



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ
IFCE *CAMPUS* FORTALEZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
– PGECM

CÍCERA FERNANDES

**ENGENHARIA DIDÁTICA DE FORMAÇÃO: CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DAS
SITUAÇÕES DIDÁTICAS NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE
MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE ESTADUAL VALE DO ACARAÚ**

FORTALEZA

2021

CÍCERA FERNANDES

ENGENHARIA DIDÁTICA DE FORMAÇÃO: CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DAS
SITUAÇÕES DIDÁTICAS NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE
MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE ESTADUAL VALE DO ACARAÚ

Dissertação apresentada à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) - *Campus* Fortaleza, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.

Coorientadora: Prof.a. Dra. Maria José Araújo Souza.

FORTALEZA

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal do Ceará - IFCE
Sistema de Bibliotecas - SIBI

Ficha catalográfica elaborada pelo SIBI/IFCE, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- F363e Fernandes, Cícera.
 ENGENHARIA DIDÁTICA DE FORMAÇÃO: CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DAS SITUAÇÕES
 DIDÁTICAS NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE
 ESTADUAL VALE DO ACARAÚ / Cícera Fernandes. - 2021.
 192 f. : il. color.
- Dissertação (Mestrado) - Instituto Federal do Ceará, Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática,
 Campus Fortaleza, 2021.
 Orientação: Profa. Dra. Francisco Regis Vieira Alves .
 Coorientação: Profa. Dra. Maria José Araújo Souza .
1. Geometria Analítica. 2. Engenharia Didática de Formação. 3. Teoria das Situações Didáticas. 4.
 GeoGebra. I. Título.
-

CDD 510.07



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ
Av. 13 de maio, 2081 , - Bairro Benfica - CEP 60040-531 - Fortaleza - CE - www.ifce.edu.br

ATA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIA MATEMÁTICA (PGECM)

Aos 12 dias do mês de fevereiro do ano de 2021, às 14h no através de videoconferência pelo link <https://meet.google.com/obn-sbvo-tgi>, realizou-se a Defesa de dissertação, intitulada "**ENGENHARIA DIDÁTICA DE FORMAÇÃO: CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE ESTADUAL VALE DO ACARAÚ**", de autoria da candidata **CÍCERA FERNANDES**, aluna do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PGCEM/IFCE, em nível de Mestrado. A Comissão Examinadora esteve constituída pelos professores: **Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves, Presidente**– IFCE, orientador, **Profa. Dra. Maria José Araújo Souza** – UVA, coorientadora, **Profa. Dra. Francisca Cláudia Fernandes Fontenele** - UVA, **Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes** – UVA, **Profa. Dra. Benedita Marta Gomes Costa** – UVA. Concluídos os trabalhos de apresentação e arguição, o candidato foi **APROVADO** pela Comissão Examinadora. Foi concedido um prazo de 90(noventa) dias, para o candidato efetuar as correções sugeridas pela Comissão Examinadora e apresentar o trabalho em sua redação definitiva, sob pena de não expedição do Diploma. E, para constar, foi lavrada a presente ata, que vai assinada pelos membros da Comissão.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves, Presidente - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) , orientador

Profa. Dra. Maria José Araújo Souza – Universidade Estadual Vale do Acaraú - UVA, coorientadora

Profa. Dra. Francisca Cláudia Fernandes Fontenele - Universidade Estadual Vale do Acaraú - UVA

Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes – Universidade Estadual Vale do Acaraú - UVA

Profa. Dra. Benedita Marta Gomes Costa – Universidade Estadual Vale do Acaraú - UVA

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: ENGENHARIA DIDÁTICA DE FORMAÇÃO: CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE ESTADUAL VALE DO ACARAÚ

LOCAL: <https://meet.google.com/obn-sbvo-tgi>

HORA DE INÍCIO: **14h**

Em sessão pública, após exposição de cerca de 40 minutos, a candidata foi arguida oralmente pelos membros da banca tendo como resultado:

() APROVADO

() APROVADO com louvor.

(X) APROVAÇÃO CONDICIONAL, devendo o candidato satisfazer, no prazo máximo de 90 dias, às exigências listadas na Folha de Modificações de Dissertação de Mestrado anexa à presente ata.

() REPROVADO.

Na forma regulamentar foi lavrada a presente ata que é abaixo assinada pelos membros da banca, na ordem acima determinada, e pelo candidato.

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Profa. Dra. Maria José Araújo Souza

Profa. Dra. Francisca Cláudia Fernandes Fontenele

Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes

Profa. Dra. Benedita Marta Gomes Costa

Candidata: **CÍCERA FERNANDES**



Documento assinado eletronicamente por **Daniel Brandão Menezes, Usuário Externo**, em 12/02/2021, às 16:50, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Francisca Cláudia Fernandes Fontenele, Usuário Externo**, em 12/02/2021, às 19:19, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Maria José Araújo Souza, Usuário Externo**, em 23/02/2021, às 17:50, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Benedita Marta Gomes Costa, Usuário Externo**, em 23/02/2021, às 21:11, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Francisco Régis Vieira Alves, Professor(a) do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico**, em 24/02/2021, às 08:04, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Cícera Fernandes, Usuário Externo**, em 26/02/2021, às 09:09, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade do documento pode ser conferida no site

[https://sei.ifce.edu.br/sei/controlador_externo.php?](https://sei.ifce.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0)

[acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0](https://sei.ifce.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0) informando o código verificador **2384263** e o código CRC **43D99755**.

A Deus.

Aos meus pais, Cícero Fernandes Lima (*In memoriam*) e Maria Vicentina Fernandes.

À minha família linda.

Ao meu amado namorado Maurício.

Aos meus parentes, amigos, professores, ex-professores, alunos e ex-alunos.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por tudo o que proporciona na minha vida. Sei que nada chega por acaso na nossa vida. Tudo tem um propósito e um ensinamento que nos possibilita evoluir um pouco mais em nossa trajetória diária. Meu Deus, obrigada por todo o discernimento, determinação, persistência e vontade de seguir sempre em frente com muita garra e determinação em todos os momentos da minha vida e por me apresentar pessoas de bem que só acrescentaram de maneira positiva na minha caminhada.

À minha família, por estar sempre presente em todos os momentos com o seu melhor, incentivando com palavras e atitudes altruístas que fortalecem e me mantêm integrada com o meu melhor para encarar as adversidades do dia a dia. Sou eternamente grata por fazer parte dessa família guerreira e que transborda o seu melhor, a qual vou deixar representada pela Maria Vicentina Fernandes (mamãe), que, mesmo após a morte precoce de seu esposo (papai), seguiu incrivelmente sua vida em função dos seus seis filhos, os quais vivem muito bem, graças a Deus. Não posso deixar de mencionar minha irmã (Rosângela Fernandes) por sempre se fazer presente na minha vida estudantil da melhor forma possível, incentivando, mesmo nos momentos que pareciam impossíveis, ela nunca deixava de acreditar no meu potencial.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves, pela dedicação, disposição e paciência nas orientações, mesmo com seu tempo escasso devido a tantos afazeres e orientações para se dedicar. Sei que não é nada fácil seguir com as metas e objetivos, principalmente quando as pressões externas e internas nos deixam receosos acerca de dar conta de tudo e em tempo hábil. Assim, agradeço pelo apoio e confiança nos trabalhos realizados nesta trajetória do Mestrado, onde, com muito amor e dedicação, foi feito o melhor possível com o intuito de contribuímos para o ensino de Matemática. Registro, também, meu sentimento de GRATIDÃO pelos estímulos dados que me impulsionaram a ir além dos meus limites na minha jornada do Mestrado, a qual prossegui sempre com muita fé e dedicação na realização de cada trabalho.

À minha coorientadora, Prof.a Dra. Maria José Araújo Souza, por sua generosa dedicação, zelo e presença para orientar em consonância com as orientações do Dr. Francisco Régis Vieira Alves, para a condução mais assertiva da pesquisa realizada. Sei que os meus agradecimentos se estendem à trajetória do mestrado, pois desde a minha graduação em Matemática você esteve muito presente, doando o seu melhor para que pudesse atravessar

melhor os problemas vigentes e encarasse a minha profissão mais humanamente, com bem mais amor e profissionalismo. Gratidão imensurável, professora Mazé!

Aos professores do programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, por confiarem e expandirem meus conhecimentos na área, para meu aperfeiçoamento profissional e direcionamento da minha identidade acadêmica.

Ao curso de extensão da Universidade Estadual Vale do Acaraú - *Pós-graduação, um sonho possível*, liderado pelos professores doutores Daniel Brandão e Mazé Souza, aos quais dedico imensa gratidão e admiração pelo excelente trabalho voluntário que realizam encaminhando sonhos.

Ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú, em nome de todos os professores, por nos ensinar a abrir a mente para criarmos asas para voos mais altos e longos nesta nossa caminhada estudantil (acadêmica).

À turma de 2019 de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, principalmente à nossa turma da Matemática (Alison, Arianny, Evamar, Gleison, Hedyleno, Milena e Rosalide), os quais deixo representados no nome da Renata Passos Machado Vieira, pela grandeza que representou para cada um de nós, por todos os incentivos e cooperações enriquecedoras. Não posso deixar de registrar o agradecimento especial à “turma de Sobral” (Gleison e Rosalide), batizada pelo nosso orientador, pela união, companheirismo, reflexões, direcionamentos e, mesmo em meio a tanta exaustão, estávamos sempre de prontidão a ajudar um ao outro.

À minha equipe de trabalho da Escola Estadual de Educação Profissional Governador Waldemar Alcântara (família guerreira), pelo companheirismo e incentivos de sempre, a qual deixo representada no nome da diretora Tatianni Cruz, pela bravura, competência e fortaleza que representa nesta instituição de ensino. Não posso deixar de agradecer as pontuais correções da professora Germana Coelho e do professor Vianney Mesquita.

Aos alunos, os quais tive o privilégio de conhecer, meus agradecimentos inestimáveis. Todos vocês foram determinantes para me impulsionarem à realização deste mestrado. Meus queridos alunos e ex-alunos, obrigada de coração por confiarem no meu trabalho e no profissionalismo de toda a equipe.

Aos amigos registrados na memória e no coração e aos amigos de *bike* (“anjos ante estresses”), os quais vou representá-los pela amiga e ciclista Geovana Fernandes, por toda a sua leveza e profissionalismo.

Aos professores da banca examinadora, à Dra. Cláudia Fernandes, à Profa. Dra. Benedita Marta Gomes Costa e ao Dr. Daniel Brandão, meu muitíssimo obrigada por estarem presentes

ao longo deste processo de mestrado e por todas as sugestões e *feedbacks* que ajudaram a direcionar esta pesquisa junto com meu orientador e minha coorientadora.

Aos licenciandos do curso de Matemática, que fizeram parte desta pesquisa, os quais não mediram esforços com as contribuições para as extrações de dados da melhor maneira possível, mesmo por se tratar de uma aplicação remota.

*Se suas ações inspiram outros a sonhar mais,
aprender mais, fazer mais e tornar-se mais,
você é um líder.*

(John Quincy Adams)

RESUMO

O ensino de Matemática sempre nos coloca em reflexão acerca dos desafios enfrentados em sala de aula. Não é fácil para o professor se antecipar e se precaver dos problemas impeditivos de os alunos de atingirem o conhecimento desejável nas expressas situações didáticas. Neste sentido, ressaltamos a importância e as contribuições da complementação de um quadro teórico da Engenharia Didática de Formação, em razão da necessidade de uma formação sobre o ensino de Geometria Analítica com uma aplicação da Teoria das Situações Didáticas com situações-problema do Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará, com o auxílio do *software* GeoGebra, contribuindo para uma compreensão mais abrangente dos assuntos matemáticos. Para subsidiar o professor, esta pesquisa tem como objetivo investigar contribuições da Teoria das Situações Didáticas articulada com a Engenharia Didática de Formação, por meio de questões do Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará, envolvendo a Geometria Analítica e o *software* GeoGebra na formação inicial dos professores de Matemática. De tal modo, foi realizada uma formação metodológica com os alunos da graduação do curso de licenciatura em Matemática na Universidade Estadual Vale do Acaraú. A modalidade dessa formação ocorreu remotamente, com a utilização do *Google Meet* e com o auxílio do *e-mail* e do *WhatsApp* para agilizar a organização dos encontros *online* com as situações didáticas. A elaboração das situações didáticas e a aplicação da Teoria das Situações Didáticas seguiram as quatro fases da Engenharia Didática: as análises preliminares, a análise *a priori*, a experimentação e a análise *a posteriori*, sendo complementada pelos elementos da Engenharia Didática de Formação. Assim, a mediação didática durante os processos de ensino e de aprendizagem foi estruturada, organizada e direcionada para uma análise dos pormenores, possibilitando prever e controlar as ações dos estudantes nas sessões didáticas. Desse modo, foi concluído que a aplicação da Teoria das Situações Didáticas, com base na Engenharia Didática de Formação, subsidiou os professores em formações com recursos essenciais para identificar as interações na tríade (professor, saber e aluno) das relações didáticas, com o uso de questões de Geometria Analítica dirigida para o Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará, com o auxílio do *software* GeoGebra, oferecendo muitas contribuições para a formação inicial de professores de Matemática. Além disso, concluiu-se o quão enriquecedor foi o auxílio do *software* GeoGebra, como uma ferramenta tecnológica, para potencializar a realização das questões e complementar de maneira mais significativa a compreensão e abrangência dos assuntos matemáticos de modo mais dinâmico

e protagonista, sendo capaz de desenvolver conexões mais profundas e assertivas nas relações envolvendo professor, aluno e saber, fortalecendo o ensino e a aprendizagem em sala de aula.

Palavras-chave: Geometria Analítica. Engenharia Didática de Formação. Teoria das Situações Didáticas. GeoGebra.

ABSTRACT

The teaching of mathematics always puts us in a reflection about the challenges faced in the classroom. It is not easy for the teacher to anticipate and prevent problems that may prevent students from achieving the desirable knowledge in the didactic situations presented. In this sense, we emphasize the importance and contributions of complementing a theoretical framework of Didactic Training Engineering, due to the need for training on the teaching of Analytical Geometry with an application of Didactic Situations Theory with problem situations of the Permanent Assessment System Basic Education of Ceará, with the help of the GeoGebra software, contributing to a more comprehensive understanding of mathematical subjects. To support the teacher, this research aims to investigate contributions from the Theory of Didactic Situations articulated with Didactic Engineering of Training, through questions from the Permanent Evaluation System of Basic Education in Ceará, involving Analytical Geometry and GeoGebra software in the initial training of math teachers. In this way, a methodological training was carried out with undergraduate students of the undergraduate course in Mathematics at the State University Vale do Acaraú. The form of this training took place remotely, with the use of Google Meet and with the help of e-mail and WhatsApp to streamline the organization of online meetings with didactic situations. The construction of didactic situations and the application of Theory of Didactic Situations followed the four phases of Didactic Engineering: preliminary analysis, a priori analysis, experimentation and a posteriori analysis, being complemented by the elements of Didactic Training Engineering. Thus, the didactic mediation during the teaching and learning processes was structured, organized, directed to an analysis of the details, making it possible to predict and control the students' actions in the didactic sessions. Thus, it was concluded that the application of Didactic Situations Theory, based on Didactic Training Engineering, subsidized teachers in training with essential resources to identify interactions in the triad (teacher, knowledge and student) of didactic relationships, with the use questions of Analytical Geometry focused on the Permanent Evaluation System of Basic Education in Ceará, with the help of the GeoGebra software, offering many contributions to the initial training of mathematics teachers. In addition, it was concluded how enriching was the help of the GeoGebra software, as a technological tool, to enhance the realization of the questions and more significantly complement the understanding and comprehensiveness of mathematical subjects in a more dynamic and protagonist way, being able develop deeper and more assertive connections in relationships involving teacher, student and knowledge, strengthening teaching and learning in the classroom.

Keywords: Analytical Geometry. Didactic Engineering Training. Theory of Didactic Situations. GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - As categorias de conhecimento matemático para o ensino.....	25
Figura 2 - Fluxograma do esquema experimental	26
Figura 3 - Cronograma de atividades realizadas via <i>Google Meet</i> no curso de extensão universitária	28
Figura 4 - Fases da ED	32
Figura 5 - Tríade das relações didáticas	38
Figura 6 – Situações a-didáticas das três primeiras fases da TSD.....	41
Figura 7 - Saber e conhecimento no processo de devolução e institucionalização	422
Figura 8 - Relação entre as fases da TSD	43
Figura 9 - Processo da Transposição Didática.....	44
Figura 10 - Plano Cartesiano Ortogonal.....	48
Figura 11 - Segmento AB com mesma ordenada	49
Figura 12 - Segmento AB com mesma abscissa	49
Figura 13 - Por Pitágoras encontrando a $d(AB)$	50
Figura 14 - Encontrando a $d(AB)$	50
Figura 15 - $\Delta BQ1P1$ e $\Delta BQ2P2$ são semelhantes pelo ângulo agudo B	52
Figura 16 - Inclinação da reta r positiva e da reta s negativa	53
Figura 17 - A interseção das retas $y = mx + n$ e $y = m'x + n'$ é o ponto $p = x, y$	53
Figura 18 - Representação geométrica das retas paralelas com mesma inclinação, porém $n \neq n'$	54
Figura 19 - A distância do vértice à base é a altura do triângulo	54
Figura 20 - O triângulo $A1A2A3$ foi transladado para a posição PQO	55
Figura 21 – Circunferência Γ , raio r e centro A	55
Figura 22 - A circunferência Γ é transladada sobre Γ'	57
Figura 23 - Mapa Conceitual da Circunferência na Geometria Analítica	58
Figura 24 - A inclinação da reta f é positiva.....	83
Figura 25 - A inclinação da reta g é negativa	83
Figura 26 – Circunferência Γ' , de centro A e raio r	92
Figura 27 - Resultado de alguns itens do questionário: Prévia dos participantes da pesquisa (questões: 2, 7 e 12).....	99
Figura 28 – Outros dados extraídos do questionário prévio dos alunos (questões: 9 e 10)....	100
Figura 29 - Percepções da inclinação da reta (aluna 3, fase de ação e formulação).....	102

Figura 30 – Reconhecimento da inclinação da reta e do sinal de cada coeficiente (aluna 2, fase de formulação e validação).....	103
Figura 31 - Reconhecimento dos sinais dos coeficientes de uma equação da reta com a utilização do GeoGebra (aluna 1, fase de ação e formulação).....	103
Figura 32 - Ilustração do procedimento da sequência de resolução das situações-problema.	106
Figura 33 - Elaboração da questão 01 no GeoGebra pelo aluno12	107
Figura 34 - Exposição da situação-problema 01, via <i>Google Meet</i> , pelo aluno 6.....	107
Figura 35 - Identificações de alguns termos da equação da reta (aluno 11, fase de ação e formulação).....	110
Figura 36 - Item correto da situação-problema (02).....	110
Figura 37 - Reforçando a definição do coeficiente angular da reta (aluno 7, fase de formulação)	111
Figura 38 – Outro modo de resolução da situação-problema 02 (aluna 2).....	111
Figura 39 - Explorando a questão nos aspectos implícitos para aprofundar o assunto (professor, fase de institucionalização).....	113
Figura 40 - Exposição da situação (2) no GeoGebra (aluno 6)	113
Figura 41 - Outra maneira de elaborar a situação (2) no GeoGebra (aluno 11).....	114
Figura 42 - Suposição do sinal da inclinação da reta sem rigor matemático (aluno 12, fase de ação).....	119
Figura 43 - Substituição dos pontos nas alternativas (itens) (aluno 12, fase de ação e formulação)	120
Figura 44 - Equação da reta encontrada pelo determinante (aluno 3, fase de formulação e validação).....	120
Figura 45 - Equação da reta encontrada pela fórmula do feixe de retas (aluno 7, fase validação)	121
Figura 46 - Início da elaboração e exposição no GeoGebra (aluno 1, fase validação)	122
Figura 47 - Exposição da professora na fase de institucionalização da TSD	123
Figura 48 - Exposição da situação (3) no GeoGebra (aluno 11)	123
Figura 49 - Exposição da situação (3) no GeoGebra, utilizando os itens.....	124
Figura 50 - Estratégia de resolução utilizando determinante (aluno 9, fase de ação e formulação)	125
Figura 51 - Início da resolução pela fórmula da área (aluno 7, fase de formulação)	125
Figura 52 - Resolução da situação-problema (4) (aluno 3, fase validação)	126

Figura 53 - Cálculo da distância dos lados isósceles do triângulo (aluno 11, reflexão sobre um possível caminho utilizado por alguns alunos em sala de aula)	127
Figura 54 - Formulação da situação-problema 4 no GeoGebra (aluno 6)	128
Figura 55 - Fase de ação e formulação pelo aluno 2 (equação da circunferência).....	131
Figura 56 - Fase de formulação pelo aluno 7 (equação da circunferência).....	131
Figura 57 - Fase de validação pelo aluno 3 (equação da circunferência).....	132
Figura 58 - Fase de institucionalização com a mediação da professora (equação da circunferência).....	133
Figura 59 - Formulação de todas as equações dadas na situação-problema (5) pelo aluno 6	135
Figura 60 – À esquerda, a fase de ação do aluno 2 e à direita, a fase de formulação do aluno 9	135
Figura 61 - Apresentação do aluno 6 na fase de validação	136
Figura 62 - Apresentação do aluno 3 na fase de validação	137
Figura 63 - Demonstração da definição da equação da circunferência pelo aluno 6	138
Figura 64 - Formulação da equação da circunferência no <i>software</i> GeoGebra pelo aluno 6.	138
Figura 65 - Fluxograma com a tríade das relações didáticas de Brousseau e algumas variáveis didáticas desta pesquisa	149
Figura 66 - Dados extraídos da avaliação realizada após os cinco encontros pelos alunos (questão 1).	150

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - TSD: Categorização dos momentos de resolução das situações-problema e sua correlação com a EDF	140
Tabela 2 - Respostas objetivas da avaliação após formação metodológica	151
Tabela 3 - Questões da avaliação realizada (questão 4)	152
Tabela 4 - Questões da avaliação realizada (questão 8)	153

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

CAEd/UFJF	Centro de Políticas Públicas e Avaliação da Educação da Universidade Federal de Juiz de Fora
CAS	Sistema de Computação Algébrico
CEP	Comitê de Ética em Pesquisa
DGS	Sistema de Geometria Dinâmico
ED	Engenharia Didática
EDF	Engenharia Didática de Formação
EJA	Educação de Jovens e Adultos
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
MEC	Ministério da Educação
NEaD-UVA	Núcleo de Educação a Distância da UVA
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCN+	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio Modificados
PCN+ EM1	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio 1
PISA	Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SPAECE	Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
TIC	Tecnologia da Informação e Comunicação
TSD	Teoria das Situações Didáticas
UVA	Universidade Estadual Vale do Acaraú

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	20
1.2 Procedimentos metodológicos.....	24
2 QUADRO TEÓRICO.....	29
2.1 Noções de Engenharia Didática.....	30
2.2 Engenharia Didática de Formação	34
2.3 Teoria das Situações Didáticas	37
2.3.1 <i>Ação</i>	39
2.3.2 <i>Formulação</i>	40
2.3.3 <i>Validação</i>	400
2.3.4 <i>Institucionalização</i>	42
2.4 A Transposição Didática e o Contrato Didático	44
2.5 Geometria Analítica	47
2.5.1 <i>Ponto e Reta</i>	47
2.5.2 <i>Equação da Circunferência</i>	55
3 A GEOMETRIA ANALÍTICA E O SISTEMA PERMANENTE DE AVALIAÇÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA DO CEARÁ.....	59
3.1 Um cenário do Ensino de Geometria Analítica.....	59
3.2 A Geometria Analítica e o currículo do Ensino Médio versus Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará.....	63
3.3. GeoGebra e suas contribuições para o ensino de Matemática	72
4 EXPERIÊNCIA DIDÁTICA: GEOMETRIA ANALÍTICA DIRIGIDA AO SPAECE NO CURSO DE EXTENSÃO UNIVERSITÁRIA	75
4.1 Análise Preliminar	76
4.2 Análise <i>a priori</i> das situações didáticas.....	79
4.2.1 <i>Situação-problema (1)</i>	81
4.2.2 <i>Situação-problema (2)</i>	83
4.2.3 <i>Situação-problema (3)</i>	85
4.2.4 <i>Situação-problema (4)</i>	86
4.2.5 <i>Situação-problema (5)</i>	88
4.2.6 <i>Situação-problema (6)</i>	90
4.3 Experimentação	93

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS.....	98
5.1 Análise <i>a posteriori</i> e validação interna	100
5.2 Validação interna.....	155
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	161
REFERÊNCIAS.....	165
APÊNDICE A – ESTRUTURA DA PESQUISA BASEADA NA ENGENHARIA DIDÁTICA, ENGENHARIA DIDÁTICA DE FORMAÇÃO EM ASSOCIAÇÃO COM A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS	173
APÊNDICE B – SITUAÇÕES-PROBLEMA.....	174
APÊNDICE C – PRÉVIA DOS PARTICIPANTES DA PESQUISA	177
APÊNDICE D – AVALIAÇÃO FINAL DO USO DA ENGENHARIA DIDÁTICA.....	181
ANEXO A – PARECER DO COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA.....	183
ANEXO B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO.....	188

1 INTRODUÇÃO

Nas tentativas de respostas que atendam ao máximo o processo de ensino e aprendizagem dos alunos e amparo maior na atuação dos professores em sala de aula, a Didática amplia constantemente suas metodologias, teorias, métodos e áreas específicas. Mesmo que seja difícil suprir todas as necessidades referentes aos problemas, tende a amenizá-los. Dessa maneira, as didáticas específicas, como a Didática da Matemática, tentam direcionar e amparar suas especificidades para atender às necessidades inerentes às dimensões de uma sala de aula como um todo, possibilitando aos professores uma maior adequação com métodos e técnicas no processo de ensino-aprendizagem (PAIS, 2002).

Sabemos das dificuldades enfrentadas pelos professores e alunos em sala de aula, em razão das inúmeras interferências internas e externas, bem como microvariáveis e macrovariáveis impulsionadores de entraves, muitas vezes, dificultando o trabalho do professor na condução das sessões didáticas. Mesmo sabendo que tudo isso influencia direta e indiretamente na qualidade do ensino neste sistema educacional vigente, somos todos levados a driblar essas dificuldades do sistema educacional, se quisermos realizar um trabalho com um compromisso maior ao levarmos uma estrutura mais adequada possível aos nossos alunos, proporcionando um ensino e aprendizagem o mais assertivo possível (RICHIT, 2015).

Neste viés, a didática da Matemática, por trabalhar com as concepções dos alunos e com a formação de professores, dentre outros temas, com suas metodologias, teorias e métodos, tenta amenizar essas dificuldades para atender de maneira direcionada e sublime com uma estrutura mais adequada e propícia na execução de uma aula de Matemática (SANTOS, 2015). Segundo Pais (2002), o objeto de estudo da educação matemática é a compreensão, interpretação e descrição de fenômenos referentes ao ensino e aprendizagem da Matemática, em todas as séries escolares, bem como sua dimensão teórica ou prática.

Para garantir uma aprendizagem mais efetiva com os assuntos matemáticos, requer profissionais da educação mais comprometidos e professores com proposta de ensino que atendam às reais necessidades dos alunos, com metodologias e teorias que supram e direcionem ao trabalho em sala de aula que eleve a atenção e os comprometimentos dos alunos nas sessões didáticas, fortalecendo a relação professor, aluno e saber e suas interações (BROUSSEAU, 1996).

As novas modalidades de ensinar e aprender os conceitos matemáticos são indispensáveis e indissociáveis às práticas do professor na elaboração da aprendizagem. Para

que atinjam as sequências didáticas bem direcionadas com teorias que proporcionem aos professores e alunos uma condução nas sessões didáticas com novos formatos de ensinar e aprender os conceitos matemáticos, é essencial que os professores se alicercem de boas práticas pedagógicas para amparar os seus trabalhos e preocupações no direcionamento de um percurso metodológico que potencialize a aprendizagem dos alunos em sala de aula, bem como subsidie os trabalhos dos professores para a obtenção de um ensino mais eficaz (PERRIN-GLORIAN, 2009).

Neste sentido, esta dissertação propõe uma pesquisa pendida para a Geometria Analítica com situações-problema do Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará (SPAECE) para a formação de professores numa abordagem alternativa do GeoGebra com vistas a uma transposição didática, tendo como metodologia de pesquisa (*design* de investigação) a Engenharia Didática (ED) em à Engenharia Didática de Formação (EDF) e como teoria de ensino a Teoria das Situações Didáticas (TSD) no itinerário de investigação, para otimizar o ensino e a aprendizagem (ALVES, 2016a, 2018).

Em razão da necessidade de investigar quais são as contribuições da TSD com a utilização do *software* GeoGebra, como ferramenta tecnológica para auxiliar as sessões didáticas com questões do SPAECE de Geometria Analítica para fortalecer e orientar melhor o trabalho do professor, esta providência aqui tomada com esta investigação, decerto, vai contribuir para acelerar o aprendizado dos alunos. A aplicação da pesquisa será uma formação com base na TSD e todo o contexto acima com os licenciandos da Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA) ofertado em um curso de extensão universitária; e teremos a ED e EDF como elementos essenciais das situações didáticas. Neste contexto da TSD, uma teoria que aponta para os princípios que modelizam as interações básicas dos fenômenos originados de aprendizagens e ensino que envolvem professor, saber e aluno (ALVES; CATARINO, 2017).

Ao estudar estes conceitos, muitos estudantes apresentam dificuldades na compreensão dos mesmos. Nesse sentido, Rocha (2010) propôs uma abordagem a estes conceitos, lançando mão das Tecnologias e ampliando a abordagem para uma perspectiva que tome a visualização e a experimentação. (RICHIT, 2015, p. 34).

A Geometria Analítica é vista no 3º ano do Ensino Médio e, principalmente, na parte das cônicas, incluindo a circunferência, os alunos tendem a sentir muitas dificuldades na compreensão desses assuntos. A maioria do movimento de constituição na abordagem desses assuntos em sala de aula segue um caminho longo e árduo com um rigor matemático de um modelo tradicional de ensinar por meio de aulas expositivas e centradas em maior parte na

abordagem algébrica, muitas vezes, trazendo dificuldades de compreensão dos conceitos aos alunos (RICHIT, 2015, p. 31).

O estudo da circunferência, devido sua importância, é um dos conteúdos mais ressaltados no currículo da Geometria Analítica. Entretanto, a complexidade dos conceitos relacionados a esse tema, aliada à fragmentação do conteúdo, dificulta o pensar dos alunos de transformar problemas geométricos em resolução de equações, sistemas ou inequações. (CAVALCANTI; LINS, 2003, p. 109).

Como foi ressaltado há pouco pelos autores, existe uma grande importância de trabalhar a Geometria Analítica, em razão, principalmente, da sua relevância no ensino médio com a fusão da Geometria com a Álgebra, sendo um conteúdo que requer muita atenção dos professores pela incidência das dificuldades dos alunos, principalmente na parte que aborda a circunferência, onde é expresso um grau de dificuldade maior, como foi relatado por Cavalcanti e Lins (2003). Segundo os estudos levantados nos Boletins Pedagógicos da Escola, com parcerias do Centro de Políticas Públicas e Avaliação da Educação da Universidade Federal de Juiz de Fora (CAEd/UFJF) e SPAECE, bem como na minha experiência de 10 anos trabalhando nos 3º anos do Ensino Médio, a Geometria Analítica é um dos assuntos bastante cobrados na avaliação do SPAECE dos terceiros anos do Ensino Médio das escolas públicas do Ceará.

Segundo a matriz de referência de Matemática do SPAECE, a Geometria Analítica chega a contemplar mais de 25% dos descritores cobrados nessa avaliação, se compararmos ao parâmetro do total de descritores existentes no 3º ano (24 descritores) com os descritores vinculados à Geometria Analítica (seis descritores). Por isso a escolha deste objeto de estudo e a preocupação com a notória dificuldade no aprendizado desse assunto por parte de muitos discentes, principalmente quando o assunto se refere à circunferência.

Entendemos, assim, que os professores, em geral, precisam de uma formação no conhecimento e na utilização de recursos das Tecnologias Digitais com foco nas possibilidades didáticas e formativas, de modo a modificar os processos de ensino e ampliar a abordagem de conceitos no âmbito da Matemática. Essa formação, construída em espaços formativos colaborativos, pode ajudar os professores nesse sentido. (RICHIT, 2015, p. 23).

Para que justifiquemos melhor todo este quadro descrito acima e respondamos a alguns “por quês?” e consigamos dar continuidade e início em outras investigações com trabalhos acadêmicos com este contexto, elaboramos uma dissertação que propõe trabalhar com o objeto de pesquisa, amenizar as principais dificuldades dos alunos no ensino de Geometria Analítica com situações-problema do SPAECE com a alternativa do *software* GeoGebra, ferramenta tecnológica para uma possível transposição didática, a fim de trazer um alicerce maior aos

conteúdos que transportam maiores dificuldades, como equação da circunferência, conforme experiência própria em sala de aula. Temos a opção de trabalhar as questões do SPAECE antes do professor, em sala de aula, proceder com questões do nível mais elevado, tendo a opção do GeoGebra para dinamizar e otimizar o entendimento da matéria e dos assuntos contemplados.

Com a nossa vivência de dez anos trabalhando os assuntos de Geometria Analítica no terceiro ano, em múltiplos exercícios (anos) de ensino, observamos que as dificuldades dos alunos englobam, principalmente, a interpretação do formato algébrico para o geométrico das equações lineares, cálculos que exijam muito a parte algébrica, passível de aumentar a abstração dos alunos ao interpretar. O grau da dificuldade aumenta no conteúdo que privilegia matérias sobre equação da circunferência e as cônicas em geral, principalmente, por ser algo novo e que, quando é visto nas escolas públicas, é contemplado muito superficialmente em decorrência do tempo e pela falta de incidência de serem cobrados no ENEM e no SPAECE, como é o caso das cônicas, motivo pelo qual, geralmente, só é visto em sala de aula das escolas públicas até a parte que cobre equação da circunferência. Essas principais dificuldades abordadas acima estão nas questões do SPAECE, nos seis descritores cobrados, também. Isso é visível com as análises dos resultados do boletim pedagógico liberado pela CAEd/UFJF.

Para que tenhamos maior êxito no ensino e aprendizagem, temos como itinerário de investigação a ED e EDF para amparar melhor a futura formação com base na TSD e seu itinerário para otimizar o ensino e aprendizagem, a fim de oferecer subsídios que amenizem os problemas enfrentados pelos professores de Matemática, não só nas aulas de Geometria Analítica, mas, também, nas de Matemática em geral. Efetivamente, com todo esse contexto descrito, é notória a necessidade de uma investigação que atente para que a formação inicial de professores de Matemática na perspectiva da TSD aliada a EDF seja uma boa proposta para amenizar as dificuldades dos alunos nos conteúdos de Geometria Analítica no chão da aula.

De tal maneira, esta dissertação busca, portanto, ampliar as reflexões sobre o ensino de Geometria Analítica com questões vinculadas ao SPAECE e o uso do GeoGebra como ferramenta tecnológica, e da Matemática como um todo, de sorte a despertar interesses e atitudes na prática docente, suscitando a vontade de reelaborar a maneira de abordagem dos conceitos matemáticos discutidos por meio da TSD, percorrendo caminhos favoráveis à reflexão discente sobre o conteúdo de Geometria Analítica e buscando superar as dificuldades inerentes ao próprio conteúdo, bem assim, conhecer melhor como funciona este SPAECE. Neste véis, suscitamos a seguinte hipótese: o GeoGebra talvez não será tão relevante na resolução e entendimento das situações-problema envolvendo aspectos do SPAECE de

Geometria Analítica, por se tratar de questões mais triviais, enfraquecendo a realização da modelagem matemática, pois isto é resolvível com poucos comandos.

Para Almouloud e Coutinho (2008), o problema de uma pesquisa é o conjunto de questões orientadas que se aplicam num determinado quadro teórico para declarar o problema colocado e os objetivos do estudo. Ela principia a metodologia da pesquisa e expõe as conclusões conjecturadas sob hipóteses aprofundadas pelo quadro teórico escolhido. Assim, o objetivo da pesquisa é validar ou contrapor subsídios teóricos a partir de uma investigação que se apoia em uma experimentação.

Assim, temos como problema de investigação: **Quais as contribuições da Teoria das Situações Didáticas integrada à EDF, para a compreensão da Geometria Analítica pelos licenciandos em Matemática, através do GeoGebra e questões do SPAECE?**

Para que se responda à pergunta-diretriz formulada, será necessário prosseguir com o **objetivo Geral:** investigar contribuições da TSD articulada à EDF para a compreensão da Geometria Analítica dos licenciandos em Matemática, utilizando questões do SPAECE e o *software* GeoGebra; e com os **objetivos Específicos:** observar a TSD aplicada na formação inicial dos professores de Matemática com as interações professor, aluno e saber; verificar como a TSD contribui para articular o que foi vivenciado na experimentação ao que se buscou encontrar na EDF; avaliar contribuições do *software* GeoGebra na formulação de soluções das questões de Geometria Analítica do SPAECE.

1.2 Procedimentos metodológicos

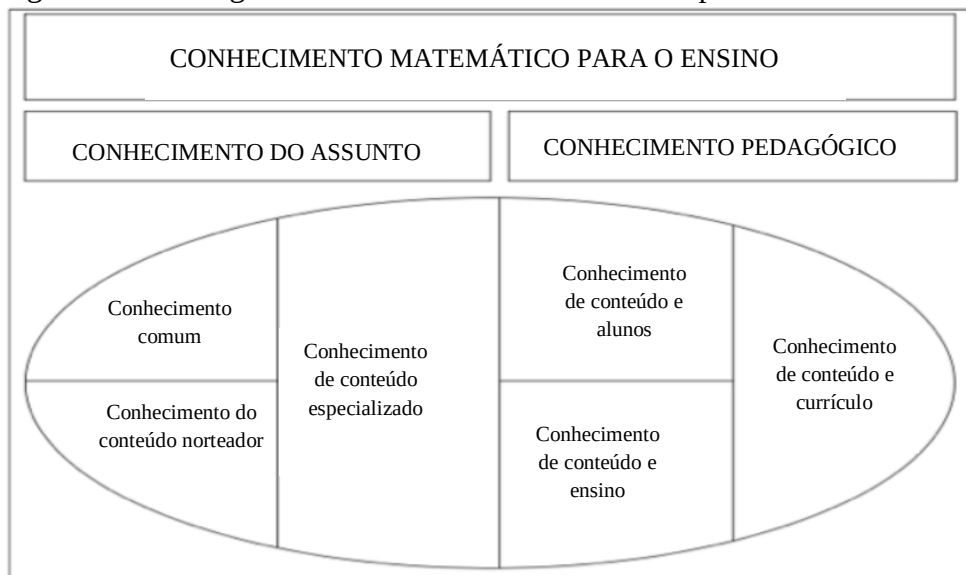
Esta dissertação tem o itinerário da EDF para a aplicação da TSD em uma formação metodológica com os alunos do curso de extensão (grupo de pesquisa - tecnologias digitais) da UVA, cujo conteúdo contempla ponto, reta e circunferência da Geometria Analítica com questões dirigidas para o SPAECE e com o incremento do *software* GeoGebra.

Constitui uma pesquisa de caráter esquema experimental (ARTIGUE, 1996), levando-se em conta as hipóteses de investigação, tencionando confirmar ou refutar contribuições teóricas baseadas nas observações e análises que se apoiarão em uma etapa de experimentação (ALVES, 2016b, p. 69). As revisões bibliográficas são de fontes primárias e secundárias. É uma investigação com análise dos dados extraídos na aplicação das situações didáticas, nos moldes da TSD, realizadas na fase de experimentação da ED, a fim de efetivar uma validação interna da fase de análise *a posteriori* e validação da ED com a complementação da EDF para atender com maior profundidade os objetos da pesquisa. Assim, apropria-se de habilidades inerentes,

de uma reflexão sobre a forma de saber, gera um olhar mais apurado do professor, indo além da sala de aula para estruturar um saber matemático mais profundo, dando mais sentido aos assuntos propostos em sala de aula com uma base reflexiva e abrangente (ALVES, 2016b).

Ball *et al.* (2008) evidencia que vários pesquisadores estudaram as práticas dos professores para identificar os efeitos do conhecimento matemático para o ensino na aprendizagem do aluno. Isso os leva a propor uma categorização de acordo com dois polos (ver Figura 1).

Figura 1 - As categorias de conhecimento matemático para o ensino



Fonte: Ball *et al.* (2008).

No entanto, os modelos ou categorias propostas, na maioria das vezes com o propósito de formação de professores, aparecem como tipologias estáticas e marcadas institucionalmente. Ball *et al.* (2008) apontam sobre as decisões que devem ser levadas pelo professor para sua atividade. (BESSOT, 2019, p. 4, apud BALL *et al.*, 2008, tradução nossa).

Clivaz (2017, p. 307) assinala que [...] “a estrutura [...] não está focada em descrever como o professor e o conhecimento matemático influenciam o ensino e a aprendizagem. [...], isso exigirá análises mais refinadas do que avaliações em grande escala”. Sabemos que a ED e a TSD garantem uma ênfase voltada para o aluno, apesar desta última prioridade ser a situação didática, porém a EDF vem tentar ir além com um amparo maior para o professor. Sua existência vem com essa complementaridade, apesar de sua base teórica a ED, para fortalecer o trabalho do professor em sala de aula.

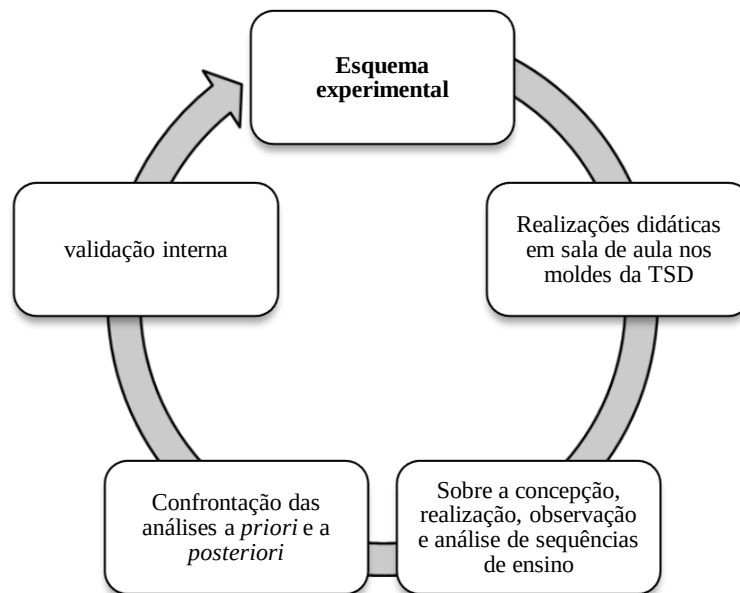
Portanto, sentimos a necessidade de considerar um ponto de vista dinâmico e sistêmico sobre o professor. Deste ponto de vista, este último é um ator em um sistema de grande escala, composto por elementos em interação dinâmica, organizados de acordo com um propósito (aqui o ensino do conhecimento) e sujeito a um conjunto de condições e restrições. (BESSOT, 2019, p. 4, tradução nossa).

A fim de se obter os resultados da pesquisa, foram aplicadas as situações didáticas para professores em formação inicial do curso de licenciatura em Matemática da UVA, onde foram coletados e analisados os dados para saber se realmente foram alcançados os objetivos propostos. Assim, saberemos se realmente são satisfatórias as hipóteses propostas no projeto, e suas contribuições para realizações das situações didáticas a fim de o professor garantir a atenção e a aprendizagem dos alunos, estruturando as práticas docentes, se confirmadas as contribuições.

(...) como metodologia de investigação, caracteriza-se antes de mais nada por um esquema experimental baseado em 'realizações didáticas' na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino. (ARTIGUE, 1996, p. 196).

De efeito, com base em Artigue (1996), vejamos a Figura 2 com o fluxograma do procedimento metodológico.

Figura 2 - Fluxograma do esquema experimental



Fonte: adaptado da Artigue (1996).

A ED, vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se, em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa ao modo de validação que lhe são associados: a comparação entre análise *a priori* e análise *a posteriori*. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste (ALMOULOU; COUTINHO, 2008).

Continuamos nesta seção com a descrição da metodologia de ED, por meio de uma distinção temporal de seu processo experimental. Vamos definir quatro fases neste processo: fase 1 análise preliminar, fase 2 de concepção e análise *a priori* das situações didáticas de engenharia, fase 3 de experimentação e finalmente fase 4 de análise *a posteriori* e validação. (ARTIGUE, 1995, p. 38, tradução nossa).

Neste viés das fases da ED, as situações didáticas foram aplicadas na fase 3 da ED (experimentação), porém as situações didáticas em sua totalidade remetem a elementos de todas as fases da ED e EDF (POMMER, 2013).

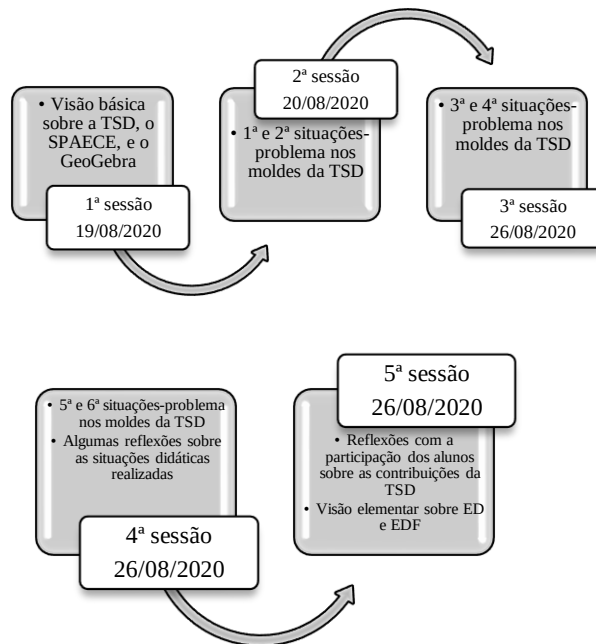
A pesquisa ora por nós efetivada está repartida em seis capítulos. O primeiro relaciona-se à introdução, na qual descrevemos um norteamento do trabalho, com a justificativa, problemática, delimitação do problema, objetivos da pesquisa e procedimentos metodológicos.

O segundo traz um referencial teórico sobre as metodologias de pesquisa (ED e EDF) e a teoria de ensino (TSD) com os procedimentos metodológicos e itinerário necessário para orientar e estruturar toda a pesquisa com tal fundamentação teórica a ser aplicada com os sujeitos no trabalho de investigação. Por isso, foram descritas todas as etapas, a fim de se estabelecer uma orientação mais minuciosa acerca da aplicação da TSD sobre o *design* metodológico da ED e, fechando este capítulo, fizemos uma abordagem da Geometria Analítica segundo Elon Lages Lima, para contemplarmos o conteúdo matemático específico desta dissertação: ponto e reta e circunferência.

No próximo capítulo, abordamos uma realidade do ensino de Geometria Analítica, identificando os seus principais problemas enfrentados em sala de aula; a Geometria Analítica e o currículo do Ensino Médio *versus* SPAECE, para compreendermos um pouco mais sobre como é cobrada a Geometria Analítica no contexto das matrizes de referência do Ensino Médio; o GeoGebra e algumas atribuições que o tornam uma ferramenta tecnológica a ser incrementada em sala de aula para oferecer um suporte valioso na elaboração do conhecimento dos alunos.

O quarto capítulo foi destinado ao percurso de uma experiência didática com Geometria Analítica voltada para o SPAECE no curso de extensão universitária, tendo o itinerário de investigação as etapas da ED e o itinerário de otimização do ensino e aprendizado, a TSD. Assim, foi realizada a análise preliminar, *a priori*, com todas as descrições das situações-problema que foram aplicadas na fase experimentação da ED na formação metodológica com os alunos do curso de extensão da UVA. Ocorreram, remotamente, cinco encontros de 19/08 a 02/09, totalizando 60 horas. Vejamos o cronograma realizado no período da aplicação (ver Figura 3).

Figura 3 - Cronograma de atividades realizadas via *Google Meet* no curso de extensão universitária



Fonte: Elaboração própria.

No penúltimo capítulo, vêm a análise *a posteriori* e a validação da pesquisa realizada, confrontando a análise *a priori* e a *a posteriori* para realizarmos a validação interna por se tratar de uma pesquisa que não tem a comparação com o meio externo. Para que os dados levantados assegurem maior confiabilidade às análises, foi realizada uma triangulação desses dados, a fim de completar e enriquecer o conhecimento do objeto pesquisado. Com efeito, as hipóteses levantadas com as variáveis didáticas são verificadas e analisadas dentro do percurso metodológico e as descrições devidas.

As conclusões constituem o sexto capítulo, com os resgates das principais reflexões identificadas na pesquisa, sendo orientadas pelos objetivos e metodologia, extraindo o que de fato seja relevante destacar com as interações nas situações didáticas aplicadas com os licenciandos na formação metodológica proposta.

2 QUADRO TEÓRICO

As reflexões relacionadas à Educação Matemática oferecem direcionamentos e aperfeiçoamentos, tanto no ensino quanto na aprendizagem, dos conteúdos relacionados às áreas de conhecimento matemático (MENEZES, 2018). Segundo Alves (2011),

Diferentemente das Didáticas Gerais que consideram as relações entre um ensino de um conteúdo genérico e as relações ali estabelecidas, sejam relacionadas a qualquer disciplina, a Didática da Matemática se ocupa destes fenômenos, mas sem perder de vista as ligações com o saber matemático. (ALVES, 2011, p. 22).

Conforme D'Amore (2007), é preciso adotar uma perspectiva piagetiana para compreendermos que é pelas interações progressivas do sujeito com o objeto que o conhecimento se constrói. Assim, “a Didática da Matemática pode se apresentar como um instrumento poderoso para o futuro professor”. (ALVES, 2011, p. 23).

Segundo Souza (2010, p. 39), “a Didática da Matemática é uma das didáticas específicas fundamentais para a aprendizagem dos alunos”, pois, no tocante aos seus princípios e métodos, tornam-se suas ferramentas principais no desenvolvimento dos professores em sala de aula para amenizar as principais dificuldades didáticas enfrentadas.

Brousseau também descreve duas hipóteses fundamentais para se trabalhar a Didática da Matemática: a primeira consiste em afirmar que somente o estudo global das situações que presidem a manifestação do conhecimento permite escolher e articular os conhecimentos de origens diferentes, necessários para compreender as atividades cognitivas do sujeito, assim como o conhecimento que utiliza e o modo pelo qual ele o modifica; a segunda hipótese, mais forte, consiste em dizer que o estudo inicial das situações (didáticas) deve permitir derivar e modificar as concepções necessárias atualmente importadas de outros campos científicos. (ALVES, 2011, p. 15).

Esta pesquisa engloba, pois, metodologias cruciais para facilitar o desenvolvimento na atuação do docente na aplicação das situações didáticas com a metodologia de pesquisa (ED) criada por Guy Brousseau e difundida por Michèle Artigue, tendo a EDF para uma maior estruturação de elaboração e aplicação da TSD, contribuindo para a formação de professores de Matemática. Além deste embasamento teórico, este trabalho tem como parâmetro a formação inicial de professores, com o auxílio do GeoGebra no estudo da Geometria Analítica direcionado para o SPAECE.

Assim, pretende-se trazer mais subsídios aos professores de formação inicial com a EDF que ampliem as previsões e as necessidades para subsidiar a atuação em sala de aula, com vistas a dinamizar o ensino com o uso da tecnologia para potencializar os alunos na ação a-

didática, preparando-os para uma transposição de conhecimento em saber, que é a proposta da transposição didática com Yves Chevallard. Por isso, esta pesquisa traz a ED, EDF para uma maior estruturação na formulação, aplicação e análise das seções didáticas aplicadas nos moldes da TSD.

2.1 Noções de Engenharia Didática

A ED tem origem nos anos de 1980, em França. A expressão ED teve inspiração no trabalho do engenheiro. Essa relação se deve ao fato de que o engenheiro deveria possuir sólido conhecimento científico, básico e essencial, e ter capacidade de resolver situações-problema de caráter generalizável. Analogamente, tem-se o educador, que busca em seu trabalho soluções e melhorias para enfrentar as dificuldades no sistema educacional (ARTIGUE, 1996).

Como metodologia de pesquisa, a ED se caracteriza em primeiro lugar por um esquema experimental baseado nas "realizações didáticas" em aula, ou seja, na concepção, realização, observação e análise de seqüências de ensino. Aí está, geralmente distinguem dois níveis: o da microengenharia e o da macroengenharia, dependendo da importância da realização didática envolvida na pesquisa. As investigações de microengenharia são mais fáceis de realizar. No entanto, enquanto eles permitem que a complexidade dos fenômenos de classe seja levada em consideração localmente, eles não permitem que ela seja unida à complexidade essencial dos fenômenos associados à duração das relações entre o ensino e aprendizagem. Nem tornam necessariamente possível distinguir entre objetos coerentes de conhecimento. A pesquisa em macroengenharia, apesar de todas as dificuldades metodológicas e institucionais que impõe, é essencial. (ARTIGUE, 1995, p. 36, tradução nossa).

A ED é definida, então, de duas maneiras fundamentais. Na primeira, encarada como uma metodologia de pesquisa baseada em experiências de sala de aula e, na segunda, vista divisada como uma proposta de ensino que é trabalhada com base nos resultados de pesquisa realizada. Com a união de conhecimento teórico e prático, desenvolvem-se novos produtos didáticos, sendo este o referencial da ED (ARTIGUE, 1996).

Portanto, a ED é única não pelos objetivos de pesquisa que se enquadram em seus limites, mas pelas características de seu funcionamento metodológico. Nas páginas seguintes apresentaremos as características que esta metodologia possui atualmente. Tais características emergem das investigações que se dizem ED e cujo número vale a pena. (ARTIGUE, 1995, p. 38, tradução nossa).

Segundo Artigue (1996), faz-se necessária uma metodologia de investigação científica que reproduza relações entre pesquisa e ação aprimorada em conhecimentos didáticos preestabelecidos. Nesse sentido, “a ED, enquanto metodologia, caracteriza-se como produto

didático que envolve plano de ensino, criação de materiais didáticos e esquema experimental, baseado nas realizações didáticas em sala, ou seja, sobre a concepção, realização, observação e avaliação” (BRUM; SCHUHMACHER, 2013, p. 64).

A etapa 1 (análises preliminares) tem por objetivo a obtenção de um referencial teórico para análise dos procedimentos de estudos a serem realizados com os cuidados necessários para encaminhar determinado conhecimento ao estudante, assegurando uma prévia de comportamentos e dificuldades a serem enfrentadas no ensino atual. Segundo Artigue (1996), tudo isso demarca o conteúdo a ser estudado. Assim, é procedida a uma revisão literária, envolvendo todo o contexto de cada nível de produção didática onde ocorre a pesquisa no contexto de ensino.

A etapa 2 (concepção e análise *a priori*) é definida das variáveis que estarão sob controle tendo o ponto principal para análise. Essas variáveis de comando, segundo Machado (2002), são locais ou globais dentro do “sistema didático (professor/aluno/saber) e que são consideradas essenciais pelo pesquisador/professor, sendo abordadas nas várias sessões ou fases de uma ED”. (ARTIGUE, 1996 apud BRUM; SCHUHMACHER, 2013, p. 65).

Ainda segundo Brum e Schuhmacher (2013, p. 65), a etapa 3 (**experimentação**) é o momento da aplicação da sequência didática, com os registros das observações realizadas na investigação. Faz-se essencial um contrato didático para que o professor interfira o mínimo possível, evitando-se explicações ou “dicas”, conforme Brousseau (1996). Assim, a etapa 4 (**análise a posteriori e validação**) se destina à coleta dos dados na fase da experimentação por questionários ou entrevistas individuais com pequenos grupos no processo de ensino, para que confronto com a análise *a priori* e realizadas as análises devidas (BRUM; SCHUHMACHER, 2013, p. 65).

Como já mencionado, a ED é caracterizada por quatro fases: **análises preliminares, concepção da análise a priori, experimentação e análise a posteriori e validação**. Vejamos, sinteticamente, a fim de compreendê-las um pouco mais com este diagrama baseado nas definições de Michèle Artigue (ver Figura 4).

Essas fases da ED, descritas acima, revelam que o professor precisa estar aberto para canalizar o que os alunos têm de melhor. A proposta da ED permite ao professor/estudante pensarem como um engenheiro ao experimentarem essas quatro etapas. A formação docente, para ser bem-sucedida em relação à aplicação da ED nas sessões didáticas, necessita de uma mediação didática na formação.

[...] sobre fundamentos teóricos, concluímos que a ED pode ser vista como uma abordagem metodológica baseada em um referencial teórico que orienta a pesquisa de design em questão. Dito isso, uma abordagem de ED, é claro, se encaixa melhor em algumas perspectivas teóricas do que outras. As experiências francesas mostram que DE é um excelente ajuste com o de Brousseau TSD (MARGOLINAS; DRIJVERS, 2015, p. 9, tradução nossa).

Esse *design* da ED nos leva à reflexão de que o professor precisa ter um conhecimento preliminar do nível dos alunos para estruturar e aplicar as sessões didáticas com maior afinco e direcionamento cabível. Faz-se necessário realizar esta análise preliminar e a *priori* com os alunos, para aplicar ED de 1ª e 2ª geração, propiciando as fases da Sequência Didática, para que sejam mais bem planejadas e executadas as sessões didáticas, atendendo a uma série de ajustes possíveis para que o trabalho do docente seja efetivado de maneira sublime. Desse modo, o entendimento do processo de transposição didática, os fenômenos de transformações em relação a cada área isolada, com origem no ambiente acadêmico até sua concretização e aparecimento no contexto escolar, exigem um teor de conhecimento maior do professor que, eventualmente, extrapola o domínio técnico e conteudista, indo além do vasto conhecimento e experiência de um professor (pesquisador) (ALVES; CATARINO, 2017).

Figura 4 - Fases da ED



Fonte: Adaptação com base nas definições de Artigue (1988).

Para garantir que o tempo de aplicação seja otimizado e se tenha mais subsídios de questionamentos e argumentos satisfatórios em tempo hábil, e tendo em vista que nem sempre o professor consegue atender aos questionamentos dos alunos em decorrência do grande número em sala de aula, propõe-se uma aplicação da TSD com o auxílio da ED de 1ª e 2ª

geração em sessões didáticas. Pretendemos mostrar com este trabalho é se essa ED 1ª e 2ª gerações, aliada à TSD, deixa a Matemática mais acessível aos discentes, se eles passam a pensar mais próximo da visão de um matemático, corroborando assertivamente para desmistificar a dificuldade de aprender Matemática.

Para Brousseau (1986), as interações que indicamos no trinômio professor – estudantes – conhecimento, com a correspondente introdução de metodologias ligadas para a Matemática e a correspondente proposição de tipologias para o ensino ou fases para a mediação do professor, nominada de TSD, são cruciais para a práxis do professor, conjecturando uma excelente prática didática em sala de aula. A realização da sequência didática passa para as sessões didáticas, que, para terem um resultado significativo, necessitam ser efetivadas em média, cinco vezes, com vistas a se verificar com precisão a evolução dos discentes no decurso do aprendizado com intervenções efetivas, atendendo às necessidades da turma ao longo de todo este processo da aplicação da sequência didática. Nesse momento de aplicação da sequência, faz-se necessário um olhar diferenciado para cada aluno, se o professor quiser um resultado mais satisfatório no aprendizado do estudante.

Na aplicação da ED, a etapa de experimentação requer um tempo e uma atenção maiores do professor, para que o aluno vivencie, satisfatoriamente, essa fase. O professor terá abertura para aplicar o método de ensino que achar mais propício, por isso, vamos nos ater à TSD. Essa teoria de ensino é aplicada na fase de Experimentação da ED para apropriar os professores dentro da sequência didática, visando a aprimorar ainda mais as sessões didáticas. Nesse momento, muitas vezes, é preciso tempo, para compreensão e identificação das variáveis envolvidas no problema, impondo-se, também, a perseverança dos discentes para se chegar à resolução do problema envolvido.

Por isso, faz-se necessário o uso de uma Sequência Didática para amenizar as dificuldades da relação professor – aluno – Matemática, aplicando uma Didática da Matemática eficaz para acelerar e potencializar o aprendizado dos alunos, já que uma falha em alguma etapa compromete a aplicação da sequência e acarreta prejuízo nos objetivos esperados. Por isso, quanto mais amparado de ferramentas e metodologias o professor estiver, melhores estratégias e habilidades ele terá para solucionar os possíveis imprevistos que surgirem durante as sessões didáticas. A didática do professor assume grande relevância na formulação do saber proporcionado nas situações didáticas, como traduz Brousseau (1986 *apud* ARTIGUE, 1988, p. 8):

Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendido eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educacional (professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição. (BROUSSEAU, 1986 *apud* ARTIGUE, p. 8, 1988).

Isso só reforça ainda mais o quanto são essenciais as metodologias e teorias assertivas usadas pelo professor de Matemática para garantir um processo de ensino e aprendizagem bem realizados, a ocorrência de sessões didáticas bem-sucedidas. As sequências didáticas propostas permitem ao professor uma reflexão contínua embasada de avaliações e autoavaliações sempre que necessárias na medida em que vão se efetivando as etapas da ED e da TSD, amenizando possíveis imprevistos durante a aplicação das sessões didáticas (ALVES, 2016b). Esta pesquisa, pois, traz situações didáticas direcionadas para uma formação inicial de professores de Matemática com aplicação da TSD na fase de experimentação da ED com questões de Geometria Analítica pendidas para o SPAECE.

2.2 Engenharia Didática de Formação

Com o propósito de desenvolver os recursos de formação com maior rigor, enfatizamos a EDF, de desenvolvimento ou ED de 2ª geração. Segundo Alves (2018), a EDF é uma metodologia que organiza as etapas da pesquisa com método que possibilita a análise das situações didáticas para a formação de professores e estrutura matérias e ferramentas para o uso do docente.

Assim, nossa pesquisa tem a EDF como complementaridade da ED por se tratar de uma aplicação da TSD para professores iniciantes do curso de licenciatura de Matemática da UVA, a fim de subsidiá-los nesta formação metodológica proposta com um direcionamento preciso para uma futura atuação em sala de aula.

Com vistas a entendermos melhor, a ED de primeira geração evidencia maior preocupação com a modelização e ação do estudante na aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

No entanto, os objetivos de uma investigação de ED podem ser diversos. R. Douady, em sua conferência do Congresso PME 11, intitulou ED, um instrumento privilegiado por levar em consideração a complexidade da classe, distingue, por exemplo, as investigações que abordam o estudo dos processos de aprendizagem de um determinado conceito e em particular da elaboração de gêneses artificiais para um determinado conceito, daqueles que não se limitam aos conteúdos, mesmo que seu suporte seja ensinando maestria precisa. (ARTIGUE, 1995, p. 37, tradução nossa *apud* DOUADY, 1987).

Vejamos que a EDF manifesta maior atenção ao processo de modelização, descrição e planejamento de ação e transposição didática do professor.

O problema não é mais apenas o de controlar e implementar os princípios teóricos que norteiam ED; é também o das possibilidades de adaptação de situações pelos professores em condições normais de funcionamento do ensino com a dupla perspectiva do estudo da robustez de uma série de situações e formação de professores. Para apoiar esta análise, vou recorrer ao trabalho recente, bem como um feedback reflexivo sobre a evolução do meu próprio questionamento. (PERRIN-GLORIAN, 2011, p. 57, tradução nossa).

Segundo Perrin-Glorian (2009 *apud* ALMOULOU e SILVA 2012, p. 28): “uma ED de segunda geração tem por primeiro objetivo o desenvolvimento de recursos (ou objeto de aprendizagem) para o ensino regular, ou a formação de professores”. Nesse contexto, a EDF auxilia o planejamento, construção, execução e avaliação das ações do professor, garantindo uma organização mais vigente nas etapas realizadas na ED.

O propósito da EDF é utilizar o que a ED engendrou, desenvolvendo e ampliando um auxílio mais direcionado à formação de professores de Matemática. Segundo Perrin-Glorian (2011), a ED colabora com a formação de professores por meio de estudar como eles lidam com os conteúdos, identificando suas necessidades e o conhecimento que têm da profissão, prosseguindo o estudo da transposição didática.

Pastré, Mayen e Vergnaud (2006, p. 146-147) nos garantem uma compreensão para as condições centrais do professor no desenvolvimento sobre a dimensão da EDF. Vejamos:

É um campo de práticas que consiste em construir dispositivos de formação correspondentes às necessidades identificadas, para um público dado, no quadro do seu meio de trabalho. A formação escolar possui, como tendência, a descontextualização das aprendizagens. A engenharia da formação deve, precisamente, insistir no contrário, sobre o contexto social, no qual deve ser efetuada a aprendizagem dos adultos em formação. [...] A engenharia de formação se concretiza, principalmente, a partir de duas práticas: análise das necessidades e dos dispositivos de formação. (PASTRÉ; MARYEN; VERGNAUD, 2006, p. 146-147).

Uma investigação demarcada pela ED dirigida para a formação de professores precisa ter a abrangência da ED de 2ª geração. Tempier (2016) afirma que “em uma metodologia que leva em consideração ciclos de concepções de uma fonte e experimentos para professores, mediante a comparação da análise *a priori* e *a posteriori*”, haja vista a dificuldade da divulgação e disseminação dos pressupostos (fundamentos) da ED como produtos efetivos para o ensino atual. Neste sentido, “o problema não é apenas o relacionado à determinação e implementação dos princípios teóricos que orientam a ED. Também está relacionado às possibilidades para que

os professores adaptem esses princípios às condições de ensino comuns". (PERRIN-GLORIAN, 2011, p. 60).

Mas esses engenheiros também devem possibilitar avanços nas questões de divulgação de situações ao professor comum (2º nível de engenharia). O recurso dá origem a um objeto de estudo, que dá aos engenheiros uma didática para o recurso sobre um determinado conteúdo matemático, os produtos da engenharia e são questionados tanto quanto recursos para o ensino. Vamos agora explicar como usamos esses princípios gerais para projetar nossa própria metodologia de ED para o desenvolvimento de um recurso de ensino. (TEMPIER, 2013, p. 188).

Para melhor compreender essa continuidade da ED para EDF, Tempier (2016, p. 264) ressalta que Perrin-Glorian (2011) propôs a metodologia de ED para o acúmulo de fontes de recursos primários para a formação de professores. Por existir uma indispensabilidade por parte de Tempier, repousa em duas questões fundantes: uma para a ED, que é a relevância das situações, permite que os alunos efetuem o conhecimento matemático pretendido e a outra mais ligada à EDF, que é a adaptabilidade (e reprodução/replicação) das situações ao ensino comum: as adaptações realizadas pelos professores durante a implementação das situações. Segundo Perrin-Glorian (2011, p. 60), "o problema não é apenas o relacionado à determinação e implementação dos princípios teóricos que orientam a ED. Também está relacionado às possibilidades para que os professores adaptem esses princípios às condições de ensino comuns". Assim, na perspectiva de Chevallard (1982), a contribuição da Teoria Antropológica do Didático permitiu um amplo campo sistemático de atuação e possibilidade de desenvolvimentos e aplicação de uma investigação, possibilitando um vasto campo sistemático de atuação e possibilidades de uma investigação nos moldes da EDF. A EDF está nesta pesquisa com um caráter essencial de complementaridade, assumindo os condicionantes clássicos e outras teorias associadas para incrementar o trabalho desenvolvido no momento.

A segunda razão para considerar a ED como parte integrante da pesquisa em educação Matemática entra em jogo se quisermos estudar o trabalho dos professores. Se um já pilotou uma configuração didática e, assim, adquiriu uma sequência que foi reproduzida em experimentos circunstâncias, os resultados podem ser usados como um significativo foco nas escolhas didáticas dos professores, porque muito se sabe com antecedência sobre o comportamento dos alunos. (ARTIGUE, 1986 *apud* MARGOLINAS; DRIJVERS, 2015, p. 5, tradução nossa).

A EDF, de tal modo, auxilia melhor o professor com sua fundamentação à ED com uma ênfase na formação de professores. Vale ressaltar que, no ensino, "o professor coloca em jogo um meio relativamente ao qual o aluno deve interagir. Tal interação é produtora de conhecimentos". (MARGOLINAS, 1995, p. 344).

A seguir, Alves e Catarino expressam três momentos cruciais a serem desenvolvidos em sala de aula, que direcionam assertivamente as sessões didáticas.

Propugnamos três momentos ou fases imprescindíveis, insubstituíveis e caracteristicamente fundamentais, a saber: a preparação/concepção, a realização de uma mediação em sala de aula, e a correspondente avaliação das etapas predecessoras, tanto em seu conjunto, de modo individual (e local). Decerto que empregamos um expediente prosaico para uma compreensão do *modus operandi* e da dialética do funcionamento da trajetória simplificada anterior. (ALVES; CATARINO, 2017, p 122).

Segundo Alves e Catarino (2017), a veiculação do conhecimento em sala de aula requer a constituição do trinômio professor, estudantes e conhecimentos (matemáticos). Com esse trinômio, originou-se um conjunto de variáveis operacionais e organizacionais essenciais da aula (microdidáticas) (BROUSSEAU, 1976, 1986, 1996, 1998, 2008), contribuindo para uma trajetória consolidada dos saberes científicos e precavendo-se dos empecilhos impeditivos do progresso dos estudantes (ALVES; CATARINO, 2017).

Fica, então, evidente no estabelecimento desta pesquisa o papel da ED, EDF e TSD para o professor ter mais clareza e discernimento e traçar as melhores estratégias, a fim de reduzir ou superar os entraves cognitivos, epistemológicos e didáticos emergentes no ensino. É de grande valor observar a importância das situações a-didáticas com as análises preliminares propostas na ED para o desenvolvimento das etapas da TSD. Perrin-Glorian (2009) ressalta a importância das situações e do *milieu* para traçar alguns questionamentos e buscar resposta para questões de caráter fundamental na robustez, nas exigências e no potencial de autoformação para os professores que a experimentam.

De efeito, segundo Almouloud e Silva (2012), a engenharia de desenvolvimento segue as investigações nos saberes matemáticos necessários aos professores e ao processo de valorização da ação e da mediação, por parte do discente, repercutindo um papel fundamental para sua repercussão na formação de professores. Por fim, tem-se o Apêndice A, com um fluxograma referente à estrutura da pesquisa baseada na ED, EDF em associação com a TSD.

2.3 Teoria das Situações Didáticas

“A TSD busca construir um modelo que demarque a interação entre o estudante, o saber e o *milieu* no qual o processo de aprendizagem se realizará”. (SANTOS; ALVES, 2017, p. 281). Assim, o objeto central dessa teoria é a situação didática, identificando as interações constituídas do professor, com aluno e saber (Figura 5) (ALMOULLOUD, 2007, p. 32).

Figura 5 - Tríade das relações didáticas



Fonte: Adaptado de Brousseau (2008).

Todas as interações envolvendo as dimensões do triângulo das relações didáticas incrementa a TSD, deixando-a mais completa e adequada ao ser aplicada em sala de aula quando é acompanhada de uma boa metodologia de pesquisa na constituição de suas sessões didáticas. Isso garante um encaminhamento mais claro e assertivo de como irá se comportar todo o ambiente que compõe professor, aluno e saber, a fim de garantir mais eficácia nas variáveis que irão compor o ensino-aprendizagem com a aplicação das sessões didáticas propostas na TSD.

Os resultados revelaram que a TSD permitiu importantes reflexões sobre ações cotidianas da prática docente, evidenciando a necessidade de mudanças, referentes às posturas diretivas com respostas prontas para atitudes questionadoras, que leve o educando à participação efetiva na construção de seu conhecimento e de sua autonomia. (SANTOS; MAGALHÃES, 2016, p. 206).

Isso, descrito por Santos e Magalhães (2016), a torna diferenciada, assumindo uma atitude aberta a melhorias em toda a sua aplicação, principalmente quando a TSD está endossada por outras metodologias, como a ED e EDF, em decorrência da grande conexão entre elas para aperfeiçoar o ensino-aprendizagem.

Pelo menos três tipos de estudos para procurar situações candidatas a serem uma situação fundamental: estudo matemático e epistemológico da constituição do conhecimento; estudo da utilidade social e as causas do surgimento do conhecimento; estudo dos obstáculos epistemológicos ao conhecimento. (BESSOT, 2014, p. 419).

Vale ressaltar que, segundo Bessot (2014, p. 421), “dois conjuntos de situações geradas por diferentes valores de variáveis de uma mesma situação fundamental de conhecimento, será diferente por concepções associadas e dá a este conhecimento significados diferentes”. Para isso, a ED e a EDF reforçam, incrementando uma série de encaminhamentos que apropriam os professores para que todas as situações didáticas sejam efetivadas com o escopo de elevar as

interações do aluno com o professor e o saber que proporcionam um direcionamento para atenção, principalmente, às condições de ensino e de aprendizagem para torná-las mais significativas.

A origem do referencial teórico da SDT está na constatação da existência de diferentes modos de funcionamento do conhecimento de acordo com as instituições de ensino: a organização do conhecimento não segue necessariamente a organização lógica – Matemática conforme presente no texto do conhecimento. A existência dessas lacunas levantam questões sobre o que essas lacunas representam no problema e o que ele resolve no sistema de treinamento. A teoria das situações opera um certo número de rupturas em relação à metodologia de ensino. (BESSOT, 2014, p. 407, tradução nossa).

Conforme Bessot (2014, p. 407), dentre as duas rupturas mais marcantes, a primeira relaciona-se com a própria Matemática e a segunda às relações com outras disciplinas mais próximas. Brousseau (1996, p. 4) reforça, assinalando que a primeira ruptura compõe-se no direito de questionar o saber matemático (disciplina) na essência, com necessidades de práticas consistentes e fundamentadas por matemáticos. Isso procede na segunda ruptura em relação às outras áreas, já que as contribuições referentes aos comportamentos e práticas relativas ao conhecimento matemático e seu entendimento estão no uso ou aquisição em sala de aula, como reforça Brousseau.

“Nesse sentido, a TSD é uma interessante proposta metodológica que pode contribuir positivamente na construção de conhecimentos matemáticos e, principalmente, para o desenvolvimento autônomo do aluno”. (SANTOS; MAGALHÃES, 2016, p. 208). Para compreendermos melhor essa TSD, destacamos suas quatro etapas: ação, formulação, validação e institucionalização.

2.3.1 Ação

A fase de ação é a-didática e tem sua modalidade de conhecimento pelo meio de tomar decisões, tendo o modo de aquisição a assimilação e acomodação. Vale ressaltar que o estudante irá aprender um método de resolução para resolver o problema com a sucessão de situações de ação.

Situação de ação: O aluno é confrontado com uma situação que produz um problema. Na busca pela solução, ele produz ações que podem levar à criação de um conhecimento na ação. Ele pode, mais ou menos, explicitar ou validar suas ações, todavia, a situação não exige. (MOREIRA; ALVES, 2018, p. 10).

Propiciará, de tal modo, um padrão de resposta explicado por um modelo de ação implícito em todo este processo inicial que é marcado por um amadurecimento de ideias com um teor investigativo, no âmbito do qual o aluno vai resgatar possíveis conteúdos e resoluções compreendidas e correlatas no pensamento para compor uma futura resolução do problema proposto com a procedência das etapas da TSD.

2.3.2 Formulação

Os sujeitos, de posse de suas estratégias de resolução com os pensamentos mais ordenados da fase de ação, iniciam as primeiras formulações, mesmo sem um rigor matemático, oportunidade em que favorece um momento de socialização entre os alunos com as dúvidas pertinentes para proceder à validação com a devida coerência matemática à solução do desafio proposto.

Situação de formulação: As condições diferentes possibilitam uma mudança de informações e a criação de uma linguagem para assegurar a mudança. Na situação de formulação, o estudante poderá justificar suas proposições, mas, a situação não exige. (MOREIRA; ALVES, 2018, p. 10).

Nessa etapa de formulação, é crucial que haja estratégias assertivas, pois, dependendo do grau de dificuldade do problema proposto, é factível o surgimento de vários obstáculos epistemológicos, produzindo consequências diferentes para cada aluno em razão de sua maior ou menor afinidade com a Matemática. Por isso, é essencial a atitude do estudante para proceder a uma comunicação satisfatória com os colegas de sala de aula, conduzindo a proposta de estratégia e questionamentos que amenizem os obstáculos epistemológicos ante do problema sugerido.

Caso o aluno não tenha esse comportamento, ficando desanimado para fazer tentativas de erros e acertos, o professor já deve ter previsto outras estratégias com sua análise prévia e *a priori*, provocando no aluno um raciocínio investigativo para superar os possíveis obstáculos epistemológicos e proceder com a resolução.

2.3.3 Validação

A fase de validação é manifesta por meio de argumentação e prova com enunciados, conjecturas, teorema e teorias, a fim de convencer e de provar, tendo o modo de aquisição com retórica, lógica e demonstração.

Situação de validação: As mudanças não concernem somente mais simplesmente com as informações, mas, as declarações. É necessário provar o que foi afirmado, por intermédio da ação (MOREIRA; ALVES, 2018, p. 10).

Como mencionado, as três primeiras fases da TSD são *a-didáticas*, segundo Brousseau (1996, 2008). Para compreendermos melhor como situações *a-didáticas* se comportam, temos uma visão geral na Figura 6.

Figura 6 – Situações a-didáticas das três primeiras fases da TSD



Fonte: Elaboração própria.

Notamos a ligação entre as etapas *a-didáticas* da TSD com uma atitude mais autônoma dos alunos, permitindo ao professor oferecer subsídios tecnológicos para realizar uma transposição didática e ampliar os horizontes de uma bem-sucedida investigação matemática, por exemplo, o *software* GeoGebra é excelente opção para uma consulta complementar à linha de raciocínio investigativa desenvolvida por parte de cada aluno, dependendo do tema. Este processo *a-didático* na fase de ação, formulação e validação situa os alunos como protagonistas do seu aprendizado.

Assim, toda vez que um problema é colocado para ser resolvido, é preciso que algum dispositivo seja acionado para ajudar a resolvê-lo. O seu funcionamento e o efetivo desenvolvimento devem obedecer a regras preestabelecidas que permitam desencadear, durante o jogo (dispositivo), ações que visem procurar caminhos para chegar ao resultado. Esse dispositivo, com suas regras avaliadas *a priori*, permitirá, baseado em análises ao longo de seu desenrolar, chegar à solução do problema

proposto, e, desse modo, pode-se dizer que houve um efeito de ensinar (TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p. 160).

Consoante Brousseau (1986), um dispositivo deve ser acionado para agregar conhecimento e controle na sua aquisição. Esse dispositivo compreende um *milieu* material: um problema, umas peças de um jogo, uma prova, uma ficha, incluindo as regras de interações dos participantes com tal dispositivo.

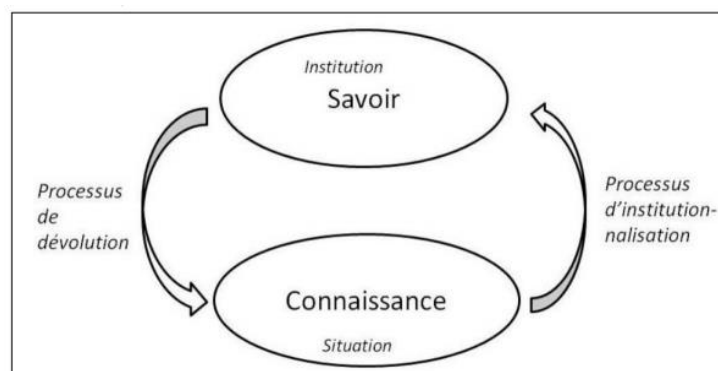
Segundo Brousseau (2008), uma situação é a interação dos sujeitos com o meio no qual uma pessoa se encontra e as relações que a unem ao *milieu*. Principalmente na fase de formulação, ocorrem trocas de informações entre os alunos e o *milieu*, mesmo sem muito rigor matemático, pois esse rigor matemático vai se confirmar na fase de validação, a qual é crucial para o engajamento do aluno na aprendizagem como protagonista da elaboração de seu método de resolução do problema proposto, sendo socializado para os demais, quando desejado.

2.3.4 Institucionalização

A institucionalização, não existe sem relação com o próprio conhecimento matemático e, portanto, com instituições que participam diretamente da transposição didática (BESSOT, 2019, p. 7). O professor reconhece e nomeia os conhecimentos interessantes nas produções dos alunos, fixando um vocabulário com fundamentação matemática. Assim, a institucionalização tem a função de saber, por meio de aquisição como informação, convenção e instrução como meio de conhecimento na referência e validação social ou cultural.

O professor se engaja na fase de institucionalização, criando uma situação didática caracterizada pelo saber com um ideal direcionamento para ajudar o aluno com um amplo conhecimento compartilhado. Segue uma visão geral da distinção entre saber e conhecimento, retirada de Margolinas (2012), conforme expresso na Figura 7.

Figura 7 - Saber e conhecimento no processo de devolução e institucionalização

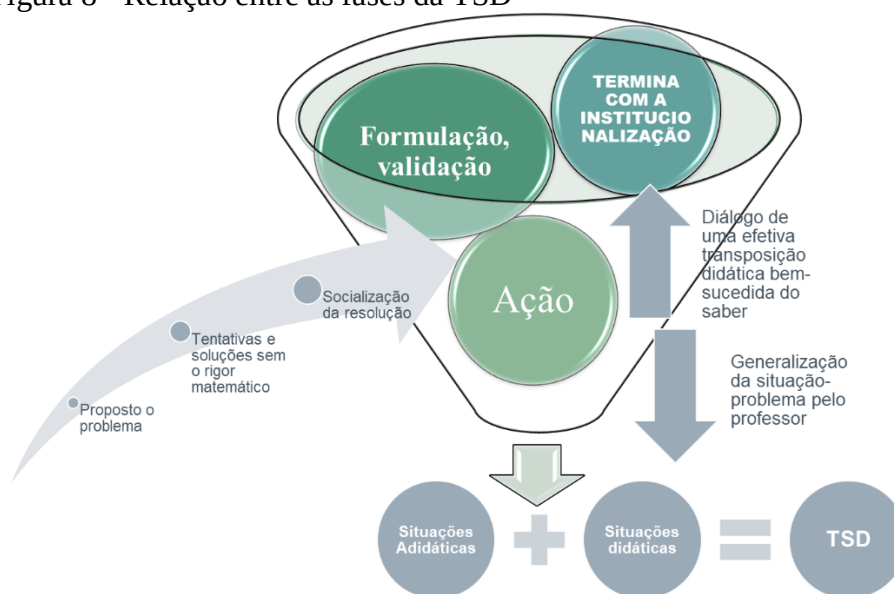


Fonte: Margolinas (2012, p. 8).

O conhecimento é o que consegue o equilíbrio entre o sujeito e o meio ambiente, o que o sujeito põe em jogo quando investe em uma situação. É sobre um conceito muito amplo, que inclui tanto o conhecimento do corpo, conhecimento em ação, conhecimento de interação, conhecimento memorizado, etc. O saber é de outra natureza, é uma construção social e cultural, que vive em uma instituição e que é por natureza um texto (o que não significa que seja sempre escrito fisicamente). O saber é despersonalizado, descontextualizado, atemporalizado. É formulado, formalizado, validado e memorizado. Ele pode ser linearizado, o que corresponde à sua natureza textual. (MARGOLINAS; DRIJVERS, 2015, p. 34, tradução nossa).

Na lição de Santos e Magalhães (2016), as fases da TSD não devem ser compreendidas como momentos estanques e lineares, pois os princípios abordados pela TSD garantem ao docente o desenvolvimento de um ensino significativo, dinâmico e investigativo, possibilitando a participação ativa dos educandos. Essas fases estão interligadas e têm função ímpar no desenvolvimento das sequências para o aluno assertivamente elaborar o seu conhecimento. Para Brousseau (2008), a aprendizagem é algo no contexto do qual os conhecimentos necessitam ser modificados. Brousseau (2008) entende que essas modificações hão de ser produzidas pelo aluno, porém o professor precisa provocá-las com suporte em situações apropriadas, direcionando o discente a ir além, para atingir o conhecimento desejado. Assim, a TSD sugere uma discussão na análise dos erros e dos acertos para concretizar a formalização do conhecimento matemático. Vejamos um resumo sintetizado das fases da TSD na Figura 8.

Figura 8 - Relação entre as fases da TSD



Fonte: Elaboração própria.

Como descrito na figura 8, as relações entre as fases da TSD caminham numa sequência correlacionável, seguindo uma elaboração que atende as necessidades essenciais no decurso de formulação do conhecimento dos alunos, de modo que contribui para um certo direcionamento

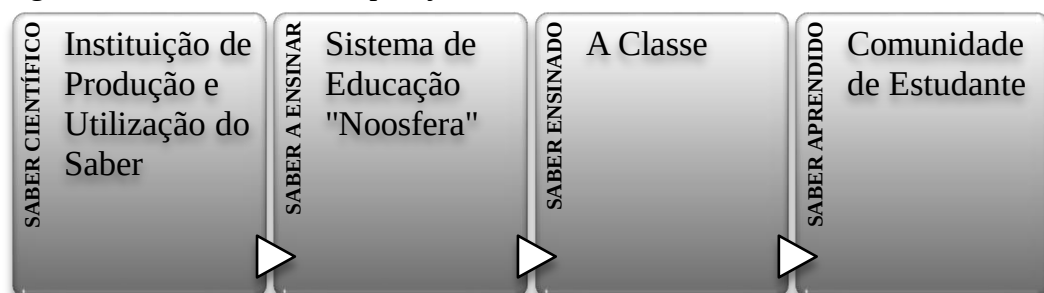
autônomo e investigativo dos estudantes, o que propicia a execução das situações didáticas em sala de aula. A figura 8 expressa as quatro fases da TSD, incluindo as *a-didáticas* (ação, formulação e validação) e a fase didática (institucionalização) onde a junção das situações *a-didáticas* e didáticas resulta na TSD aplicada em sala de aula.

2.4 A Transposição Didática e o Contrato Didático

Segundo Chevallard (1991), a Transposição Didática proporciona à Matemática transpor seu saber científico ao saber escolar no ensino de várias outras matérias. Essa transposição didática é a referência das modificações pelas quais transitou o conhecimento matemático, tendo em vista o ensino, produzindo diferenças de significado dos objetos matemáticos no contexto das instituições matemáticas e escolares (GONDINO, 2004, p. 42). Como consequência de um conjunto de modificações passadas pelos conhecimentos, ficou sendo o foco de atenção por parte dos didatas da Matemática (ALVES; CATARINO, 2017).

A Transposição Didática teve seu conceito desenvolvido por Chevallard (1991), com o propósito de impor a diferença dos possíveis saberes envolvidos no ensino-aprendizagem. Na ED, a transposição didática é constituída nas duas etapas iniciais: análises prévias e concepção e análise *a priori*. Por consequência, o docente-pesquisador detecta na análise *a priori* os conceitos matemáticos que são ofertados para serem transpostos no contexto didático-cognitivo, bem como o planejamento de como será realizada essa transposição didática. Segundo Almouloud (2007, p. 174), as situações-problema precisam ser formuladas na análise *a priori*, com o propósito de estreitar o cognitivo do aluno ao conteúdo de Matemática que se propõe (ver Figura 9).

Figura 9 - Processo da Transposição Didática



Fonte: Chacón (2008. p. 51).

Com amparo nessa fonte de Chacón (2008, tradução nossa), emerge a relevância da vigilância epistemológica na transposição didática, pois, segundo Chevallard e Joshua (1991, p. 43), há uma distância entre o conhecimento científico, o conhecimento a ensinar e,

consequentemente, o conhecimento ensinado. Para amenizar essa possível distância na transposição didática, esta pesquisa traz, além da ED, a EDF, para amparar o professor com um conhecimento mais apurado, a fim de operar mais eficazmente nas situações didáticas propostas pela TSD.

Brousseau se preocupa de modo especial com as modificações que se fazem necessárias ao conhecimento matemático desde o seu nascedouro até a sua forma atual, organizada nos livros escolares. A tais modificações/adaptações realizadas pelo professor para efetivar o seu ensino, Brousseau chama de transposição didática. (ALVES, 2011, p. 12).

O professor tem flexibilidade para aplicar distintas práticas didáticas, de acordo com cada turma, visto que, para cada aluno, exigirá variadas práticas e planejamentos com as concepções pedagógicas e reflexões dos docentes, considerando as ações de ensinar e aprender procedimentos em constante mudança. Por isso, a teoria é o caminho e a prática é a ação, nessa evolução de cada docente para efetivar um plano de aula eficaz.

Na sequência, Brousseau caracteriza a noção de contrato didático como sendo um sistema de obrigações recíprocas que se assemelham a um contrato. E o que lhe interessa concernente ao contrato diz respeito aos conteúdos matemáticos visados. Ele apresenta ainda as seguintes características desta relação: o professor é supostamente capaz de criar condições suficientes para a apropriação dos conhecimentos, e deve reconhecer tal apropriação quando a mesma se opera; o aluno é supostamente capaz de satisfazer tais condições; a relação didática deve continuar a “todo custo”; o professor assegura então as condições de aquisição anteriores e as condições novas fornecem ao estudante a possibilidade da aquisição desejada. (ALVES, 2011, p. 33).

Desde os anos de 1960, o termo **epistemologia** faz parte da didática da Matemática. Evidenciamos a existência de duas abordagens: a Epistemologia científica e a de ordem didática. Nos estudos de Guy Brousseau, essas duas abordagens são interligadas por uma ponte chamada transposição didática onde, por exemplo, uma abordagem científica nos teoremas da Matemática é transposta ao conhecimento na vivência do estudante no meio onde vive, contextualizada e efetivamente.

Deste modo, evidenciamos que o contrato didático do professor necessita contemplar e prever os erros dos estudantes, entretanto, a forma de encará-los, por parte do mestre, dependerá em muito da vertente epistemológica (behaviorismo ou construtivismo, por exemplo) que o mesmo simpatiza. Em muitos casos a visão sobre avaliação do professor de Matemática é construída na própria academia. De fato, os primeiros exemplos e paradigmas, de professores de Matemática serão seus próprios formadores. (ALVES, 2011, p. 42).

Assim, um contrato didático exige um conhecimento profundo do professor, tanto no quesito conhecimento matemático como também no conhecimento dos alunos para identificar

os seus limites (pontos fortes e fracos), a fim de conduzir as sessões didáticas, potencializando o que os alunos têm de melhor.

Por fim, uma vez compreendida e construída pelo professor a visão que responde pela natureza e pelo campo de validade e aplicação deste conceito, é que o mestre passa a desenvolver uma preocupação com a transposição didática mais adequada para transformar o saber relacionado ao conceito em algo alcançável e compreensível pelos estudantes. (ALVES, 2011, p. 57).

Como ora descrito por Alves (2011), é essencial haver informações sequenciais dos conhecimentos matemáticos nesta transposição didática, tendo o aluno em foco. Na perspectiva epistemológica, segundo Alves (2016a, p. 140-141), as definições, teorias e propriedades matemáticas “que conferem seu caráter de certeza se mostram entrelaçadas com uma “teia epistêmica” de concepções e saberes não negligenciados pela Didática da Matemática”. De efeito, o professor busca recursos didáticos para driblar os obstáculos de natureza epistemológica, promovendo práticas pedagógicas inovadoras.

Dessa forma, o aluno consegue relacionar teoria e prática quando ocorre a transposição didática, efetivando e construindo o saber ensinado e aprendido de forma ampla. Pois oportuniza maneiras diferenciadas e acessíveis à compreensão dos conteúdos matemáticos com autonomia e segurança aos discentes. Na prática em sala de aula, nessa transposição didática podem existir alguns obstáculos no decorrer do processo de aprendizagem, porém, se o professor estiver aplicando sequência didática como a proposta nesse trabalho, que sugere o uso da ED e na fase de experimentação a utilização da TSD, ficará bem mais promissora e enriquecedora essa transposição, sem falar que ultrapassar esses obstáculos existentes no processo é essencial para a construção cognitiva e a efetivação do conhecimento matemático. (FERNANDES *et al.*, 2019, p.12).

Existem três condições epistêmicas nas aulas de Matemática: a liberdade, a divergência e a curiosidade em torno do conhecimento. Tudo isso aguça a investigação, a divergência, reiterando a concretização e a curiosidade do discente para protagonismo maior na investigação, alimentado pela curiosidade. As atividades empíricas possibilitam aos estudantes vivenciarem no seu cotidiano assimilações inadequadas, sendo a nós dado observar a formação de obstáculos epistemológicos (BACHELARD, 1996 *apud* GOMES; OLIVEIRA, 2007).

Assim, mostra que desenvolver sessões didáticas neste sentido descrito acima com uma metodologia que possibilite ao aluno um pensamento mais protagonista no ensino-aprendizagem facilita e acelera os objetivos propostos em sala de aula. Com vistas a efetivar os conhecimentos dos alunos e a fim de que tudo isso ocorra com maior efetividade, é essencial a realização de um contrato didático bem realizado, para que a transposição didática flua da melhor maneira na situação didática em sala de aula.

2.5 Geometria Analítica

A Geometria Analítica é a fusão da Álgebra com a Geometria, por meio do sistema de coordenadas cartesianas; sobre correspondências entre pontos do plano e ordenadas de números reais, associando cada curva no plano uma equação com duas variáveis, x e y . Os grandes nomes que formalizaram e aprofundaram os estudos da Geometria Analítica foram os franceses René Descartes (1596-1650) e Pierre Fermat (1601-1665), hoje, ainda, repercutindo os mesmos moldes nos livros didáticos.

2.5.1 Ponto e Reta

Doravante, é realizada uma breve abordagem sobre alguns conceitos em relação a **ponto** e **reta** e, logo em seguida, **circunferência**, direcionando para os assuntos cobrados no SPAECE.

“Indica-se como $\mathbb{R}^2$ o conjunto formado pelos pares ordenados (x, y) , onde x e y são números reais”. (LIMA, 2014, p. 8).

Observação 1: Tem-se o número x como primeira coordenada e y a segunda coordenada do par (x, y) .

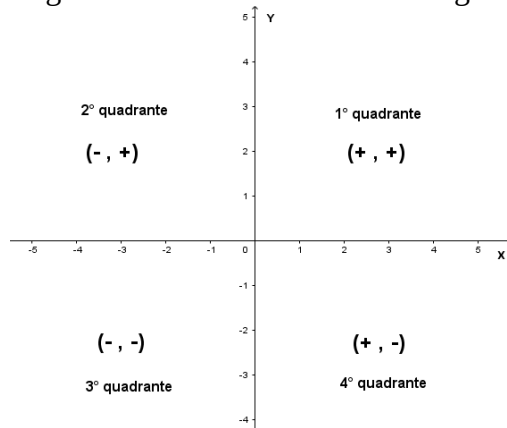
Observação 2: Um par ordenado diferencia de um conjunto com dois elementos, ou seja, (x, y) pode-se ter $x = y$ no par ordenado, porém $\{x, y\}$ sendo um conjunto necessariamente $x \neq y$.

Observação 3: Dado um sistema de coordenadas (cartesianas) no plano Π temos eixos perpendiculares OX e OY de origem O , OX é o eixo das abscissas e OY é o eixo das ordenadas.

Observação 4: Com o plano Π teremos a correspondência biunívoca $\Pi \rightarrow \mathbb{R}^2$. Caso P pertença ao eixo OX , temos o par ordenado $(x, 0)$, caso P pertença ao eixo OY , temos o par $(0, y)$.

Vejamos o sistema de coordenadas cartesianas com algumas identificações importantes para melhor compreender como é usado o $\mathbb{R}^2$, na Figura 10.

Figura 10 - Plano Cartesiano Ortogonal



Fonte: Elaboração própria.

Enfatizamos algumas propriedades importantes sobre **ponto, reta, plano e espaço**, aplicando-se, também, na Geometria Espacial como postulados.

Postulado 1. Dados dois pontos distintos do espaço existem uma, e somente uma, reta que os contém.

Postulado 2. Dados três pontos não colineares do espaço, existe um, e somente um, plano que os contém.

Postulado 3. Se uma reta possui dois de seus pontos em um plano, ela está contida no plano. Uma vez tendo estabelecido estas propriedades como axiomas, podemos utilizá-las na demonstração de outras propriedades, como ilustrado abaixo (LIMA *et al.*, 2014, p. 165).

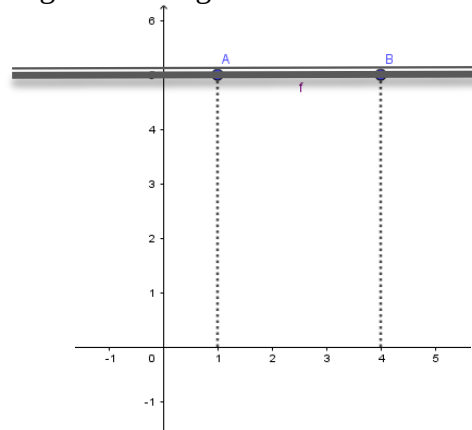
Realizar o cálculo da **distância entre dois pontos** A e B é identificar a medida do segmento AB. Essa distância no plano ou espaço é encontrada com a utilização do Teorema de Pitágoras. Para compreendermos melhor, vejamos como procede. Essa fórmula da distância entre dois pontos é tão constante na Geometria Analítica, sendo considerada o seu segredo para desvendar vários problemas ou parte deles em uma situação-problema.

Se o segmento de reta AB tem a mesma ordenada a sua distância:

$$d(A,B) = |x_B - x_A| = \sqrt{(x_A - x_B)^2}.$$

Vejamos um exemplo na Figura 11.

Figura 11 - Segmento AB com mesma ordenada



Fonte: Elaboração própria.

$$y_A = y_B = y = 5 \text{ (Mesma ordenada).}$$

Assim temos:

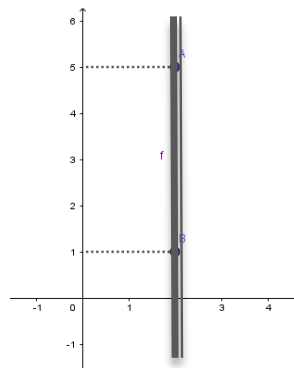
$$d(A,B) = \sqrt{(1 - 4)^2} = 3.$$

Se o segmento de reta AB tem a mesma abscissa a sua distância:

$$d(A,B) = |y_B - y_A| = \sqrt{(y_A - y_B)^2}$$

Vejamos um exemplo, na Figura 12.

Figura 12 - Segmento AB com mesma abscissa



Fonte: Elaboração própria.

$$x_A = x_B = x = 2 \text{ (Mesma abscissa).}$$

Assim, temos:

$$d(A,B) = |5 - 1| = 4.$$

Se o segmento de reta AB tem abscissas e ordenadas diferentes, temos um triângulo retângulo AJB cuja hipotenusa é AB. Assim, como já havíamos referido, basta aplicar o Teorema de Pitágoras para encontrar a distância. Como A e J têm a mesma ordenada e J e B igual abscissa, tem-se que:

$$d(A,J) = |x_A - x_B| \text{ e } d(J,B) = |y_A - y_B|.$$

Dessa forma, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$d(A,B)^2 = d(A,J)^2 + d(J,B)^2 .$$

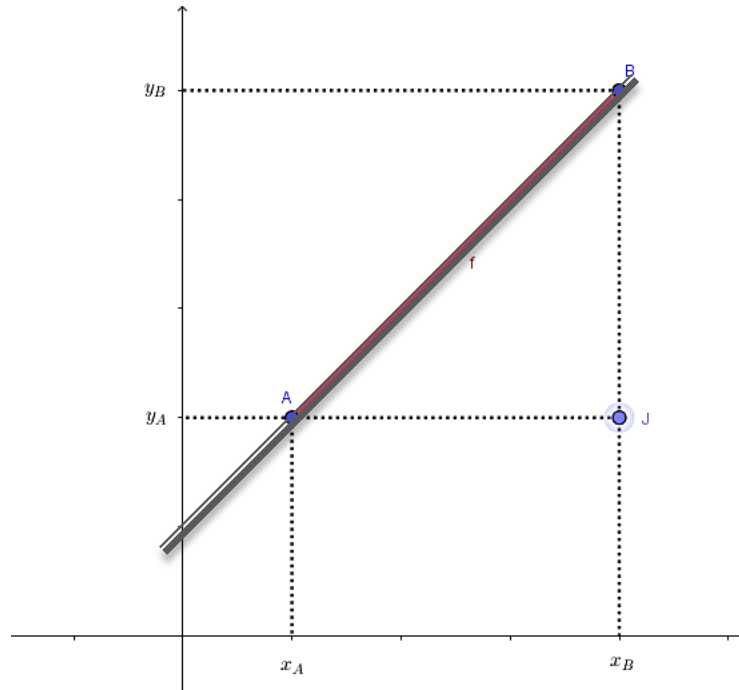
Portanto,

$$d(A,B)^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2,$$

Logo (ver Figura 13):

$$d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} .$$

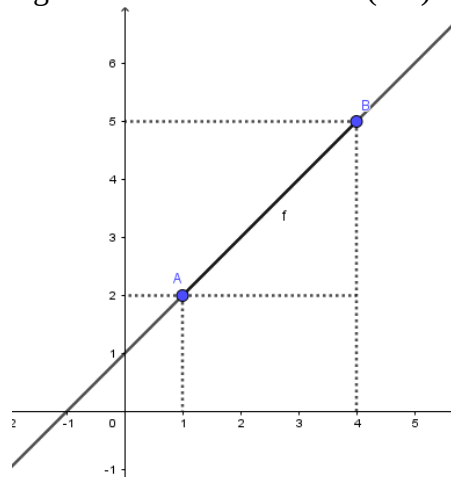
Figura 13 - Por Pitágoras encontrando a $d(AB)$



Fonte: Elaboração própria.

Vejamos um exemplo na Figura 14.

Figura 14 - Encontrando a $d(AB)$



Fonte: Elaboração própria.

Por Pitágoras temos:

$$d(A,B) = \sqrt{(1 - 4)^2 + (2 - 5)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{18}$$

$$d(A, B) = 3\sqrt{2}.$$

Temos, em particular, quando há um ponto $Q = (x, y)$ e o outro é a origem $O = (0, 0)$, assim a distância é:

$$d(O, Q) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Portanto, reforçamos mais uma vez, segundo Lima (2015, p. 24), que “a fórmula da distância entre dois pontos serve de partida para um grande número de resultados da Geometria Analítica”.

Para iniciarmos o estudo sobre **Equação da Reta**, vejamos a seguinte definição:

Uma vez escolhido um sistema de coordenadas no plano, as curvas nesse plano passam a ser representadas por equações. Chama-se equação de uma curva C a uma igualdade envolvendo as variáveis x, y , a qual é satisfeita se, e somente se, o ponto $P = (x, y)$ pertence à curva C . (LIMA, 2014, p. 40).

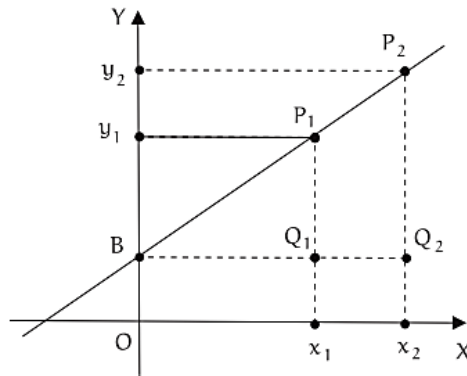
Sabemos que existem alguns tipos de equações que representam retas no plano, porém vamos enfatizar a equação reduzida da reta $y = ax + b$ ou $y = mx + n$. Segundo Lima (2015):

- Tem-se uma reta r *vertical* quando ela é paralela ao eixo OY ou em ajuste a ele. Semelhantemente, tem-se uma reta r *horizontal*, quando é paralelo ao eixo OX ou é o próprio OX .
- Quando a reta vertical r corta o eixo OX no ponto de abscissa k , então todos os pontos de r podem ser escritos na forma $P = (k, y)$ com $y \in \mathbb{R}$ aleatório. Assim, a equação da reta r é $x = k$.
- Caso r for uma reta não vertical, cortando o eixo OY no ponto $B = (0, n)$, com sua ordenada n . O ponto de abscissa 1 da reta r é $A = (1, m+n)$, onde a é a variação por que passa a ordenada de um ponto $P = (x, y)$, que descreve a reta r , quando sua abscissa vai de 0 até 1.

Atestamos que $y = mx + n$ é a equação da reta r , ou seja, que os pontos de r são os mesmos da forma $P = (x, mx + n)$. Para confirmá-lo, sejamos o conjunto $X = \{(x, mx + n) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\}$, gráfico da função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx + n$. Precisamos mostrar que $X = r$. Como X e r têm os pontos A e B em comum, restando verificar que X é uma reta, ou seja, que três pontos quaisquer $P_1 = (x_1, mx_1 + n)$, $P_2 = (x_2, mx_2 + n)$ e $P_3 = (x_3, mx_3 + n)$, pertencentes a X , são colineares. Prevemos que a numeração foi selecionada de modo que $x_1 < x_2 < x_3$. Portanto, investiguemos que $d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = d(P_1, P_3)$ (ver Figura 15).

agudo $\hat{B}$

Figura 15 - ΔBQ_1P_1 e ΔBQ_2P_2 são semelhantes pelo ângulo



Fonte: Lima (2014, p. 41).

Nesta ocasião,

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (mx_1 + n - mx_2 - n)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2(1 + m^2)} \\ &= (x_2 - x_1)\sqrt{1 + m^2}. \end{aligned}$$

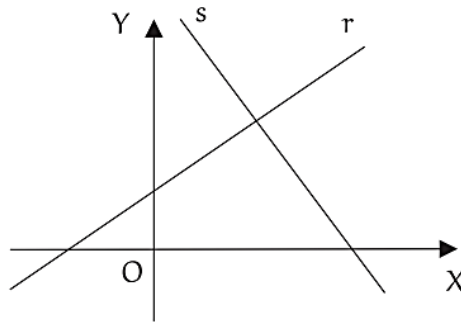
De modo semelhante, $d(P_2, P_3) = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + m^2}$ e $d(P_1, P_3) = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + m^2}$, por consequência $d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = d(P_1, P_3)$. Finalmente: qualquer reta não vertical r , existem números reais m e n , existindo a propriedade: o ponto $P = (x, y)$ pertence a r se, e somente se, vale $y = mx + n$. À vista disso, a equação:

$$y = mx + n$$

representa a reta r , ou que esta é a equação da reta r . Na maioria das vezes espontaneamente fala-se “a reta $y = mx + n$ ” para expressar “a reta cuja equação é $y = mx + n$ ”.

Corroborar saber os significados das constantes m e n na equação $y = mx + n$ da reta não-vertical r : n é a ordenada do ponto em que r corta o eixo vertical OY e m , inclinação de r , mede a taxa de crescimento (variação) de y em função de x . Com o acréscimo de 1 ao x (deslocando-se de x para $x + 1$), o acréscimo equivalendo de y é $[m(x + 1) + n] - [mx + n] = m$. Usualmente, se $y_1 = mx_1 + n$ e $y_2 = mx_2 + n$ com $x_1 \neq x_2$ então $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ = razão do acréscimo de y para o acréscimo de x . Quando $m > 0$ a reta $y = mx + n$ é inclinada para cima e quando $m < 0$ ela é inclinada para baixo (ver Figura 16).

Figura 16 - Inclinação da reta r positiva e da reta s negativa



Fonte: Lima (2014, p. 42).

Notoriamente, quando $m = 0$, a equação $y = n$ representa uma reta horizontal.

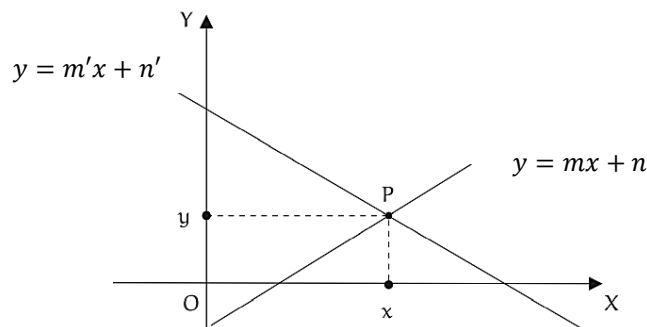
A interseção das retas $y = mx + n$ e $y = m'x + n'$ é o ponto $P = (x, y)$ cujas suas coordenadas são as soluções do sistema

$$-mx + y = n$$

$$-m'x + y = n'.$$

Geometricamente, temos equações lineares e sua interseção das retas, sendo a solução do sistema. Assim, vem sua representação gráfica abaixo (ver Figura 17).

Figura 17 - A interseção das retas $y = mx + n$ e $y = m'x + n'$ é o ponto $p = (x, y)$.



Fonte: Adaptado de Lima (2014, p. 43).

As retas dadas são paralelas na ocasião em que não existe um ponto $P = (x, y)$ comum a ambas, de tal modo que o sistema acima não apresenta solução. Logo, este sistema é compatível com

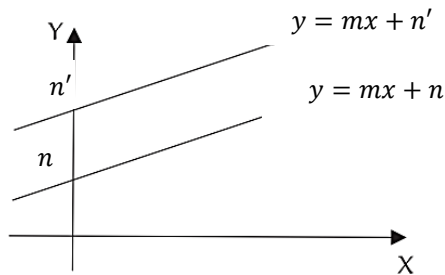
$$-mx + y = n$$

$$(m - m')x = n' - n$$

Tal sistema é desprovido de solução se, e somente se, $m = m'$ e $n \neq n'$.

Para ilustrarmos geometricamente, temos retas paralelas com a mesma inclinação m e coeficientes lineares diferentes. Vejamos a Figura 18:

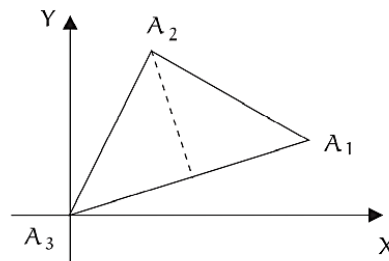
Figura 18 - Representação geométrica das retas paralelas com mesma inclinação, porém $n \neq n'$



Fonte: Adaptado de Lima (2014, p. 43).

Dando continuidade, abordamos **área de um triângulo** no plano ortogonal. Vejamos, a princípio, um triângulo $A_1A_2A_3$ do qual o vértice $A_3 = (0,0)$ é a origem. Sejam $A_1 = (x_1, y_1)$ e $A_2 = (x_2, y_2)$. *A priori*, a numeração dos vértices foi realizada de modo que o lado A_1A_3 não é vertical, ou seja, $x_1 \neq 0$ (ver Figura 19).

Figura 19 - A distância do vértice à base é a altura do triângulo



Fonte: Lima (2014, p. 62).

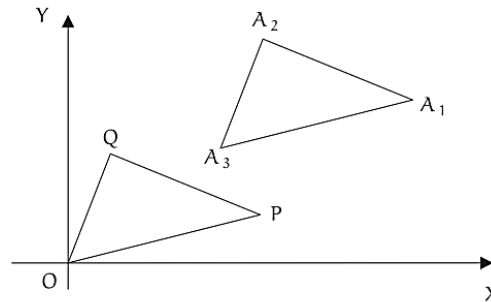
Como mencionado na figura acima, temos A_1A_3 a base do triângulo. Portanto, a distância de A_2 até a reta A_1A_3 é a sua altura. Desse modo, a equação da reta A_1A_3 é $y_1x - x_1y = 0$. Segundo Lima (2015, p. 61), temos:

$$\text{Área } A_1A_2A_3 = \frac{1}{2} \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \frac{|y_1x_2 - x_1y_2|}{\sqrt{y_1^2 + (-x_1)^2}} = \frac{1}{2} |x_1y_2 - x_2y_1|.$$

Para realizarmos a generalização, conforme Lima (2014, 2015), temos um triângulo $A_1A_2A_3$ onde os vértices $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$ e $A_3 = (x_3, y_3)$ são pontos quaisquer. Construímos um triângulo a partir da origem O com os segmentos OP e OQ , respectivamente conforme a A_3A_1 e A_1A_2 , assim $P = (p_x, p_y)$ e $Q = (q_x, q_y)$, com $p_x = (x_1 - x_3)$, $p_y = (y_1 - y_3)$, $q_x = (x_2 - x_3)$ e $q_y = (y_2 - y_3)$.

Assim, a área de $A_1A_2A_3 = \text{área de } OPQ = \frac{1}{2} |p_xq_y - q_xp_y|$ (ver Figura 20),

Figura 20 - O triângulo $A_1A_2A_3$ foi transladado para a posição PQO



Fonte: Lima (2014, p. 63).

Isso significa:

$$\text{área de } A_1A_2A_3 = \frac{1}{2} |(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)|.$$

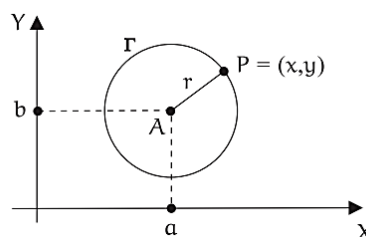
Observação: tradicionalmente se escreve $(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)$ como um determinante.

2.5.2 Equação da Circunferência

Segundo Lima (2014), a circunferência de centro $A = (x_c, y_c)$ e raio $r > 0$ é o conjunto Γ formado pelos pontos $P = (x, y)$ tais que $d(A, P) = r$. Portanto, $P = (x, y)$ pertence a Γ se, e somente se (ver Figura 21),

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

Figura 21 – Circunferência Γ , raio r e centro A



Fonte: Lima (2014, p. 75).

Assim, temos a **equação da circunferência**. Quando o centro da circunferência é a origem $O = (0, 0)$, trata-se do caso particular, assumindo o formato simplificado:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Para realizarmos o **reconhecimento de uma circunferência**, vejamos as procedências, segundo Lima (2014). Dada uma circunferência de centro $A = (x_c, y_c)$ e raio r , escrevemos na definição da equação da circunferência (o raio é a distância do centro a um ponto pertencente à circunferência). Assim,

$$x^2 + y^2 - 2x_c x - 2y_c y + (x_c^2 + y_c^2 - r^2) = 0.$$

Mostramos, neste momento que, dada a equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Assim, o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ cujas coordenadas a satisfazem é uma circunferência se, e somente se, $A = C \neq 0$, $B = 0$ e $D^2 + E^2 > 4AF$. Vejamos com Lima (2014, p. 80) a prova da parte “se” da afirmação acima. Comprovamos neste momento a parte “somente se”. Dada uma circunferência Γ , de raio r , e notemos que um ponto pertence a ela se, e somente se, suas coordenadas (x, y) satisfazem a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Objetivamos provar que $A = C \neq 0$, $B = 0$ e $D^2 + E^2 > 4AF$.

A priori, iniciamos com uma circunferência Γ com centro o ponto $O = (0, 0)$. Consequentemente, os pontos de coordenadas $(-r, 0)$ e $(r, 0)$ pertencem a Γ . Colocando estes valores na equação dada, geramos

$$Ar^2 - Dr + F = 0 \text{ e } Ar^2 + Dr + F = 0.$$

Com estas duas igualdades, resulta que $D = 0$ e que $Ar^2 + F = 0$, ou seja, $A = \frac{-F}{r^2}$. Já que a origem não pertence a Γ , o par $(0, 0)$ não satisfaz à equação dada, assim $F \neq 0$ e dessa forma segue-se que $A \neq 0$.

Analogamente, aproveitamos que os pontos de coordenadas $(0, r)$, e $(0, -r)$ também estão sobre Γ , concluímos que $E = 0$ e $C = \frac{-F}{r^2}$.

Dessa maneira, $A = C \neq 0$ e $D = E = 0$ e sua equação se reduz:

$$Ax^2 + Ay^2 + Bxy + F = 0.$$

Lima (2014, p. 81) relata: como o centro da circunferência Γ é a origem $O = (0, 0)$ e raio r , as coordenadas (x, y) de todos os seus pontos estabelecem a relação $x^2 + y^2 = r^2$, visto isso, a equação acima resulta em

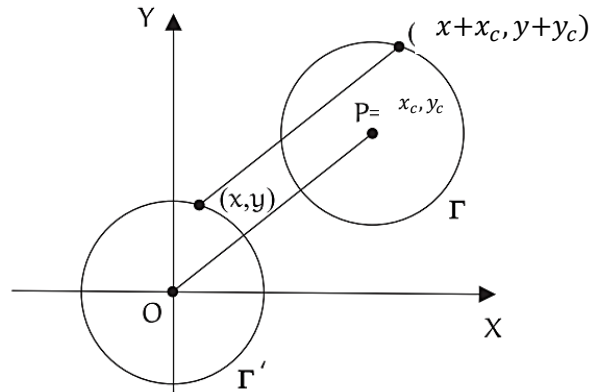
$$Ar^2 + Bxy + F = 0.$$

Caso decorresse $B \neq 0$, $xy = -\frac{(F+Ar^2)}{B} = \frac{0}{B} = 0$ e o produto xy das coordenadas de um ponto qualquer (x, y) em Γ seria zero; como isso não é verdade, logo $B = 0$.

Lima (2014, p. 81) traz um resumo: se $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ é a equação de uma circunferência com centro na origem do sistema de coordenadas, então $A = C \neq 0$ e $B = 0$. (Percebe-se ainda, neste caso, $D = E = 0$, válido somente quando o centro é a origem.)

Para chegarmos ao caso geral, vejamos a circunferência Γ é um ponto aleatório $P = (x_c, y_c)$, contemplamos a nova circunferência Γ' , de mesmo raio r , com centro na origem. Vejamos a Figura 22.

Figura 22 - A circunferência Γ é transladada sobre Γ'



Fonte: Adaptado de Lima (2014, p. 81).

As coordenadas (x, y) pertencem a Γ' se, e somente se, o ponto de coordenadas $(x+x_c, y+y_c)$ pertence a Γ , isto é, se, e somente se, $A(x+x_c)^2 + B(x+x_c)(y+y_c) + C(y+y_c)^2 + D(x+x_c) + E(y+y_c) + F = 0$ ou $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + D'x + E'y + F' = 0$.

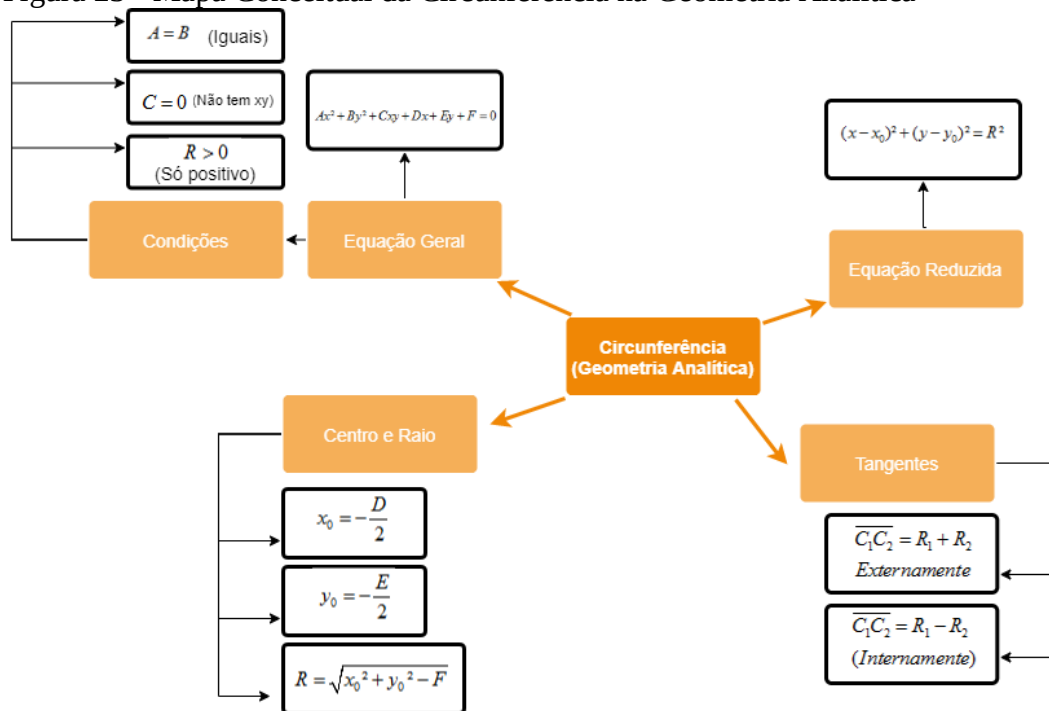
Por consequência, a circunferência Γ' foi representada na equação acima. Observamos que os coeficientes A, B e C são os mesmos da equação de Γ . Dado que Γ' tem centro na origem e os coeficientes D', E', F' não nos interessam, observamos acima que $A = C \neq 0$ e $B = 0$. Desse modo, seguimos com Lima (2014, p. 82), a equação dada se reduz a $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ou $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$.

Vejamos esta última equação completando os quadrantes e a Figura 23.

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}.$$

Daí resulta imediatamente que $D^2 + E^2 > 4AF$. Isto completa a demonstração. Fica então claro que se $D^2 + E^2 > 4AF$, a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa uma circunferência cujo centro é $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right)$ e cujo raio é $\sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}}$. Completar o quadrado significa escrever $x^2 + 2ax = (x + a)^2 - a^2$. No presente caso, temos $x^2 + \frac{D}{A}x = x^2 + 2\frac{D}{2A}x = \left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 - \frac{D^2}{4A^2}$ e, analogamente, $y^2 + \frac{E}{A}y = \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 - \frac{E^2}{4A^2}$. Este método, que é útil no estudo de funções quadráticas de uma ou mais variáveis, será utilizado outras vezes aqui (LIMA, 2014, p. 82).

Figura 23 - Mapa Conceitual da Circunferência na Geometria Analítica



Fonte: Elaboração própria.

3 A GEOMETRIA ANALÍTICA E O SISTEMA PERMANENTE DE AVALIAÇÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA DO CEARÁ

Este capítulo foi destinado à realização de um cenário do Ensino de Geometria Analítica para compreendermos melhor os principais problemas deste eixo epistemológico no ensino de Matemática.

Continuamos com o subtítulo, a Geometria Analítica e o currículo do Ensino Médio *versus* SPAECE, com o intuito de realizamos um levantamento social e histórico com a trajetória do SPAECE, deixando claros os dados de origem e desenvolvimento. Assim, traçamos um paralelo com a matriz de referência e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) no contexto do Ensino Médio e da Geometria Analítica, principalmente.

Por fim, contemplamos o GeoGebra e suas contribuições, a fim de conhecermos melhor a potencialidade desta ferramenta tecnológica, que se mostra, ao largo da sua existência, tão sublime para auxiliar os professores e alunos no processo de ensino e aprendizagem na Matemática.

3.1 Um cenário do Ensino de Geometria Analítica

Para entendermos um pouco do cenário do ensino de Geometria Analítica, ater-nos-emos aos problemas que envolvem o seu ensino e aos relatos de outros autores sobre esses problemas e quais as lacunas que eles identificam, proporcionando as dificuldades enfrentadas pelos discentes e docentes em sala de aula.

Segundo os dados das avaliações do ENEM, SAEB e SPAECE confirmam, uma das grandes dificuldades dos alunos se constitui em resolver problemas de cunho geométrico, principalmente quando se referem a Geometria Analítica. Especificamente na prova do SPAECE, os alunos sentem maiores dificuldades em compreender situações-problema da Geometria Analítica, como retas, circunferências, elipses - principalmente, quando precisam estabelecer relações entre suas representações geométrica e algébrica, e vice-versa.

O Ensino de Matemática, historicamente, tem como metodologia predominante aula expositiva com aplicação de exercícios que, em sua maioria, não apresentam significados para o aluno, o que gera dificuldades de aprendizagem e a ideia de que essa disciplina é difícil, em especial, nas séries iniciais, em que o professor não tem formação específica. Na busca de alternativas que rompam com essa lógica, apresentamos uma pesquisa qualitativa que reflete sobre a TSD como alternativa pedagógica para a construção de conhecimentos matemáticos e o desenvolvimento autônomo do educando. (SANTOS; MAGALHÃES, 2016, p. 206).

Assim como Santos e Magalhães (2016), traremos a TSD e ED com questões de Geometria Analítica vinculadas ao SPAECE e com o auxílio do GeoGebra para amenizar esse problema, enraizado na educação ainda hoje. O tratamento da Geometria Analítica Plana ocorre geralmente no último ano do Ensino Médio, visto que existem prerrequisitos de saberes constituídos à extensão de toda a Educação Básica, sendo definida a Geometria Plana pela fusão da Álgebra e da Geometria. O ensino tradicional de Matemática utiliza-se de poucos recursos, limitando-se, muitas vezes, ao livro didático, resolução de exercícios, trabalhos e avaliações, com vistas a resolver problemas. Sabemos que esses recursos tradicionais funcionam, mas não garantimos que os alunos irão desenvolver um estudo com reflexões, entusiasmo e sentido. De efeito, o professor cria outras possibilidades, por exemplo, com o uso de tecnologias para sair do ensino tradicional e enriquecer com subsídios e estratégias de ensino e de aprendizagem com novas possibilidades, em relação aos exames externos do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes (PISA).

Os relatórios de exames externos (PISA, ENEM, SAEB) sobre as competências Matemáticas, divulgados recentemente, evidenciam que as competências de cálculos não bastam, pois não atendem às exigências da sociedade contemporânea. O mundo está cada vez mais matematizado, e o grande desafio que se coloca à escola e aos professores é construir um currículo de Matemática que transcenda o ensino de algoritmos e cálculos mecanizados, principalmente nas séries iniciais, onde está a base da alfabetização Matemática. (NACARATO; BRENDA; PASSOS, 2009, p. 32).

É capital cuidar, então, do ensino nas séries iniciais para que os estudantes apóiem ao ensino médio e superior preparados para enfrentar os obstáculos epistemológicos com menores entraves cognitivos possíveis. Na maioria das escolas públicas, o estudo de Geometria Analítica é abordado com foco nos conteúdos Ponto, Reta e Circunferência, visto que, quase sempre, não é possível contemplar o conteúdo de Cônicas. Esse assunto abordado é de fácil aplicação no cotidiano, por isso as abordagens nos livros didáticos trazem métodos práticos, tentando relacionar com o cotidiano em alguns casos, mesmo que fique a desejar pela própria exposição dos assuntos, em alguns casos, pela falta de contextualização e/ou pela inexistência de um *software* para auxiliar o professor na elaboração e desenvolvimento das sessões didáticas. Por isso, o professor não há que se limitar ao livro didático para desenvolver uma aula, pois ele é mais aceito como um ponto de partida, sendo uma das ferramentas no processo educacional.

Essa evolução nos leva a uma reflexão do quanto é necessária a utilização de outros recursos, como os *softwares* educativos, sendo ferramentas pedagógicas capazes de

proporcionar novos métodos de ensino, contribuindo para uma aprendizagem matemática mais integrada à realidade dos alunos.

O *software* educativo vem a ser um ingrediente importantíssimo, pois pode contribuir no processo de ensino-aprendizagem, mediando o conhecimento do conteúdo didático; sendo assim, sem ele, o computador utilizado no ambiente educacional, fica sem utilidade. (VALENTE, 1993, p. 26).

Segundo Gladcheff, Zuffi e Silva (2001), a utilização dos *softwares* contribui no desenvolvimento cognitivo dos alunos, adaptando-se ao processo de aprendizagens para testar várias possibilidades no procedimento de formulação do conhecimento.

A Geometria Analítica, nos dias atuais, apropria-se da fusão da Geometria com a Álgebra, ou seja, transforma problemas geométricos em algébricos e vice-versa. Essa transformação de problemas envolvendo figuras geométricas em problemas com equações caracteriza a importância da Geometria Analítica nos dias atuais. Os conhecimentos da Geometria Analítica são utilizados em diversas áreas do conhecimento com atributos no nosso dia a dia, como as localizações de pontos representados por coordenadas nos aparelhos de GPS, os sistemas cartesianos para criarem projetos na engenharia civil e nos *softwares* de computadores, bem como a programação mais avançada de jogos eletrônicos com a Álgebra Linear e a Geometria Analítica, entre outras aplicações. Todas essas aplicações no cotidiano ajudam a constituir os conceitos dos assuntos de maneira mais alicerçada, trazendo uma dinâmica quando se consegue manuseá-los na prática ou com algum *software* trabalhável.

A não contextualização dos conteúdos sobre Geometria Analítica abordados no Ensino Médio prejudicam a compreensão e interesse dos alunos. É notório que a contextualização com o cotidiano do discente e a interdisciplinaridade fortalece o ensino da Matemática, conforme Brasil (2007, p. 108):

Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação (BRASIL, 2007, p. 108).

Nesse âmbito, trazemos, com base na nossa experiência em sala de aula e algumas leituras, análises e reflexões sobre o cenário da Geometria Analítica no Ensino Médio das escolas públicas, deixando mais claro como tudo é conduzido. Primeiro, é um conteúdo que não dá tempo de ser abordado em sua totalidade, como as cônicas, na maioria dos casos.

Segundo, nem sempre existe uma contextualização ou interdisciplinaridade dos assuntos abordados. Terceiro, os livros, em sua maioria, mostram fragilidades na maneira de explicar tais assuntos, dando abertura para utilizá-los como instrumentos para se garantir progresso na procedência das sessões didáticas. Quarto, o professor precisa estar amparado em outras estratégias e ferramentas para suprir as dificuldades em sala de aula no processo de ensino e aprendizagem e deficiências do sistema educacional que, apesar de sua evolução em relação às décadas passadas, existem muitos parâmetros e barreiras que precisam ser ultrapassados para que conduzamos o ensino de Geometria Analítica de modo mais assertivo e próximo da compreensão dos alunos perante os assuntos abordados. Quinto, assim, acarreta muita responsabilidade aos professores de Matemática, visto que precisam estar atentos e sempre usufruindo de excelentes práticas pedagógicas para conduzirem as aulas com respaldo para amenizar as lacunas entre professor, aluno e conteúdo. Por isso, é essencial a utilização de metodologias que apropriem os professores nas procedências nas sessões didáticas com clareza e profundidade dos melhores caminhos a serem traçados, sempre se antecedendo dos possíveis imprevistos e dificuldades possíveis de serem encontradas com os estudos preliminares e *a priori* nos planos antes de aula.

O GeoGebra constitui um meio de apoio para realizarmos a transposição didática das situações didáticas abordadas por meio do que Chevallard (1991) define como:

Um conteúdo de saber que tenha sido definido como saber a ensinar, sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que irão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetivos de ensino. O ‘trabalho’ que faz de um objeto de saber a ensinar, um objeto de ensino, é chamado de transposição didática. (CHEVALLARD, 1991, p. 36).

Portanto, esse cenário propicia a realização desta pesquisa, envolvendo a formação inicial dos professores de Matemática, proporcionando mais clareza de como proceder diante desse cenário; o *software* GeoGebra conforma uma ferramenta a mais para subsidiar as aulas de Geometria Analítica; a ED e a EDF, sendo metodologias que se complementam e a TSD, contemplando uma teoria de ensino, as quais permitem uma antecipação consciente de todo o contexto de uma sessão didática, amenizando possíveis imprevistos negativos que prejudiquem a constituição do conhecimento dos estudantes e ampliando a visão dos professores em formações a respeito de como construir e proceder na realização das sessões didáticas de forma efetiva. Para implementar a aplicação dessas metodologias no objeto de estudo no contexto da Geometria Analítica nos moldes do SPAECE, seguem algumas orientações com base no boletim pedagógico do SPAECE.

Seguindo as orientações do boletim pedagógico do SPAECE, para finalizar, recomendamos a você, professor, algumas posturas que podem ser úteis, no enfrentamento das dificuldades de aprendizagem de seus alunos, independente do tema tratado em sala de aula.

- Preste atenção aos erros cometidos pelos estudantes, pois o professor que vê os estudantes errarem sem buscar entender o percurso que estão trilhando não será capaz de ajudá-los.
- Estimule, quando da discussão de um problema, o estudante a apresentar sua resolução e que essa seja debatida com todos os outros. Construa, a partir dos erros observados, uma solução coletiva. Sempre que possível explore as diferentes formas de se resolver um problema.
- Considere que as habilidades que os estudantes têm dificuldades devem ser motivo de sua atenção, de modo a sempre ter tarefas para exercitar aquelas habilidades ao longo de todo o ano e não apenas quando o conteúdo for apresentado.
- Desenvolva nos estudantes o hábito de realizar, *a priori*, estimativas e a validar as respostas encontradas nos problemas propostos. Essas simples ações capacitam o aluno a antecipar possíveis soluções, a descartar soluções implausíveis e a verificar a veracidade/razoabilidade das respostas por ele encontradas.
- Adote a resolução de problemas como norteadora das práticas de ensino de Matemática. (CEARÁ, 2009, p. 81).

Assim, esta investigação passa por essa extensão de teorias para culminar no enfoque da Geometria Analítica contemplada em uma prova externa chamada de SPAECE. Mesmo tendo esse enfoque, existe uma abertura para extrair informações que auxiliem os professores a expandir os conhecimentos ao aplicarem as teorias em suas práticas. Esse cenário da Geometria Analítica nos remete a constantes reflexões e questionamentos sobre o ensino de Matemática e às práticas dos professores na realização das sessões didáticas com os conteúdos abordados, contribuindo para que as situações didáticas sejam mais compatíveis e aprofundadas com a fundamentação teórica vigente nos objetivos propostos a serem vivenciados em sala de aula.

3.2 A Geometria Analítica e o currículo do Ensino Médio *versus* Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará

O Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) foi aplicado pela primeira vez em 1990, existindo uma grande semelhança com a avaliação do SPAECE na relação causa e efeito pelo formato e uso dos resultados para produzir indicadores educacionais, seja para o Brasil, como para Estados e municípios, dependendo do formato de abrangência territorial de cada avaliação. Essas avaliações possibilitam devolutivas pedagógicas tempestivas para aprimoramento de políticas públicas, por exemplo.

O SPAECE foi idealizado no Ceará no ano de 1992. Esse sistema foi implementado com o objetivo de auxiliar na promoção da qualidade do ensino público da Educação Básica no Estado. Essa proposta vem sendo implementada desde então, e acontece a cada dois anos. Esse sistema acontece em todo o Ceará e, dada a sua importância, ele tem se expandido para muitos outros estados do País.

Inicialmente, essa proposta acontecia apenas avaliando os 4º e 8º anos do Ensino Fundamental. Dadas, porém, a sua relevância e a maneira como os resultados foram sendo trabalhados, esse sistema adquiriu mais confiabilidade e, a partir de 2007, considerou-se que o sistema se tornou um elemento da gestão. Passou a avaliar também a leitura dos alunos do 2º ano do Ensino Fundamental, chamado de SPAECE-Alfa, e o domínio das competências e das habilidades esperadas para as demais etapas de escolaridade, nas disciplinas Língua Portuguesa e Matemática para os alunos do 5º e 9º anos do Ensino Fundamental e nas turmas de 1ª, 2ª e 3ª séries do Ensino Médio.

Cabe ressaltar que os resultados apurados nesses anos de avaliação servem como instrumentos utilizados para identificar o nível de proficiência e a evolução do desempenho dos alunos do Estado. Assim, com esses instrumentos, são averiguados os avanços e retrocessos de cada segmento do ensino e, particularmente, a situação de cada estudante, individualizadamente.

Desde 2008, optou-se por se aplicar três tipos de questionários: o primeiro é direcionado aos alunos e, com a apuração desses dados, é permitida a elaboração de indicadores relacionados ao perfil socioeconômico e hábitos de estudo, abrangendo também algumas dimensões do ambiente de aprendizagem; o segundo destina-se aos professores da Língua Portuguesa e de Matemática; e o terceiro questionário é direcionado aos diretores.

Com o cruzamento dessas três fontes de informação, é possível traçar-se o perfil da educação cearense e dos demais estados que contratam anualmente esse sistema de levantamento e gestão de dados escolares. Cabe ressaltar que o SPAECE está sempre aprimorando seus critérios de avaliação. Com isso, em 2010, eles passaram a avaliar, independentemente, o segmento do Ensino Médio. Essa divisão foi pensada com o objetivo de obter resultados próprios e ações e intervenções adequadas a esse público. Por conseguinte, espera-se ter uma melhor qualidade no aprendizado.

Dois anos depois, em 2012, houve outro desmembramento no segmento do Ensino Médio, e, dessa vez, foi o momento da separação do 3º ano do Ensino Médio, que passou a acontecer em quatro áreas com o foco na proposta da Matriz de Referência para o ENEM, do Ministério da Educação - as matrizes Linguagens, Códigos e suas Tecnologias e Matemática e

suas Tecnologias. Nessas circunstâncias, o segmento da Educação de Jovens e Adultos (EJA) também passou a ser avaliado, e seus resultados criteriosamente estudados.

Em 2013, o SPAECE aconteceu amostralmente, isso porque, naquele mesmo ano, aconteceu a avaliação externa do Ministério da Educação (MEC), também conhecida como Prova Brasil. Sendo assim, antecipadamente, foi realizada essa avaliação de modo amostral, que objetivava cruzar os dados da avaliação do MEC com a do SPAECE, para ver se ambos os resultados seguiam na mesma direção. No caso específico do 3º do Ensino Médio, o cruzamento dos dados deu-se com apoio nos resultados apurados junto ao ENEM.

Já em 2014, novamente, o SPAECE foi objeto de novas alterações e, dessa vez, foi o momento de realizar novamente as avaliações de forma amostral, porém, com uma particularidade a mais. Sendo assim, a amostragem foi levantada em cada escola. Com isso, com suporte no conhecimento da realidade de cada ambiente escolar e com o cruzamento dos resultados do ENEM, traçaram-se resultados relevantes para o contexto do 3º ano do Ensino Médio.

Em 2015, na busca de sempre aprimorar os resultados, foi o momento de se averiguar a situação dos três anos do Ensino Médio, por meio de uma avaliação de modo censitário. Na ocasião, no que diz respeito ao Ensino Médio, a avaliação aconteceu na Educação de Jovens e Adultos (EJA) (anos finais, presencial da Rede Estadual); da 1ª e 3ª séries do Ensino Médio (Programa Ensino Médio Inovador/Jovem de Futuro) e EJA (1º Período, presencial da Rede Estadual). Na época, as escolas estaduais tinham um convênio com o Banco Itaú, o qual implantava nas escolas o projeto “Jovem de Futuro”.

Notemos que, nesse ano, o sistema do SPAECE destacou a parceria que estava acontecendo em todo o Brasil com o Itaú e o Unibanco. Essa informação é relevante porque, com origem nela, compara-se com anos anteriores para cruzar as informações e verificar se houve avanços ou retrocessos. Uma vez que essas instituições passaram a investir na educação pública, por meio da disponibilização de recursos para a compra de instrumentos pedagógicos para a escola, então foi esperado que ocorresse algum avanço no ensino.

No tocante, especificamente, ao que se faz com esses resultados, de acordo com o *site* da própria plataforma SPAECE, geralmente, os dados obtidos são submetidos a diagnosticar a qualidade da educação pública em todo o Estado do Ceará. Para tanto, esses resultados são elaborados por aluno, turma, escola, município, Credes e Estado. Ao mesmo tempo, esses resultados funcionam como base para implementação de políticas públicas educacionais e de práticas pedagógicas inovadoras nas escolas estaduais e municipais do Estado do Ceará.

Por outro lado, de acordo com o *site* da plataforma SPAECE, com a implementação desse tipo de avaliação, são montados quadros com esses resultados cujo objetivo é pontuar para os educadores os pontos fracos e fortes, tanto da rede municipal quanto do sistema estadual de ensino do Ceará. Nessa planilha, também são mostrados os perfis, tanto dos gestores como dos docentes atuantes nas duas redes. Existe uma característica fundamental nesse tipo de avaliação – a particularidade longitudinal, ou seja, aquela que permite analisar o aluno no decurso de todo o processo.

Esta pesquisa contou com situações-problema do SPAECE ligadas à Geometria Analítica. Assim, esta avaliação do SPAECE entrou nesta investigação com um caráter de regionalização, em virtude de ser uma avaliação própria do Estado do Ceará. Isso propicia uma sondagem mais apurada, principalmente no quesito conhecimento maior da realidade educacional do nosso Estado, possibilitando uma análise comparativa mais assertiva para a realização de intervenções pedagógicas de modo mais pontual, em razão dessa característica longitudinal, da rede pública de ensino do Estado do Ceará. Essas descrições minuciosas são levantadas nos Boletins Pedagógicos da Escola com parcerias do CAEd/UFJF e SPAECE, facilitando um melhor redirecionamento aos gestores e professores nos trabalhos realizados anteriormente em sala de aula para traçar metas e objetivos mais efetivos no presente, visando a diminuir as principais dificuldades enfrentadas pelos alunos no futuro próximo.

Essa é uma característica muito importante e que merece ser destacada neste contexto. Isso porque, com essa avaliação longitudinal, observam-se as conquistas e eventuais fracassos obtidos ao longo do caminho por esse estudante. É esperado ainda que, de uma etapa para a outra, haja reflexões, principalmente relacionadas aos retrocessos que forem identificados.

As intervenções são susceptíveis de ocorrer no decurso da formação básica desses estudantes. É esperado que, ao término do Ensino Médio, obtenham resultados mais satisfatórios, tais como a proficiência, tanto em Língua Portuguesa como em Matemática, ou em outras disciplinas, seja alcançado o patamar esperado. Novamente aqui, se torna relevante destacar o fato de que, embora a plataforma esteja sempre procurando aprimorar seu modo de avaliar a educação básica, ela, por si, embora aponte resultados, não consegue transformar a realidade da educação do Ceará nem de nenhuma outra parte do Brasil ou do mundo; entretanto, ela possibilita uma análise criteriosa de seus dados, para, numa etapa seguinte, serem criadas políticas públicas para esse fim.

Nesta suposição prévia, no módulo seguinte, avaliam-se pontos relacionados ao ensino da Matemática no Ensino Médio. Mais especificamente, mensuram-se as metas e as estratégias

adotadas durante o emprego das avaliações do sistema SPAECE. Especificamente, examinamos o conteúdo de Geometria Analítica.

Sobre a Matriz de Referências de Avaliação, na plataforma do sistema SPAECE, a sua descrição é que essa matriz surge da Matriz Curricular de Ensino e contempla apenas aquelas habilidades consideradas fundamentais e possíveis de serem avaliadas, sobretudo em testes de múltipla escolha. No caso da Matemática, não existe uma matriz exclusiva para essa disciplina. Ela foi elaborada juntamente com Física, Química e Biologia. Foi elaborada em 2008, com o nome: “Metodologias de Apoio: áreas de Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias”. O subtítulo da obra também chama atenção: “escola aprendente”.

Na etapa que discorre sobre o ensino de Matemática, inicialmente, é procedida a uma reflexão sobre o ensino da Matemática e a formação do raciocínio lógico. Essa introdução foi escrita por Antônio de Pádua Rapôso Mazulo (2004). Ele a fundamenta nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), elaborados para cada disciplina. Destaca a relevância de, na etapa do Ensino Médio, serem perseguidas habilidades de modo a tornar o estudante competente em alguns quesitos.

Segundo os PCNs (1998), o ensino da Matemática deve estar pautado sobre quatro pilares, ou seja, quatro grandes temas: tratamento da informação, estudo dos números e das operações, estudo das grandezas e das medidas, estudo do espaço e das formas. Neste contexto, o tratamento da informação, segundo os PCNs (1998), deve permitir ao cidadão analisar as informações cotidianas, como dados estatísticos, tabelas e gráficos.

No que diz respeito ao eixo dos números e das operações, este deve ter o enfoque na compreensão da Aritmética e da Álgebra. O estudo das grandezas e das medidas, para o referido documento, deve possibilitar interligações dos campos da Aritmética, da Álgebra, da Geometria e de outras áreas do conhecimento. Já o eixo do estudo do espaço e das formas consiste em compreender o terreno da Geometria.

Se considerarmos que o ensino da Álgebra está assegurado em um dos eixos, tal ensino, de fato, deve se concentrar na compreensão, primeiramente, das operações aritméticas e, posteriormente, generalizar esses conhecimentos, de modo que a Álgebra seja contemplada. Sendo assim, a primeira etapa deste estudo está centrada na relevância do ensino desse eixo aos alunos do Ensino Fundamental.

Há três concepções de educação algébrica que, historicamente, vêm exercendo maior influência no ensino de Matemática elementar. A primeira, chamada de linguístico-pragmática, foi predominante durante o século XIX e estendeu-se até a metade do século XX. A segunda concepção, a fundamentalista-estrutural, predominante nas décadas de 1970 e 1980, trouxe consigo uma nova forma de interpretar a Álgebra no

ensino, tendo por base as propriedades estruturais, que serviam para fundamentar e justificar as passagens do transformismo algébrico. A terceira concepção - a fundamentalista-analógica - procura fazer uma síntese entre as duas anteriores, pois tenta recuperar o valor instrumental da Álgebra e preserva a preocupação fundamentalista, só que não com base nas propriedades estruturais, mas, sim, através do uso de modelos analógicos geométricos (blocos de madeira ou mesmo figuras geométricas) ou físicos (como a balança) que visualizam ou justificam as passagens do transformismo algébrico. (FIORENTINI *et al.*, 2003 *apud* FIORENTINI *et al.*, 2005, p. 3-4).

Nesta conjuntura, quando analisamos o que os PCNs (1998) propõem no que diz respeito ao ensino da Matemática, fica explícito que a terceira concepção, qual seja, fundamentalista-analógica, é a que melhor atende às expectativas para o ensino algébrico na Educação Básica.

Para Souza (2010, p. 2), os adolescentes desenvolvem a habilidade de pensar “abstratamente” se lhes forem proporcionadas experiências variadas envolvendo noções algébricas de modo informal já a partir dos anos iniciais. Assim, segundo a referida autora, os alunos passam a adquirir base para uma aprendizagem de Álgebra mais sólida e rica em significados.

Segundo Souza (2010, p. 8), os professores têm a tendência de privilegiar o estudo do cálculo algébrico e das equações, muitas vezes deslocadas dos problemas e da própria Geometria. Nesse sentido, o ensino da Álgebra é passível de ser interpretado pelos alunos como algo maçante e sem significado. Souza (2010, p. 8) pontua que, apesar desses aspectos serem necessários, eles não são suficientes.

Nesse sentido, Moura, Silva e Ribeiro (2017, p. 20) sugere:

É mais proveitoso propor situações que levem os estudantes a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, em vez de trabalhar com expressões e equações de forma meramente mecânica e sem relevância ou entendimento para o aluno. (MOURA; SILVA; RIBEIRO, 2017, p. 20).

Por fim, o autor citado acima lembra que a Álgebra mais complexa ensinada no Ensino Fundamental é a ministrada no 8º ano. Neste sentido, Moura (2017, p. 30) contextualiza, lembrando que, nesta etapa, o público que recebe estes ensinamentos é adolescente. O adolescente neste estágio está em busca de um projeto de vida. Logo, ele tem expectativas de concluir o Ensino Fundamental como meio de melhorar suas chances profissionais.

Desse modo, é pertinente trazer elementos do mundo fora da escola, inclusive do mercado de trabalho, para as atividades de Matemática, especificamente, assuntos que têm sua generalização ensinada por ferramentas algébricas. Isso porque essa Álgebra será retomada ao

largo do Ensino Médio.

Por outro lado, sob um olhar mais aprofundado e em um grau mais elevado, segundo Souza (2010, p. 2), é importante salientar e levar o educando a constatar que

[...] um ponto de extrema importância no ensino de Álgebra (e no de Matemática em geral) é mostrar a fecundidade da própria ideia de estrutura: que, por trás de "objetos" matemáticos, estão, no fundo, estruturas algébricas, topológicas etc. Esta é a razão pela qual se pode, por exemplo, falar da reta dos números reais: nos dois casos temos um corpo ordenado, contínuo e completo. E, no fundo, polinômios, vetores, translação etc. possuem a mesma estrutura de espaço vetorial. (SOUZA, 2010, p. 2).

Sendo assim, ante todos os argumentos expostos, está clara a relevância do ensino da Álgebra, visto ser essa uma estrutura matemática que permeia os outros pilares que constituem o ensino da Matemática. Quando pensamos nas possibilidades, ou seja, nas oportunidades a serem alcançadas pelos alunos ao se envolverem no estudo algébrico, o primeiro benefício que é lembrado por muitos educadores está pautado na generalização e abstração e na possibilidade de simplificar a resolução de alguns problemas. Como, porém, assinalam afirma Fiorentini *et al.* (2005, p. 4) “[...] a Álgebra não se reduz a um instrumento técnico-formal que facilita a resolução de certos problemas. Ela é, também, uma forma específica de pensamento e de leitura do mundo”.

Essa análise nos desafia a repensar o ensino da Álgebra trazendo como foco de reflexão a relação entre pensamento e linguagem. Tradicionalmente o ensino da Álgebra se sustenta na crença de que o pensamento algébrico só se manifesta e se desenvolve a partir do cálculo literal ou através da manipulação da linguagem simbólica da Álgebra. Para nós, entretanto, tanto do ponto de vista histórico quanto cognitivo, a linguagem algébrica é também resultado de uma forma especial de pensamento. (FIORENTINI; MIORIM, 1993 *apud* FIORENTINI *et al.*, 2005, p. 4).

Sendo assim, para Fiorentini (1993), o desenvolvimento do pensamento algébrico inicia-se, ocorrente nos primeiros anos de escolarização. Seguindo esse pensamento, a iniciação precoce da Álgebra concorre para desenvolver a linguagem.

Neste contexto, Fiorentini (1993, p. 87) defende a hipótese de que a realização de atividades exploratório-investigativas, que visam a levar os alunos a pensar genericamente, perceber regularidades e explicitar essa regularidade por meio de estruturas ou expressões matemáticas, pensar analiticamente, por fim, enseja estabelecer relações entre grandezas e variáveis.

Neste sentido, há algumas atividades que contribuiriam diretamente no desenvolvimento do pensamento algébrico, dentre as quais ele destaca:

Percebe e tenta expressar as estruturas aritméticas de uma situação-problema; produz mais de um modelo aritmético para uma mesma situação-problema; ou, reciprocamente, produz vários significados para uma mesma expressão numérica; interpreta uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas; transforma uma expressão aritmética em outra mais simples; desenvolve algum tipo de processo de generalização; percebe e tenta expressar regularidades ou invariâncias; desenvolve/cria uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente. (FIORENTINI, 1993 *apud* FIORENTINI *et al.*, 2005 p. 5).

Sendo assim, o referido autor assegura que os aspectos descritos no último parágrafo são considerados caracterizadores do pensamento algébrico.

O desenvolvimento dos caracterizadores do pensamento algébrico possui algumas fases. Fiorentini (1993) as classifica em: pré-algébrica, transição e pensamento algébrico mais desenvolvido. É claro que o que se espera de cada aluno, ao longo de trabalhos nesse sentido, é que o escolar atinja a terceira fase.

Segundo o referido autor, na terceira etapa, o estudante adquire capacidade para pensar e se expressar genericamente, concebendo a existência de grandezas numéricas abertas dentro de um intervalo numérico, produzindo habilidades de expressá-las por escrito e manuseá-las.

Visando desenvolver essa natureza interdependente da linguagem e do pensamento matemático, propõem uma quarta concepção de educação algébrica, para a qual o ensino de Álgebra tem início mediante exploração de situações-problema relativamente abertas ou problematização de fatos tidos como aritméticos ou geométricos que demandem a construção de generalizações, a representação de número generalizado ou de grandezas incógnitas e variáveis. (FIORENTINI *et al.*, 1993, p. 33-34 *apud* FIORENTINI *et al.*, 2005, p. 6-7).

Neste viés, os autores sugerem a segunda etapa para a realização do percurso inverso; iniciando de uma expressão algébrica e dando significações a ela. Assim, esses autores ressaltam que é uma maneira de driblar, usando a referência do currículo tradicional com esses transformismos algébricos. Eles revelam também que essas etapas são capazes de ocorrer aleatoriamente.

Como se constata pelas vertentes percorridas há pouco, o ensino da Álgebra, sem nenhuma dúvida, possui contribuições significativas para o desenvolvimento global da pessoa. Basta que os educadores não façam de suas operações um fim em si mesmo.

Uma aplicabilidade imediata da Álgebra no Ensino Médio acontece no estudo da Geometria Analítica. Na matriz curricular do sistema SPAECE, quando ela aborda o eixo Geometria, o faz apresentando um levantamento histórico sobre a Matemática e as suas ramificações, bem como suas aplicabilidades no passado que levaram esses estudiosos a

formalizarem os conceitos geométricos empregados hoje.

Na matriz curricular, o sistema SPAECE propõe uma relação de interdependência do cotidiano atual dos alunos e a história da Matemática. Sugere, ainda, que nesse contexto sejam apresentados os elementos utilitários da Matemática ao longo da histórica, e, nesse ensejo, particularmente os elementos da Geometria. Para tanto, podem ser apresentados os problemas que os egípcios enfrentavam com o gerenciamento do rio Nilo, e, em seguida, fazer uma transposição didática com problemas da atualidade que demandam conhecimentos matemáticos.

No caso específico da Geometria Analítica, torna-se relevante indicar, também, fragmentos da história da Matemática relacionados aos conceitos algébricos explorados desde então. É interessante, ainda, mostrar que a Álgebra é uma extensão da formalização da Aritmética, e que tanto a Álgebra como a Geometria Analítica dialogam nesse cenário, qual seja, da Geometria Analítica.

O sistema SPAECE sugere, ainda, que, ao discorrer sobre as nuances que compõem o cenário do ensino da Matemática, algumas características sejam exploradas com maior atenção: seus objetos, números, figuras, volumes, relações, proporções etc. são universais e necessários no cotidiano científico humano e a característica de que a Matemática acontece a partir da universalidade, e que essa, por sua vez, também acompanha a exatidão e o rigorismo de suas demonstrações e princípios.

Avançando um pouco mais nessa reflexão, a proposta do SPAECE no que tange à Geometria Analítica, o sistema sugere que esse conteúdo aconteça com base nas contribuições algébricas abordadas anteriormente nesta seção, associados à proposta elaborada por Polya (1974), ao formalizar etapas que devem ser seguidas na resolução de qualquer problema matemático.

Nesse sentido, ele sugere leitura, a compreensão e a interpretação do problema para a condicionante e suas partes. Em seguida, que ocorra a organização do plano de resolução – a utilização de algoritmos, conhecimentos prévios, pensamento indutivo/dedutivo. Em seguida, deve haver a execução do plano de resolução – o domínio dos conteúdos e estratégias previstas no plano. Por último, mas não menos importante, Polya (1995) sugere que seja realizada uma avaliação e seja confirmada a resposta – verificação Matemática se a resposta atende às exigências da condicionante. No que tange à Geometria Analítica, essas premissas continuam sendo válidas e sugeridas pelo sistema SPAECE.

Portanto, nossa proposta expressa nesta dissertação de mestrado propõe a utilização da TSD em conexão com a ED em complementaridade à EDF, com o auxílio do *software*

GeoGebra para as resoluções das situações-problema do SPAECE em sala de aula, a fim de amenizar esses possíveis problemas do nosso sistema de ensino atual, citados ao longo dessa, seção, por se tratar de uma proposta que vem sendo desenvolvida e aplicada ao largo de décadas, de modo a amenizar os entraves epistemológicos da Matemática. Neste viés, acreditamos no fato de ser uma proposta que contribua para o desenvolvimento de competências e habilidades para impulsionar os trabalhos dos alunos e professores a suprir algumas deficiências que dificultem o ensino e a aprendizagem mais significativa.

3.3 GeoGebra e suas contribuições para o ensino de Matemática

A formação de professores traz consigo a chegada da Tecnologia da Informação e Comunicação (TIC). Para o contexto educacional, a utilização dessas tecnologias está cada vez mais vigente nas ações de políticas públicas de natureza educacional como uma especificidade da formação do professor, conforme pesquisa sobre a utilização das TIC's realizada no contexto brasileiro, no ano de 2011.

Explorando o uso do computador e da *Internet*, a capacitação do professor surge como um tema relevante. E essa questão é ainda recente, tanto no Brasil quanto em países da América Latina. O docente apresenta, em média, 15 anos de experiência, sendo assim, a formação inicial desse profissional coincidiu com o surgimento da Internet comercial no Brasil. Isso significa que, quando o professor se preparava para o exercício de sua profissão, o tema 'TIC e educação' ainda não fazia parte do currículo de sua formação. Além disso, em 2009 foi instituída a Política Nacional de Formação Profissional do Magistério da Educação Básica, em que estava prevista a promoção e atualização da formação docente, incluindo as TIC. (CGI, 2011, p. 106).

Infelizmente, pesquisas revelam que, mesmo com recursos tecnológicos e a demanda de professores que saibam utilizá-los de modo a potencializar os processos de ensinar e aprender Matemática, ainda existe uma precariedade na formação de professores que direcionem os conteúdos matemáticos com maior amparo e respaldo aos recursos tecnológicos e disponibilidades em sala de aula.

Um recurso tecnológico bastante poderoso para auxiliar o ensino de Matemática é o *software* GeoGebra, elaborado por Markus Hohenwarter, em 2001, na Universidade austríaca de Salzburg. Ele possui uma plataforma que unifica o Sistema de Geometria Dinâmico (DGS) com o Sistema de Computação Algébrico (CAS). Por ser construído em Java, instala-se em computadores com sistema *Windows*, *Linux* ou *Macintosh*, estando disponível para *download* na *Internet* no site <http://www.GeoGebra.org/download> (LIMA, 2015). Por usar uma linguagem em Java, atualmente, o GeoGebra está disponível na plataforma Android,

abrangendo seu uso para dispositivos de informática mais versáteis, como *tablets* e *smartphones*. A versão 5.0.119.0 do produto GeoGebra 5 está disponível em cerca de 50 idiomas, sendo essa versão a mais completa de ferramentas para ser utilizada como suporte nas elaborações propostas.

Esta pesquisa aplica esse *software* como uma ferramenta para verificar se o GeoGebra auxilia satisfatoriamente na resolução dos problemas de Geometria Analítica do SPAECE em sala de aula. Pesquisas revelam que uma das maiores diferenças entre realizar a resolução de uma situação-problema no GeoGebra e no manuscrito é a solução, quase sempre, imediata com a própria elaboração da questão pelo GeoGebra, enquanto que, na resolução manuscrita, existem uma abstração e um abismo grande, dependendo do grau de dificuldade e da base de conhecimento de quem está resolvendo. Esse abismo em uma sala de aula ocasiona várias consequências que distanciam o processo de ensino e aprendizagem dos alunos. Assim, o GeoGebra é um excelente modelador no processo de ensino.

A busca da resposta a estes e outros questionamentos pertinentes à transposição Informática no ensino de Matemática, permitirá aos professores a organização de situações didáticas que contribuam para o aprendizado desta disciplina, possibilitando aos alunos novas formas de compreender, experimentar e mesmo recriar a Matemática trabalhada nas escolas e universidades, proporcionando-lhes uma visão mais abrangente dos saberes escolares e científicos. (SOUZA, 2010, p. 65).

Nestas circunstâncias, o GeoGebra constitui uma ferramenta riquíssima, possibilitando uma visão mais dinâmica e clara do problema em si. Nem sempre o aluno resolve uma questão só com a teoria proposta nos livros didáticos, pois, muitas vezes, o conhecimento não é efetivado nas aulas por falta de uma profundidade da teoria de cada assunto. A movimentação, a praticidade e a clareza que o GeoGebra proporciona na sua elaboração para trabalhar um problema proposto, permitindo ir além do que se pede, proporciona um alicerce de uma completude fantástica para os alunos, pois, além de tudo isso, o GeoGebra possibilita uma vivência de riqueza maior no processo de ensino.

Esse *software* nos conduz a usufruir da tecnologia para possibilitar distintos procedimentos no processo de ensino. Consoante Gravina e Basso (2010), as potencialidades dos *softwares* com tais ferramentas suportam a exteriorização, a diversidade e a ampliação de pensamentos. Assim, os experimentos diferentes estabelecidos nas situações-problema provocam o pensamento lógico e investigativo dos estudantes, auxiliando na compreensão de conceitos e propriedades, por exemplo.

O *software* GeoGebra, com suas infinitas possibilidades, permite ao professor discorrer sobre temas importantes da Geometria, cujo aprendizado exige muita abstração por parte do aluno. No decorrer do capítulo, inicialmente vimos como a Geometria dinâmica pode auxiliar o professor que deseja trabalhar com seus alunos as figuras geométricas e suas propriedades, desta forma procurando avançar com o desenvolvimento de habilidades que se fazem presentes nas atitudes de argumentar, explicar propriedades da Geometria. (GRAVINA; BASSO, 2010).

Vamos verificar se esse auxílio mencionado no estudo de Geometria será satisfatório nas resoluções das questões do SPAECE no conteúdo de Geometria Espacial. Alves (2012, p. 17) confirma “o papel do GeoGebra no sentido de proporcionar a compreensão de determinadas propriedades”.

O professor deixa de ser o transmissor de informações e passa a atuar como mediador, promotor, facilitador, desafiador e consultor. Cabe a ele criar uma situação de parceria e cooperação com os alunos e entre os alunos, considerar os assuntos emergentes no contexto, propor desafios ou eleger coletivamente um tema de estudo, questionar os alunos, convidá-los a verbalizar suas dificuldades e descobertas, provocar a formalização de conceitos e a tomada de consciência da evolução individual e grupal em relação às metas atingidas. (ALMEIDA, 1999, p. 29).

O uso de uma metodologia ativa e/ou o auxílio de um recurso tecnológico com aulas bem executadas representam excelentes saídas para aquelas aulas tradicionais, onde o professor expõe o conteúdo unilateralmente, propondo listas intermináveis de exercícios e aplicando avaliações descontextualizadas que não despertam mais o interesse do aluno de hoje.

O *software* GeoGebra é uma ferramenta de modelagem matemática com uma vastidão de informações para subsidiar na resolução de problemas, bem como para trabalhar, dinâmica e atuamente, propriedades matemáticas com a participação direta dos alunos na montagem e resolução das situações-problema. Dessa maneira, veremos a utilização desse *software* na elaboração e seu comportamento ante a situação didática proposta nesta pesquisa universitária *stricto sensu* (de mestrado).

4 EXPERIÊNCIA DIDÁTICA: GEOMETRIA ANALÍTICA DIRIGIDA AO SPAECE NO CURSO DE EXTENSÃO UNIVERSITÁRIA

A fase experimental desta pesquisa foi realizada num curso de extensão universitária com alguns licenciandos em Matemática, pela Universidade Estadual Vale do Acaraú -UVA, por meio de situações didáticas com problemas de Geometria Analítica ligados ao SPAECE, com o auxílio do GeoGebra. Para compreendermos melhor como se procedeu este percurso metodológico com os sujeitos envolvidos, vejamos as informações no Quadro 1.

Quadro 1 - Visão geral desta experiência didática aplicada com os licenciandos em Matemática

METODOLOGIA	• Abordagem qualitativa • Tipo: Esquema experimental • Baseado em ‘realizações didáticas’ • Concepção, realização, observação e análise
LÓCUS DA PESQUISA	• Curso de licenciatura em Matemática na UVA • Ofertado no curso de extensão: Grupo de pesquisa - tecnologias digitais
SUJEITOS	• Alunos do 5º ao 7º período da graduação do curso de licenciatura em Matemática • 12 participantes • Faixa etária entre 19 a 24 anos • Mais de 70% dos participantes têm experiência na área de docência • Menos de 12% nunca havia utilizado o GeoGebra • Mais de 80% nunca havia estudado a TSD
INSTRUMENTOS DA PESQUISA	• Ocorreu de forma remota com a utilização do <i>Google Meet</i> e Núcleo de Educação à Distância da UVA (NEaD-UVA) • Com o auxílio do <i>e-mail</i>, <i>Google forms</i> (questionários), <i>Google Drive</i> e <i>WhatsApp</i>
ENCONTROS	• Cinco encontros • Mais de 2 horas de duração em cada encontro • Questionário prévio

	• Formação metodológica: TSD, GeoGebra, SPAECE, situações didáticas (experimento), ED e EDF • Avaliação final dos alunos com base nos objetivos da pesquisa
--	--

Fonte: Elaboração própria.

Para realização das sessões didáticas, foram estruturadas as situações didáticas compostas por situações-problema com ênfase na TSD. Todo este percurso metodológico foi embasado pela ED e EDF a fim de propiciar uma antecipação para uma melhor orientação no percurso metodológico que antecede a realização didática. Neste sentido, são mostradas a concepção das situações didáticas e a previsão de comportamentos e resoluções que os alunos são capazes de executar no processo completo de resolução das situações-problema propostas, caracterizando a fase de concepção e análise *a priori*, incrementada pela ED.

4.1 Análise Preliminar

Com efeito, foram realizadas leituras e estudos das fontes importantes sobre o tema referentes à nossa pesquisa, que trata da ED, TSD, SPAECE, Geometria Analítica e GeoGebra, listando os principais conceitos e estudos com uma visão geral e atual sobre o tema e problema de pesquisa. Assim, este procedimento de busca e seleção de amostra relacionado a esta demanda constituiu-se com palavras-chave agrupadas em *strings* com o uso dos conectivos “E” e “OU”. As *strings* utilizadas na busca e seleção foram: “ED” E “TSD”; “EDF (2ª geração ou desenvolvimento)” OU “TSD” E “Geometria Analítica” OU “GeoGebra” OU “SPAECE”. *A priori*, não houve restrições quanto às datas das publicações.

Em uma investigação de ED, a fase de concepção é baseada não apenas em um referencial teórico didático geral e nos conhecimentos didáticos previamente adquiridos na área de estudo, mas também em um certo número de análises preliminares. O toque mais frequente:

- A análise epistemológica dos conteúdos contemplados no ensino
- Análise do ensino tradicional e seus efeitos
- A análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que determinam sua evolução
- Análise do campo de restrições onde estará localizado desempenho de ensino eficaz
- E, claro, todo o processo acima é feito levando em consideração os objetivos específicos da investigação. (ARTIGUE, 1995, p. 48, tradução nossa).

Para delimitar o problema, o objeto e objetivos desta pesquisa, foi realizado um levantamento bibliográfico de artigos, dissertações, teses e livros com as *strings* descritas

acima. No acervo, destacam-se as dissertações de mestrado de A. Silva (2016) e K. Silva (2016) sobre a elaboração de situações didáticas intermédio da ED, TSD e do GeoGebra, e de Oliveira (2018), sobre ED, e a de tese Richit (2015) com a Formação de Professores de Matemática da Educação Superior, abordando a Geometria Analítica e o GeoGebra, sinalizando que a Universidade precisa apoiar a formação contínua de seus docentes. Neste contexto, divisou-se uma dimensão maior da problemática que traz a Geometria Analítica no contexto do Ensino Médio e a importância dos professores trabalharem com metodologias e ferramentas tecnológicas que impulsionam o ensino e a aprendizagem dos alunos. Este trabalho, todavia, possui um campo epistêmico-matemático da Geometria Analítica direcionado para o SPAECE, com destaque para as dissertações de Hippolyto (2013), sobre avaliação dos resultados do SPAECE da 3ª série do Ensino Médio, em Matemática, no Ceará, e sua repercussão na prática pedagógica dos professores, e de J.V.M. FILHO (2014), com a aprendizagem da circunferência na perspectiva da Geometria Analítica mediada pelo *software* GeoGebra. Assim, nesta revisão bibliográfica, destacamos dois momentos: um para análise matemática, SPAECE e GeoGebra, e outro para reflexão da metodologia de pesquisa e teoria de ensino.

No primeiro momento, foram pesquisadas questões de Geometria Analítica ligadas ao SPAECE para serem mediadas pelo *software* GeoGebra. Inicialmente, foi estudado o cenário da Geometria Analítica, do SPAECE e do *software* GeoGebra, com destaque para os trabalhos realizados de: Reis (2012), com a compreensão da circunferência, tendo o auxílio do GeoGebra nas situações didáticas de Brousseau; Oliveira (2014), com o *software* GeoGebra como ferramenta para o ensino da Geometria Analítica; Germano (2016), com uma proposta de abordagem dos números complexos com o uso do GeoGebra sobre os fundamentos da ED; Santos (2011), com um breve histórico, uma perspectiva atual e conceitos da Geometria Analítica; Boletim do Professor (2016, 2017) e Boletim Pedagógico (2015) com orientações e questões do SPAECE. Em seguida, foi realizado um estudo mais aprofundado no livro Fundamentos Teóricos da Geometria Analítica e Álgebra Linear, de Lima (2015) e, entre outros, livros didáticos para compreender melhor como está sendo repassado o conteúdo em sala de aula e garantir uma maior propriedade nas exposições sobre Geometria Analítica.

No segundo momento, foram realizadas leituras sobre ED e TSD para efetivar o referencial teórico e fundamentar toda a pesquisa realizada. Neste contexto, destacam-se os autores: Almouloud (2004, 2007) e Almouloud e Coutinho (2008), com reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos, Fundamentos da Didática da Matemática e ED; Alves (2016, 2018), com as análises preliminares e a *priori* da ED e EDF; Artigue (1984, 1988, 1995, 1996, 2008), com uma abrangência e ampla fundamentação sobre

a ED; Brousseau (1976, 1986, 1996, 1998, 2008), com uma introdução ao estudo da TSD: conteúdos e métodos de ensino, situações didáticas e um aprofundamento na TSD; Chevallard (1982, 1991), com a transposição didática e a ED.

Em seguida, foram realizadas leituras sobre EDF para completar a amplitude do referencial teórico da pesquisa que tem sua aplicação na formação inicial de professores. Neste âmbito, destacam-se os autores: Alves e Catarino (2017, 2018), com a EDF e as repercussões para a formação de professor de Matemática no Brasil; Douady (1993, 1995) e Douady e Perrin-Glorian (1989), com a ED e a evolução da relação com o processo de aprendizagem; Margolinas *et al.* (2009) e Margolinas e Drijvers (2015), A ED e suas práticas e impactos; Perrin-Glorian (2011), com os fundamentos da EDF; Tempier (2013, 2016), com novas perspectivas para a ED sobre um olhar para a EDF; Almouloud e Silva (2012), mostrando os variados usos e concepções da ED de 1ª Geração e a ED de 2ª geração, com o artigo *ED: evolução e diversidade*.

Avaliando os trabalhos pesquisados sobre SPAECE, verificamos a ausência de uma metodologia de ensino que alie se à aprendizagem dos alunos. Geralmente, os trabalhos tratam da avaliação propriamente dita com resultados e indicadores comparativos. Nossa pesquisa aborda o SPAECE com um vínculo de metodologias para um amparo maior ao professor em sala de aula. Também ressaltamos que, nas pesquisas com a Geometria Analítica, os autores trazem a compreensão de conceitos, propriedades, análises e abordagens da Geometria Analítica, com o uso de algum *software* para visualizar e manipular elementos que compõem as questões no contexto de ensino médio ou atrelado à Álgebra Linear, dirigida ao ensino superior.

Neste sentido, são trabalhos de muita valia para compreendermos o contexto geral com os principais problemas epistemológicos enfrentados em sala de aula, para incrementarmos a nossa proposta aos professores em formação, quando nos restringirmos à Geometria Analítica no currículo do ensino médio com questões retiradas no Boletim Pedagógico de Avaliação de Matemática do SPAECE. Entendemos que os PCN foram modificados, dando origem aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio Modificados (PCN+). Já os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio 1 (PCN+ EM1) referem-se à área de Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias.

Retomando nosso tema circunferência, parte da Geometria Analítica, que segundo os PCN+ EM1 - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (2002) a unidade Geometria Analítica tem como função tratar algebricamente as propriedades e os elementos geométricos. O aluno do Ensino Médio terá a oportunidade de conhecer

essa forma de pensar que transforma problemas geométricos na resolução de equações, sistemas ou inequações. (CAVALCANTI; LINS, 2003, p. 108).

Dessa maneira, essa falta de pesquisas sobre Geometria Analítica para o SPAECE, com a aplicabilidade de metodologias pendidas à formação de professores em experimentos com a TSD, motivou a realização desta pesquisa, com a incursão pelo *software* GeoGebra, pois variados estudos/pesquisas destacam sua potencialidade no ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. A revisão bibliográfica sobre ED, EDF e TSD nos mostra o delineamento de teorias complementares com uma conexão que impulsionam a realização de uma pesquisa a ser resolvida no ensino de Matemática em sala de aula.

Ainda, segundo os PCN+, o trabalho com este tema pode ser centrado em estabelecer a correspondência entre as funções de 1º e 2º grau, seus gráficos e a resolução de problemas que exigem o estudo da posição relativa de pontos, retas, circunferências e parábolas. (CAVALCANTI; LINS, 2003, p. 109).

Como consequência da realização deste ajuntamento de estudos bibliográficos, ocorrem delineação e especificação do problema a ser investigado, objetivando e concatenando as informações para auxiliar com informações indispensáveis para o direcionamento da pesquisa.

4.2 Análise *a priori* das situações didáticas

Neste viés, esta fase de análise *a priori* é de suma importância para realizar uma situação didática bem-sucedida. Com base nas análises prévias efetuadas, realizadas, determinamos, na segunda fase da ED, as variáveis didáticas que intervêm no ensino-aprendizagem.

Uma das originalidades da metodologia de ED, como apontamos antes, reside no modo de validação que é essencialmente interno. Desde a fase de concepção, o processo de validação, através de análise *a priori* das situações didáticas da engenharia, diretamente ligada à concepção local desta última. Esta análise *a priori* deve ser concebida como uma análise de controle de significado. Isso significa, muito esquematicamente, que se a teoria construtivista estabelece o princípio da participação do aluno em construir seu conhecimento por meio da interação com um dado meio, a TSD que serve como referência à metodologia de engenharia tentou, desde sua origem, tornar-se uma teoria de controle das relações entre os significados e situações. (ARTIGUE, 1995, p. 44, tradução nossa).

Para Pommer (2013, p. 21), com procedência nas escolhas apropriadas das variáveis didáticas, a ED possibilita, com a análise *a priori*, prever o que vai se suceder na experimentação.

A análise *a posteriori* é baseada nos dados, que são coletados a fim de cumprir o escopo particular de cada pesquisa. A análise *a priori* muito detalhada é a base da observação dos dados pelo pesquisador e a diretriz para a coleta e análise de dados. A observação de cada situação depende fortemente desta análise *a priori*. (MARGOLINAS; DRIJVERS, 2015, p. 6, tradução nossa).

Isso norteia o direcionamento a que devemos proceder no processo da situação didática com a TSD para que, na análise *a posteriori*, as hipóteses levantadas sejam validadas, seguindo os objetivos traçados com as ações dos alunos em todo o processo de aprendizagem. Segundo Artigue (1996), faz-se necessário distinguir dois tipos de variáveis de comando.

Vejamos cada uma dessas variáveis, conforme Artigue (1996, p. 202):

As variáveis macro-didáticas ou globais, que dizem respeito à organização global da engenharia; e as variáveis micro-didáticas ou locais, que dizem respeito à organização local da engenharia, isto é, à organização de uma sessão ou de uma fase, podendo umas e outras serem, por sua vez, variáveis de ordem geral ou variáveis dependentes do conteúdo didático cujo ensino é visado. (ARTIGUE, 1996, p. 202 *apud* FILHO, 2014, p. 4).

Esta fase da ED é destinada à estruturação das situações didáticas com as situações-problema, as quais são organizadas com questões do SPAECE guiadas para a Geometria Analítica, elaboradas pelo CAEd/UFJF. Neste parâmetro, os descritores que contemplam os assuntos cobrados na prova do SPAECE do 3º ano referentes à Geometria Analítica são: D54 - Calcular a área de um triângulo pelas coordenadas de seus vértices; D55 - Determinar uma equação da reta a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação; D56 - Reconhecer, dentre as equações do 2º grau com duas incógnitas, as que representam circunferências; D57 - Identificar a localização de pontos no plano cartesiano; D58 - Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta, segundo a Matriz de Referência do SPAECE de Matemática do Boletim Pedagógico de Avaliação do 3º ano do Ensino Médio ofertado pelo CAEd/UFJF.

Assim, foram escolhidas seis situações-problema por se tratarem de questões clássicas contempladas com maior evidência nas provas do SPAECE do 3º ano do Ensino Médio. E nossa proposta é descrever o que se espera nas fases de ação, formulação, validação e institucionalização nos moldes da TSD.

O problema não é mais o controle e a disseminação dos produtos da engenharia de pesquisa, mas para determinar as variáveis fundamentais no que diz respeito ao conhecimento em jogo que comanda a engenharia que queremos fazer um recurso para a educação regular e estudar as condições de sua disseminação (e não a disseminação de detalhes de engenharia). (PERRIN-GLORIAN, 2011, p. 69, tradução nossa).

Assim, iniciamos a elaboração das situações-problema para que sejam realizadas na fase da experimentação da ED e, em seguida, na fase de análise *a posteriori*, efetivemos as análises que representam o conjunto de estudos epistemológicos, cognitivos e institucionais, essenciais para o desenvolvimento e reflexões de todo o processo das situações didáticas vivenciadas em sala de aula (PERRIN-GLORIAN; BELLEMAIN, 2019). Ressaltamos que as situações-problema se encontram no Apêndice B.

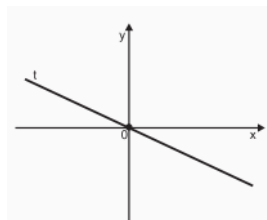
4.2.1 Situação-problema (1)

Contexto: o problema envolve o D58 - Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta, abrangendo ponto e reta no plano ortogonal com algumas propriedades e definições sobre coeficiente angular, coeficiente linear, inclinação da reta. Variáveis didáticas: A equação genérica da reta, a inclinação da reta, a identificação do coeficiente angular e linear na representação gráfica (geométrica), o reconhecimento da representação algébrica e geométrica de uma equação da reta e o GeoGebra. Objetivo da atividade: os licenciandos precisam resolver a questão, passando pelas fases da TSD, e fazer uma reflexão, projetando uma possível aplicação da questão para seus futuros alunos, para que, com suporte na sua experiência e prática, conjecturar possíveis caminhos a proceder com uma possível experimentação em sala de aula. Hipótese didática: espera-se que os sujeitos estabeleçam um processo de construção com a autonomia de um pesquisador que investiga, questiona, cria conjecturas de resoluções, com arrimo na interpretação gráfica do problema do SPAECE, com a possibilidade das movimentações para ampliar a compreensão de caracterizar as propriedades de uma equação da reta com a utilização do GeoGebra e dos conceitos adquiridos anteriormente.

Contexto proposto - (M120881E4) A reta t de equação $y = jx + k$ está representada no gráfico abaixo.

Os coeficientes angulares j e linear k , em relação ao sinal, são, respectivamente,

- A) negativo e negativo.
- B) negativo e nulo.
- C) positivo e negativo.
- D) positivo e nulo.
- E) positivo e positivo



Situação de Ação: segundo Brousseau (1996), é neste momento que o estudante inicia a interação com o meio, propiciando desenvolver as estratégias e habilidades para encaminhar uma possível solução do desafio proposto. Oliveira (2018, p. 32) aborda que é um momento durante o qual o estudante tem a liberdade de interagir sem precisar seguir regras com procedimentos imediatos, tendo em vista algumas reflexões de seus conhecimentos prévios de maneira experimental e intuitiva.

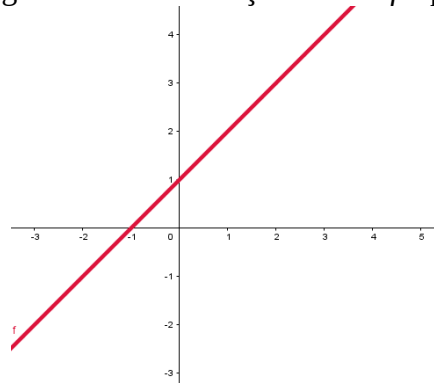
Situação de formulação : esta etapa tem como ponto forte a comunicação, expondo os seus entraves epistemológicos, para que ocorra a socialização dos alunos com argumentos para solucionar as dificuldades e encaminhar a validação da questão. Este momento permite que o grupo conjecture sobre o problema, formulando as possíveis respostas. É provável que venham a surgir algum questionamento sobre equação da reta e características sobre algumas propriedades e definições.

Situação de validação: momento em que ocorre a socialização dos resultados, argumentando e justificando a solução encontrada. É comum existir mais de uma solução. Todas as validações socializadas possibilitam firmar e expandir a fixação dos assuntos abordados em prol de elevar o entendimento dos alunos e, ao mesmo tempo, possibilitar uma transposição didática realizada fora do padrão efetivado pelo professor no quesito de ser uma linguagem mais próxima dos próprios alunos, facilitando a compreensão muitas vezes.

Situação de institucionalização: o professor fecha as resoluções dos alunos, aperfeiçoando a linguagem matemática e a validação realizada pelos estudantes. Haja vista estas soluções socializadas pelos alunos, o professor se projeta a compartilhar algo novo sobre a questão proposta com os alunos.

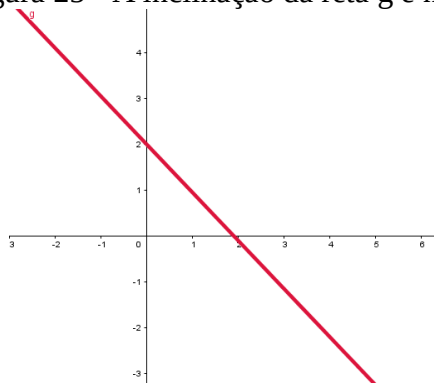
A situação-problema aborda coeficiente linear e coeficiente angular da reta, requerendo dos sujeitos a ideia de inclinação da reta quanto aos sinais na sua representação gráfica. É importante ressaltar que em “um sistema de coordenadas no plano, as curvas nesse plano passam a ser representadas por equações”. (LIMA, 2015, p. 40). Para compreendermos melhor os sinais dos coeficientes da equação da reta, é preciso inferirmos os significados das constantes a e b que compõem “a equação $y = ax + b$ da reta não vertical r : b é a ordenada do ponto em que r corta o eixo vertical OY e a , *inclinação* de r , mede a taxa de crescimento de y em função de x .” (LIMA, 2015, p. 41). “Quando $a > 0$ a reta $y = ax + b$ é inclinada para cima e quando $a < 0$ ela é inclinada para baixo”. (LIMA, 2015, p. 42). Vejamos como se comporta cada uma delas nas Figuras 24 e 25.

Figura 24 - A inclinação da reta f é positiva



Fonte: Elaboração própria.

Figura 25 - A inclinação da reta g é negativa



Fonte: Elaboração própria.

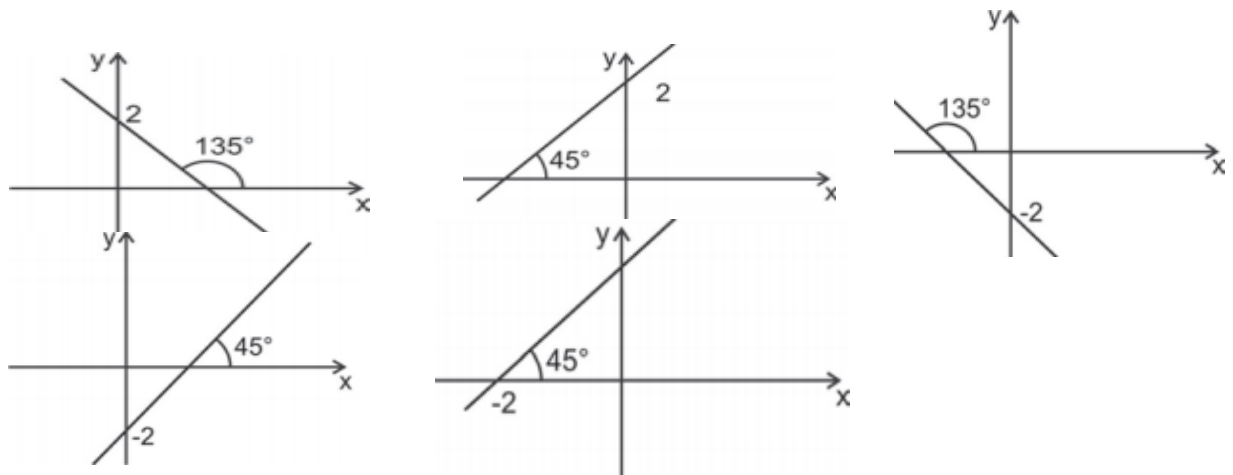
Dessa maneira, a função apresentada na questão tem inclinação negativa e passa pela origem, dando resposta o item b (negativo e nulo) como já havia mencionado e compartilhado pelos participantes na fase de validação.

4.2.2 Situação-problema (2)

Contexto. O problema envolve a equação da reta: representação geométrica (gráfica) e representação algébrica com o D57 - Identificar a localização de pontos no plano cartesiano e o D58 - Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta. Variáveis didáticas: a noção de reta, a identificação da inclinação da reta, a definição do coeficiente angular e linear na representação gráfica (geométrica), o reconhecimento da tangente de um ângulo e o sinal dependendo do quadrante em que o ângulo é formado, a compreensão da representação algébrica e geométrica de uma equação da reta e o GeoGebra. Objetivo da atividade: os licenciandos devem estar de prontidão para se debruçarem e resolverem a questão, passando pelas fases da TSD, permitindo-se refletir numa possível aplicação com seus futuros alunos, prevendo e identificando as interações professor, aluno e saber, para conjecturar

possíveis caminhos a proceder com esta possível experimentação. Hipótese didática: estabelecer um processo de construção autônoma dos estudantes para investigar, questionar, criar conjecturas de resoluções com base nos estudos sobre equação da reta, envolvendo as questões cotadas a caírem no SPAECE, utilizando o *software* GeoGebra para uma maior apropriação dos conceitos envolvendo ponto e reta.

Contexto proposto - (M120228A8) Considere a reta de equação $y = x - 2$. O gráfico que representa essa reta é:



Situação de Ação: os estudantes estão diante do problema e chamam a responsabilidade de resolução da questão para si ; momento oportuno para relembrem dos assuntos sobre inclinação da reta, por exemplo, e de como os coeficientes (angular e linear) se comportam tanto na representação algébrica como geométrica. Este é um momento de conjecturas sem um certo formalismo matemático.

Situação de formulação: neste momento, é provável que os licenciandos não sintam dificuldades em encontrar os pressupostos que caracterizam a representação geométrica dessa questão acima. É possível, porém, que apareçam alguns entraves epistemológicos aem ser socializados entre os alunos para suprirem as necessidades para um formalismo matemático mais alicerçado e estruturado. Este problema remete o aluno a identificar qual é a tangente (definição do coeficiente angular da reta) para obter a inclinação da reta, bem como identificar graficamente o coeficiente angular da reta.

Situação de validação: após este trabalho de resolução com todos os adereços para uma estruturação matemática da resolução do problema, os estudantes fazem a socialização de suas resoluções para verificar a validação da resolução proposta com o máximo de participantes e maneiras diferentes de resolução possível ; momento oportuno, também, para os licenciandos

fazerem uma reflexão, projetando uma possível aplicação com seus futuros alunos para preverem, principalmente, as interações do aluno com o saber destas três fases *a-didáticas*.

Situação de institucionalização: aqui o professor fica à frente da situação para validar as situações propostas pelos alunos, revelando algo novo sobre a questão e formalizando a generalização da questão para os alunos. Após esta fase, os alunos irão resolver a mesma questão utilizando o *software* GeoGebra, passando pelo formato que rege a TSD com o protagonismo, compartilhamento e socialização dos alunos com pouquíssima intervenção do professor.

4.2.3 Situação-problema (3)

Contexto: a situação envolvendo o descritor 55 (D55) - determinar uma equação da reta a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação. Variáveis didáticas: a realização dos cálculos para encontrar a equação da reta que passa por dois pontos, noção de ponto e reta, saber o percurso para se chegar na equação reduzida da reta e o GeoGebra. Objetivo da atividade: compreender o processo de resolução, quando se tem dois pontos no plano ortogonal, da função linear na forma algébrica do contexto da Geometria Analítica. Hipótese didática: os estudantes devem estabelecer a representação algébrica a partir dos pontos dados na questão do SPAECE, além de perceberem as características essenciais dos componentes da equação reduzida da reta, atribuindo outra maneira à situação, com a representação gráfica, de encontrar o item correto.

Contexto proposto - (M120283H6) A equação da reta que passa pelos pontos (2, 3) e (–1, –6) é:

A) $y = -x + 6$

B) $y = x + 3$

C) $y = 2x + 3$

D) $y = 3x - 3$

E) $y = 5x + 5$

Situação de Ação: é lançado o problema e o aluno assume a responsabilidade de resolvê-lo. Espera-se que os sujeitos, diante do problema, consigam lembrar-se de como encontrar a forma algébrica da reta com dois pontos atribuídos na questão e/ou pensem em outros meios de resolução. Pode ser explorado, colocando os pontos no plano ortogonal e traçar a reta para explorar as definições dos coeficientes angular e linear da reta como alternativa para encaminhar a resolução da questão.

Situação de formulação: momento propício para algum debate com questionamentos que possam surgir com entraves epistemológicos entre os alunos. Toda esta troca de informações entre os sujeitos permite novos conhecimentos propícios para uma elaboração de argumentos, mesmo sem um rigor matemático. Dessa maneira, espera-se que os alunos se lembrem da condição de alinhamento (pontos colineares), permitindo a regra de Saru por termos triângulos semelhantes formados pela reta e com seus lados proporcionais ; a sua última expressão pode ser escrita na forma de determinante (Det=0).

Situação de validação: nesta fase, os estudantes socializarão com os demais a sua resolução, com um certo rigor matemático, possibilitando verificar se os argumentos são válidos com suas conjecturas elaboradas. Assim, proceder à resolução pelo determinante, colocando um ponto genérico (x, y) juntamente com os dois pontos dados e resolver pela regra de Saru pode ser uma forma de resolução da questão. Vejamos como ficaria: $D = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Situação de institucionalização: o professor deixa explícita sua intenção, fazendo a generalização e formalização dos conteúdos apresentados na questão. Dessa forma, o docente retorna ao problema, formalizando a regra de Saru para resolver a questão, mas coloca outras maneiras diferentes para se resolver. Isso abrange uma sistematização sobre o assunto ponto e reta para garantir um conhecimento mais profundo e mais independência para se resolver problemas sobre o assunto. Depois que o docente oferecer aos alunos uma resolução profunda com todo o rigor matemático exigido pela questão, poderá expor que as questões do SPAECE geralmente deixam vários gatilhos para facilitar a sua resolução, seja no enunciado e/ou nos itens (distratores) que podem induzir os alunos a marcarem o item correto, mesmo não tendo um rigor matemático e sistemático sobre o assunto abordado.

4.2.4 Situação-problema (4)

Contexto: a situação envolvendo o descritor 54 (D54) - calcular a área de um triângulo pelas coordenadas de seus vértices. Variáveis didáticas: a noção de resolver um determinante com três pontos não colineares, a compreensão da fórmula para o cálculo da área de um triângulo no plano ortogonal, saber que o valor do determinante será em módulo por representar uma área e o GeoGebra. Objetivo da atividade: calcular a área do triângulo quando formado por três pontos não colineares. Hipótese didática: os alunos devem estabelecer a diferença entre condição de alinhamentos quando nos referimos a pontos colineares e não colineares, bem como

saber que três pontos não colineares formam um triângulo e para encontrar a sua área basta calcular esses pontos no determinante que será diferente de zero e o seu resultado sempre em módulo, por se tratar de uma área, e logo em seguida dividir por 2, atribuindo em seguida a área procurada.

Contexto proposto - (M120008CE) Qual é a área de um triângulo cujos vértices são A(2,-3), B(-1,2) e C(4,5)?

- A) 4
- B) 12
- C) 14
- D) 17
- E) 21

Situação de ação: nesta fase, espera-se que o aluno construa uma linha de raciocínio assertiva, caso tenha compreendido a diferenciação entre pontos colineares e pontos não colineares. Pode ser comum que existam dúvidas de alguns participantes por não saberem os passos para se chegar à resolução da questão através do determinante e da fórmula que precisar aplicar logo em seguida $\left(A_{\Delta} = \frac{|D|}{2}\right)$. Este momento, então, é propício para as conjecturas para uma possível resolução.

Situação de formulação: momento azado para socializarem as possíveis dúvidas e estratégias de resoluções entre os colegas. Isso deixa a resolução mais abrangente de detalhes para se estruturar uma investigação de resolução. Pode ocorrer que alguns alunos coloquem os pontos no plano ortogonal e liguem os pontos formando um triângulo e possam recorrer às fórmulas da Geometria Plana. Esta fase é caracterizada por estimativas e tentativas sem muito rigor matemático, criando, assim, estratégias de resoluções.

Situação de validação: esta fase vem após os alunos passarem pelos entraves epistemológicos, estruturações de resoluções sem muito rigor matemático e possíveis questionamentos e socialização dos conhecimentos que levaram a um entendimento do assunto ; momento para exporem suas resoluções na sala, respeitando os rigores matemáticos presentes na questão.

Situação de institucionalização: o professor assume o papel principal para identificar algum argumento matemático novo relacionado à questão, realizar a generalização das possíveis soluções compartilhadas pelos alunos e deixar claro que, a fim de encontrar a área do triângulo no plano ortogonal, basta calcular o determinante e o seu resultado em módulo, divide por 2, além de mostrar possíveis meios de resolução da questão, podendo ir além com

questionamentos que aumentariam o nível de dificuldade da questão. Por exemplo, se fosse um quadrilátero, um pentágono ou um hexágono, como faríamos para encontrar sua área? Percebemos a importância de o professor indagar os alunos quando a questão do SPAECE for trivial para que o aluno possa chegar a algum obstáculo epistemológico, possibilitando aos estudantes uma profundidade nos assuntos explícitos e implícitos da questão.

4.2.5 Situação-problema (5)

Contexto: a situação envolvendo o descritor 56 (D56) - Reconhecer, dentre as equações do 2º grau com duas incógnitas, as que representam circunferências. Variáveis didáticas: saber reconhecer uma equação da circunferência, compreender a condição para que uma equação represente uma circunferência, identificar os valores do centro e do raio de uma circunferência e realizar a situação-problema (5) no *software* GeoGebra. Objetivo da atividade: identificar entre as equações apresentadas quais representam uma equação da circunferência. Hipótese didática: os alunos devem utilizar a condição de existência de uma circunferência para estabelecer a diferença das equações apresentadas nos itens da questão ou usar o conhecimento básico para eliminar os distratores, que são fracos para verificar se é possível encontrar o item correto sem a necessidade de um rigor matemático. Vale ressaltar que esta última opção não é a desejável, porém não é descartável essa hipótese.

Contexto proposto - (M120364H6) Considere as equações abaixo.

I. $x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$

II. $x^2 - y^2 - 16 = 0$

III. $2x^2 + 3y^2 - 24 = 0$

IV. $x^2 + y - 9 = 0$

V. $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$

Quais dessas equações representam circunferências?

A) I, II e V.

B) I e V.

C) II e III.

D) II, III e IV.

E) II e IV.

Situação de ação: primeiro contato dos alunos com o problema. Assim, é um momento de resgate de todos os conhecimentos prévios adquiridos ao longo do tempo pelos alunos relacionados à questão. Assim, inicia uma investigação autônoma *a priori*, mas durante o

processo de resolução pode haver interações entre os alunos para enriquecer ainda mais o momento de resolução. É comum surgirem alguns questionamentos. O que define uma equação da circunferência? Quais as condições de existências de uma equação da circunferência? Todo e qualquer questionamento socializado ou não faz parte do processo de resolução e de aprendizagem.

Situação de formulação: momento propício para socializarem as dúvidas e compartilharem os conhecimentos entre os estudantes. Qualquer dúvida faz parte do processo de aprendizagem, por isso é essencial que existam estímulos para reforçar a importância do erro como algo satisfatório no percurso da resolução da questão. O professor precisa estar atento para que os alunos, mesmo diante dos entraves epistemológicos, não parem o processo de investigação até conseguirem chegar na resolução do problema vigente. Essa fase de formulação permite ao aluno checar com tentativas sem muito rigor matemático dos seus conhecimentos prévios sobre o(s) assunto(s) abordado(s). Pode ser que alguns alunos partam da definição e das características da equação da circunferência para irem eliminando os itens falsos mais visíveis.

Situação de validação: esta fase exige um certo grau de maturidade dos alunos com a resolução do problema, respeitando o rigor matemático. Aqui resta claro que existe uma condição de existência para ser considerada uma equação da circunferência. Faz-se necessário que os alunos atribuam essa condição de existência para formalizarem suas resoluções e logo em seguida socializarem essa resolução com os alunos em sala de aula.

Situação de institucionalização: momento oportuno para o professor formalizar com todo o rigor matemático as condições para que uma equação represente uma circunferência. Vejamos uma representação genérica de uma equação geral da circunferência : $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$. Dessa forma, teremos uma circunferência se:

$$1^\circ. A = B = 1$$

$$2^\circ. Pxy \rightarrow P = 0$$

$$3^\circ. a^2 + b^2 - E > 0$$

Observação : Centro : $c(a, b)$

$$a = \frac{C}{-2} \text{ e } b = \frac{D}{-2}$$

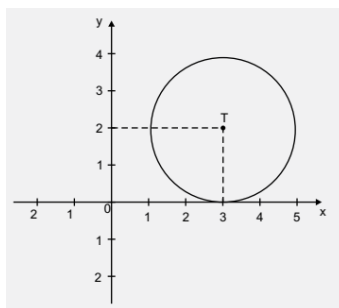
4.2.6 Situação-problema (6)

Contexto: a situação envolve equação da circunferência, requerendo dos alunos algumas noções de propriedades e definições sobre raio, tangência e equação da circunferência. Assim, trata-se do D56 - Reconhecer, dentre as equações do 2º grau com duas incógnitas, as que representam circunferências e do D57 - Identificar a localização de pontos no plano cartesiano; Variáveis didáticas: saber reconhecer o centro e o raio de uma circunferência no plano ortogonal, compreender a definição da equação da circunferência para encontrar sua equação e realizar a situação-problema (6) no *software* GeoGebra. Objetivo da atividade: explorar conceitos necessários à compreensão do estudo sobre equação da circunferência para a resolução da situação-problema. Hipótese didática: os estudantes precisam estabelecer relações da definição de distância entre dois pontos para definir a fórmula da equação reduzida da circunferência e, assim, extrair o raio e o centro para encontrar a equação proposta na questão do SPAECE, pertencente à circunferência, gerando uma constante que todos conhecemos como raio e a definição da equação da circunferência, sendo uma informação necessária para encontrar a equação da circunferência, já que, no momento da aplicação, foram retirados os itens a fim de ninguém utilizar as opções para encontrar o item correto sem um formalismo matemático (FERNANDES, C.; ALVES, F. R. V.; SOUZA, M. J. A., 2020, p. 321).

Contexto proposto - (M120682ES) A circunferência de centro T representada no plano cartesiano abaixo é tangente ao eixo x.

Qual é a equação dessa circunferência?

- A) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$
- B) $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$
- C) $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$
- D) $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$
- E) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$



Situação de ação: momento no qual ocorrem assimilações e acomodações a respeito da situação proposta, propiciando futuras decisões a serem tomadas na tentativa de uma performance com as competências para encaminhar a resolução do problema proposto com as etapas seguintes.

Situação de formulação: momento em que são manifestas, pelos alunos, sua performance e suas competências, seja de forma oral, escrita ou gestual, por meio da comunicação, gerando modificações ou criando modelos de resoluções.

Possível é que alguns alunos sintam a dificuldade de encontrar o raio ou lembrar-se da fórmula para encontrar a equação da circunferência, por exemplo. O professor, diante dos obstáculos dos alunos, pode construir com eles uma linha de raciocínio com uma estruturação *a-didática*, propiciando que os alunos assumam uma atitude protagonista com discussões essenciais para certa compreensão da questão e assuntos abordados, partindo de algo simples para o mais complexo, como ressalta Guy Brousseau, com o intuito de apropriar o aluno dos conhecimentos pertinentes a transformar um obstáculo epistemológico em um forte potencial para o processo de transposição didático efetivo (FERNANDES; ALVES; SOUZA, 2020, p. 323).

Depois dessa discussão proposta entre os alunos com questionamentos e as possibilidades afluídas, o discente terá respaldo para formular a questão proposta na situação didática 06 da forma tranquila e autônoma que se espera. Por se tratar de uma etapa *a-didática*, o professor realiza a mediação, quando necessária, sem liberar respostas prontas, direcionando-os a seguirem na resolução e estimulando-os a agirem de forma autônoma e reflexiva diante das situações propostas.

Situação de validação: provavelmente, os sujeitos partirão da equação reduzida com os valores do raio e do centro da circunferência para resolverem a questão, ou alguns mais habilidosos farão o que muitos alunos fazem ao trabalharem com as questões do SPAECE, eliminando os itens menos prováveis (incorretos) com cálculos mentais (triviais) para chegarem à resposta correta com as questões mais simples.

Como as questões do SPAECE geralmente têm um grau de dificuldade menor em relação a outras questões vigentes, como as do ENEM, por exemplo, alguns alunos podem utilizar essa estratégia para encontrar o item correto sem um rigor matemático, mais apurado. Talvez seja esse um dos problemas pelos quais muitos alunos tenham uma visão insegura ou preconceituosa quando ocorre uma aula do SPAECE.

Por isso, o professor precisa saber conduzir a aula para que, mesmo trabalhando com as questões do SPAECE, eleve os conhecimentos dos alunos para que eles tenham a capacidade e conhecimentos aptos para resolverem questões com o grau de dificuldade maior sobre o assunto trabalho. Segundo Chevallard, o compartilhar das informações fortalece o processo de transposição didática, ampliando os conceitos apreendidos.

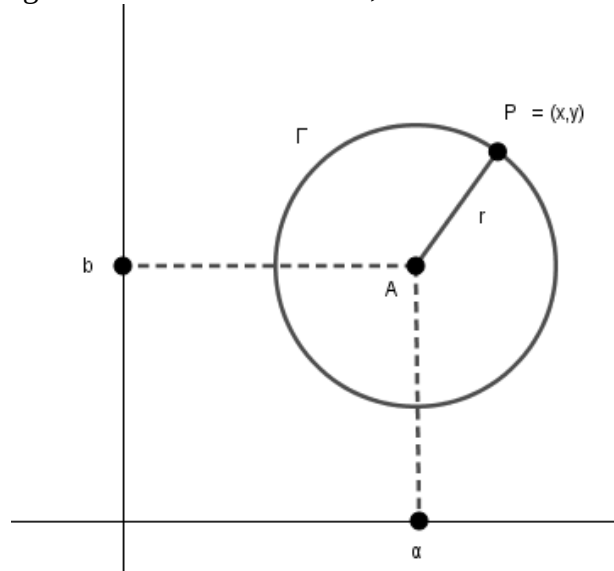
Situação de institucionalização: é um momento propício para instrução, convenção e informações que auxiliam os estudantes a fixarem melhor a teoria que está atrelada a questões explicitamente ou implicitamente com referências que levem ao saber.

Para institucionalizarmos o cálculo da equação da circunferência, seguiremos a definição dada por Lima (2015, p.74) e a Figura 26:

“A circunferência de centro (a,b) e raio $r > 0$ é o conjunto Γ formado pelos pontos $P = (x,y)$ tais que $d(A,P) = r$. Assim $P = (x,y)$ pertence a Γ se, e somente se,

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.” (FERNANDES; ALVES; SOUZA, 2020, p. 326 *apud* LIMA, 2015, p. 74).

Figura 26 – Circunferência Γ , de centro A e raio r



Fonte: Lima (2015, p. 74).

Assim, a sistematização da questão, com centro $(3,2)$ e raio $=2$, fica:

$$(x - (3))^2 + (y - (2))^2 = 2^2$$

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4 \text{ (Equação reduzida da circunferência).}$$

Podemos ir além, mostrando-lhes como ficaria se a questão pedisse a equação geral. Dessa forma, para encontrarmos a equação geral, basta efetuarmos os produtos notáveis $[(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2]$ e igualarmos a equação a zero. Logo, temos:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \text{ (Equação Geral da circunferência).}$$

Conforme o desenrolar da situação didática proposta em sala de aula (momento da aplicação), o professor seguirá um percurso que atenda à demanda existente com todas as fundamentações previstas com os estudos e planejamentos realizados a fim de prever certos comportamentos e possíveis entraves epistemológicos para que o professor tome as melhores decisões, quando necessárias.

4.3 Experimentação

Nos moldes do que foi descrito por Artigue (1995), vamos compreender melhor como foi esta etapa da pesquisa. A experimentação foi realizada na UVA, no curso de Licenciatura em Matemática de forma remota, em virtude da pandemia covid-19, com os alunos do curso de extensão: grupo de pesquisa - tecnologias digitais. A pesquisa contou com a participação de dezessete alunos que estavam cursando do 5º e ao 7º período da licenciatura, porém apenas doze estão presentes nas descrições e análises dos dados por terem participado assiduamente de todos os encontros realizados, incluindo as participações extras com todos os complementos solicitados e entregues, como, por exemplo, o questionário (Apêndice C), avaliação final (Apêndice D) e termo do Comitê de Ética assinado. Essa etapa teve toda a fundamentação ordenada conforme as fases da ED, como verificamos na citação abaixo de Artigue (1995):

Esta fase é seguida de uma análise *a posteriori* que se baseia no conjunto de dados recolhidos ao longo da experimentação, nomeadamente nas observações efetuadas às sequências de ensino, bem como produções dos alunos em sala de aula ou fora dela. Esses dados são frequentemente completados com outros obtidos a partir do uso de metodologias externas, como questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos, aplicadas em diferentes momentos de ensino ou durante o seu curso. (ARTIGUE, 1995, p. 48, tradução nossa).

Assim, o critério de escolha dos participantes ocorreu por serem alunos matriculados no curso de licenciatura em Matemática da UVA, estarem cursando do 5º ao 7º período, terem cursado a disciplina Álgebra Linear, estarem aptos a realizar o curso de extensão do grupo de pesquisa - tecnologias digitais, por intermédio da professora Maria José Araújo Souza (coorientadora desta nossa pesquisa de mestrado). Esse curso de extensão teve início no dia 19 de agosto e término no dia 02 de setembro de 2020, sendo dois encontros semanais com mais de duas horas cada. Ou seja, pelas datas expostas, era período de férias do calendário, por este motivo o critério de escolha dos participantes finalizou com a adesão realizada após a propaganda feita com a temática proposta desta formação metodológica com a aplicação da TSD.

Acreditamos que houve um interesse dos participantes em conhecer ou ampliar os conhecimentos sobre as metodologias, teoria de ensino e todo o conjunto que contemplava essa formação metodológica, além de a carga horária servir de atividades complementares exigida pela instituição de ensino. Assim, foram matriculados os 17 alunos que faziam parte de todos os critérios ora expressos, no entanto, como já havíamos descrito, pelos critérios de exclusões,

somente 12 realizaram todas as etapas propostas na formação metodológica, os quais fazem parte das análises desta investigação.

Para compreendermos melhor a caracterização dos participantes desta pesquisa, faremos uma descrição mais minuciosa dos doze que fizeram parte na análise dos dados coletados. Eram quatro mulheres e oito homens com faixa etária de 19 e 24 anos. Vejamos outras informações que foram extraídas do questionário prévio antes da realização das situações didáticas com os alunos: aproximadamente 23% têm um ano de experiência em sala de aula, 30% tem mais de um ano e 23% não têm essa experiência. Quando os alunos com experiência foram questionados se gostaram de lecionar matemática, obtivemos uma unanimidade: eles gostavam muito de atuar como professores de Matemática, apesar das dificuldades de infraestrutura existentes na educação brasileira. Quase 90% dos participantes só utilizaram o *software* GeoGebra nas disciplinas do curso de licenciatura ou de algum curso de extensão universitária, porém, dos 23% que atuam como professores, apenas 12% trabalham com o GeoGebra em sala de aula como ferramenta complementar para auxiliar na explicação dos conteúdos matemáticos.

Isso nos mostra uma abertura e uma maior aceitação desta nova geração, que sai do curso de licenciatura em Matemática e passa a usar o GeoGebra como uma ferramenta a ser incrementada com potencial em sala de aula. As informações acima foram coletadas do questionário prévio, correspondendo às questões 3, 4 e 6. Para finalizar este bloco das informações deste questionário, temos a questão 13: onde estudou a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau? Trazendo como respostas desse pequeno grupo de alunos (apesar de ter uma disciplina no 3º período do curso que aborda esse contexto): 25% nas disciplinas do curso de licenciatura em Matemática e 75% outros (excluindo palestras extracurriculares e cursos de extensão universitária), demonstrando uma certa falta de popularidade dessa teoria de ensino em algumas formações e repartições de ensino. Nesta tentativa de popularizar um pouco mais a difusão desta teoria trabalhada, a questão 1 (identificação do seu *e-mail*) desta avaliação prévia foi um meio de comunicação a mais para o envio e troca de alguns materiais extras, por exemplo.

Para que fosse realizada a pesquisa, obtivemos a aprovação do parecer pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) (ver Anexo A). Assim, foi assegurado o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) (ver Anexo B), realizada uma formação metodológica de forma remota via *Google Meet* com o auxílio do NEaD-UVA, *e-mail*, *Google Forms* e *WhatsApp* para agilizar e organizar as coletas de dados dos encontros *online* das situações didáticas. Esta formação metodológica foi realizada em cinco encontros com duração mínima de duas horas cada uma.

Assim, essa formação contemplou no primeiro encontro (19/08/2020) uma visão básica sobre a TSD, o SPAECE, e o GeoGebra com uma exposição oral com os *slides* de *PowerPoint* via *Google Meet*, trazendo algumas definições, informações, descrições, caracterizações que venham a contribuir para a compreensão de ambos os assuntos abordados. O segundo, terceiro e quarto encontros (20/08/2020, 26/08/2020 e 27/08/2020) foram destinados à aplicação das seis situações-problema nos moldes da TSD e vinculados à EDF, tendo sido realizadas duas situações-problema em cada encontro, passando por todas as fases da TSD e, após a fase de institucionalização, em cada situação didática, os alunos elaboravam o problema, utilizando o GeoGebra e, logo em seguida, o resolviam, socializando a questão com a turma, implementando as suas reflexões diante da resolução com e sem o GeoGebra.

No quinto encontro (02/09/2020), foi realizada uma reflexão mais profunda com a participação dos alunos falando sobre as contribuições da TSD para uma possível aplicação em sala de aula dos licenciandos em formação. Com efeito, para ampliar os conhecimentos dos licenciandos e ampará-los com subsídios necessários para estruturar as situações didáticas de forma assertiva vinculadas à ED e EDF, colaboramos com uma abordagem superficial dessas EDs para uma maior abrangência dos assuntos abordados nessa formação. Dessa maneira, ocorreram os cinco encontros com carga horária que ultrapassou onze horas via *Google Meet*. Estávamos, porém, utilizando o *WhatsApp*, *e-mail* e NEaD-UVA para proceder com as demandas das coletas de dados e os incrementos para fortalecer esta formação metodológica com alguns artigos e informações com materiais extras sobre as teorias apresentadas, possibilitando contribuir para uma maior compreensão dos licenciandos do processo de formação e execução de uma situação didática com as teorias envolvidas nesta pesquisa de mestrado.

Assim, desenvolveu-se a aplicação desta pesquisa de mestrado por meio dessa formação metodológica. Relatamos detalhadamente os dados levantados, bem como as análises realizadas por meio das etapas da TSD com o *design* de investigação da EDF, sendo uma teoria que aponta para os princípios que modelizam as interações básicas dos fenômenos originados de aprendizagens e ensino que envolvem professor, saber e aluno (ALVES, 2018).

Antes de apresentar as situações-problema, foi acordado com os alunos um contrato didático com todos os critérios necessários para a condução da aplicação das situações didáticas e coleta de dados, para ser possível, mesmo de forma remota, a aplicação da TSD e identificar todas as suas fases, bem como identificar as interações professor, aluno e saber, com toda a fidelidade que deve ter uma pesquisa, ficando acordado com os alunos que

- não iremos usar o *chat*, pois não teremos como extrair as informações de lá após a gravação no *Google Meet*;
- vamos usar o microfone e/ou câmera (vídeo) nos pronunciamentos;
- não vamos apagar ao longo do processo os rascunhos feitos nas etapas das resoluções. O erro é essencial para o processo e construção do conhecimento;
- tudo o que fizerem procurem me repassar com todo o processo de resolução, seja por fotos, áudios, escritos etc;
- podem dialogar quando desejarem;
- na fase de validação (momento em que vão socializar seu passo a passo da resolução) procurem descrever desde o início em que foi deparada a questão até a finalização da sua resolução;
- mesmo que não socializem durante a aula, terão que me passar sua resolução, seja com vídeo, áudio ou escrito, todo o passo a passo do início ao final da resolução, incluindo os erros e acertos. Tudo será essencial para a coleta de dados;
- após a resolução no papel e feita a institucionalização pelo professor, iremos realizar a construção e resolução no *software GeoGebra*;
- todas as construções do GeoGebra produzidas por vocês serão enviadas para o *Moodle*;
- após as finalizações das construções no GeoGebra, vocês irão me passar um *feedback* para falar da experiência em resolver a questão com o *software*. Será que a utilização do GeoGebra acrescentaria de alguma forma positiva para os alunos em sala de aula? Quais as contribuições que a resolução do GeoGebra pode acrescentar na resolução da questão? O GeoGebra foi útil para a resolução da questão? A transposição didática oferecida pelo GeoGebra pode ser uma maneira de aprofundar a questão ou outros assuntos implícitos inerentes à questão? Quais as diferenças entre a resolução no papel e a resolução no *software GeoGebra*?
- Caso alguém queira se pronunciar depois da aula para acrescentar algo a mais sobre a experiência vivenciada na aula, pode ficar à vontade, seja via *WhatsApp*, e-mail ou *Moodle*. Todos os relatos serão de muita valia para extrair dados para a análise final da pesquisa.

Para Niquini (1999, p. 200), “o contrato didático possibilita ao aluno exercer algumas tarefas específicas que o levam a adquirir, não somente o saber coo tal, mas também certos tipos de comportamentos.” Por este motivo, foi realizado esse contrato didático no primeiro encontro,

deixando claro para os alunos que, se não atendessem às nossas necessidades, estaria aberto para ser realizado algum ajuste e/ou modificações durante toda a realização da formação metodológica. Alves (2016b, p. 137 *apud* CHEVALLARD, 1991) afirma que:

[...] a dimensão didática é marcada por um interesse do expert pelos contratos didáticos locais instituídos em sala de aula, ou ao longo do tempo, adquirindo proeminência ao longo das explicações proferidas pelo pesquisador, tendo em vista suas escolhas de variáveis didáticas locais e globais. (ALVES, 2016b, p. 137 *apud* CHEVALLARD, 1991).

Neste contexto, é uma boa tentativa para solucionar a questão 5 do questionário prévio realizado pelos participantes desta pesquisa, onde eles destacaram as principais dificuldades da prática docente: “trazer a atenção do aluno para a aula, pois a maioria já traz um preconceito com a disciplina e já coloca na cabeça que é muito difícil, tornando-o menos interessado; manter o aluno atento à aula; prender a atenção dos alunos durante a aula, pois normalmente temos salas muito numerosas; indisciplina em sala de aula; conseguir a cooperação dos alunos; infraestrutura das escolas; desvalorização do professor; falta de apoio da família dos alunos.” Assim, a realização de um contrato didático bem estruturado e realizado, atrelado a uma metodologia de ensino que possibilite ao aluno engendrar neste processo de ensino-aprendizagem mais significativo, pode, sim, amenizar todas essas dificuldades mencionadas pelos licenciandos em formação inicial.

Por isso, a necessidade de se realizar, no início de cada encontro, um contrato didático mais específico de acordo com a procedência de cada aula. Brousseau (1976, 1986) ressalta a importância desta troca nas relações mestre-aluno, pois é tarefa do professor manter o interesse do aluno com as ações pedagógicas, para uma participação efetiva do aluno na construção corresponsável no processo de ensino-aprendizagem.

Assim, vamos às sequências didáticas aplicadas na formação metodológica com os licenciandos do curso de Matemática da UVA e recolhimento dos dados para análise e validação interna da pesquisa.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Este é o momento da fase de análise *a posteriori*, quarta etapa da ED, quando serão coletados os dados realizados na experimentação desta pesquisa, com enfoque a TSD para assim realizar a validação interna da pesquisa. Neste viés, faz-se necessário enfatizar que um dos objetivos da pesquisa foi investigar contribuições da TSD articulada com a EDF de questões do SPAECE envolvendo a Geometria Analítica e o *software* GeoGebra na formação inicial dos professores de Matemática. Neste sentido, com a análise *a posteriori*, ficará mais fácil analisar os resultados da análise preliminar e análise *a priori*, verificando de que forma ajudaram na aplicação da pesquisa.

Para isso, faremos um itinerário, no qual observaremos a TSD aplicada na formação inicial dos professores de Matemática para identificar as interações professor, aluno e saber. Em seguida, vamos verificar se a ED e EDF integradas à TSD foram eficazes para estruturar a construção, aplicação e análise das situações didáticas. E, por fim, avaliaremos as contribuições do *software* GeoGebra na formulação de soluções das questões de Geometria Analítica do SPAECE. Segundo Almouloud (2007, p. 177), “relacionar as observações com os objetivos definidos *a priori* e estimar a reprodutibilidade e, também, a regularidade dos fenômenos didáticos identificados”.

Para compreendermos com profundidade a análise *a posteriori*, Almouloud (2007) auxilia, sendo um conjunto de resultados onde são explorados os dados e recolhidos para uma contribuição e melhoria dos conhecimentos didáticos condicionados à transmissão do saber. Vale ressaltar que uma análise dessa é realizada confrontando os dados da análise *a priori* e análise *a posteriori* com os fundamentos teóricos das hipóteses e da problemática da nossa pesquisa. Para compreendermos melhor como tudo isso funciona na dimensão cognitiva, vejamos a colaboração de Alves (2016, p. 137):

A dimensão cognitiva é constatada por “alguns trabalhos que procedem uma análise fina das concepções preliminares dos aprendizes antes da aplicação de uma sequência”, o que pode ocorrer de modo interno (ao cabo das primeiras situações relativamente às quais os estudantes são confrontados), ou de modo externo (a partir da comparação e apreciação de outras investigações que fornecem dados sobre concepções possíveis dos sujeitos). (ALVES, 2016b, p. 137).

Com o objetivo, então, de conhecermos melhor os participantes da pesquisa para verificar se a análise prévia precisaria de alguns ajustes e para termos mais clareza das possíveis vulnerabilidades das variáveis microdidáticas (relativas à organização local da engenharia na

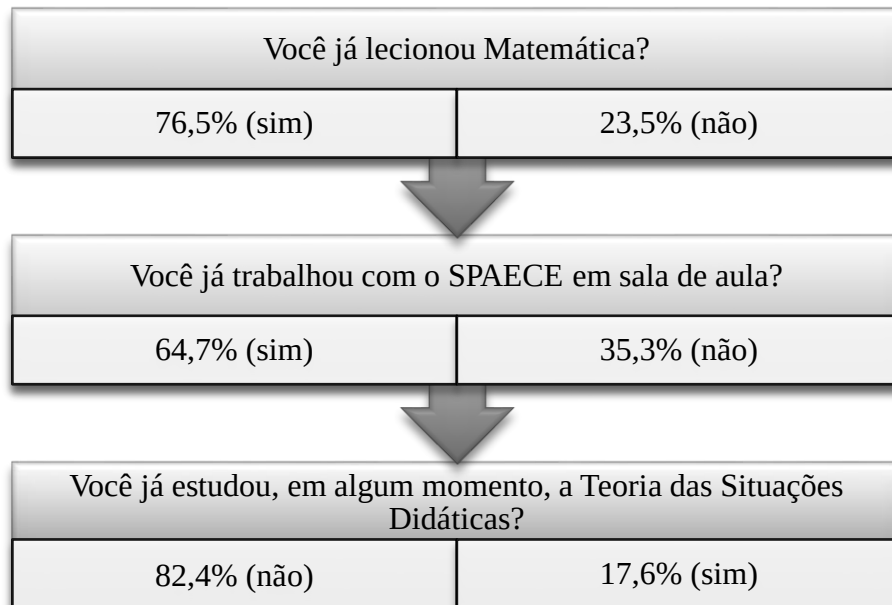
organização de uma sessão) para assim conduzirmos as sessões didáticas com mais conhecimento de causas e efeitos, visamos a realizar as correlações que propomos com os objetivos traçados nesta pesquisa.

O funcionamento da classe, o papel do professor neste funcionamento, o conhecimento real dos alunos apareceram como variáveis que eu não pude negligenciar. Portanto, optei por estudar as características dessas classes e características gerais da função do professor, particularmente visíveis neste tipo de aula onde é mais difícil para os alunos compartilharem a intenção de ensinar e também porque a proposta de ED exigia que os professores saíssem de suas rotinas ou pudessem adaptá-las. (PERRIN-GLORIAN, 2011, p. 64, tradução nossa).

Por isso, antes da aplicação da pesquisa via *Google Meet*, foi realizado um questionário prévio no *Google Forms* com algumas perguntas, essenciais para conhecer os participantes nos aspectos pessoais, profissionais e acadêmicos para um melhor planejamento e condução dessa formação metodológica como um todo. Esse questionário encontra-se em Anexo D, e com ele foi possível extrairmos alguns aspectos essenciais para uma melhor compreensão do perfil dos participantes dessa pesquisa, como apresentado na Figura 27.

Nesta prévia, foram contemplados todos os participantes inscritos na formação metodológica. *A priori* temos 17 licenciandos em análise:

Figura 27 - Resultado de alguns itens do questionário: Prévia dos participantes da pesquisa (questões: 2, 7 e 12)

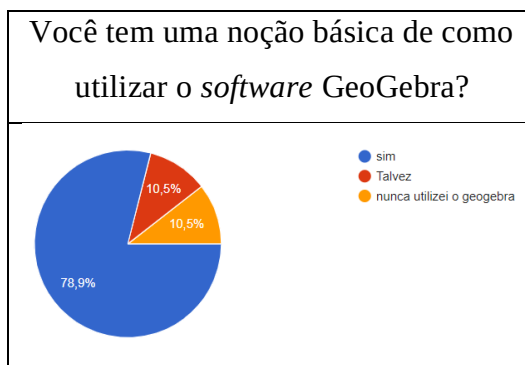


Fonte: Dados da pesquisa.

Neste parâmetro, temos a questão 8 informando que 88,2% já trabalharam com Geometria Analítica, SPAECE e GeoGebra em sala de aula, mostrando uma certa familiaridade

ao objeto da pesquisa. Outras informações foram importantes saber antes da aplicação das situações didáticas, como apresentadas na Figura 28.

Figura 28 – Outros dados extraídos do questionário prévio dos alunos (questões: 9)



Fonte: Dados da pesquisa.

Com suporte nessas informações extraídas deste questionário prévio, juntamente com as análises prévias e a *priori* da ED, obtivemos uma orientação e um controle mais abrangente dos procedimentos para uma melhor condução das situações didáticas. Segundo Artigue (1995, p. 258), a análise *a priori* permite um controle do comportamento dos alunos, prevendo certas ações nas interações professor, aluno e saber, trazendo mais segurança ao professor na condução das situações didáticas.

Vivenciar a fase de experimentação da ED deixou clara a importância da análise prévia e da análise *a priori*, não só antes da aplicação prévia do questionário realizado com os alunos, mas também durante todo o processo, ligado às situações didáticas nos moldes da TSD, permitindo uma contribuição maior nas relações e interações professor, aluno e saber para o processo de ensino e aprendizagem. A seguir, serão delineadas as análises realizadas a *posteriori* e discutida a validação interna desta pesquisa.

5.1 Análise *a posteriori* e validação interna

As situações didáticas foram desenvolvidas com os licenciandos via *Google Meet* por conta da pandemia da covid-19, como já havíamos informado por meio de uma formação metodológica aplicada no curso de extensão da UVA com sessões compostas por questões norteadoras do SPAECE direcionadas para a Geometria Analítica, elaboradas pelo CAEd/UFJF e com auxílio do *software* GeoGebra, de modo que as questões instigassem os alunos a resolvê-las com uma visão mais abrangente de todo o processo das situações didáticas e das interações professor, aluno e saber, proposto na TSD e amparado na EDF. Assim, logramos conduzir a efetivação do contrato didático e proporcionar reflexões e discussões acerca de todo o processo

que levasse o licenciando a uma formação mais significativa de conhecimentos didáticos para uma futura atuação em sala de aula com os conhecimentos adquiridos.

O processo de validação interna em jogo aqui não cai nas armadilhas dos esquemas usuais de validação estatística associados aos experimentos em aula, que consistem em basear-se implicitamente no princípio de que as diferenças mensuráveis encontradas estão relacionadas às variáveis de comando no que foram influenciados para diferenciar classes experimentais e classes de controle. (ARTIGUE, 1995, p. 48, tradução nossa).

Para reforçar, Almouloud (2007) expressa que a TSD se caracteriza por um processo de aprendizagem por meio de uma série de situações reprodutíveis, possibilitando modificações em um conjunto de comportamentos dos alunos. Essas modificações são essenciais para adquirirem conhecimentos e saberes em decorrência de uma aprendizagem mais significativa. Neste sentido, é essencial percebermos algumas variáveis didáticas para as reflexões propostas com as situações-problema. Como define Zabala (1998), a TSD resulta no conhecimento mais profundo das variáveis que intervêm no papel que cada uma delas exerce no processo de aprendizagem dos alunos. Assim, as situações-problema direcionam os licenciandos à compreensão das questões de Geometria Analítica do SPAECE com o auxílio do *software* GeoGebra, tendo em vista os conhecimentos prévios da turma.

Convém ressaltar que, do nosso ponto de vista, não é possível falar da formação contínua de professores de Matemática da Educação Superior para a utilização e apropriação das Tecnologias Digitais sem antes explicitar como as tecnologias têm produzido modos outros de abordar conceitos matemáticos, já que o processo de inserção das tecnologias no contexto educacional seguiu um movimento inverso, isto é, as TIC estão presentes em todo o cotidiano dos estudantes e a Escola precisa fazer uso das mesmas também no âmbito escolar. (RICHIT, 2015, p. 30).

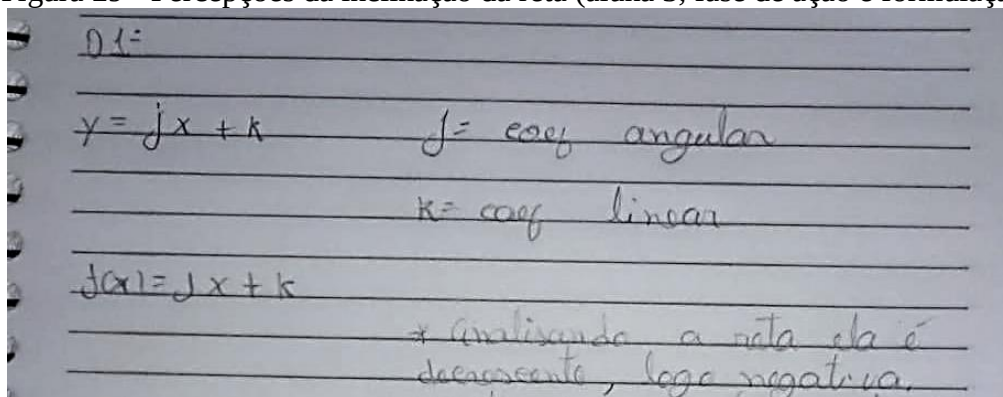
Desse modo, a realização didática é iniciada via *Google Meet* com as disposições das questões no modo apresentação aos estudantes, orientando-os a interagir para as reflexões sobre as indagações pertinentes e estratégias essenciais para a resolução das situações-problema, tanto com a visão de alunos como a visão de futuros professores por se tratar de um público de professores em formação inicial, propiciando argumentos que possam ser validados posteriormente. Assim, as socializações e elaborações realizadas pelos alunos são coletadas por meio das gravações realizadas pela coordenadora dessa pesquisa no próprio *Google Meet* e por meio dos registros com fotos, imagens, áudios, vídeos e entre outros que foram pedidos por meio do *WhatsApp*, NEaD-UVA, *Google Forms*, *Google Drive* e *e-mail* com suas produções.

Dessa forma, foi lançada a situação-problema (1) onde a responsabilidade de resolução da questão foi assumida pelo aluno. Trata-se de uma situação-problema genérica sobre equação da reta com o gráfico esboço e pede-se a relação dos sinais dos coeficientes (angular e linear).

Foi perceptível que essa fase de ação passou bem rápido pela escassez de dificuldades nessa questão pela grande maioria dos licenciandos. Alguns com a primeira leitura já identificaram a solução da questão; confessamos que tivemos de contê-los para não falarem logo o gabarito da questão.

Na fase de formulação, foram identificadas algumas dificuldades de alguns alunos por se tratar de uma fórmula genérica: $y = jx + k$ e o gráfico ser decrescente. Por isso, algumas conjecturas foram levantadas para que até os alunos com dificuldades superassem estes entraves epistemológicos. Neste sentido, foi perceptível a importância dos conhecimentos prévios dos alunos (algo previsto, pois os alunos afirmaram no questionário prévio que já haviam estudado Geometria Analítica, seja no Ensino Médio ou no curso de licenciatura) na estruturação da resolução da questão visível nos rascunhos e nas falas no momento de socialização (ver Figura 29). Observação: As figuras não estão uniformes em razão do experimento ter sido remoto e cada aluno ter enviado a imagem do que estava realizando.

Figura 29 - Percepções da inclinação da reta (aluna 3, fase de ação e formulação)



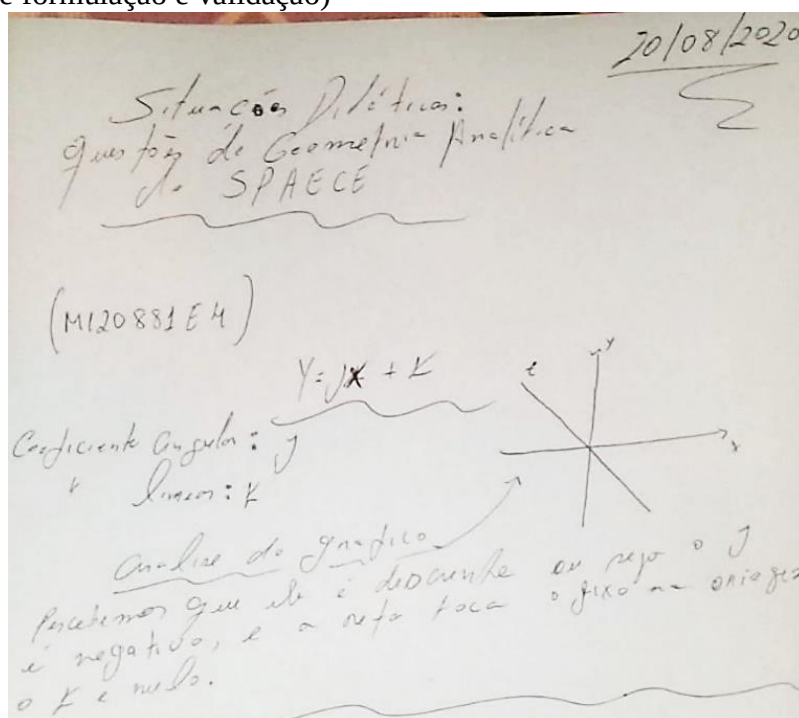
Fonte: Dados da pesquisa.

Vejamos o relato da aluna 1 na fase de validação da TSD:

No gráfico apresentado na questão, o coeficiente angular indica se o gráfico é crescente ou decrescente e percebemos que o coeficiente angular é negativo, pois sua inclinação apresentada descreve uma trajetória para baixo. Temos um coeficiente linear, que podemos dizer que é onde a reta corta o eixo Oy , que está justamente na origem (zero), ou seja, representando que ele é nulo.

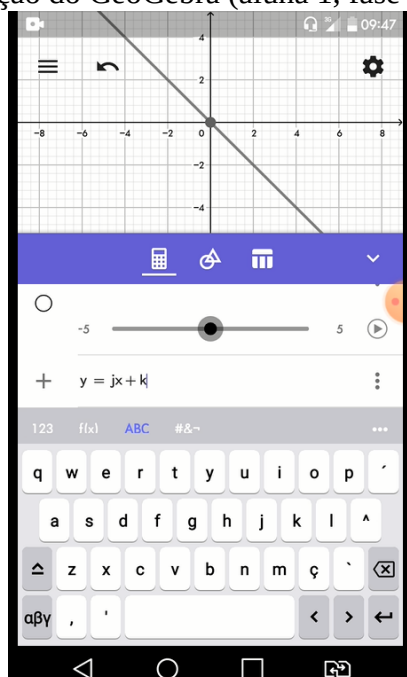
Assim, tem-se a fase de validação, na qual vários alunos socializaram as suas resoluções com rigor matemático. Vejamos alguns registros nas Figuras 30 e 31.

Figura 30 – Reconhecimento da inclinação da reta e do sinal de cada coeficiente (aluna 2, fase de formulação e validação)



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 31 - Reconhecimento dos sinais dos coeficientes de uma equação da reta com a utilização do GeoGebra (aluna 1, fase de ação e formulação)



Fonte: Dados da pesquisa.

Vale ressaltar que, no decorrer da aplicação da sequência didática, foram importantes alguns pronunciamentos com acordos didáticos extras para um melhor encaminhamento na hora da socialização da questão, ou seja, para uma organização didática e visualmente mais propícia

para o entendimento de todos. Por exemplo, no momento da exposição dos alunos na fase de validação, retiramos o modo de apresentação do *Google Meet* para permitir que os alunos pudessem realizar a socialização apresentando suas resoluções no modo apresentação também. Tudo isso proporcionou uma socialização mais clara e assertiva no momento da validação da questão.

Este momento foi destinado para realizar algumas reflexões, já que alguns alunos tinham respondido no questionário prévio que já tinham trabalhado em sala de aula com Geometria Analítica e SPAECE no 3º ano do Ensino Médio. Isso propiciou várias discussões em conjunto, por exemplo, quais seriam as principais dificuldades encontradas pelos alunos em sala de aula ao tentarem resolver a questão 01? Nos relatos dessa discussão dos licenciandos temos:

Aluno 8: A questão está implícita com um pouco de abstração, por usar letras para relatar os coeficientes da equação da reta, isso pode provocar algumas dificuldades para os alunos. Se a questão fosse mostrada no GeoGebra, os alunos teriam valores mais concretos, possibilitando uma transposição didática mais concreta e mais fácil de compreender os sinais desses coeficientes da equação da reta.

Aluno 12: Por se tratar de uma questão abstrata, alguns alunos poderiam ter algum ressentimento e nem tentarem responder à questão.

Aluno 1: Fazer com que o aluno compreenda a generalização da questão, para entender o que representam as letras, pois alguns alunos estão muito apegados aos números e/ou x e y , a falta de percepção de outras letras para identificar os coeficientes.

Aluno 6: Até mesmo ao trabalhar equação do 2º grau, por exemplo, quando mudava as letras muitos alunos se perdiam.

Foi traçado um paralelo pelo licenciando 6 com sua experiência em sala de aula. Assim, podemos perceber a questão da repetição sem a compreensão necessária. Os alunos estão mal-acostumados a resolver questões matemáticas via repetição, sem muita autonomia para compreender os assuntos matemáticos, faltando uma aprendizagem significativa. Isso foi uma percepção retirada pelos relatos dos licenciandos em complemento pela nossa experiência em sala de aula. Infelizmente, podemos observar com esses depoimentos que o ensino de Matemática precisa passar por muitas mudanças, principalmente no quesito de deixar os alunos mais protagonistas e autônomos com a aplicação de metodologias ativas para a condução de uma aprendizagem mais significativa. Na fala dos licenciandos foi quase unânime. Vejamos:

Aluno 9: A questão usando números seria bem mais fácil, porém com o uso de outras letras (j e k) alguns alunos iriam sentir dificuldade, sem falar, que os estudantes precisavam saber identificar e compreender o que é um coeficiente angular e coeficiente linear.

Essas falas foram geradas através das discussões e reflexões junto com os licenciandos no momento da formação metodológica via *Google Meet*. Logo em seguida, ocorreu a fase de institucionalização, quando assumimos onde o papel principal para explorar outros aspectos implícitos e/ou explícitos na questão. Assim, aprofundamos de forma mais completa os aspectos da definição de coeficiente angular da reta: $y = tg \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$; além de identificar se o ângulo é agudo ou obtuso, incluindo os quadrantes para compreendermos o sinal do coeficiente angular da reta (inclinação da reta ou taxa de variação quando se faz um contexto no dia a dia, por exemplo).

O coeficiente linear em questão é o k , pois não depende de nenhuma variável. Graficamente ele é identificável, onde a reta corta o eixo Oy . Como já foi mencionado no compartilhamento dos alunos, a reta corta o eixo Oy no ponto zero, por isso o coeficiente linear é nulo (vale ressaltar que o zero não é positivo nem negativo). É sempre bom deixar claro para os alunos que coeficiente é um número acompanhado do sinal. Isso pode desmistificar alguma possível dúvida de alguns alunos.

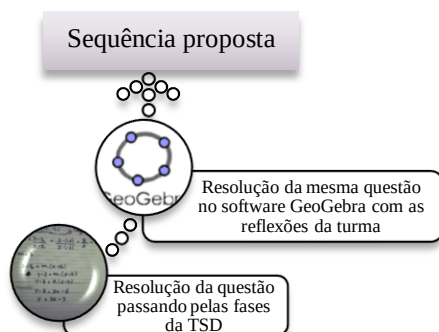
Foi aberta uma discussão também sobre como é estruturada a maioria das questões do SPAECE, visto que elas acabam trazendo muitas dicas, seja no enunciado e/ou nos distratores (itens), facilitando uma resolução assertiva, mesmo o aluno não tendo muito conhecimento sobre o assunto em questão. Observa-se que nessa questão o enunciado já identificou que o j era o coeficiente angular e o k o coeficiente linear, além disso os distratores apresentados só necessitavam saber o sinal do coeficiente angular, pois já iriam descartar a resposta correta pelas disposições das alternativas.

A construção da situação-problema 01 foi realizada pelos alunos logo no término da fase de institucionalização, seja na versão do celular, versão *online* ou na versão baixada (GeoGebra 5, como foi sugerido). Vale ressaltar que essa disposição de usar o GeoGebra só depois da finalização das etapas da TSD deu-se pelo motivo de se tratar de questões do SPAECE na íntegra. Assim são questões triviais para o público alvo em formação, porém, a ideia vai além de aplicar a TSD com as questões do SPAECE, visto que criamos algumas discussões e reflexões durante a formação para que os licenciandos percebessem a diferença de resolver a questão no papel e no *software* GeoGebra, tanto para eles como para os seus alunos ou possíveis alunos (para os que ainda não lecionam).

O outro motivo pelo qual não utilizamos o GeoGebra, concomitantemente, nas fases da TSD, foi a disposição que, ao realizar a construção da questão no GeoGebra, o *software* já informava a resposta sem fazer uso das movimentações e subsídios essenciais para construir

uma investigação autônoma para subsidiar os possíveis entraves epistemológicos como é mais comum em questões olímpicas, por exemplo. Por esses motivos, foi acordado que seguiremos as resoluções na seguinte sequência como está na Figura 32.

Figura 32 - Ilustração do procedimento da sequência de resolução das situações-problema

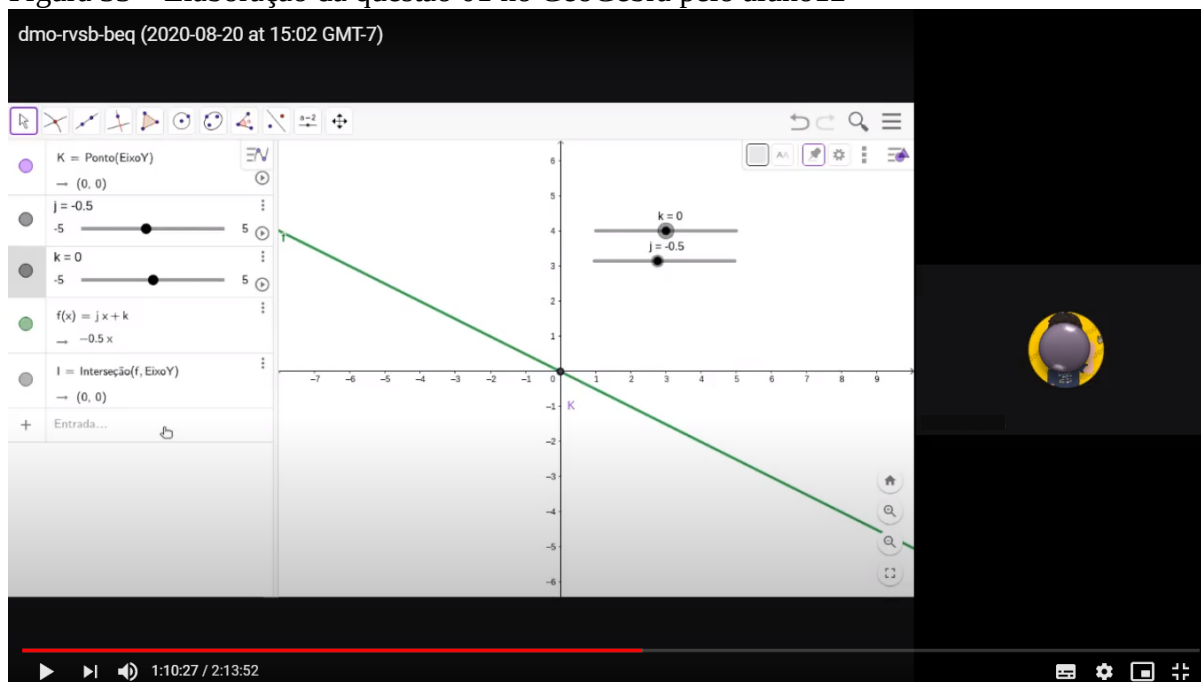


Fonte: Elaboração própria.

Essa foi a sequência proposta com os alunos. Primeiro, foi realizada a resolução das situações-problema sem a utilização do GeoGebra, passando por todas as fases da TSD e, em seguida, foi feita a construção/resolução das situações-problema no *software* GeoGebra. Claro que o nosso foco maior era a resolução da questão, passando pelas fases da TSD, mas a resolução no GeoGebra tem o objetivo de tornar a aprendizagem mais significativa. Vamos entender melhor como se procedeu à resolução da questão 01 nesse *software*. Vejamos como o aluno 12 descreve sua construção no GeoGebra: “digitei a equação na caixa de comando, logo em seguida o *software* pergunta se você quer criar os controles deslizantes tanto para “j” como para “k”. Ele ressalta que o programa já entende a construção desse controle deslizante, sendo crucial para identificar o coeficiente angular (inclinação da reta) e o coeficiente linear (onde a reta intercepta o eixo 0y). Isso deixa mais claro para o aluno perceber todo o processo e caracterização de como pode se comportar uma equação da reta no plano ortogonal, facilitando uma compreensão mais significativa para os alunos (ver Figuras 33 e 34).

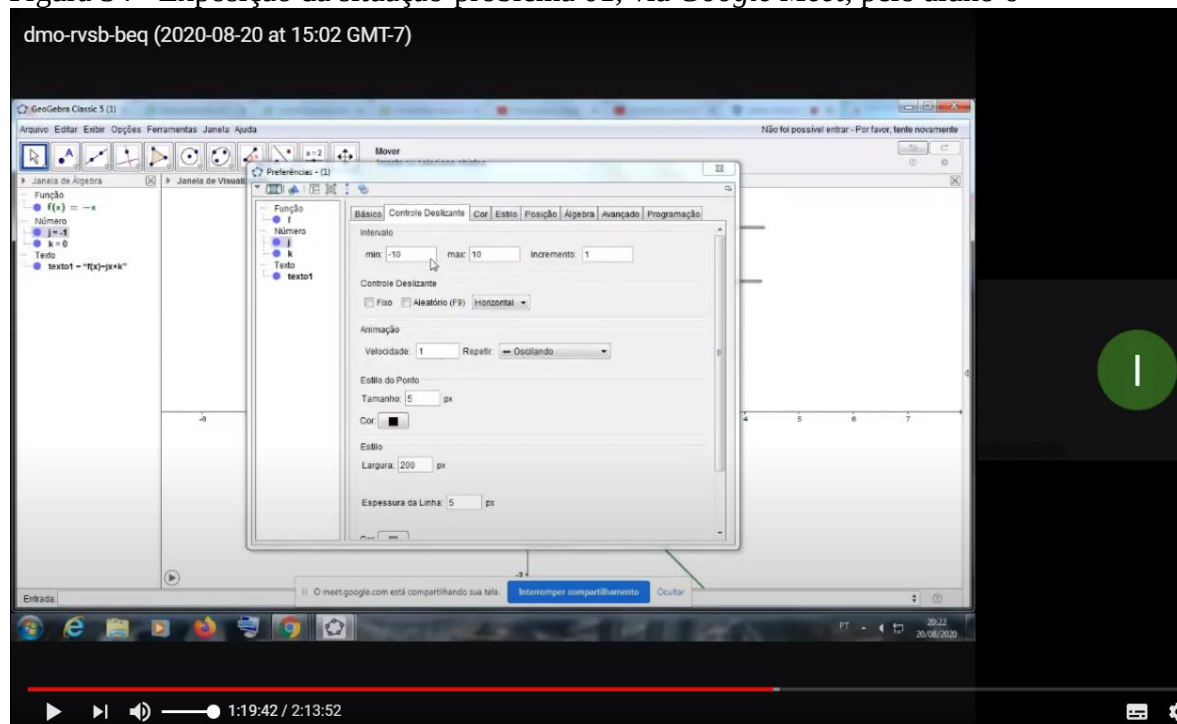
Dessa forma, vários alunos apresentaram a sua construção no GeoGebra, mesmo percorrendo caminhos diferentes, porém todos conseguiram resolver a questão no *software*, incluindo os dois alunos que no questionário prévio haviam relatado que não sabiam utilizar o GeoGebra. Este compartilhar da questão com o passo a passo foi enriquecedor, não só para os alunos que nunca haviam trabalhado com o GeoGebra, mas também para compreendermos outros aspectos epistemológicos, didáticos e caminhos diferentes de resolução, propiciando uma melhor confrontação das análises *a priori* e *a posteriori* na pesquisa.

Figura 33 – Elaboração da questão 01 no GeoGebra pelo aluno12



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 34 - Exposição da situação-problema 01, via Google Meet, pelo aluno 6



Fonte: Dados da pesquisa.

Nas figuras 33 e 34, é nítida a empolgação dos participantes com a resolução das situações-problema no *software* GeoGebra, incluindo a habilidade que ambos têm com a utilização das tecnologias pela caracterização nessa nova geração. Isso foi constatado durante os encontros de formação metodológica nas reflexões dos participantes da pesquisa. Logo em seguida, houve uma discussão acerca da resolução da questão utilizando o GeoGebra e sem a

utilização dele e como seria essa projeção para a sala de aula. Vejamos algumas reflexões expostas:

Aluno 8: A questão, como já havia falado, consiste na abstração devido a aparição de letras, já a resolução no GeoGebra os alunos têm uma visão mais concreta para perceberem todas as movimentações do gráfico, dessa forma creio que os alunos vivenciando toda essa movimentação no GeoGebra passam a perceber cada aspecto da questão com uma aprendizagem, digamos, mais significativa.

O aluno 1 enfatizou: “importância do contato visual mais concreto e dinâmico com aquilo que o aluno está aprendendo, assim ele já passa a aprender melhor toda a questão de abstração e todo o processo de generalização, pois deixa de ser só algo inscrito no papel e passa a ter toda uma movimentação visual de todo o processo como uma situação em si para uma compreensão mais abrangente da questão.

Todos os alunos relataram conforme é narrado pelos alunos 1 e 8, atribuindo a grande importância do *software* GeoGebra para uma melhor compreensão, não só dessa questão, mas também atribuíram a esse *software* como uma ferramenta que pode agregar bastante o processo de ensino e aprendizagem para se trabalhar qualquer assunto matemático vigente com os alunos.

Dando continuidade ao 2º encontro, no qual foi iniciada a aplicação das situações didáticas, foi apresentada aos alunos a situação-problema (2) via *Google Meet* no modo apresentação e via *WhatsApp* para garantir que todos teriam acesso à questão, mesmo com algum imprevisto. Isso procedeu-se com todas as seis situações-problema apresentadas. Dessa forma, a fase de ação da TSD é iniciada e os alunos assumem a responsabilidade de estruturação da resolução da questão. Em relação às dúvidas que forem surgindo, deixamos claro que eles poderiam compartilhar para ocorrer a cooperação para sanarem as possíveis dúvidas vigentes.

Foi atribuído um certo tempo e nesse período não surgiram dúvidas compartilhadas. Devido ao silêncio durante a aplicação, os instigamos com a pergunta: “surgiu alguma dúvida?” “Qual seria essa dúvida?” Ninguém indagou com dúvidas, mas vários começaram a falar se já poderiam socializar a resolução. Essa agilidade demonstrada por eles para resolver a questão sem passar por entraves epistemológicos já foi prevista na análise *a priori* por se tratar de uma questão simples e por serem licenciandos em Matemática. Então, já que não teve ninguém com dúvidas, reformulamos a pergunta: “alguém ainda falta concluir a questão?” Alguns relataram que, por estarem em silêncio, significa que todos já haviam terminado. Portanto, as fases de ação e formulação não foi possível visualizar no exato momento em que os alunos estavam realizando.

Infelizmente, por se tratar de uma aplicação remota via *Google Meet*, por conta da pandemia existente (covid-19), não foi possível o olhar mais profundo do professor como se estivéssemos na forma presencial em sala de aula, porém, mesmo com todas as limitações, esse

olhar profundo foi redirecionado perante a turma para extrair os comportamentos dos alunos que poderiam sugerir possíveis dúvidas e captar informações intrínsecas referentes a cada aluno, por exemplo, no ato da aplicação das situações didáticas. Por esta falta de um *feedback* imediato e os alunos terem ficado em silêncio, ficou subentendido que eles não sentiram nenhum obstáculo epistemológico para resolver a questão 02 pelo tempo gasto que foi mínimo. Vale ressaltar que essa falta de dificuldade dos licenciandos na resolução de grande parte das questões abordadas já havíamos previsto na análise *a priori* da ED.

Assim, para extrair mais informações e aproveitar o momento oportuno, por se tratar de uma formação metodológica para licenciandos, fizemos o seguinte questionamento: - quais seriam os obstáculos epistemológicos para os alunos? – Se vocês fossem professores e estivessem aplicando esta questão 02, quais seriam as principais dificuldades dos alunos?

Segundo o aluno 4: As maiores dificuldades que eles poderiam ter era caso não conhecessem as propriedades que falam do termo independente (onde a reta corta o eixo Oy) e do coeficiente angular, indicando se a reta é crescente ou decrescente. Se eles não compreenderem isso não terá como resolverem a questão, porém compreendendo tudo isso, os alunos resolveriam a questão tranquilamente.

Após a reflexão mencionada acima, foi possível compreender melhor o passo a passo dos licenciandos na fase de ação, formulação e validação nas quais os alunos, de posse da resolução da questão, realizaram a socialização com o rigor matemático utilizando o modo apresentação do *Google Meet*. A situação-problema 02 complementa a questão 01, apresentada anteriormente, com um diferencial, pois ela menciona a representação algébrica e pede a representação geométrica (gráfica).

Neste momento da apresentação, fica mais claro como ocorrem as interações professor, aluno e saber, e identificar os passos realizados nas fases da TSD. Vejamos como ocorreram algumas socializações. Na fase de ação, houve a leitura da questão; lembranças acerca dos conhecimentos prévios sobre os assuntos abordados na questão; verificação rápida nos itens, possibilitando descartar ou não algum item não satisfatório. Na fase de formulação, foram aflorados os conhecimentos prévios sobre ponto e reta, possibilitando criar conjecturas assertivas com as características da equação reduzida da reta e definições dos coeficientes angular e linear, bem como pode ficar o seu comportamento graficamente (ver Figuras 35 e 36).

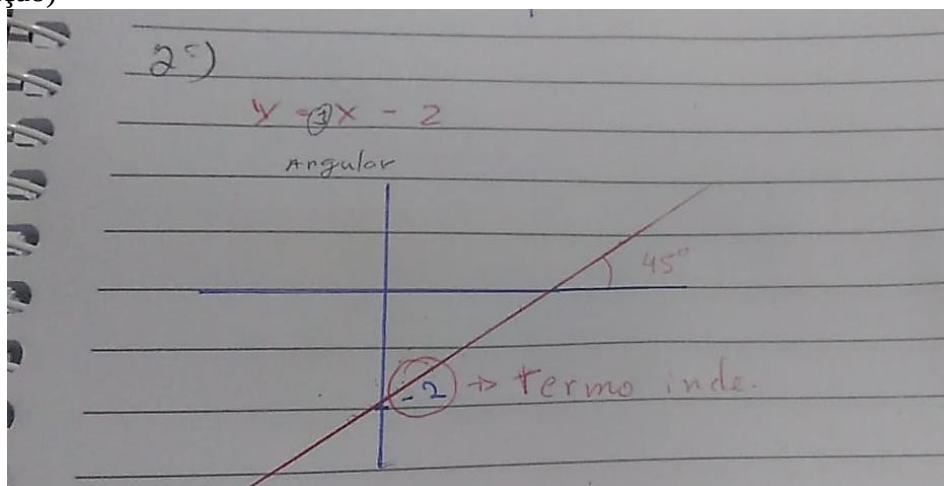
Podemos observar que o aluno 11 reconheceu os coeficientes.

O aluno 8 mencionou que: Sabendo que o coeficiente linear é -2 , indicamos que a reta vai interceptar o eixo Oy no -2 . Desse modo, podemos eliminar três itens

(gráficos) de imediato e restará apenas dois para serem analisados com mais rigor matemático.

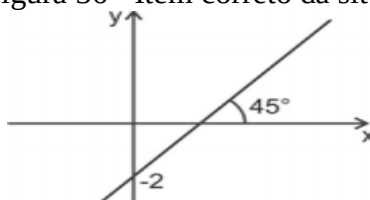
Na fase de Validação, houve a continuação e descrição do aluno 8: De forma mais elaborada e completa é feita uma análise do coeficiente angular na qual a questão traz um gráfico crescente e tendo seu valor “1” e do coeficiente linear, sendo “-2”, atribuindo como resposta o gráfico abaixo.

Figura 35 - Identificações de alguns termos da equação da reta (aluno 11, fase de ação e formulação)



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 36 - Item correto da situação-problema (02)



Fonte: Dados da pesquisa.

O aluno 5 fez uma reflexão quando estava realizando a validação da questão na qual ressaltou que:

Se tivesse um item com o coeficiente linear igual a “-2” e o coeficiente angular positivo apenas mudando o ângulo, talvez geraria dúvidas para muitos alunos, pois eles precisariam ter o conhecimento da definição do coeficiente angular que é a tangente do ângulo que no caso dessa questão a $\text{tg } 45^\circ = 1$. Porém, a questão poderia ser resolvida pelos alunos só com o coeficiente linear e o sinal do coeficiente angular, ou seja, sem um rigor matemático mais bem elaborado e profundo.

A maioria das resoluções apresentadas teve este viés das identificações dos coeficientes. Vejamos a colocação do aluno 7 e a Figura 37.

Na questão, acredito tive o pensamento da maioria dos colegas da sala. A questão 2 foi mais tranquila de resolver tanto no papel quanto no GeoGebra. E aquela dica que você apresentou na primeira questão falando dos sinais dos arcos, foi muito interessante, inclusive utilizei na hora de resolver a questão.

Figura 37 - Reforçando a definição do coeficiente angular da reta (aluno 7, fase de formulação)

Questão 02

$$y = x - 2$$

x	y
0	2
2	0

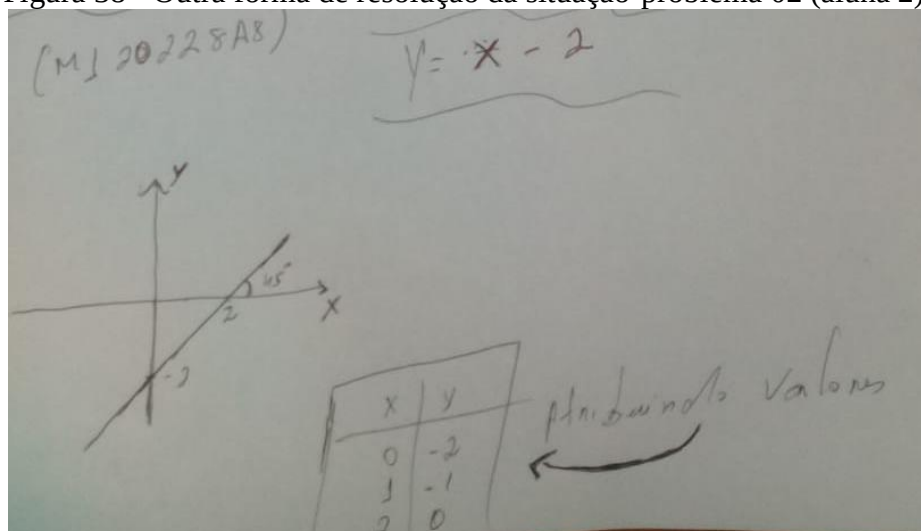
$$m = \frac{0 - 2}{2 - 0} = \frac{-2}{2} = -1$$

Já que $m = \text{tg } \alpha$
 $\text{tg } \alpha = -1 \Rightarrow 45^\circ$

Fonte: Dados da pesquisa.

A resolução da aluna 2 foi por outro viés, de forma elementar, atribuindo valores para “x” e montou a tabela de valores dos pares ordenados, vejamos na Figura 38.

Figura 38 - Outra forma de resolução da situação-problema 02 (aluna 2)



Fonte: Dados da pesquisa.

Na fase de institucionalização, reafirmamos que se trata de uma questão simples, porém, mesmo assim, podemos explorá-la e trazer algo novo ou aprofundar um pouco mais, sempre com um olhar nas interações da tríade de Brousseau (1986) (professor, aluno e saber), pois o professor precisa estar atento aos comportamentos e indícios da turma para que possa proceder com um viés atender às lacunas que impeçam do aluno efetivar uma aprendizagem significativa. O momento foi oportuno para explorar cada item, extraindo a forma algébrica de cada gráfico,

junto com a turma, para aprimorar as definições dos coeficientes. Foi deixado claro no compartilhamento dos alunos que muitos se utilizam dos itens para facilitar a resolução da questão. Algumas questões do SPAECE trazem esta possibilidade, nas quais mesmo o aluno tendo pouco conhecimento acerca dos assuntos abordados na questão, existirá a possibilidade de algumas questões serem resolvidas eliminando alguns itens que não fazem sentido algum para a resolução. Sabemos, porém, que o objetivo não é resolver questões visando só a um bom resultado nas provas, mas sim compreender o conteúdo matemático para resolver de forma consciente com rigor matemático para que o aluno consiga resolver qualquer questão sobre o assunto com níveis e estilos de provas diferentes.

É importantíssimo que todos precisam estar com esse grau de consciência, tanto os professores, os alunos e a direção escolar, para que o professor possa utilizar uma resolução mais abrangente possível e mesmo que passe por caminhos mais curtos, mas que o professor possa aflorar cada vez mais o lado investigativo dos alunos para explorarem a questão de forma que se possa trabalhar e aprofundar os assuntos matemáticos abordados. Tudo isso fortalece a compreensão dos alunos com alicerce mais garantido para que no futuro próximo o sucesso seja assegurado com maior louvor e mais abrangência.

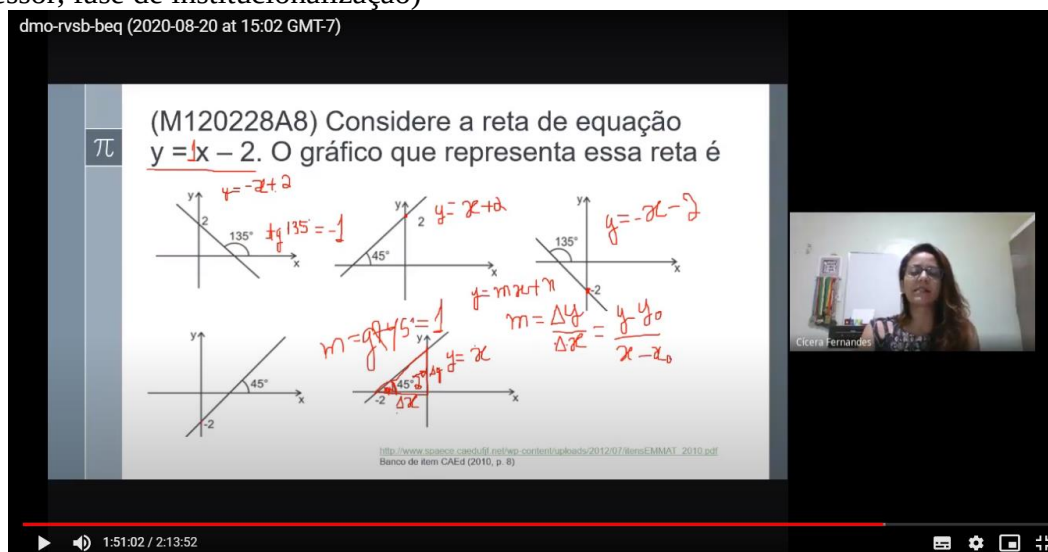
Apesar de ser uma questão simples, o professor sempre pode agregar com algo novo ou aprofundar os assuntos referentes à questão. Todos que trabalham com os descritores do SPAECE em sala de aula sabem que as questões são clássicas, existindo um certo padrão na maneira como são caracterizadas. Caso o professor aprofunde os estudos nessa caracterização das questões por descritores com os bancos de itens disponíveis e até mesmo realizando um certo comparativo com as questões do SAEB e Prova Brasil, irá encontrar várias semelhanças no estilo das questões, no nível, no formato, ou seja, é possível traçar um viés que as caracteriza, proporcionando um trabalho mais direcionado em sala de aula.

Como era uma questão que a situação-problema (1) deu um amparo com os conhecimentos básicos para a resolução dessa questão, assim aproveitamos para explorar e resolver junto com a turma cada item e fundamentar com outras possibilidades que poderiam ser abordado este assunto em provas (ver Figura 39).

Quando abordamos e deixamos bem claro que as questões são recursivas, podendo se repetir em vários aspectos como a que ocorreu com a primeira que serviu de parâmetro para resolver a segunda questão e que isso ocorreria também nas provas do SPAECE, segundo nossos ex-alunos durante toda a nossa experiência em sala de aula. Um aluno lançou a seguinte pergunta: “qual a série em que são aplicadas essas duas questões na prova do SPAECE? Quando

mencionamos que seria no 3º ano do Ensino Médio, a maioria dos alunos se manifestou achando que eram questões do Ensino Fundamental.

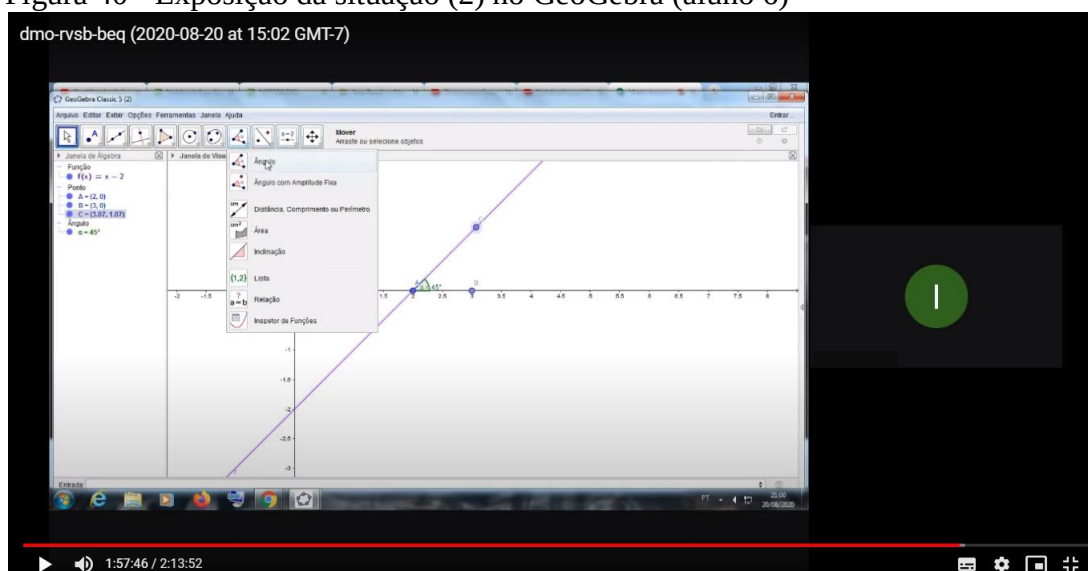
Figura 39 - Explorando a questão nos aspectos implícitos para aprofundar o assunto (professor, fase de institucionalização)



Fonte: Dados da pesquisa.

Logo em seguida, os alunos realizaram a construção da questão no *software* GeoGebra de forma bem rápida, iniciando logo em seguida a apresentação da resolução no modo apresentação via *Google Meet* (ver Figura 40).

Figura 40 - Exposição da situação (2) no GeoGebra (aluno 6)

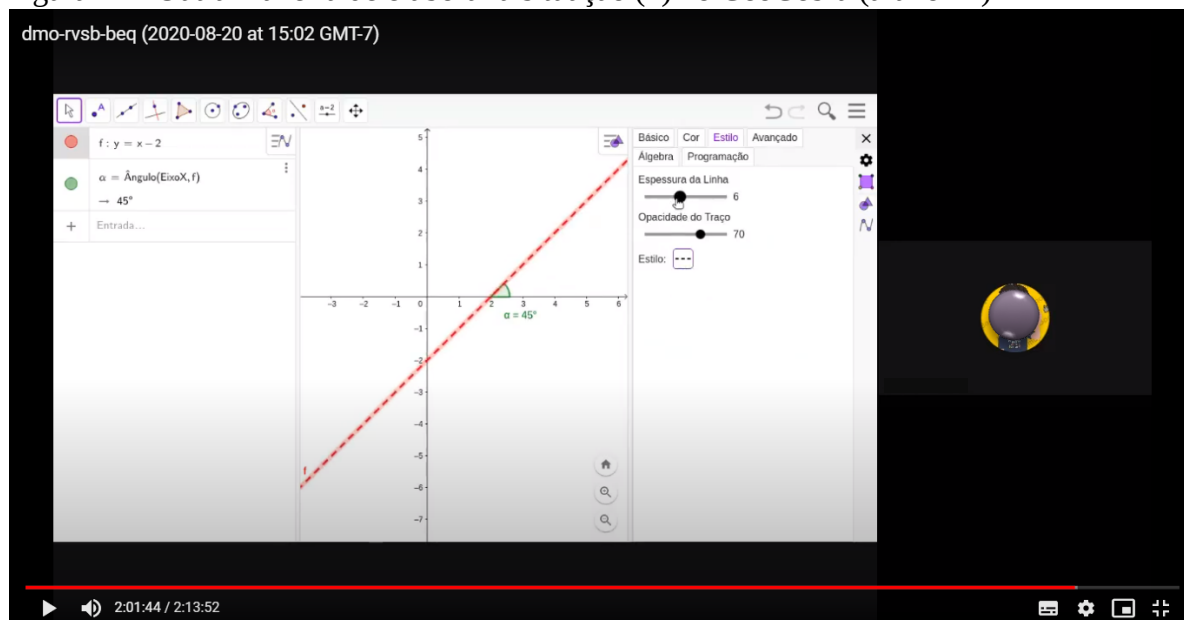


Fonte: Dados da pesquisa.

Essa questão teve a abordagem do comando ângulo por meio de três pontos. Foi possível realizar outras apresentações com maneiras diferentes de construção da resolução da questão. Vejamos a observação realizada e a Figura 41.

Aluno 10: O GeoGebra é uma ferramenta muito boa e dispõe de muitos recursos que na minha opinião deve ser usado na sala de aula, mas, nesta questão específica, ele não contribuiria tanto. Visto que, após digitar a equação ele já deu praticamente a resposta e bastou clicar em ângulo e ele também já mencionou o ângulo, ou seja, foi algo muito pronto, não existindo assim a oportunidade do pensamento para o aluno.

Figura 41 - Outra maneira de elaborar a situação (2) no GeoGebra (aluno 11)



Fonte: Dados da pesquisa.

Essas maneiras diferentes de construir a questão, seja no GeoGebra ou no caderno, quando ocorre a socialização da resolução com a turma, deixam mais enriquecedoras as sessões didáticas se partirmos do pressuposto de que ninguém sabe de tudo.

O nosso 2º encontro foi o início da aplicação das situações didáticas, quando, ao final, foram realizadas algumas reflexões sobre o GeoGebra. Como foi a resolução da questão com e sem esse *software*?

Aluno 8: [...] Mesmo conhecendo todo o conteúdo, o GeoGebra tende a mostrar a situação-problema da melhor maneira, pois ele facilita, mostrando algo que por um instante no papel e no meio da Álgebra deixa um pouco abstrato e o GeoGebra auxilia bastante a sanar essa abstração existente, por exemplo, na Geometria Analítica, propondo mais entendimento ao aluno.

Aluno 10: O GeoGebra ajuda em qualquer assunto da Matemática e que era para existir um programa com toda infraestrutura que obrigassem todas as escolas a utilizarem, certamente aumentaria o aprendizado dos alunos. Visto que, o GeoGebra mostra de forma bem clara para os alunos como ocorre todo o processo que a resolução no papel pode deixar implícito.

Isso nos levou a refletir também que existem alunos em sala de aula que, mesmo o professor realizando todo o processo com as explicações, não vão compreender todas as passagens, e o GeoGebra traz essa outra roupagem com a visualização e a movimentação, sendo dois pontos fortes desse *software*. Para finalizar, o aluno 1 comentou:

[...] Quão rico o GeoGebra é e da quantidade de ferramentas que o agrega. Ao resolvermos esta questão 2, temos a visualização do ângulo e a reta com todos os seus elementos e componentes. Isso deixa esse software como uma ferramenta muito completa para enriquecer a explicação do aluno e professor, contribuindo para o estudante começar a compreender todos os assuntos pertinentes da questão.

Iniciamos o 3º encontro (26.08.2020) reforçando a questão da TSD com o seu foco nas situações didáticas, estabelecendo as relações entre professor, aluno e saber no meio que Brousseau (1986) chama de *milieu*¹ (tudo que está fora do aluno). Todo esse meio acaba influenciando direta e indiretamente essa relação envolvendo esta tríade na relação didática, caracterizando a TSD.

Dessa forma, foi acordado que as situações-problema terão as mesmas procedências atribuídas no contrato didático realizado no 2º encontro, com um reforço a mais acordado e aceito por todos, por conta do atraso de alguns participantes, para todos agilizarem a entrega das duas formas de resoluções (forma tradicional e com o uso do GeoGebra) na plataforma do NEaD-UVA ou via *WhatsApp* logo ao final de cada encontro, se possível.

Para finalizar, foi reforçado que iríamos proceder da mesma maneira do encontro anterior, a questão é lançada, todos começam a resolver e qualquer dúvida que surgir basta compartilhar com a turma para os demais cooperarem e auxiliarem para desmitificarem os entraves epistemológicos (dúvidas) encontrados. Mais uma vez, pedimos para eles não terem vergonha alguma de se pronunciarem diante das dúvidas que surgirem, reafirmando que o erro é essencial para a construção do conhecimento.

Após a resolução, validaremos com a socialização da resolução e finalizamos com a institucionalização, realizando a generalização e validando as resoluções anteriores de todos, para que, em seguida, realizemos a situação-problema no GeoGebra, seguida da socialização da construção e reflexões pertinentes acerca das duas formas de resolução. Aproveitamos para lembrá-los de que as três primeiras fases da TSD - ação, formulação e validação - são *a-didáticas* e a última fase (institucionalização) é didática, onde há a finalização desta sequência didática.

Por estarem faltando três participantes, acordamos em procedermos com uma visão das questões do SPAECE no 3º ano do Ensino Médio com uma certa experiência própria, vivenciada em sala de aula, antes de iniciarmos as aplicações das sequências didáticas.

¹ O termo *milieu* ou *milieux* em francês no lugar de sua tradução em português “meio” possibilita analisar, de um lado, as relações entre os alunos, os conhecimentos ou saberes e as situações, e por outro lado, as relações entre os próprios conhecimentos e entre as situações (BROUSSEAU, 2002).

A prova do SPAECE tem um estilo próprio, abordando alguns descritores, no 3º ano, por exemplo, entre eles são abordados os de Geometria Analítica contemplados nesta pesquisa. Os professores que trabalham com o SPAECE no 3º ano, no entanto, sabem que essa prova contempla assuntos do 1º e 2º ano do Ensino Médio ou até mesmo do 9º ano, apesar de contemplar mais os assuntos do 3º ano, principalmente os descritores de Geometria Analítica, como já foi descrito em outro momento. Geralmente a prova aborda 26 questões de Matemática e 26 de Português. Se observarmos, os comentários dos alunos após a prova do 1º ano, acaba contemplando descritores do 9º ano. Então, existe este padrão, onde são enfatizadas as questões referentes a cada ano, mas acaba existindo essa mistura, questões aparecerem em outras provas dos anos anteriores, porém tudo de forma coerente dentro das realidades de conhecimento contemplado em cada série, além de ser uma prova com questões simples.

Dessa forma, o nível da prova do SPAECE é baixo, pois a maioria das questões aborda o geral (o comum dos primeiros exemplos contemplados nos livros, por exemplos, sem muitas exceções), se compararmos a outras provas, como a do ENEM e dos vestibulares em geral. Reforçamos que é uma prova com um estilo próprio, por isso quando o professor consegue se antecipar, fazendo uma análise e um estudo, caracterizando como são cobradas as questões e com que frequência os conteúdos são contemplados. Ou seja, quando se faz todo esse estudo, dando ênfase para as questões similares, percebemos que as questões se repetem em seu estilo. Então, quando o professor tem esta maturidade de perceber as características das provas, isso deixa-o mais seguro quando vai para a sala de aula, conseguindo direcionar mais o seu trabalho diante do que propõe, a tal ponto de o professor poder prever os assuntos e o padrão de questões que são contempladas em cada prova, por exemplo.

Com um estudo aprofundado, dentro das limitações existentes, por não termos acesso à prova do SPAECE, sobre o estilo de prova, o professor passa muito mais segurança para os alunos e eles acabam incorporando esta visão mais abrangente do professor com suas investigações, contemplando maior direcionamento de como proceder nas resoluções das questões do SPAECE para obter êxito e ampliar os conhecimentos matemáticos com sua totalidade, visando a contemplar as outras avaliações que os alunos venham a submeter. O professor precisa ter em mente essas previsões mais claras, diante do trabalho a ser realizado, não só para a prova do SPAECE, mas também para a preparação de seus alunos em relação a qualquer avaliação. A prova do ENEM não é muito diferente. Se pegarmos umas 5 provas deste exame, perceberemos que alguns assuntos se repetem com mais ou menos frequência e existem alguns assuntos que caem todo ano e, mesmo mudando o contexto, a estrutura do assunto prevalece na questão, oferecendo um certo conforto quando tais assuntos são bem trabalhados

em sala de aula. Ou seja, quando o professor vai para a sala de aula com esta visão mais apurada, ele acaba tendo mais propriedade para direcionar a sua aula e fazer com que o aluno também entre neste mesmo fluxo da visão do professor, dessa forma, o aluno percebe a mensagem do professor e acaba se apropriando de tudo isso.

Além disso, o professor, ao trabalhar as questões, precisa estar bem seguro para traçar um percurso abrangendo o conteúdo e fazendo alguns paralelos e, por mais que uma questão seja abordada de forma e contexto diferentes, o aluno conseguirá com mais facilidade desmistificar os possíveis entraves epistemológicos, percebendo que tem a mesma linha de raciocínio da fundamentação que foi obtida dos assuntos em si. Quando o professor consegue alinhar tudo isso e fazer com que o aluno se aproprie disso também, todo esse contexto começa a fluir. É perceptível este *feedback* dos alunos em qualquer avaliação proposta. Ao chegarem às provas externas, como SPAECE e ENEM, os alunos estão bem preparados, principalmente aqueles alunos que se dedicam aos estudos de forma mais focada, não só em sala de aula, mas também em casa.

O professor tem um papel fundamental para realizar alguns acordos didáticos e alinhamentos, levando-os a uma reflexão bem consciente diante da importância da dedicação aos estudos. Neste sentido, o docente tem um papel crucial para influenciar direta e indiretamente, já que ele tem o poder de “trazer” o aluno para tentar direcioná-lo no foco maior do conhecimento matemático, assim fazer com que o interesse do aluno não seja só em sala de aula, mas incorporá-lo a ser um estudante participativo e ativo na busca do seu próprio conhecimento.

Saber escolher a metodologia a ser desenvolvida em sala de aula é essencial. Por isso, estamos falando de uma teoria de ensino como a TSD que, de certa forma, convoca o aluno para trabalhar com uma certa autonomia, isso é muito instigante para ele, pois quando começa a trabalhar dessa maneira na investigação matemática, aguça a curiosidade de querer saber mais e do não se limitar. Tudo isso é fantástico quando o professor consegue atingir o aluno dessa maneira, pois tudo começa a fluir de uma forma natural que chega a impressionar até o professor.

Assim, o professor aflora o potencial incrível que existe em cada aluno. Esse potencial é natural dos alunos, muitas vezes só precisa que o professor, diante de uns gatilhos, faça com que eles consigam enxergar neles mesmos o grande potencial que têm. Então, o papel do professor diante disso tudo é crucial e mesmo trabalhando questões do SPAECE que são simples, mas são questões que abordam o geral, por isso não cobra muito as exceções, mas é recomendado que o professor vá além de uma simples resolução da questão, abordando outros

aspectos que complementem e aprofundem os assuntos abordados. São questões simples, mas nada impede que o professor as explore com a parte implícita que abrange vários assuntos interligados para abordar algo extra, assim, não nos limitamos a resolver uma simples questão do SPAECE.

Portanto, essas foram algumas reflexões com base na nossa vivência (experiência) em sala de aula, acreditamos que mesmo não tendo comprovação científica podem agregar de alguma forma, já que estamos trabalhando com professores e futuros professores de Matemática e sabemos que todas experiências bem-sucedidas podem agregar nossa prática docente. Quando o professor vai com esta visão mais abrangente, facilita bastante a atuação em sala de aula. Quem já tem experiência sabe que com a prática o professor se torna mais seguro por estar aprendendo com as experiências vivenciadas com as trocas dos convívios escolares entre direção, coordenadores, professores e alunos, possibilitando essas trocas de aprendizagem o tempo todo. Tudo isso agrega, sendo bem-vindo para fortalecer o trabalho do professor. Além disso, essas trocas neste *milieu* (meio) acabam fortalecendo o objetivo maior que é levar o conhecimento até o aluno e ele atingir esse conhecimento desejável da melhor forma possível.

Por isso, não se limitar é importantíssimo, que o professor possa sempre ter isso em mente, pois sempre somos capazes de ir além, visto que é assim que podemos proporcionar ao aluno ir além também, já que sabemos que ele tem um potencial incrível, porém o professor precisa explorar isso nele para que possa internalizar em ações esse “ir além sempre”.

Nosso relato de experiência traz que, ao trabalharmos com questões do SPAECE em sala de aula, alguns alunos têm uma visão de que estamos visando só a uma boa nota na prova do SPAECE devido se tratar de questões simples e muito mecânicas (tradicionais), por isso precisamos saber trabalhá-las, oferecendo-lhes este algo a mais, como foi abordado anteriormente, para que desmistifique este estilo mecânico que as questões do SPAECE induzem a fazer, muitas vezes. Só vamos conseguir esse feito se começarmos a agir diferente em sala de aula, por isso, ao trabalharmos questões do SPAECE, por serem triviais em relação a outras de outras provas, precisamos explorar algo a mais para potencializar com *feedbacks* e relacioná-las a outros contextos para atingirmos um certo ideal, por exemplo a prova do ENEM, contemplando assim mais competências e habilidades, por experiência própria.

Esse relato de experiência foi realizado enquanto chegavam todos os participantes na plataforma *Google Meet*, onde nos expressamos com base na vivência e experiência em sala de aula de 2007 a 2020, ou seja, 13 anos de muitos erros e acertos, tentando aprender sempre com cada ação.

Assim, após 24 minutos, iniciamos a situação-problema (3) com 16 alunos de um total de 17. Iniciamos a situação didática com a fase de ação, onde os alunos, de posse do problema, fazem a leitura dele para simularem algumas estratégias de resolução. Diante do silêncio da turma, tentamos instigá-los para compartilharem com os demais na medida que fossem surgindo as dúvidas. Após alguns minutos sem pergunta alguma, mesmo assim, reforçamos a indagação acima, mas não houve nenhuma dúvida exposta.

Infelizmente, por se tratar de uma pesquisa remota, em que não tivemos acesso à turma com o olhar minucioso para observar cada aluno com todos os seus comportamentos diante da questão, obtivemos um pouco de dificuldade em captar de forma instantânea as duas primeiras fases da TSD. Após as participações orais e/ou escritas dos alunos, foi possível identificar as suas interações no processo de resolução da questão.

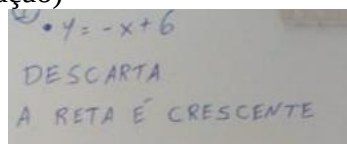
O aluno 11, que é professor, fez uma observação de que alguns dos seus alunos resolvem boa parte das questões do SPAECE usando as alternativas (itens). Diante disso, ele questionou:

Aluno 11: É correto os alunos que pegam, por exemplo, os pontos (coordenadas) dados na questão e irem substituindo nos itens para verificar se satisfazem a igualdade da equação?

Professora pesquisadora: A minha resposta foi com base no que julgo estar correto, como havia mencionado, as questões do SPAECE oferecem vários gatilhos (subsídios) para se realizar uma resolução trivial sem a necessidade, muitas vezes, de uma resolução mais estruturada com fundamentos matemáticos mais apurados. Porém, é importante observar se na resolução dos alunos existe um raciocínio lógico-matemático coerente. Além de procurar instigá-los a saber sempre algo a mais do que está explícito na questão, compartilhando outras maneiras de resolução, por exemplo, desde que tenha fundamentos matemáticos. Aproveitei o ensejo e tracei um paralelo com o ENEM, que em muitas vezes o aluno, tendo uma boa bagagem do conteúdo abordado e tendo feito uma boa interpretação, pode eliminar de dois a três itens, por exemplo, e aumentar as suas chances de acertar as questões se, por algum motivo maior, não seja possível concluir a sua resolução.

Observamos que nas situações didáticas envolvendo as questões do SPAECE, devido se tratarem de questões triviais, as fases da TSD ocorreram muito interligadas, muito entre si, principalmente a fase de ação e formulação, como já havíamos mencionado. Assim, vejamos as interações dos participantes na situação-problema (3) nas Figuras 42 e 43.

Figura 42 - Suposição do sinal da inclinação da reta sem rigor matemático (aluno 12, fase de ação)



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 43 - Substituição dos pontos nas alternativas (itens) (aluno 12, fase de ação e formulação)

x, y
 $(2, 3)$
 $y = 3x - 3$
 $y = 3 \cdot 2 - 3$
 $y = 6 - 3$
 $y = 3$
 $x = 2$

$y = (-1, -6)$
 $y = 3 \cdot (-1) - 3$
 $y = -3 - 3$
 $y = -6$
 $x = -1$

Foi feita a substituição na função $y = 3x - 3$ e foi visto que os pares de pontos foram encontrados.

Fonte: Dados da pesquisa.

Com as informações enviadas, foram perceptíveis as interações dos alunos na situação proposta nesta fase de ação e formulação. Destacamos as diversas maneiras diferentes de resolução ao compartilharem suas resoluções. Decerto, o aluno 12 identificou o sinal da declividade da reta, colocando os pontos no plano ortogonal, e o aluno 9 substituiu os pontos nas equações para verificar se eles pertencem ou não à equação da reta apresentada nos itens (ver Figuras 44 e 45).

Figura 44 - Equação da reta encontrada pelo determinante (aluno 3, fase de formulação e validação)

$1 - A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$
 $A(2, 3), B(-1, -6)$

x	y	1	$3x - y - 12 - (-3 - 6x + 2y) =$ $9x - 3y - 9 = 0$ $3x - y + 3 = 0 \rightarrow y = 3x - 3$
2	3	1	
-1	-6	1	

Logo, item (D)

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 45 - Equação da reta encontrada pela fórmula do feixe de retas (aluno 7, fase validação)

Handwritten work on lined paper:

EQVACÃO DA RETA?

$(2, 3)$ e $(-1, -6)$ → Coef. Angular

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{3 - (-6)}{2 - (-1)} = \frac{9}{3} = 3$$

$m = 3$

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

$$\bullet \quad y - 3 = m \cdot (x - 2)$$

$$y - 3 = 3 \cdot (x - 2)$$

Comunicado

$$y - 3 = 3x - 6$$

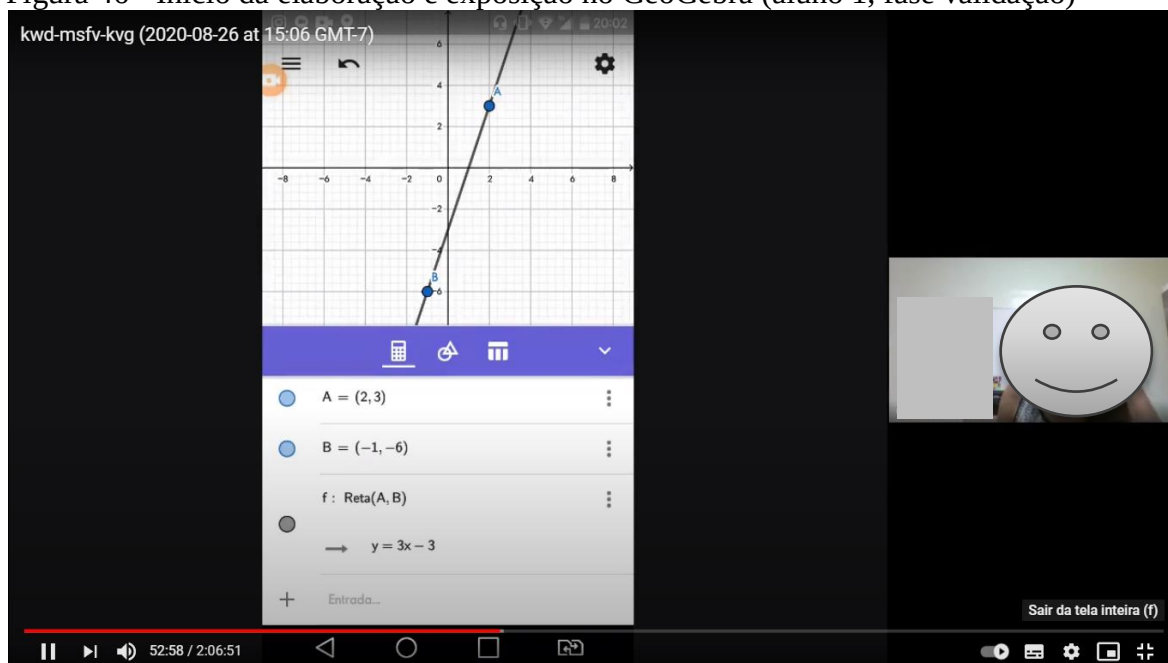
$$y = 3x - 3$$

Fonte: Dados da pesquisa.

O aluno 7 relatou neste momento da validação que: Se os dois pontos pertencem à reta, significa que possuem o mesmo coeficiente angular. Logo, basta utilizar a fórmula do coeficiente angular. Em seguida, utilizar um dos pontos na equação fundamentada da reta.

Nessa fase de validação, os alunos 1 e 11 se anteciparam, resolvendo a questão utilizando primeiramente o GeoGebra (quebrando a regra do contrato didático). Percebemos, porém, com esta atitude dos sujeitos 1 e 11, a praticidade de resolução e visualização instantânea da resolução com esse *software*. Isso foi deixado implícito em ambas as partes com a exposição oral, com o passo a passo da construção da questão no GeoGebra na fase de validação (ver Figura 46).

Figura 46 - Início da elaboração e exposição no GeoGebra (aluno 1, fase validação)



Fonte: Dados da pesquisa.

Em suma, as Tecnologias Digitais se caracterizam como recursos que possibilitam criar um ambiente investigativo, na medida que propiciam questionamentos, reflexões, análises e fazem com que a sala de aula se torne um lugar onde relações possam ser estabelecidas; possibilitando ao estudante, por meio de suas conjecturas, construir conhecimento sobre Cálculo. Tais ambientes podem colaborar, também, na construção de conceitos em outras áreas da Matemática, tal como Geometria Analítica, conforme destacado na sequência desta seção (RICHIT, 2015, p. 35).

Prosseguimos com a última etapa da TSD (institucionalização), quando foi realizada a validação das inúmeras maneiras diferentes de resoluções apresentadas pelos participantes, reforçando que em sala de aula esta prática vai ser comum devido à vastidão de conhecimento dos alunos decorrente dos conhecimentos prévios e das diferentes linhas de seus raciocínios.

A questão solicita a equação da reta quando são atribuídos dois pontos. Mencionei que a maneira mais usual era aplicar o determinante (regra de *Sarrus* ou outras formas mais triviais para resolver um determinante, desde que fique claro o rigor matemático): $\det=0$. É uma questão que abre o leque para definir o que é uma reta, o que são pontos colineares, por exemplo. Aproveitamos para mencionar qual relação é feita antes e fica por traz do cálculo do determinante. Neste viés, é possível que alguns alunos não saibam que em uma reta podemos traçar triângulos semelhantes e montando a proporcionalidade entre os seus lados (coordenadas dos pontos), gerando uma proporcionalidade que é a mesma ao efetuarmos o cálculo do determinante. Por ser mais didático para o aluno, em vez de aplicarmos a semelhança de triângulos, aplicamos o determinante nestes casos de resolução.

Infelizmente, esta questão do banco de itens do SPAECE permite, com a simples construção do gráfico com os pontos mencionados, encontrar o item correto devido aos distratores (alternativas) serem fracos pelo fato de existir somente um item com o coeficiente linear negativo, além de ambos os itens se apresentarem na forma de equação reduzida da reta, sendo suficiente essa construção para gabaritar a questão sem sequer um rigor matemático mais abrangente (ver Figura 47).

Figura 47 - Exposição da professora na fase de institucionalização da TSD

<http://www.spaece.caedu.ufjf.net/wp-content/uploads/2018/08/CF-SPAECF-2017-RP-MT-EM-WEB.pdf>
BOLETIM DO PROFESSOR - Matemática Ensino Médio (2017, p.53)

(M120283H6) A equação da reta que passa pelos pontos (2, 3) e (-1, -6) é

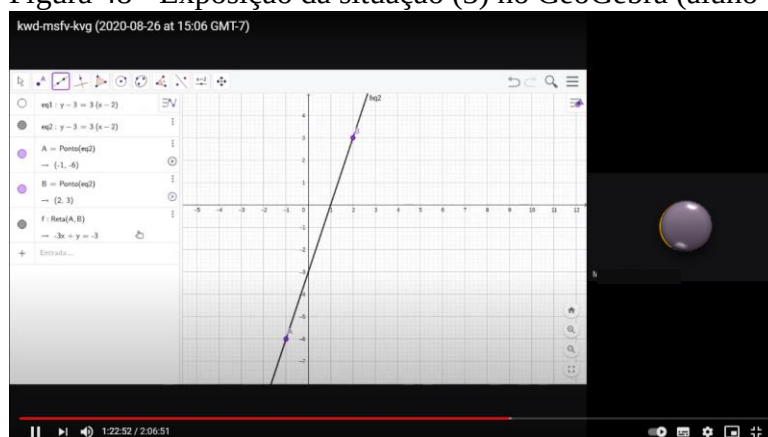
A) $y = -x + 6$
B) $y = x + 3$
C) $y = 2x + 3$
D) $y = 3x - 3$
E) $y = 5x + 5$

Handwritten calculations:
 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-6 - 3}{-1 - 2} = \frac{-9}{-3} = 3$
 $y - y_1 = m(x - x_1)$
 $y - 3 = 3(x - 2)$
 $y = 3x - 3$

Fonte: Dados da pesquisa.

Seguindo o processo de resolução das questões, afirmado no contrato didático, houve a construção e resolução da situação-problema (3) no *software* GeoGebra, onde contamos com o compartilhamento de três alunos dentre a resolução de todos. Vejamos a Figura 48.

Figura 48 - Exposição da situação (3) no GeoGebra (aluno 11)

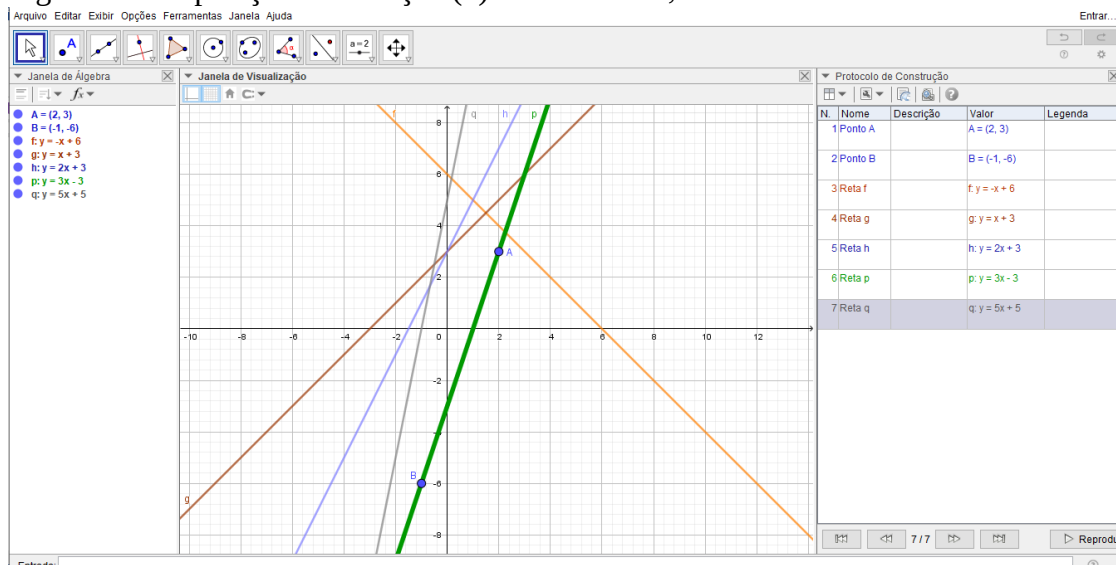


Fonte: Dados da pesquisa.

Um aluno mencionou que “basta adicionar os dois pontos e fixar a reta sobre esses dois pontos”. Outros usaram a equação do feixe de retas, por já saberem o valor do coeficiente angular da reta e logo em seguida digitaram as duas equações, referentes aos dois pontos, como foi o caso do aluno 11. A maioria utilizou a própria equação antes encontrada para construir o gráfico no GeoGebra. Outra maneira seria usar os itens da questão e construir todos os gráficos,

sendo o item correto, a reta que passasse pelos pontos mencionados na questão. Vejamos na Figura 49.

Figura 49 - Exposição da situação (3) no GeoGebra, utilizando os itens



Fonte: Dados da pesquisa.

Como nenhum participante havia feito neste formato, algo que já havia previsto na fase de análise *a priori*, por isso foi exposta essa forma acima, após os compartilhamentos dos alunos. Fechamos essa situação-problema (3) com as duas formas de resolução (com e sem o GeoGebra), porém observamos que houve várias maneiras diferentes de resoluções pelas grandes variações de maneiras que foram apresentadas pelos alunos e observamos também que alguns alunos se utilizaram de algumas informações resolvidas na forma tradicional, como a informação do coeficiente angular ou da própria equação da reta (gabarito da questão) para realizar a construção por alguns participantes, transparecendo que alguns sentiram dificuldades de realizar a construção da questão com os dois pontos nela mencionados, apesar de alguns participantes terem preferido a resolução primeiramente no GeoGebra.

É lançada a situação-problema (4) dando um tempo para os alunos iniciarem o processo de investigação lógico-matemático. Como já havíamos mencionado nas descrições anteriores, por se tratar de uma pesquisa remota, as fases de ação e formulação são mais visíveis quando os alunos interagem na fase de validação e/ou quando estamos diante dos registros enviados pelos alunos.

Com base na exposição dos alunos em suas falas e escritas, foi perceptível que na fase de ação alguns alunos foram tomando algumas decisões com base nos seus conhecimentos prévios: os alunos que já tinham o conhecimento da fórmula para se calcular através do determinante, partiram para a fase de formulação e outros alunos não lembraram de imediato

da fórmula, porém foram formulando estratégias de resolução através, por exemplo, da distância entre dois pontos. Vejamos algumas exposições realizadas nas Figuras 50 e 51.

Figura 50 - Estratégia de resolução utilizando determinante (aluno 9, fase de ação e formulação)

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$A = (2, -3), B = (-1, 2), C = (4, 5)$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 51 - Início da resolução pela fórmula da área (aluno 7, fase de formulação)

ÁREA DO TRIÂNGULO CUYOS
VERTICES SÃO $A(2, -3), B(-1, 2), C(4, 5)$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 4 - 12 - 5 - 8 - 10 - 3$$

$$= -34$$

Fonte: Dados da pesquisa.

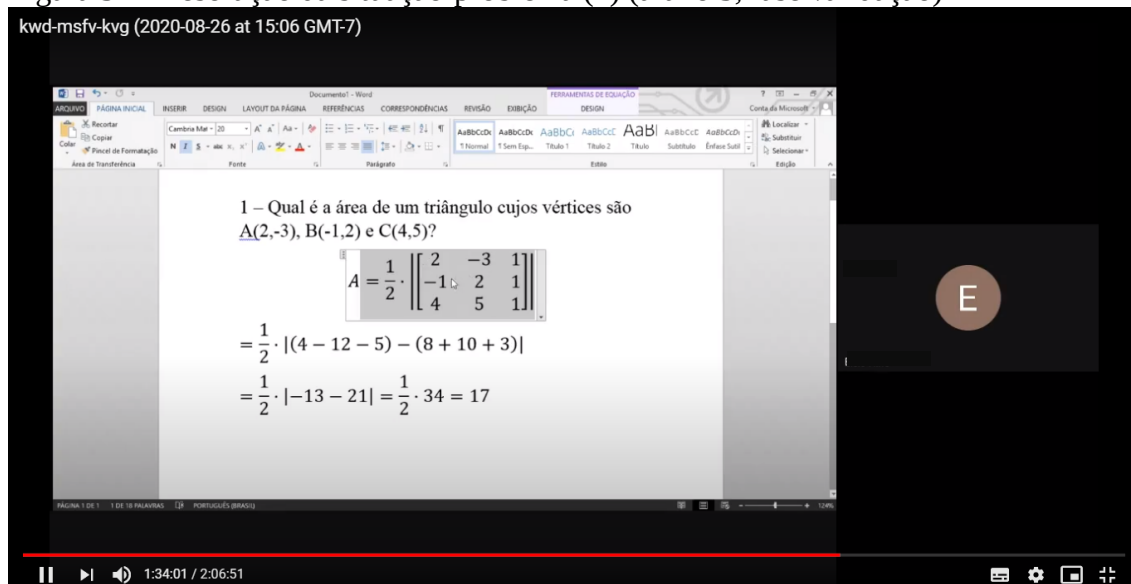
Esta questão foi resolvida muito rapidamente por boa parte dos alunos, pois não surgiu nenhuma dúvida socializada, mesmo expondo a importância do erro e das dúvidas para a construção do conhecimento. Por conta disso, lançamos um questionamento para eles: caso vocês estivessem lançando esta questão para os alunos de vocês, quais seriam as possíveis dúvidas dos alunos numa questão como essa? Os alunos 5 e 8 indagaram de imediato, pela experiência em sala de aula (ficou subentendido), “como resolver já que só foram mencionados os vértices (pontos) do triângulo?” Outra indagação surgiu: “alguns alunos poderiam colocar os vértices no plano cartesiano para uma possível saída com a fórmula do triângulo usual da Geometria Plana?”.

A proposta da TSD é lançar um problema (desafio) para o aluno sem oferecer a exatidão de toda a teoria necessária para a resolução da questão, mas, com os conhecimentos prévios de cada um, seja possível subsidiá-los com um ambiente favorável e propício para que os alunos,

com uma certa autonomia, consigam desenvolver estratégias de resoluções, sendo algo previsto pelo professor com a análise prévia e a análise *a priori* da ED (ver Figura 52).

O aluno 3 iniciou a fase de validação: Dados os pontos (vértices) A, B e C. A fórmula para se calcular a área de um triângulo como vocês podem ver, o determinante está em módulo por estarmos trabalhando com área. Aplicando a regra de Sarrus temos a área 17 unidades de área (u.a.).

Figura 52 - Resolução da situação-problema (4) (aluno 3, fase validação)



Fonte: Dados da pesquisa.

Outros alunos seguiram a mesma linha de raciocínio do aluno 3.

O aluno 11 questionou: O aluno que não lembrar nada de matrizes e determinante para se chegar na fórmula, qual caminho poderia seguir? Portanto, imaginei se o aluno lembrasse como calcular a área do triângulo na Geometria plana e soubesse calcular a distância entre dois pontos e depois por Pitágoras calcular a altura relativa a um dos lados, ele poderia percorrer este caminho, construindo o triângulo, sabemos que pode ser um processo mais demorado, mas pode ser um percurso satisfatório também.

O aluno 11 relatou que utilizou o GeoGebra e constatou que o triângulo era isóscele. Observamos a importância deste *software* GeoGebra como ferramenta de modelização devido ao seu processo que consiste na elaboração mental propícia a ser manipulada para a compreensão do seu real complexo.

Este argumento do aluno 11 foi colocado pelo aluno 6 também: pela forma da distância, constatamos que o triângulo tem dois lados iguais, vejamos a Figura 53.

Figura 53 - Cálculo da distância dos lados isósceles do triângulo (aluno 11, reflexão sobre um possível caminho utilizado por alguns alunos em sala de aula)

The left photograph shows a student's handwritten work on a coordinate plane. The vertices of a triangle are plotted at (1, 1), (2, 3), and (5, 2). The student calculates the distances between the vertices: $d = \sqrt{(-1-2)^2 + (2-3)^2}$, $d = \sqrt{(-3)^2 + (2-5)^2}$, and $d = \sqrt{(4-1)^2 + (5-2)^2}$. The right photograph shows a student's handwritten work with a circled number 17. The student calculates the distance between two points: $d = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34} = 5,83$.

Fonte: Dados da pesquisa.

As questões do SPAECE abrem uma abrangência para serem resolvidas por várias maneiras diferentes. Isso possibilita ao professor e alunos abrangerem os assuntos abordados em cada questão, incluindo as diferentes formas de resoluções. Pela nossa experiência, este descritor (D54), que abrange a área de um triângulo pelas coordenadas de seus vértices, é contemplado em toda prova do SPAECE nem que seja com uma questão, ora a questão aborda com os pontos (vértices) e ora com a parte geométrica. No vestibular da UVA, por exemplo, na prova de Matemática, esse assunto é contemplado de modo mais aprofundado. Recordamos de uma questão envolvendo uma estrela. Enfim, por ser um assunto pertinente a cair em várias provas em geral, o professor pode traçar um paralelo, linkando as informações para solidificar e aprofundar tais assuntos matemáticos no contexto social.

Esta fase de institucionalização serve para o professor ir além, possibilitando ao aluno uma consciência maior a respeito do assunto abordado, por exemplo, vale ressaltar a importância desse assunto para calcular uma figura regular ou irregular. Imaginemos um pentágono ou hexágono irregular, a dificuldade que seria para encontrar sua área, porém com os vértices basta dividir em triângulos, por exemplo, e encontrar separadamente para somar todas as áreas encontradas no final. Ou seja, o professor precisa, junto com a turma nesta quarta etapa da TSD, realizar o fechamento com a validação das realizações dos alunos para agregar algo novo, se possível.

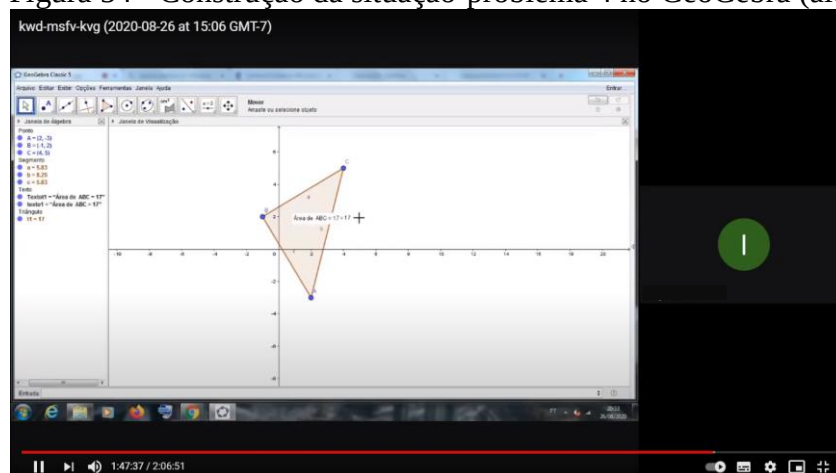
Podemos observar que é um assunto pertinente a cair em provas, seja do nível mais alto ou baixo, mas basta usar a mesma linha de raciocínio para solucionar a questão. Por isso, precisamos criar este elo com os alunos que, apesar de estarmos trabalhando com questões do

SPAECE (questões simples), não podemos nos limitar a essas questões simples, precisamos sempre nos aprofundar juntamente com os alunos, puxando outros *links* com outras provas e completar a questão. Acreditamos que esse deve ser o gatilho que o professor precisa ter ao trabalhar questões simples em sala de aula, para elevar o nível da aula, mesmo trabalhando questões do SPAECE.

Assim, sobe o nível da aula e agrega para o aluno, pois a gente consegue contemplar tanto os alunos com os níveis mais elevados, como os alunos com maiores dificuldades. Ou seja, o professor precisa manter esse equilíbrio (certa dosagem) para começar do básico e progredir com os alunos. Tudo isso é possível se o professor usufruir de um planejamento minucioso para contemplar todos os alunos em sala de aula. Podemos observar que as questões do SPAECE são excelentes para iniciarmos os conteúdos, por serem questões simples e que abordam o geral sem muitas exceções, por exemplo (ver Figura 54).

A resolução no GeoGebra via Google Meet teve a seguinte exposição do Aluno 6 : Na resolução no GeoGebra foram colocados os três pontos: A, B e C, montando o triângulo. Observem que podemos ajustá-lo clicando nos vértices para a posição desejável, se quisermos. Na janela de ferramentas: clica na opção área e em seguida clica no triângulo para saber a área. Neste caso foi atribuído o valor 17 u.a. para a área desse triângulo.

Figura 54 - Construção da situação-problema 4 no GeoGebra (aluno 6)



Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos a afinidade que os alunos têm ao manusearem o *software* GeoGebra. A maioria formatava as cores das figuras realizadas ao longo do processo de construção das questões. Essa certa habilidade foi perceptível até com os dois alunos que relataram no questionário prévio que não tinham acesso ao uso do GeoGebra. Foi observado e relatado por eles que conseguiram resolver as questões propostas e com poucas dificuldades pela praticidade do *software* atrelado à baixa dificuldade das questões do SPAECE propostas.

O aluno 11: [...] Basicamente fiz similar ao aluno 6 no GeoGebra, porém, seguindo a linha de raciocínio que ele estava resolvendo no caderno, resolvendo pela distância entre dois pontos para encontrar a altura relativa do triângulo e a área. Com essa mesma linha de raciocínio fui resolvendo no software GeoGebra colocando uma perpendicular no segmento AC e calculei a distância entre esse segmento perpendicular (altura). Dessa forma, foi constatado que essa forma de resolução se encaixa perfeitamente também, permitindo outras maneiras de explorar a questão no GeoGebra, possibilitando mesclar os assuntos junto com os alunos em sala de aula, por exemplo.

Observamos que os licenciandos que participaram desta pesquisa já têm incorporada a ideia de abranger os assuntos sempre que possível, explorando o que está explícito e implícito nas situações-problema, a fim de expandir a linha de raciocínio dos alunos. Isso demonstra o gosto pelo ensinar, relatado por todos no questionário prévio, realizado antes da aplicação da pesquisa pelo *Google Forms* e uma certa experiência em sala de aula da maioria. O GeoGebra possibilita explorar vários assuntos de maneira mais dinâmica e contribuir com os alunos em sala de aula para elevar e agregar os conhecimentos dos estudantes.

Aluno 1: Para reforçar o que o aluno 11 e outros falaram, a questão de demonstrar todas as possibilidades e, principalmente, mostrar o elo que existe entre as áreas de conhecimento com os conhecimentos matemáticos foi passado nesta questão 4 com as formas diferentes para se calcular a área do triângulo. Tudo isso, torna-se muito importante repassar para os alunos, porque eles passam a entender a aplicação desses conteúdos e a maneira como podem ser usados. Quanto menor o tempo que o aluno gastar para resolver a questão vai ser melhor por conta das provas do ENEM e SPAECE, por exemplo. Só que o conhecimento é para a vida, ou seja, para ser aplicado em outras provas e em outras situações faz-se necessário esta maturação em sala de aula. Promover esta reflexão sobre de que maneira tal assunto pode ser utilizado e quais são as possibilidades dele engrandece a aula. O GeoGebra mais uma vez mostra essa importância da aplicabilidade e da visualização daquilo que está sendo ensinado e de que maneira isso pode estar surgindo em uma questão, tudo isso é muito importante.

Notamos que, quando o aluno tem o conhecimento matemático firme, a questão pode aparecer em qualquer contexto, mesmo assim o aluno consegue entrar em uma linha de raciocínio assertiva e resolve a questão. Essa apropriação do conteúdo é essencial, por isso a importância de o professor ser criterioso com o rigor matemático e fixar com os alunos, isso para que, diante dos obstáculos epistemológicos que possam surgir, o aluno consiga traçar um caminho assertivo e com coerência matemática para resolver a questão proposta.

Aluno 8: [...] Quando passei a usar o GeoGebra em uma disciplina no curso de Matemática, deu para tirar muitas conclusões referentes a certas dificuldades que durante a aula com as definições do livro e a exposição oral do professor não era possível compreender muito bem, principalmente quando estávamos trabalhando cardioides, por exemplo. Tudo isso, quando fazíamos a construção no GeoGebra

sentiamos uma grande diferença, pois a compreensão era maior do conteúdo matemático que tinha por traz de todas as construções. Isso ajudou muito, pois a gente conseguia driblar algumas abstrações de alguns assuntos na Matemática com a movimentação e visualização com algumas ferramentas tecnológicas como o GeoGebra que tem uma imensidão de ferramentas que até quem construiu esse software não tinha a total noção desta imensidão de possibilidades e manipulações Matemáticas que existem nele.

Observamos o papel de uma ferramenta tecnológica, quando é bem empregada em sala de aula, pois é possível realizar uma transposição didática bem-sucedida, possibilitando fazer com que o aluno enxergue algo que antes, devido à abstração ou falta de algum conhecimento prévio, não era possível captar, porém, como já foi mencionado, quando o aluno consegue construir, movimentar e visualizar por outros ângulos tais situações matemáticas, é aumentado o nível de satisfação e percepções dos alunos, resultando na compreensão do contexto matemático em questão, como foi relatado pelo aluno 8.

Aluno 6: Era para ter uma disciplina obrigatória no curso de Matemática sobre o GeoGebra. Pois, por falta de horário livre tive que fazer o curso do GeoGebra fora da universidade. Muitos licenciados em Matemática nem se interessam ou nem sabem o que é o GeoGebra, deixando de usar uma ferramenta valiosa como essa em sala de aula.

Aluno 11: [...] Dependendo do professor, mesmo não tendo essa disciplina como obrigatória, mas devido a sua grande importância, tivemos professores que utilizaram bastante o GeoGebra, dando para suprir esta lacuna abordada pelo aluno 6.

Aluno 8: Fazer disciplina com professores compromissados é 100% de aproveitamento e evolução. Tive a oportunidade de fazer algumas disciplinas com a utilização do GeoGebra e LaTeX que foram essenciais para minha formação.

Aluno 11: Agradeço aos professores que puxaram bastante para a utilização das TICs (Tecnologias da informação e comunicação) com todas as ferramentas tecnológicas, pois agregaram bastante para nossa formação e direcionamento profissional.

A situação-problema (5) foi aplicada no dia 27/08/2020, via *Google Meet*, no curso de extensão sob a supervisão da professora e coorientadora Dra. Maria José Araújo Souza. Essa situação proposta tem por objetivo estabelecer os critérios para reconhecer uma equação da circunferência. Assim seguimos com a situação didática nos moldes da TSD para percebermos as interações no processo das situações didáticas com os licenciandos nesta formação metodológica proposta. Vejamos como ocorreu todo o processo dessa situação didática pelos relatos e pela Figura 55.

Aluno 11: Comecei a identificar que é mais comum nas equações da circunferência e o que está se repetindo.

Aluno 2: Lembrei que $A=B$, assim fui descartando a equação II e III.

Figura 55 - Fase de ação e formulação pelo aluno 2 (equação da circunferência)

Seguindo alguma condição
 $A=B \rightarrow$ assim já elimino os II, III.
 também preciso x^2 e y^2 assim elimino IV.

Fonte: Dados da pesquisa.

Na fase de formulação, é perceptível uma certa elaboração mais apropriada, mesmo que não exista tanto rigor matemático. Neste momento os alunos tentam resgatar os conhecimentos prévios que sejam compatíveis a ajudar na resolução das questões (ver Figura 56).

Aluno 7: Estava indo por eliminação com o critério em que os coeficientes de x^2 e y^2 têm que ser iguais para representar uma circunferência. Portanto, essa foi minha linha de raciocínio.

Aluno 3 e 8: Mencionaram que utilizaram a fórmula da circunferência $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$.

Figura 56 - Fase de formulação pelo aluno 7 (equação da circunferência)

I. $x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$
 II. $x^2 - y^2 - 16 = 0$
 III. $2x^2 + 3y^2 - 24 = 0$
 IV. $x^2 + y - 9 = 0$
 V. $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$

Os coeficientes de x^2 e y^2
 precisam ser iguais e $\neq 0$
 Logo as equações que
 satisfazem são I e V

Fonte: Dados da pesquisa.

Seguimos com a fase de validação, quando destacamos a socialização dos alunos, expondo suas resoluções e argumentos levantados a fim de validar a questão proposta. Percebemos que, na parte da circunferência, os alunos sentiram dificuldades, mesmo sendo licenciandos em Matemática (ver Figura 57).

Aluno 6: A equação I e V é uma circunferência, pois na circunferência precisa ter no mínimo $Ax^2 + By^2$. Dessa forma, fui por eliminação, observamos que o item III vai dar algo achatado como uma elipse acho, pois não está em proporção.

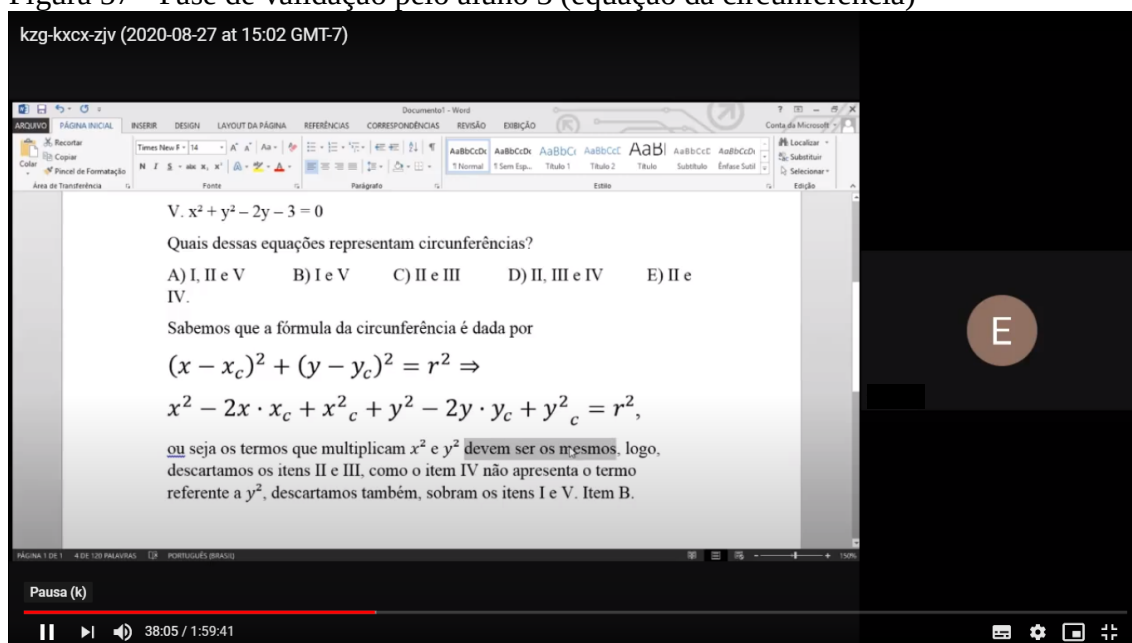
Aluno 10: A única coisa que estou lembrando neste momento é que $A=B \neq 0$

Aluno 3: Irei fazer um resumo dos comentários anteriores dos colegas. Temos a equação da circunferência $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$ ao desenvolvê-la temos $x^2 - 2xx_c + x_c^2 + y^2 - 2yy_c + y_c^2 = r^2$. Observamos que os termos em $x^2 + y^2$

devem ser os mesmos. Dessa forma, indo para as equações dadas na questão temos que nas equações (I) e (V) os termos de x^2 e y^2 são os mesmos, mas nas equações (II), (III) e (IV) não são os mesmos. Assim, indo para as alternativas onde só sobra o item “B” já que os outros itens foram descartados só com essa regra descrita acima.

Aluno 8: Reafirmo o que o aluno 3 e os colegas também colocaram e friso mais uma vez que as alternativas ou distratores, como são chamados, ofertados na maioria das questões do SPAECE são fracos, facilitando bastante a resolução para os alunos.

Figura 57 - Fase de validação pelo aluno 3 (equação da circunferência)



Fonte: Dados da pesquisa.

Considerando o aspecto que diz das dificuldades dos estudantes, anteriormente pontuadas, percebemos a preocupação dos docentes a este respeito e a busca de contribuir para que a questão das dificuldades seja amenizada. Ademais, percebemos o compromisso desses professores e as práticas de repertórios compartilhados com vistas a contribuir com os processos de ensinar e aprender (RICHIT, 2015, p. 209).

Como foi relatado por parte de Richit (2015), as dificuldades chegam para engrandecer a busca para contribuir de forma direcionada no processo de ensinar e aprender. Foi notório o grau de dificuldade neste assunto da Geometria Analítica, apesar de a questão ter facilitado a sua resolução. Isso já havíamos previsto nas análises prévias e *a priori* por conta de algumas leituras realizadas e devido à experiência em sala de aula. Isso é verificável nas análises de várias pesquisas realizadas.

Partindo das constatações feitas em sala de aula sobre as dificuldades encontradas pelos alunos quanto ao uso de conceitos matemáticos, especialmente no que diz respeito à circunferência, tornou-se necessária iniciativa para a proposição e desenvolvimento de uma metodologia diferenciada no ensino da Matemática. (CAVALCANTI; LINS, 2003, p. 109).

Na fase de institucionalização, levantamos o questionamento: os argumentos anteriores eram suficientes se a questão não tivesse atribuído uns distratores tão evidentes de serem descartados com poucas informações? Reforçamos, também, a importância do erro, como ressalta Brousseau, sendo importantíssimo para o processo de construção do conhecimento. Neste sentido, é importante, no momento da aplicação da situação-problema, o professor ter um olhar diferenciado para cada aluno, percebendo as atitudes de cada um para conseguir captar como está o desenvolvimento da questão e, caso algum queira desistir de resolver a questão, que o professor o encoraje a continuar tentando, caso o aluno insista a ficar impossibilitado de continuar tentando. Neste momento, o professor pode liberar alguns gatilhos (sem oferecer a resposta de graça) para estimulá-los a continuarem em uma linha de raciocínio assertiva para a resolução.

Dando continuidade à fase de institucionalização, mostramos que existem três critérios para identificar uma equação da circunferência. Vejamos as considerações e a Figura 58.

Dada a circunferência $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

1°. $A = B = 1$

Observação 1: Caso seja diferente de 1, basta dividir toda a equação até encontrar 1, mas não pode ser zero, como já foi mencionado anteriormente.

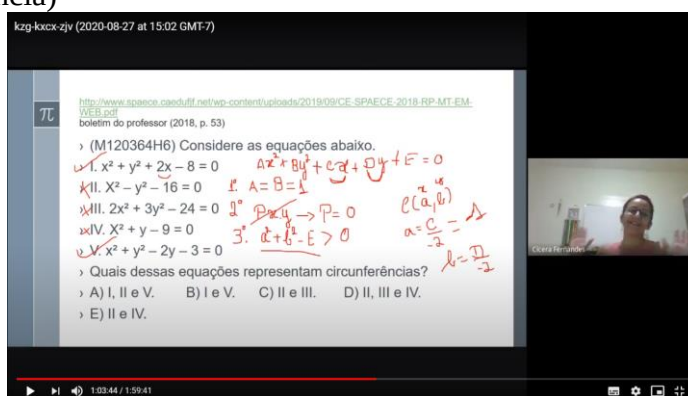
2°. $Pxy \rightarrow P = 0$

3°. $a^2 + b^2 - E > 0$

Observação 2: Centro: $c(a, b)$

$a = C / -2$ e $b = D / -2$

Figura 58 - Fase de institucionalização com a mediação da professora (equação da circunferência)



Fonte: Dados da pesquisa.

Além disso, evidenciamos, a partir das manifestações dos professores, que a questão referente às dificuldades dos estudantes está assente no modo como a Matemática é construída junto aos estudantes, apresentando-se como um conjunto de regras e procedimentos. Desta forma, participar do Curso de Extensão, dialogar, interagir,

interpretar, refletir possibilitou aos docentes participar de um processo formativo, em que foi possível construir significado a partir das práticas e desenvolver-se enquanto professor (RICHIT, 2015, p. 239).

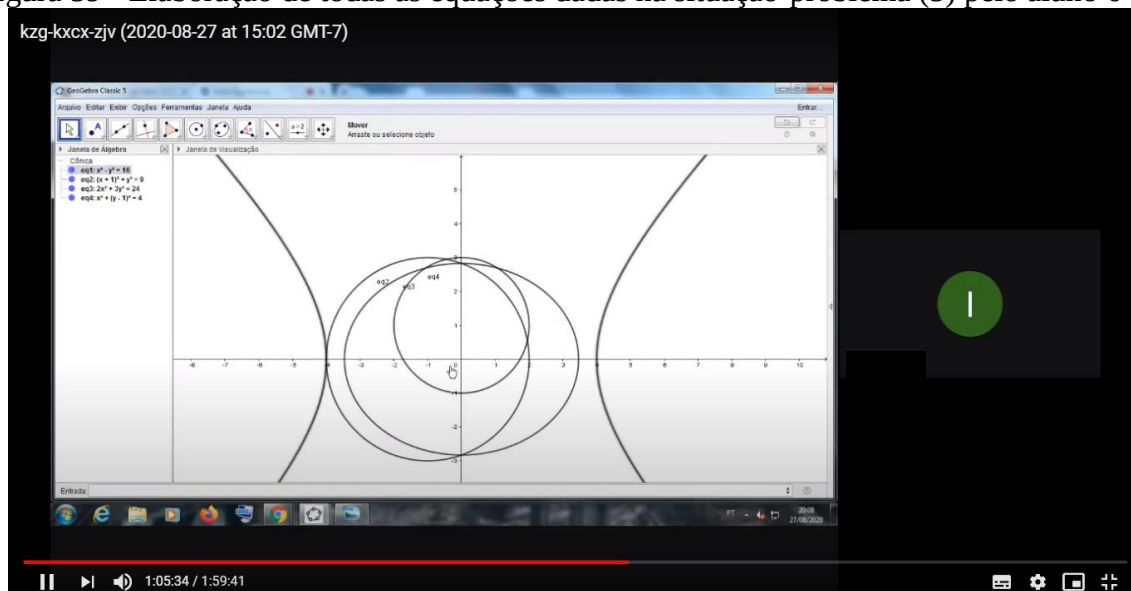
Ressaltamos a definição de equação da circunferência que é a definição de raio, ou seja, a distância do centro a qualquer ponto pertencente à circunferência é o raio. Aproveitamos o ensejo para ressaltar que a fórmula da distância entre dois pontos pode ser o segredo (trunfo) para ser o caminho quando o aluno sentir alguma dificuldade nas questões de Geometria Analítica, principalmente nos assuntos de ponto e reta e circunferência. Para constatarmos tal fato, alguns alunos na situação-problema (4) recorreram à distância entre dois pontos para encontrarem a área do triângulo, por exemplo. É importante deixar bem claro para os alunos a definição de Geometria Analítica, que é a fusão da Álgebra com a Geometria, pois tudo isso pode agregar bastante para os alunos no processo de validação das situações didáticas.

Vejamos a resolução do licenciando 6 na Figura 59, com as construções no GeoGebra, apresentando para a turma e logo em seguida os relatos de alguns alunos enfatizando a importância da resolução da questão com o suporte do GeoGebra.

Aluno 1: Meu comentário é só para relatar a diferença de resolver a questão sem o GeoGebra e com o GeoGebra. Com a resolução no GeoGebra percebemos a grande importância de mostrar como ocorre cada construção de forma visível e dinâmica de como cada equação se comporta. Então, é muito mais prático quando se utiliza o GeoGebra, pois quando se faz a análise que fizemos antes sem o GeoGebra pode dificultar a compreensão e com a utilização desse software fica muito claro e significativo a compreensão para os alunos.

Aluno 11: Para deixar mais dinâmico e compreensivo é bom criar os controles deslizantes, pois ao construir a equação com a forma genérica e criar os controles deslizantes conforme a movimentação, é possível mostrar as características e propriedades referentes aos objetivos que propõem realizar. O GeoGebra é muito fantástico, pois ele possibilita um “mundo” de ferramentas para ser utilizado para reforçar as nossas aulas.

Figura 59 - Elaboração de todas as equações dadas na situação-problema (5) pelo aluno 6



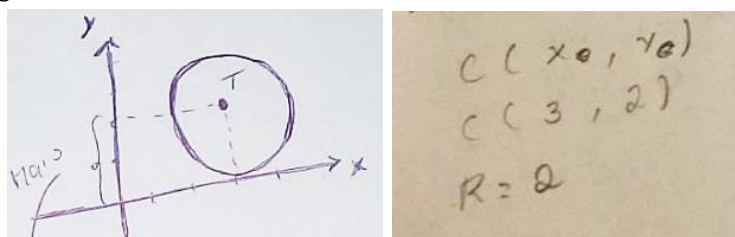
Fonte: Dados da pesquisa.

Como resultados, a autora pontua a valorização do saber do aluno, devido às dificuldades relativas a conceitos da disciplina, as quais foram sendo retomadas mediante o desenvolvimento dos projetos; pois, para elaborar a atividade, precisavam estudar e repensar os conceitos do ponto de vista da tecnologia. Assim, havia um movimento recíproco nesse processo: a tecnologia os ajudava a entender a Geometria Analítica, do mesmo modo que a tecnologia demandava conhecimentos sobre a Geometria Analítica. A autora ressalta também a importância deste tipo de abordagem, tanto para a construção de conceitos, que são necessários para outras disciplinas, como Cálculo e Álgebra Linear, bem como para a futura atuação docente destes estudantes. (RICHIT, 2015, p. 36).

Damos continuidade à nossa última situação-problema (6), que tem como objetivo encontrar a equação da circunferência quando é dada a representação geométrica. A questão foi exposta de forma subjetiva (sem os itens) a fim de dificultar um pouco mais.

Assim, no percurso da situação didática na categorização da TSD, prosseguimos com a fase de ação, quando os alunos buscaram associar com alguns conhecimentos prévios que podiam ligar ao assunto, mesmo que esse sentimento fosse por alto em seus pensamentos, sem formalizar nada. Neste momento o aluno 6 indagou: É para encontrar a equação geral ou reduzida? (ver Figura 60).

Figura 60 – À esquerda, a fase de ação do aluno 2 e à direita, a fase de formulação do aluno 9



Fonte: Dados da pesquisa.

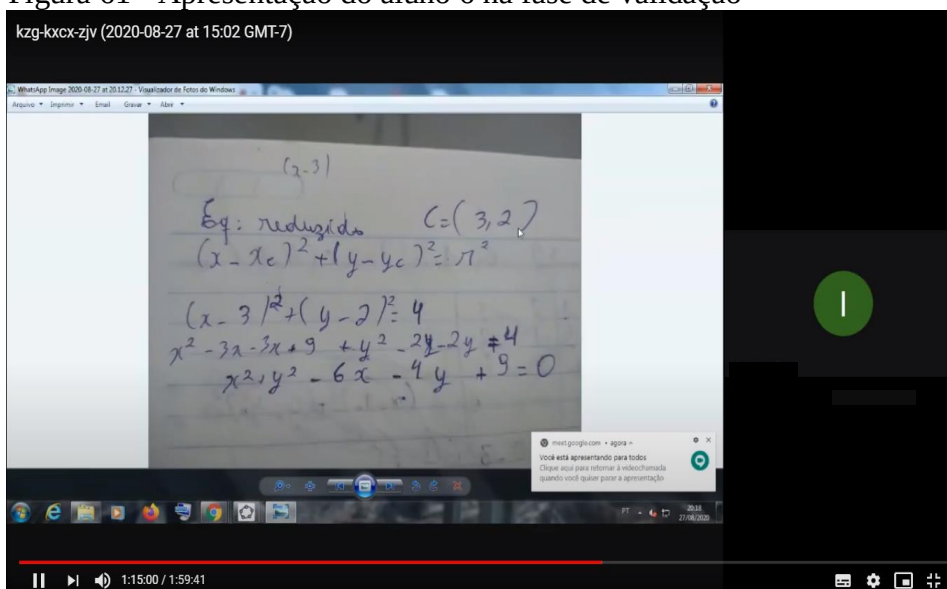
Na fase de formulação, as ideias, que antes eram vagas, começam a ganhar sentido ao ponto de traçar alguns rascunhos mesmo sem muito rigor matemático, como foi mencionado pelo aluno 9, preparando os argumentos para ser formalizada, com rigor matemático, uma possível resolução como na fase de validação.

*Aluno 6: A equação reduzida dá para ser descoberta pela distância entre dois pontos?
Observação: Esta pergunta realizada nos revela que mesmo se tratando de licenciandos em Matemática, nos colocam em reflexões, por exemplo, como são visíveis as dificuldades em relação aos conteúdos de circunferência com a relação existente entre as definições com profundidade, se o professor não for bem enfático em relacionar os conteúdos, aprofundando com todo rigor matemático pertinente para que o aluno se sinta seguro de trabalhar as questões. Neste mesmo viés, imaginemos como deve ser a situação crítica (dificuldades dos alunos se o professor não se cercar de boas práticas e metodologias que o ajudem a amenizar tamanha disparidade entre o aluno e o saber) no ensino médio da rede pública estadual de uma escola regular.*

Dessa maneira, a fase de validação foi realizada pela maioria dos alunos, seguindo os passos a seguir. Vejamos os relatos percorridos e compartilhados por eles e as Figuras 61 e 62:

- Partimos da equação reduzida: $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$.
- Identificamos o centro: $c = (3, 2)$.
- Encontramos o raio: $r = 2$.
- Após identificar o centro e o raio, a questão está praticamente resolvida, bastando substituir o centro e o raio encontrados na fórmula genérica da equação reduzida da circunferência.

Figura 61 - Apresentação do aluno 6 na fase de validação



Fonte: Dados da pesquisa.

Aluno 6 relatou que substituiu o centro (3,2) na equação reduzida e aplicou a distributividade para encontrar a equação geral ($x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$).

Figura 62 - Apresentação do aluno 3 na fase de validação

A circunferência de centro T representada no plano cartesiano abaixo é tangente ao eixo x.
Qual é a equação dessa circunferência?

$x_c = 3$ e $y_c = 2$, como a distância do centro T até a borda da circunferência é igual a 2, temos que a equação da circunferência será igual a

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 2^2 \Rightarrow$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 4 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Dando continuidade, na fase de institucionalização, aproveitamos a apresentação da resolução do aluno 3 para enfatizar que, quando temos a equação reduzida da circunferência, temos o centro e o raio de graça. Vejamos:

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$$



Centro: basta trocar os sinais (3,2)

Raio: basta extrair a raiz quadrada, validando o valor positivo $\sqrt{4} = 2$

Quando se tem a equação geral como o exemplo encontrado:

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$$



a = coeficiente de x / -2 b = coeficiente de y / -2

$$a = -6/-2 = 3$$

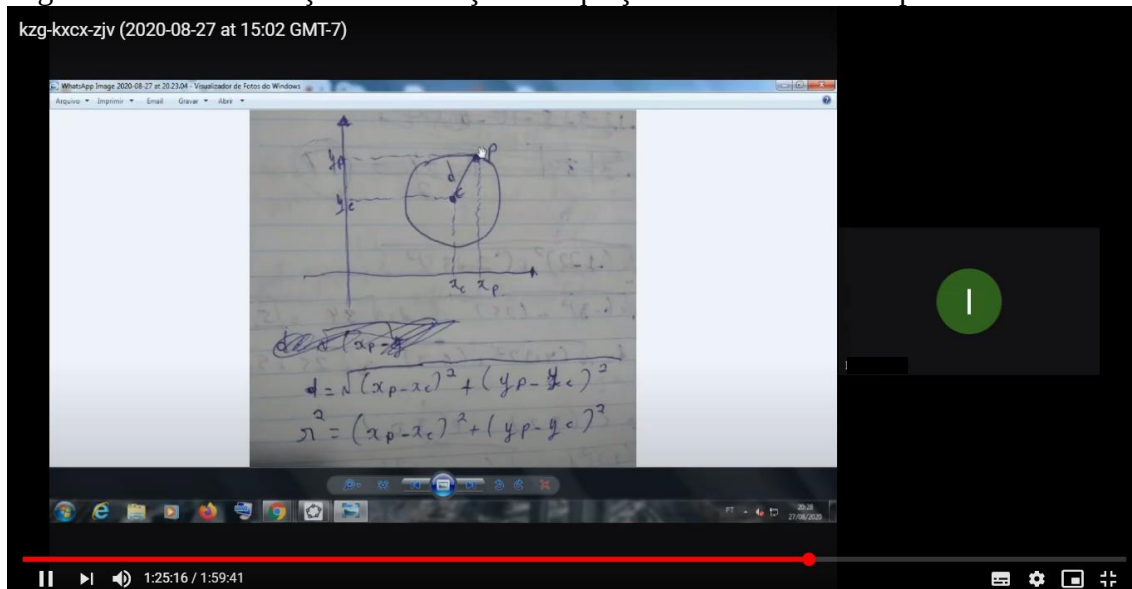
$$b = -4/-2 = 2$$

Centro = (3,2).

Como, de fato, havia sido proposto na situação-problema (6). A outra maneira é fatorando a equação para encontrar a equação reduzida (ver Figura 63). Por fim, para encontrarmos o raio na equação geral da circunferência, basta aplicar na fórmula:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - E} = \sqrt{3^2 + 2^2 - 9} = 2.$$

Figura 63 - Demonstração da definição da equação da circunferência pelo aluno 6

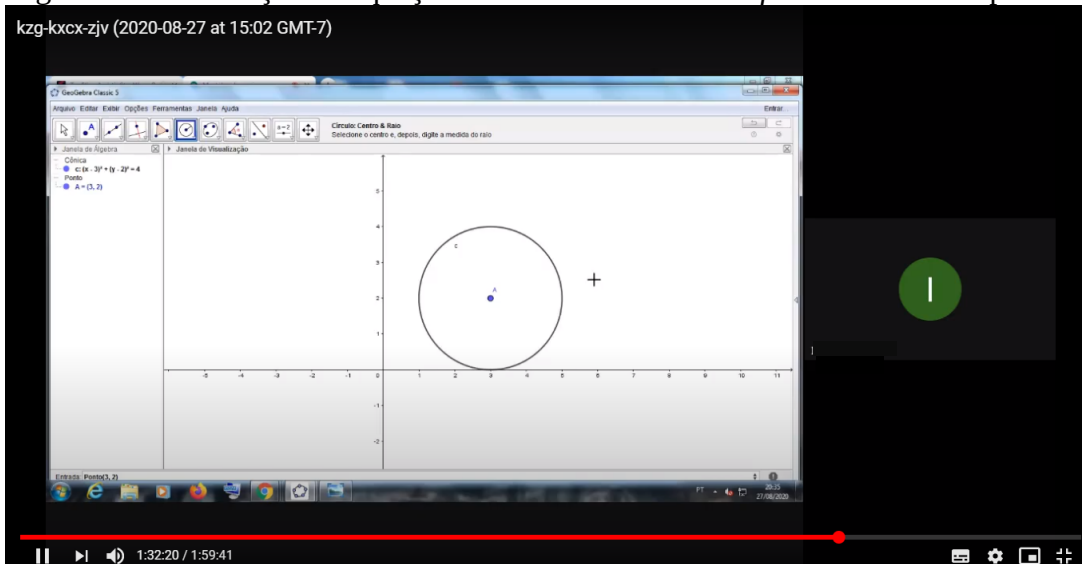


Fonte: Dados da pesquisa.

Apresentação do aluno 6 que havia feito a pergunta de onde vinha a equação da circunferência, demonstrando que a definição do raio, que é a distância do centro até qualquer ponto pertencente à circunferência, define a equação da circunferência. Ele fez a questão com toda sua empolgação e socializou para toda a turma. Dessa forma, ficou clara a importância de saber a essência e a profundidade dos assuntos matemáticos para aumentar sua confiança no processo de ensino e aprendizagem.

Por fim, com a utilização do GeoGebra como recurso didático, obtivemos a resolução, apresentação e reflexões sobre a contribuição desse *software* no contexto da resolução de situações-problema. Veja na Figura 64 como transcorreu tudo isso na finalização dessa sequência didática.

Figura 64 - Elaboração da equação da circunferência no *software* GeoGebra pelo aluno 6



Fonte: Dados da pesquisa.

Aluno 6: Traça-se o centro $A=(3,2)$; na janela de ferramenta com o comando centro e raio. Ao clicar, já aparece a representação geométrica e algébrica da equação da circunferência.

Diante do ensejo, fizemos uma pergunta para a turma: seria interessante a realização dessas duas questões concomitantemente com o auxílio do GeoGebra?

Aluno 6: Realizar junto não seria interessante na situação-problema (6), pois a resolução com o GeoGebra já iria oferecer a resolução logo de imediato, porém com a situação-problema (5) poderia ser pela visualização e movimentação que possibilitava para interpretar como as equações se comportam.

Aluno 10: O GeoGebra se torna mais interessante após a resolução no papel, pois fica mais fácil mostrar as propriedades e definições que foram utilizados na resolução da questão.

Neste momento, reforçamos o motivo, acordado com nosso orientador e nossa coorientadora, antes da aplicação, de usarmos o GeoGebra só após resolver questão, pois, ao trabalhar este assunto abordando as questões do SPAECE, atribuiríamos de imediato a resposta sem aquele percurso investigativo, usando a movimentação e visualização para ajudar nos entraves epistemológicos que surgirem no processo de resolução da questão proposta.

Aproveitando as reflexões com a finalização das situações-problema nesta formação metodológica: - o que vocês acham das situações didáticas no formato da TSD onde o aluno é protagonista até a resolução e/ou socialização da questão com os demais alunos?

Aluno 1: Sempre é válido o uso de ferramentas que ajudem na compreensão, principalmente para abranger toda essa área de conhecimento matemático. A utilização do GeoGebra é possível, principalmente com o uso do celular para se ter uma abrangência maior em sala de aula devido ao seu acesso. Por isso, sempre é bom para o professor estar com ferramentas que possam engrandecer o processo de aprendizagem em sala de aula. Com relação à TSD, é extremamente importante deixar que o aluno seja responsável pelo seu próprio conhecimento. Ou seja, quando tem essas situações-problema e existem ferramentas que podem auxiliar para que eles possam trabalhar para atingirem os objetivos traçados. Assim, o aluno assume o controle de desenvolver toda a questão e procurar meios para ele se autoguiar, usufruindo dos conhecimentos prévios que ele construiu até o momento e consiga desenvolver as resoluções para os problemas propostos. Dessa forma, o aluno possa ser responsável por aquilo que ele está aprendendo, tornando-o autônomo no processo de ensino e aprendizagem.

Aluno 10: Quando o aluno tem uma boa base, essa metodologia vai ser bem-sucedida em sala de aula. Porém, se o aluno não tiver uma boa base, pode haver alguma complicação se o professor não souber conduzir e direcionar tal situação.

Para finalizar os questionamentos e as reflexões, fizemos mais uma pergunta: - será se a TSD motiva mais o aluno a ser protagonista, deixando-o mais comprometido a responder à questão?

Aluno 10: Sim, com certeza. Quanto mais o aluno estiver ocupado e comprometido a resolver a questão, mais atenção ele vai ter, pois, quando o professor fica só no quadro fazendo suas exposições orais da aula, o aluno pode ficar disperso e sem interesse na aula. O aluno precisa se envolver, afinal de contas, o objetivo maior da aula é fazer com que o aluno aprenda e essa teoria propicia uma solução para este problema que ainda persiste, muitas vezes, deixando a aula centrada no professor ao invés de ser no aluno.

Portanto, as observações, ante todas as situações didáticas realizadas com essas situações-problema sequenciadas nos moldes da TSD com amparo da ED e EDF, foi que, por mais que tentássemos prever ao máximo com a análise prévia e análise *a priori*, não conseguimos prever tudo em suas dimensões dentro da tríade (professor, aluno e saber) com as dimensões que a cercam. Tudo isso torna engrandecedor o aprendizado para aperfeiçoar o profissionalismo do professor com todas as experiências adquiridas ao longo do processo e contexto das sessões didáticas. Assim, realiza-se uma categorização das situações-problema propostas na Tabela 1.

Tabela 1 - TSD: Categorização dos momentos de resolução das situações-problema e sua correlação com a EDF

Situação-problema (1)		
Fases da TSD		A TSD em conexão com a EDF
Ação	Primeiro contato com a reta t de equação $y = jx + k$ e a totalização de sua leitura, onde chegam informações sem muitos questionamentos dos significados de suas ações.	Existe um certo conforto do professor por todo o amparo teórico anteriormente com todo o controle e orientação da ED e EDF em conexão com a TSD, preparando todo o momento da aplicação e permitindo antecipar alguns prováveis problemas que poderiam prejudicar a condução da sessão didática com todo um planejamento minucioso para se ter uma visão clara e assertiva de todo o processo das situações didáticas propostas.
Formulação	Momento propício para trocar informações e/ou estratégias de resolução, favorecendo correlacionar a equação genérica com as relações do gráfico para a compreensão dos sinais coeficientes (angular e linear).	O professor fica atento a todos os indícios das ações explícitas e implícitas dos alunos para uma possível e sábia intervenção que conduza os alunos a permanecerem focados na resolução da questão com todo seu protagonismo e autonomia na busca de mais

		conhecimentos e maneiras diferentes de resoluções, sempre com a abertura de aprenderem sempre mais, seja sozinhos e/ou com seus colegas.
Validação	A situação eleva o protagonismo de justificativas com os argumentos dos alunos de forma coletiva, permitindo convencer uns aos outros com suas resoluções.	Excelente momento para se obter várias formas diferentes de resolução da questão, engrandecendo a sessão didática para ampliar os conhecimentos dos alunos e propiciar interações mais profundas em busca do saber.
Institucionalização	Fase de responsabilidade do professor para estabelecer as convenções e apropriar os alunos com conhecimentos/saberes que futuramente serão úteis em novas questões. Por isso, foi realizada uma exposição com as definições minuciosas dos coeficientes angular e linear da reta, bem como os seus comportamentos no gráfico. Foi dada uma dica para identificar os sinais da tangente do ângulo em cada quadrante e outras correlações com as apresentações dos alunos na fase de validação nos quesitos vocabulário e notações para um maior formalismo matemático.	Este momento é um fechamento geral das observações realizadas nas fases <i>a-didáticas</i> , nas quais os alunos vivenciaram experiências puramente protagonistas que foram planejadas e propiciadas pelo professor. Todas essas observações e reflexões direcionam de alguma forma um melhor direcionamento do professor nesta fase de institucionalização da TSD. Além disso, por se tratar de uma formação metodológica para professores iniciais, foi importante abrir uma reflexão com alguns questionamentos com os licenciandos de como seria uma possível aplicação desta situação-problema em sala de aula. Por ter sido uma aplicação remota, depois das discussões compartilhadas por eles, foi possível enxergar algumas passagens implícitas das fases de ação e formulação, por exemplo.
Situação-problema (2)		
Fases da TSD		A TSD em conexão com a EDF
Ação	Estabelecimento de alguma relação da forma algébrica com a forma geométrica da equação da reta.	O professor atenta para todos os procedimentos e ambientação para lançar a situação-problema, iniciando a

		sequência didática nos moldes da TSD.
Formulação	Criam-se conjecturas assertivas com as características da equação reduzida da reta com possíveis definições dos coeficientes angular e linear, bem como pode ficar o seu comportamento graficamente sem muito formalismo matemático.	Atenção total do professor para identificar o máximo de interações da tríade (professor, aluno e saber), principalmente a relação aluno-saber dentro do processo da situação didática.
Validação	Realização das definições dos coeficientes angular e linear com o rigor matemático e o compartilhamento dos alunos com os demais no <i>Google Meet</i> .	Dá ensejo ao professor de compreender qual o nível de conhecimento matemático e didático, entre outros aspectos que podem ser analisados com a socialização e as interações dos alunos.
Institucionalização	Por se tratar de uma questão que complementava a situação-problema 01, o momento foi oportuno para explorar cada item, extraindo a forma algébrica de cada gráfico junto com a turma para aprimorar as definições dos coeficientes abordados por eles na fase de validação.	As reflexões e observações realizadas durante a sequência didática permitem ao professor ter mais clareza de como proceder de forma diferente se necessário for ou ajustar a próxima sessão didática, com o intuito de uma aplicação mais assertiva no quesito ensino e aprendizagem mais significativa.
Situação-problema (3)		
Fases da TSD		A TSD em conexão com a EDF
Ação	Infelizmente, por se tratar de uma pesquisa remota, em que não tivemos acesso à turma com o olhar minucioso para observar cada aluno com todos os seus comportamentos diante da questão, tivemos um pouco de dificuldade em captar de forma instantânea as duas primeiras fases da TSD, principalmente a primeira. Após as participações orais e/ou escritas dos alunos, foi possível identificar as suas interações no processo de	Esta conexão da TSD com a EDF melhora as tomadas de decisões dos professores, por possibilitar uma visão mais abrangente e assertiva para as tomadas de decisões diante dos imprevistos comportamentos.

	resolução da questão. Alguns observaram as alternativas na tentativa de eliminação, outros construíram a ideia de substituir os pontos nas alternativas, por exemplo.	
Formulação	Identificação do sinal da declividade da reta ao colocar os pontos no plano ortogonal. Substituição dos pontos nas equações para verificar se eles pertencem ou não à equação da reta. Foram algumas tentativas usadas <i>a priori</i> por alguns alunos.	As necessidades dos alunos diante das situações didáticas são mais fáceis de serem identificadas pela bagagem da teoria em si e pela experiência ampliada dos licenciandos com um maior amparo pedagógico para prosseguirem com a resolução e articularem possíveis simulações de como seria sua reação na aplicação em sala de aula.
Validação	Momento de veracidade dos argumentos apresentados via <i>Google Meet</i> do problema levantado sobre equação da reta, abordando coeficiente angular e sua definição para encontrar a equação da reta pelos dois pontos apresentados.	Este momento é riquíssimo para aperfeiçoar os conhecimentos dos alunos promovido pelas socializações com seus argumentos e reflexões que deixaram todo este momento mais rico de informações pedagógicas para agregar conhecimentos mais propícios para sua formação profissional.
Institucionalização	Momento da mediação do professor para explicitar e formalizar as propriedades da equação da reta, feitas com base nas discussões nas fases anteriores. Foi mostrado de onde vem o cálculo do determinante, por meio dos triângulos semelhantes formado com a reta, sendo a essência para resolver vários problemas neste contexto.	Este momento foi fundamental para reavaliar com reflexões e vivências das distintas formas de resolução da questão, principalmente quando se tem o uso do GeoGebra em vez de folha e caneta ou lousa e pincel (quadro e giz). Observamos que essas reflexões junto com os licenciandos no ato da aplicação das situações-problema não seriam viáveis se não tivéssemos um amparo da EDF, proporcionando este momento tão rico para a formação inicial de professores de Matemática.
Situação-problema (4)		
Fases da TSD		A TSD em conexão com a EDF

Ação	Organização dos dados mencionados na questão na busca de lembranças dos seus conhecimentos prévios sobre o assunto. Alguns alunos não se lembraram de imediato da fórmula, porém foram em busca de outras estratégias de resolução.	Mesmo se tratando de uma pesquisa remota, os conhecimentos prévios e a <i>priori</i> da ED em complementação com a EDF foram essenciais para um maior direcionamento, até ante a falta de informações no início da situação didática.
Formulação	Nas tentativas de encontrar a área do triângulo, alguns alunos recorreram à distância entre dois pontos, outro ao determinante, sem muito rigor matemático a <i>priori</i> .	A falta do diálogo na fase de formulação e a impossibilidade de um olhar mais minucioso para interpretar os comportamentos dos alunos por se tratar de uma vivência de forma remota via <i>Google Meet</i> prejudicaram a identificação das interações no triângulo didático. Como, porém, foi prevista essa possibilidade, foi possível realizar outros formatos para aproveitar mais as situações didáticas no contexto de formação inicial como uma prévia proposta para sala de aula.
Validação	Validação da área do triângulo com a socialização de alguns alunos pela fórmula $A_{\Delta} = \frac{ D }{2}$ e por distância entre dois pontos, encontrando a altura relativa do triângulo para usar a fórmula tradicional da Geometria plana $A=b.h/2$.	A validação foi oportuna para se realizar reflexões e indagações com maneiras diferentes de resolução, tanto sem o GeoGebra e com este <i>software</i> com uma abrangência mais vasta do assunto em si.
Institucionalização	Estabelecimento de alguns fechamentos que não foram abordados pelos alunos, generalizando a questão, possibilitando uma consciência maior do aluno a respeito do assunto abordado, ressaltando a importância desse assunto para calcular a área de um polígono regular ou irregular devido aos seus vértices.	Alguns alunos amadureceram com as reflexões vivenciadas com suas experiências na situação didática, principalmente ao observarem um possível trajeto de uma aplicação em sala de aula. Com os questionamentos levantados pelo professor pesquisador em que conduziu o momento quando não era possível colher informações dentro da proposta da TSD pela falta de informações por ser remota,

		possibilitando com esta estratégia compreender melhor como foi o seu percurso traçado na resolução e proporcionando aos licenciandos com as reflexões orientadas uma maior experiência quando forem para a sala de aula com tal proposta desta formação metodológica proposta.
Situação-problema (5)		
Fases da TSD		A TSD em conexão com a EDF
Ação	Os alunos aceitam a situação-problema na devolução e analisam a atividade, buscando os seus conhecimentos prévios.	Com o apoio maior aos professores, essa conexão com a EDF deixa a aplicação da TSD mais robusta às ações dos professores mais assertivos para direcionar um efetivo trabalho do aluno mais alicerçado e protagonista do seu próprio conhecimento devido as suas visões mais abrangentes do todo com esse amparo maior ao professor com a EDF na construção e aplicação das situações didáticas.
Formulação	Os licenciandos discutem, refletem e resgatam alguns conceitos referentes à circunferência que possam ser úteis na resolução da questão.	Com uma visão mais apropriada para a formação inicial de professores, a EDF junto com as características da TSD sendo observada com base nesta aplicação didática, nos oferece a certeza de que este assunto apresentado neste descritor sobre equação da circunferência promove um obstáculo epistemológico maior para os alunos. Isso ficou claro para os licenciandos, pois, quando forem atuar em sala de aula com este assunto, requer um planejamento mais minucioso, para proporcionar aos alunos possibilidades maiores para melhor superação dos possíveis entraves que

		venham a surgir com tais assuntos.
Validação	Os alunos enfatizaram nas suas validações apresentadas que para serem uma equação da circunferência os coeficientes de x^2 e y^2 precisam ser iguais e diferentes de zero e, ao checarem os itens, chegaram à resposta correta, praticamente só com este argumento apresentado.	O percurso da situação didática em conexão com o amparo maior da EDF foi essencial para as reflexões realizadas após a resolução e socialização com o GeoGebra, possibilitando uma visão mais sistêmica de como se constituísse tal aplicação em suas salas de aulas, prevendo alguns comportamentos dos alunos numa possível aplicação desta sequência didática.
Institucionalização	Nesta fase de institucionalização, evidenciamos que dada a circunferência $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ temos três critérios para ser uma equação de circunferência. Vejamos: 1°. $A = B = 1$ 2°. $Pxy \rightarrow P = 0$ 3°. $a^2 + b^2 - E > 0$ Observação 2: Centro: $c(a, b)$ $a = C / -2$ e $b = D / -2$	Ao observar as falas dos alunos ao apresentarem os argumentos e os rascunhos realizados na apresentação, foi possível constatar um certo grau de dificuldade maior dos alunos com esta parte da equação da circunferência. Podemos observar também a importância da resolução com <i>software</i> para amenizar os entraves epistemológicos que possam dificultar a compreensão mais pontual da questão.
Situação-problema (6)		
Fases da TSD		A TSD em conexão com a EDF
Ação	Os alunos buscaram associar com alguns conhecimentos prévios que podiam ligar ao assunto, mesmo que esta pista fosse por alto em seus pensamentos, sem formalizar nada.	Uma pergunta realizada nos revelou que, mesmo se tratando de licenciandos em Matemática, nos colocam em reflexões, por exemplo, como são visíveis as dificuldades em relacionar os conteúdos de circunferência com a relação entre as definições com profundidade se o professor não for bem enfático em relacionar os conteúdos, aprofundando com todo rigor matemático

		pertinente para que o aluno se sinta seguro de trabalhar as questões.
Formulação	As ideias que antes eram vagas começam a ganhar sentido ao ponto de traçar alguns rascunhos sobre equação da circunferência, mesmo sem muito rigor matemático.	Neste mesmo viés apresentado acima, imaginemos como deve ser a situação crítica (dificuldades dos alunos se o professor não se cercar de boas práticas e metodologias que o ajudem a amenizar tamanha disparidade entre o aluno e o saber) no ensino médio da rede pública estadual de uma escola regular. Dessa forma, a conexão da TSD com EDF no percurso da ED deixa o professor mais amparado para enxergar além das entrelinhas das ações e interações em sala de aula, bem como perceber e antecipar-se com intervenções que potencializem as ações dos alunos para a realização das sessões didáticas com afinco para obter o sucesso desejado nas situações didáticas.
Validação	A fase de validação foi realizada pela maioria dos alunos seguindo esses passos. • Partimos da equação reduzida: $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$. Identificamos o centro: $c = (3,2)$. • Encontramos o raio: $r = 2$. • Após identificar o centro e o raio, a questão está praticamente resolvida, bastando substituir o centro e o raio encontrado na fórmula genérica da equação reduzida da circunferência.	Foi perceptível a evolução dos licenciandos ao se colocarem no lugar dos alunos para perceber nas entrelinhas futuras ações e entraves epistemológicos, para eles adquirirem habilidades e competências para lidar com tais situações e imprevistos nas suas futuras atuações em sala de aula.
Institucionalização	Enfatizamos que, quando temos a equação reduzida da circunferência, temos o	Observamos que, diante de todas as situações didáticas realizadas com essas situações-

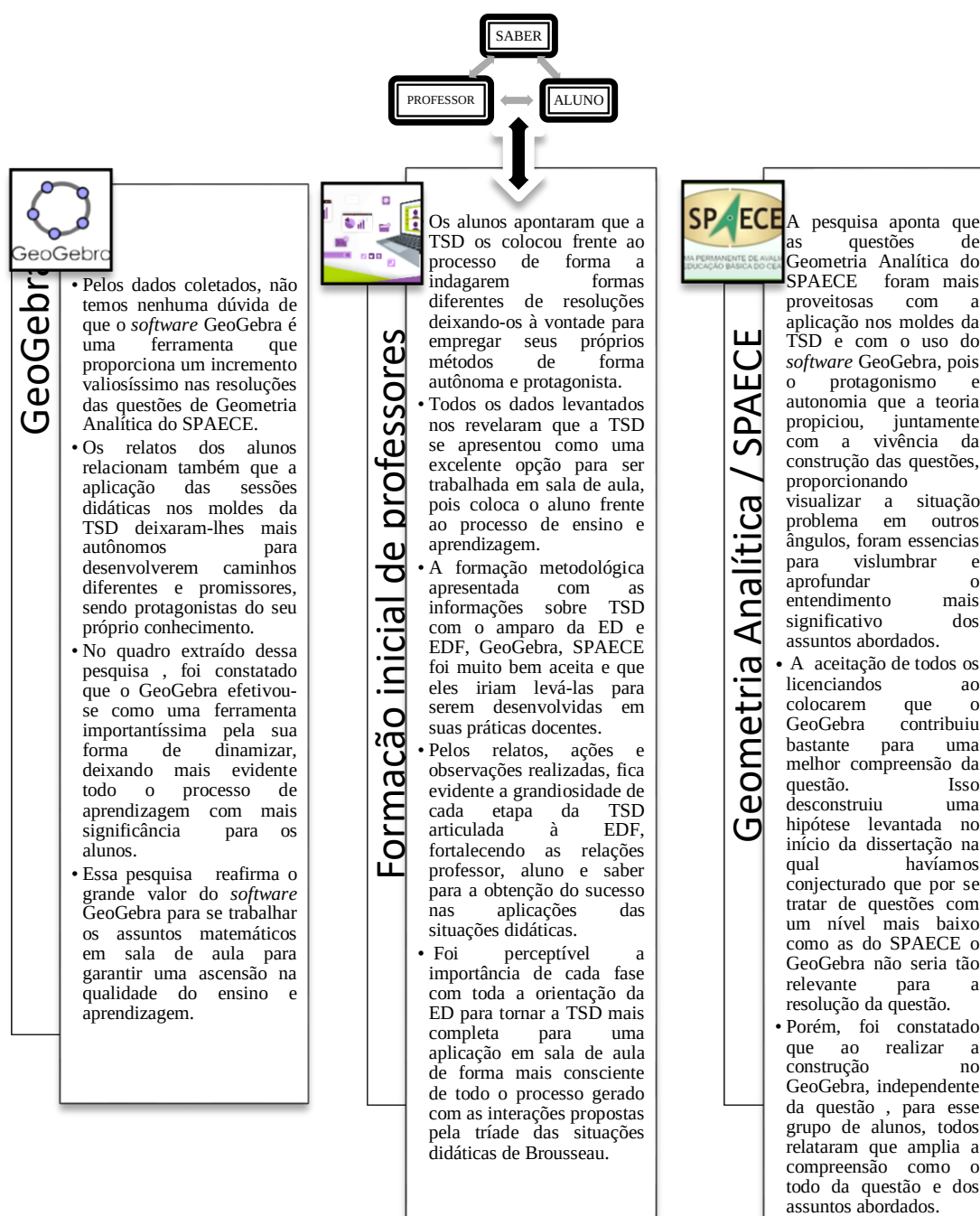
	centro e o raio de graça. Quando temos a equação geral, uma das maneiras para encontrar o centro (a,b) e raio (r) é: $a = \text{coeficiente de } x / -2$ $b = \text{coeficiente de } y / -2$ $r = \sqrt{a^2 + b^2 - E}$.	problema sequenciadas nos moldes da TSD com amparo da ED e EDF, foi que, por mais que tentássemos prever ao máximo com a análise prévia e análise <i>a priori</i>, não conseguimos prever tudo em suas dimensões dentro da tríade (professor, aluno e saber) com suas dimensões que a cercam. Tudo isso torn engrandecedor o aprendizado para aperfeiçoar o profissionalismo do professor com todas as experiências adquiridas ao longo do processo e contexto das sessões didáticas.
--	---	--

Fonte: Dados da pesquisa.

Esses exemplos apoiam a ideia que a ED pode abranger muito o âmbito de pesquisa do que foi previsto em seu início. Ao adotar a posição de engenheiro, o pesquisador educacional tem acesso a pesquisas que não apenas proporcionam professores com um design que não pode ser alterado, mas também ajuda a estudar e modelar as práticas dos professores. (MARGOLINAS; DRIJVERS, 2015, p. 9, tradução nossa).

Para compreendermos como algumas variáveis didáticas se comportaram durante a realização das situações didáticas, a tabela abaixo retrata um panorama geral dessas variáveis didáticas extraídas durante toda a aplicação desta formação metodológica com os licenciandos em Matemática na UVA via *Google Meet*. Vejamos como ocorreram as interações professor, aluno e saber e o *milieu* com algumas variáveis didáticas destacadas na Figura 65, como o GeoGebra, formação inicial de professores e Geometria Analítica/SPAECE.

Figura 65 - Fluxograma com a tríade das relações didáticas de Brousseau e algumas variáveis didáticas desta pesquisa

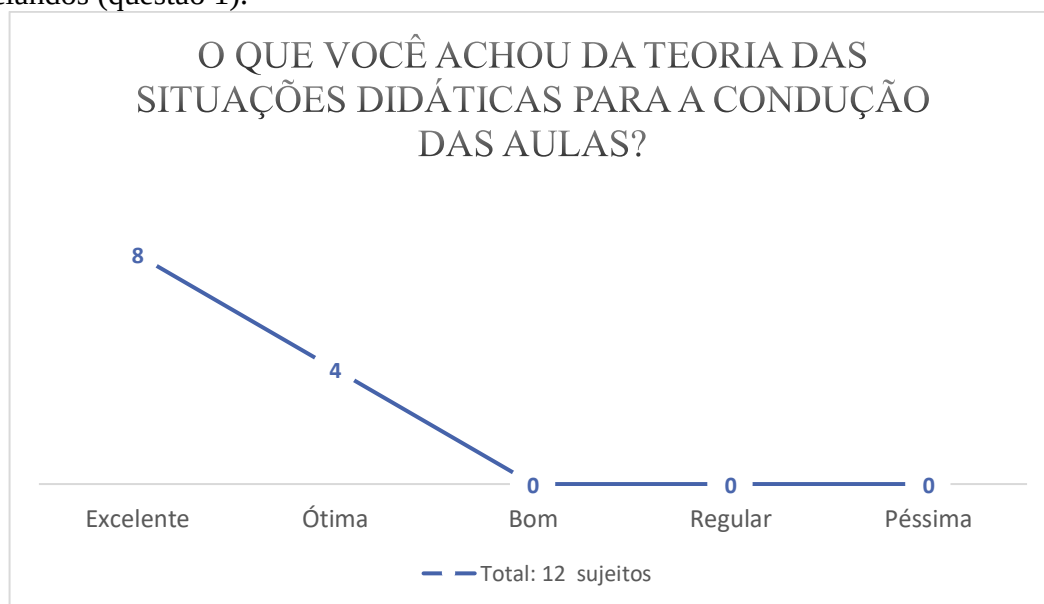


Fonte: Dados da pesquisa.

O fluxograma acima da tríade das relações didáticas de Brousseau foi relacionado nas três principais temáticas (GeoGebra; Formação Inicial de Professoras; Geometria Analítica / SPAECE) da pesquisa realizada. Assim, foi possível deixar mais claros todos os comportamentos dessas temáticas dentro das situações didáticas durante a Formação Metodológica desenvolvida nos cinco encontros via *Google Meet*.

O quinto e último encontro, também via *Google Meet*, foi destinado à realização de um arremate da TSD com a complementação da ED e EDF, bem como a realização de reflexões e discussões com a turma acerca da aplicação das situações didáticas vivenciadas com eles nos encontros anteriores. Vejamos algumas reflexões extraídas da avaliação realizada após a formação metodológica e durante o quinto encontro dessa formação para incrementar as análises de resultados da pesquisa realizada com os licenciandos em Matemática da UVA (ver Figura 66).

Figura 66 - Dados extraídos da avaliação realizada após os cinco encontros pelos licenciandos (questão 1).



Fonte: Dados da pesquisa.

Como todos responderam que a TSD proporciona, sim, uma trajetória mais protagonista e autônoma para sua aprendizagem, algumas reflexões foram mencionadas na fala dos alunos referentes à aplicação realizada com os licenciandos em Matemática, confirmando que, de fato, a TSD é uma teoria de ensino eficaz para desenvolver o protagonismo e autonomia dos estudantes no seu processo de aprendizagem em sala de aula. Vejamos a seguir algumas respostas objetivas da avaliação realizada com os alunos após a formação metodológica com os alunos (ver Tabela 2).

Tabela 2 - Respostas objetivas da avaliação após formação metodológica

Dados extraídos da avaliação realizada pelos alunos (questões 2, 3, 5, 6 e 7).	SIM	NÃO
A Teoria das Situações Didáticas impulsionou uma trajetória mais protagonista e autônoma para sua aprendizagem?	100%	0%
A vivência com SPAECE, Geometria Analítica e GeoGebra contribuiu para sua formação inicial como professor(a) de Matemática?	100%	0%
Teve contribuições do <i>software</i> GeoGebra nas situações didáticas aplicadas com questões de Geometria Analítica do SPAECE?	100%	0%
A transposição didática ficou melhor (facilitou a compreensão) com a utilização do <i>software</i> GeoGebra?	100%	0%
A TSD (“metodologia de ensino”) abordada diferencia-se de outros estilos metodológicos para a condução de aula de Matemática que você vem estudando?	83,4%	16,6%

Fonte: Dados da pesquisa.

Essas respostas atribuem à formação aplicada com as teorias apresentadas e o processo das situações didáticas realizadas durante os encontros pelos alunos, propiciando uma compreensão melhor dos assuntos abordados de Geometria Analítica. Entre os resultados levantados, a ênfase colocada e discutida pelos licenciandos foi acerca do diferencial que o *software* GeoGebra exerce em sala de aula, contribuindo de maneira sublime para alavancar o grau de compreensão dos conteúdos matemáticos em geral.

Este argumento anterior foi enfatizado pelos alunos ao longo de todas as sessões didáticas realizadas. Em razão da tamanha proporção de importância colocada pelos licenciandos ao longo do processo de realização das situações didáticas que o GeoGebra representou dentro da aplicação da pesquisa, foi superada a expectativa levantada na hipótese

quando abordamos que, por se tratar de questões de Geometria Analítica do SPAECE, talvez o GeoGebra não fosse relevante para realizarmos a modelagem Matemática, pois a questão se resolvia com poucos comandos. Mesmo assim, os alunos ressaltaram que a maneira como foi colocada (no GeoGebra após a resolução da questão e compartilhamento na fase de institucionalização da TSD) possibilitou explorar aspectos da questão e do assunto com as ferramentas poderosíssimas do GeoGebra.

Aluno 1: Sem dúvida alguma o GeoGebra é uma ferramenta excelente na compreensão desses conteúdos. É notória a melhor compreensão do que determinada questão está abordando quando é algo visual, e o GeoGebra nos dá essa possibilidade, não só no quesito visual, mas também na construção da resolução e na exploração de meios para que esta seja encontrada.

Aluno 4: Podemos associar o GeoGebra a uma nova tendência educacional pois o seu uso traz grandes contribuições para o ensino, uma delas seria a exploração de novos métodos de resolução de questões, proporcionando mais entendimento dos exercícios.

Dando continuidade à extração de dados da avaliação realizada, vamos fechar com duas questões com vistas a responder, principalmente, o objetivo geral desta pesquisa, realizada com alguns licenciandos em Matemática da UVA. Vejamos as Tabelas 3 e 4 referentes às últimas questões da avaliação realizada (questões 4 e 8):

Tabela 3 - Questões da avaliação realizada (questão 4)

Quais as contribuições da Teoria das Situações Didáticas nesta formação inicial dos professores de Matemática através de questões do SPAECE envolvendo a Geometria Analítica?

Vejamos as respostas dos 12 participantes em ordem crescente (aluno 1, 2, 3, ..., 12)

Uma contribuição imensa e muito rica, visto que nós, enquanto licenciandos, buscamos conhecer as mais diversas metodologias para atuar em sala de aula. E a TSD nos desperta trabalhar com alunos investigativos, deixando a ideia monótona de professor emissor e aluno, meramente, receptor de todo o conteúdo.

A TSD contribuiu bastante principalmente nos mostrando uma nova maneira de ensinar Matemática.

A contribuição é bastante relevante, visto que na formação inicial os futuros professores ainda estão sendo moldados, e ao deixarmos a par das Teoria das Situações Didáticas, estamos fazendo com que ele tenha um arsenal de instrumentos de modo a otimizar a sua didática de forma a contribuir para o entendimento por parte dos alunos.

Pude aprender que esta teoria contribui bastante para o aprendizado dos alunos, pelo sentido de que o aluno deve criar caminhos diversos para sua aprendizagem, ou seja, fazendo ele refletir mais sobre os problemas, fugindo assim do ensino tradicional. Esta metodologia leva-me a pensar mais como devo estar preparado para a docência, carregando múltiplas competências necessárias, com essa visão, podemos acreditar mais na educação e no potencial dos alunos.

Ao apresentar novas ideias ao professor como o contrato didático, a TSD proporciona um maior leque de opções para serem trabalhadas em sala de aula.

Pode deixar o aluno ser protagonista, deixando cada um expor sua ideia e maneira de resolução para todos, agregando conhecimento, mostrando que tem várias formas de responder.

Acredito que possibilita ao professor desenvolver uma melhor interação com seus alunos. Deixar que o mesmo assuma seu protagonismo em sala de aula é muito interessante.

Na construção do conhecimento, na forma em que me protagonizei autor do meu conhecimento e, consequentemente, na forma que vou transpor isso aos meus alunos.

A Teoria das Situações Didáticas contribui bastante na formação inicial dos professores de Matemática, uma vez que, nos traz o papel do professor em uma concepção diferente da que faz parte das salas de aulas tradicionais, o aluno passa a ser protagonista de seu conhecimento. Além disso, essa teoria nos mostra também a importância da relação entre aluno, professor e saber, o quanto é necessário um contrato didático para que o professor possa alcançar os objetivos da aula.

A TSD apresenta uma forma diferente da tradicional de apresentar um conteúdo, fazendo que os alunos sejam os próprios protagonistas e o professor uma espécie de mediador, ele irá questionar o aluno, fazer com que ele pense e desenvolva o raciocínio matemático. E isso contribui muito para a aprendizagem dos alunos, já que para a prova do SPAECE a maioria dos alunos só decoram os descritores e não têm uma aprendizagem significativa.

Esse método ajuda o futuro professor a pensar de forma mais clara, e sair da mesmice do professor na lousa e o aluno copiando. Utilizando essa teoria, na Geometria Analítica, deixou o nosso conhecimento mais aberto, pois no momento das questões, estávamos aperfeiçoando o conhecimento e chegando a conclusões diferentes uns dos outros, para no momento da professora, ela formalizar o conteúdo.

Todas as aplicações das situações envolvendo a Geometria Analítica nos moldes da TSD instigou-me a agilizar o processo de compreensão das questões propostas.

Fonte: Dados da pesquisa.

As contribuições da TSD nesta formação inicial dos licenciandos com o campo epistemológico da Geometria Analítica com situações-problema do SPAECE são expostas nestas reflexões relatadas pelos alunos. Ante estas análises acerca dessas contribuições, concluímos que a TSD é uma excelente proposta, principalmente estando amparada pela ED e EDF, para ser desenvolvida na sala de aula com o intuito de otimizar, de maneira mais protagonista e autônoma, o processo de aprendizado dos alunos. Além disso, oferece subsídios importantes e necessários aos professores na realização de uma proposta de trabalho mais efetiva e promissora para o ensino de Matemática.

Tabela 4 - Questões da avaliação realizada (questão 8)

O que você poderia levar desta experiência metodológica para sua prática docente? Justifique.

Vejamos as respostas dos 12 participantes em ordem crescente (aluno 1, 2, 3, ..., 12)

Foi um momento de muito aprendizado e espero estar utilizando a teoria e o GeoGebra em minhas aulas futuramente, como forma de tornar o ensino de Matemática ainda mais significativo.

Com certeza levarei a experiência adquirida nessa formação, principalmente o conhecimento adquirido com a utilização do software GeoGebra.

Como principal contribuição, creio que a aplicação do GeoGebra em sala de aula tenha se destacado das demais, levar um ambiente novo à sala de aula, para quem sabe, despertar o interesse daqueles alunos sem muita afeição à Matemática, talvez assim, tenhamos um aumento na aprendizagem por parte dos discentes.

Esta sessão didática pode me proporcionar caminhos mais concretos para o ensino significativo da Matemática, de acordo com os fundamentos da mesma, podemos perceber que ela é capaz de acelerar a aprendizagem dos alunos como base na metodologia que foi trabalhada.

Toda a ideia da TSD é de grande ajuda na docência, mas principalmente a questão do contrato didático, pois ao ser estabelecido, mesmo que indiretamente, no primeiro encontro com a turma, ajuda a delimitar algumas questões que futuramente poderiam vir a atrapalhar.

Levarei mais uma teoria didática para trabalhar em sala de aula, enriquecendo cada vez mais com novas teorias, para melhor aprendizagem do aluno.

Certamente levarei uma nova forma de abordagem do conteúdo para meus alunos. Foi muito interessante a utilização do software nas resoluções dos itens. Além disso, tive ótimas sugestões sobre desenvolver um contrato didático e isso certamente irá facilitar a minha vivência em sala de aula.

Na verdade, as teorias das situações didáticas serão muito interessantes para utilizar em sala de aula, já que conduz o discente ao aprendizado significativo.

Essa foi a primeira vez que estudei sobre essa teoria e pretendo me aprofundar mais nesse assunto para que, futuramente, quando estiver atuando como professora possa aplicá-la em minhas aulas. A mediação da professora, o papel ativo do aluno, o contrato didático, sem dúvidas, teve grande contribuição para minha formação.

Foi ótimo e enriquecedor conhecer mais sobre a TSD, e sem dúvidas irei utilizar nas minhas futuras aulas, principalmente o contrato didático que pode auxiliar muito na relação professor aluno.

Com certeza vou levar essa experiência para sala de aula, porque todo conhecimento é válido e construtivo, principalmente, quando queremos melhorar as aulas para os alunos.

Toda a forma que foi utilizada pela metodologia nas resoluções das questões seja de forma individual e coletiva usando o GeoGebra como apoio nas resoluções das questões.

Fonte: Dados da pesquisa.

As respostas a essas duas questões deixaram evidentes as contribuições da TSD integrada a EDF, o uso do GeoGebra e questões de Geometria Analítica do SPAECE para a formação inicial de professores de Matemática. Isso foi enfatizado ao longo do processo dos cinco encontros da formação metodológica ofertados no curso de extensão com as falas, discussões e observações dos participantes da pesquisa. Para enfatizar ainda mais, vejamos algumas observações dos alunos com algumas reflexões realizadas durante o quinto encontro no dia 02/09/2020 acerca das contribuições da TSD em conexão com a EDF nas resoluções das situações-problema do SPAECE de Geometria Analítica com o uso do GeoGebra.

Aluno 8: Explorar mais o conteúdo, indo além do que a questão pede, o contrato didático.

Aluno 1: Uma das maiores contribuições da TSD é reafirmar a tríade (professor, aluno e saber), onde em todo este envolvimento com as questões, o aluno se torna protagonista daquilo que ele está absorvendo e aprendendo. Assim, o aluno passa a ter consciência do papel que ele está exercendo para seu próprio ensino-aprendizagem e também a questão do contrato didático para estabelecer mesmo de maneira implícita este elo entre essa tríade.

Aluno 5: A questão de o aluno ser protagonista do seu próprio aprendizado. Isso é algo muito importante que a TSD traz. Pois o aluno se torna mais independente em relação ao estudo em geral no futuro também.

Aluno 11: A questão do protagonismo impulsiona os alunos a resolverem a questão de várias maneiras diferentes. A maneira como o professor se comporta durante as situações didáticas ao instigar os alunos quando necessário sem atribuir as respostas. A socialização da resolução da questão com os outros alunos, tudo isso é bem satisfatório para deixar a aula mais interessante.

Quando os alunos foram indagados se o GeoGebra possibilitou vivenciar situações mais concretas de Geometria Analítica, mesmo se tratando de questões simples como as do SPAECE, todos responderam que, “sem sombra de dúvida, quando você consegue perceber o que está acontecendo você consegue assimilar o conteúdo e diminuir a abstração dos assuntos matemáticos, ajudando na compreensão dos conteúdos.” Neste viés, vários alunos indagaram com palavras soltas da contribuição do GeoGebra como: visual; ferramenta de inclusão; aumenta a consciência da aplicação pelo manuseio que tal ferramenta permite; potencial matemático; o GeoGebra acelera, agiliza e amplia o conhecimento do aluno.

Dessa maneira, fechamos as análises da formação metodológica com ênfase dos alunos que a TSD integrada a ED e EDF é uma proposta que enriquece as sessões didáticas e fortalece o trabalho do professor na construção e aplicação das situações didáticas em sala de aula. Bem assim, essas situações didáticas amparadas com toda esta teoria acima com as situações-problema de Geometria Analítica voltadas para o SPAECE com a utilização do *software* GeoGebra teve uma aceitação imensa por parte dos participantes desta pesquisa. Estas afirmações foram mencionadas ao longo da avaliação realizada, foram suficientes para frisar várias contribuições para a formação inicial dos professores de Matemática, os participantes enfatizaram que “irão levar para sua prática em sala de aula os conhecimentos adquiridos com essa formação realizada nestes cinco encontros valiosos.”

5.2 Validação interna

Sabemos que a ED traz dois tipos de validação: interna e externa. Esta pesquisa, no entanto, tem sua validação focada nas situações didáticas, envolvendo assim um pequeno grupo de alunos sem a comparação externa a esta aplicação. Alves cita Laborde em seu artigo para melhor descrever a validação externa. Assim, não convém realizarmos tal validação por não termos realizado esta comparação externa descrita abaixo.

A validação externa envolvendo uma comparação das produções dos estudantes antes ou ao longo da sequência, ou ainda após experimentação em sala, o que pode ocorrer por meio de entrevistas individuais ou em grupo, bem como por meio de questionários. E, também, por meio da comparação de produções externas, envolvendo outros alunos não submetidos à mesma sequência estruturada de ensino. (LABORDE, 1997 p. 105 *apud* ALVES, 2016c, p. 697).

Por este motivo, faremos uma validação interna, comparando as fases de análise *a priori* e a *posteriori* com base nos levantamentos dos dados coletados nas sequências didáticas realizadas. Ou seja, esta validação interna, segundo Laborde (1997, p. 105), abrange “uma

descrição genérica da classe ou das condutas e tipos de produção majoritárias na classe, estudo de sua evolução e verificação de sua adequação no que concerne ao esperado dos estudantes”. Para termos a certeza de que ocorreu de fato uma situação didática, as fases de validação e institucionalização da TSD são essenciais para a validação interna; visto que, por meio dessas duas fases, garante-se se todo o processo de construção dos conhecimentos matemáticos vigentes nas situações propostas foi realizado com êxitos.

Comenta que dados empíricos podem ser colhidos pelo uso de metodologias externas, isto é, obtidos por meio de: questionários, entrevistas individuais ou em grupos pequenos, que podem ser realizados a qualquer tempo do ensino ou ao final da sequência planejada pelos estudiosos. (ARTIGUE, 1996, p. 263 *apud* ALVES, 2016b, p. 137).

Para que compreendamos “Com efeito, a etapa de validação interna, originada no método da ED, se mostra condicionada na confrontação dos dados (confrontação e validação das hipóteses de trabalho) que a teoria supõe e prediz do ensino e da aprendizagem, com os dados empíricos” (LABORDE, 1997 *apud* ALVES, 2016b, p. 137). Para que isso ocorra de maneira mais eficaz, faz-se necessário

“[...]avaliar as variáveis didáticas envolvidas e prever as estratégias de resolução. Ressalta-se a importância de realizar uma análise *a posteriori* objetivando verificar a necessidade de alterações na elaboração da sessão seguinte. Dessa maneira, o professor pode realizar uma autorreflexão sobre o processo de ensino, buscando dessa forma, contribuir para a aprendizagem dos estudantes. (BRUM, 2014, p. 5).

Esta autorreflexão, descrita por Brum, é essencial que o professor faça com frequência nas realizações das situações didáticas. O professor pode alterar inclusive o contrato didático para que fique mais direcionado ao que se propõe realizar. Isso ficou claro com as análises *a posteriori* e a validação com todas as descrições e reflexões realizadas ao analisarmos cada situação dessa formação metodológica com o grupo de alunos do curso de extensão da licenciatura em Matemática.

O olhar que o professor tem diante das ações dos alunos em sala de aula é importantíssimo para verificar o grau de assimilação dos conteúdos e se os resultados estão sendo condizentes com os objetivos propostos. Confessamos que, na aplicação desta pesquisa, por ter sido remota, sentimos esta dificuldade do olhar mais de perto permitido pelo docente em sala de aula presencial. Não podemos negar, porém, que a gravação via *Google Meet* foi excelente para as descrições dos dados de modo mais real.

O método reside na comparação entre a análise a priori e a análise a posteriori realizada a partir das observações da sequência de ensino realizado. A engenharia didática consiste em colocar à prova as ligações que a teoria assumiu entre ensino e aprendizagem por validação interna. Não é uma questão de comparar o comportamento de parceiros e eventos para aqueles de uma classe de controle, mas de comparar as duas modelizações diferentes do mesmo objeto (a sequência) o que são a análise a priori e a análise a posteriori. Porque a análise a posteriori constitui uma modelagem de observáveis e não uma simples observação, conforme relatado por Margolinas (1992). Na verdade, a análise posteriori coloca o problema, dando significado às ações observáveis relativas ao professor e ao aluno [...] (MARGOLINAS, 1992 *apud* LABORDE, 1997, p. 103, tradução nossa).

Assim, vamos à validação interna desta pesquisa que contou com a ED e EDF variáveis observáveis neste *design* de investigação, juntamente com a TSD direcionada ao ensino e aprendizagem com o itinerário de investigação na tríade professor, aluno e saber. Com isso, faremos uma comparação da análise *a priori* com a *a posteriori* das seis situações-problema que resultaram nas seis situações didáticas, sendo realizadas duas em cada encontro via *Google Meet* desta aplicação da pesquisa no curso de extensão, nos moldes de uma formação metodológica a fim de explorar elementos da EDF que concedam uma visão mais abrangente dos licenciandos da UVA que se prontificaram a participar por meio do Grupo de Pesquisa - Tecnologias Digitais, ofertado pela Profa. Dra. Maria José Araújo Souza. Esta complementação da EDF a ED foi essencial para endossar as reflexões durante a experimentação (aplicação das sessões didáticas) como na análise *a posteriori*, possibilitando reflexões e observações mais voltadas ao professor ou futuro professor, sem falar das indagações dos participantes, pois, ao longo do processo formativo oferecido, percebemos uma evolução de comportamento no quesito que eles não estavam se comportando como meros alunos dentro das situações didáticas aplicadas e sim como professores e/ou futuros professores ao analisarem aspectos essenciais para uma boa condução no contexto de uma possível aplicação em sala de aula dessas situações didáticas, com um amparo maior da teoria exposta nessa formação. Neste viés, foram relatadas algumas indagações. Vejamos:

Aluno 7: Foi uma experiência de muito aprendizado. Esta foi a primeira vez que participei desse tipo de atividade. Sem dúvidas foi uma experiência de crescimento pessoal e profissional.

Aluno 3: A experiência destes encontros foi incrível, perceber como cada aluno resolveu determinada questão, depois ver a mesma, abordada com o GeoGebra de forma clara e direta, demonstrar que os alunos estão por dentro dos meios digitais, para sempre se aperfeiçoar e não ficar para trás neste mundo que a cada dia evolui. As discussões a respeito das metodologias de ensino e a respeito das questões, também foram de grande valia, assim como o ambiente de sala virtual, que ganhou protagonismo em meio à época difícil, no mais só tenho que agradecer aos organizadores por proporcionarem estes encontros tão valiosos que só tendem a contribuir para minha formação.

Outros relatos foram mencionados, os quais observamos como algo positivo e que, de fato, demonstram que a EDF complementa a ED, principalmente por trazer este amparo maior ao professor, dando mais sentido à aplicação da TSD aos licenciandos que, em um futuro próximo, estarão aplicando sequências didáticas em suas salas de aulas, perpassando pelas metodologias mencionadas ou outras, mas que de alguma maneira tais conhecimentos adquiridos ao longo desta experiência possam ser aproveitados nas suas atividades devido às tamanhas contribuições que foram relatadas nas fases de experimentação e de análises *a posteriori* pelos participantes dessa pesquisa. Assim, a EDF nos redimensiona a esta aplicação por ser uma proposta viável a ser desenvolvida pelos licenciandos, que participaram desta experiência formativa, em suas práticas docentes.

Vejamos como ocorreu a validação interna das seis situações-problema que contemplaram questões envolvendo os descritores do SPAECE de Geometria Analítica. Assim, vamos nos ater às variáveis microdidáticas para a validação internamente, com foco nas situações didáticas. Assim, Oliveira (2018, p. 189) relata que “a validação interna desta pesquisa é uma consequência da análise *a posteriori* dos dados coletados, buscando comparar o que se foi analisado *a priori* com os resultados obtidos na experimentação”. Vale ressaltar que no decorrer da resolução das situações-problema, todavia, surgiram alguns obstáculos epistemológicos e cognitivos comuns de um processo de aprendizagem, principalmente nas situações que envolviam circunferência.

Na perspectiva da tabela 2 (respostas objetivas da avaliação após formação metodológica), observa-se na fase da institucionalização a concordância dos conceitos abordados nas situações didáticas. Dessa maneira, na situação-problema (1), os alunos encontraram, a partir da equação genérica da reta, a inclinação da reta, caracterizando os coeficientes angular e linear na representação gráfica (geométrica). Os sujeitos estabeleceram um processo de construção com a autonomia de um pesquisador, criando conjecturas de resoluções com suporte na interpretação gráfica do problema do SPAECE.

Na situação-problema (2), foi verificada a interpretação da equação da reta com a identificação e localização do coeficiente linear, bem como outros pontos no plano cartesiano para a interpretação geometricamente dos coeficientes da equação de uma reta. No âmbito da EDF, em ambas as situações-problema acima, os licenciandos estavam de prontidão para se debruçarem e resolverem a questão, passando pelas fases da TSD, permitindo realizar reflexões pertinentes como se estivessem aplicando com seus futuros alunos, prevendo e identificando possíveis entraves epistemológicos, tendo como parâmetros as suas projeções e dos colegas

com as interações professor, aluno e saber, relacionando, assim, caminhos a proceder com esta possível experimentação no futuro, em suas salas de aulas.

Sucedendo a institucionalização, na situação-problema (3), os alunos compreenderam como determinar a equação da reta a partir de dois pontos dados. A maioria resolveu usando o determinante para se chegar na equação reduzida da reta. Eles compreenderam o processo de resolução, estabelecendo a representação algébrica desde os pontos dados na questão do SPAECE.

Na situação-problema (4), ocorreu o cálculo da área de um triângulo pelas coordenadas de seus vértices. Houve a formalização com a noção das resoluções com determinante nas questões anteriores, envolvendo a compreensão da fórmula para o cálculo da área de um triângulo no plano ortogonal. Neste mesmo viés, a EDF levantou algumas reflexões dos estudantes, com o objetivo de se projetar como se fosse um professor, para tentar estabelecer a relação *a priori* a ser projetada para uma estruturação de uma sequência didática como essas duas situações-problema abordadas, como foi enfatizado na análise *a posteriori* e validação descrita no subtítulo acima. Foi observado que essas reflexões com o parâmetro (visão) do professor fizeram uma diferença na mudança de paradigmas de muitos licenciandos, segundo alguns relatos que foram mencionados em outros momentos desta dissertação.

Continuando a institucionalização, na situação-problema (5), os alunos reconheceram, dentre as equações do 2º grau com duas incógnitas, as que representam circunferências. Foi possível formalizar, compreendendo a condição para existir uma equação da circunferência, bem como as identificações do centro e do raio na situação-problema proposta.

Na situação-problema (6), foi verificado que os alunos reconhecem a representação geométrica da equação da circunferência, assim como a identificação do centro e do raio no plano ortogonal. Nesta sessão, que se refere à equação da circunferência, foram perceptíveis algumas dificuldades em desenvolver a questão sem usar tanto os distratores, por parte de alguns alunos. Isso já havia sido previsto na análise *a priori*, levando-nos a reflexões nos quesitos ensino e aprendizagem. Dentre as indagações, houve uma pertinente que era devido a não ser tão frequente de ser trabalhado se compararmos a equação da reta, que é vista em forma de função linear desde o ensino fundamental; sem falar que, para resolver a questão com todo detalhamento necessário sem nos ater aos distratores, quase todos sentiram dificuldade na validação dessas duas últimas situações, principalmente na situação-problema (5).

Muitos relataram o papel primordial do uso do GeoGebra para amenizar a parte abstrata e deixar a questão visualmente mais concreta e resolutiva com maior significado na realização

da transposição didática, possibilitando a modelagem matemática e trazendo mais exatidão na compreensão para o contexto em que foi realizada.

Por fim, os dados coletados com as discussões e observações nesta pesquisa permitiram compreender que os objetivos desta investigação foram alcançados, resultando na validação interna desta pesquisa. Essa validação inicia-se com a análise, feita nas análises prévias da ED, do campo epistêmico-matemático da Geometria Analítica. Isto permitiu alcançar o terceiro objetivo específico deste trabalho. Dando continuidade, a validação foi concretizada na situação didática, mostrando-se com a institucionalização da TSD. Assim, foi possível alcançar os dois primeiros objetivos específicos, ressaltando a relevância dessa validação interna para a realização deste ensaio acadêmico.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento desta dissertação possibilitou uma análise da aplicação da Teoria das Situações Didáticas (TSD) como percurso de otimização do ensino e aprendizagem, tendo as etapas da Engenharia Didática (ED) em complementaridade à Engenharia Didática de Formação (EDF) como itinerário de investigação. Assim, foi desenvolvida uma formação metodológica de maneira remota para um grupo de licenciandos da UVA, incluindo a aplicação de seis situações-problema de Geometria Analítica direcionadas para o SPAECE, com o auxílio do *software* GeoGebra. Nesta perspectiva, essa investigação, com o contexto acima, contribui em vários aspectos para a formação inicial de professores de Matemática.

De um modo geral, a aceitação da TSD foi quase que imediata pelos licenciandos como proposta de ensino, pois proporcionou uma trajetória mais protagonista e autônoma para a aprendizagem deles. Ela impulsionou a um processo de resoluções das situações-problema de maneira mais significativa ao passar pelas quatro etapas dessa teoria de ensino. Isso foi notório nas contribuições relatadas pelos participantes da pesquisa, como: “[...] o aluno percebe que não é mais um mero receptor de conteúdos e passa a entender que é, sim, o responsável pelo resultado final de seu conhecimento[...]”. Uma outra contribuição bastante enfatizada pelos licenciandos foi o uso do *software* GeoGebra para alavancar de forma sublime o grau de compreensão dos conteúdos matemáticos em geral. Vejamos no trecho de um participante: “[...] o GeoGebra, contribuiu bastante para que eu pudesse manipular melhor os experimentos que a professora nos propôs, eu pude perceber melhor a dinâmica entre a teoria e a prática”. Neste viés, outros resultados e contribuições estão nas análises realizadas nesta pesquisa.

Constata-se que o objetivo geral foi efetivado com várias contribuições da TSD no processo formativo das situações didáticas em articulação com a EDF, mediante situações-problema de Geometria Analítica direcionada ao SPAECE com o auxílio do *software* GeoGebra na formação inicial dos professores de Matemática. Essas contribuições foram evidenciadas na evolução epistemológica na construção das resoluções das situações, permitindo que o aluno aja de modo mais consciente, reflexivo, autônomo e protagonista durante as sequências didáticas propostas em sala de aula.

Deste modo, sublinhamos a importância do delineamento dos objetivos específicos que foram alcançados com êxito, contribuindo para a realização, como um todo, desta pesquisa de mestrado. No primeiro objetivo específico, observamos as situações didáticas realizadas no momento formativo com um grupo de licenciandos em Matemática da Universidade Estadual

Vale do Acaraú, via *Google Meet*, em decorrência da pandemia do covid-19, quando foram identificadas as interações professor, aluno e saber.

No segundo objetivo específico, verificamos que a ED e a EDF integradas à TSD foram eficazes para estruturar a construção, aplicação e análise das situações didáticas realizadas nesse processo formativo no curso de extensão: Grupo de Pesquisa - Tecnologias Digitais, com a participação de 12 estudantes que foram assíduos nos cinco encontros dessa formação inicial. Isso foi constatado pela participação em sala de aula dos alunos ao constituírem as etapas das sequências didáticas, incluindo os seus relatos com os questionamentos realizados durante a realização das situações didáticas e, após, com a avaliação final, realização com os alunos no último encontro dessa formação metodológica. Então, reforçaram a conexão entre tais metodologias para aprimorar as aulas dos professores de Matemática.

Por fim, no terceiro objetivo específico, também cumprido, avaliamos as contribuições do *software* GeoGebra na formulação de soluções das questões de Geometria Analítica do SPAECE. Essa avaliação resultou em uma aceitação de 100% da turma nos quesitos que redirecionam esse *software* como uma das ferramentas essenciais nas aulas de Matemática para incrementar, dinamizar e potencializar o ensino e a aprendizagem nas sessões didáticas.

Com efeito, a hipótese foi refutada quando afirmamos que o GeoGebra poderia não contribuir tanto para a resolução das situações-problema voltadas para as questões do SPAECE, por serem aspectos mais triviais, se compararmos com as questões olímpicas, por exemplo. Consoante mencionado anteriormente, entretanto, os alunos ressaltaram, nas reflexões, observações e questionamentos respondidos na avaliação, que o GeoGebra se mostrou uma ferramenta tecnológica que fortaleceu a compreensão dos problemas, diminuindo a abstração da Álgebra na Geometria Analítica, bem como uma melhor compreensão e identificação da representação gráfica desse conteúdo contemplado nas questões do SPAECE. Outras hipóteses foram apresentadas de acordo com o conteúdo em cada situação-problema. Na análise *a priori*, foram confirmadas ao longo das execuções das situações didáticas, na fase de experimentação, sendo validadas na análise *a posteriori* e validação interna da pesquisa.

Assim, a problemática dessa dissertação foi investigada e mostrou-se no seu processo de construção e análises as contribuições da TSD integrada com a EDF, o uso do GeoGebra e questões de Geometria Analítica do SPAECE para a formação inicial de professores de Matemática. Essas contribuições foram se estabelecendo ao longo da aplicação das metodologias, como se fosse uma necessidade existencial e inerente ao processo formativo, impulsionando os licenciandos a terem atitudes reflexivas e autorreflexivas como se fossem professores exercendo sua profissão com precisões e análises durante a aplicação das sessões

didáticas devido a abertura da EDF e não simplesmente sobre a influência da ED, que poderiam agir simplesmente como alunos nas sessões didáticas. Isso nos deixou satisfeita, respondendo a duas perguntas ao mesmo tempo no quesito referente a ser isso que esperávamos da EDF na nossa pesquisa e do papel dos alunos como professores nesta formação metodológica.

De tal modo, a EDF foi essencial para amparar os licenciandos nesta aplicação formativa, pois possibilitou que os eles pensassem como professores, vislumbrando as atitudes mais assertivas num experimento que eles vivenciaram, não só com a visão do aluno, mas também com a óptica do professor em uma mesma situação didática. Este parâmetro, certamente, contribuirá bastante para sua prática docente, como foi relatado pelos participantes nas análises dos dados coletados, contribuindo para possíveis aplicações de sequências didáticas, seja nos moldes da TSD como nos moldes de outras metodologias de ensino. Com efeito, essas situações-problema eram exploradas com a ideia de ir além do que a questão pedia, ampliando os assuntos matemáticos propostos. Sempre que possível, os instigávamos com questionamentos que os impulsionavam, propiciando essa visão do aluno e do professor de forma mais profunda para extrair reflexões que os direcionavam a seguirem as quatro fases da ED e da TSD como uma possível proposta de ensino em uma futura aplicação em sala de aula pelos mesmos licenciandos em formação inicial.

Mesmo com essa visão mais abrangente da ED com a complementaridade da EDF, seguimos uma sequência didática nos moldes da TSD, com o objetivo maior de identificar as relações entre professor, aluno e saber, tendo as situações didáticas efetivadas. Assim, realizamos a validação interna para verificar se, de fato, existiu uma situação didática ou não. Neste sentido, a abordagem foi qualitativa e o tipo foi esquema experimental com um grupo do curso de licenciatura em Matemática da UVA, o qual foi aplicado de forma remota.

Essa aplicação da pesquisa, remotamente, propiciou algumas limitações, como o olhar que o professor tem em aulas presenciais para perceber os comportamentos dos alunos de forma mais profunda, possibilitando julgar tais comportamentos intrínsecos a cada estudante, funcionando como um termômetro para agir da melhor maneira possível diante de tais comportamentos observados; tal fato não foi fácil perceber na aplicação remota, via *Google Meet*. As duas primeiras fases (ação e formulação) da TSD ficaram mais difíceis de serem identificadas em algumas situações-problema por falta desse olhar mais minucioso do professor. Alguns alunos ficaram intimidados em compartilhar os obstáculos epistemológicos enfrentados nas situações-problema, principalmente nos primeiros encontros, acreditamos que em decorrência do receio de se manifestarem (exporem) nessa plataforma usada.

Dada a importância do tema, torna-se necessário o desenvolvimento de projetos que visem à formação inicial dos professores nas perspectivas da nova BNCC que pretende unificar as matrizes do ENEM às outras avaliações, como SAEB, por exemplo, vinculados a metodologias que fortaleçam e otimizem o ensino e a aprendizagem, como foi proposto nesta dissertação. Para deixar esta pesquisa mais completa, para extrair dados mais concretos de uma formação inicial de professores, sugerimos que haja, após a formação metodológica realizada, como esta que fizemos nesta pesquisa, a replicação em sala de aula sob a supervisão desta pesquisadora, a fim de analisar as situações didáticas com um olhar de fora, já que os professores (mediadores) serão os licenciandos que participaram do momento formativo anterior. Assim, uma dica para as próximas pesquisas repousa na realização de duas aplicações (a primeira, pelo pesquisador e a segunda pelos alunos em formação), pois a pesquisa ficará mais completa com os reais *feedbacks* da devolução do momento formativo proposto na formação inicial de professores.

À guisa de remate, cumpre-nos expressar o fato de que esta pesquisa trouxe contribuições aos alunos, professores em formação inicial, a ampliação de seu repertório de conhecimentos relacionado à Geometria Analítica, o SPAECE e o GeoGebra nas sessões didáticas. Bem assim, registrou-se a sua relação epistemológica acoplada às situações didáticas sobre um direcionamento de metodologias que alicerçam os professores em formação e de teoria de ensino, como a TSD, o que potencializa o protagonismo e a autonomia dos estudantes, otimizando o ensino e a aprendizagem nas sequências de ensino realizadas. Neste trabalho, diga-se - ora rematado com sucesso - mostrou-se que a integração da ED e EDF em conexão com a TSD contribuiu para ampliar os conhecimentos dos alunos acerca da Geometria Analítica, com o auxílio do GeoGebra como meio de otimizar as soluções de questões, impulsionando-os ao aprendizado mais significativo.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. E. B. de. **O aprender e a Informática**: a arte do possível na formação do professor (v.1). Brasília: MEC, 1999.

ALMOULOUD, S. A; SILVA, M. J. F. Engenharia Didática: **Evolução e Diversidade**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 26-27, 2012.

ALMOULOUD, S. A. A Geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação**, São Paulo, n. 27, p. 94-108, 2004.

_____. **A. Fundamentos da didática da Matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. D. Q. E. S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. **REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 3, p. 62-77, 2008.

ALVES, F. R. V. **Didática da Matemática**. Fortaleza: UAB/IFCE, 2011.

_____. Uma discussão do uso do GeoGebra no contexto do Cálculo a Várias Variáveis. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 2, p. 5-19, 2012.

_____. Didática de Matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. **Interfaces da Educação**, Paranaíba, v. 7, n. 21, p. 131-150, 2016a.

_____. Engenharia Didática para a generalização da sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 18, n. 1, p. 61-93, 2016b.

_____. Engenharia didática: implicações para a pesquisa no âmbito do ensino em análise complexa - ac. **Ciência e Natura**, v. 38, n. 2, p. 694-715, 2016c.

_____. Engenharia Didática de Formação (EDF): sobre o ensino dos Números (Generalizados) de Catalan (NGC). **Educação Matemática Pesquisa**, v. 20, n. 2, p. 47-83. 2018.

ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Engenharia Didática de Formação: repercussões para a formação do professor de Matemática no Brasil. **Educação Matemática em Revista**, Rio Grande do Sul, v. 2. 18, p. 121-137, 2017.

_____. Engenharia Didática de 2ª geração com o tema: $h(x)$ – polinômios de Jacobsthal. **RBCET-Ensino de Ciências e Tecnologia em Revista**, Curitiba. v. 8, p. 28-55, 2018.

ARTIGUE, M. **Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques – divers travaux de mathématiques et des didactiques des mathématiques**. 1984, 264f. Tese (Thèse d'état). Paris: Université Paris VII, 1984.

_____. Ingénierie Didactique. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988.

_____. **Ingenieria Didáctica**. Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gomez, P. In: Ingeniería didáctica en Educación Matemática, 1995.

_____. Engenharia Didática. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, Cap. 4, p. 193-217, 1996.

_____. Didactical design in Mathematics Education. In: WINSLOW, C. (ed.) **Nordic Research in Mathematics Education**. NORMA08, p. 7-17, 2008.

BESSOT, A. Importance de la notion de situation en Didactique des Mathématiques. **Perspectivas da Educação Matemática** – UFMS, v. 7, p. 406-423, 2014.

_____. Les décisions didactiques de l'enseignant: un modèle pour tenter de les comprendre. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 5, p. 1-20, 2019.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BOLETIM DO PROFESSOR. Matemática. **SPAECE 2016 (Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará)**, 2016. Disponível em < <http://www.spaece.caedufjf.net/wp-content/uploads/2017/07/CE-SPAECE-2016-RP-MT-9EFEM-WEB-1.pdf>>. Acesso em 20 jun. 2019.

BOLETIM DO PROFESSOR. Matemática. **SPAECE 2017 (Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará)**, 2017. Disponível em < <http://www.spaece.caedufjf.net/wp-content/uploads/2018/08/CE-SPAECE-2017-RP-MT-EM-WEB.pdf>>. Acesso em 15 ago. 2020.

BOLETIM PEDAGÓGICO. Matemática. Ensino médio. **SPAECE 2015 (Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará)**, 2015. Disponível em < http://www.spaece.caedufjf.net/wp-content/uploads/2016/09/CE_SPAECE_2015_RP_MT_EM_WEB.pdf>. Acesso em 20 jun. 2019.

BRASIL, Presidência da República. Decreto n. 6.096, de 24 de abril de 2007. Institui o Programa de Apoio a Planos de Reestruturação e Expansão das Universidades Federais – REUNI. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 25 abr. 2007.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. In: VANHAMME, J.; VANHAMME, W. (Eds.), La problématique et l'enseignement de la mathématiques. **Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques**. Louvain-la-Neuve, p. 101-117, 1976.

_____. Fondements et méthodes de la Didactique des Mathématiques. **Recherches em Didactique ds Mathématiques**, v. 7, n. 2. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1986.

_____. Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. In: BRUN, J. (org.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, p. 35-113, 1996.

_____. **Théorie des Situations Didactiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1998.

_____. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

BRUM, W. P.; SCHUHMACHER, E. A Engenharia Didática como campo metodológico para o planeamento de aula de Matemática: análise de uma 229 experiência didática para o estudo de Geometria esférica. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 6, n. 2, p. 60-84, 2013.

BRUM, W. P. Contribuições da Engenharia Didática no ensino de Matemática: análise e reflexão de uma experiência didática para o estudo de Geometria esférica. **IV Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia**. Ponta Grossa-PR, 2014.

CAVALCANTI, V. S.; LINS, A. F. Aprendizagem dos conceitos sobre circunferência na perspectiva da Teoria das Situações Didáticas. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 18, n. 1, p. 107-126, 2013.

CEARÁ, S. da E. **Boletim Pedagógico da Escola. SPAECE – 2009** / Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd. - Juiz de Fora, v. 3, 2009.

CLIVAZ, S. Teaching multidigit multiplication: combining multiple frameworks to analyse a class episode. *Educational Studies in Mathematics*, v. 96, p. 305-325, 2017.

CHACÓN, A. M. A. **La gestion de la mémoire didactique par le professeur dans l'enseignement secondaire des mathématiques**: Etude du micro-cadre institutionnel en France et au Costa Rica. 2008. 360 f. Tese (Doutorado em Didactique des Disciplines Scientifiques et Technologiques Spécialité: Didactique Des Mathématiques) - L'université De Toulouse Délivré par l'Université Toulouse III - Paul Sabatier, Toulouse, 2008.

CHEVALLARD, Y. **Sur L'ingénierie Didactiques**. IREM: d'Aix Marseille. Paris, p. 1- 51. 1982.

_____. **La transposition didactique**, Grenoble, La pensée Sauvage, 1991.

CHEVALLARD, Y.; JOSHUA, M-A. **La transposition didactique**. Grenoble: La Pensée Sauvage- Éditions, 1991.

D'AMORE, B. **Elementos de Didática da Matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

DOUADY, R. **L'ingénierie didactique**: un moyen pour l'enseignant d'organiser les rapports entre l'enseignement et l'apprentissage. Cahier de DIDIREM, Paris: IREM de Paris VII, 1993.

_____. **La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento**. ARTIGUE, M.; DOUADY, R.; MORENO, L.; GÓMEZ, P. (eds). Ingeniería didáctica en educación, p. 62-96, 1995.

DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN M. J. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. In: **Educational Studies in Mathematics**. Netherlands, v. 20, n. 4, p. 387-424, 1989.

FERNANDES, C. *et al.* Contribuições da resolução de problemas para a formação de professores de Matemática através da engenharia didática. **Research, Society and Development**, v. 8, n. 10, p. 1-16, 2019.

FERNANDES, C.; ALVES, F. R. V.; SOUZA, M. J. A. Construções das Situações Didáticas e sua conexão a Engenharia Didática com a utilização do *software* GeoGebra no SPAECE. **ReviSeM**, v. 5, n. 1, p. 310-335, 2020.

FILHO, J. V. M. **A aprendizagem da circunferência na perspectiva da Geometria Analítica mediada pelo software educacional GeoGebra**. 2014. 71 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE, 2014.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuições para um Repensar...a Educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições**, v. 4, p. 78 -91, 1993.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F.; CRISTÓVÃO, E. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações Matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: Seminário Luso-Brasileiro de Investigações Matemáticas e na Formação de Professores 2005, Lisboa. **Anais...** Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2005. Disponível em: < <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/sd/textos/Fiorentini-Fernandes-Cristovao2006.doc>. Acesso em: 12 jan. 2021.

GERMANO, J. G. C. **Uma proposta de abordagem dos números complexos com o uso do GeoGebra**. 2016. 132 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE, 2016.

CGI. **Pesquisa sobre o uso das tecnologias de informação e comunicação no Brasil: TIC Educação 2011**. Coordenação executiva e editorial. Alexandre F. Barbosa; tradução/translation Karen Brito Sexton (org.). São Paulo: Comitê Gestor da Internet no Brasil, 2011. Acesso em: 26 fev. 2014.

GLADCHEFF, A. P.; ZUFFI E, M.; SILVA, D. M. Um Instrumento para Avaliação da Qualidade de *Softwares* Educacionais de Matemática para o Ensino Fundamental, **Anais do XXI Congresso da Sociedade Brasileira de Computação**, WIE'2001, Anais da XXI SBC [CD-ROM], Fortaleza-CE, 2001.

GOMES, H. J. P.; OLIVEIRA, O. B. Obstáculos Epistemológicos no Ensino de Ciências: um estudo sobre suas influências nas concepções de átomo. **Ciências & Cognição**. v. 12, n. 14, p. 96-109, 2007.

GONDINO, J. D. **Didáctica de las Matemáticas para maestros**. Granada, Espanha: Editora Universitária, 2004.

GRAVINA, M. A.; BASSO, M. V. de A. Mídias digitais na Educação Matemática. In: GRAVINA, M. A. *et al.* (Org). **Matemática, Mídias Digitais e Didática – tripé para**

formação de professores de Matemática. Porto Alegre: UFRGS, 2010. Disponível em: http://www.ufrgs.br/sead/servicos-ead/publicacoes-1/pdf/Matematica_Midias_Digitais.pdf. Acesso em: nov. 2019.

HIPPOLYTO, L. Q. **Avaliação dos resultados do SPAECE da 3ª série do Ensino Médio, em Matemática, no Ceará, e sua repercussão na prática pedagógica dos professores:** um estudo descritivo dos anos 2008, 2009 e 2010. 3013. 157 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Ceará – UFC, Fortaleza, 2013.

LABORDE, C. Affronter la complexité des situations didactiques d'apprentissage des mathématiques en classe: défis et tentatives. **Didaskalia**, v. 10, n. 1, p. 97-112, 1997.

LIMA, E. L. **Geometria Analítica e Álgebra linear.** 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

LIMA, E. L. **Geometria Analítica e Álgebra linear.** 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

MARGOLINAS, C. Dévolution et institutionnalisation: deux aspects antagonistes du rôle du maître. Comiti, C.; Bessot, M. P. **Didactiques des disciplines scientifiques et formation des enseignants**, p. 342-347, 1995.

_____. **Connaissance et savoir des distinctions frontalières? Sociologie et didactiques: vers une transgression des frontières**, Lausanne, Suisse, p. 1-39, 2012.

MACHADO, N. **Sobre a ideia de competência.** In: MACHADO, Nilson et al. A competências para ensinar no século XXI. A formação dos professores e o desafio da avaliação. Porto Alegre: Artmed, 2002.

MARGOLINAS, C. *et al.* (Eds.) **En amont et en aval des ingénieries didactiques:** XVe école d'été de didactique des mathématiques, Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme) – du 16 au 23 août 2009. Grenoble: La Pensée Sauvage Editions, 2009.

MARGOLINAS, C.; DRIJVERS, P. Didactical engineering in France; an insider's and an outsider's view on its foundations, its practice and its impact. **ZDM Mathematics Education**, v. 47, p. 893-903, 2015.

MAZULO, A. P. R., *et al.* **Construindo a Matemática – Ensino Médio.** Volumes I, II, III. Fortaleza. SEDUC. 2004.

MENEZES, D. B. **O Ensino do Cálculo Diferencial e Integral na perspectiva da Sequência Fedathi:** caracterização do comportamento de um bom professor. 2018. 128 f. Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação, Fortaleza, 2018.

MOURA, C. da S.; SILVA, F. F. da; RIBEIRO, R. A. **Uma proposta de ensino e aprendizagem de produtos notáveis com auxílio da Informática.** 2017. 74f. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2017.

MOREIRA, R. S.; ALVES, F. R. V. Situações Didáticas Olímpicas (SDOs): ensino de Olimpíadas de Matemática com arrimo no *software* GeoGebra como recurso na visualização. **Alexandria**, Florianópolis, v. 9, n. 2, 2018.

NACARATO, A. M.; MENGALI, B. L. da S.; PASSOS, C. L. B. **A Matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: tecendo fios do ensinar e do aprender.** Belo Horizonte: Autêntica editora, 2009. NUNES, T. *et al.* **Educação Matemática 1: Números e operações numéricas.** 2. ed. São Paulo: Cortez, 2009.

NIQUINI, D. P. **A transposição Didática e o Contrato Didático: Para o professor, metodologias de ensino e para o aluno a construção do conhecimento.** 1. ed. Brasília: Editora Petry, 1999.

OLIVEIRA, F. D. M. **O software GeoGebra como ferramenta para o ensino da Geometria Analítica.** 2014. 62 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal Rural do Semiárido - UFRSA, Mossoró, 2014.

OLIVEIRA, R. R. **Engenharia didática sobre o modelo de complexificação da sequência generalizada de fibonacci: relações recorrentes n-dimensionais e representações polinomiais e matriciais.** 2018. 222f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Fortaleza, CE, 2018.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa.** 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PASTRÉ, P.; MAYEN, P.; VERGNAUD, G. La didactique professionnelle. **Revue Française de Pédagogie**, v. 154, p. 5-198, 2006.

PERRIN-GLORIAN, M. J. L'ingénierie didactique a l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement des ressources et formação des enseignants. *In Margolinas et al.(org.): En amont et en aval des ingénieries didactiques, XV^a École d'Été de Didactique des Mathématiques* – Clermont-Ferrand (PUY-de-Dôme). Recherches em Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage, v. 1, p. 57-78, 2009.

_____. L'ingénierie didactique a l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. *In: C. Margolinas, et al. (Eds.). En amont et en aval des ingénieries didactiques*, p. 57-78. Grenoble: La pensée sauvage, 2011.

PERRIN-GLORIAN, M.; BELLEMAIN, P. M. B. L'ingenierie didactique entre recherche et ressource pour l'enseignement et la formation des maîtres. **Caminhos da Educação Matemática em Revista/Online**, v. 9, p. 45-82, 2019.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.** R. Janeiro: Interciência, 1995.

POMMER, W. M. **A Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares.** São Paulo, 2013.

REIS, H. G. P. **Compreensão dos conceitos perímetro da circunferência e área do círculo com o auxílio do GeoGebra.** 2012. 176 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, PB, 2012.

RICHIT, A. **Formação de Professores de Matemática da Educação Superior e as Tecnologias Digitais: aspectos do conhecimento revelados no contexto de uma comunidade de prática online**. 2015. 596 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho. Rio Claro, SP, 2015.

SANTOS, I. N. **Explorando o conceito de Geometria Analítica Plana utilizando Tecnologia da Informação e Comunicação dos pontos uma parte do Ensino Médio para o Ensino Superior construída na formação inicial de Professores de Matemática**. 2011. 175 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). – Instituto de Ensino de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

SANTOS, D. B. **Ensino de Matemática crítico e reflexivo: a Teoria das Situações Didáticas como estratégia para a aprendizagem das operações básicas da aritmética na rede municipal de ensino**. 2015. 122 f. Dissertação (Mestrado Profissional Gestão e Tecnologia Aplicada à Educação - Universidade Do Estado Da Bahia, Salvador, BA, 2015.

SANTOS, D. B.; MAGALHÃES, A. R. Teoria das situações didáticas: reflexões sobre práxis docente e aprendizagem Matemática. **Revista Metáfora Educacional**. Feira de Santana – Bahia (Brasil), n. 21 p. 205-243, 2016.

SANTOS, A. P. R. A.; ALVES, F. R. A teoria das situações didáticas no ensino das Olimpíadas de Matemática: Uma aplicação do Teorema de Pitot. **Indagatio Didactica**, v. 9, n. 4, p. 279-296, 2017.

SILVA, A. D. P. R. da. **Ensino e aprendizagem de área como grandeza geométrica: um estudo por meio dos ambientes papel e lápis, materiais manipulativos e no Apprenti Géomètre 2 no 6º ano do ensino fundamental**. 2016. 315 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, 2016.

SILVA, K. S. P. **A construção de uma sequência didática utilizando o GeoGebra, a teoria das situações didáticas e modelagem Matemática para o ensino das funções logarítmicas**. 2016. 208 f. Dissertação (Mestrado em Gestão e Tecnologias Aplicadas à Educação - Universidade do Estado da Bahia, Salvador, BA, 2016.

SOUZA, M. J. A. **Aplicações da sequência Fedathi no ensino e aprendizagem da Geometria mediado por tecnologias digitais**. 2010. 230 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE, 2010.

SOUZA, A. **Geometria: A Apreensão do Conhecimento Matemático**. Fortaleza. SEDUC. 2010.

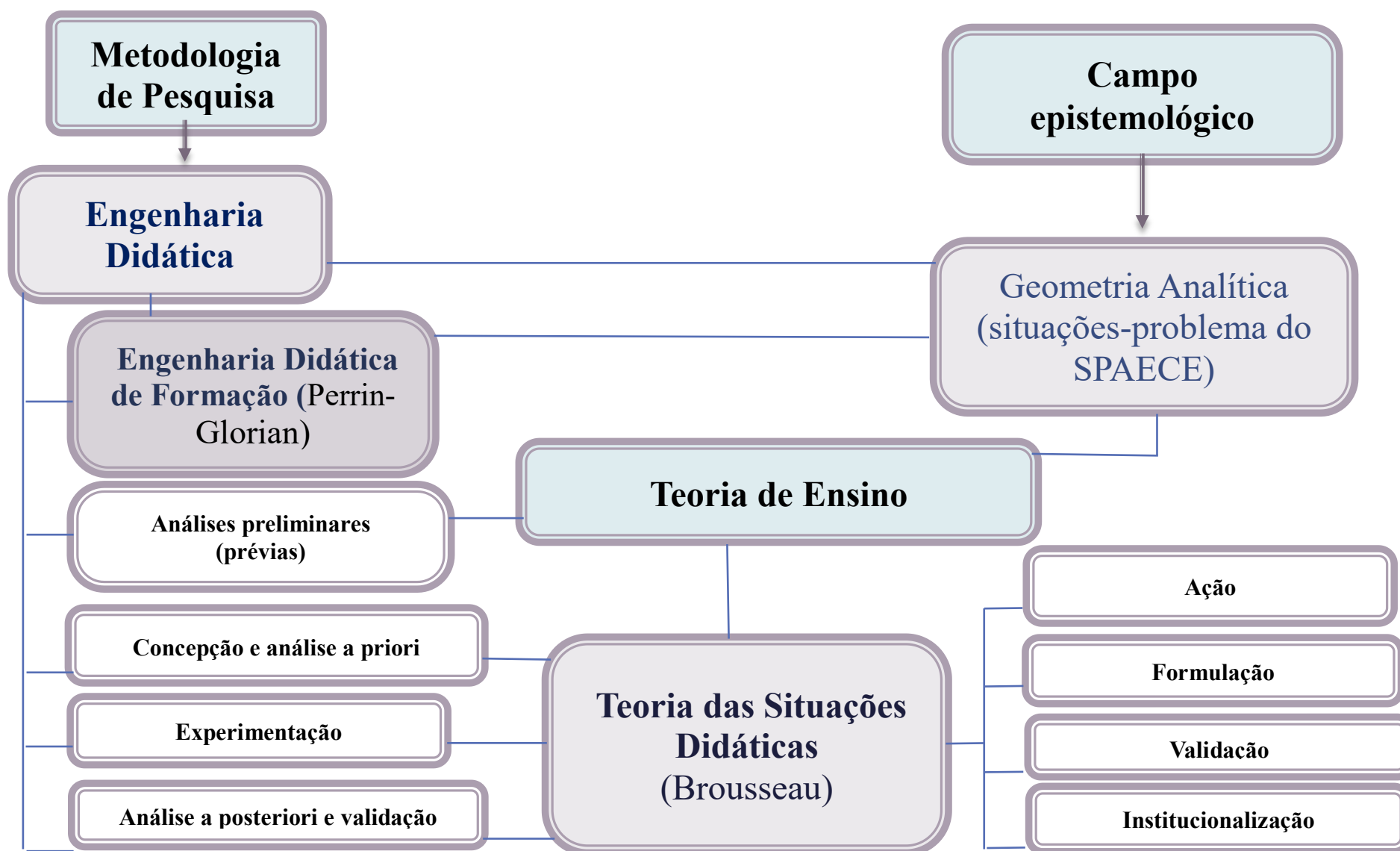
TEIXEIRA, P. J. M.; PASSOS, C. C. M. Um pouco da teoria das situações didáticas (TSD) de Guy Brousseau. **Zetetiké**, Campinas, v. 21, n. 39, p. 155-168, 2013.

TEMPIER, F. **La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource**. (Thèse de doctorat). Paris: Université Dennis Diderot. Paris v. 7, p. 1-427, 2013.

_____. New perspectives for didactical engineering: an example for the development of a resource for teaching decimal number system. **Journal of Mathematical Teacher Education**, v. 19, n. 1, 261-276. 2016.

VALENTE, J.A. Diferentes Usos do Computador na Educação. Em J.A. Valente (Org.), **Computadores e Conhecimento: repensando a educação**, Campinas, p. 1-23. 1993.

APÊNDICE A – ESTRUTURA DA PESQUISA BASEADA NA ENGENHARIA DIDÁTICA, ENGENHARIA DIDÁTICA DE FORMAÇÃO EM ASSOCIAÇÃO COM A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS



APÊNDICE B – SITUAÇÕES-PROBLEMA



INSTITUTO FEDERAL
CEARÁ
Campus Fortaleza



UNIVERSIDADE ESTADUAL
VALE DO ACARAÚ

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA - PGECM

QUESTIONÁRIO: SITUAÇÕES-PROBLEMA

GEOMETRIA ANALÍTICA – QUESTÕES DO SPAECE - GEOGEBRA

Aplicação da pesquisa de forma remota- Formação metodológica – curso de extensão – UVA.

Pesquisadora: Cícera Fernandes.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.

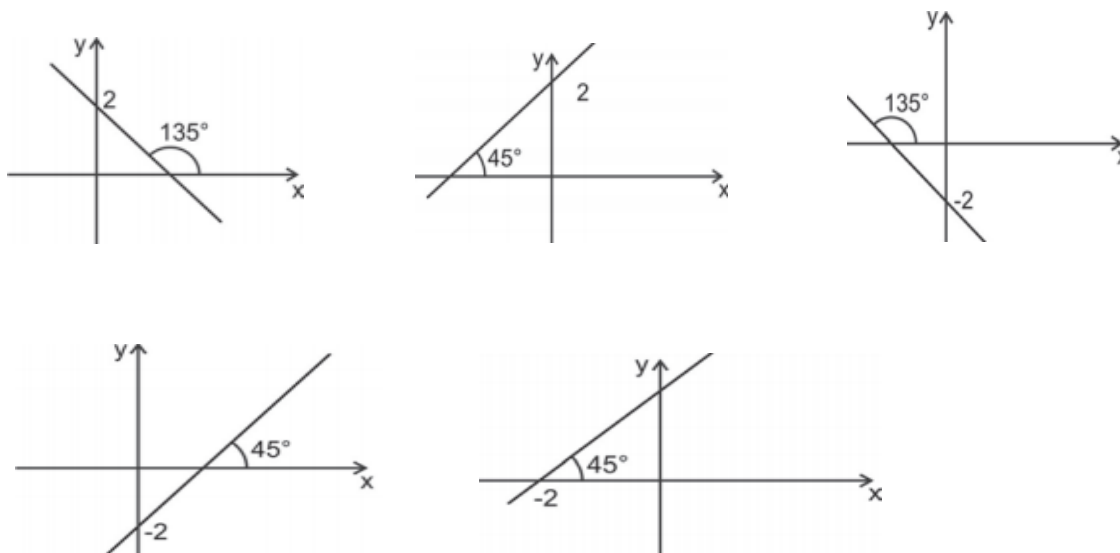
Coorientadora: Profa. Dra. Maria José Araújo Souza.

1. (M120283H6) A equação da reta que passa pelos pontos (2, 3) e (− 1, − 6) é

- A) $y = -x + 6$
- B) $y = x + 3$
- C) $y = 2x + 3$
- D) $y = 3x - 3$
- E) $y = 5x + 5$

BOLETIM DO PROFESSOR - Matemática Ensino Médio (2017, p.56)

2. (M120228A8) Considere a reta de equação $y = x - 2$. O gráfico que representa essa reta é



Banco de item CAEd (2010, p. 8)

3. (M120283H6) A equação da reta que passa pelos pontos $(2, 3)$ e $(-1, -6)$ é

A) $y = -x + 6$

B) $y = x + 3$

C) $y = 2x + 3$

D) $y = 3x - 3$

E) $y = 5x + 5$

BOLETIM DO PROFESSOR - Matemática Ensino Médio (2017, p.53).

4. (M120008CE) Qual é a área de um triângulo cujos vértices são $A(2, -3)$, $B(-1, 2)$ e $C(4, 5)$?

A) 4

B) 12

C) 14

D) 17

E) 21

Banco de item CAEd (2010, p. 61)

5. (M120364H6) Considere as equações abaixo.

I. $x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$

II. $X^2 - y^2 - 16 = 0$

III. $2x^2 + 3y^2 - 24 = 0$

IV. $X^2 + y - 9 = 0$

V. $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$

Quais dessas equações representam circunferências?

A) I, II e V

B) I e V

C) II e III

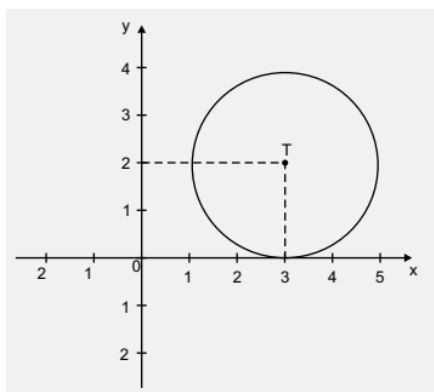
D) II, III e IV

E) II e IV.

Boletim do professor (2018, p. 53).

6. (M120682ES) A circunferência de centro T representada no plano cartesiano abaixo é tangente ao eixo x.

Qual é a equação dessa circunferência?



Boletim pedagógico do SPAECE (2015, p. 53)

Aluno (participante).

Data: ____/____/____.

APÊNDICE C – PRÉVIA DOS PARTICIPANTES DA PESQUISA

18/04/2021

Prévia dos participantes da pesquisa

Prévia dos participantes da pesquisa

Prévia dos participantes da pesquisa

1. Qual o seu e-mail?

2. Você já lecionou matemática?

Marcar apenas uma oval.

☐ sim

☐ não

3. Qual o seu tempo de experiência em sala de aula?

Marcar apenas uma oval.

☐ menos de 5 meses

☐ mais de 5 meses

☐ 1 ano

☐ mais de 1 ano

☐ nenhuma experiência

4. Você gostou de atuar como professor(a)?

Marcar apenas uma oval.

☐ sim

☐ não

☐ nunca atuei com professor(a)

18/04/2021

Prévia dos participantes da pesquisa

5. Quais as principais dificuldades da prática docente para você?

6. Gosta de lecionar Matemática?

Marcar apenas uma oval.

- ☐ muito
☐ pouco
☐ não gosto
☐ não sei definir

7. Você já trabalhou com o SPAECE em sala de aula ?

Marcar apenas uma oval.

- ☐ sim
☐ não

8. Você já trabalhou com Geometria Analítica, SPAECE e geogebra em sala de aula?

Marcar apenas uma oval.

- ☐ sim
☐ não

18/04/2021

Prévia dos participantes da pesquisa

9. Você tem uma noção básica de como utilizar o software Geogebra?

Marcar apenas uma oval.

- ☐ sim
☐ Talvez
☐ nunca utilizei o geogebra

10. Onde você utilizou o software geogebra?

Marcar apenas uma oval.

- ☐ no ensino médio
☐ nas disciplinas da faculdade
☐ nos cursos de extensão universitária
☐ em casa por conta própria
☐ em experiências em sala de aula

11. Você já estudou, em algum momento, a Teoria das Situações Didática de Brousseau?

Marcar apenas uma oval.

- ☐ Sim
☐ Não

18/04/2021

Prévia dos participantes da pesquisa

12. Onde estudou a Teoria das Situações Didática de Brousseau?

Marcar apenas uma oval.

- ☐ em palestras extra curricular
- ☐ nas disciplinas do curso de licenciatura em matemática
- ☐ nos cursos de extensão universitária
- ☐ outros

13. Apresente, aqui, as sugestões ou dúvidas acerca deste processo formativo.
Agradecemos, desde já, sua participação!!

Este conteúdo não foi criado nem aprovado pelo Google.

Google Formulários

APÊNDICE D – AVALIAÇÃO FINAL DO USO DA ENGENHARIA DIDÁTICA



AVALIAÇÃO

1. O que você achou da Teoria das Situações Didáticas para a condução das aulas?

☐ Excelente

☐ Ótima

☐ Bom

☐ Regular

☐ Péssima

2. O modelo apresentado impulsionou uma trajetória mais protagonista e autônoma para sua aprendizagem? Justifique.

3. A vivência com SPAECE, Geometria Analítica e GeoGebra contribuíram para sua formação inicial como professor(a) de Matemática?

☐ Sim

☐ Não

4. Quais as contribuições da Teoria das Situações Didáticas nesta formação inicial dos professores de Matemática através de questões do SPAECE envolvendo a Geometria Analítica?

5. Teve contribuições do *software* GeoGebra nas situações didáticas aplicadas com questões de Geometria Analítica do SPAECE?

☐ Sim

☐ Não

6. A TSD (“metodologia de ensino”) abordada diferencia-se de outros estilos metodológicos para a condução de aula de Matemática que você vem estudando?

☐ Sim

☐ Não

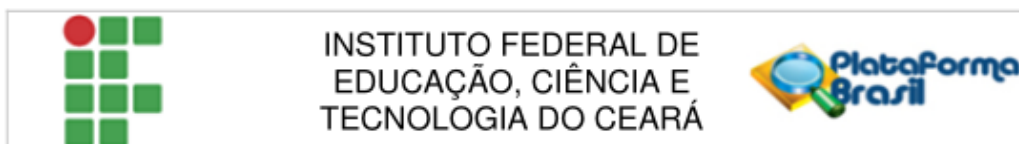
7. A transposição didática ficou melhor (facilitou a compreensão) com a utilização do *software* GeoGebra?

☐ Sim

☐ Não

8. O que você poderia levar desta experiência metodológica para sua prática docente? Justifique.

ANEXO A – PARECER DO COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA



PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DA EMENDA

Título da Pesquisa: Esta pesquisa tem como objetivo investigar elementos da Engenharia Didática de Formação e da Teoria das Situações Didáticas com aplicação das sessões didáticas na fase de experimentação que contribuam para a formação inicial dos professores de matemática como propõe a Engenharia Didática. Neste sentido, ressaltamos a importância e as contribuições da complementação de um quadro teórico contemplando a ED e EDF, por se tratar de pesquisa voltada para a formação inicial de professores, para uma aplicação da Teoria das Situações Didáticas com situações-problema de Geometria Analítica com questões adaptadas do SPAECE (Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará), com o auxílio do software GeoGebra, contribuindo para uma compreensão mais abrangente dos assuntos matemáticos, sendo uma ferramenta valiosa para fortalecer a aplicação das sessões didáticas com mais eficácia no ensino e aprendizagem. O ambiente de aplicação da pesquisa é a Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA), com os alunos da graduação do curso de licenciatura em Matemática.

Pesquisador: CICERA FERNANDES

Área Temática:

Versão: 5

CAAE: 29502120.2.0000.5589

Instituição Proponente: INSTITUTO FEDERAL DE EDUCACAO, CIENCIA E TECNOLOGIA DO CEARA

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 4.210.976

Apresentação do Projeto:

A submissão se trata de uma emenda ao projeto de pesquisa, na qual a pesquisadora ajusta a forma de realização da pesquisa.

Resumo:

O ensino de Matemática sempre nos coloca em reflexão acerca dos desafios enfrentados em sala de aula. Não é fácil para o professor se antecipar e se precaver dos problemas que possa impedir os alunos de atingir o conhecimento desejável nas situações didáticas apresentadas. Para subsidiar o professor, esta pesquisa tem como objetivo investigar elementos da Engenharia Didática de

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703

Bairro: Jardim América

UF: CE

Município: FORTALEZA

Telefone: (85)3401-2332

CEP: 60.410-426

E-mail: cep@ifce.edu.br



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA DO CEARÁ



Continuação do Parecer: 4.210.976

Formação e da Teoria das Situações Didáticas com aplicação das sessões didáticas na fase de experimentação que contribuam para a formação inicial dos professores de matemática como propõe a Engenharia Didática. O ambiente de aplicação será de forma remota via Google Meet por conta da pandemia com alunos da graduação do curso de licenciatura em Matemática do grupo de extensão da Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA). Com o intuito de identificar elementos da Engenharia Didática de Formação e da Teoria das Situações Didáticas que favoreçam a formação inicial dos professores de matemática com questões de Geometria Analítica sobre a assessoria do software Geogebra. A realização das sessões didáticas segue as quatro fases da Engenharia Didática: as análises preliminares, a análise a priori, a experimentação e a análise a posteriori, sendo complementada pelos elementos da EDF. Assim, a mediação didática durante os processos de ensino e de aprendizagem é estruturada, organizada, direcionada para uma análise dos pormenores, possibilitando prever e controlar as ações dos estudantes nas sessões didáticas no sentido de potencializar a resolução e otimizar os obstáculos epistemológicos para uma melhor compreensão da questão problema. Assim, veremos se a aplicação da TSD com base na EDF subsidiará os professores em formações com recursos essenciais para a tríade (professor, aluno e saber) das relações didáticas como propõem sua teoria.

Metodologia Proposta:

A proposta é aplicar a pesquisa de forma remota via Google Meet com os alunos da graduação do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA). Com o intuito de analisar posteriormente os dados da pesquisa para extrair respostas para as hipóteses levantadas e verificar elementos da Engenharia Didática de Formação e da Teoria das Situações Didáticas que favoreçam a formação inicial dos professores de matemática com questões de Geometria Analítica sobre a assessoria do software Geogebra.(...) como metodologia de investigação, caracteriza-se antes de mais por um esquema experimental baseado em 'realizações didáticas' na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino (ARTIGUE, 1996, p. 196). Segundo Almouloud & Coutinho (2008), A Engenharia Didática é uma vertente francesa que em 1980 se efetivou como uma metodologia de pesquisa, analisando as situações didáticas utilizadas no processo de ensino e aprendizagem em suas quatro fases: análises preliminares, análise a priori, experimentação e análise a posteriori. A Engenharia Didática, vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se, em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Caracteriza-se também como

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703

Bairro: Jardim América

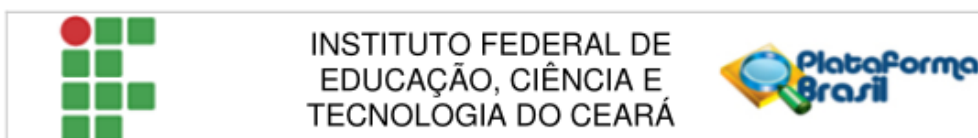
UF: CE

Telefone: (85)3401-2332

Município: FORTALEZA

CEP: 60.410-426

E-mail: cep@ifce.edu.br



Continuação do Parecer: 4.210.976

pesquisa experimental pelo registro em que se situa ao modo de validação que lhe são associados: a comparação entre análise a priori e análise a posteriori. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste (ALMOULOU & COUTINHO, 2008). Para a realização das sessões didáticas, tomamos por base a Teoria das Situações Didáticas, a qual foi desenvolvida por Guy Brousseau em divergência aos trabalhos formalistas da matemática moderna onde se pretende compreender as relações entre aluno, professor e os saberes em sala de aula onde as situações didáticas propostas são analisadas anteriormente. Neste contexto, Brousseau (1996) elabora dois conceitos: as situações didáticas (onde o professor age sobre o meio diretamente) e as situações adidáticas (o professor prepara um meio com um problema para que o aluno trabalhe sem a intervenção do professor). As situações didáticas serão aplicadas na terceira fase da ED (experimentação), porém as situações didáticas em sua totalidade remetem elementos de todas as fases da ED e EDF (POMMER, 2013).

Critérios de inclusão

Não apresentado.

Critérios de exclusão

Não apresentado.

Objetivo da Pesquisa:

Objetivo Primário:

Investigar elementos da Engenharia Didática de Formação e da Teoria das Situações Didáticas com aplicação das sessões didáticas na fase de experimentação que contribuam para a formação inicial dos professores de matemática.

Objetivo Secundário:

Discutir uma Engenharia Didática de Formação com ênfase no ensino de Geometria Analítica; Analisar as questões do SPAECE relativas ao ensino de Geometria Analítica; Descrever as Situações Didáticas do SPAECE com o uso do software Geogebra e aplicá-las com licenciandos em Matemática, com base na proposta da EDF; Identificar elementos da EDF, que aliados à TSD e ao software Geogebra, favoreçam a formação inicial dos professores de matemática.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

Desconfortos e Riscos

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703

Bairro: Jardim América

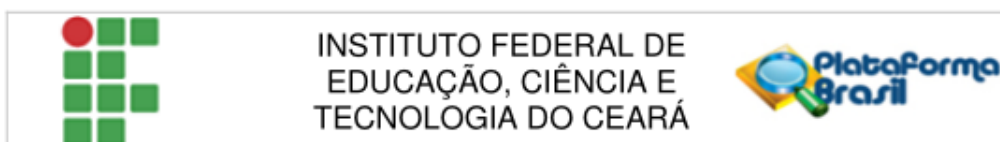
CEP: 60.410-426

UF: CE

Município: FORTALEZA

Telefone: (85)3401-2332

E-mail: cep@ifce.edu.br



Continuação do Parecer: 4.210.976

Caso exista qualquer constrangido com alguns dos procedimentos anteriormente citados, você poderá não optar pela participação da pesquisa sem nenhum prejuízo para sua conduta a qualquer momento. Desse modo, pedimos a sua autorização para a utilização de possíveis fotografias e gravações durante a aplicação da pesquisa, porém ficará tudo no anonimato sem os riscos de identificação de nenhum participante envolvido, pois será protegido os rostos e nomes para que não ocorra nenhuma identificação dos sujeitos envolvidos nessa pesquisa.

Benefícios

Os participantes terão a oportunidade de participar de situações didáticas possibilitando aos discentes da Licenciatura em Matemática resolver as Situações Didáticas do SPAECE com o uso do software Geogebra com base na proposta da Engenharia Didática de Formação. Assim, contribuirão com a formação inicial dos professores.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

Sem comentários sobre a pesquisa.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

Informações básicas. Projeto detalhado. Cronograma. Orçamento. Declaração de infraestrutura. Declaração de garantia. Declaração de compromisso. Folha de rosto.

Recomendações:

Sem recomendações.

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

Sem inadequações e/ou pendências.

Considerações Finais a critério do CEP:

É importante ressaltar que, caso alguma Instituição Coparticipante possua Comitê de Ética em Pesquisa (CEP), o projeto, também, deverá ser avaliado no CEP da Instituição Coparticipante, após a aprovação no CEP da Instituição Proponente, devendo o pesquisador aguardar, também, a aprovação na Instituição Coparticipante antes de iniciar sua pesquisa. Logo, recomenda-se/solicita-se que o pesquisador efetue essa verificação

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_158031	09/07/2020		Aceito

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703
Bairro: Jardim América **CEP:** 60.410-426
UF: CE **Município:** FORTALEZA
Telefone: (85)3401-2332 **E-mail:** cep@ifce.edu.br



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA DO CEARÁ



Continuação do Parecer: 4.210.976

Básicas do Projeto	_E1.pdf	19:32:00		Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	okTC.pdf	08/07/2020 22:35:57	CICERA FERNANDES	Aceito
Cronograma	cn18ok.pdf	19/06/2020 21:36:42	CICERA FERNANDES	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	pg19ok.pdf	19/06/2020 21:19:34	CICERA FERNANDES	Aceito
Outros	Soladentil.pdf	22/04/2020 12:31:17	CICERA FERNANDES	Aceito
Orçamento	Orcament.pdf	21/02/2020 18:30:17	CICERA FERNANDES	Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	7infraestrut.pdf	27/01/2020 17:15:26	CICERA FERNANDES	Aceito
Declaração do Patrocinador	3dcarantia.pdf	27/01/2020 17:13:18	CICERA FERNANDES	Aceito
Declaração de Pesquisadores	2dcompromissopesquisad.pdf	27/01/2020 17:10:46	CICERA FERNANDES	Aceito
Folha de Rosto	1folha.pdf	27/01/2020 16:55:46	CICERA FERNANDES	Aceito

Situação do Parecer:

Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:

Não

FORTALEZA, 13 de Agosto de 2020

Assinado por:
Jefté Ferreira da Silva
(Coordenador(a))

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703

Bairro: Jardim América

CEP: 60.410-426

UF: CE **Município:** FORTALEZA

Telefone: (85)3401-2332

E-mail: cep@ifce.edu.br

ANEXO B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO



INSTITUTO FEDERAL
CEARÁ
Campus Fortaleza

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DO ESTADO DO CEARÁ - IFCE
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA - PGECM

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

“ENGENHARIA DIDÁTICA DE FORMAÇÃO: CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS NA FORMAÇÃO INICIAL DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA”

Pesquisadora: Cícera Fernandes

Orientador: Dr. Francisco Regis Vieira Alves

Coorientadora: Dra. Maria José Araújo Souza

1. Identificação

Você está sendo convidado a participar como voluntário de uma pesquisa de tema: “Engenharia Didática de Formação: um experimento com Situações Didáticas, Geometria Analítica e Geogebra na Universidade Estadual Vale do Acaraú” pesquisado pela aluna Cícera Fernandes. Este documento nominado de termo de consentimento livre e esclarecido, visa assegurar os seus direitos como participante, sendo elaborado em duas vias, uma que deverá ficar com você e a outra com a pesquisadora.

Leia atentamente todo o documento, caso haja dúvidas favor comunicar à pesquisadora para que essas sejam sanadas. Você poderá leva-lo para casa, a fim de ler com mais calma e tranquilidade, consultando os seus familiares quando necessário. Não haverá nenhum tipo de penalidade, caso não concorde em participar ou retirar a sua autorização em qualquer momento.

2. Justificativa e objetivos

Justifica-se esta pesquisa no fato de que a Geometria Analítica é um dos assuntos mais cobrados na avaliação do Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará – SPAECE dos terceiros anos do ensino médio das escolas públicas do Ceará, por isso a escolha deste objeto de estudo e na preocupação com a notória dificuldade no aprendizado desse assunto por parte de muitos discentes.

Objetivo geral:

Desenvolver uma Engenharia Didática de Formação para o ensino de Geometria Analítica de questões do SPAECE com o auxílio do software Geogebra.

Objetivos Específicos:

- a) Discutir uma Engenharia Didática de Formação com ênfase no ensino de Geometria Analítica;
- b) Analisar as questões do SPAECE relativo ao ensino de Geometria Analítica;

Rubrica do pesquisador: _____

Rubrica do participante: _____



**INSTITUTO FEDERAL
CEARÁ
Campus Fortaleza**

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DO ESTADO DO CEARÁ - IFCE
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA - PGECM**

- c) Descrever as Situações Didáticas do SPAECE com o uso do software Geogebra e aplicá-las com licenciandos em Matemática, com base na proposta da EDF;
- d) Identificar elementos da EDF, que aliados a TSD e ao software Geogebra, favoreçam a formação inicial dos professores de matemática.

3. Procedimentos

Participando do estudo você será convidado a:

- ✓ Participar da pesquisa que será aplicada em forma de aulas de forma remota via Google Meet com duração de noventa (90) minutos, com alunos da Universidade Estadual Vale Do Acaraú (UVA) - Sobral.
- ✓ A previsão de início das aulas de aplicação é de: 07 de agosto de 2020
- ✓ As aulas serão registradas através de fotos, gravações de áudio, vídeo e anotações das produções dos participantes, mantendo o anonimato de todos os participantes.
- ✓ Por conta da pandemia existe, a pesquisa será aplicada de forma remota via Google Meet com o auxílio do e-mail e WhatsApp se necessário para agilizar na organização dos encontros online. Cada encontro terá um tempo de noventa (90) minutos.
- ✓ Os dados coletados serão utilizados somente para a pesquisa e os resultados serão mostrados através de revistas especializadas na área de investigação e/ou encontros científicos e na dissertação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, promovido pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (PGECM/IFCE) no campus Fortaleza, sem expor a identificação dos participantes.

4. Desconfortos e Riscos

Caso exista qualquer constrangido com alguns dos procedimentos anteriormente citados, você poderá não optar pela participação da pesquisa sem nenhum prejuízo para sua conduta a qualquer momento. Desse modo, pedimos a sua autorização para a utilização de possíveis fotografias e gravações durante a aplicação da pesquisa, porém ficará tudo no anonimato sem os riscos de identificação de nenhum participante envolvido, pois será protegido os rostos e nomes para que não ocorra nenhuma identificação dos sujeitos envolvidos nessa pesquisa.

Benefícios

Os participantes terão a oportunidade de participar de situações didáticas possibilitando aos discentes da Licenciatura em Matemática resolver as Situações Didáticas do SPAECE com o uso do software Geogebra com base na proposta da Engenharia Didática de Formação. Assim, contribuirão com a formação inicial dos professores.

Rubrica do pesquisador: _____

Rubrica do participante: _____



INSTITUTO FEDERAL
CEARÁ
Campus Fortaleza

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DO ESTADO DO CEARÁ - IFCE
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA - PGECM

5. Acompanhamento e Assistência

Os participantes da pesquisa terão o acesso garantido em qualquer etapa do estudo para esclarecimentos de eventuais dúvidas com instituição em que estudam e um acompanhamento mais presente com a autora da pesquisa e a coorientadora para atender qualquer que seja a solicitação dos participantes de eventuais possíveis riscos dos participantes, como desconforto, constrangimento, cansaço, etc. Por se tratar de uma pesquisa de forma remota, estaremos disponíveis sempre com os procedimentos, acompanhamentos pedagógicos, entre outros, caso seja preciso adotar para amenizar possíveis riscos. Dessa forma, estaremos a disposição com todo afinho para a realização dessa pesquisa com responsabilidade e transparência para que tudo transcorra da melhor forma possível. Para maiores informações nosso contato é (88) 9 96727748, e-mail: ciceraxx@gmail.com.

Sigilo e Privacidade

Será mantida a sua identidade em sigilo e nenhuma informação será dada à terceiros que não faça parte da equipe de pesquisadores. Durante a divulgação dos resultados desse estudo, o seu nome não será revelado.

6. Ressarcimento e Indenização

Os participantes não terão nenhuma despesa em qualquer fase da pesquisa, bem como os mesmos não receberão nenhuma remuneração para participar do estudo. Você terá garantia ao direito de indenização caso algum dos itens anteriores seja violado.

7. Contato

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, você poderá entrar em contato com a pesquisadora Cícera Fernandes pelo celular (88) 9 96727748 ou pelo e-mail: ciceraxx@gmail.com. Em caso de dúvidas e reclamações sobre a sua participação, além de questões de éticas do estudo, você deverá entrar em contato com a secretária do Comitê de Ética e Pesquisa (CEP) da UVA, das 8h às 12h e das 13h às 17h, localizado no Centro de Ciências da Saúde (CCS), campus do Derby | Av. Comandante Maurocílio Rocha Pontes, 150 - Bairro Derby Clube - CEP 62042-280 | Sobral -CE, fone: (88)3677-4255, e-mail: comite_etica@uvanet.brna.

Observações Finais

Ao assinar este termo, o participante concorda voluntariamente em participar desta pesquisa e permite o registro de fotos, áudios e anotações de suas produções durante a aplicação da pesquisa via Google Meet, desde que possa retirar seu consentimento a qualquer momento sem penalidade ou prejuízos de qualquer natureza.

8. Consentimento Livre e Esclarecido

Rubrica do pesquisador: _____

Rubrica do participante: _____



INSTITUTO FEDERAL
CEARÁ
Campus Fortaleza

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DO ESTADO DO CEARÁ - IFCE
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA - PGECM

Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais de riscos e o incômodo que esta possa acarretar, aceito participar e declaro estar recebendo uma via original deste documento assinada pelo pesquisador e por mim, tendo todas as folhas por nós rubricadas:

Nome do(a) participante:

e-mail (opcional):

(Assinatura do participante ou nome e assinatura do seu RESPONSÁVEL LEGAL)

Data: ____/____/____.

Responsabilidade do Pesquisador:

Asseguro ter cumprido as exigências da resolução 466/2012 CNS/MS e complementares na elaboração do protocolo e na obtenção deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Asseguo também, ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Informo que o estudo foi aprovado pelo CEP perante o qual o projeto foi apresentado e pela CONEP, quando pertinente. Comprometo-me a utilizar o material e os dados obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

Pesquisadora,

Cícera Fernandes

Fortaleza, ____ de ____ de ____

Rubrica do pesquisador: _____

Rubrica do participante: _____