos, verificações e *feedbacks* que potencializaram a produção, a ressignificação, a reprodução e a expansão dos saberes abstratos dos NM em diferentes contextos de formação de professores.

No tocante ao último encontro, assume-se um caráter avaliativo e reflexivo, orientado para a tomada de consciência dos conceitos mobilizados ao longo do curso de extensão. Por meio de *feedbacks*, da aplicação do questionário *online* e da retomada das tarefas didáticas, busca-se a validação do percurso e a coleta de análises críticas para fins de auxiliar no desenvolvimento profissional do professor que ensina Matemática.

4.1 O Curso de extensão: Sequências Numéricas Recorrentes para Educação Básica

Segue-se, doravante, com as tarefas do Curso de Extensão que fizeram jus às manipulações vindouras nas seções seguintes, delineadas a partir dos preceitos da ED. Vale salientar que cada tarefa foi organizada e idealizada pela professora-pesquisadora (PP) em consonância com o arcabouço teórico-metodológico de pesquisa.

4.1.1 Tarefa didática 1: construindo a recursividade de segunda ordem com Barras de Cuisenaire

Os participantes desta proposta devem ser organizados em grupos de no máximo 5, para realizar a experimentação. De posse dos artefatos semióticos, as barras de Cuisenaire, ou Barras “C” (Hare & Chinn, 1996), manipulem-nas a fim de poder encontrar as combinações possíveis e a lei de formação da recursividade F_n , sabendo que a sequência deve ser caracterizada de segunda ordem? Observação: uma recursividade de segunda ordem é caracterizada pelo fato que cada termo é resultado da soma dos dois termos que o antecedem, imediatamente.

Comentários da tarefa 1: Considerando as barras de *Cuisenaire*, Figura 11, localizada na página 68 deste manuscrito, cujos comprimentos inteiros variam de 1 a 10, observa-se que, a partir do terceiro termo, cada elemento poderá ser construído pela soma dos dois imediatamente anteriores, em consonância com a definição recursiva da sequência de Fibonacci, caso particular da Sequência de Ouro.

As combinações possíveis das barras podem refletir composições aditivas correspondentes aos valores da sequência, evidenciando a recorrência subjacente. Ressalta-se, contudo, que tais combinações não representam uma contagem do número de decomposições aditivas de um inteiro, mas sim a materialização das propriedades combinatórias associadas à definição recursiva inerente à sequência. Dessa forma, poderá haver articulação entre a manipulação concreta dos artefatos e a estrutura matemática dos Números Metálicos.

No desenvolvimento da Tarefa Didática 1, podem emergir diferentes obstáculos didáticos, epistemológicos e cognitivos relacionados à compreensão da recursividade de segunda ordem e à articulação entre as representações concretas e simbólicas da sequência de Fibonacci. Esses constituíram elementos relevantes para a Análise *a Priori*, uma vez que evidenciaram os processos de mobilização, reorganização e significação do conhecimento matemático arquitetado pelos participantes.

Um dos primeiros obstáculos refere-se à compreensão imediata da própria noção de recorrência de segunda ordem. Embora a tarefa explicita que cada termo é o resultado da soma dos dois termos imediatamente anteriores, alguns participantes podem apresentar elementos de dificuldades ao se depararem com a regularidade estrutural da sequência, concentrando-se apenas na obtenção de resultados isolados, sem identificar a lógica recursiva que organiza a formação de todos os termos. A compreensão da relação recorrente:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (26)$$

Fato este que pode exigir processos mais elaborados de abstração e generalização, especialmente para participantes que ainda estabelecem forte dependência da manipulação concreta. Outro obstáculo possível relaciona-se à manipulação das barras de *Cuisenaire* enquanto artefatos semióticos. Alguns grupos de participantes podem limitar-se a combinações empíricas e tentativas sucessivas sem conseguir estabelecer relações matemáticas diretas entre as representações concretas e a estrutura algébrica da sequência. Nesse caso, o material manipulável pode ser compreendido apenas como recurso visual ou lúdico, dificultando a transposição do concreto para o pensamento abstrato e generalizante.

Sob a perspectiva da TRRS, também podem surgir dificuldades na coordenação entre diferentes registros de representação (Duval, 1995). Os participantes podem conseguir visualizar determinadas combinações com as barras, mas apresentar limitações na conversão dessas representações para registros numéricos, algébricos ou discursivos. Tal evidência dificulta o tratamento e conversão semiótica, fundamentais para a compreensão conceitual do objeto matemático.

Não obstante, podem ocorrer situações relacionadas à percepção das múltiplas possibilidades combinatórias. Alguns docentes podem apresentar interpretações diferentes a partir das organizações espaciais das barras como estruturas matematicamente distintas, sem compreender que determinadas configurações representam o mesmo valor numérico (Hare; Chinn, 1996). Esse aspecto pode gerar conflitos relacionados às propriedades da adição, especialmente à comutatividade e a equivalência entre diferentes composições.

Outro elemento relevante refere-se às dificuldades de generalização da lei de formação. Os participantes podem conseguir construir os primeiros termos da sequência empiricamente, porém, podem apresentar limitações ao tentar formular verbalmente ou simbolicamente a

regularidade observada. Nesse contexto, o auxílio da professora-pesquisadora torna-se fundamental para fortalecer vínculos didáticos com os participantes da manipulação concreta.

A seguir, como a gênese de representação concreta, há a ilustração na Figura 11, que expressa de modo preliminar o artefato que foi utilizado nas primeiras tarefas didáticas apresentadas mais adiante.

Figura 11 – As barras de *Cuisenaire* e manipulações primárias



Fonte: dados da pesquisa.

Dos pressupostos conceituais encontrados, vale salientar que o possível elo e a representação concreta das possibilidades de combinação reside na habilidade de visualizar e construir os termos. Tanto as Barras “C”, Hare e Chinn (1996) quanto os ladrilhos e o tabuleiro $1 \times n$, Benjamin e Quinn (2003), corroborando para que os professores materializem o processo recursivo que define essas estruturas. A mera manipulação de recursos, por si só, é insuficiente. Ela deve ser acompanhada por discussões estruturadas, reflexões e, principalmente, pela explicitação das correlações desses objetos com os conceitos matemáticos formais.

4.1.2 Tarefa didática 2: explorando a Razão Áurea por meio das Barras de Cuisenaire

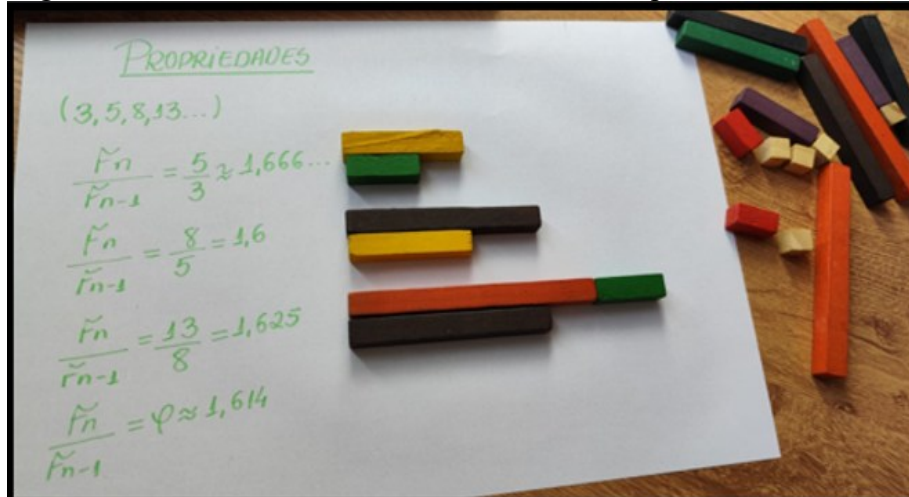
Observando a construção da sequência de barras (1, 2, 3, 5, 8, 13...), tarefa 1, por exemplo, estes podem ser comparados de forma direta. Verifica-se, pois, que, o bastão de 5 unidades e o de 3 unidades, é visível que 5 é "quase o dobro" de 3, ou que 8 é "quase o dobro e um pouco mais" de 5. Essa comparação visual ajuda a formar uma intuição sobre $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ que, no caso da sequência de Ouro ou Fibonacci, aproxima-se da razão áurea $\varphi \approx 1,614$. Manipule os artefatos semióticos (barras de Cuisenaire) para verificar essas possibilidades.

Comentários da tarefa 2: Visualizar a razão áurea como um número irracional e limitante da sequência pode ser abstrato para quem está acostumado apenas com inteiros e

frações exatas, dificultando a intuição da convergência da razão dos termos. Dificuldade em relacionar a manipulação concreta (barras) com conceitos simbólicos e matemáticos avançados, como limites e irracionalidade do número de ouro.

A seguir, configura-se como premissa preliminar a observação da figura 12, que delinea a estabilidade da razão de Ouro inferida acerca da tarefa 2.

Figura 12 – Estabilidade da Razão de Ouro da Sequência de Fibonacci



Fonte: dados da pesquisa.

No Âmbito desse movimento didático podem surgir diversos obstáculos relacionados à compreensão da razão entre termos consecutivos da sequência de Fibonacci e à aproximação da Razão Áurea. A tarefa exige que os participantes transcendam a percepção empírica imediata das barras de *Cuisenaire* para alcançar um nível mais abstrato de interpretação das regularidades numéricas e das relações proporcionais presentes na sequência.

Inicialmente, um dos principais obstáculos refere-se à tendência de interpretar as relações entre os termos apenas de forma intuitiva e visual. Ao observar que “5 é quase o dobro de 3” ou que “8 é quase o dobro e um pouco mais de 5”, os participantes podem restringir-se a percepções aproximativas, sem compreender que existe uma regularidade matemática associada ao comportamento limite das razões sucessivas da sequência. Tal dificuldade evidencia um obstáculo ligado à passagem da percepção concreta para a formalização conceitual da proporcionalidade recorrente.

A relação investigada na tarefa envolve a análise da razão entre termos consecutivos da sequência de Fibonacci:

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} \rightarrow \varphi \quad (27)$$

bem como a aproximação da Razão Áurea:

$$\varphi \approx 1,618 \quad (28)$$

Nessa perspectiva, podem surgir algumas dificuldades em compreender o conceito de convergência. Alguns professores que ensinam matemática podem interpretar os valores obtidos como aproximações ocasionais ou inconsistentes, sem perceber que a sequência das razões tende progressivamente a um valor constante. Tal limitação está relacionada à compreensão de processos infinitos e do comportamento assintótico² das sequências numéricas.

Outras dificuldades referem-se à compreensão da própria noção de razão. Muitos participantes podem associar a ideia de “dobro” apenas a relações inteiras ou exatas, apresentando dificuldades em compreender relações proporcionais não inteiras. Assim, a interpretação da razão áurea como um número irracional e não exato pode gerar conflitos conceituais, especialmente quando os participantes tentam validar empiricamente os resultados apenas pela manipulação visual das barras.

Além disso, podem emergir dificuldades na articulação entre diferentes registros de representação semiótica. Embora os participantes consigam visualizar diferenças de tamanho entre as barras, podem aparecer limitações ao converter essas percepções em relações numéricas, frações, razões ou expressões algébricas. Sob a perspectiva da TRRS de Duval, tal obstáculo evidencia dificuldades de conversão entre registros visuais, numéricos e simbólicos. Outro aspecto relevante refere-se ao risco de uma interpretação exclusivamente empírica do conceito matemático.

Portanto, a Tarefa didática 2 apresenta elevado potencial investigativo, pois possibilita a articulação entre percepção visual, experimentação concreta e abstração matemática, ao mesmo tempo em que apresenta obstáculos epistemológicos fundamentais relacionados à compreensão de razão e proporcionalidade, convergência e generalização algébrica no estudo da sequência de Fibonacci e da Razão Áurea.

Nesse mesmo contexto de aplicação prática que compõe o Curso de Extensão, e em consonância com a progressão das tarefas didáticas propostas, adotou-se, na etapa subsequente, a utilização do tabuleiro $1 \times n$ e dos ladrilhos metálicos como recursos didático-pedagógicos para a exploração das propriedades fundamentais e recursivas dos Números Metálicos.

² O comportamento assintótico, no âmbito acadêmico, descreve a tendência de uma função, sistema ou algoritmo quando suas variáveis independentes ou o tamanho de sua entrada se aproximam de um limite extremo (geralmente o infinito), (Bachmann, 1894; Landau, 1909).

4.1.3 Tarefa didática 3: explorando a Sequência de Ouro por meio de ladrilhos e tabuleiro

$1 \times n$

Com base nos princípios epistemológicos da formação recursiva da Sequência de Fibonacci, caso particular da Sequência de Ouro que segue delineado na Tarefa 1, apresenta-se de modo similar com a lei de formação $M_n = kM_{n-1} + M_{n-2}$, para valores iniciais $M_0 = 0$ e $M_1 = 1$. Os grupos procederão à manipulação sistemática de artefatos semióticos, conforme o referencial teórico de Ferreira (2013), a fim de visualizar e validar empiricamente as propriedades da adição (comutatividade, associatividade) por meio de experimentação concreta com os ladrilhos e tabuleiro $1 \times n$.

Comentários da Tarefa 3: Ao propor que os professores construam a sequência de Fibonacci ou de Ouro por meio dos ladrilhos 1×1 e 1×2 e tabuleiro $1 \times n$, é fulcral orientar que ao manipular cada termo seja observado a soma dos dois imediatamente anteriores, em conformidade com a lei de recorrência.

Esta possibilidade de representação deriva um mesmo valor por diferentes composições aditivas, fortalecendo, assim, a visualização e a experimentação das propriedades comutativa e associativa da adição, ao utilizar esses materiais representativos, configurando-se, desse modo, um possível recurso didático importante para a compreensão das propriedades fundamentais da adição e da recorrência, ponto alto da proposta que seguirá como premissa de aplicação em *locus* acadêmico.

Esses artefatos, conforme vistos na figura 13, foram mobilizados para fundamentar e ampliar as três tarefas subsequentes, possibilitando a análise das transições conceituais e semióticas entre os materiais e a consolidação das propriedades investigadas.

Figura 13 – Manipulações prévias dos ladrilhos no tabuleiro $1 \times n$



Fonte: baseada em Alves, Catarino, Vieira & Spreafico (2024), idealização da autora.

No desenvolvimento da Tarefa 3, alguns obstáculos podem surgir durante a manipulação com estes artefatos e na compreensão da formação recursiva da Sequência de Ouro. Tais obstáculos relacionam-se tanto à abstração inerente às sequências recorrentes quanto às dificuldades de transposição didática, do “saber sábio” para o “saber ensinável” (Chevallard, 1986, p. 32) entre as representações concretas e o modelo algébrico generalizado.

Inicialmente, um dos principais obstáculos refere-se à compreensão da própria lei de formação recursiva:

$$M_n = kM_{n-1} + M_{n-2} \quad (29)$$

Os participantes podem apresentar dificuldades em compreender que cada termo da sequência depende simultaneamente de dois termos anteriores e de um parâmetro variável k , diferentemente da Sequência de Fibonacci tradicional, na qual o coeficiente multiplicativo é unitário. Essa ampliação conceitual pode gerar conflitos cognitivos relacionados à generalização algébrica e à percepção das regularidades estruturais da sequência.

Outro obstáculo didático refere-se à transição entre o concreto e o abstrato. Embora as barras de *Cuisenaire* tenham favorecido a compreensão inicial das propriedades dos Números Metálicos, esse artefato apresentou limitações para representar termos mais elevados das sequências. Em contrapartida, o tabuleiro $1 \times n$ e os ladrilhos metálicos ampliaram as possibilidades de visualização e representação das composições numéricas, favorecendo a generalização das propriedades fundamentais e recursivas dessas sequências.

Ademais, alguns participantes podem realizar manipulação empírica das peças, sem conseguir estabelecer relações entre as construções concretas e a formalização simbólica da recorrência. Nesse caso, existe o risco de que o material manipulável seja percebido apenas como recurso ilustrativo, sem promover efetivamente a compreensão conceitual das propriedades recursivas e algébricas envolvidas.

Outro aspecto relevante refere-se à visualização das regularidades e padrões da sequência. Alguns participantes podem concentrar-se apenas na obtenção de termos isolados, sem conseguir perceber a estrutura recursiva global que organiza a sequência. Esse obstáculo compromete processos de generalização matemática e dificulta a formulação de conjecturas sobre o comportamento da sequência para valores maiores de n .

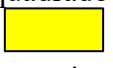
Outrossim, também podem emergir obstáculos epistêmicos relacionados à interpretação do parâmetro k . Os participantes podem correlacionar de forma equivocada que a variação

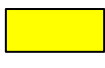
desse coeficiente modifica estruturalmente o comportamento da sequência, produzindo diferentes famílias metálicas. Nesse contexto, a abstração algébrica necessária para compreender o papel do parâmetro pode exigir intervenções didáticas mais direcionadas por parte da professora-pesquisadora.

Dessa forma, a mediação didática da professora-pesquisadora torna-se essencial para favorecer processos de argumentação, comparação, validação e institucionalização do conhecimento, conduzindo os participantes da experimentação concreta à compreensão das propriedades estruturais da Sequência de Ouro e das demais sequências associadas à Família dos Números Metálicos.

Doravante, segue-se a apresentação de mais duas tarefas didáticas que ambientam a investigação servindo como base observatório primária acerca de um possível itinerário de transição entre as barras de *Cuisenaire* e os ladrilhos 1×1 e 1×2 do tabuleiro $1 \times n$, fato já sinalizada nos excertos anteriores.

4.1.4 Tarefa didática 4: revestimento de tabuleiros $1 \times n$ e recursividade dos Números Metálicos

Qual é o número de formas possíveis de cobrir um tabuleiro de dimensão $1 \times n$ utilizando dois tipos de peças de encaixe: um quadrado de dimensão  1×1 de cor dourada e uma peça de dominó (coringa) de dimensão  1×2 cor amarela, considerando que a quantidade de peças segue a lei de formação recursiva $M_n = kM_{n-1} + M_{n-2}$ para valores iniciais $M_0 = 0$ e $M_1 = 1$?

Comentários da tarefa 4: a proposta de experimentação fundamentada utiliza o tabuleiro de dimensão $1 \times n$ como um artefato facilitador que converte o saber empírico em consciência algébrica. Ao manipularem quadrados  1×1 (dourados) e dominós (coringa)  1×2 (amarelos), os participantes precisaram realizar percepção visual, detectando padrões estruturais. A contagem das formas de cobrir o tabuleiro revela a lei de formação recursiva $M_n = kM_{n-1} + M_{n-2}$ para valores iniciais $M_0 = 0$ e $M_1 = 1$. Onde o coeficiente k representa as variantes de cores dos quadrados e o termo M_{n-2} materializa a ocupação de duas unidades pelo dominó.

No desenvolvimento da Tarefa didática 4, podem aparecer alguns obstáculos didáticos e conceituais relacionados à compreensão da recorrência, à contagem combinatória e à articulação entre representações concretas e generalizações de padrões. A tarefa consubstancia

que os participantes mobilizem simultaneamente raciocínio visual, pensamento recursivo e interpretação matemática das possibilidades de ladrilhamento do tabuleiro, o que pode gerar conflitos conceituais importantes para o processo investigativo.

Um dos principais obstáculos refere-se à compreensão da relação entre o problema combinatório e a lei de formação recursiva (Spinadel, 1997):

$$M_n = kM_{n-1} + M_{n-2} \quad (30)$$

Em muitos casos, tende-se a realizar apenas contagens empíricas ou enumerativas, sem elucidar que a quantidade de possibilidades pode ser obtida recursivamente a partir das construções anteriores do preenchimento do tabuleiro $1 \times n$. Também podem surgir dificuldades relacionadas à visualização espacial e ao raciocínio combinatório. Alguns grupos podem não conseguir identificar todas as possibilidades de cobertura do tabuleiro unidimensional, especialmente para valores maiores de n . Esse obstáculo pode levar à omissão de combinações válidas, à repetição indevida de configurações equivalentes ou à incapacidade de sistematizar as construções realizadas. Nesse contexto, a organização espacial das peças torna-se um elemento central para o desenvolvimento da tarefa.

Sob a lógica da TRRS, podem ser observados obstáculos na conversão entre os registros manipulativos, visuais e algébricos (Duval, 1995). Embora os participantes consigam construir fisicamente os ladrilhamentos, podem apresentar limitações na formalização simbólica da regularidade observada.

Outro aspecto importante refere-se à tendência de interpretar o problema apenas como uma atividade prática de encaixe das peças, sem perceber sua dimensão estrutural e algébrica promotora da aprendizagem utilizando o lúdico. Nesse caso, os materiais manipuláveis podem ser utilizados apenas de forma operacional, dificultando a compreensão de que cada nova configuração decorre logicamente das anteriores. Tal situação pode comprometer os processos de generalização e institucionalização do conhecimento matemático.

As dúvidas, os conflitos cognitivos, as tentativas de reorganização das estratégias e as discussões entre os participantes favoreceram os processos de significação dos conceitos matemáticos envolvidos. Assim, a professora-pesquisadora tornou-se essencial para colaborar com os participantes na hora da manipulação e de maneira ativa fomentar momentos concretos com peças à compreensão das propriedades combinatórias e recursivas das sequências sugeridas.

Segue-se, assim, para a penúltima proposta didática de manipulação com ladrilhos e tabuleiro unidimensional das propriedades fundamentais e recursivas dos NM, onde a evolução conceitual descreve pode refletir ampliação das dificuldades inerentes a este *constructo*.

4.1.5 Tarefa didática 5: explorando as propriedades fundamentais da recorrência $M_n = 2M_{n-1} + M_{n-2}$

Quais as possíveis possibilidades de cobrir um tabuleiro $1 \times n$ com peças quadradas douradas  (1×1) e prateadas  (1×1) e fichas de dominó (Coringas)  (1×2), e como essas construções levam à relação recursiva $M_n = 2M_{n-1} + M_{n-2}$ para valores iniciais $M_0 = 0$ e $M_1 = 1$. Discutam a partir das visualizações as propriedades aditivas (comutatividade e associatividade).

Comentários da tarefa 5: Entender o impacto do fator de recursão 2 na estrutura da sequência e seu crescimento acelerado, especialmente comparado à sequência de Fibonacci mais conhecida, pode gerar dificuldades em relacionar manipulações concretas do problema (colocar ladrilhos e combinar ladrilhos diversos) com a expressão algébrica da relação recursiva. Compreender a convergência das razões para o número de prata e seu significado matemático, conceito abstrato para o ensino básico.

No desenvolvimento dessa tarefa didática, considerou-se algumas dificuldades de natureza estrutural, especialmente relacionadas à compreensão da recorrência, bem como a interpretação combinatória das construções e à articulação entre os registros concreto, visual e algébrico (Duval, 1995). A complexidade da atividade ampliou-se pelo fato de envolver dois tipos de peças unitárias de formato quadrangular douradas e prateadas, além de um retângulo que foi nomeado de coringa, devido sua versatilidade de completar as possibilidades combinatórias dessas construções, exigindo dos professores que lecionam matemática maior capacidade de organização, sistematização e observação das possibilidades de cobertura do tabuleiro $1 \times n$.

Um dos primeiros obstáculos didáticos a ser considerado foi à compreensão da relação recursiva:

$$M_n = 2M_{n-1} + M_{n-2} \quad (31)$$

Os participantes podem apresentar dificuldades em perceber por que o termo $2M_{n-1}$ aparece na recorrência. Pode ser notório, tendenciar o problema às construções clássicas

da sequência de Fibonacci, sem compreender que a existência de duas peças unitárias distintas (dourada e prateada) que de modo indutivo duplica as possibilidades de preenchimento associadas ao caso anterior.

Assim, uma dificuldade importante consiste em compreender que cada cobertura do tabuleiro $1 \times (n - 1)$ pode ser ampliada de duas maneiras distintas utilizando as peças unitárias. Outra situação discorre relacionada à visualização combinatória. Alguns professores podem não conseguir identificar todas as possibilidades de cobertura do tabuleiro $1 \times n$, sobretudo para valores maiores de n . Isso pode gerar vacuidade de peças, repetições inadequadas ocorridas por combinações não observadas, e ainda dificuldades em organizar sistematicamente as construções produzidas. A ausência de estratégias organizacionais pode comprometer a percepção das regularidades e dificultar a generalização da lei de formação.

Além disso, podem surgir dificuldades relacionadas à interpretação das propriedades aditivas da comutatividade e associatividade durante as construções. Embora diferentes disposições das peças possam representar a mesma soma ou o mesmo comprimento do tabuleiro, alguns participantes podem interpretar configurações espacialmente distintas como resultados matematicamente distintos. Tal observação limita na compreensão da equivalência matemática entre diferentes arranjos combinatórios.

Sob a ótica da TRSS, vale salientar que também podem ocorrer dificuldades na conversão dos diferentes registros (Duval, 1995). Os participantes podem apresentar limitações ao expressar simbolicamente a regularidade observada ou justificar matematicamente a recorrência obtida. Assim, a transposição didática (Chevallard, 1986), entre a experimentação concreta e a formalização algébrica pode não ocorrer de forma imediata.

No mais, a escrita avança para a Análise *a Priori* da última tarefa didática, concebida com o propósito de promover inferências acerca dos conhecimentos matemáticos mobilizados ao longo das seis vivências concebidas. Essa etapa buscou realizar uma síntese integradora das discussões desenvolvidas nos módulos anteriores, retomando e articulando os principais conceitos explorados durante o Curso de Extensão.

Assim, consubstanciou consolidar a compreensão das propriedades fundamentais e recursivas dos Números Metálicos, evidenciando as contribuições das vivências e dos materiais manipuláveis para os processos de visualização, compreensão, generalização e formalização com professores que lecionam matemática.

Desse modo, a análise da última vivência possibilitou identificar indícios de um itinerário de transição entre os diferentes artefatos semióticos mobilizados ao longo do Curso

de Extensão, revelando potencialidades didático-pedagógicas para a construção progressiva dos conceitos abordados. Tal constatação abre perspectivas para futuras investigações, especialmente no que se tange à compreensão dos processos de passagem entre representações concretas e limitações inerentes as esses ladrilhamentos.

4.1.6 Tarefa didática 6: sequências numéricas e configurações de ladrilhamentos coloridos

Considerem os elementos disponíveis: quadrados dourados  e prateados  de tamanho (1x1) e fichas de dominó (coringa) amarelas  de tamanho 1x2. Nestas condições, determine quantas configurações diferentes de peças podem ser formadas para tabuleiro 1xn de tamanhos $n = 1, 2, 3, 4, 5$ e 6, considerando que, para $n=0$, o valor é igual a 1. Esses números seguem alguma sequência numérica? A coloração das peças influencia nesse sentido? Qual a possibilidade de ladrilhar usando as barras de Cuisenaire, seguindo a lei de recorrência encontrada?

Comentário da tarefa 6: no que se refere às possíveis soluções, espera-se que os participantes reconheçam inicialmente à materialização concreta dos ladrilhamentos para pequenos valores de n , organizando contagens sistemáticas (por listagem, esquemas ou uso do tabuleiro). A partir dessas construções, é provável que identifiquem um padrão de crescimento e formulem uma relação recursiva do tipo $M_n = 2M_{n-1} + M_{n-2}$, ao reconhecer que cada configuração pode ser obtida pela adição de um ladrilho $1 \times 1, 1 \times 2$ ao final de um ladrilhamento menor.

Alguns participantes podem ainda avançar para generalizações, comparando com a sequência de Ouro e percebendo o aumento do número de termos na recorrência, o que se configura maior complexidade estrutural. Também podem emergir representações tabulares, diagramas ou expressões algébricas como formas de sistematização.

Quanto aos possíveis “erros” e dificuldades, podem surgir equívocos na contagem dos ladrilhamentos, especialmente por duplicação ou omissão de casos, revelando fragilidades no raciocínio combinatório. Outra dificuldade recorrente pode ser a não identificação da relação recursiva completa, limitando-se a padrões incompletos (por exemplo, considerar apenas $M_n = M_{n-1} + M_{n-2}$, desconsiderando o fato metálico k).

Desse modo, as dificuldades sinalizadas com a categoria cores, bastões e posicionamentos estabelece um eixo de investigação essencial para otimizar as estratégias de ensino que utilizam a combinatória com barras e com ladrilhos para introduzir o conceito de

recursividade e possivelmente encontrar o itinerário de transição entre as duas categorias de materiais manipulativos utilizados, nesse *constructo*.

Segue, na próxima seção, a terceira fase da Engenharia Didática (ED), denominada Experimentação, etapa em que as hipóteses e conjecturas formuladas nas fases anteriores são confrontadas com a realidade empírica. Trata-se do momento em que o planejamento didático se materializa por meio das vivências desenvolvidas junto aos participantes, possibilitando a produção de dados e a observação dos fenômenos investigados. Assim, a Experimentação constitui o espaço destinado à realização das atividades propostas, tornando concretas as previsões inicialmente estabelecidas e fornecendo subsídios para as análises subsequentes.

5 EXPERIMENTAÇÃO: A VISUALIZAÇÃO CONCRETA DAS SEQUÊNCIAS METÁLICAS

“A experimentação não se limita à aplicação de atividades, mas representa um espaço de observação sistemática dos fenômenos de ensino e aprendizagem produzidos” (Artigue, 1996).

Nessa perspectiva, a fase de experimentação da Engenharia Didática proposta para esta investigação considerou as variáveis didáticas que poderiam interferir, direta ou indiretamente, na aplicação dos módulos. Além disso, buscou analisar as escolhas relacionadas a essas variáveis, possibilitando observar os participantes em suas manifestações cognitivas, discursivas e comportamentais, bem como interpretar os sentidos produzidos durante o desenvolvimento das tarefas propostas.

De acordo com Artigue (1995), cabe ao professor-pesquisador definir variáveis didáticas em níveis distintos, descrevendo detalhadamente cada tarefa proposta. Nesse contexto, essas variáveis foram organizadas de modo a provocar desequilíbrios cognitivos e epistemológicos nos participantes, impulsionando-os à mobilização de estratégias, à formulação de conjecturas e à materialização de conhecimentos matemáticos mais “acessíveis” e “tangíveis”. Assim, os seis módulos do Curso de Extensão foram concebidos para fomentar processos investigativos, reflexivos e colaborativos, mediados pelas barras de Cuisenaire, pelo tabuleiro $1 \times n$ e pelos ladrilhos.

A abordagem qualitativa adotada possibilitou compreender os processos de experimentação e significação produzidos ao longo da investigação. Conforme Lakatos e Marconi (2017), o método qualitativo permitiu compreender os fenômenos em sua complexidade, considerando os sentidos atribuídos pelos sujeitos às experiências vivenciadas. De maneira complementar, Gil (2002) destaca que a análise qualitativa depende de múltiplos fatores, tais como a natureza dos dados coletados, a extensão da amostra, os instrumentos utilizados e os referenciais teóricos que orientam a investigação.

5.1 Contexto empírico da pesquisa: tratamento dos dados

Os momentos empíricos e a coleta de dados ocorreram entre os meses de março a junho de 2026, na sala de Seminário 01 do Núcleo de Pesquisa e Estudos Regionais (NUPER), situado na Faculdade de Educação pertencente à Universidade Federal do Ceará (UFC), localizada na

cidade de Fortaleza. A investigação esteve vinculada a um grupo de docentes inscritos voluntariamente no Curso de Extensão “*Sequências Numéricas Recorrentes para a Educação Básica*”, os quais se comprometeram com a participação nas atividades propostas ao longo dos seis módulos formativos.

O curso teve como premissa a participação de professores que lecionam matemática na Educação Básica, promovendo um envolvimento produtivo de pedagogos e licenciados em Matemática em um espaço colaborativo, reflexivo e dialógicos, voltado ao aprimoramento das práticas pedagógicas em sala de aula. Neste ínterim, buscou-se analisar as contribuições de um Curso de Extensão estruturado à luz da Engenharia Didática e mediado por artefatos semióticos, como barras de *Cuisenaire*, tabuleiro $1 \times n$ e ladrilhos metálicos, para a compreensão dos processos de ensino e aprendizagem relacionados às propriedades algébricas e recursivas dos Números Metálicos.

Os participantes da pesquisa assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), no qual foram explicitados os objetivos, os métodos, os benefícios e os aspectos éticos da investigação, assegurando-se o anonimato dos sujeitos envolvidos. O documento também autorizou a utilização das informações provenientes da análise dos dados em publicações acadêmicas e eventos científicos, conforme apresentado no Apêndice A desta dissertação.

De maneira complementar, o tratamento dos dados ocorreu à luz dos pressupostos teórico-metodológicos adotados, considerando as categorias epistêmicas, históricas, didáticas e matemáticas dos Números Metálicos (NM), bem como os discursos, as produções matemáticas e o processo de ensino-aprendizagem evidenciados pelos participantes ao longo das vivências desenvolvidas.

Nesta fase da investigação, o Curso de Extensão, composto por seis módulos progressivos, contou com a participação da Professora-Pesquisadora e uma média de 15 participantes por encontro. Os sujeitos atuaram ativamente na construção de conhecimentos relacionados às propriedades fundamentais e recursivas dos NM, mobilizando estratégias, levantando conjecturas e compartilhando significados matemáticos durante as atividades colaborativas.

5.1.1 Sistematização e análise dos dados do questionário eletrônico

De modo subsequente, apresenta-se o Quadro 8, que sistematiza os dados provenientes do questionário aplicado aos professores, contemplando a caracterização dos participantes da

pesquisa, bem como algumas inferências decorrentes das questões subjetivas relacionadas às suas percepções sobre o Curso de Extensão e às limitações prévias identificadas

Quadro 8 – Questionário do professor participante da pesquisa

1. Você tem interesse em participar como voluntário nesta pesquisa? Caso sua resposta seja sim, prossiga.	Os 15 professores inicialmente inscritos responderam que “sim”
2. Qual sua formação Inicial?	Em média cerca de 42% dos professores inscritos eram licenciados em Matemática e os demais formados em Pedagogia e lecionavam matemática na Educação Básica.
3. Em sua formação (educação básica, ensino superior e/ou formação continuada) você já estudou conteúdos envolvendo sequências numéricas recorrentes (por exemplo, sequência de Fibonacci, progressões, relações de recorrência)?	Em relação ao assunto Sequências Numéricas Recorrentes cerca de 14% disseram nunca ter estudado
4. Se sim, quais sequências numéricas você estudou?	“Progressões Aritmética e Geométrica, Sequência de Fibonacci e séries infinitas”. “Fibonacci e suas generalizações, Padovan, Perrin e Números figurados”. “Que eu me lembre agora: sequência de Fibonacci, progressão aritmética (PA) e progressão geométrica (PG)”. “Progressão Geométrica e Progressão Aritmética”. “Sequências naturais, pares, ímpares, Fibonacci...”.
5. Cite materiais concretos que já utilizou ou viu serem utilizados em aulas de Matemática e para quais conteúdos:	“Material dourado e sólidos concretos, para frações e sistema de numeração decimal”. “Ladrilhamentos e peças modulares para investigar padrões figurais, recorrências e processos de generalização algébrica e também jogos estratégicos de dominó, Tangran e atividades de origami matemático”. “Na graduação não. Mas com os alunos já usei material dourado, Cuisenaire, dominó, cartas de baralho, jogos de tabuleiro”.
6. Com que frequência você utiliza ou já utilizou materiais concretos (como barras de Cuisenaire, tabuleiros, ladrilhos, jogos) para trabalhar conceitos matemáticos?	Neste quesito as respostas foram bem peculiares, cerca de 43% disseram que raramente utilizaram materiais concretos em suas aulas de matemática. Outros, 29% relataram que utilizaram algumas vezes e uma média de 7% usa com frequência, as barras, ladrilhos, tabuleiros e jogos.
7. Como você avalia o potencial dos materiais concretos para auxiliar na compreensão de propriedades fundamentais de sequências numéricas?	Todos os participantes afirmaram que os materiais apresentados contribuem para a compreensão das propriedades fundamentais e recursivas das sequências numéricas recorrentes.

Justificar resposta	“O uso de artefatos semióticos potencializa tanto o ensino quanto a aprendizagem de objetos matemáticos usualmente abordados de forma abstrata, como é o caso das sequências Numéricas Recorrentes”. “O uso de materiais concretos no ensino favorece a construção gradual e autônoma dos conceitos matemáticos, permitindo que o estudante explore, visualize e compreenda relações e propriedades por meio da experimentação e da investigação”. “O recurso visual é bem mais eficiente do que a abstração”. “Acredito, até mesmo por causa do curso que acabei de fazer, que os materiais concretos podem auxiliar os estudantes na visualização e compreensão de padrões e regularidades presentes nas sequências numéricas”. “Bem, pelo método Singapura (Concreto - Pictórico - Abstrato), os alunos precisam, antes de tudo, ter contato visual (aplicação tangível) do conceito. Depois deve-se trabalhar com imagens que representam o conceito. E finalmente, [...] puramente abstrato o conceito matemático, para que haja a concretização do objetivo de aprendizagem com sucesso. Com isso, podemos perceber a grande importância de começar pelo concreto. O concreto é o fundamento”.
8. Em que medida o Curso de Extensão, composta por seis tarefas progressivas, contribuiu para que você visualizasse e compreendesse as propriedades recursivas dos Números Metálicos?	Cerca de 93% dos participantes afirmaram que o Curso de Extensão contribuiu para a visualização e compreensão das propriedades recursivas dos NM.
Contextualize:	“Uma visão lógica da matemática nos materiais, nos jogos e games”. “Foi uma oportunidade maravilhosa de aprender, revisar e ter novas ideias metodológicas que facilitem o ensino e possibilitem a aprendizagem”. “Ajudou a perceber os padrões das sequências, entender como os termos se relacionavam entre si e identificar como cada termo era construído a partir dos anteriores. Além disso, o uso dos materiais e das representações facilitou muito a compreensão das regularidades presentes nas sequências”. “Ainda não tinha visualizado as sequências sobre a perspectiva do ladrilhamento, foi muito rico para fortalecer os conhecimentos prévios que eu já tinha sobre as sequências”. “O curso contribuiu muito para minha compreensão sobre as propriedades recursivas dos Números

	Metálicos. Antes dele, eu nunca tinha estudado esse tema. [...]os padrões, as regularidades e as relações presentes nas sequências numéricas”.
9. Entre os materiais utilizados (tabuleiro 1xn, ladrilhos e barras de <i>Cuisenaire</i>), qual ou quais mais ajudaram na sua compreensão? Por quê?	“Todos eles ajudaram bastante. Sequência de ouro, prata e bronze eram desconhecidas pra mim até o momento do curso. Os materiais ajudaram não só a montar as sequências como ver dentro delas as propriedades da adição acontecendo”. “trabalhão com as barras foi interessante, porém o trabalho com ladrilhos aumentou as possibilidades e facilitou o manuseio”. “Barras de Cuisenaire na visualização dos termos da sequência de Fibonacci. Não há não há <i>noesis</i> sem semioses”. “Tanto os ladrilhos quanto as barras de Cuisenaire me ajudaram bastante. O que mais gostei é que são coloridos, então fica mais fácil de perceber os padrões”. “Apesar da dificuldade inicial com os ladrilhos, depois eu entendi bem as propriedades das sequências: a construção dos primeiros dos seus primeiros termos e a generalização da fórmula de recorrência”. “Acredito que todos os materiais foram importantes. As barras foram fundamentais para a compreensão das propriedades da razão. Mas o tabuleiro e os ladrilhos, como é o conjunto que melhor materializa sequência”.
10. Houve algum momento em que você percebeu mudança na forma como entendia as propriedades fundamentais e recursivas (por exemplo, passou de uma visão mais aritmética para uma visão mais algébrica?)? Descreva esse momento.	“O momento em que a fórmula foi apresentada no material que estava sendo manipulado”. “Sim, principalmente na possibilidade de perceber as propriedades comutativa e distributivas”. “Sim, quando pude verificar a recursividade da sequência visualmente pelo uso dos artefatos semióticos e a transposição para o modelo algébrico”. “Sim. No início eu observava as sequências mais pelos cálculos e pelos valores numéricos dos termos, com o desenvolvimento das tarefas e o uso dos materiais, comecei a perceber os padrões de formação e as relações entre os termos. Esse momento aconteceu principalmente quando consegui identificar a regularidade das construções nos ladrilhamentos e representar essas relações de maneira mais geral, passando a enxergar a sequência de forma mais algébrica e recursiva”. “No meu caso, como eu já tinha conhecimentos sobre as sequências, então foi uma maneira diferente de olhar o que eu já compreendia”.

11. Quais foram os maiores obstáculos ou dificuldades que você encontrou ao tentar representar e compreender as propriedades dos Números Metálicos durante o Curso de Extensão?	Os participantes apresentaram diferentes percepções acerca das dificuldades vivenciadas durante as vivências. As maiores incidências concentraram-se nas dificuldades conceituais relacionadas à compreensão da definição e da recorrência (28,6%) e na interação entre o material concreto e sua expressão algébrica (28,6%), revelando desafios na transição. Além disso, 14,3% apresentaram dificuldades em explicar o raciocínio para outra pessoa, enquanto outros participantes mencionaram aspectos relacionados à quantidade de elementos, à socialização e a dificuldades pontuais.
Detalhe sua experiência:	“No início do curso houve uma dificuldade de compreensão visual e de transição para o modelo algébrico, mas no decorrer do curso essa dificuldade foi superada nos diálogos entre os colegas cursistas”. “A dificuldade maior foi encontrar uma lógica para representar os elementos da sequência sem esquecer os que faltavam”.
12. Você identificou um possível itinerário de transição entre os materiais concretos utilizados durante a aplicação dos seis módulos progressivos do Curso de Extensão? Descreva.	“Inicialmente, os ladrilhos e as barras de Cuisenaire ajudaram na visualização e construção dos padrões. Em seguida, com a repetição das configurações e análise das regularidades, tornou-se possível identificar relações de recorrência e formular generalizações”. “Acredito que de alguma forma a resposta que escrevi na pergunta 9 responde essa também”. “Vimos a sequência de ouro e de prata utilizando a escala Cuisenaire. Depois passamos a ver as possibilidades em cada sequência com os ladrilhos de 1x1 e os dominós; com 2 ladrilhos 1x1 diferentes os dominós. Logo depois veio a escala de bronze e o tabuleiro 1xn. não identifiquei”. “Não consigo, infelizmente, recordar. Eu só tenho uma memória mais clara da atividade com as barras. Não me recordo do exercício com os ladrilhos”.

Fonte: dados de pesquisa.

Nesse contexto, o questionário eletrônico, quadro 8, retrata de maneira importante uma análise dos resultados obtidos de pesquisa, pois garantiu a caracterização dos participantes de forma subjetiva. Os registros audiovisuais, fotografias, produções escritas e os diálogos desenvolvidos nos grupos constituíram elementos fundamentais para a interpretação do processo de ensino-aprendizagem observados durante o Curso de Extensão.

Tais dados permitiram o entendimento de regularidades, estratégias e atribuíram significados às formas de apresentação das propriedades dos Números Metálicos. As barras de

Cuisenaire, os ladrilhos metálicos e o tabuleiro $1 \times n$ configuraram-se elementos facilitadores desta representação e relevantes para o ensino-aprendizagem de sequências recorrentes.

Por conseguinte, a Análise *a Posteriori* da Engenharia Didática permitiu não apenas validar as hipóteses construídas nas análises *a Priori*, mas também elucidar o potencial didático-pedagógico das vivências. Os resultados indicaram que a articulação entre Engenharia Didática, artefatos semióticos e práticas colaborativas favoreceu ambientes investigativos mais dinâmicos e reflexivos, ampliando as possibilidades de compreensão conceitual dos participantes acerca das estruturas matemáticas abstratas.

5.2 Planejamento do curso de extensão: sequências numéricas recorrentes para educação básica

Nesta subseção evidencia-se o Curso de Extensão composto por seis tarefas didáticas, aplicadas em lócus acadêmico com professores que lecionam matemática. Observou-se uma preocupação perene, a Transposição Didática de saberes a serem ensinados em sala de aula que, de maneira concisa, contribuíram para concretização dos entendimentos das propriedades fundamentais e recursivas dos NM via materiais concretos.

5.2.1 Experimentação do curso de extensão: sequências numéricas para educação básica

Ocorrido no interstício compreendido entre 14/03/2026 e 06/06/2026 e fundamentado nos pressupostos de TRSS (Duval, 1995) e delineado pela ED (Artigue *et al.*, 1995, Alves, 2018, 2021, 2023), dentre outros que subsidiaram esta experimentação. Contemplou processos de significação, generalização e formalização matemática, analisados a partir de seis módulos progressivos, compostos por seis tarefas didáticas e outras possibilidades de materialização dos saberes, com um viés investigativo baseado nas linguagens, gestos e ações coletivas com os materiais manipulativos ou artefatos semióticos, as barras de *Cuisenaire*, tabuleiro e ladrilhos.

Esta experimentação desenvolvida na Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará (UFC/FACED), na cidade de Fortaleza, compreendeu 15 professores que lecionam matemática e a Professora-Pesquisadora (PP) para o Curso de Extensão intitulado: Sequências Numéricas para Educação Básica. Os docentes aderiram voluntariamente, mediante assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE).

Os docentes (P1, P2, P3, P4, ...) assim nomeados organizaram-se de forma aleatória em grupos menores nomeados (G1, G2, G3, ...), sendo preservado o anonimato dos participantes,

incluindo a Professora-Pesquisadora (PP). Nesse sentido, a PP planejou e implementou os módulos e as tarefas didáticas para estes momentos empíricos com o objetivo de responder à pergunta norteadora de pesquisa e validar cada objetivo específico assinalado para esta escrita acadêmica, não deixando de explicitar sua intencionalidade pedagógica.

Vale salientar que o planejamento, o TCLE, o Edital 01/2026 e o Questionário: professor em Formação Continuada utilizados encontram-se assentados nos apêndices e anexos desta dissertação.

Sendo assim, as próximas linhas elucidaram as observações inferidas a partir das vivências. As análises a *Posteriori* confrontaram o que se foi previsto nas análises a *Priori* e o que foi constatado na hora das experimentações, fato que corrobora para desencadear a Validação desta dissertação acadêmica.

6 ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO: DADOS DE PESQUISA

"O objetivo da Validação é verificar a coerência entre os comportamentos efetivamente observados e aqueles previstos na fase de concepção" (Artigue, 1988).

As fases de Análise a *Posteriori* e Validação são consideradas centrais no âmbito da Engenharia Didática (ED), uma vez que constituem o momento em que os dados produzidos durante a experimentação são confrontados com as hipóteses e previsões formuladas na Análise a *Priori*. Esse processo possibilita examinar a coerência entre o planejamento inicial e os resultados efetivamente observados, permitindo identificar convergências, divergências e reformulações necessárias à compreensão do fenômeno investigado.

Nesse sentido, a validação segundo a ED desenvolveu-se de forma articulada ao longo das subseções desta seção, compondo a etapa analítica. Dessa forma, tomou como referência os dados empíricos coletados, os artefatos semióticos utilizados e os pressupostos teóricos que fundamentaram a pesquisa. A partir desse movimento interpretativo, foram estabelecidas categorias analíticas que orientaram a leitura, a organização e a discussão dos resultados apresentados a seguir:

Análise Semiótica das tarefas: as videograções foram analisadas em detalhes, com foco na identificação de "momentos de compreensão" observados no contexto da aplicação, coordenação de falas, gestos e manipulação dos ladrilhos para contribuir com um entendimento compartilhado das propriedades fundamentais dos Números Metálicos.

Análise Temática e Visual: o questionário eletrônico auxiliou na caracterização dos participantes da pesquisa e fomentou as análises temáticas com relação as concepções dos participantes, suas percepções sobre a eficácia dos materiais e as reflexões sobre o aprendizado. As fotografias das construções elucidaram identificações de padrões, estratégias e a evolução das representações a partir de um itinerário progressivo entre os participantes e os materiais ao longo das experimentações.

Validação: ao final de cada módulo ocorreram as Análises a *Posteriori* e as validações orquestradas pela ED. A adequação das tarefas, os momentos empíricos (vivências) e a eficácia dos materiais corroboraram para coerentes abordagens teóricas, contribuindo para fortalecer o conhecimento didático tangível e em constante evolução.

6.1 Análise *a Posteriori* e validação do módulo I

O módulo 1 foi organizado em três momentos progressivos. Inicialmente, ocorreu a apresentação do material e a introdução de algumas teorias que o fundamentaram; em seguida, ocorreu a experimentação com as barras de *Cuisenaire*, voltada à exploração de padrões e regularidades em sequências numéricas recorrentes; por fim, destacou-se as expressivas discussões coletivas, destacando as análises semióticas, temáticas e visuais na explicitação do raciocínio lógico e na articulação de diferentes registros de representação semiótica, conforme Duval (1995).

Baseado no Quadro 9 a seguir, ocorreu de forma sistemática o Módulo 1, ancorado no curso de Extensão e alojado no ambiente (AVA/G-TERCOA) e na seção dos Anexos desta dissertação:

Quadro 9 – Módulo 1 do curso de extensão (AVA/G-TERCOA)

1 Introdução às Sequências Recorrentes (14/03/26) (4 h/a)

- 1.1 Dinâmica do curso de extensão e assinatura dos termos de consentimento (TCLE)
- 1.2 Apresentação dos conceitos fundamentais de sequências numéricas recorrentes e a importância postulada na BNCC (ex: sequência de Fibonacci, dentre outras);
- 1.3 Exploração inicial da relação entre pensamento aritmético em relação ao algébrico e TO e a TRSS;
- 1.4 **Atividade Presencial:** Tarefa 1 com manipulação livre de artefatos semióticos básicos (barras de *Cuisenaire*);
- 1.5 **Atividade Assíncrona:** Fórum de discussão coletivo para que os participantes compartilhem exemplos familiares de sequências numéricas no cotidiano, promovendo reconhecimento prévio do tema. (6h/a).

Fonte: dados de pesquisa.

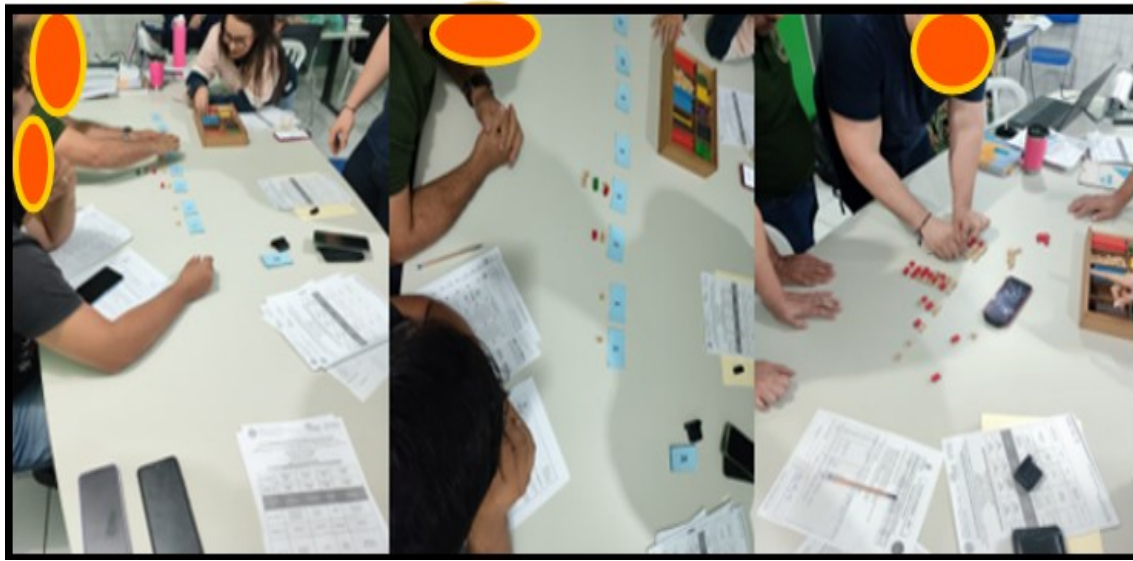
A vivência ocorreu com professores que lecionam matemática na Educação Básica (Pedagogos e Matemáticos), organizados em dois G1 e G2 de trabalho. Vale salientar que os seis módulos, a seguir, foram conduzidos em um ambiente comum, sendo vídeo e gravações, autorizados pelo Termo de Livre Consentimento (TLC) aprovado no Comitê de Ética, para capturar a riqueza das transformações dos saberes.

Além disso, o Módulo 1, organizado em dois momentos distintos, teve início com a apresentação da Tarefa 1, “Tarefa Didática 1: Construindo a Recursividade de Segunda Ordem com Barras de *Cuisenaire*”, cujo propósito consistiu em favorecer a percepção e a reflexão acerca da importância dos recursos semióticos, especialmente das barras de *Cuisenaire*, na mobilização dos saberes matemáticos.

Tal proposta possibilitou ampliar a compreensão dos participantes sobre práticas pedagógicas fundamentadas no diálogo, na colaboração e na materialização do conhecimento matemático por meio dessas ferramentas.

Segue na figura 14 a primeira vivência com professores que lecionam matemática, em que esse artefato constituiu um excelente material manipulativo para fomentar alguns registros de representações semióticos.

Figura 14 – Vivência com professores que lecionam matemática



Fonte: dados da pesquisa

As análises semióticas, temáticas e visuais foram realizadas a partir dos registros fotográficos, das manipulações dos materiais e das falas produzidas pelos professores durante as vivências do curso de extensão. Nesse processo, os participantes mobilizaram diferentes registros de representação semiótica, por meio da linguagem oral, dos gestos, das expressões simbólicas e da manipulação das barras de Cuisenaire, estabelecendo relações entre as cores e os comprimentos das peças.

A coordenação e a conversão entre esses registros favoreceram a exploração gradual das relações estruturais presentes nas sequências estudadas, contribuindo para a construção coletiva de significados, para a generalização de padrões e para o desenvolvimento do pensamento algébrico, conforme preconiza a BNCC (Brasil, 2018).

Sob a perspectiva da TRRS, observou-se que os participantes passaram a reconhecer regularidades, formular conjecturas e comunicar estratégias de resolução de maneira colaborativa, evidenciando a articulação entre ações concretas e processos abstratos de pensamento matemático.

PP: "Você conseguiria representar a sequência usando essas duas barras?"
 P1: "Não, não dá. Não."
 PP: "Será? Lembrando que eu posso juntar as barras."
 P3: "Mas só com esses dois tipos de barra, né? Entendi."
 P2: "E aí, como é que fica aí?"
 P5: "Tá aqui, ó. Pronto."
 PP: "Vamos começar, né? Eu quero representar Fibonacci. 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21. Só usando... Faltam 2. Quantas possibilidades eu posso ter? Aí eu vou... Aí duas... Não, bota embaixo lá com 2. Embaixo com 2. Bota agora... O que tá aqui no meio, viu, gente? É o 5, né? É o 3. Não, agora... Agora é o 3. Sim, 3. Foi 1, 2. Sim."
 P1: "É, acho que é bom manter o padrão."
 P2: "Mas tudo bem. Pra seguir o padrão. Esse aí também, pronto."
 (Diálogos entre os sujeitos da pesquisa e a professora pesquisadora, 2026).

O episódio evidenciou um momento significativo de construção coletiva do conhecimento matemático que coaduna com os pressupostos fundantes ora consolidados nas seções anteriores. A fala da Professora-Pesquisadora (PP) atuou como mediação pedagógica ao provocar os participantes, solicitando-lhes a representação da sequência de Fibonacci utilizando apenas dois tipos de barras, incentivando a exploração, a formulação de hipóteses e a busca por regularidades.

Inicialmente, foi observado um momento de estranhamento e dúvida por parte dos participantes, especialmente quando P1 afirma: "Não, não dá. Não." Tal manifestação revela um obstáculo epistemológico (Bachelard, 1938) inicial relacionado à compreensão das possibilidades combinatórias do material, evidenciado na Análise *a Priori* na seção anterior, quando se analisou que: "os participantes podem conseguir visualizar determinadas combinações com as barras, mas apresentar limitações na conversão dessas representações para registros numéricos, algébricos ou discursivos." Entretanto, à medida que a PP reformula a proposta e orienta os participantes sobre a possibilidade de combinar as barras, inicia-se um processo de reorganização cognitiva e de ressignificação da tarefa.

A Análise *a Posteriori* do episódio evidencia elementos que corroboram as hipóteses formuladas nas Análises *a Priori* desta dissertação, especialmente no que se refere ao potencial das vivências do Módulo 1 e dos artefatos semióticos para fortalecer processos de generalização e construção colaborativa do conhecimento matemático. Conforme previsto nas Análises Preliminares, atende-se a um dos objetivos específicos que salienta a funcionalidade das barras de Cuisenaire para mobilizar diferentes formas de representação e explorar relações recursivas presentes na sequência de Fibonacci (Duval, 1995).

Inicialmente, a fala da PP "Você conseguiria representar a sequência usando essas duas barras?" caracteriza-se de modo intencional, voltando-se à criação de um desequilíbrio cognitivo e epistemológico, conforme pressupõe a Engenharia Didática (Artigue, 1995). Tal

fala buscou deslocar os participantes de uma percepção imediata e operacional, relacionada ao pensamento aritmético, para uma reflexão mais investigativa e analítica, presente nas possibilidades combinatórias e estruturais do material manipulativo, o pensamento algébrico.

A resposta de P1 "Não, não dá. Não." revela uma limitação na percepção das potencialidades recursivas das barras, evidenciando um estágio inicial de compreensão ainda vinculado à representação isolada das peças. Entretanto, a intervenção subsequente da PP "Lembrando que eu posso juntar as barras." atua como elemento promotor capaz de ampliar o horizonte conceitual dos participantes, conduzindo-os à percepção de que diferentes composições podem representar um mesmo termo da sequência.

Doravante, a fala de P3 "Mas só com esses dois tipos de barra, né?" traz à tona um refinamento da compreensão das condições impostas pela Tarefa 1, demonstrando que os participantes passaram a reconhecer as restrições estruturais da atividade como parte do processo investigativo.

Ao afirmar "Tá aqui, ó. Pronto", P5 materializa uma solução construída coletivamente, indicando a passagem de um conhecimento inicialmente implícito para uma representação concreta e compartilhada. Esse momento valida uma das hipóteses presentes nas Análises *a Priori*: a de que a manipulação das barras de Cuisenaire poderia favorecer a exteriorização do pensamento matemático e a construção de significados por meio da ação colaborativa. Essa hipótese, identificada nos excertos anteriores, refere-se ao potencial dos artefatos semióticos para favorecer a compreensão da recursividade de segunda ordem.

Valida-se que a manipulação concreta das barras de Cuisenaire corrobora a visualização de que cada termo da sequência pode ser elucidado a partir da soma dos dois termos imediatamente anteriores, favorecendo a percepção da relação de recorrência de segunda ordem:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (32)$$

Nesse sentido, constatou-se que os participantes desenvolveram processos de generalização matemática a partir da articulação entre ações concretas e diversas representações simbólicas (Duval, 1995).

Em outro episódio, as intervenções da PP ao organizar os termos "1, 2, 3, 5, 8, 13, 21" e questionar "Quantas possibilidades eu posso ter?" estimularam os participantes a reconhecer

padrões e regularidades recursivas, conduzindo-os à percepção das relações estruturais da sequência de Fibonacci.

Tal movimento elucida a relevância da compreensão dos processos de generalização e do reconhecimento das sequências recorrentes mediados por esses artefatos, pela língua materna proferida no momento e pelos gestos observados. Outrossim, previu-se e validou-se que alguns participantes pudessem concentrar-se apenas em resultados isolados ou em combinações empíricas das barras, sem reconhecer de forma imediata que a regularidade estrutural organiza a formação dos termos.

As falas de P1 e P2 "É, acho que é bom manter o padrão" e "Pra seguir o padrão" demonstram que os participantes passaram, de modo preliminar, a identificar regularidades e critérios organizacionais presentes na sequência, validando a hipótese formulada nas Análises *a Priori*.

Neste contexto, esperou-se que os participantes avançassem gradativamente da observação empírica das combinações para a explicitação verbal e simbólica da regularidade presente na sequência, reconhecendo padrões, formulando conjecturas e validando estratégias coletivamente (Duval, 1995).

Além disso, o episódio confirma que o ambiente colaborativo favoreceu a negociação de sentidos e a produção compartilhada do conhecimento matemático. As movimentações empíricas entre os participantes e a PP corroboraram indicadores da *noésis*, segundo Duval (1995), a qual não ocorreu de maneira individualizada, mas por meio de discussões e estratégias, em consonância com os pressupostos teóricos adotados.

Portanto, o confronto entre as Análises *a Priori* e *a Posteriori* validou as previsões estabelecidas para este Módulo 1, ao evidenciar que a articulação a partir das representações semióticas, dos artefatos e das práticas colaborativas fortaleceu os processos de generalização e formalização matemática. O episódio analisado demonstrou que as barras de Cuisenaire atuaram como mediadoras relevantes para a compreensão das propriedades recursivas da sequência de Fibonacci, contribuindo para a emergência de práticas investigativas e reflexivas no âmbito deste curso de extensão.

Figura 15 – Experimentação com barras de *Cuisenaire* (Módulo 1)



Fonte: dados da pesquisa.

Observa-se acima outra vivência repleta de significados relativo ao Módulo 1 do Curso de Extensão. Sob a perspectiva da TRRS, percebeu-se que os participantes transitaram entre diferentes formas de representação oral, visual, manipulativa e simbólica mobilizando processos de tratamento e conversões. A utilização das barras de *Cuisenaire* fortaleceu a visualização das composições e das recorrências, enquanto os questionamentos da PP conduziram à formalização algébrica da sequência.

Além disso, o diálogo evidenciou o papel facilitador da professora-pesquisadora, que atuou não como transmissora de conhecimento, mas como agente provocador de reflexões, incentivando argumentações, a formulações de hipóteses e materialização coletiva de significados matemáticos.

PP: Vocês podem até substituir agora por outras cores que já... Que substituindo os valores. Aqui tem quanto?

P1: É que a gente queria representar só alguns... Ah, entendi. Também seguindo um padrão. Queria poder visualizar que esse é de fato a soma desses dois também...

PP: Pergunta. Será que eu consigo fazer números maiores?

P1: Se você tiver material suficiente que é praticamente inviável quando esses números forem tão grandes...

P2: Isso daqui esse salto daqui para cá já é muito difícil...

P2: A primeira vez eu nunca tinha visto esse material. Tô vendo agora e tô entendendo. Agora qual seria a próxima? Será que seguindo aqui?

PP: A gente trabalhou as duas situações de forma intuitiva. A primeira na manipulação. E a segunda na detecção.

P1: Exatamente que esse aqui, seguindo o padrão é a soma dos outros dois usando a comutatividade...

(Diálogos entre os sujeitos da pesquisa e a professora pesquisadora, 2026)

O excerto anterior reverbera importantes processos de materialização coletiva do conhecimento matemático, revelando manifestações de visualização, generalização e percepção das propriedades fundamentais da adição nos conceitos envolvidos na Tarefa 1 com as barras de *Cuisenaire*. As falas dos participantes demonstraram que o processo de ensino-aprendizagem

da propriedade recursiva ocorreu de maneira gradativa, colaborada pela manipulação concreta e pelas discussões estabelecidas no grupo.

Inicialmente, observou-se na fala de P1, "Queria para poder visualizar que esse é de fato a soma desses dois também...", uma tentativa de validar empiricamente a propriedade recursiva da sequência por meio da representação concreta. Essa manifestação revela uma articulação entre o registro manipulativo e o pensamento algébrico (Duval, 1995), no qual os participantes buscaram transitar no mesmo registro para identificar a recorrência não apenas simbolicamente, mas também visualmente. Sob essa lógica, percebe-se um processo de tratamento, validando a epistemologia proposta.

A PP, ao questionar: "Será que eu consigo fazer números maiores?", introduziu um conflito conceitual importante, conduzindo os participantes a refletirem acerca dos limites físicos do material manipulável frente ao crescimento da sequência. A resposta de P1, "Se você tiver material suficiente, que é praticamente inviável quando esses números forem tão grandes...", evidenciou, assim, um obstáculo empírico relacionado à representação concreta de termos elevados da sequência. Esse momento revelou um avanço epistemológico significativo, pois os participantes começaram a compreender que o material concreto possui limitações operacionais, exigindo processos de abstração mais apurados.

A fala de P2, "Isso daqui, esse salto daqui para cá, já é muito difícil...", evidencia a percepção do crescimento acelerado dos termos da sequência e sugere o surgimento de um pensamento recursivo mais elaborado. Nesse contexto, P2 reconhece que a regularidade observada nos primeiros termos se mantém estruturalmente, ainda que sua representação concreta se torne progressivamente mais complexa. Tal percepção aproxima os sujeitos de uma compreensão formal das propriedades das sequências recorrentes.

Outro aspecto relevante surge quando P2 afirma: "A primeira vez eu nunca tinha visto esse material. Tô vendo agora e tô entendendo". Essa fala reflete o potencial formativo observado na vivência, auxiliado pelas barras para o ensino-aprendizagem dessas estruturas. Assim, o participante explicita que a compreensão do conceito foi favorecida pela experiência concreta e coletiva proporcionada pelo momento empírico.

A intervenção da PP, "A gente trabalhou as duas situações de forma intuitiva. A primeira na manipulação. E a segunda na detecção", demonstra um movimento de validação do conhecimento produzido durante a Tarefa 1. A fala sintetiza duas dimensões importantes do processo investigativo: inicialmente, a exploração empírica e intuitiva dos materiais; posteriormente, a identificação consciente das regularidades matemáticas presentes na

sequência. Esse movimento evidencia a transição do pensamento concreto para processos mais abstratos de generalização.

No entanto, a fala de P1, "seguindo o padrão é a soma dos outros dois usando a comutatividade", revela um avanço conceitual significativo, pois o participante não apenas reconhece a lei de formação recursiva da sequência, mas também associa essa construção às propriedades aditivas, especialmente à comutatividade. Essa manifestação demonstra que os sujeitos começaram a perceber que diferentes arranjos das barras podem produzir o mesmo resultado matemático, fortalecendo processos de equivalência, reorganização e generalização algébrica.

Portanto, o episódio analisado demonstra que a utilização desses materiais manipuláveis, associada a práticas investigativas e dialógicas, potencializou os processos de visualização, compreensão e generalização de algumas propriedades recorrentes da sequência de Fibonacci via barras de Cuisenaire. Ademais, evidenciou uma validação preliminar de como essa vivência auxiliada pelos artefatos pode contribuir para o processo de ensino-aprendizagem das propriedades fundamentais e recursivas dos NM em *locus* acadêmico.

6.2 Análise *a Posteriori* e validação do módulo II

O módulo 2 seguiu de maneira análoga ao primeiro, com planejamento prévio e analisando os contextos e as categorias observadas no decorrer da experimentação. Vale salientar que o quadro abaixo delineou-se de forma simplificada de acordo com a proposta didática. A aplicação se deu entre os dias 21/03/2026 e 28/03/2026 com a temática: “Construção e Identificação de Padrões com barras de Cuisenaire”.

Quadro 10 – Módulo 2 do curso de extensão (AVA/G-TERCOA)

2 Construção e Identificação de Padrões com barras de Cuisenaire (21/03/2026) (4 h/a)

- 2.1 Tarefa didática 2 colaborativa para reconhecer padrões numéricos recorrentes;
- 2.2 Uso de barras de Cuisenaire para representar os primeiros termos das sequências;
- 2.3 Discussão coletiva dialógicas para identificação de regras e regularidades;
- 2.4 Registro e anotação dos padrões observados;
- 2.5 **Atividade Presencial:** uso das barras de Cuisenaire para construir os primeiros termos da sequência e observar a recursividade de algumas sequências numéricas recorrentes.
- 2.6 **Atividade Assíncrona:** Fórum de discussão coletivo para que os participantes compartilhem exemplos familiares de sequências numéricas no cotidiano, promovendo reconhecimento prévio da temática. (6h/a).

Fonte: dados da pesquisa.

A vivência contou com a participação de 12 professores, entre Pedagogos e Matemáticos, organizados em três pequenos grupos de trabalho (G1, G2 e G3).

Figura 16 – Momentos empíricos evidenciados no módulo 2



Fonte: dados da pesquisa.

A Figura 16 retrata, de forma preliminar, a movimentação das barras de Cuisenaire durante as atividades desenvolvidas no curso de extensão. Nesse primeiro momento, observou-se a mobilização de diferentes registros de representação semiótica, evidenciada pelos momentos de experimentação com o material manipulável sugerido. Durante as vivências, os professores compararam os comprimentos e as cores das barras, estabeleceram relações entre as diferentes representações e, em um momento subsequente, passaram a formular hipóteses e conjecturas com o intuito de validar as propriedades observadas. Esse movimento evidenciou um processo gradual no qual a manipulação fortaleceu a visualização, a argumentação e a generalização dos conceitos matemáticos explorados, em consonância com os pressupostos da TRRS (Duval, 1995).

Acerca dos pressupostos fundantes da pesquisa, seguiu-se a experimentação modelando os primeiros representantes da sequência de Fibonacci. Os participantes utilizaram os diversos recursos de representação para assimilar e conseguir entender a recursividade e algumas regras sobre essas estruturas via manipulação direta com as barras de Cuisenaire. Doravante, de modo consecutivo, serão explicitados os diálogos no momento da realização da tarefa didática 2:

PP: O que é que a gente pede como tarefa 2? O material é este, as barras de Cuisenaire. Vocês viram os cartões? Você pega as barras e os cartões. E a sequência? Quantas combinações. Podem ser formadas com as peças? Combinando as peças. Aí vocês vão usar como se fosse uma composição. Lembrando que as peças. Tem por trás delas. Vocês vão perceber essas propriedades fundamentais...

P1: [...] aí como é que a gente construiria uma sequência? Tipo essa dos cartões. Pronto. Aqui a gente colocaria um. O segundo termo seria um de novo. O terceiro termo seria dois. Então um. Um mais um. Dois. Mas só existe essa combinação? Qual

o próximo? Cinco?

P2: Aí a gente tem que ver qual que equivale ao cinco. Vamos ver se não tem uma barra que já equivale ao cinco. Eu acho que essa amarela. Qual é o oito? Aí a gente tem que estar sempre voltando e contando. E medindo...

P4: E aí? Não, lá na sequência vai até 144. Mas as barrinhas, se eu não me engano, a gente tem até 10...

P8: "Esse aqui tem o quanto? Esse é o máximo? Dez. É o máximo, né? É, aqui tem como? Treze. Aqui tem dois, né? Está faltando um ainda. Aqui tem dois, né? É, aqui é dois. Vermelho. Coloca aqui o vermelho. Vermelho é dois. Dois. O vermelho vale dois. O vermelho vale dois. O verde, quatro, três. Três. O amarelo, cinco. O verde escuro é seis. O verde escuro vale seis. Três. O azul. O azul. O verde claro vale três. O amarelo vale cinco. O azul vale nove. Né? Aqui deu doze, viu? Só nove, porque ele não tem aqui. Um, dois, três. Cinco. Cinco."

P6: "Cinco aqui não é seis, né? Oito e cinco é oito. Aqui é seis, né? Então aqui é seis. O verde escuro é seis. Esse daqui é nove, ó. Esse é nove, ó. Era nove, então falta mais. Nove com... Nove com dois. Quanto é o dez?"

(Diálogos entre os sujeitos da pesquisa e a professora pesquisadora, 2026).

Os diálogos revelaram um processo dinâmico e colaborativo de movimentação do conhecimento matemático. As manifestações observadas corroboraram aspectos relevantes à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), especialmente no que se refere à mobilização e à coordenação de diferentes registros de representação.

A problematização realizada pela PP — "O material é este, as barras de Cuisenaire. Vocês viram os cartões? Você pega as barras e os cartões. E a sequência? Quantas combinações" — evidencia uma estratégia didática voltada à desconstrução da ideia de que uma sequência se caracteriza apenas pela ordenação numérica. Ao questionar: "Combinando as peças. Aí vocês vão usar como se fosse uma composição", a PP conduz os participantes à percepção de que uma sequência matemática pressupõe uma regularidade ou lei de formação que possibilite sua continuidade. Esse movimento coloca-os na direção do pensamento recursivo e da necessidade de identificar relações estruturais entre os termos.

Na sequência, a fala de P1: "[...] aí como é que a gente construiria uma sequência? Tipo essa dos cartões" indica que o participante deixa de observar apenas a composição concreta e passa a questionar a unicidade das representações possíveis para um mesmo termo da sequência. Tal indício confirma uma das hipóteses formuladas na *Análise a Priori*: a possibilidade de os participantes reconhecerem múltiplas composições aditivas associadas aos termos da sequência recursiva.

A fala de P2, "Aí a gente tem que estar sempre voltando e contando. E medindo...", evidencia a força do suporte concreto para o amadurecimento cognitivo acerca dessas construções abstratas. O participante P2 mobilizou, comparou e contou as barras, validando as equivalências entre os materiais e os valores da sequência. Esse episódio ainda demonstra a

importância dos artefatos manipuláveis como auxiliares da materialização do pensamento algébrico, especialmente no processo de transição entre representações concretas e abstratas.

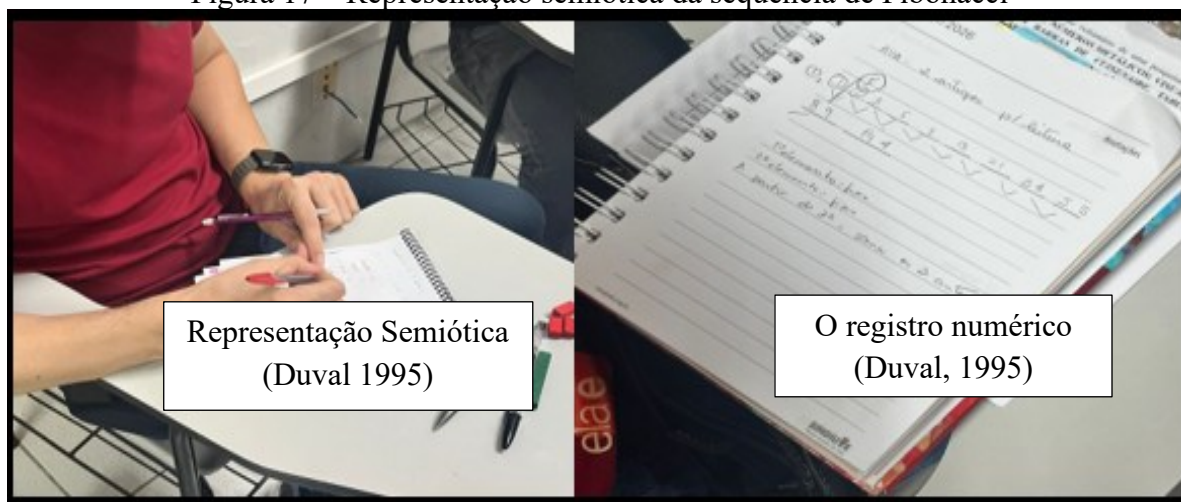
Outro aspecto significativo emerge na fala de P4, "Lá na sequência vai até 144. Mas as barrinhas [...] a gente tem até 10...", que resgata a percepção de uma limitação material do recurso manipulativo. Tal observação constata um avanço conceitual, pois o participante reconheceu a limitação para compor termos maiores da sequência, compreendendo implicitamente a lógica recursiva e aditiva inerente à atividade.

As falas de P8 revelam um intenso processo de coordenação entre diferentes registros de representação semiótica, conforme os pressupostos da TRRS. Ao relacionar cores, valores numéricos e comprimentos das barras, "O vermelho vale dois. O verde claro vale três. O amarelo vale cinco...", o participante estabelece conexões entre o registro visual, o registro verbal e o registro numérico (Duval, 1995).

Além disso, observa-se que o grupo começou a negociar coletivamente significados matemáticos, validando hipóteses e corrigindo interpretações durante o diálogo. A fala de P6, "Cinco aqui não é seis, né?", evidencia um momento de conflito cognitivo e reorganização conceitual, no qual o participante revisita suas interpretações a partir da interação com os demais colegas.

Outro elemento refere-se à emergência do pensamento algébrico e recursivo. Ao tentar representar termos maiores da sequência utilizando combinações de barras menores, os participantes começaram a perceber regularidades estruturais e relações de composição aditiva. Tal situação evidenciou um processo gradual de abstração, no qual o concreto atuou como suporte para conceitos mais generalizados.

Figura 17 – Representação semiótica da sequência de Fibonacci



Fonte: dados de pesquisa.

Vale reportar que outra observação a ser dita a respeito da Figura 17 refere-se à conversão da representação em língua materna. Ocorreu, ainda, a movimentação entre os diferentes registros semióticos: por exemplo, o registro numérico, utilizado pelo participante como apoio na reorganização da representação do raciocínio, desempenha o que é denominado por Duval como a função de objetivação que a representação semiótica explicita (Duval, 1995).

Tem-se, ainda, voltando à Tarefa 2, a PP apresentando o artefato semiótico e, de forma intencional, formulando perguntas norteadoras:

PP: Quando vocês substituíram as peças, essa troca de peças, são as propriedades comutativas e associativas?

PP: Na sequência de Fibonacci, existe uma razão dentro dela? É percebida uma estabilidade?

(Diálogos entre os sujeitos da pesquisa e a professora pesquisadora, 2026).

Logo em seguida, derivaram-se inúmeros questionamentos, e as manifestações abstratas puderam ser gradativamente transformadas em conteúdos matemáticos tangíveis. O diálogo fluiu de forma perene durante toda a manhã; eis alguns trechos:

P1: 5 é quase o dobro do 3. Então, o 3 é a metade, mais um pouquinho do 5. Aí, se eu pegar esse 5, que é quase o dobro do anterior, e dividir por o 3, eu encontro o quê?

P3: 1,6666. 5 dividido por 3. Que são vizinhos, né? Sim. Então, o 8 se dividir pelo 5 vai dar a mesma razão.

PP: Agora, vamos representar isso aqui. O 8 dividido por 5 também vai dar a mesma razão?

P2: O que é que o 8 é desse 5? O dobro? É quase o dobro de 5. O 13, quem tem aqui o 8. Cadê o 8? Mas o 5 dividido pelo 3 dá 1,6, né?

P5: Beleza, então anota quanto é que dá? O 8 dividido por 5 é 1,6...

P8: E o 13 dividido por 8? Dá 1,6125...

(Diálogos entre os sujeitos da pesquisa e a professora pesquisadora, 2026).

Este fato inicial refere-se à estabilidade da Razão de Ouro encontrada na sequência de Ouro/Fibonacci, quando se divide o termo posterior pelo anterior. O trecho do diálogo evidenciou um movimento importante de vivência coletiva. Sob a perspectiva da TRRS, observou-se que o conhecimento matemático emerge das discussões, das argumentações coletivas e das ações compartilhadas entre os participantes.

Inicialmente, a fala de P1, "5 é quase o dobro do 3", revela uma tentativa de estabelecer relações proporcionais intuitivas entre termos consecutivos da sequência. Embora o participante utilize uma linguagem informal, percebe-se um movimento inicial de aproximação conceitual da ideia de razão entre termos vizinhos. Ao questionar: "se eu pegar esse 5 [...] e dividir pelo 3, eu encontro o quê?", o participante desloca o foco da simples composição aditiva para uma análise multiplicativa e relacional da sequência.

Na sequência, P3 afirma: "1,6666. 5 dividido por 3. Que são vizinhos, né? Sim. Então, o 8 se dividir pelo 5 vai dar a mesma razão", demonstrando um avanço conceitual, pois o participante passa a identificar uma estabilidade nas razões entre termos consecutivos da sequência de Fibonacci. Ainda que os valores obtidos sejam aproximações, há indícios claros de percepção da convergência para uma constante numérica associada à razão áurea.

O questionamento da Professora-Pesquisadora (PP), "Agora, vamos representar isso aqui", atua como mediação didática voltada à apropriação do conceito matemático emergente. A intervenção buscou conduzir os participantes da mera observação intuitiva para uma representação sistematizada e consciente das relações numéricas percebidas durante a tarefa.

As falas de P2 e P5 reforçaram esse processo de validação coletiva do conhecimento. Ao afirmarem "O 8 dividido por 5 é 1,6", os participantes passaram a comparar os resultados encontrados, reconhecendo a manutenção aproximada da razão entre termos consecutivos. Esse movimento elucidou processos de tratamento numérico e comparação de resultados, fundamentais para a construção matemática relacionada à proporcionalidade da sequência.

A fala de P8, "E o 13 dividido por 8? Dá 1,6125", representa um momento relevante de refinamento conceitual. O participante amplia a investigação para termos maiores da sequência e percebe que os valores encontrados permanecem próximos, indicando a estabilidade limite da razão áurea:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618 \quad (33)$$

Os diálogos também conferiram momentos de conflito cognitivo, especialmente quando os participantes apresentavam dificuldades para associar corretamente os valores às barras ou para representar termos maiores da sequência. Tais conflitos, à luz de Bachelard (1938), constituem obstáculos epistemológicos inerentes ao processo de construção do conhecimento científico. Assim, os erros, as hesitações e as retomadas observados não representam falhas no processo de ensino-aprendizagem, mas momentos fundamentais de reorganização conceitual e produção de novos significados matemáticos.

Desse modo, as análises frasais advindas da transcrição dos áudios demonstraram que a atividade favoreceu processos de visualização, argumentação e experimentação, possibilitando aos participantes a compreensão gradativa dos conhecimentos inerentes a esses constructos. A mediação da PP mostrou-se essencial para orientar os processos investigativos e provocar

reflexões, conduzindo os participantes à compreensão das estruturas matemáticas subjacentes às sequências recorrentes.

6.3 Análise *a Posteriori* e validação do módulo III

O módulo 3 seguiu conforme planejado na análise *a Priori*, que evidenciou de forma similar, porém progressiva, análoga ao primeiro, com organização prévia e analisando os contextos e as categorias observadas no decorrer da experimentação. Vale dizer que o excerto a seguir delinea a proposta didática. A vivência ocorreu entre os dias 11/04/2026 e 18/04/2026 com a temática: “**Introdução a Recursividade com Ladrilhos e Tabuleiro Concreto**”.

Quadro 11 – Módulo 3 do curso de extensão (AVA/G-TERCOA)

<u>3 Introdução a Recursividade com Ladrilhos e Tabuleiro Concreto (11/04/2026) (4 h/a)</u> 3.1 Apresentação dos ladrilhos e tabuleiros como outros artefatos semióticos para visualizar processos recursivos; 3.2 Atividades de montagem de sequências através da combinação dos ladrilhos ou peças do tabuleiro concreto unidimensional; 3.3 Comparação entre representações concretas e registros numéricos; 3.4 Reflexão sobre transições do concreto ao abstrato; 3.5 Atividade Presencial: montagem de sequências com ladrilhos e tabuleiros concretos; 3.6 Atividade Assíncrono: Fórum de discussão coletivo. (6h/a).
--

Fonte: dados da pesquisa.

A mobilização com o tabuleiro concreto $1 \times n$ e dos ladrilhos com cores pré-definidas, fundamentada nas proposições de Benjamin e Quinn (2003), foi desenvolvida com oito participantes entre pedagogos e professores de Matemática organizados em grupos menores de trabalho (G1 e G2).

A atividade concentrou-se na representação da Sequência de Ouro/Fibonacci por meio da manipulação concreta dos ladrilhos e do tabuleiro, favorecendo um ambiente investigativo, criativo e colaborativo. Durante o desenvolvimento da vivência, observou-se intensa mobilização de diferentes meios semióticos, tais como gestos: linguagem oral, expressões simbólicas, argumentações coletivas e reorganizações espaciais dos ladrilhos, elementos que passaram a delinear o movimento metodológico dos momentos empíricos.

Nesse contexto, a nova artefato possibilitou aos sujeitos estabelecerem relações entre composições concretas e estruturas matemáticas abstratas, o que favoreceu a visualização de padrões, a percepção de regularidades na construção compartilhada de significados

matemáticos. Sob a perspectiva da TRSS, o uso do tabuleiro e dos ladrilhos configurou-se como importante farol semiótico, permitindo que o conhecimento emergisse das ações coletivas, dos espaços dialógicos e da manipulação concreta desses artefatos.

Essas observações, retratadas anteriormente, evidenciaram a necessidade de ampliação das pesquisas acerca das manifestações cognitivas, discursivas e semióticas mobilizadas durante atividades investigativas envolvendo ladrilhos e tabuleiro. O momento empírico revelou intensa mobilização coletiva dos participantes durante a manipulação do tabuleiro $1 \times n$ e dos ladrilhos metálicos, fundamentados nas proposições de Benjamin e Quinn (2003), utilizados para representar e explorar, de maneira concreta, propriedades da sequência de Fibonacci e dos Números Metálicos.

Além disso, os participantes organizaram os ladrilhos em diferentes composições espaciais, análises combinatórias, retomando a definição de ladrilhamento apresentada por Vieira (2024), segundo a qual os espaços ou casas do tabuleiro devem ser preenchidos sem deixar lacunas vazias. A partir dessas construções, figura 18, os sujeitos estabeleceram relações entre quantidade, posição, equivalência e recorrência, enquanto interagiam continuamente por meio de gestos, apontamentos, diálogos, reorganizações espaciais e manipulação dos artefatos semióticos.

Figura 18 – Momentos empíricos evidenciados no módulo 3



Fonte: dados da pesquisa.

De modo complementar, à luz da TRSS, percebe-se a coordenação entre diferentes registros de representação, como o figural, o verbal, o numérico e o gestual. Essa articulação

possibilitou aos participantes converter representações concretas em interpretações matemáticas mais abstratas (Duval, 1995).

Os gestos de apontar, reorganizar e comparar as peças demonstram evolução cognitiva nos quais os participantes tornaram explícitas as regularidades presentes na sequência trabalhada. Nesse contexto, os ladrilhos e o tabuleiro $1 \times n$ deixou de atuar apenas como materiais concretos e passou a se comportar como meio semiótico para o ensino-aprendizagem das propriedades fundamentais e recursivas dos NM.

A vivência observada sugeriu que os participantes compartilhassem estratégias, validando conjecturas e negociando sentidos coletivamente, reforçando, desse modo, a concepção de que a aprendizagem matemática ocorre em um movimento dialógico e colaborativo. A postura corporal inclinada sobre o tabuleiro, os apontamentos simultâneos e a reorganização conjunta das peças indicam um forte engajamento colaborativo e dialógico.

A seguir há trechos desse engajamento e evidências da progressão conceitual aqui inferidas.

P1: Quando ele é igual a 1 a gente tem 4 possibilidades ou só 1, né? 1, 2, 3, 4, 5... 1, 2, 3, 4, 5... Essa é própria. 2... O 2 mais 1 faz 3. O 3 mais 2 faz 5 possibilidades. 5 mais 8 faz 5. Será? Quantas possibilidades do 1 igual a 5? 8, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Vai ser 3 agora.

P3: Será? Será? Será? Será? Será? Será? Pegou aquele 'invisível', né? Vou usar esse aqui. Vai falar pra lá. Eu acho que eu já estou agoniada. Bota aqui no meio. Fora. 2, 3... 2, 3... 2 pra lá. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Vai ter 5 possibilidades. Só um desse e os outros de... Sim, também. Esse mais esse que está faltando.

P3: É uma forma aqui. 4. É sempre 5 mais 4. Dá pra cortar melhor? Não, não. É possibilidade. 2, 3, 4, 5. 3. Esse não. Não, não. Então não faz o contrário desse.

P5: Mas a dúvida dela... Pode gerar... Esse 6 somado com esse 5... Eu entendi. Até aqui. 1, 2, 3, 4. Só um. 4 formas. Só um. Aí vocês estão dizendo que é 4 mais 3. 4 mais 3 dá 7. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Por que deu 8?

P6: Corta o raciocínio do aluno aí. 2 para um lado, 2 para o outro. Foi? A gente usou 2 baterias diferentes.

PP: Gente, aí a representação da sequência de forma diferente. Isso aqui é como se fosse o tamanho... O tamanho dos blocos a serem preenchidos. E as possibilidades é o que a gente está fazendo. A gente vai contar as possibilidades.

P1: Foram 13. 13, fechou? 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Eu não vou saber fazer a próxima.

P3: Você já entendeu até aqui. Mas o outro era 21. É porque bem aqui eu não tinha visto esse aqui. Não tinha contado com esse aqui. Gente, que bacana isso aqui. Aqui tem 13.

P5: Aqui tem quantos? 3, 8, 5, 6, 3, 2, 1. E a sequência? Ali, olha. E a simetria equivalente? Ah, a mesma coisa. Então aí a gente vai fazer outras sequências.

(Diálogos entre os sujeitos da pesquisa e a professora pesquisadora, 2026)

O trecho do diálogo apresentado constata um movimento intenso de investigação matemática, negociação e processo colaborativo, revelando importantes generalizações e coordenações de diversas representações semióticas. As falas dos participantes demonstraram

que a atividade ultrapassou a simples manipulação de peças de encaixe, conduzindo-os à percepção mais apurada de regularidades estruturais associadas às sequências recorrentes e às possibilidades combinatórias no tabuleiro $1 \times n$.

Inicialmente, a fala de P1 “O 2 mais 1 faz 3. O 3 mais 2 faz 5 possibilidades” — evidenciando a emergência da percepção da relacionada a recursivo presente na sequência de Fibonacci. O participante começou a reconhecer que o número de possibilidades preenchimento do tabuleiro pode ser obtido a partir da soma das quantidades anteriores, inferindo intuitivamente a recorrência da sequência de Ouro/Fibonacci:

$$M_n = M_{n-1} + M_{n-2} \quad (32)$$

As falas recorrentes de P3, “Será? Será?”, revelam momentos de dúvida, conflito cognitivo e reorganização do pensamento matemático. Esses episódios evidenciam que a aprendizagem ocorre por meio de tensões, negociações e reformulações coletivas de significado. Ao afirmar “É possível”, P3 demonstra uma mudança de compreensão: o foco deixa de ser apenas o preenchimento concreto do tabuleiro e passa a considerar o número de representações ou combinações possíveis, aproximando-se de um raciocínio abstrato.

A intervenção de P5 evidencia um processo de validação coletiva das estratégias utilizadas pelo grupo. Ao questionar “Vocês estão dizendo que é 4 mais 3. 4 mais 3 dá 7. [...] Por que deu 8?”, o participante busca confrontar os resultados obtidos e compreender as divergências presentes nas contagens realizadas.

A fala de P6, “A gente usou 2 baterias diferentes”, sugere a percepção de que diferentes estratégias ou organizações espaciais podem gerar contagens distintas. Esse aspecto apresenta um obstáculo cognitivo relacionado à equivalência entre representações e à necessidade de controle sistemático das possibilidades combinatórias. Tal situação dialoga diretamente com a TRRS, uma vez que os participantes demonstram dificuldades momentâneas na coordenação entre o registro figural (organização espacial dos ladrilhos), o registro numérico (quantidade de possibilidades) e o registro discursivo (explicação verbal das estratégias) (Duval, 1995).

A PP assume papel fundamental na reorganização conceitual da atividade ao afirmar: “Isso aqui é como se fosse o tamanho dos blocos a serem preenchidos. E as possibilidades é o que a gente está fazendo”. Essa fala direcionou os participantes à distinção entre o objeto físico representado no tabuleiro e o conceito matemático abstrato — o número de possibilidades combinatórias associadas ao preenchimento.

As falas finais de P1 e P3, "Foram 13" e "Gente, que bacana isso aqui", evidenciam momentos de reconhecimento da regularidade matemática e de satisfação intelectual decorrente da descoberta coletiva. Observou-se, ainda, que os participantes passaram a perceber que as quantidades obtidas seguem a Sequência de Ouro, estabelecendo relações entre os resultados encontrados empiricamente e a estrutura recursiva subjacente.

Outro aspecto relevante emerge na fala de P5 ao mencionar "a simetria equivalente". Essa observação demonstra indícios de percepção de equivalências estruturais entre diferentes configurações espaciais dos ladrilhos, sugerindo avanços na compreensão das propriedades combinatórias e das relações de simetria presentes na atividade. Doravante, apresenta-se outro momento empírico significativo, que revela as inúmeras formas de representação de um mesmo objeto:

Figura 19 – Registro de representação semióticas da Sequência de Ouro



Fonte: dados da pesquisa.

A imagem apresentada elucida um momento significativo de sistematização coletiva do conhecimento matemático produzido durante as atividades com o tabuleiro $1 \times n$ e os ladrilhos metálicos. Observa-se, no primeiro quadro, a organização espacial dos ladrilhos sobre o tabuleiro $1 \times n$, representando diferentes possibilidades combinatórias associadas às sequências recorrentes, enquanto, no segundo quadro, ocorre a formalização das regularidades identificadas pelos participantes no quadro branco.

À luz da TRRS, observa-se a articulação entre diferentes registros de representação: o registro figural, representado pela disposição espacial dos ladrilhos no tabuleiro; o registro numérico, evidenciado pelos valores associados às sequências; o registro algébrico, presente

nas expressões e relações formalizadas no quadro e o registro discursivo, mobilizado durante as argumentações coletivas (Duval, 1995).

A imagem também revela forte engajamento colaborativo entre os participantes. A disposição coletiva em torno do tabuleiro indicou processos de negociação de sentidos, validação de estratégias e materialização das soluções. A P3 posicionou-se junto ao quadro branco elucidando um momento de síntese e formalização matemática, no qual os resultados observados empiricamente passaram a ser representados simbolicamente. Tal movimento confirma um dos objetivos da investigação: a de que as vivências e os artefatos semióticos podem favorecer a transição entre representações concretas e abstratas.

A coordenação entre esses registros favoreceu processos de conversão e tratamento semiótico, fundamentais para a compreensão conceitual das propriedades recursivas da sequência de Fibonacci e dos Números Metálicos. A escrita no quadro demonstra que os participantes passaram a reconhecer regularidades e relações estruturais entre os termos da sequência, deslocando-se de uma percepção empírica para uma compreensão mais abstrata e generalizante.

Portanto, as inferências realizadas a partir dos diálogos, ações e manipulações permitiram compreender que: os participantes desenvolveram progressivamente a percepção da recorrência de segunda ordem através do ladrilhamento da sequência de Ouro; os artefatos manipulativos favoreceram a visualização de padrões e regularidades desta sequência; os conflitos cognitivos impulsionaram processos de reorganização conceitual; houve coordenação entre diferentes registros semióticos fortalecendo os processos cognitivos importantes e a generalização de padrões (Brasil, 2017; Duval, 1995).

Sendo assim, o episódio validou as hipóteses formuladas na análise *a Priori* da tarefa 3, evidenciando uma experiência progressiva entre os ladrilhos metálicos, tabuleiro e observações de limitações em relação ao uso dos materiais. Os arcabouços teóricos favoreceram ambientes investigativos capazes de promover a construção compartilhada relacionadas às propriedades recursivas dos Números Metálicos.

6.4 Análise *a Posteriori* e validação do módulo IV

O Módulo 4 avançou em consonância com o planejamento previamente estabelecido, considerando a organização das tarefas progressivas, os objetivos propostos e as situações previstas na Análise *a Priori*. Durante seu desenvolvimento, buscou-se observar os diferentes

contextos e as categorias que emergiram das interações, dos discursos e das produções matemáticas dos participantes, atentando-se, especialmente, para as estratégias mobilizadas na identificação de regularidades e na construção de generalizações.

A atividade ocorreu entre os dias 25/04/2026 e 30/04/2026, tendo como temática “Generalização de Regras e Expressões Algébricas”, com ênfase na passagem das regularidades observadas nas representações concretas e numéricas para a elaboração e formalização de expressões algébricas.

Quadro 12 – Módulo 4 do curso de extensão (AVA/G-TERCOA)

04 Generalização de Regras e Expressões Algébricas (25/04/2026) (4h/a)

- 4.1 Exploração da generalização das propriedades das sequências recorrentes;
- 4.2 Introdução à formulação algébrica da recursividade, utilizando os artefatos como apoio semiótico;
- 4.3 Tarefas Didáticas Colaborativas entre os professores para ajudar na objetivação da regra $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, e outras com a mesma recursividade;
- 4.4 Debate e resolução coletiva de problemas relacionados a sequências numéricas recorrentes;
- 4.5 **Atividade Presencial:** vivência para formular leis de formação dos NM.
- 4.6 **Atividade Assíncrona:** Videoaula postada no ambiente AVA com quiz interativo para identificar e generalizar padrões de sequência, reforçando os conceitos algébricos ensinados. (6 h/a)

Fonte: dados da pesquisa.

A partir da mobilização com o tabuleiro concreto $1 \times n$ e dos ladrilhos com cores pré-definidas, avançou-se para uma compreensão mais espacial e estrutural do posicionamento dos ladrilhos na representação de outras Sequências Metálicas, fundamentando-se nas proposições de Benjamin e Quinn (2003). A atividade foi desenvolvida com doze participantes entre Pedagogos e professores de Matemática, organizados em grupos menores de trabalho (G1 e G2), favorecendo um ambiente colaborativo e investigativo.

A proposta concentrou-se inicialmente na validação das representações anteriormente construídas e, posteriormente, na introdução da Sequência de Prata como ampliação conceitual das discussões desenvolvidas ao longo do Curso de Extensão. Por meio da manipulação concreta dos ladrilhos e do tabuleiro, os participantes passaram a explorar novas possibilidades de composição, recorrência e organização espacial, favorecendo processos de investigação matemática e construção coletiva de significados.

Durante o desenvolvimento das tarefas, observou-se intensa mobilização de diferentes recursos semióticos, tais como gestos, linguagem oral, expressões simbólicas, argumentações

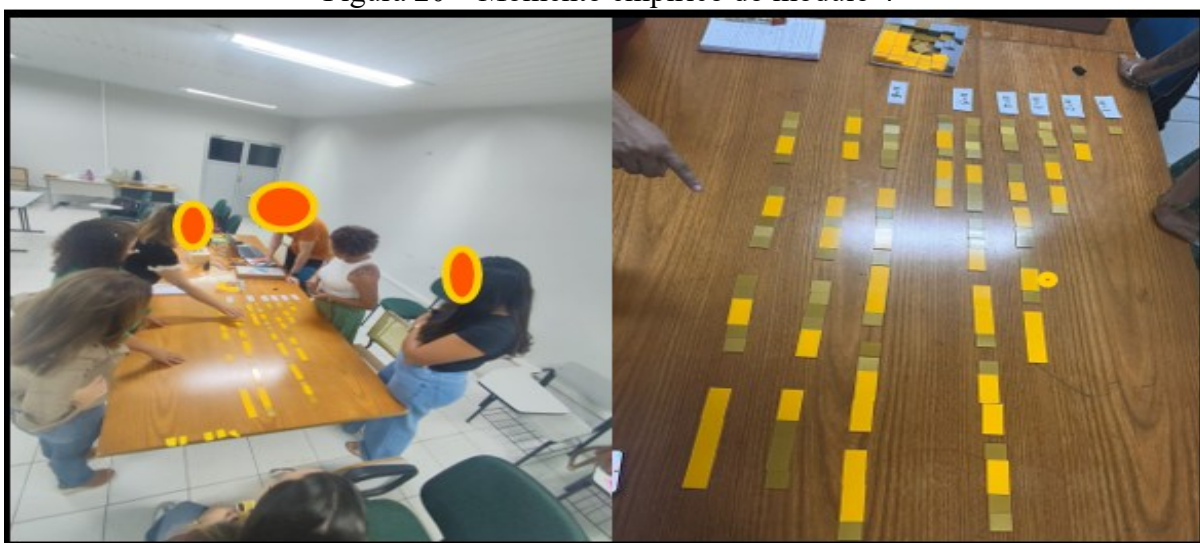
coletivas e reorganizações espaciais dos ladrilhos. Esses elementos delinearão o movimento metodológico do momento empírico e evidenciaram a constituição de um ambiente de aprendizagem pautado no diálogo, na problematização e na colaboração entre os sujeitos.

As mobilizações produzidas pelos participantes revelaram processos de exploração, formulação de conjecturas, validação de estratégias e reconhecimento de regularidades relacionadas às propriedades recursivas das sequências investigadas. Nesse contexto, a nova representação semiótica possibilitou aos sujeitos estabelecer relações entre composições concretas e estruturas matemáticas abstratas, favorecendo a visualização de padrões, a percepção de invariantes e o desenvolvimento de processos de generalização matemática.

De modo complementar, à luz da TRRS, percebeu-se a articulação entre diferentes registros de representação, como o figural, o numérico, o verbal e o algébrico. Essa coordenação favoreceu a conversão entre representações concretas e abstratas, ampliando o escopo das possibilidades de compreensão conceitual das propriedades fundamentais e recursivas das Sequências Metálicas.

A Figura 20 retrata momentos significativos, evidenciando diálogos, dúvidas, reorganizações e construções coletivas que emergiram ao longo do processo investigativo. Esses episódios demonstram que os saberes matemáticos foram sendo gradativamente materializados a partir das tensões cognitivas, das argumentações e dos processos de abstração mobilizados pelos participantes durante a manipulação empírica.

Figura 20 – Momento empírico do módulo 4



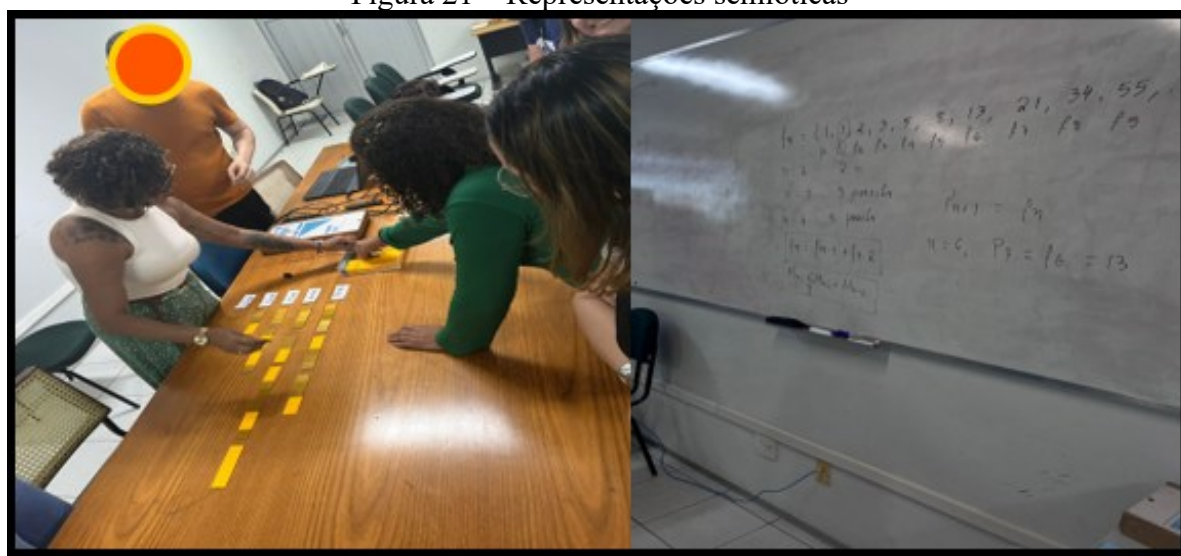
Fonte: dados da pesquisa.

Percebeu-se que, à medida que se avança nas manipulações com os artefatos, ora nos excertos anteriores com as barras de *Cuisenaire*, agora com os ladrilhos metálicos e tabuleiro

$1 \times n$, uma apropriação mais latente e uma transposição de um pensamento puramente aritmético começa a se transformar em pensamento algébrico.

A Figura 21 evidenciou momentos significativos da mobilização coletiva dos participantes durante a exploração das Sequências Metálicas por meio do tabuleiro concreto $1 \times n$ e dos ladrilhos manipulativos. As imagens revelaram que os sujeitos organizaram os ladrilhos em diferentes composições espaciais, buscando representar possibilidades combinatórias, recorrências e regularidades estruturais associadas às sequências investigadas.

Figura 21 – Representações semióticas



Fonte: dados da pesquisa.

Nas imagens, observou-se intensa utilização dos meios semióticos entre os participantes em torno da mesa de trabalho, evidenciada pelos gestos de apontamento, pelas reorganizações constantes dos ladrilhos e pelos diálogos estabelecidos. As imagens também permitem inferir que os participantes passaram a reconhecer propriedades fundamentais e recursivas dos NM a partir das diferentes configurações espaciais dos ladrilhos.

A organização linear das peças e a comparação entre distintas composições sugeriram a emergência de processos relacionados às propriedades comutativa e associativa da Sequência de Ouro. Esses episódios também validam uma das hipóteses formuladas na *Análise a Priori* da investigação: a de que as vivências favorecem a visualização das estruturas matemáticas abstratas, permitindo aos participantes estabelecer relações entre representações concretas e propriedades algébricas das sequências recorrentes.

De modo complementar, as figuras posteriores evidenciaram um avanço no processo de formalização matemática. Enquanto os participantes manipulavam os ladrilhos sobre o

tabuleiro, observou-se simultaneamente a sistematização das regularidades identificadas no quadro-branco, no qual apareceram registros numéricos, relações recursivas e representações simbólicas produzidas coletivamente durante a atividade.

Tomando-se outro trecho dos diálogos entre a PP e os participantes da investigação, faz-se necessário relatar o desenvolvimento de processos investigativos, argumentativos e generalizantes, reportados nos excertos a seguir:

PP: A gente trabalhou a adição, isso aqui é a adição, você tá vendo? O vinte e um é a soma dos dois últimos. Trabalhamos a razão, que é uma divisão. Encontramos aqui as razões, e elas encontraram a subtração. A gente estava sempre compondo na adição. Qual é o próximo número? O próximo número é a soma. O que falta é a subtração, né? É a sequência.
(Diálogos entre os sujeitos da pesquisa e a professora pesquisadora, 2026).

Essa coordenação entre registros, segundo a TRSS, favoreceu processos de tratamento e conversão semiótica, fundamentais para a compreensão conceitual das propriedades recursivas e combinatórias dessas estruturas. A PP pode inferir a respeito dos achados de pesquisa, as propriedades fundamentais dos NM. Os participantes não apenas manipularam os objetos concretos, mas passaram gradativamente a atribuíram significados matemáticos às representações produzidas, reconhecendo padrões, formulando conjecturas e validando estratégias de resolução.

P2: 1, 2, 4. Espera aí. E ele no meio também. Aqui... Aqui... 1, 2, 3... No meio, no fundo do meio. No meio. E tá faltando as duas pontas. Ou só cabe numa ponta?
P1: Aqui, uma ponta. 5, 5, 5. Esse aqui tá repetido. Esse aqui tá repetido. Bota pra cá. Tá repetido? Tava repetido.
P3: Duas antes. Antes. E duas depois, não? Pode ser. Duas depois também. Pode ser. Duas antes.
P4: Cadê? Tá. Porque é próximo da sequência. Tá espelhado direito. Esse aqui é o espelhado desse, né? Isso. Você pode fazer uma nova filazinha aqui embaixo.
(Diálogos entre os sujeitos da pesquisa e a professora pesquisadora, 2026).

As falas anteriores revelaram processos de percepção de simetria, equivalência estrutural, validação de estratégias e coordenação entre representações espaciais e numéricas, aspectos fundamentais para a compreensão das propriedades recursivas das Sequências Metálicas.

Inicialmente, a fala de P2, "1, 2, 4. Espera aí. E ele no meio também", demonstra um movimento de contagem, reorganização e verificação das possibilidades construídas no tabuleiro. O participante parece buscar sistematizar as configurações já encontradas, elucidando

preocupação com a completude das representações e com a identificação de novas possibilidades ainda não consideradas.

A continuação da fala, "Tá faltando as duas pontas. Ou só cabe numa ponta?", evidencia um processo de análise das posições possíveis dos ladrilhos no tabuleiro. Sob a perspectiva da TO, tal manifestação indica que o conhecimento matemático foi produzido a partir da manipulação concreta dos artefatos e dos espaços dialógicos estabelecidos entre os participantes com a PP.

A fala de P1, "Esse aqui tá repetido", revela um avanço importante relacionado ao "erro", traduzindo a maturidade cognitiva no diálogo. Esse momento auxiliou no processo de abstração e generalização de padrões (Brasil, 2017), pois os sujeitos começaram a distinguir a configuração matemática da simples aparência visual da construção.

De modo complementar, a fala de P3, "Duas antes. E duas depois também", sugere a percepção combinatória e as relações de simetria entre as composições construídas. O participante pareceu reconhecer padrões espaciais recorrentes no posicionamento dos ladrilhos, indicando a emergência de um pensamento estrutural associado às propriedades combinatórias da Sequência de Ouro.

A intervenção de P4, "Tá espelhado direito. Esse aqui é o espelhado desse, né?", constitui um dos momentos mais relevantes do diálogo, pois explicita a percepção de simetria entre as projeções combinatórias. Tal manifestação demonstra que os participantes passaram a reconhecer equivalências estruturais entre representações aparentemente distintas, mobilizando noções importantes para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Essa articulação entre registros favorece processos de tratamento e conversão semiótica, fundamentais para a compreensão das relações matemáticas presentes na atividade. Os participantes não apenas manipularam os ladrilhos, mas passaram gradativamente a interpretar as construções em termos de equivalência, repetição, simetria e regularidade estrutural.

Portanto, as evidências percebidas até aqui demonstram que as tarefas possibilitaram não apenas a manipulação concreta, mas também o desenvolvimento de processos investigativos e argumentativos, bem como a ampliação do espectro de compreensão dos participantes acerca das propriedades fundamentais, combinatórias e simétricas das Sequências Metálicas.

6.5 Análise *a Posteriori* e validação do módulo V

O módulo 5, penúltimo módulo destas evidências empíricas, avançou segundo o planejamento inicial, com organização prévia e analisando os contextos e as categorias observadas no decorrer do momento vivenciado por todos. Importante dizer que o trecho a seguir delinea a proposta didática que ocorreu no interstício compreendido entre 09/05/2026 e 16/05/2026 com a temática: Explorando a Relação Recursiva $M_n = kM_{n-1} + M_{n-2}$.

Quadro 13 – Módulo 5 do curso de extensão (AVA/G-TERCOA)

5 Explorando a Relação Recursiva $M_n = kM_{n-1} + M_{n-2}$ (09/05/2026) (4h/a)

5.1 Atividades para expandir as sequências e explorar propriedades fundamentais da soma, multiplicação, razões e proporções;

5.2 Uso simultâneo de diferentes artefatos (barras, ladrilhos e tabuleiros) para abordar a sequências;

5.3 Avaliação formativa por meio da observação e registro dos processos de ensino e aprendizagem;

5.4 Atividade Presencial: uso simultâneo de barras, ladrilhos e tabuleiros para ampliar a objetivação de sequências e encontrar o itinerário de transição entre os materiais; ladrilhamento de Prata e Bronze...

5.5 Atividade Presencial: Fórum de discussão coletivo. (6h/a).

Fonte: dados da pesquisa.

A partir da ampliação contextual relacionada às manipulações realizadas com o tabuleiro concreto $1 \times n$ e com os ladrilhos de cores pré-definidas, avançou-se para uma compreensão mais espacial, estrutural e recursiva das representações associadas às Sequências Metálicas, especialmente as Sequências de Prata e Bronze, em consonância com os pressupostos de Benjamin e Quinn (2003). A tarefa didática 05 foi desenvolvida com dez participantes, entre pedagogos e professores que lecionam matemática, organizados em grupos menores de trabalho (G1 e G2), favorecendo um ambiente colaborativo, investigativo e dialógico.

Inicialmente, a proposta concentrou-se na observação e validação das representações anteriormente construídas para a Sequência de Ouro, utilizando os materiais manipuláveis já explorados nas atividades precedentes. Posteriormente, ocorreu a introdução da Sequência de Prata como ampliação conceitual das discussões desenvolvidas ao longo do Curso de Extensão. Por meio da manipulação concreta dos ladrilhos, do tabuleiro e das barras de Cuisenaire, os participantes passaram a explorar novas possibilidades de composição, recorrência e organização espacial.

Durante o desenvolvimento da vivência, os sujeitos conseguiram identificar limites e potencialidades de determinados materiais em relação às representações propostas, evidenciando momentos de inflexão metodológica que impulsionaram processos de transição entre os diferentes artefatos semióticos. Esse movimento favoreceu a investigação matemática, a problematização e a construção coletiva de significados em torno das propriedades recursivas das Sequências Metálicas.

Figura 22– Momentos de inflexões acerca das representações diversas



Fonte: dados da pesquisa.

Observou-se na Figura 22 intensa mobilização de recursos semióticos, tais como gestos, linguagem oral, expressões simbólicas, argumentações coletivas e reorganizações espaciais dos ladrilhos. Tais elementos evidenciaram a constituição de um ambiente de aprendizagem fundamentado na colaboração, na experimentação e na significação dos conceitos matemáticos envolvidos.

Nesse contexto, as novas representações possibilitaram aos participantes estabelecer relações entre composições concretas e estruturas matemáticas abstratas, favorecendo a visualização de padrões, a percepção de invariantes e o desenvolvimento de processos de generalização matemática. Destacou-se, ainda, o movimento de inflexão ocorrido durante a composição das Sequências de Prata e Bronze com as barras de Cuisenaire, momento em que os participantes precisaram reorganizar estratégias, validar hipóteses e reinterpretar as relações recursivas construídas anteriormente.

PP: Estou perguntando se... Com este material... Você vai determinar o uso de todas as peças?

P1: Não. Ele é limitado. Ele é limitado...

P2: Ele faria aquela outra forma. Que você deu só o dourado junto.
 Não, para a outra cor. Aquela outra que a gente fez. Que era só o dourado.
 P3: Para Fibonacci, dá. Dá, mas para a sequência de prata... Já muda? Para a sequência de ouro, dá. Porque o fundamental... Na sequência... Para você chegar nessa sequência... Você precisa... De duas peças de mesma dimensão.
 P1: De cores diferentes. Mas a peça... Não necessariamente tem que ser... Ouro e prata. Pode ser vermelho e azul.
 P6: Aqui é a dimensão. Por isso que o próprio material... Se apresenta com essas outras cores. Por conta das diversas... Sequências que existe.
 (Diálogos entre os sujeitos da pesquisa e a professora pesquisadora, 2026).

O diálogo evidenciou um movimento coletivo de reflexão, problematização e significação matemática mediado pelos materiais utilizados durante a atividade. As falas dos participantes demonstraram que o processo de manipulação concreta fortaleceu não apenas a construção de representações das Sequências Metálicas, mas também a percepção dos limites, potencialidades e adaptações necessárias aos materiais empregados.

Inicialmente, observa-se que P1 reconhece a limitação do material ao afirmar que "ele é limitado", indicando uma percepção crítica acerca das possibilidades de representação oferecidas pelas barras utilizadas. Essa compreensão evidenciou um avanço cognitivo no processo de abstração, pois os participantes deixaram de apenas manipular os materiais e passaram a analisar suas propriedades estruturais em relação às sequências investigadas.

Na continuidade do diálogo, P2 e P3 estabelecem relações entre as representações anteriormente construídas para a Sequência de Ouro e as novas tentativas de composição da Sequência de Prata. Ao afirmar que "para Fibonacci, dá", mas que "para a sequência de prata já muda", P3 compreendeu que diferentes sequências recorrentes exigem reorganizações estruturais específicas nos materiais manipuláveis. Tal percepção demonstrou um movimento de transição entre a representação concreta e a abstração, favorecendo a compreensão das diferenças algébricas e recursivas entre as Sequências Metálicas.

Outro aspecto relevante emerge quando P3 destaca que, "para chegar nessa sequência", são necessárias "duas peças de mesma dimensão". Nesse momento, os participantes passaram a compreender que a regularidade recursiva não está necessariamente associada à cor das peças, mas às relações dimensionais e estruturais estabelecidas entre elas. Essa compreensão é reforçada por P1 ao afirmar que "não necessariamente tem que ser ouro e prata. Pode ser vermelho e azul", deslocando o foco da característica visual para a função matemática desempenhada pelos elementos na composição da sequência.

A fala de P6 aprofundou essa percepção ao destacar que "aqui é a dimensão", indicando que as cores assumem um papel secundário diante das propriedades matemáticas mobilizadas. Além disso, ao mencionar que o material "se apresenta com essas outras cores por conta das

diversas sequências que existem", o participante evidenciou um processo de generalização, reconhecendo que diferentes configurações cromáticas podem representar distintas estruturas recursivas.

A Figura 23 elucidou um contexto de aprendizagem colaborativa no qual os participantes encontram-se organizados em torno da manipulação concreta de ladrilhos e tabuleiro $1 \times n$ utilizados na representação das Sequências de Prata.

Figura 23 – Momentos de variadas representações



Fonte: dados da pesquisa.

Observou-se a disposição sequencial das peças sobre o tabuleiro $1 \times n$, sugerindo um movimento investigativo voltado à identificação de padrões recursivos, regularidades numéricas e possibilidades de composição matemática.

No primeiro plano da imagem, percebeu-se intensa interação entre os participantes durante a organização espacial dos ladrilhos, a distribuição das peças em diferentes agrupamentos sugerindo tentativas de representação de recorrências matemáticas associadas às Sequências de Ouro e Prata, favorecendo a visualização concreta das relações aditivas e combinatórias presentes nas tarefas didáticas propostas.

Na segunda parte da imagem, destaca-se um participante realizando registros escritos simultaneamente à manipulação dos materiais, evidenciando a articulação entre representação concreta, linguagem matemática e sistematização simbólica. Esse movimento revela um processo de conversão entre diferentes registros de representação, (Duval, 1995) no qual as construções realizadas com os ladrilhos passando a ser reinterpretadas por meio de registros matemáticos.

Além disso, a presença de peças de diferentes cores e dimensões reforçou a intencionalidade didática da tarefa, permitindo aos participantes explorarem propriedades recursivas, equivalências estruturais e possibilidades combinatórias associadas às Sequências Metálicas.

A vivência evidenciou que esses artefatos semióticos constituem importantes recursos didático-pedagógicos para o desenvolvimento do pensamento algébrico e recursivo, favorecendo a compreensão das propriedades estruturais das Sequências de Ouro, Prata, Bronze e demais sequências da Família dos Números Metálicos.

Embora as barras de Cuisenaire tenham apresentado limitações para representar sequências mais complexas, a articulação com o tabuleiro $1 \times n$ e os ladrilhos metálicos ampliou as possibilidades de visualização, coordenação e conversão entre representações concretas e abstratas, potencializando a construção de significados matemáticos.

Figura 24 – Registro de representação matemática

$$P_n = 2(P_{n-1}) + P_{n-2}$$

$$P_1 = 2(1 + 1) = 4$$

$$P_2 = 2(P_1) + P_1 = 6$$

$$P_3 = 2(P_2) + P_1 = 10$$

$$P_4 = 2(P_3) + P_2 = 16$$

$$P_5 = 2(P_4) + P_3 = 24$$

$$P_6 = 2(P_5) + P_4 = 36$$

$$P_7 = 2(P_6) + P_5 = 52$$

$$P_8 = 2(P_7) + P_6 = 70$$

$$P_9 = 2(P_8) + P_7 = 92$$

$$P_{10} = 2(P_9) + P_8 = 116$$

Fonte: dados da pesquisa.

A Figura 24 acima chancela a identificação de uma lei recursiva associada às Sequências Metálicas, na qual cada termo é construído a partir da combinação de termos anteriores. A anotação da relação de recorrência demonstra que os participantes passaram a compreender a estrutura algébrica subjacente às composições realizadas com os ladrilhos e tabuleiros, avançando da simples manipulação material para a generalização e formalização matemática mais elevada.

6.6 Análise *a Posteriori* e validação do módulo VI

O último módulo correspondeu ao momento de fechamento das discussões e sistematização dos *feedbacks* relacionados às percepções, análises semióticas, temáticas e visuais produzidas ao longo das vivências. Essa etapa configurou-se como momento de validação da pesquisa, uma vez que possibilitou verificar os desdobramentos de cada módulo, suas implicações diante das manipulações empíricas e as contribuições para os processos de ensino-aprendizagem desenvolvidos durante o Curso de Extensão.

Nessa perspectiva, buscou analisar se as ações planejadas inicialmente avançaram conforme a organização previamente estruturada, considerando os contextos, as categorias analíticas e os fenômenos observados ao longo das experiências vivenciadas coletivamente pelos participantes. Desse modo, a etapa final possibilitou compreender os impactos positivos decorrentes das vivências colaborativas e da mobilização dos artefatos semióticos utilizados.

Importa considerar que o trecho, compreendido entre os dias 16/05/2026 e 23/05/2026, foi desenvolvido sob a temática: “Reflexão Metodológica e Formação Docente” e delineou-se como proposta didática correspondente a esse momento conclusivo da investigação.

Quadro 14 - Módulo 6 do curso de extensão (AVA/G-TERCOA)

6 Reflexão Metodológica e Formação Docente (23/05/2026) (4/h/a)

- 6.1 Revisão dos processos de ensino-aprendizagem encontrados durante os módulos anteriores;
- 6.2 Discussão no planejamento de aulas, *a posteriori*;
- 6.3 Observações acerca das tarefas didáticas aplicadas em contexto acadêmico;
- 6.4 Feedback e avaliação final, enfatizando a construção coletiva do conhecimento docente;
- 6.5 **Atividade Presencial:** planejamento coletivo e avaliação formativa
- 6.6 **Atividade Online:** sugestão de planos de aula, seguido ideias e inserindo a proposta de materiais manipulativos. (6 h/a)

Fonte: dados da pesquisa.

O planejamento do módulo “Reflexão Metodológica e Formação Docente” elucidou uma proposta formativa de caráter reflexivo e colaborativo, voltada à consolidação dos conhecimentos construídos ao longo de todo o Curso de Extensão. A organização das atividades demonstrou uma preocupação não apenas com a retomada dos conteúdos desenvolvidos nos módulos anteriores, mas também com a análise crítica vivenciadas pelos participantes durante o processo.

Inicialmente, a revisão do processo de ensino-aprendizagem possibilitou aos sujeitos revisitar as experiências desenvolvidas ao longo do curso, favorecendo movimentos de reflexão e autorreflexão sobre as dificuldades e potencialidades desenvolvidas por meio das tarefas didáticas progressivas mediadas pelos artefatos semióticos, as barras de Cuisenaire, tabuleiro $1 \times n$ e ladrilhos 1×1 e 1×2 . Esse módulo contribuiu para a sistematização das compreensões relacionadas às propriedades fundamentais, algébricas e recursivas das Sequências Metálicas.

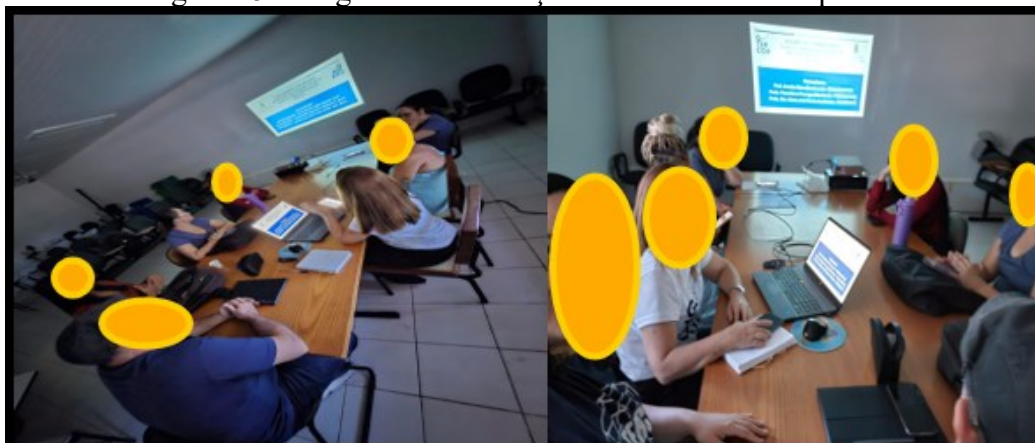
A discussão sobre o planejamento de aulas, realizada *a Posteriori*, evidenciou a preocupação em promover a articulação entre os conhecimentos evidenciados em contexto investigativo e a melhoria da prática docente dos participantes. Tal encaminhamento favoreceu processos de transposição didática, permitindo que os professores refletissem sobre possibilidades metodológicas de aplicação dos conteúdos em diferentes contextos educacionais.

As observações provenientes das tarefas didáticas desenvolvidas em contexto acadêmico evidenciaram aspectos semióticos, temáticos e visuais relevantes para a análise dos processos de ensino e aprendizagem. Durante as vivências, os participantes foram convidados a refletir sobre os impactos das tarefas propostas, as potencialidades e os limites dos materiais manipuláveis empregados, bem como sobre as contribuições desta investigação para os processos de visualização, compreensão, coordenação de registros e generalização de padrões. Essas reflexões favoreceram a construção coletiva de significados acerca das propriedades fundamentais e recursivas das Sequências Metálicas, subsidiando a análise *a posteriori* e a validação da pesquisa.

O momento destinado ao *feedback* e à revisita aos módulos anteriores reforçando a dimensão colaborativa da formação, enfatizando o desenvolvimento coletivo do conhecimento docente e a valorização das experiências compartilhadas entre pares. Nesse contexto, a avaliação assume caráter formativo e reflexivo, ultrapassando perspectivas meramente classificatórias e priorizando a análise das aprendizagens construídas ao longo do percurso investigativo.

As tarefas assíncronas desempenharam papel fundamental na constituição do percurso formativo do curso de extensão, articulando planejamento, acompanhamento e avaliação formativa. Integradas às atividades presenciais, favoreceram a argumentação, a reflexão crítica e a elaboração de estratégias didático-pedagógicas, consolidando um ambiente virtual de aprendizagem voltado à construção colaborativa do conhecimento matemático.

Figura 25 – Registro de validação dos momentos empíricos



Fonte: dados de pesquisa.

Complementarmente, a elaboração coletiva de planos de aula possibilitou a socialização das experiências docentes, a validação compartilhada de propostas metodológicas e a troca de *feedbacks* entre os participantes. Sob a perspectiva da Engenharia Didática, essa dinâmica contribuiu para a continuidade do processo investigativo, enquanto, à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, favoreceu a explicitação, a comunicação e a coordenação de diferentes formas de representação mobilizadas durante as atividades, fortalecendo a compreensão dos conceitos matemáticos explorados ao longo do curso de extensão.

A Figura 25 evidenciou o momento de validação dos encontros empíricos desenvolvidos ao longo do curso de extensão, revelando um ambiente formativo pautado na colaboração, na reflexão metodológica e na socialização coletiva das experiências vivenciadas pelos participantes.

Seguem, a partir de então, as observações dos módulos por meio de algumas transcrições dos diálogos entre a PP e os participantes deste último momento empírico:

PP: Pronto, então, o que a gente está propondo a validação desta pesquisa, uma pesquisa de mestrado acadêmico do IFCE, Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Vamos analisar, módulo a módulo, tarefa a tarefa, que foi aplicada, porque é muito subjetivo, lapidar a fala, na hora da tomada de consciência... na hora da aprendizagem... algo muito subjetivo e individual, cada um aprende de um jeito...

P1: Esse curso propôs uma abordagem totalmente diferenciada, essa abordagem na perspectiva do ladrilhamento, a gente manipulou materiais concretos para compreender conceitos abstratos, isso traz uma nova perspectiva, tanto para o ensino quanto para a aprendizagem...

P1: Quem estava aqui no dia que a gente fez um dos módulos, a gente começou utilizando um material, e aí à medida que... Que foi a escala, né? É, a gente começou utilizando as barras de Cuisenaire, e a gente representou a sequência até um determinado momento, e aí a gente percebeu que a partir de um determinado momento, ela começava a ficar inviável prosseguir...e aí a gente foi feito uma nova

proposta para fazer o número de ouro, para fazer o número de ouro, não, para fazer o número de prata. Aí trocamos o material?...

P2: Isso, quando foi para fazer o número de prata, a gente percebeu que o material não alcançava aquela representação, né?

P4: Bem, a gente chama assim, os ladrilhos, né? Principalmente quando ia representar a questão que dava frações, né? A escala de ... foi um pouco mais fácil para quem estava no início, só que chegou um ponto em que o tipo de trabalho mental que estava sendo feito, ele foi aumentando a proporção e chegou um ponto em que a escala não dava mais conta e quando a gente tinha que representar ali as variações, daquele número de possibilidades, os ladrilhos foram mais eficientes do que a escala...Principalmente por uma questão da visualização, pela quantidade de elementos que tinham os ladrilhos...

P6: Nisso o ladrilho foi mais eficiente, mas os dois materiais são bem interessantes, porque eu não sou de matemática, como algumas pessoas já sabem. E eu estava pensando em pintar o material dourado para fazer essa representação, mas aí com a escala de Cuisenaire essa representação fica mais fácil.

(Diálogos entre os sujeitos da pesquisa e a professora pesquisadora, 2026).

A validação dos Módulos 1, 2 e 3 apresentados no excerto acima evidenciou um rico movimento de reflexão coletiva acerca dos processos de ensino-aprendizagem desenvolvidos ao longo do curso de extensão, especialmente no que se refere à utilização dos dois materiais — as barras de Cuisenaire e os ladrilhos metálicos — como auxiliares da compreensão de conceitos matemáticos abstratos. As falas dos participantes revelaram um ambiente formativo pautado na problematização, na investigação colaborativa e na validação crítica das experiências empíricas vivenciadas durante os módulos da pesquisa.

Inicialmente, a fala da PP destaca a complexidade inerente aos processos investigativos, ao reconhecer que as percepções acerca dos fenômenos encontrados durante as vivências constituem-se de maneira subjetiva e individual. Tal posicionamento evidenciou uma compreensão de que as aprendizagens são inerentes às singularidades dos sujeitos, reconhecendo que os processos de significação matemática ocorrem de formas distintas entre os participantes.

Na continuidade do diálogo, P1 enfatiza o caráter inovador da proposta metodológica ao afirmar que o curso proporcionou "uma abordagem totalmente diferenciada", baseada na manipulação de materiais concretos para compreender conceitos abstratos. Essa percepção evidenciou que os materiais auxiliaram os processos de representação concreta e formalização matemática.

As falas seguintes revelam um importante movimento de inflexão metodológica ocorrido durante as atividades. Ao relatarem que as barras de Cuisenaire possibilitaram inicialmente a representação da Sequência de Ouro, mas se tornaram inviáveis em determinado momento da construção da Sequência de Prata, os participantes perceberam os limites

estruturais e o itinerário de transição entre os dois artefatos em relação às demandas cognitivas e representacionais da tarefa.

P2 reforça essa percepção ao afirmar que o material "não alcançava aquela representação", indicando que os participantes passaram a compreender que diferentes Sequências Metálicas exigem distintos modos de representação e organização espacial. Nesse sentido, a substituição das barras pelos ladrilhos não ocorreu apenas como mudança instrumental, mas como necessidade epistemológica vinculada à compreensão das propriedades recursivas investigadas.

A fala de P4 aprofundou essa análise ao destacar que os ladrilhos foram mais eficientes especialmente nas representações envolvendo frações e múltiplas possibilidades combinatórias. Observa-se que o participante associou a eficiência do material à ampliação das possibilidades de visualização e manipulação espacial, reconhecendo o terceiro objetivo específico do início desta dissertação, quando se propõe a discutir a importância das seis vivências para o processo de ensino-aprendizagem das propriedades fundamentais e recursivas dos Números Metálicos em contexto acadêmico. Tal expressão exigiu maior suporte visual e estrutural para a organização do pensamento.

Além disso, quando P4 menciona que "o tipo de trabalho mental foi aumentando a proporção", evidencia-se um movimento gradual de complexificação cognitiva, no qual os participantes passaram da manipulação concreta inicial para níveis mais elevados de abstração, generalização e raciocínio recursivo, segundo a BNCC (Brasil, 2017).

Por fim, a fala de P6 revela um aspecto relevante relacionado à acessibilidade e à democratização do conhecimento matemático. Mesmo não sendo formado em Matemática, o participante reconhece que as vivências e os materiais empregados ajudaram na compreensão das representações propostas, especialmente as barras de Cuisenaire. Essa percepção evidenciou o potencial inclusivo dos artefatos semióticos no favorecimento da visualização matemática e da construção conceitual em contextos formativos heterogêneos.

Faz-se saber que ocorreram outras validações durante este espaço dialógico do último módulo; segue trecho das falas:

P5: A gente trabalhou... Estão vendo aqui a forma, né? A recursividade, entendendo exatamente que Fibonacci...Essa sequência, ela era construída a partir do terceiro, somando os dois anteriores, imediatamente anteriores. As propriedades aditivas, a gente trabalhou a comutatividade, a associatividade. Nós visualizamos as propriedades quando ladrilhamos.

P3: Tanto com as barras, a gente visualizou, como também com os ladrilhos. Vocês puderam perceber que 3 mais 2, que dava 5, poderia também ser o contrário. E era mesmo o resultado. E era mais uma combinação diferente. Então, a gente percebeu as

propriedades aditivas fundamentais. E a gente percebeu a recursividade da própria lei de formação da sequência de Fibonacci.

P1: A sequência de ouro e a sequência de Fibonacci são a mesma recursividade, a mesma regra, vamos dizer assim.

P5: E foi tudo percebido. Aí, trabalhamos na tarefa 3. Eu acho que vocês lembram. Eu quero que vocês também comentem um pouquinho sobre.

(Diálogos entre os sujeitos da pesquisa e a professora pesquisadora, 2026).

Inicialmente, P5 relembra a recursividade da sequência de Fibonacci ao perceber que cada termo era construído "a partir do terceiro, somando os dois anteriores". Essa fala evidenciou que os sujeitos conseguiram identificar a estrutura da lei de formação recursiva da sequência, avançando da experimentação concreta para a compreensão de regularidades matemáticas mais abstratas.

Além disso, P5 destacou que as propriedades aditivas, como a comutatividade e a associatividade, foram trabalhadas e visualizadas durante o processo de ladrilhamento. Essa observação demonstra que os participantes não apenas executaram construções concretas, mas conseguiram reconhecer propriedades algébricas fundamentais presentes nas composições realizadas com os materiais manipuláveis.

Na sequência, P3 reforçou a importância dos artefatos semióticos ao afirmar que tanto as barras de Cuisenaire quanto os ladrilhos possibilitaram visualizar que "3 mais 2 dava 5" e que "poderia também ser o contrário". Tal percepção evidencia a compreensão da propriedade comutativa da adição a partir da manipulação concreta dos materiais, favorecendo processos de objetivação e significação matemática. Ao reconhecer que diferentes combinações conduziam ao mesmo resultado, os participantes ampliaram sua percepção acerca das relações estruturais presentes na formação da sequência.

Quando P1 afirma que "a sequência de ouro e a sequência de Fibonacci são a mesma recursividade", observou-se um movimento importante de generalização matemática. O participante percebeu que ambas as sequências compartilham a mesma estrutura recursiva, diferenciando-se apenas pelas representações simbólicas e pelas adaptações algébricas utilizadas. Essa compreensão evidenciou um desenvolvimento da abstração e comparação estrutural entre diferentes Sequências Metálicas.

Os espaços dialógicos e a validação dos módulos prosseguem, com novas inferências importantes:

PP: Isso aí é outra representação. O apontar, o erro, assim, olha o que está faltando. Quando vocês perceberam que estava faltando representação, está entendendo? Dificuldades, isso tudo faz parte.

P3: Engraçado que a gente tenta até descobrir por que que não, né? É. Aí até a gente voltar para a primeira barrinha só, para o primeiro cubinho, até a gente perceber que

só tem uma cor. Porque até então você acha que pode.

P5: É engraçado. Onde há o momento de esclarecimento. O que mexe com as questões cerebrais da gente, que a gente bota realmente para funcionar, né? É. Esse negócio de arrumar essas sequências mexe demais com a cabeça da gente.

P5: Mas a questão é que o material que está sendo colocado, os dois materiais, e as sequências que foram colocadas, a gente chegou, se eu não me engano, no ladrilhamento de bronze, não foi? No último sábado, né? O que foi colocado não inviabilizou o porquê você é pedagogo. Até acredito que, pelo fato de a gente trabalhar com criança e com muito material, a gente tinha aquela facilidade de manipulação, de não ter vergonha de ousar, de ousar e errar...

(Diálogos entre os sujeitos da pesquisa e a professora pesquisadora, 2026).

Inicialmente, a fala da Professora-Pesquisadora (PP) destacou que "o erro" e a percepção da ausência de determinadas representações fazem parte do próprio processo investigativo. Tal posicionamento evidenciou uma concepção de ensino centrado na aprendizagem reflexiva, na qual as limitações encontradas durante a manipulação dos materiais favorecem movimentos de revisão, reorganização de estratégias e tomada de consciência matemática.

Na continuidade do diálogo, P3 demonstrou um importante movimento de investigação conceitual ao afirmar que os participantes tentavam "descobrir por que que não". Essa fala evidenciou que as dificuldades encontradas impulsionaram processos de análise, validação e busca por justificativas matemáticas para as limitações observadas nas representações. Quando o participante mencionou a necessidade de "voltar para a primeira barrinha" e percebeu que "só tem uma cor", evidenciou-se um movimento de retorno às estruturas fundamentais da sequência, favorecendo o processo de amadurecimento algébrico.

A fala de P5 aprofundou essa percepção ao associar o momento de esclarecimento a um intenso movimento cognitivo, destacando que a organização das sequências "mexe demais com a cabeça da gente". Tal observação evidenciou que as tarefas propostas mobilizaram significativamente os processos de raciocínio, visualização, generalização e resolução de problemas, exigindo dos participantes constante reorganização mental diante das situações investigadas.

Além disso, P5 ressalta que os materiais e as sequências trabalhadas, incluindo o ladrilhamento de Bronze, não inviabilizaram a participação dos pedagogos no desenvolvimento das tarefas. Essa observação revelou o potencial inclusivo da proposta metodológica, uma vez que os artefatos semióticos favoreceram a participação de sujeitos com diferentes formações acadêmicas e experiências profissionais.

Ao afirmar que os pedagogos possuíam maior "facilidade de manipulação" e menos "vergonha de ousar e errar", o participante evidenciou que o ambiente colaborativo construído durante o curso de extensão favoreceu a experimentação, a criatividade e a liberdade

investigativa. Nesse contexto, o "erro" deixa de ser entendido como falha e passa a constituir-se como elemento formativo essencial.

A validação dos objetivos específicos ocorreu conforme apresentado nos excertos anteriores e posteriores, evidenciando um rico movimento coletivo acerca do processo de ensino-aprendizagem consubstanciado pelos momentos empíricos. As falas dos participantes revelaram um ambiente constitutivo de saberes pautado na problematização, na investigação colaborativa e na validação crítica das experiências empíricas vivenciadas durante toda a pesquisa.

As interações demonstram que a manipulação concreta, associada à problematização coletiva, favoreceu a elaboração de um ambiente investigativo pautado na reflexão metodológica, na validação de hipóteses da Análise *a Priori* e na ressignificação das práticas de ensino-aprendizagem das propriedades fundamentais e recursivas dos NM com professores que lecionam matemática em *locus* acadêmico.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foi desenvolvida uma investigação acerca da Família dos Números Metálicos, articulando a exploração de suas propriedades fundamentais e recursivas aos pressupostos teórico-didáticos da Engenharia Didática (ED) e da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), bem como a outros referenciais que contribuíram para as Análises *a Priori* e *a Posteriori*. Esses aportes permitiram ressignificar conhecimentos matemáticos e didáticos produzidos ao longo da investigação, corroborando com a coordenação e a conversão entre diferentes registros de representação semiótica.

A Engenharia Didática constituiu o eixo estruturante desta pesquisa, orientando o percurso investigativo desde as Análises Preliminares até a Análise *a Posteriori* e Validação. Sua orquestração possibilitou articular fundamentação teórica, planejamento das tarefas didáticas, identificação de lacunas, experimentação e análise crítica dos fenômenos observados. Nesse percurso, as barras de Cuisenaire, o tabuleiro $1 \times n$ e os ladrilhos configuraram-se como artefatos semióticos auxiliares na compreensão de conceitos abstratos, possibilitando sua visualização, representação e formalização.

Ao longo dos seis módulos vivenciados no curso de extensão, observou-se que os participantes mobilizaram diferentes registros de representação semiótica, articulando discursos, representações concretas, numéricas e simbólicas e avançando em direção às formalizações algébricas durante a resolução das tarefas propostas. Os diálogos e as produções dos participantes elucidaram processos de significação matemática, permitindo reconhecer regularidades, compreender propriedades fundamentais e recursivas das sequências investigadas e estabelecer relações entre o concreto e o abstrato.

As análises revelaram, ainda, que os momentos empíricos, auxiliados pela manipulação dos materiais, favoreceram a compreensão de propriedades aditivas, como a comutatividade e a associatividade, evidenciando que diferentes composições podem conduzir aos mesmos resultados matemáticos. Os participantes também identificaram que as Sequências de Ouro, Prata e Bronze compartilham uma estrutura recursiva, embora demandem reorganizações específicas dos materiais para suas respectivas representações concretas.

Um dos resultados mais significativos emergiu quando os próprios participantes reconheceram os limites representacionais de determinados materiais. Longe de constituírem apenas obstáculos, essas limitações desencadearam processos de reorganização das estratégias, transição entre artefatos semióticos e reformulação dos procedimentos adotados, fomentando a compreensão das estruturas abstratas e sua posterior formalização.

Nesse ínterim, o erro, as dúvidas e a necessidade de rever procedimentos assumiram papel peculiar durante as vivências, desencadeando inúmeros questionamentos, evidenciados na Seção 6 desta dissertação. Esses momentos impulsionaram a investigação, a argumentação e a validação coletiva das ideias matemáticas produzidas ao longo das tarefas progressivas.

A pesquisa contou com 15 professores que lecionam Matemática na Educação Básica, entre pedagogos e licenciados em Matemática, que aceitaram participar da investigação e assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), conforme aprovação do Comitê de Ética em Pesquisa do IFCE (CEP/IFCE). As vivências desenvolvidas fortaleceram processos relacionados à visualização, à compreensão, à argumentação e à formalização das propriedades dos Números Metálicos, evidenciando tanto a construção coletiva do conhecimento quanto possibilidades de desenvolvimento profissional dos docentes.

No que concerne aos objetivos específicos da pesquisa, sua retomada nas Considerações Finais permite confrontá-los com os resultados produzidos e evidenciar em que medida foram alcançados. O primeiro objetivo “analisar as categorias matemáticas, históricas e epistemológicas da Família dos Números Metálicos”, contemplando suas propriedades fundamentais e os teoremas associados às sequências recorrentes foi contemplado, sobretudo, nas Análises Preliminares.

A revisão da literatura e os estudos históricos, epistemológicos e matemáticos permitiram situar a Família dos Números Metálicos no contexto do ensino da Matemática, evidenciando suas propriedades e estruturas recorrentes, bem como lacunas relacionadas à sua presença nos currículos prescritos e nas pesquisas direcionadas à Educação Básica. Tais lacunas teórico-metodológicas reforçaram a relevância e justificaram o desenvolvimento desta investigação.

O segundo objetivo “desenvolver um curso de extensão, estruturado à luz da Engenharia Didática”, composto por seis tarefas progressivas auxiliadas pelos materiais manipulativos (barras de Cuisenaire, ladrilhos e tabuleiro) concretizou-se por meio do Curso de Extensão "Sequências Numéricas Recorrentes para a Educação Básica". Estruturadas à luz da ED e subsidiadas por outros pressupostos teóricos que contribuíram para analisar e validar as vivências, as seis tarefas constituíram ambientes investigativos, colaborativos e reflexivos, nos quais a Professora-Pesquisadora (PP) e os 15 professores participantes desenvolveram coletivamente representações concretas, numéricas e algébricas, favorecendo a compreensão das propriedades fundamentais e recursivas das Sequências de Ouro, Prata e Bronze.

Quanto ao terceiro objetivo “discutir a importância das seis vivências para o processo de ensino-aprendizagem das propriedades fundamentais e recursivas dos Números Metálicos em contexto acadêmico”, as análises das produções, dos discursos e das estratégias mobilizadas durante as tarefas permitiram compreender as contribuições e também os limites das situações desenvolvidas. As vivências favoreceram a articulação entre os materiais manipuláveis e diferentes registros de representação, possibilitando aos participantes reconhecer regularidades, formular conjecturas, rever procedimentos e avançar na compreensão e formalização das propriedades investigadas.

Desse modo, a retomada dos objetivos específicos evidencia sua articulação com as diferentes fases da Engenharia Didática e permite compreender como cada etapa contribuiu para o desenvolvimento da investigação. As Análises Preliminares subsidiaram a compreensão histórica, epistemológica, matemática e didática dos Números Metálicos; a Concepção e Análise *a Priori* orientou a elaboração e a antecipação das seis tarefas; a Experimentação possibilitou vivenciar as situações didáticas e produzir os dados; e a Análise *a Posteriori* e Validação permitiu confrontar o previsto com o observado durante o processo de ensino-aprendizagem das propriedades fundamentais e recursivas dos NM.

A validação da investigação ocorreu, portanto, de forma processual, mediante o confronto entre as Análises *a Priori* e *a Posteriori*, conforme preconiza a ED. Esse movimento, elucidado módulo a módulo, evidenciou como os participantes mobilizaram diferentes registros de representação semiótica, desenvolveram estratégias e estabeleceram relações entre conceitos abstratos e suas representações concretas. Os resultados encontrados dialogaram com os pressupostos da TRRS e forneceram elementos sustentáveis para o alcance dos objetivos propostos na pesquisa.

Nesse sentido, pode-se inferir que o Curso de Extensão, estruturado à luz da Engenharia Didática e mediado pelas barras de *Cuisenaire*, pelo tabuleiro $1 \times n$ e pelos ladrilhos, favoreceu o processo de ensino-aprendizagem das propriedades fundamentais e recursivas dos Números Metálicos. A articulação entre os materiais e os diferentes registros de representação semiótica possibilitou ampliar as formas de visualizar, representar, interpretar e formalizar as estruturas matemáticas investigadas, aproximando gradativamente as representações concretas das generalizações algébricas.

No mais, este estudo não se encerra em si mesmo; ao contrário, abre novas possibilidades de investigação acerca da utilização de artefatos semióticos no ensino de Matemática. Os resultados obtidos reforçam a relevância de práticas fundamentadas na

colaboração, na problematização e na investigação matemática, contribuindo para ampliar as discussões acerca da Família dos Números Metálicos, de suas propriedades e das potencialidades pedagógicas dos materiais manipuláveis no ensino da Matemática.

REFERÊNCIAS

- ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. Engenharia didática: evolução e diversidade didactic engineering: evolution and diversity. **REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática**, [s. l.], v. 7, n. 2, p. 22-52, fev. 2012.
- ALMOULOUD, S. D. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: EdUFPR, 2007.
- ALVES, F. R. V. A vertente francesa de Estudos da Didática Profissional: implicações para a atividade do professor de Matemática. **Vidya**, [s. l.], v. 39, n. 1, p. 255-275, jun. 2019.
- ALVES, F. R. V. Didática de matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. **Interfaces da Educação**, Campo Grande, v. 7, n. 21, p. 131-150, jan. 2016.
- ALVES, F. R. V. Engenharia didática para a generalização da sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura. **Educação Matemática Pesquisa**, [s. l.], v. 18, n. 1, p. 61-93, jan. 2016.
- ALVES, F. R. V. Engenharia Didática para a s-Sequência Generalizada de Jacobsthal e a (s,t)Sequência Generalizada de Jacobsthal: análises preliminares e a priori. **Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, [s. l.], v. 13, n. 51, p. 83-106, dez 2017.
- ALVES, F. R. V. *et al.* Abordagem combinatória para a sequência Fibonacci, Tribonacci, Tetranacci, Pentanacci etc. e a noção de tabuleiro. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 23, n. 1, p. 182-204, jan. 2023.
- ALVES, F. R. V. *et al.* Combinatorial approach on the recurrence sequences: an evolutionary historical discussion about numerical sequences and the notion of the board. **International Eletronic Journal of Mathematics Education**, [s. l.], v. 19, n. 2, p. 1-11, mar. 2024.
- ALVES, F. R. V. História da matemática e tecnologia: visualização de sequências recorrentes, algumas propriedades e a noção de tabuleiro 2D/3D. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, São Paulo, v. 13, n. 3, p. 45-64, jun. 2024.
- ALVES, F. R. V. Propriedades Combinatórias sobre a sequência de Jacobsthal, a noção de tabuleiro e alguns apontamentos históricos. **Revista Cearense de Educação Matemática**, [s. l.], v. 1, n. 1, p. 1-13, jan. 2022.
- ALVES, F. R. V. Sequência Generalizada de Fibonacci e relações com o número áureo. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [s. l.], v. 2, n. 6, p. 30-36, jun. 2018.
- ALVES, F. R. V. Situação Didática Olímpica (SDO): aplicações da teoria das situações didáticas para o ensino de olimpíadas. **Revista Contexto & Educação**, [s. l.], v. 36, n. 113, p. 116-142, jan. 2021.
- ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Brasil x Portugal: pesquisas desenvolvidas no âmbito do ensino da história da matemática sobre sequências numéricas recorrentes. **Revista**

de **História da Educação Matemática**, [s. l.], v. 8, n. 1, p. 1-23, jan. 2022.

ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Sobre a sequência de Lichtenberg e a sua abordagem via tabuleiro com ladrilhos. **Conexões Ciência e Tecnologia**, [s. l.], v. 20, n. 1, p. 1-12, ago. 2026.

ABREU, D. H. M.; SANTOS, M. J. C.; RODRIGUES, R. N. B. Uma experiência com o uso da Escala Cuisenaire como recurso pedagógico para aprender as quatro operações básicas de matemática. In: SANTOS, M. J. C.; VASCONCELOS, F. H. L.; LIMA, I. P. (org.). **Tecendo redes de experiências cognitivas: reflexões entre a teoria e a prática**. Campinas: Pontes, 2018. p. 282-298.

ARTIGUE, M. *et al.* **Ingenieria didactica en educacion matematica: un esquema para la investigacion y la innovacion en la enseñanza y el aprendizaje de las matematicas**. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**. São Paulo: Contraponto, 1996.

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 20 dez. 1996. Seção 1, p. 1. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/19394.htm. Acesso em: 10 out. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Conselho Pleno. Resolução CNE/CP nº 2, de 20 de dezembro de 2019. Brasília, DF, 2019.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Resolução CNE/CP nº 2, de 1º de julho de 2015. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores para a Educação Básica e institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação). **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 1 jul. 2015. Seção 1, p. 1. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/cne/pdf/resolucoes-do-cne/cp/2019/rcp002_19.pdf Acesso em: 10 out. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil**. Brasília, DF: MEC, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio**. Brasília, DF: MEC, 2018.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 2006.

BENJAMIN, A. T.; QUINN, J. J. The Fibonacci numbers: exposed more discretely. **Mathematics Magazine**, [s. l.], v. 76, n. 3, p. 182-192, mar. 2003.

BEZERRA, A. M. A. **Tecendo redes cognitivas entre a formação matemática do pedagogo e o pensamento algébrico: reflexões a partir de grupos focais**. 2023. 121 f. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2023. Disponível em: <http://repositorio.ufc.br/handle/riufc/76364>. Acesso em: 10 out. 2025.

BEZERRA, A. M. A. A compreensão do plateau no campo do ensino das ciências. *In*: MENDONÇA, A. F.; BORGES NETO, H. (org.). **Sequência FEDATHI**: além das ciências duras. Curitiba: CRV, 2017. p. 44-60.

BICKNELL, M. A new look at Fibonacci and Lucas numbers. **The Fibonacci Quarterly**, [s. l.], v. 8, n. 4, p. 306-310, abr. 1970.

BICKNELL, M.; HOGGATT, V. E. Generalized Fibonacci sequences. **The Fibonacci Quarterly**, [s. l.], v. 9, n. 3, p. 245-253, mar. 1971.

BRANDÃO, C. R. **Pesquisa participante**. 8. ed. São Paulo: Brasiliense, 2006.

BOCK, D. Georges Cuisenaire's numbers in colour: a teaching aid that survived the 1950s. *In*: INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE HISTORY OF MATHEMATICS EDUCATION, 6., 2020, Münster. **Proceedings** [...] Münster: WTM-Verlag, 2020. p. 1-14. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/347191769_Georges_Cuisenaire's_numbers_in_our_A_teaching_aid_that_survived_the_1950s Acesso em: 10 out. 2025.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BROTHER, U. A. **An introduction to Fibonacci discovery**. Santa Clara: Fibonacci Association, 1965.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, [s. l.], v. 7, n. 2, p. 33-115, fev. 1986.

BROUSSEAU, G. **Théorie des situations didactiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1997.

CEARÁ (Estado). Secretaria da Educação. **Documento Curricular Referencial do Ceará – DCRC**. Fortaleza: SEDUC, 2019.

CÁSSIO, F. L. Base Nacional Comum Curricular: ponto de saturação e retrocesso na educação. **Retratos da Escola**, [s. l.], v. 12, n. 23, p. 239-250, jan. 2018.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. L. D.; SCHWARTZ, J. L.: Early algebra is not the same as algebra early. *In*: KAPUT, J. J.; CARRAHER, D. W.; BLANTON, M. L. (org.). **Algebra in the early grades**. New York: Lawrence Erlbaum Associates, 2008. p. 235-272.

CASTRO FILHO, J. A.; CASTRO, J. B.; FREIRE, R. S. Contributions of digital technologies to the development of algebraic thinking at school. *In*: SPINILLO, A. G.; LAUTERT, S. L.; BORBA, R. (org.). **Mathematical reasoning of children and adults**. Berlin: Springer International Publishing, 2021. p. 219-238.

CHEVALLARD, Y. La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné. **Revue Française de Pédagogie**, [s. l.], v. 76, n. 1, p. 89-91, jan. 1986.

CHEVALLARD, Y. Sobre a teoria da transposição didática: algumas considerações introdutórias. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, [s. l.], v. 3, n. 2, p. 1-16, fev.

2013.

CURTIS, W. J. R. **Le Corbusier, ideas and forms**. Nova Iorque: Phaidon, 1986.

DURVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine**: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne: Peter Lang, 1995.

D'AMORE, B.; RADFORD, L. **A teoria da objetivação em educação matemática**: abordagens e perspectivas. São Paulo: Livraria da Física, 2017.

DOLZ, J.; NOVERRAZ, M.; SCHNEUWLY, B. Sequências didáticas para o oral e a escrita: apresentação de um procedimento. *In*: SCHNEUWLY, B.; DOLZ, J. **Gêneros orais e escritos na escola**. Tradução de Roxane Rojo. São Paulo: Mercado de Letras, 2004. p. 95-128.

FERREIRA, A. D.; ALVES, F. R. V.; SANTOS, M. J. C. O uso do GeoGebra para a interpretação geométrica de funções aplicadas ao estudo das progressões aritméticas e geométricas. **Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias**, [s. l.], v. 16, n. 1, p. 26-40, jan. 2021.

FIBONACCI, L. **Liber Abaci**. [S. l.: s. l.], 1202.

FERREIRA, J. P. **Estruturas algébricas elementares**. São Paulo: Livraria da Física, 2013.

FORMIGA, F. A.; ALVES, F. R. V.; SANTOS, M. J. C. dos: Sequências Numéricas Recorrentes (SNR) via Tabuleiros e Ladrilhos: um estudo à luz da BNCC. **Educação Matemática em Revista**, [s. l.], v. 30, n. 89, p. 1-15, jan. 2025.

GATTEGNO, C. **The Cuisenaire Gattegno Method**. Reading: Educational Explorers, 1974.

GULLBERG, J. **Mathematics**: from the birth of numbers. New York: Norton, 1997.

GOBARA, S. T.; RADFORD, L. Ética comunitária e educação matemática. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, [s. l.], v. 24, n. 1, p. 25-45, jan. 2021.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GOBARA, S. T.; SANTOS, G. R. O ensino de ciências à luz da Teoria da Objetivação: a ética comunitária como alternativa para a sala de aula. **PARADIGMA**, Maracay, v. 45, n. 2, p. 1-19, fev. 2024.

GATTI, B. A. Testes e Avaliações do Ensino no Brasil. **Educação e Seleção**, São Paulo, v. 1, n. 16, p. 33-42, jan. 2013.

KAPUT, J.; CARRAHER, D. W.; BLANTON, M. L. (eds.). **Algebra in the early grades**. New York: Lawrence Erlbaum Associates, 2008.

KANT, I. **Crítica da razão prática**. Tradução de Valério Rohden. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

HARE, A. D.; CHINN, W. G. **The Fibonacci numbers**: the story of their origin and the nature of their growth. Menlo Park: Spiral Press, 1996.

HEGEL, G. W. F. **Hegel**: elements of the philosophy of right. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

HOGGATT, V. E. **Fibonacci and Lucas numbers**. Boston: Houghton Mifflin, 1969.

HARMAN, C. H. Complex numbers. **The Fibonacci Quarterly**, [s. l.], v. 19, n. 1, p. 82-87, jan. 1981.

HODGKIN, L. **A history of Mathematics from Mesopotamia to modernity**. Oxford: Oxford University Press, 2005.

HUNTLEY, H. E. **A divina proporção**. Tradução de Luis Nunes. Brasília, DF: EdUNB, 1985.

KLEINER, I. **Excursions in the History of Mathematics**. New York: Springer, 1961.

KAPUT, J.; CARRAHER, D. W.; BLANTON, M. L. (ed.). **Algebra in the early grades**. New York: Lawrence Erlbaum Associates, 2008.

IVER, M. Some results on Fibonacci quaternions. **The Fibonacci Quarterly**, [s. l.], v. 7, n. 2, p. 201-211, abr. 1969.

JUNGBLUTH, A.; SILVEIRA, E.; GRANDO, R. C. O estudo de sequências na Educação Algébrica nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Educação Matemática Pesquisa**, [s. l.], v. 21, n. 3, p. 1-12, mar. 2019.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. 8. ed. São Paulo: Atlas, 2017.

LIVIO, M. **Razão áurea**: a história de fi, um número surpreendente. Tradução de Maria Luiza Borges. Rio de Janeiro: Record, 2006.

LIVIO, M. **The golden ratio**: the story of phi, the world's most astonishing number. Broadway Books, 2002.

MARX, K.; ENGELS, F. **Manifesto do partido comunista**. Petrópolis: Vozes, 1988.

MARGOLINAS, C.; LAPARRA, M. Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire. In: ROCHEX, J. Y.; CRINON, J. (ed.). **La construction des inégalités scolaires**. Rennes: Presses universitaires de Rennes, 2011. p. 19- 32.

MENDONÇA, F. D. Q. C.; SOARES, C. V. C. O. Um breve olhar para a BNCC, as tecnologias digitais e a produção textual no Ensino Médio. **Fólio – Revista de letras**, [s. l.], v. 12, n. 1, p. 1017-1038, jan. 2020.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. Â. Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo? **Pro-Posições**, Campinas, v. 3, n. 1, p. 39-54, jan. 2016.

MONTEIRO, A. C. A. *et al.* Engenharia didática para o ensino de sequência recursiva: o caso da sequência de Fibonacci. **Revista Contribuciones a las ciencias sociales**, [s. l.], v. 16, n. 1, p. 1-14, jan. 2023.

MOROSINI, M. C.; FERNANDES, C. M. B. Estado do conhecimento: conceitos, finalidades e interlocuções. **Educação Por Escrito**, [s. l.], v. 5, n. 2, p. 154-164, fev. 2014.

MOYER, P. S. Are we having fun yet? how teachers use manipulatives to teach mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, [s. l.], v. 47, n. 2, p. 175-197, fev. 2001.

MORETTI, V. D.; PANOSSIAN, M. L.; RADFORD, L. Luis Radford - Questões em torno da Teoria da Objetivação. **Obutchénie – Revista de Didática e Psicologia Pedagógica**, [s. l.], v. 1, n. 4, p. 251-272, abr. 2018.

NIZ, C. A. F. *et al.* A cultura digital presente na base nacional comum curricular (BNCC): discussões sobre a prática pedagógica. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO E TECNOLOGIAS, 1., 2020, São Carlos. **Anais [...]** São Carlos: CIET, 2020. Disponível em: <https://ciet.ufscar.br/submissao/index.php/ciet/issue/view/anais2020> Acesso em: 10 out. 2025.

NORONHA, C. A.; GOBARA, S. T.; RADFORD, L. (org.). **Teoria da objetivação: pesquisas em educação matemática e em educação em ciências**. São Paulo: LF Editorial, 2024.

POSAMENTIER, A. S.; LEHMANN, I. **The fabulous Fibonacci numbers**. Buffalo: Prometheus Books, 2007.

POMMER, W. M. **A Engenharia Didática em sala de aula: elementos básicos e uma ilustração envolvendo as equações Diofantinas Lineares**. São Paulo: [s. n.], 2013.

PEREIRA, T. S. I.; SCAVAZZA, H. A. L. Organização Curricular de Matemática no Novo Ensino Médio: aspectos da BNCC e do Currículo de Referência de Mato Grosso do Sul. **Educação Matemática em Revista**, [s. l.], v. 30, n. 87, p. 1-16, 2025.

PERRIN-GLORIAN, M. J. L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. In: MARGOLINAS, C. *et al.* (ed.). **En amont et en aval des ingénieries didactiques**. Grenoble: La Pensée sauvage, 2011. p. 57-78.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

RAMOS, M. G. O. A. **sequência de Fibonacci e o número de Ouro**. 113 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2013. Disponível em: https://sca.profmam-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=27580 Acesso em: 10 out. 2025.

SAMPIERI R. H.; COLLADO, C. F.; LUCIO, M. P. B. **Metodologia da pesquisa**. 5. ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2013.

SANTOS, M. J. C.; ALMEIDA NETO, C. Teoria da Objetivação: reflexões sobre o engajamento nas aulas de matemática para uma aprendizagem colaborativa. **REMATEC**, Belém, v. 16, n. 39, p. 101-118, jan. 2021.

SANTOS, M. J. C. A formação do professor de matemática: metodologia sequência fedathi (sf). **Revista Lusófona de Educação**, [s. l.], v. 38, n. 38, p. 1-13, jan. 2017.

SANTOS, M. J. C. Ensino de Matemática—Discussões teóricas e experiências formativas exitosas para professores do Ensino Fundamental. **Revista Para a Inovação Pedagógica – RIIPEDES**, [s. l.], v. 3, n. 1, p. 1-3, jan. 2025.

SILVA, J. G. A.; ALVES, F. R. V.; MENEZES, D. B. Situação Didática Olímpica - SDO: um problema olímpico aplicado à teoria das situações didáticas. **Revista Thema**, Pelotas, v. 19, n. 2, p. 265-278, fev. 2021.

SIGLER, L. E. Fibonacci's rabbits. **The College Mathematics Journal**, [s. l.], v. 33, n. 5, p. 378-386, maio 2002.

SINGH, P. The So-called Fibonacci Numbers in Ancient and Medieval India. **História Mathematica**, [s. l.], v. 12, n. 1, p. 229-244, jan. 1985.

SCREMIN, G.; RIGHI, F. P. Ensino de álgebra no ensino fundamental: uma revisão histórica dos PCN à BNCC. **Ensino em Re-vista**, [s. l.], v. 27, n. 2, p. 409-433, fev. 2020.

SIGLER, L. **Fibonacci's Liber Abaci**: a translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation. Berlin: Springer, 2002.

SPINADEL, V. W. La familia de números metálicos. **Cuadernos del CIMBAGE**, [s. l.], v. 6, n. 1, p. 17-44, jan. 2003.

SPINADEL, V. W. **The metallic means and the spectra of numbers**. Virginia: University of Virginia Press, 1998.

SPINADEL, V. W. The metallic means family and multifractal spectra. **Nonlinear Analysis**, Barking, v. 30, n. 3, p. 1475-1480, mar. 1997.

SPINADEL, V. W. The Metallic Means Family and the Fibonacci Numbers. **Applications of Fibonacci Numbers**, [s. l.], v. 6, n. 1, p. 493-506, jan. 1994.

SPINADEL, V. W. The Metallic Means Family. **International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences**, [s. l.], v. 21, n. 1, p. 1-14, jan. 1998.

SPIVEY, M. Z. **The art of proving binomial identities**. Boca Raton: Taylor & Francis Group, 2019.

SPREAFICO, E. V. P. **Novas identidades envolvendo os números de Fibonacci, Lucas e Jacobsthal via ladrilhamentos**. 2014. 146 f. Tese (Doutorado em Matemática) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014. Disponível em: <https://repositorio.unicamp.br/acervo/detalhe/937460>. Acesso em: 10 out. 2025.

SPREAFICO, E. V. P.; CATARINO, P. M. C. On generalized Oresme numbers and the Fibonacci fundamental system. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, [s. l.], v. 9, n. 1, p. 1-15, jan. 2024.

WASTEWART, I. **O fantástico mundo dos números: a Matemática do zero ao infinito**. Rio de Janeiro: Zahar, 2016.

STILLWELL, J. **Mathematics and its history**. New York: Springer, 2010.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F.R. V.: Os números de Fibonacci e Lucas: uma proposta de ensino na perspectiva da Engenharia Didática de Formação. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 4, p. 1-26, abr. 2019.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. C. Using GeoGebra as a tool for teaching the Padovan board and tiling. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 1, n. 1, p. 1-10, jan. 2025.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R.V.; CATARINO, P. M. M. C. Estudo de sequências numéricas para o ensino de Matemática. **Revista Contrapontos**, [s. l.], v. 23, n. 1, p. 20-32, jan. 2023.

VIEIRA, R. P. M. **Investigação da complexificação, generalização e modelo combinatório dos números de Padovan e Perrin com elementos de uma engenharia didática**. 2024. 471 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Ensino da Rede Nordeste de Ensino, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2024.

VYGOTSKI, L. S. **Obras escogidas: fundamentos de defectología**. Madrid: Visor, 1997.

ZAHN, M. **Sequência de Fibonacci e o número de ouro**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2011.

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)



TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE) NÚMEROS METÁLICOS: VISUALIZAÇÃO E PROPRIEDADES ATRAVÉS DAS BARRAS DE *CUISNAIRE*, TABULEIRO E LADRILHOS COM APOIO DA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO

Pesquisadora: Profa. Franciliane Albuquerque Formiga
Orientador: Prof. Dra. Francisca Helena de Oliveira Holanda
Coorientadora: Maria José Costa dos Santos

Identificação

Você está sendo convidado a participar como voluntário de uma pesquisa relacionada ao Mestrado Acadêmico com o seguinte tema: **VISUALIZAÇÕES E PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS E RECURSIVAS DOS NÚMEROS METÁLICOS: USO DAS BARRAS DE *CUISNAIRE*, TABULEIRO E LADRILHOS**, tendo como responsável pela investigação a aluna **Franciliane Albuquerque Formiga**.

Este documento nomeado de Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), visa assegurar os seus direitos como participante, sendo elaborado em duas vias, uma que deverá ficar com você e a outra com a pesquisadora. Leia atentamente todo o documento, caso haja dúvidas favor comunicar à pesquisadora para que essas sejam sanadas. Você poderá levá-lo para casa, a fim de ler com mais calma e tranquilidade, consultando os seus familiares quando necessário. Não haverá nenhum tipo de penalidade, caso não concorde em participar ou retirar a sua autorização em qualquer momento.

Justificativa e Objetivos

Este estudo justifica-se pela necessidade de aprofundar o ensino dessas estruturas matemáticas que transcendem a tradicional razão Áurea, ampliando o escopo para a família dos Números Metálicos (NM). A abordagem pedagógica propõe-se a fomentar ideias que possam mitigar dificuldades inerentes a este conteúdo didático. Para tanto, fundamentou-se

em alguns pressupostos de ordem teórico-didáticos, tais como: a Teoria dos Objetos (TO), a Teoria dos Registro de Representação Semiótica (TRRS) que concebem suas gêneses nos conhecimentos observados a partir de práticas sociais mediadas pelos meios semióticos e na Engenharia Didática (ED), a qual possibilita o planejamento estruturado e articulado em fases interdependentes, facilitando a condução do percurso epistemológico proposto. Diante dos pressupostos esta pesquisa foi norteadada pela seguinte questão norteadora: de que modo o processo de ensino e aprendizagem das propriedades fundamentais e recursivas dos Números Metálicos podem ser favorecidos a partir de Curso de Extensão, estruturado à luz da Engenharia Didática e mediado pelas barras de *Cuisenaire*, tabuleiro $1 \times n$ e ladrilhos, em um lócus acadêmico de formação de professores que lecionam matemática?

Objetivo geral

Em consonância com a questão orientadora, estabelece-se como objetivo geral: Analisar as contribuições de um Curso de Extensão, estruturado à luz da Engenharia Didática e mediado por barras de *Cuisenaire*, tabuleiros e ladrilho $1 \times n$, para os processos de ensino e aprendizagem das propriedades fundamentais, algébricas e recursivas dos Números Metálicos em contextos de formação de professores que lecionam matemática.

Para alcançar esse objetivo geral e responder à problemática delineada, definem-se os seguintes objetivos específicos:

- Investigar as categorias matemáticas, históricas e epistemológicas da Família dos Números Metálicos, contemplando propriedades fundamentais e teoremas associados às sequências recorrentes;
- Desenvolver um Curso de Extensão, estruturado à luz da Engenharia Didática, composto por seis tarefas didáticas mediadas por artefatos semióticos, especificamente barras de *Cuisenaire*, ladrilhos e tabuleiro $1 \times n$;
- Analisar as contribuições dos materiais manipuláveis (artefatos semióticos) para os processos de visualização, compreensão, generalização e significação das propriedades fundamentais, algébricas e recursivas dos Números Metálicos em contextos de formação de professores que lecionam matemática.

3 Procedimentos

3.1 Critérios de Inclusão e Exclusão

Para este projeto de pesquisa, os critérios devem focar em professores de formação inicial e/ou contínua que possam vivenciar a Atividade Formativa com tabuleiros, ladrilhos e barras de *Cuisenaire* e refletir sobre as propriedades fundamentais e recursivas dos Números Metálicos.

3.1.1 Critérios de inclusão:

1. Ser professor formado em (licenciatura em Matemática ou Pedagogia com ênfase em Matemática).
2. Ter cursado, no mínimo, os componentes curriculares que abordam números, sequências e/ou equações do segundo grau (ou conteúdos equivalentes), para possibilitar a compreensão das propriedades recursivas e dos Números Metálicos.
3. Ter disponibilidade para participar integralmente da Atividade Formativa (seis tarefas progressivas), em encontros presenciais ou remotos, conforme planejamento do estudo.
4. Manifestar concordância em participar da pesquisa, assinando o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE).

3.1.2 Critérios de exclusão:

- Apresentar dificuldade significativa de comunicação oral ou escrita em português que inviabilize a participação nas discussões, registros reflexivos ou entrevistas previstas no estudo, sem que o protocolo preveja recursos adequados de acessibilidade.
- Não concluí todas as etapas da Atividade Formativa (por exemplo, ausência em parte significativa das cinco tarefas, impossibilitando a análise dos processos de objetivação e subjetivação).

- Recusar o uso de registros (anotações, produções escritas, entrevistas, gravações em áudio ou vídeo) para fins de pesquisa, quando estes forem dispositivos centrais para analisar o itinerário de transição entre os materiais concretos e os processos formativos.

3.2 Participando do estudo você será convidado a:

- Responder a um questionário e/ou participar de uma entrevista, nos quais serão abordadas questões sobre (obstáculos epistemológicos, históricas e didáticas existentes no ensino das propriedades fundamentais e recursivas dos Números Metálicos) com duração aproximada de 15 minutos.
- Participar da Atividade Formativa composta por seis tarefas, com duração de noventa (90) minutos, com professores em formação ou formados em (licenciatura em Matemática ou Pedagogia com ênfase em Matemática) matriculados em disciplina, estágio ou programa de formação relacionado ao ensino de Matemática.
- A previsão de início dos encontros (vivências) de aplicação é de março de 2026, após aprovação do CEP.
- Os encontros serão registrados através de fotos, gravações de áudio, anotações das produções dos participantes e entrevistas com os participantes.
- Será aplicada uma Atividade Formativa, propostas de forma de listas de tarefas, com tempo máximo de noventa (90) minutos.
- Os dados coletados serão utilizados somente para a pesquisa e os resultados serão mostrados através de revistas especializadas na área de investigação e/ou encontros científicos e na dissertação do Programa de Pós-Graduação em Ensino Matemática, promovido pelo programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PGECEM) – IFCE *CAMPUS* FORTALEZA – Polo IFCE no *campus* Fortaleza, sem expor a identificação dos participantes.

4. Desconfortos e Riscos

Você não deve participar deste estudo, caso venha sentir-se constrangido com algum dos procedimentos anteriormente citados, tendo a liberdade de deixar de participar do estudo em qualquer momento, sem haver nenhum prejuízo para a sua conduta.

4.1 Os riscos da pesquisa podem ser:

- Ansiedade e Estresse: Alunos ou professores podem sentir-se ansiosos ou estressados ao serem observados, avaliados ou ao participarem de atividades não rotineiras (Gradação de Risco: Médio);
- Frustração ou Baixa Autoestima: Se os participantes não conseguirem realizar as tarefas propostas, especialmente em atividades desafiadoras, isso pode afetar sua autoestima ou levar à frustração (Gradação de Risco: Médio);
- Interrupção do Processo de Ensino-Aprendizagem: Atividades de pesquisa podem interromper ou modificar o fluxo normal das aulas, o que pode impactar negativamente o aprendizado dos alunos (Gradação de Risco: Médio).

4.2 Com isso, é possível tomar algumas medidas para evitar tais riscos, sejam elas:

- Preparação dos participantes, explicando claramente o propósito da pesquisa e o que se espera deles. Garantir que entendam que não há "respostas certas ou erradas" pode ajudar a reduzir a pressão.
- Descaracterização da Avaliação: Ressaltar que a pesquisa não tem como objetivo avaliar ou julgar os participantes, mas sim compreender processos de ensino e aprendizagem. Enfatizar que a participação não afetará suas notas ou desempenho profissional, fornecendo um suporte emocional.
- Planejamento Flexível: Realizar a pesquisa em horários que causem o mínimo de interrupção, como durante aulas menos intensivas ou em períodos específicos designados para atividades extracurriculares.

5. Benefícios

Os participantes terão oportunidade de participarem da Atividade Formativa possibilitando aos discentes da Licenciatura em Matemática desenvolver uma concepção epistemológica da História da Matemática através de estudos de definições, teoremas e propriedades matemáticas inerentes aos Números Metálicos. Contribuindo assim, com a formação inicial dos professores.

6. Armazenamento e uso dos dados

Todos os dados coletados nesta pesquisa (como respostas a questionários, entrevistas, gravações, produções escritas e demais registros) serão armazenados em arquivo físico e/ou digital, sob guarda e responsabilidade do(a) pesquisador(a) responsável. Esses dados serão mantidos em local seguro, com acesso restrito à equipe de pesquisa, por um período mínimo de 5 (cinco) anos após o término da pesquisa, conforme a (Resolução CNS nº 510/2016, Art. 28, inciso IV).

Após esse período, os dados poderão ser destruídos ou anonimizados para uso em novas análises ou pesquisas, sempre preservando seu sigilo e sua privacidade. Sua decisão de participar é livre, e você pode avaliar, com base nessas informações, se concorda com o armazenamento e o uso atual e futuro de seus dados.

7. Acompanhamento e Assistência

O participante tem a garantia ao acesso, em qualquer etapa do estudo, para esclarecimentos de eventuais dúvidas na instituição em que você estuda. Para maiores informações nosso contato é (85) 988609943, (85) 31015084 e-mail: francifor2015@gmail.com.

8. Sigilo e Privacidade

8.1 Uso de imagem e/ou voz

Durante a realização desta pesquisa, poderão ser realizadas fotografias, filmagens e/ou gravações de áudio, que poderão registrar sua imagem e/ou sua voz durante as atividades da pesquisa. Esses registros têm como objetivo documentar as atividades e interações realizadas, servindo para análise dos dados da pesquisa e, caso você autorize, para divulgação científica

dos resultados em trabalhos acadêmicos, apresentações em eventos e publicações, sempre preservando sua identidade, conforme as normas éticas vigentes e as orientações do CEP-IFCE. Sua autorização para uso de imagem e/ou voz é voluntária e independente da sua participação na pesquisa; a recusa não trará qualquer prejuízo a você, nem afetará seu vínculo com o IFCE ou com os pesquisadores.

8.2 Opções de autorização (marcar apenas uma)

- ☐ Sim, autorizo a gravação da minha imagem e/ou voz para registro da pesquisa e autorizo também sua utilização em apresentações e publicações científicas, preservando-se minha identificação pessoal, conforme descrito acima.
- ☐ Autorizo apenas a gravação da minha imagem e/ou voz para fins de registro e análise interna da pesquisa, mas não autorizo sua divulgação em apresentações ou publicações.
- ☐ Não autorizo a gravação nem a divulgação da minha imagem e/ou voz, estando ciente de que essa decisão não afetará minha participação na pesquisa nem me trará qualquer prejuízo.

Deixo explícito que a autorização é opcional e independente do consentimento para participar da pesquisa, evitando qualquer forma de coerção, conforme os preceitos éticos da Resolução (CNS nº 510/2016, art. 3º, inciso VII).

9. Ressarcimento e Indenização

Não existirão despesas para o participante em qualquer fase da pesquisa e também o mesmo não receberá nenhuma remuneração para participar do estudo. Você terá garantia ao direito de indenização caso algum dos itens anteriores seja violado. Caso ocorra qualquer dano decorrente de sua participação nesta pesquisa, você terá direito à assistência e a ser indenizado pelo dano decorrente da pesquisa, nos termos da lei e conforme a Resolução (CNS nº 510/2016, art. 19, parágrafo 2).

10. Contato

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, você poderá entrar em contato com a pesquisadora **Franciliane Albuquerque Formiga** pelo celular (85)988609943 ou pelo e-mail: francifor2015@gmail.com. Em caso de dúvidas e reclamações sobre a sua participação, além de questões de éticas do estudo, você deverá entrar em contato com a secretaria do Comitê de Ética e Pesquisa (CEP) do IFCE, das 8h às 12h e das 13h às 17h, localizada na Rua Jorge Dumar, nº 1703, Jardim América, no IFCE Reitoria, Fortaleza-CE, 60410-426, fone: (85) 34012332, e-mail: cep@ifce.edu.br.

11. Observações Finais

Ao assinar este termo, o participante concorda voluntariamente em participar desta pesquisa e permite o registro de fotos, áudios e anotações de suas produções durante a aplicação da pesquisa, desde que possa retirar seu consentimento a qualquer momento sem penalidade ou prejuízos de qualquer natureza.

12. Consentimento Livre e Esclarecido

Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais de riscos e o incômodo que esta possa acarretar, aceito participar e declaro receber uma via original deste documento assinada pelo pesquisador e por mim, tendo todas as folhas por nós rubricadas:

Nome do(a) participante: _____

e-mail (opcional): _____

(Assinatura do participante ou nome e assinatura do seu RESPONSÁVEL LEGAL)

Data: ____/____/____.

13. Responsabilidade do Pesquisador:

Asseguro ter cumprido as exigências da resolução 466/2012 CNS/MS e complementares na elaboração do protocolo e na obtenção deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Asseguro também, ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Informo que o estudo foi aprovado pelo CEP perante o qual o projeto foi apresentado e pela

CONEP, quando pertinente. Comprometo-me a utilizar o material e os dados obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

Pesquisadora,

Franciliane Albuquerque Formiga

Fortaleza, ____ de ____ de ____.

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO: PROFESSOR EM FORMAÇÃO CONTINUADA

QUESTIONÁRIO – PROFESSORES EM FORMAÇÃO CONTINUADA Você está sendo convidado a responder um questionário alinhado a uma pesquisa de Mestrado Acadêmico com o tema: VISUALIZAÇÕES E PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS E RECURSIVAS DOS NÚMEROS METÁLICOS: USO DAS BARRAS DE CUISENAIRE, TABULEIRO E LADRILHOS . As perguntas são direcionadas a docentes que lecionam matemática sobre Sequências Numéricas, materiais concretos (Cuisenaire, Tabuleiros, ladrilhos) e processos formativos, estruturadas de forma clara e compatível com as exigências usuais do Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos do Instituto Federal do Ceará (CEP-IFCE).	
01	Bloco 01 - Você tem interesse em participar como voluntário nessa pesquisa? Caso sua resposta seja sim, prossiga. ☐ Sim ☐ Não
02	Formação Inicial? ☐ Professor de Matemática ☐ Professor que leciona matemática
03	Bloco 2 – Formação em conteúdos relacionados Em sua formação até o momento, você já estudou conteúdos envolvendo sequências numéricas recorrentes (por exemplo, sequência de Fibonacci, progressões, relações de recorrência)? ☐ Sim ☐ Não
04	Se sim, onde (disciplina, curso, projeto etc.)? _____
05	Bloco 3 – Experiências com materiais concretos Cite materiais concretos que já utilizou ou viu serem utilizados em aulas de Matemática e para quais conteúdos:
06	Com que frequência você utiliza ou já utilizou materiais concretos (como barras de <i>Cuisenaire</i> , tabuleiros, ladrilhos, jogos) para trabalhar conceitos matemáticos? ☐ Nunca ☐ Raramente ☐ Às vezes ☐ Frequentemente
07	Como você avalia o potencial dos materiais concretos para auxiliar na compreensão de propriedades recursivas ou de sequências numéricas? ☐ Muito baixo ☐ Baixo ☐ Médio ☐ Alto Justifique sua resposta:
08	Bloco 4 – Atividade Formativa com Sequências Numéricas (Responder após participação no Curso de Extensão: Sequências Numéricas para Educação Básica) Em que medida o Curso de Extensão, composta por seis tarefas progressivas, contribuiu para que você visualizasse e compreendesse as propriedades recursivas dos Números Metálicos? ☐ Não contribuiu ☐ Contribuiu pouco

	☐ Contribui moderadamente ☐ Contribui muito Explique:
09	Entre os materiais utilizados (tabuleiros 1xn, ladrilhos, barras de Cuisenaire), qual ou quais mais ajudaram na sua compreensão? Por quê?
10	Houve algum momento em que você percebeu mudança na forma como entendia as propriedades recursivas (por exemplo, passou de uma visão mais algébrica para uma visão mais visual, ou vice-versa)? Descreva esse momento.
11	Bloco 5 – Obstáculos e dificuldades percebidas Quais foram os maiores obstáculos ou dificuldades que você encontrou ao tentar compreender ou explicar as propriedades recursivas dos Números Metálicos durante a Atividade Formativa? ☐ Dificuldades conceituais (entender a definição/recorrência) ☐ Dificuldades em conectar o material concreto com a expressão algébrica ☐ Dificuldades em explicar para outra pessoa ☐ Outras: _____ Detalhe sua experiência:
12	Você identificou um possível itinerário de transição entre os materiais concretos utilizados durante a aplicação dos seis módulos progressivos do Curso de Extensão? Descreva.

ANEXO A – EDITAL CURSOS DE EXTENSÃO 2026**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
EDITAL N. 01/2026 QUE REGULAMENTA O PROCESSO DE INSCRIÇÃO EM
CURSOS DE EXTENSÃO**

O Grupo de Estudo e Pesquisa Tecendo Redes Cognitivas de Aprendizagem (G-TERCOA) registrado no Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), do Laboratório de pesquisa Multimeios(MM), vinculado à Faculdade de Educação (FACED), com sede no Núcleo de Estudos e Pesquisas Regionais (NUPER) da Universidade Federal do Ceará (UFC), no uso de suas atribuições, torna público o presente edital para normatizar o processo de inscrição no curso de extensão abaixo relacionado, oferecido no âmbito dos Programas de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática(Encima), Pós-graduação em Educação (PPGE), Pós-Graduação em rede de ensino (RENOEN-Polo UFC e em colaboração com o RENOEN Polo IFCE).

1 DO CURSO, SEUS OBJETIVOS, DURAÇÃO, VAGAS E OUTRAS

CURSO DE EXTENSÃO 1: ALFABETIZAÇÃO CIENTÍFICA À LUZ DA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO: FORMAÇÃO DOCENTE PARA O ENSINO DE CIÊNCIAS

Período: 07 de março de 2026 a 06 de junho de 2026.

Encontros presenciais e assíncronos: Quinzenalmente, aos sábados, das 8h às 12h, de forma presencial e realização de atividades paralelas, à distância (assíncronas), na plataforma utilizada nos cursos de extensão.

Objetivo: Colaborar com a formação de professores e pesquisadores da Educação Básica sobre a Alfabetização Científica, fundamentada na Teoria da Objetivação, como estratégia para o ensino de ciências.

Carga horária: 100 horas.

Quantidade de vagas: 40 vagas.

Público: Professores dos anos iniciais do ensino fundamental da rede pública.

CURSO DE EXTENSÃO 2: O USO DA INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA: PRÁTICAS, ÉTICA E INOVAÇÃO PEDAGÓGICA

Período: 07 de março de 2026 a 30 de junho de 2026.

Encontros síncronos e assíncronos: Semanalmente, de forma síncrona, haverá encontros às terças-feiras, das 18h às 20h, em conjunto com atividades a serem realizadas à distância, de forma assíncrona, na plataforma utilizada no curso de extensão.

Objetivo: Desenvolver competências digitais práticas com docentes da rede pública para a aplicação imediata de ferramentas de Inteligência Artificial no cotidiano escolar na criação de experiências de aprendizagem engajadoras, sob uma perspectiva de uso ético e responsável das tecnologias.

Carga horária: 32 horas.

Quantidade de vagas: 50 vagas.

Público: Professores do Ensino Fundamental e Médio da rede pública de ensino.

CURSO DE EXTENSÃO 3: ESCOLA SEGURA: FORMAÇÃO EM PRIMEIROS SOCORROS PARA PROFESSORES

Período: 07 de março de 2026 a 30 de junho de 2026.

Assíncronos: O curso será de forma assíncrona, na plataforma utilizada no curso de extensão.

Objetivo: Capacitar professores da educação básica do município de Fortaleza para atuar em emergências em primeiros socorros baseado na Lei 13.722 (Lei Lucas).

Carga horária: 40 horas.

Quantidade de vagas: 80 vagas.

Público: Professores da Educação Básica do município de Fortaleza

CURSO DE EXTENSÃO 4: PRÁTICAS PEDAGÓGICAS INOVADORAS-COLABORATIVAS

Período: 07 de março de 2026 a 13 de junho de 2026.

Encontros presenciais, síncronos e assíncronos: quinzenalmente, de forma presencial e síncrona, com atividades que se propõem a trabalhar atividades interativas e à distância (assíncrona) na plataforma utilizada nos cursos de extensão.

Estruturação: O curso será estruturado no total de 6 encontros, aos sábados, das 8h às 12h. Presencial: 2 encontros (aos sábados, das 8h às 12h). Síncronos: 4 encontros (aos sábados, das 8h às 12h). Cronograma dos encontros: março - 1 encontro; abril - 2 encontros; maio - 2 encontros; junho - 1 encontro. Assíncronos: Plataforma usada no curso de extensão (duração de 4 meses).

Objetivo: Refletir sobre o desenvolvimento de práticas pedagógicas inovadoras-colaborativas entre professores dos anos iniciais e estudantes de Pedagogia, por meio de encontros síncronos e assíncronos, articulando teoria e prática, a colaboração docente e o uso

de estratégias pedagógicas inclusivas no processo de ensino-aprendizagem nos contextos educacionais da rede municipal.

Carga horária: 60 horas.

Quantidade de vagas: 50 vagas.

Público: Professores dos anos iniciais da Rede Municipal de Educação e/ou estudantes do curso de Pedagogia.

CURSO DE EXTENSÃO 5: PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Período: 07 de março de 2026 a 13 de junho de 2026.

Encontros síncronos e assíncronos: Mensal, de forma síncrona e assíncrona, que se propõe a trabalhar atividades presenciais e à distância na plataforma utilizada nos cursos de extensão.

Estruturação: O curso será estruturado no total de 15 encontros: presenciais: 5 encontros (aos sábados, das 8h às 12h). Síncronos: 10 encontros (às quartas, das 19h às 21h). Cronograma dos encontros: fevereiro - 2 encontros; março - 4 encontros; abril - 4 encontros; maio - 3 encontros; junho - 2 encontros. Assíncronos: Plataforma usada no curso de extensão (duração de 5 meses).

Objetivo: Proporcionar a formação continuada de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental de escolas públicas para o ensino de Probabilidade e Estatística, com o uso da Sequência Fedathi como metodologia de ensino.

Carga horária: 80 horas.

Quantidade de vagas: 50 vagas.

Público: Professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental de escolas públicas.

CURSO DE EXTENSÃO 6: SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS RECORRENTES PARA EDUCAÇÃO BÁSICA

Período: 14 de março de 2026 a 06 de junho de 2026.

Encontros presenciais e assíncronos: Quinzenalmente, aos sábados, das 8h às 12h, de forma presencial e nas semanas intercaladas de forma assíncrona via plataforma AVA.

Observação: As atividades assíncronas e os fóruns serão disponibilizados na plataforma AVA.

Objetivo: Analisar como ocorrem os processos de objetivação e subjetivação das propriedades fundamentais da adição e multiplicação de sequências numéricas recorrentes por meio de um curso de extensão aplicado aos professores da Rede Municipal e/ou estudantes de Pedagogia, utilizando-se de atividades mediadas por artefatos semióticos (barras

Cuisenaire, tabuleiros e ladrilhos) e fundamentado na Teoria da Objetivação (TO). A ideia é poder trabalhar atividades presenciais com materiais concretos e manipulações de modo a desenvolver o pensamento algébrico e a analiticidade nos futuros professores e/ou professores em serviço dos Anos Iniciais.

Carga horária: 60 horas.

Quantidade de vagas: 50 vagas.

Público: Professores da Educação (Pedagogo e/ou Matemáticos).

CURSO DE EXTENSÃO 7: DESIGN GEOAR

Período: 07 de março de 2026 a 30 de junho de 2026.

Encontros presenciais e síncronos: Não haverá.

Encontros assíncronos: Todas as atividades serão realizadas à distância, conforme a autonomia de horário do participante. Para isso será utilizada a plataforma *Moodle* do Grupo Tecendo Redes Cognitivas de Aprendizagem.

Objetivo: Superar obstáculos epistemológicos no ensino de Geometria Espacial com o aporte teórico-metodológico da Sequência Fedathi e da Teoria da Objetivação com Realidade Aumentada.

Carga horária: 100 horas.

Quantidade de vagas: 50 vagas.

Público: Professores da Educação Básica e estudantes do curso de Pedagogia.

CURSO DE EXTENSÃO 8: MODELAGEM MATEMÁTICA MAKER (M³)

Período: 07 de março de 2026 a 26 de junho de 2026.

Encontros presenciais e síncronos: Não haverá.

Encontros assíncronos: Todas as atividades serão realizadas à distância, segundo a autonomia de horário do participante. Para isso será utilizada a plataforma específica do Grupo Tecendo Redes Cognitivas de Aprendizagem (AVA G-TERCOA Formação).

Objetivo: Formar professores da Educação Básica para o uso da Modelagem Matemática Maker como estratégia didática para o ensino de Matemática, favorecendo o desenvolvimento de práticas docentes mais investigativas e criativas.

Carga horária: 100 horas.

Quantidade de vagas: 100

Público: Professores da Educação Básica, Ensino Fundamental e Médio de qualquer rede de ensino.

CURSO DE EXTENSÃO 9: CRIATIVIDADE MATEMÁTICA E A BNCC

Período: 07 de março de 2026 a 26 de junho de 2026.

Encontros presenciais e síncronos: Não haverá.

Encontros assíncronos: Todas as atividades serão realizadas à distância, segundo a autonomia de horário do participante. Para isso será utilizada a plataforma específica do Grupo Tecendo Redes Cognitivas de Aprendizagem (AVA G-TERCOA Formação).

Objetivo: Trabalhar a Matemática de forma criativa, favorecendo o desenvolvimento de práticas inovadoras, insubordinadas, criativas, visando docentes mais conscientes de seu papel formativo.

Carga horária: 200 horas.

Quantidade de vagas: ilimitada.

Público: Professores da Educação Básica do Ensino Fundamental e Médio de qualquer rede de ensino.

2 DA INSCRIÇÃO

2.1 A inscrição dos candidatos às vagas do curso de extensão constante neste edital ocorrerá de 22 de dezembro de 2025 até o dia 04 de fevereiro de 2026.

2.2 A inscrição acontecerá de forma on-line, por meio do formulário de inscrição que pode ser acessado clicando [<https://forms.gle/4iHHTy8N4veyAnki8>] de inscrição.

2.3 O(a) candidato(a) deverá observar todas as etapas de preenchimento do formulário, inclusive atentando para sua confirmação de envio.

2.4 Não haverá cobrança de taxas de inscrição ou quaisquer tipos de mensalidade aos participantes.

Parágrafo único. Havendo necessidade, as datas de realização dos encontros síncronos (presenciais ou on-line) do curso de extensão poderão ser modificadas, sendo os cursistas devidamente informados.

3 DO RESULTADO

3.1 O resultado das inscrições será divulgado no dia 12 de fevereiro de 2026, conforme cronograma do presente edital, na página: <http://www.gtercoa.ufc.br>.

3.2 Os selecionados serão informados do resultado na página: <http://www.gtercoa.ufc.br>, conforme cronograma deste edital.

4 DA AULA INAUGURAL

4.1 Será realizada uma aula inaugural de lançamento do curso de extensão no dia 07

de março de 2026, em local e horário a ser posteriormente definido.

4.2 O local de realização da aula inaugural será divulgado no site: <http://www.gtercoa.ufc.br>.

5 DA CERTIFICAÇÃO

5.1 Exigências para a concessão do certificado de conclusão:

- Participação nas atividades desenvolvidas pelo curso;
- Mínimo de 75% de frequência nas atividades;
- Entrega do termo de compromisso que se encontra no Anexo I deste edital, devidamente preenchido e assinado;
- Entrega do trabalho final.

6 DO CRONOGRAMA

- Lançamento do edital: 22 de dezembro de 2025
- Início das inscrições on-line: de 22 de dezembro de 2025 a 04 de fevereiro de 2026
- Divulgação dos selecionados: 12 de fevereiro de 2026
- Aula inaugural: a ser informada local posteriormente

7 DOS CASOS OMISSOS

7.1 Os casos omissos neste edital serão resolvidos pela equipe de Coordenação do Projeto de Extensão.

Fortaleza - Ceará, 22 de dezembro de 2025

Maria José Costa dos Santos

Coordenadora dos Projetos de Extensão

Líder do G-TERCOA/CNPq/UFC

ANEXO B – CRONOGRAMA DO CURSO DE EXTENSÃO

FASE	PERÍODO 2026		
	Início	Término	Assunto
Módulo 01	14/03/26	21/03/26	<u>1 Introdução às Sequências Recorrentes (14/03/26) (4 h/a)</u> 1.1 Dinâmica do curso de extensão e assinatura dos termos de consentimento (TCLE) 1.2 Apresentação dos conceitos fundamentais de sequências numéricas recorrentes e a importância postulada na BNCC (ex: sequência de Fibonacci, dentre outras); 1.3 Exploração inicial da relação entre pensamento aritmético em relação ao algébrico. 1.4 Atividade Presencial: manipulação livre de artefatos semióticos básicos (barras de <i>Cuisenaire</i>); 1.5 Atividade Online: Fórum de discussão coletivo para que os participantes compartilhem exemplos familiares de sequências numéricas no cotidiano, promovendo reconhecimento prévio da temática. (6h/a).
Módulo 02	21/03/26	28/03/26	<u>2 Construção e Identificação de Padrões com barras de Cuisenaire (28/03/2026) (4 h/a)</u> 2.1 Tarefas colaborativas para reconhecer padrões numéricos recorrentes; 2.2 Uso de barras de <i>Cuisenaire</i> para representar e construir os primeiros termos das sequências; 2.3 Discussão coletiva dialógicas para identificação de regras e regularidades; 2.4 Registro e anotação dos padrões observados; 2.5 Atividade Presencial: uso das barras de Cuisenaire para construir os primeiros termos da sequência e observar a recursividade de algumas sequências numéricas recorrentes. 2.6 Atividade Online: Fórum de discussão coletivo para que os participantes compartilhem exemplos familiares de sequências numéricas no cotidiano, promovendo reconhecimento prévio da temática. (6h/a).
			<u>3 Introdução da Recursividade com Ladrilhos e Tabuleiros Concretos (11/04/2026) (4 h/a)</u> 3.1 Apresentação dos ladrilhos e tabuleiros como outros artefatos semióticos para visualizar

Módulo 03	11/04/26	18/04/26	processos recursivos; 3.2 Atividades de montagem de sequências através da combinação dos ladrilhos ou peças do tabuleiro concreto; 3.3 Comparação entre representações concretas e registros numéricos; 3.4 Reflexão sobre transições do concreto ao abstrato; 3.5 Atividade Presencial: montagem de sequências com ladrilhos e tabuleiros concretos; 3.6 Atividade Online: Fórum de discussão coletivo. (6h/a).
Módulo 04	25/04/26	30/04/26	<u>04 Generalização de Regras e Expressões Algébricas (25/04/2026) (4h/a)</u> 4.1 Exploração da generalização das propriedades das sequências recorrentes; 4.2 Introdução à formulação algébrica da recursividade, utilizando os artefatos como apoio semiótico; 4.3 Tarefas Didáticas Colaborativas entre os professores para ajudar na objetivação da regra $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, e outras com a mesma recursividade; 4.4 Debate e resolução coletiva de problemas relacionados a sequências numéricas recorrentes; 4.5 Atividade Presencial: vivência para formular a lei de formação $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ 4.6 Atividade Assíncrona: Videoaula postada no ambiente AVA com quiz interativo para identificar e generalizar padrões de sequência, reforçando os conceitos algébricos ensinados. (6 h/a)
Módulo 05	09/05/26	16/05/26	<u>5 Ampliação da Sequência e Investigações Multimodais (09/05/2026) (4h/a)</u> 5.1 Atividades para expandir as sequências e explorar propriedades fundamentais da soma, multiplicação, razões e proporções; 5.2 Uso simultâneo de diferentes artefatos (barras, ladrilhos e tabuleiros) para abordar a sequências; 5.3 Análise multimodal dos processos de aprendizagem: fala, gestos, desenhos, registros; 5.4 Avaliação formativa por meio da observação e registro dos processos de ensino e aprendizagem; 5.5 Atividade Presencial: uso simultâneo de

			barras, ladrilhos e tabuleiros para ampliar a objetivização de sequências; 5.6 Atividade Online: Fórum de discussão coletivo. (6h/a).
Módulo 06	16/05/26	23/05/26	<u>6 Reflexão Metodológica e Formação Docente (23/05/2026) (4/h/a)</u> 6.1 Revisão dos processos de ensino e aprendizagem encontrados durante os módulos anteriores; 6.2 Discussão no planejamento de aulas, a <i>posteriori</i> ; 6.3 Observações acerca das tarefas didáticas aplicadas em contexto acadêmico; 6.4 Feedback e avaliação final, enfatizando a construção coletiva do conhecimento docente; 6.5 Atividade Presencial: planejamento coletivo e avaliação formativa 6.6 Atividade Online: sugestão de planos de aula, seguido ideias e inserindo a proposta de materiais manipulativos. (6 h/a)

ANEXO C – PARECER DO COMITÊ DE ÉTICA E PESQUISA (CEP/IFCE)

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA DO CEARÁ -
IFCE



PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: NÚMEROS METÁLICOS: VISUALIZAÇÃO E PROPRIEDADES ATRAVÉS DAS BARRAS DE CUISENAIRE, TABULEIRO E LADRILHOS COM APOIO DA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO

Pesquisador: FRANCILIANE ALBUQUERQUE FORMIGA

Área Temática:

Versão: 3

CAAE: 94119125.2.0000.5589

Instituição Proponente: INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 8.152.452

Apresentação do Projeto:

A Matemática apresenta-se de forma intrigante e transcende as fronteiras disciplinares, revelando uma beleza e interconectividade que se sobrepõe ao *geos lacônico* (Alves, 2022, p. 2). Um exemplo dessa ubiquidade é a razão Áurea (ϕ , 1,618) também conhecido como número de ouro, reconhecida como presença importante em fenômenos naturais, estruturas arquitetônicas e obras de arte, validando a harmonia subjacente ao universo (Livio, 2002). Portanto, consubstancia um campo de estudo profícuo que evidencia uma conexão profunda entre a matemática e o meio físico (Spinadel, 1995).

Desenho:

A presente pesquisa adotará uma abordagem qualitativa, de cunho aplicado, com objetivos exploratórios e descritivos. Metodologicamente, caracteriza-se como pesquisa participante e fundamenta-se na Engenharia Didática (ED), tendo como referencial teórico a Teoria da Objetivação (TO).

Critérios de inclusão:

Ser professor em formação ou formado em (licenciatura em Matemática ou Pedagogia com ênfase em Matemática) matriculado em disciplina, estágio ou programa de formação relacionado ao ensino de Matemática.

Ter cursado, no mínimo, os componentes curriculares que abordam números, sequências e/ou

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703

Bairro: Jardim América

CEP: 60.410-426

UF: CE

Município: FORTALEZA

Telefone: (85)3401-2302

Fax: (85)3401-2302

E-mail: cep@ifce.edu.br

**INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA DO CEARÁ -
IFCE**



Continuação do Parecer: 8.152.452

equações do segundo grau (ou conteúdos equivalentes), para possibilitar a compreensão das propriedades recursivas e dos Números Metálicos.

Ter disponibilidade para participar integralmente da Atividade Formativa (cinco tarefas progressivas), em encontros presenciais ou remotos, conforme planejamento do estudo.

Manifestar concordância em participar da pesquisa, assinando o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE).

Crterios de exclusão:

Estar em situação de trancamento de matrícula, afastamento ou licença que impea a participação regular nos encontros previstos para a Atividade Formativa.

Apresentar dificuldade significativa de comunicação oral ou escrita em portugus que inviabilize a participao nas discusses, registros reflexivos ou entrevistas previstas no estudo, sem que o protocolo preveja recursos adequados de acessibilidade.

Não concluir todas as etapas da Atividade Formativa (por exemplo, ausncia em parte significativa das cinco tarefas, impossibilitando a anlise dos processos de objetivao e subjetivao).

Recusar o uso de registros (anotaes, produes escritas, entrevistas, gravaes em audio ou vdeo) para fins de pesquisa, quando estes forem dispositivos centrais para analisar o itinerrio de transio entre os materiais concretos e os processos formativos.

Objetivo da Pesquisa:

Objetivo Primrio:

Compreender a vivncia na implementao de uma Atividade Formativa e analisar a viabilidade de um itinerrio de transio subsidiados por barras de Cuisenaire, tabuleiros e ladrilhos, auxiliando professores em formao na visualizao e na objetivao das propriedades fundamentais e recursivas dos Nmeros Metálicos.

Objetivo Secundrio:

-Identificar obstculos epistemolgicos, histricos e didticos existentes no ensino das propriedades fundamentais e recursivas dos NM;

-Avaliar a vivncia na aplicao de uma Atividade Formativa, composta por cinco tarefas progressivas para a construo desse entendimento, a partir de momentos subsidiados pelos tabuleiros, ladrilhos e barras de Cuisenaire e fundamentados na TO e na ED;

-Apresentar os processos de objetivao e subjetivao dos professores em formao sobre as propriedades recursivas a partir da Atividade Formativa;

Endereo: Rua Jorge Dantas, nº 1300

Bairro: Jardim Amrica

CEP: 60.410-426

UF: CE

Municpio: FORTALEZA

Telefone: (85)3401-2302

Fax: (85)3401-2302

E-mail: cap@ifce.edu.br

**INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA DO CEARÁ -
IFCE**



Continuação do Parecer: 8.152.452

-Analisar os aspectos positivos e dos desafios observados neste estudo subsequentes a esta investigação.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

Riscos:

1-Ansiedade e Estresse: Alunos ou professores podem sentir-se ansiosos ou estressados ao serem observados, avaliados ou ao participarem de atividades não rotineiras (Gradação de Risco: Médio);

2-Frustração ou Baixa Autoestima: Se os participantes não conseguirem realizar as tarefas propostas, especialmente em atividades desafiadoras, isso pode afetar sua autoestima ou levar à frustração (Gradação de Risco: Médio);

3-Interrupção do Processo de Ensino-Aprendizagem: Atividades de pesquisa podem interromper ou modificar o fluxo normal das aulas, o que pode impactar negativamente o aprendizado dos alunos (Gradação de Risco: Médio).

Com isso, é possível tomar algumas medidas para evitar tais riscos, sejam elas:

1- Preparação dos participantes, explicando claramente o propósito da pesquisa e o que se espera deles.

Garantir que entendam que não há "respostas certas ou erradas" pode ajudar a reduzir a pressão.

2- Descaracterização da Avaliação: Ressaltar que a pesquisa não tem como objetivo avaliar ou julgar os participantes, mas sim compreender processos de ensino e aprendizagem. Enfatizar que a participação não afetará suas notas ou desempenho profissional, fornecendo um suporte emocional.

3- Planejamento Flexível: Realizar a pesquisa em horários que causem o mínimo de interrupção, como durante aulas menos intensivas ou em períodos específicos designados para atividades extracurriculares.

Benefícios:

Os participantes terão oportunidade de participarem da Atividade Formativa possibilitando aos discentes da Licenciatura em Matemática desenvolver uma concepção epistemológica da História da Matemática através de estudos de definições, teoremas e propriedades matemáticas inerentes aos Números Metálicos. Contribuindo assim, com a formação inicial dos professores.

Endereço: Rua Jorge Dantas, nº 1100

Bairro: Jardim América

CEP: 60.410-426

UF: CE

Município: FORTALEZA

Telefone: (85)3401-2302

Fax: (85)3401-2302

E-mail: cap@ifce.edu.br

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ - IFCE



Continuação do Parecer: 6.152.432

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

Projeto de Pesquisa apresentado ao Curso de Mestrado Acadêmico do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PGECM) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) - Campus Fortaleza.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

Constam os termos obrigatórios: Folha de rosto; Informações básicas do projeto; Orçamento; Cronograma; Declaração de compromisso de apresentação dos resultados; Declaração de garantia de regresso dos benefícios da pesquisa; Termo de consentimento livre e esclarecido; Termo de autorização e de existência de infraestrutura, Roteiro de entrevista ou questionário/formulário, Termo de cessão de imagem/ou voz.

Recomendações:

Sem recomendações.

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

Sem pendências.

Considerações Finais a critério do CEP:

Parecer consubstanciado de aprovação disponível na pasta (ou diretório) „Pareceres„.

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_2700733.pdf	30/01/2026 13:18:32		Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE.pdf	30/01/2026 13:17:04	FRANCILIANE ALBUQUERQUE FORMIGA	Aceito
Folha de Rosto	folha_De_Rosto.pdf	30/01/2026 13:16:29	FRANCILIANE ALBUQUERQUE FORMIGA	Aceito
Brochura Pesquisa	brochura.pdf	09/01/2026 00:11:39	FRANCILIANE ALBUQUERQUE FORMIGA	Aceito
Cronograma	cronograma_assinado.PDF	09/01/2026 00:09:08	FRANCILIANE ALBUQUERQUE FORMIGA	Aceito

Endereço: Rua Jorge Damer, nº 1100

Bairro: Jardim América

CEP: 60.410-426

UF: CE Município: FORTALEZA

Telefone: (85)3401-2302

Fax: (85)3401-2302

E-mail: cep@ifce.edu.br

**INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA DO CEARÁ -
IFCE**



Continuação do Parecer: 8.152.452

Projeto Detalhado / Brochura Investigador	Projeto.pdf	08/01/2026 15:39:59	FRANCILIANE ALBUQUERQUE FORMIGA	Aceito
Outros	Questionarios.docx	08/01/2026 15:30:41	FRANCILIANE ALBUQUERQUE FORMIGA	Aceito
Declaração de Pesquisadores	Declaraçãoregressopesquisa.pdf	25/11/2025 17:21:46	FRANCILIANE ALBUQUERQUE FORMIGA	Aceito
Orçamento	Orçamento_pesquisa_Franassinado.pdf	22/11/2025 15:40:44	FRANCILIANE ALBUQUERQUE FORMIGA	Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	Termo_de_infraestrutura.pdf	22/11/2025 15:39:42	FRANCILIANE ALBUQUERQUE FORMIGA	Aceito

Situação do Parecer:

Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:

Não

FORTALEZA, 04 de Fevereiro de 2026

Assinado por:
Luiz Torres Raposo Neto
(Coordenador(a))

Endereço: Rua Jorge Dantas, nº 1700
Bairro: Jardim América CEP: 60.410-426
UF: CE Município: FORTALEZA
Telefone: (85)3401-2302 Fax: (85)3401-2302 E-mail: cep@ifce.edu.br