

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ -
IFCE CAMPUS FORTALEZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA – PGECM**

ANA CARLA PIMENTEL PAIVA

**ENGENHARIA DIDÁTICA SOBRE O ESTUDO E ENSINO DE CONCEITOS DE
GEOMETRIA DIFERENCIAL: DESCRIÇÃO DE SITUAÇÕES DIDÁTICAS COM A
UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA**

FORTALEZA

2019

ANA CARLA PIMENTEL PAIVA

**ENGENHARIA DIDÁTICA SOBRE O ESTUDO E ENSINO DE CONCEITOS DE
GEOMETRIA DIFERENCIAL: DESCRIÇÃO DE SITUAÇÕES DIDÁTICAS COM A
UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Coorientador: Prof. Dr. Emanuel Mendonça Viana

Área de concentração: Ensino de Matemática

**FORTALEZA
2019**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal do Ceará - IFCE
Sistema de Bibliotecas - SIBI

Ficha catalográfica elaborada pelo SIBI/IFCE, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

P142c Paiva, Ana Carla Pimentel.
ENGENHARIA DIDÁTICA SOBRE O ESTUDO E ENSINO DE CONCEITOS DE GEOMETRIA
DIFERENCIAL: DESCRIÇÃO DE SITUAÇÕES DIDÁTICAS COM A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE
GEOGEBRA / Ana Carla Pimentel Paiva. - 2019.
173 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado) - Instituto Federal do Ceará, Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática,
Campus Fortaleza, 2019.

Orientação: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.

Coorientação: Prof. Dr. Emanuel Mendonça Viana.

1. Geogebra. 2. Engenharia Didática. 3. Geometria Diferencial. 4. Ensino. 5. Matemática Dinâmica. I.
Título.

CDD 510.07



ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Aos dezesseis dias do mês de Setembro do ano de 2019 às 13:30 no (a) INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ – IFCE, *campus* Fortaleza, realizou-se a prova de Defesa de dissertação, intitulada ENGENHARIA DIDÁTICA SOBRE O ESTUDO E ENSINO DE CONCEITOS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL: DESCRIÇÃO DE SITUAÇÕES DIDÁTICAS COM A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA, de autoria do(a) Candidato(a) Ana Carla Pimentel Paiva, aluno(a) do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PGECM/IFCE, em nível de Mestrado. A Comissão Examinadora esteve constituída pelos professores: FRANCISCO RÉGIS VIEIRA ALVES, Presidente, EMANUEL MENDONÇA VIANA, EURÍPEDES CARVALHO DA SILVA, DANIEL BRANDÃO MENEZES, RAFAEL JORGE PONTES DIÓGENES. Concluídos os trabalhos de apresentação e arguição, o(a) candidato(a) foi **APROVADO(A)** pela Comissão Examinadora. Foi concedido um prazo de (-) dias, para o(a) candidato(a) efetuar as correções sugeridas pela Comissão Examinadora e apresentar o trabalho em sua redação definitiva, sob pena de não expedição do Diploma. E, para constar, foi lavrada a presente ata, que vai assinada pelos membros da Comissão.

BANCA EXAMINADORA: (nomes completos, CPF)

PROF DR. FRANCISCO RÉGIS VIEIRA ALVES

CAMPUS FORTALEZA – CPF 42397162334

(Presidente)

PROF. DR. EMANUEL MENDONÇA VIANA

CAMPUS CAUCAIA – CPF 00322936314

PROF DR. EURÍPEDES CARVALHO DA
SILVA

CAMPUS MARACANAÚ – CPF 02243465396

PROF DR. DANIEL BRANDÃO MENEZES

UNIVERSIDADE ESTADUAL VALE DO ACARAÚ (UVA) - CAMPUS CIDAO,
BETÂNIA (SOBRAL) – CPF 00203557344

(1º Membro Externo)

PROF DR. RAFAEL JORGE PONTES
DIÓGENES

UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-
BRASILEIRA (UNILAB) – CAMPUS DOS PALMARES (ACARAPE) – CPF
60001699300

(2º Membro Externo)

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:

ENGENHARIA DIDÁTICA SOBRE O ESTUDO E ENSINO DE CONCEITOS DE
GEOMETRIA DIFERENCIAL: DESCRIÇÃO DE SITUAÇÕES DIDÁTICAS COM A
UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA

LOCAL: IFCE – CAMPUS FORTALEZA

HORA DE INÍCIO: 13:30

Em sessão pública, após exposição de cerca de _____ minutos, o(a)
candidato(a) foi arguido(a) oralmente pelos membros da banca tendo como resultado:

() APROVADO, devendo o(a) candidato(a) entregar a versão final no prazo máximo
de 90 dias.

(X) APROVADO com louvor.

() APROVAÇÃO CONDICIONAL, devendo o(a) candidato(a) satisfazer, no prazo
máximo de 90 dias, às exigências listadas na Folha de Modificações de Dissertação de
Mestrado anexa à presente ata.

() REPROVADO.

Na forma regulamentar foi lavrada a presente ata que é abaixo assinada pelos membros
da banca, na ordem acima determinada, e pelo(a) candidato(a):

Fortaleza, 16 de Setembro de 2019

Presidente:



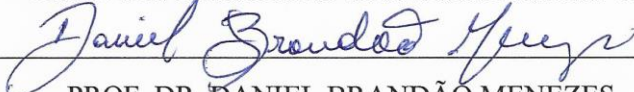
PROF. DR. FRANCISCO RÉGIS VIEIRA ALVES



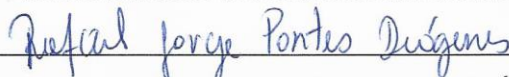
PROF. DR. EMANUEL MENDONÇA VIANA



PROF. DR. EURÍPEDES CARVALHO DA SILVA



PROF. DR. DANIEL BRANDÃO MENEZES



PROF. DR. RAFAEL JORGE PONTES DIÓGENES

Candidato(a):



ANA CARLA PIMENTEL PAIVA



Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves
Coordenador do Mestrado em Ensino de
Ciência e Matemática/PGECM
Instituto Federal do Ceará/
SIAPE 1279343

*À minha amada mãe Rita Lúcia Pimentel, pelo amor,
dedicação e incentivo em todos os momentos.*

AGRADECIMENTOS

À minha família, em especialmente a minha amada mãe Rita Lúcia Pimentel e os meus irmãos Lucio Carlos Pimentel Paiva e Carlos Henrique Pimentel Paiva, por todo amor, carinho, conselhos e incentivo aos meus estudos. Por acompanhar meu desenvolvimento profissional e acadêmico. E, por acreditar, incondicionalmente, no meu potencial.

À minha tia Raimunda Adriana Pimentel Oliveira e a minha prima Clara Lúcia Pimentel dos Santos por momentos imprescindíveis de lazer e alegria, bem como equilíbrio necessário para chegar até aqui, principalmente, por suas palavras de encorajamento durante os meus estudos.

Ao meu noivo Emanuel Viana, pela sua paciência e compreensão nos momentos mais complicados durante o curso, por ter aguentado meus estresses, pois muitas foram as vezes que deixamos de sair por conta dos meus estudos, que se mostrou, como sempre, fiel e presente em cada momento que precisei de uma palavra de ânimo e sugestões para lidar com determinadas escolhas.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves, pela sua paciência e dedicação nos momentos de orientação. E, pelo incentivo à pesquisa. Além do mais, expresso meus agradecimentos:

Ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PGECM, pela oportunidade de realização de trabalhos em minha área de pesquisa.

Aos professores Daniel Brandão Menezes, Eurípedes Carvalho da Silva e Rafael Jorge Pontes Diógenes por terem aceitado o convite para participar da banca examinadora e se propor a ler a pesquisa com o intuito de aperfeiçoá-la.

Aos colegas do PGECM pelo seu auxílio nas tarefas desenvolvidas durante o curso e apoio na revisão deste trabalho.

RESUMO

Esta pesquisa desenvolveu-se baseada nos princípios da Engenharia Didática visando estudar e discutir as contribuições que o uso do *software* Geogebra pode oferecer para a compreensão de alguns conceitos matemáticos de Geometria Diferencial – GD. Norteando-se pelas quatro etapas propostas pela metodologia de pesquisa, foi realizado um levantamento bibliográfico com o intuito de verificar a abordagem desses conceitos nos livros de GD, bem como o nível dos conhecimentos trabalhados. Logo após, foi aplicada uma intervenção didática usando o Geogebra a um grupo de professores de matemática visando a ressignificação desses conceitos, ou seja, uma nova forma de interpretá-los e motivar o início do desenvolvimento de trabalhos com uma matemática dinâmica de modo interligado aos conceitos empíricos e formais de GD, aperfeiçoando uma visão tridimensional e preparando-os para uma diferenciada prática docente de tal conteúdo. Após análises e discussões sobre os resultados obtidos, constatou-se progressos dos estudantes no que se refere ao entendimento dos conceitos fundamentais dos tópicos trabalhados.

Palavras-chaves: Geogebra. Engenharia Didática. Geometria Diferencial. Ensino. Matemática Dinâmica.

ABSTRACT

This research was developed based on the principles of Didactic Engineering aiming to study and discuss the contributions that the use of Geogebra *software* can offer to the understanding of some mathematical concepts of Differential Geometry - GD. Based on the four steps proposed by the research methodology, a bibliographic survey was carried out with the purpose of verifying the approach of these concepts in the GD books, as well as the level of the knowledge worked. Afterwards, a didactic intervention was applied using Geogebra to a group of mathematics teachers aiming at the redefinition of these concepts, that is, a new way of interpreting them and motivating the beginning of the development of works with a dynamic mathematics interconnected to the empirical and formal concepts of GD, perfecting a three-dimensional view and preparing them for a differentiated teaching practice of such content. After analyzing and discussing the results obtained, the student progressed in understanding the fundamental concepts of the topics covered.

Keywords: Geogebra. Didactic Engineering. Differential Geometry. Teaching. Dynamic Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Um estudo da variação da curvatura em função do parâmetro da curva	25
Figura 2 - Representação gráfica do parabolóide elíptico de equação $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{6} = z$ no <i>software</i> Geogebra	26
Figura 3 - Exemplificação de assíntotas em curvas que admitem ramos infinitos.....	27
Figura 4 - Curva formada como resultado do movimento do anti-horário da caneta em função $f(x) = x^2$	28
Figura 5 – Exemplificação de uma curva parametrizada que não é diferenciável em um ponto.....	29
Figura 6 – Exemplificação de uma curva parametrizada diferenciável em todos os pontos.....	29
Figura 7 – Representação da epiclóide	30
Figura 8 – Representação da interseção de dois cilindros (à esquerda) e da loxodromia esférica(à direita).....	30
Figura 9– Exemplos de construção, no Geogebra, de superfícies em $\mathbb{R}^3$, e funções de várias variáveis em $\mathbb{R}^3$ com a ferramenta espectro de cores.....	31
Figura 10- Comandos para a determinação do plano tangente a superfície	32
Figura 11 – Algumas das aplicações da ferramenta Projeção Estereográfica	33
Figura 12 - Triângulo Didático	44
Figura 13 – Matemáticos Gottfried Leibniz(à esquerda) e Isaac Newton(à direita)	49
Figura 14– Representação de círculo osculador	50
Figura 15- Imagens da obra concebido por Christian Huygens, em 1673, acerca do estudo de curvas planas e o relógio de pêndulo desenvolvido nessa obra	50
Figura 16 – Imagens da obra <i>Disquisitiones generales circa superficies curvas</i> , concebida por Carl Friedrich Gauss	52
Figura 17 – Obra <i>Saggio di interpretazione della geometria non-Euclidea</i> de Eugenio Beltrami	54
Figura 18 – Representação do conceito de derivada direcional	58
Figura 19 – Definição que correlaciona os conceitos de derivada direcional e derivada parcial, proposto por TENEBLAT (2008)	59
Figura 20 – Quadro sistemático-simbólico relativo a evolução do conceito de derivabilidade de CUV ao conceito de diferenciabilidade estudado no curso de GD.....	60
Figura 21 – Exemplo de exercícios propostos por TENEBLAT no capítulo 0 (introdutório).....	61
Figura 22 – Exemplos de curvas apresentados por TENEBLAT	61
Figura 23 –Concatenação dos conceitos vetor tangente com o conceito de derivabilidade de uma função de uma variável	62

Figura 24 – Significação gráfico-geométrica do sinal da curvatura em curvas planas.....	62
Figura 25 – Exemplificação de aplicação dos conceitos de vetores tangente, normal e da função curvatura propostos por TENEBLAT(2008)	63
Figura 26- Representação dos planos gerados pelos vetor normal, tangente e binormal.....	64
Figura 27- Exemplificação de uma propriedade decorrente da $\sigma(s_0) < 0$	65
Figura 28- Exemplificação de questões com a abordagem dos conceitos relacionados ao Triedro de Frenet.....	65
Figura 29 - Superfície 1 (Hipérbole de duas folhas); Superfície 2 (Chapéu de Sherlock); Superfície 3 (Bitoro)	66
Figura 30 – Comandos para plotar superfícies no programa <i>ACOGEO</i>	66
Figura 31- Exemplo de curva diferenciável intitulada espiral em R^2 e a representação da curva gerada por sua respectiva derivada na cor vermelha	68
Figura 32 – Sistematização do processo de reparametrização de uma curva plana desenvolvido por TENEBLAT(2008).....	70
Figura 33 – Representação da conservação do traço da curva após uma reparametrização pelo comprimento de arco.....	71
Figura 34 – Representação da variação da curvatura nas curvas que representam as funções exponenciais e logarítmica	72
Figura 35 - Descrição do traço da curva $a(t) = (t^2, t)$ e estudo da curvatura com o software Geogebra.....	73
Figura 36 - Descrição gráfica de uma curva com curvatura constante	74
Figura 37 - Descrição do traço da curva plana e estudo da variação curvatura com o <i>software</i> Geogebra	75
Figura 38- Descrição do traço da curva espacial com o <i>software</i> Geogebra	76
Figura 39 - Descrição do traço da curva espacial e identificação dos vetores em direções afins	77
Figura 40 -Descrição do traço da curva espacial e estudo da variação curvatura com o <i>software</i> GeoGebra	78
Figura 41 - Descrição do comportamento gráfico-geométrico de curvas congruentes	79
Figura 42 - Descrição do comportamento gráfico-geométrico da situação em que as curvas não são congruentes	80
Figura 43 - Descrição do comportamento gráfico-geométrico das curvas planas $f(x)$ e $g(x)$..	81
Figura 44 - Descrição do comportamento gráfico-geométrico da curvatura da parábola	82
Figura 45 - Triedro de Frénet-Serret	84
Figura 46 – Traço da curva $\alpha(t) = (4\cos t, 4\sin t, 3t)$	84
Figura 47– Representação do Triedro de Frenet na curva $\alpha(t) = (2 - \cos(t), \sin(t), \frac{-t}{3\sin(t)})$ por meio do <i>software</i> Geogebra	85

Figura 48 – Representação dos planos resultantes do Triedro de Frenet, plano osculador(amarelo), retificante(rosa) e normal(azul) por meio do <i>software</i> Geogebra.....	86
Figura 49 - Representação intuitiva da $\sigma(t) = 0$ em uma curva plana	87
Figura 50 - Representação intuitiva que uma curva plana está contido em uma circunferência.....	88
Figura 51 - Hélice circular.....	89
Figura 52 - Exemplificação da hélice formando um ângulo constante com $\alpha'(t)$	90
Figura 53 - Representação hélice elíptica.....	90
Figura 54 - Exemplificação de retas espaciais congruentes.....	92
Figura 55 - Exemplificação de curvas espaciais congruentes	93
Figura 56 - Representação da superfície denominada Helicoide regrado	95
Figura 57 - Esquema proposto por TENEBLAT(2008) acerca da rotação da curva α em torno de l	95
Figura 58 – Superfície de revolução gerada pela rotação da curva $\alpha(u)$ (à esquerda) e da rotação da curva $\beta(u)$ (à direita).....	95
Figura 59 – Representação do parabolóide	96
Figura 60 – Representação parabolóide hiperbólico.....	97
Figura 61 – Representação do o hemisfério da esfera.....	98
Figura 62 – Esquema de aplicação isométrica	99
Figura 63 - Deformação isométrica do helicóide no catenóide.....	100
Figura 64 - Representação do cilindro no <i>software</i> Geogebra	101
Figura 65 -Protocolo de construção para o cálculo das derivadas parciais do cilindro	102
Figura 66 - Exemplo de planos formado por um ponto e dois vetores ortogonais distintos...	103
Figura 67 - Idéia intuitiva da transformação isométrica do plano em um cilindro	103
Figura 68 - Construção do toro no <i>software</i> Geogebra.....	104
Figura 69 - Simbolização da função CAS no <i>software</i> Geogebra.....	104
Figura 70 - Utilização da função CAS do <i>software</i> Geogebra para o cálculo das derivadas parciais do toro.....	104
Figura 71 – Representação das derivadas parciais do toro no <i>software</i> Geogebra.....	106
Figura 72- Representação superfície de sela	106
Figura 73 – Representação do cálculo da expressão $\sqrt{EG- F^2}$ dos coeficientes da superfície sela.....	109
Figura 74 – Cálculo da área da superfície de sela.....	108
Figura 75 - Ilustração da aplicação normal de Gaus elaborada por TENEBLAT(2008).....	109

Figura 76 - Representação do parabolóide hiperbólico.....	111
Figura 77 - Representação da superfície $X(u, v) = (u, v, u^3 - 3uv^2)$	112
Figura 78 - Adaptação do esquema proposto por BROUSSEAU (1986, p. 440-441) construído por ALVES(2014)	114
Figura 79 - Explanação das curvas $\gamma(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$; $\beta(t) = (t, t^4)$ e $\alpha(t) = (\cos(t)(2 \cos(t) - 1), \sin(t)(2 \cos(t) - 1))$ utilizadas na situação - problema (2)	115
Figura 80 - Explanação das curvas utilizadas na situação – problema (5) para a análise dos planos osculador, retificante e normal.....	120
Figura 81 - Aluno A ₁ nas fases de ação e formulação em relação a situação-problema (1)...	123
Figura 82 - Momento de validação em relação a situação-problema (1).....	124
Figura 83 - Elucidação algébrica do aluno A ₂ do conceito curvatura	124
Figura 84 - Entendimento dos participantes dos alunos acerca do conceito curvatura; à direita Aluno A ₆ , à esquerda (superior) Aluno A ₃ , à esquerda inferior Aluno A ₇	125
Figura 85 - Aluna A ₃ nas fases de ação e formulação na situação problema (2).....	125
Figura 86 - Elaboração de um caso particular da situação problema(2) por parte do aluno A ₂	126
Figura 87 - Aluna A ₄ nas fases de ação e formulação (à direita) da situação-problema(2); Aluna A ₄ nas fases de validação (à esquerda) da situação-problema(2).....	126
Figura 88 - Visualização das fases de ação, formulação e validação da Aluna A ₅ na segunda curva da situação problema (2).....	127
Figura 89 - Validação da aluna A ₄ segunda curva apresentada na situação problema (2).....	127
Figura 90 - Representação das fases de ação e formulação da Aluna A ₆ em relação a terceira curva da situação problema (2)	128
Figura 91 - Cálculo da curvatura da cardióide pela aluna A ₅	128
Figura 92 - Resultados referentes a determinação dos vetores pertencentes ao Diedro de Frenet na circunferência ; à direita aluno A ₁ e à esquerda Aluno A ₃	129
Figura 93 - Representação dos vetores pertencentes ao Diedro de Frenet na cardioide pelo Aluno.....	129
Figura 94 - Explicação do comportamento curvatura na circunferência e na cardioide pela Aluna A ₅	130
Figura 95 - Comparação da curvatura nos pontos ilustrados na figura (3) da situação problema(2) elaborado pelo Aluno A ₃	130
Figura 96 - Análises realizadas pelos alunos A ₅ (à direita) e A ₇ (à esquerda) da figura 3 da situação problema (2).....	131
Figura 97 - Perspectivas dos alunos acerca do TCP, à direita Aluno A ₁ e à esquerda Aluno A ₈	
Figura 98 - Formulação do TCP dos alunos A ₄ (à direita) e A ₇ (à esquerda).....	131
Figura 99 - Manifestação da Aluna A ₃ do modo em que ocorre a equivalência entre as curvas.....	132

Figura 100 - Ação e formulação do Aluno A ₁ no tocante ao primeiro par de curvas da situação-problema (3).....	132
Figura 101 - Representação da fase de validação do aluno A ₁ no que concerne ao primeiro par de curvas na situação-problema (3).....	133
Figura 102 - Fases de ação e formulação referente a segunda curva da situação-problema(3) do Aluno A ₅ (imagem superior), Aluno A ₃ (imagem inferior à esquerda) e do Aluno A ₁ (imagem inferior à direita).....	133
Figura 103 - Validação dos Alunos A ₂ (à direita) e A ₃ (à esquerda), por meio da ilustração do movimento rígido que torna as duas parábolas equivalentes.....	134
Figura 104 - Ação gestual da aluna A ₃ ,durante a formulação, com o intuito de explicar a hipótese elaborada da independência da curvatura da parábola em relação a variável c.....	134
Figura 105 - Explicação algébrica do conceito curvatura em parábolas, de modo a validar, a não dependência do valor da curvatura em relação a variável independente, elaborado pela Aluna A ₅	135
Figura 106 - Argumentação do Aluno A ₄ (figura à esquerda) e Aluno A ₆ (figura à direita) nas fases de ação e formulação do terceiro par de curvas da situação problema (3).....	135
Figura 107 - Explicação ilustrativa do aluno A ₇ de que a elipse e a circunferência não são equivalentes pelo TCP.....	135
Figura 108 - Ação e formulação da Aluna A ₄ na situação problema (4).....	136
Figura 109 - Argumentação algébrica acerca do desenvolvimento da aluna A ₄ do conceito torção.....	137
Figura 110 - Ação e formulação da Aluna A ₃ na situação problema (4).....	137
Figura 111 - Dedução da terceira equação de Frenet pela aluna A ₃	138
Figura 112 – Dedução das fórmulas de Frenet pelo Aluno A ₁ (à esquerda na parte superior), Aluno A ₇ (à esquerda na parte inferior), Aluno A ₃ (à direita).....	138
Figura 113 - Aluna A ₅ durante as fases de ação e formulação referentes a situação problema (5), estabelecendo a natureza da curva.....	139
Figura 114 - Aluna A ₅ durante as fases de ação e formulação referentes a situação problema(5), definindo os valores referentes a curvatura, vetores normal e binormal da hélice circular.....	139
Figura 115 - Aluna A ₅ validando a situação problema (5), definindo através do vetor binormal, o valor da torção da hélice circular.....	140
Figura 116 - Fases de ação, formulação e validação do Aluno A ₈ no que concerne a situação-problema (5).....	140
Figura 117 - Representação dos vetores do Aluno A ₁ na figura 1 da situação problema (5).141	
Figura 118 - Representação dos vetores do Triedro pela Aluna A ₅ (à esquerda) e representação dos planos gerados por esses vetores pelo Aluno A ₃ (à direita) na figura 1 da situação problema (5).....	141

Figura 119 - Representação dos vetores do Triedro pela Aluna A_1 (à esquerda) e representação dos planos gerados por esses vetores pelo Aluno A_3 (à direita) na figura 2 da situação problema (5).....142

Figura 120 - Argumentação realizada pela aluna A_4 , na fase de validação da situação problema (5), no que diz respeito a análise geométrica das curvas apresentadas.....142

LISTA DE ABREVIATURAS

CEP : Comitê de Ética em Pesquisa

ED: Engenharia Didática

GD: Geometria Diferencial

CUV: Cálculo de uma Variável

CVV: Cálculo de Várias Variáveis

TCP: Teorema Fundamental das Curvas Planas

TSD: Teoria das Situações Didáticas

EDF: Engenharia Didática de Formação

PGECM : Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	18
2	UM ESTUDO DETALHADO DO ENSINO DE GEOMETRIA DIFERENCIAL.....	23
2.1	Revisão Bibliográfica.....	23
2.2	A imprescindibilidade do tema de pesquisa	33
2.3	Perspectiva de investigação do problema	34
3	QUADRO TEÓRICO.....	36
3.1	A gênese da Engenharia Didática- ED	36
3.2	Sistematização prevista pela Engenharia Didática - ED.....	38
3.2.1	Análises prévias	39
3.2.2	Análises a priori e concepções de situações didáticas	41
3.2.2.1	Teoria das Situações Didáticas- TSD	43
3.2.3	Experimentação.....	46
3.2.4	Análises a posteriori e validação.....	47
3.2.4.1	Validação interna e externa.....	47
4	ANÁLISES PRELIMINARES DA ENGENHARIA DIDÁTICA NO ESTUDO DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS RELACIONADOS A CURVAS E SUPERFÍCIES.....	49
4.1	A gênese histórica dos conceitos basilares de superfícies e incipientes de curvas.....	49
4.2	Estudo didático do objeto matemático em livros clássicos.....	54
4.2.1	Escolhas e justificativas para análise de um livro clássico.....	54
4.3	Uma observação do objeto matemático em um livro didático.....	56
4.3.1	O livro de TENEBLAT(2008)	56
5	CAMPO EPISTÊMICO-MATEMÁTICO: UMA FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA DOS CONCEITOS RELACIONADOS A CURVAS E SUPERFÍCIES.....	68
5.1	Conceito de curvatura de uma curva diferenciável	68
5.2	Teorema Fundamental das Curvas Planas	78
5.3	Triedro de Frenet	82
5.3.1	Equação de Frenet para curvas	86
5.3.2	Teorema Fundamental das Curvas em R^3	91
5.4	Superfícies	93
5.5	Primeira Forma Quadrática	98

5.6 Segunda Forma Quadrática	109
6 CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI DOS CONCEITOS RELACIONADOS A CURVAS E SUPERFÍCIES	113
6.1 Concepção e análise <i>a priori</i> das Situações Didáticas	115
7 UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS RELACIONADOS A CURVAS E SUPERFÍCIES EM UM CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO.....	122
7.1- Caracterização do lócus de pesquisa	122
7.2 Análise <i>a Posteriori</i> das Situações Didáticas.....	123
7.2.1-Validação interna da pesquisa	143
7.2.1.1 – Mensuração da pesquisa por meio do instrumento metodológico questionário	145
8 CONSIDERAÇÕES FINAIS	151
REFERÊNCIAS.....	156
ANEXOS.....	163
APÊNDICES.....	170

1 INTRODUÇÃO

A Geometria Diferencial - GD estuda as características e singularidades geométricas de curvas, superfícies e suas generalizações, utilizando as técnicas do cálculo infinitesimal. Essa área da Matemática apresenta forte interação com outras áreas da ciência, desde sua origem, com a cartografia, passando pela Teoria da Relatividade, até os dias de hoje, onde é crescente o estudo de temas relacionados à Análise e à Física (PAIVA, ALVES, 2018a).

ALBUQUERQUE (2004), aborda a importância da Geometria Diferencial em outro aspecto, correlacionando esse campo com os outros saberes matemáticos:

Sem dúvida, a geometria diferencial joga um papel excepcional, mesmo na matemática, toda se tal se pudesse considerar, porque afinal ela conjuga muitas e variadíssimas das matérias da álgebra e da análise. Aparece nas soluções de problemas de várias variáveis reais ou complexas, tratadas como espaços geométricos de dimensão qualquer, ou nos problemas de variáveis discretas, tratadas como abstrações das anteriores (referimo-nos às variedades algébricas); informa-nos sobre as propriedades intrínsecas da morfologia do espaço e suas medidas. (Prefácio de ALBUQUERQUE, 2004)

GRANDE, NUNES e SILVA (2015) enfatizam o ponto de vista de ALBUQUERQUE (2004) defendendo que o estudo de GD permite a aplicação de diversos conceitos matemáticos, tais como curvas, no plano e no espaço, superfícies, funções diferenciáveis, derivada e integral, paralelismo, ortogonalidade e operações entre vetores, além de interrelacionar diversos ramos da Matemática, como o Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica e Álgebra Linear.

Devido a esse caráter de interdisciplinaridade, na própria matemática quanto nas diversas áreas da ciência, as pesquisas em GD têm mostrado grande vitalidade e se desenvolvido em várias direções do conhecimento e com considerável volume de pesquisa (DA SILVA, 2009, p. 44). Entretanto, em relação às pesquisas de ensino e aprendizagem dessa área, GRANDE, NUNES e SILVA (2015, p. 3) salientam uma deficiência na área, afirmando que:

No que tange às pesquisas em Educação Matemática sobre o ensino e aprendizagem de alguns tópicos da Geometria Diferencial observou-se uma escassez de trabalhos e pesquisas ligados ao assunto, o que se pode sugerir a possibilidade de investigações e uma maior exploração do tema em sala de aula por parte dos professores, com uma ampla gama de aplicações e conteúdos que podem ser envolvidos em seu estudo (GRANDE, NUNES e SILVA, 2015, p. 3).

Ainda em relação ao ensino e aprendizagem de GD, constatamos que, devido ao elevado grau de complexidade e abstração envolvidos nos conceitos desse campo, os alunos desenvolvem alguns entraves ao estudar mencionado tópico.

No que concerne a forma de transmissão dos conceitos dessa área, inferimos que as aulas seguem, de modo indubitável, um formato que prioriza o caráter algorítmico dos conceitos geométricos, ou seja, fazem o uso de aplicações que enfatizam apenas o caráter analítico. Isto significa que os exercícios são consequências diretas das definições formais e os teoremas estudados são os principais roteiros para o pensamento do aluno.

Desse modo, diante do quadro atual que, em maior ou menor substância, determina nossa realidade de formação acadêmica inicial, realizaremos uma investigação cujos objetos matemáticos são alguns tópicos de GD, com uma ênfase em conceitos fundamentais para o entendimento da teoria das curvas e alguns conceitos iniciais de superfícies que designaremos como conceitos basilares de curvas e incipientes de superfícies, em uma concepção que priorize o significado geométrico desses conceitos.

Para a realização e fundamentação desse estudo, buscou-se trabalhos/pesquisas que abordem e de algum modo se encontrem relacionados com os nossos objetos matemáticos de interesse, os conceitos basilares de curvas e incipientes de superfícies. No entanto, constatou-se a existência de uma escassez de trabalhos na área, por isso, ao longo da pesquisa, tentamos identificar, em uma quantidade pequena de trabalhos, elementos que nos norteasse nessa temática.

Dentre os elementos encontrados, nos deparamos com o papel significativo da visualização dos conceitos geométricos em áreas correlacionadas com a GD para uma melhor assimilação do significado desses conceitos, com amparo na tecnologia, em *softwares* como o Maple, Mathematica, Geogebra *etc.* Desse modo, ao realizar um estudo crítico acerca do cenário contemporâneo da temática, mediante esse levantamento bibliográfica, identificamos a seguinte problemática:

Como elaborar situações de ensino relacionadas aos conceitos basilares de curvas e incipientes de superfícies, de modo que, com a exploração do *software* Geogebra, possamos identificar a ressignificação desses conceitos?

Assim, este trabalho tem como objetivos oriundos da reflexão permitida pela problemática:

- Investigar o ensino da disciplina Geometria Diferencial, em particular, os conceitos basilares de curvas e incipientes de superfícies, sob a perspectiva de uma proposta metodológica intitulada Engenharia Didática e o uso do *software* Geogebra aplicado a um grupo de professores em formação continuada.

De modo mais sucinto, com o intuito de atender tal objetivo, também aplicaremos uma teoria de ensino, intitulada Teoria das Situações Didáticas ¹, que auxiliará na elaboração de situações didáticas enfatizando a visualização dos conceitos basilares de curvas e incipientes de superfícies no *software* Geogebra. Assim, assumiremos como objetivos específicos deste trabalho:

- Analisar alguns conteúdos da disciplina Geometria Diferencial sob a perspectiva da metodologia Engenharia Didática;
- Realizar um estudo dos teoremas e propriedades inerentes aos conceitos de curvas e superfícies da disciplina Geometria Diferencial;

¹ A Teoria das Situações Didáticas desenvolvida na França, por Guy Brousseau, é um modelo teórico que se refere a transmissão de conteúdos matemáticos, ilustrando algumas situações fundamentais de aprendizagem, e que principiou uma fundamentação teórica para novos trabalhos de pesquisa em didática, e na prática de professores de matemática.

- Compreender, nas situações didáticas, os processos envolvidos na visualização de conceitos matemáticos proporcionados pelo *software* Geogebra que colaboram para a assimilação dos conceitos e as dificuldades sentidas pelos alunos durante a realização das atividades;

- Investigar se as situações didáticas elaboradas influenciaram uma alteração na significação/percepção dos conceitos de Geometria Diferencial abordados nas atividades.

Além disso, fundamentou-se a metodologia de pesquisa utilizada para embasar de forma qualitativa a nossa pesquisa, Engenharia Didática – ED, que apresenta uma estrutura que nos permite compreender de forma diferenciada o nosso fenômeno de interesse, sendo composta por quatro fases (análise preliminar, análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori*) que possibilitam o encadeamento dos objetivos que pretendemos atingir no decurso desse estudo.

Embasados nessa metodologia, realizaremos um estudo histórico do objeto matemático, aliada a uma fundamentação matemática desse objeto com a finalidade de identificar os principais problemas existentes no ensino do objeto matemático, elaborando, em seguida, alternativas metodológicas de trabalho com tais problemas encontrados.

Salientamos que a elaboração das situações didáticas ocorrerá na segunda fase da ED, análise *a priori*, utilizando-se de recursos como: imagens, questionários e interlocuções para coleta de dados. A razão da utilização dos critérios sistemáticos e os pressupostos da ED, remete ao caráter de confronto que a mesma proporciona, isto é, o confronto dos dados previstos na segunda fase da ED com os dados recolhidos após a experimentação.

Desse modo, nossa opção conceitual repousou no uso da ED e TSD, tendo em vista garantirmos uma perspectiva teórica bem fundamentada para a discussão do nosso objeto de estudo. A finalidade de utilizar a TSD na elaboração de situações didáticas ocorreu diante das fases previstas nessa teoria (ação, formulação, validação, institucionalização), que tencionam identificar a manifestação do pensamento intuitivo do aluno. Enquanto que a ED será responsável pela organização da atmosfera em que será desenvolvida a pesquisa, como mencionado anteriormente, em que se desenvolveram as situações didáticas nas fases dessa metodologia de pesquisa.

Além disso, compreende-se por meio de artigos acadêmicos que relacionam que a TSD e a ED, uma complementariedade que pode possibilitar a ruptura de determinados formatos de ensino. Portanto, utilizaremos a ED e a TSD no intuito de evidenciar e identificar os elementos que se sobressaem a partir da proposta de abordagem de certos compêndios especializados, tradicionalmente adotados no Brasil, no que concerne ao ensino de curvas e superfícies.

Para a validação dessa pesquisa, ou seja, para que possamos conceber os dados que nos auxiliam no entendimento de como a visualização atua na transmissão dos saberes de GD, a sequência de situações didáticas será aplicada a um grupo de alunos de oito professores de Matemática que estão cursando o programa de pós-graduação em ensino de ciências e matemática- PGECEM do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE.

Desse modo, a sistematização da nossa pesquisa, ocorre inicialmente com a apresentação de alguns resultados obtidos em estudos empíricos, no Capítulo 2, com respeito ao parecer de alguns pesquisadores em relação ao assunto em discussão, com uma atenção voltada aos seus aspectos metodológicos utilizados em suas pesquisas, como suporte à aprendizagem no ensino da Geometria Diferencial, sendo realizado um levantamento de pesquisas bibliográficas, tanto no Brasil, quanto no exterior, que enfatizam o objeto matemático em estudo.

Reforçamos que o nosso foco está voltado à compreensão desse processo por meio de uma transposição didática, readaptação do ensino científico para o saber escolar, apoiada na visualização, com amparo na tecnologia, especificamente, no Geogebra, que nos auxiliará como suporte metodológico, em que priorizamos explorar no decorrer da aplicação das nossas situações didáticas. Nesse capítulo, ainda apresentaremos, de um modo sucinto, uma melhor descrição da problemática da nossa pesquisa e o viés em que a problemática será investigada.

Prosseguiremos, no Capítulo 3, com a exploração, de modo detalhado nosso quadro de referencial teórico, detalhando a nossa metodologia de pesquisa, a Engenharia Didática, esmiuçando as suas fases, depois, exibiremos a forma em que utilizaremos a nossa metodologia de ensino, a Teoria das Situações Didáticas, explicitando as fases para a elaboração das situações didáticas.

Ademais, no Capítulo 4, serão realizadas as análises preliminares da ED, em que abordaremos nessa seção uma pequena digressão histórica da Geometria Diferencial, que aborda desde de sua gênese à forma como o ensino se encontra. Mediante todo o processo de construção, faremos também uma consulta a alguns livros didáticos de Geometria Diferencial que abordem nosso objeto matemático, identificando e descrevendo alguns elementos de ruptura² e elementos de transição³ no âmbito do corpo teórico de nosso interesse .

Sucederemos com a elaboração de uma fundamentação matemática, no Capítulo 5, em definiremos os conceitos basilares de curvas e incipientes de superfícies que serão analisados, descrevendo suas respectivas definições e propriedades.

No Capítulo 6, apresentaremos a aplicação da segunda etapa da nossa metodologia de pesquisa, em que elaboramos e analisamos situações problemas que foram utilizadas durante as nossas situações didáticas na fase de experimentação.

Em seguida, no Capítulo 7, implementaremos a experimentação e a caracterização dos *locus* da nossa pesquisa, o Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Ceará, Campus Fortaleza, assim como o detalhamento dos sujeitos de nosso estudo, oito professores formados em Matemática-Licenciatura.

A discussão e detalhamento do viés de análise dos dados recolhidos após as situações didáticas, também será abordada no Capítulo 7, ao mesmo tempo que averiguaremos os resultados mais

² Alves(2011,p.61) define elementos de ruptura como os elementos que atuam como entraves e rupturas à aprendizagem.

³ Alves(2011) define elementos de transição como os elementos presentes nas trajetórias de alteração de um conceito matemático em virtude da dimensão e/ou espaço topológico que se encontra, por exemplo, os conceitos envolvidos na alteração da compreensão do limite em $\mathbb{R}$ para o conceito de limite em $\mathbb{R}^n$.

proeminentes colhidos nas entrevistas semiestruturadas, realizadas individualmente com os alunos nos momentos de aplicação das atividades após abordagem dos conteúdos previstos na disciplina de GD. Ademais apresentaremos, outros resultados, originados da prática e convívio direto com os estudantes, que apontam respostas aceitáveis no âmbito da aprendizagem, com arrimo no pensamento intuitivo.

Por fim, encerramos no Capítulo 8, retomando alguns elementos pertinentes à metodologia de ensino, a qual nos auxiliou para efetivação da mediação didática dos conteúdos de GD. Rediscutimos, também, com referências aos dados obtidos empiricamente, as potencialidades didáticas e limitações do uso do *software* de geometria dinâmica Geogebra seguido de explicações e sugestões a respeito de seu uso.

Desse modo, finalizamos o trabalho, discutindo pontos importantes, originados da prática e convívio direto com os participantes da pesquisa, que apontam respostas aceitáveis no âmbito do ensino/aprendizagem, com amparo da visualização na assimilação de conceitos do campo de saberes Geometria Diferencial.

A seguir apresentaremos ao leitor um maior detalhamento da nossa problemática de interesse e o planejamento dado a nossa investigação, visto que a leitura realizada anteriormente tem o intuito de possibilitar um pequeno esboço do que iremos abordar nos próximos capítulos.

2 UM ESTUDO DETALHADO DO ENSINO DE GEOMETRIA DIFERENCIAL

Neste capítulo, exibiremos o levantamento bibliográfico, as pesquisas realizadas no âmbito de ensino de Geometria Diferencial- GD, que fundamentam a nossa problemática de investigação. Além disso, apresentaremos outras concepções que reforçam a necessidade do tema de nossa pesquisa, retomando com mais detalhes à questão norteadora de nossa investigação, bem como os objetivos. A seguir iniciaremos abordando e discutindo alguns trabalhos que remetem ao ensino e aprendizagem sobre alguns tópicos da Geometria Diferencial.

2.1 Revisão Bibliográfica

Realizamos uma revisão da literatura a respeito do processo de ensino e aprendizagem de alguns tópicos da Geometria Diferencial, mais especificamente, os conceitos basilares de curvas e incipientes de superfícies. Considerando a temática referenciada, evidenciamos que não encontramos muitos trabalhos, no Brasil, que abordassem o nosso assunto em foco, assim tal revisão realizou-se por meio de uma investigação em dissertações, artigos que explanassem o viés de ensino em GD, dado que primeiramente buscou-se teses que abordassem tal temática, constatando-se uma escassez de trabalhos nesse direção. Possivelmente, tal fato se atribui a uma noção particular, que nos deparamos apenas no contexto de uma Matemática Avançada.

Inicialmente, iremos recordar o que consideramos como conceitos basilares de curvas: os conceitos cruciais para o entendimento dos teoremas e características das curvas, como as definições de curvatura, torção. Em relação aos conceitos incipientes de superfícies, tomaremos os conceitos introdutivos para o estudo da vasta teoria de superfícies. O detalhamento desses conceitos será exibido no Capítulo 4, mediante suas respectivas definições.

Nos trabalhos de BATISTA (2011), COIMBRA (2008), DOMINGUES (2013), RESENDE (2017), FARIA (2017) contemplamos a realização de um estudo dos conceitos matemáticos relacionados a curvas, explanando teoremas, definições e exemplos. Ou seja, os estudos não trazem, em nenhum momento, alguma preocupação com o ensino de GD, nem mesmo uma abordagem dos conceitos de modo singular aos livros da área. Os pesquisadores realizam um estudo desses conceitos matemáticos, sem mencionar os entraves relacionados a aprendizagem. Dessa forma encontramos, modo não dificultoso, uma gama de trabalhos que fundamentam apenas matematicamente esse campo de estudo.

Em contrapartida, nos trabalhos de ALVES (2014), GRANDE, NUNES e SILVA (2015), MIYASAKI (2017), SILVA (2017), ARAÚJO (2018) constatamos uma concepção diferenciada dos autores em abordar os conceitos específicos de GD, remetendo ao uso de *software* de geometria

dinâmica⁴ para facilitar o processo de ensino-aprendizagem dos conceitos relacionados a curvas e superfícies. Contudo, nenhum dos autores investiga acerca da natureza dos entraves de GD, ou seja, os autores propõem o *software* como facilitador no ensino de conceitos relacionados a essa área, sem investigar as dificuldades de ordem cognitiva e epistemológica. Além disso, apenas na pesquisa de SILVA (2017) ocorre uma aplicação dos *softwares* no ensino dos conceitos de GD, de maneira mais sucinta, a autora aplica o Geogebra, Winplot e K3dsurf no estudo de superfícies quádricas.

Em relação as pesquisas de MIYASAKI (2017) e ARAÚJO (2018) também atentamos que o foco na utilização do *software* Geogebra remete apenas aos códigos utilizados para a construção de curvas, nas funções utilizadas no programa, há apenas uma visualização de curvas, ou seja, o *software* não é utilizado para uma melhor significação dos conceitos.

Dessa forma, divisamos que o autor desvaloriza a perspectiva de KABACA e AKTUMEN (2010, p.63) que salientam “o Geogebra proporciona uma oportunidade inovadora para investigar e compreender curvas descritas de modo dinâmico.” Em contrapartida, os demais autores apoiam suas discussões no uso metodológico e em caráter de complementariedade dos *softwares* dinâmicos, defendendo que esses *softwares* auxiliam no processo de ensino e aprendizagem por contribuir na visualização geométrica dos conceitos.

Em relação aos estudos de ALVES (2014, p.1) temos a realização de um estudo da construção de curvas parametrizadas defendendo que: “com origem na exploração do *software* Geogebra e do CAS Maple, evidenciamos a interpretação e significação visual de conceitos avançados, o que se mostra inexequível sem o aparato computacional.” O autor ainda comenta acerca da natureza dinâmica do Geogebra afirmando que o programa possibilita um estudo de curvas por meio da construção de gráficos de funções, a partir de suas derivadas de 1ª e 2ª ordem, reiterando que o programa “permite o esboço e a interpretação qualitativa das derivadas relacionadas com as funções derivadas que denotamos por $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{d^2x}$ (ALVES, 2014, p. 21).

No contexto de curvas, GRANDE, NUNES e SILVA (2015, p.8) também investigam propriedades geométricas de curvas planas por meio do Geogebra “buscando uma caracterização dessas curvas planas com a participação dos sujeitos da aprendizagem com a formulação de conjecturas e hipóteses de maneira intuitiva utilizando os recursos do *software* de maneira interativa”.

Com o intuito de alcançar tais objetivos, os autores utilizam o programa para obter os vetores tangente, normal, e seus respectivos vetores unitários para constituição do referencial de Frenet. Posteriormente, determinam a curvatura e constroem um gráfico que representa a variação da curvatura em função do parâmetro da curva. Na Figura 1, podemos verificar o exemplo proposto por esses autores da utilização do Geogebra para o estudo da variação do comportamento da função

⁴ Geometria Dinâmica pode-se entender como a geometria assistida por computador, em que os objetos matemáticos, como retas, ângulos e triângulos, podem ser movidos e manipulados, ao contrário da geometria em que os objetos são construídos com instrumentos euclidianos, como régua não graduada e compasso. (Grande, Nunes e Silva, 2015).

curvatura.

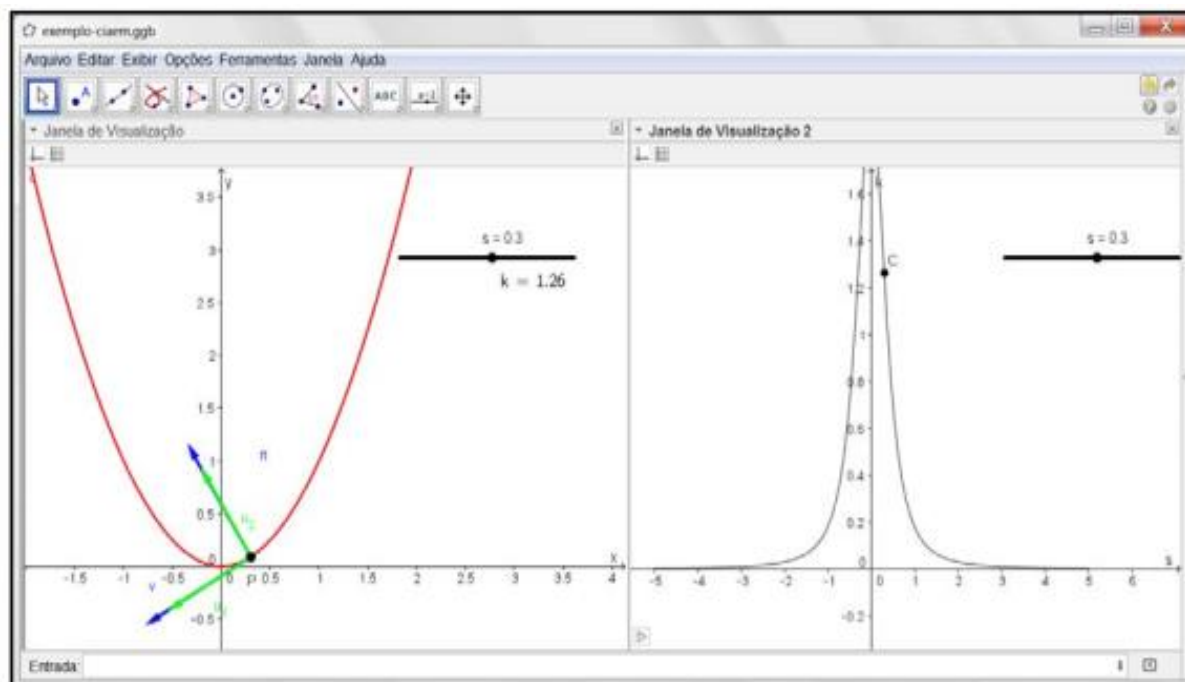


Figura 1 – Um estudo da variação da curvatura em função do parâmetro da curva

Fonte : GRANDE, NUNES e SILVA (2015, p.11)

Além disso, GRANDE, NUNES e SILVA (2015, p.11) estabelecem uma relação entre o estudo de curvas e o cálculo infinitesimal, retomando o viés defendido por ALVES (2014) acerca da aplicação dos conceitos de derivada.

Essa construção permite, por exemplo, discutir nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral, em grande medida, a questão da monotonicidade de uma função por meio de sua representação gráfica e pelos sinais das derivadas de primeira e segunda ordem da função.

Em relação ao estudo de superfícies, SILVA (2017, p. 74) realiza uma pesquisa relacionada ao ensino de superfícies quádricas⁵ utilizando os *softwares* Geogebra, Winplot e K3DSurf, concluindo que os programas “facilitaram a compreensão dos conceitos estudados e a visualização dos gráficos e características das superfícies estudadas, despertando nos discentes a curiosidade de interagir com as suas ferramentas e de aprender a construir objetos e soluções.” Além disso, SILVA (2017, p. 67) afirma que a utilização desses programas proporcionou aos alunos uma ressignificação do conhecimento relativo à superfícies:

o estudo das características e propriedades das superfícies quádricas, por meio do qual investigaram e evidenciaram conceitos que já haviam estudado com o auxílio de recursos tradicionais de ensino, conceberam novos conhecimentos, além de terem aprimorado a visualização gráfica dos objetos tridimensionais estudados.

Observe, na Figura 2, o exemplo da perspectiva de SILVA (2017) acerca da utilização do Geogebra para o estudo de superfícies quádricas, em que a visualização tem um papel fundamental na captação da característica do parabolóide elíptico.

⁵ Define-se como superfície quádrlica o conjunto dos pontos do espaço tridimensional cujas coordenadas formam um polinômio de segundo grau de no máximo três variáveis denominada de equação cartesiana da superfície.

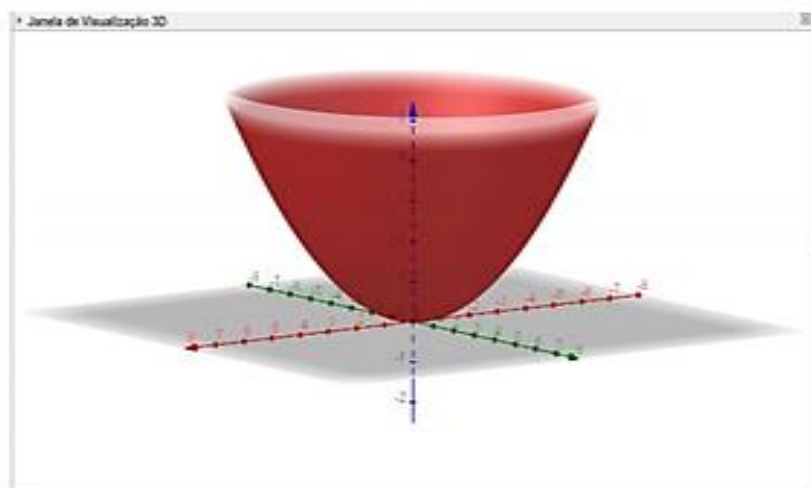


Figura 2 – Representação gráfica do parabolóide elíptico de equação $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{6} = z$ no *software* Geogebra
Fonte : SILVA (2017,p.53)

Segundo a autora, por meio da visualização da superfície quádrlica no Geogebra, os alunos comprovaram que “quando se refere a um parabolóide elíptico, a superfície é concebida ao longo do eixo que corresponde a variável de primeiro grau na forma padrão da equação” (SILVA 2017, p. 67).

Assim, com base nos últimos trabalhos citados, infere-se que a visualização possibilitada pelos *softwares* se trata de um elemento indispensável no contexto da captação de conceitos de GD, além de despertar um entendimento tácito e intuitivo de situações que elegem o uso da tecnologia.

Em função da problemática evidenciada e a notória existência da abstração em conceitos de GD, ALVES (2014), GRANDE, NUNES e SILVA (2015), SILVA (2017) reconhecem a necessidade, por parte dos docentes que ministram disciplinas nessa área, a busca pelo desenvolvimento de um ensino que torne mais compreensível esses conceitos para os alunos, ou seja, que os docentes busquem formas de reduzir a complexificação dos conceitos. Por isso, os autores reforçam a exploração da tecnologia e o domínio de certas capacidades ontológicas que são promovidas, por exemplo, a visualização.

Por exemplo, em ALVES (2014) verificamos uma ação investigativa acerca da utilização dos *softwares* Geogebra e CAS Maple para determinar uma descrição gráfica dos conceitos de retas assíntotas ao traço de curvas parametrizadas, ou seja, dada a curva $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, definida $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, pode-se determinar uma reta assíntota oblíqua, isto é, uma reta que não é nem vertical, nem horizontal, mas oblíqua, que se aproxima do traço da curva, tal fato sucede-se da posse da seguinte verificação:

$$\left\{ \lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = b \in \mathbb{R}^* \text{ e } \lim_{t \rightarrow a} [y(t) - b \cdot x(t)] = c \in \mathbb{R} \therefore y = bx + c \right\}.$$

Assim, o autor se utiliza de traços de duas curvas que admitem ramos infinitos, ou seja curvas que apresentam $\lim_{t \rightarrow t_0} \|\alpha(t)\| = +\infty$, para exemplificar tais assíntotas, apresentadas na cor azul, como apresentado na Figura 3.

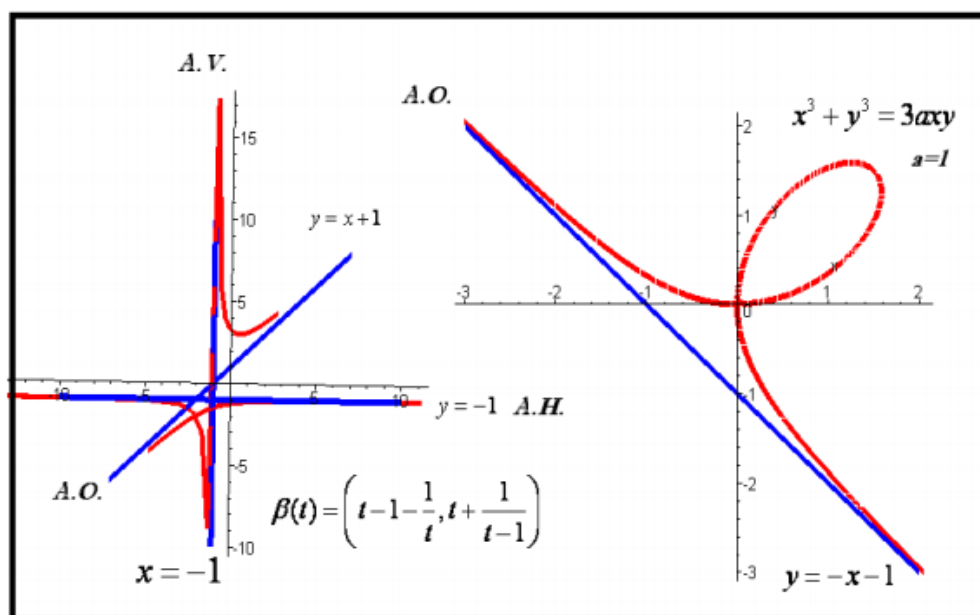


Figura 3- Exemplificação de assintotas em curvas que admitem ramos infinitos
Fonte: ALVES (2014,p.9)

No entanto, é importante ressaltar que para a utilização desses *softwares*, ou seja, construção e análise local do gráfico de curvas parametrizadas, o autor requisita o uso, de modo recorrente, tanto do conhecimento matemático, bem como das nossas habilidades de visualização e percepção (ALVES, 2013a; 2013b).

Ademais o autor conclui por meio de sua investigação que a aplicação desses *softwares*, apresenta um potencial singular no ensino dos conceitos relacionados a construção parametrizadas e suas respectivas especificidades, relatando que a “medida em que obtemos, com origem nos *softwares* Geogebra e CAS Maple, a descrição gráfico-geométrica vinculada, sobretudo, as funções $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{d^2x}$. Elas possuem papel fundamental para a compreensão do comportamento do traço (ou da trajetória de uma partícula), do ponto de vista cinemático e dinâmico” ALVES (2014, p.20).

Retomando o que já havíamos mencionado, acerca de uma escassez de estudos científicos empíricos no Brasil, no que concerne ao ensino de Geometria Diferencial – GD, tal afirmação decorre de pesquisas realizadas no banco de teses da Capes, cujas palavra-chave era: ensino de Geometria Diferencial, curvas, superfícies, não obtendo muitos resultados referente a essa temática. As pesquisas encontradas na área de GD, realizam exclusivamente investigações relacionadas às propriedades e relações matemáticas de curvas, superfícies e variedades⁶. Por outro lado, quando buscamos no banco de teses da Capes, as palavras-chave: Geogebra, ensino de geometria, nos deparamos com um número

⁶ A noção de variedade diferenciável formaliza o conceito de um espaço que localmente é como um espaço euclidiano, seja do ponto de vista topológico ou em relação a sua estrutura diferenciável. Esta noção é uma abstração das noções usuais de curva e superfícies em $\mathbb{R}^n$ (Lima, 1973). Assim, como a noção intuitiva de variedade está relacionada ao espaço topológico inserido, podemos denotar uma curva, como uma variedade de dimensão zero, uma superfície como uma variedade de dimensão 1, e uma variedade em $\mathbb{R}^n$ como uma variedade de dimensão n, ou seja, n-variedade.

excessivo de pesquisas nesse âmbito, que apontam diversas competências do *software* no ensino de conceitos geométricos.

Em relação ao cenário internacional, também constatamos uma quantidade reduzida de pesquisas relacionadas ao ensino dessa área, no entanto, destacamos a existência de uma literatura abordando a aplicação do Geogebra a nível superior de ensino, e que utilizam o *software* para a visualização de algumas curvas, tais abordagens encontram-se em FLÓREZ *et al.* (2011), AKTÜMEN (2013), PINSKY (2013), BREDA *et al.* (2013), BREDA e SANTOS(2015),PICADO(2019).

Em relação a esses estudos, buscamos avaliar a perspectiva e os resultados evidenciados com a utilização desse *software*. Por exemplo, nos estudos AKTÜMEN (2013, p.90), apesar do autor não investigar acerca do ensino de GD, e apenas utilizar o *software* para solucionar problemas de modelagem matemática, o autor afirma que:

A modelagem matemática de um problema da vida real com Sistemas de Álgebra Computacional (CAS) e *Software* de Geometria Dinâmica (DGS) é considerada por pesquisadores focados neste campo como uma atividade de resolução de problemas que atende aos propósitos da aprendizagem matemática.

Além disso, AKTÜMEN (2013) ainda se baseia em ZBIEK e CONNER (2006) para declarar que a modelagem contribui especificamente para a compreensão de conceitos matemáticos, à aprendizagem de novos conceitos matemáticos, ao estabelecimento de relações interdisciplinares e ao desenvolvimento conceitual e processual de estudantes através da demonstração detalhada da aplicabilidade de conceitos matemáticos na vida real. Dentre esses conceitos da vida real, o autor afirma que as equações paramétricas de curvas estão presentes no cotidiano, exemplificando que em máquinas de fresagem com controle numérico computadorizado, os cálculos são realizados usando equações paramétricas.

Ainda em relação a ação investigativa de AKTÜMEN (2013), o autor concebe situações simples do cotidiano, para descrever conceitos matemáticos, por exemplo: “ao construirmos qualquer função, qual é a forma e equação paramétrica da curva gerada pelo movimento da caneta?”. Por meio da Figura 4, podemos observar um exemplo de tal processo de modelagem matemática destacado pelo autor, na construção de uma curva manualmente, no sentido anti-horário:

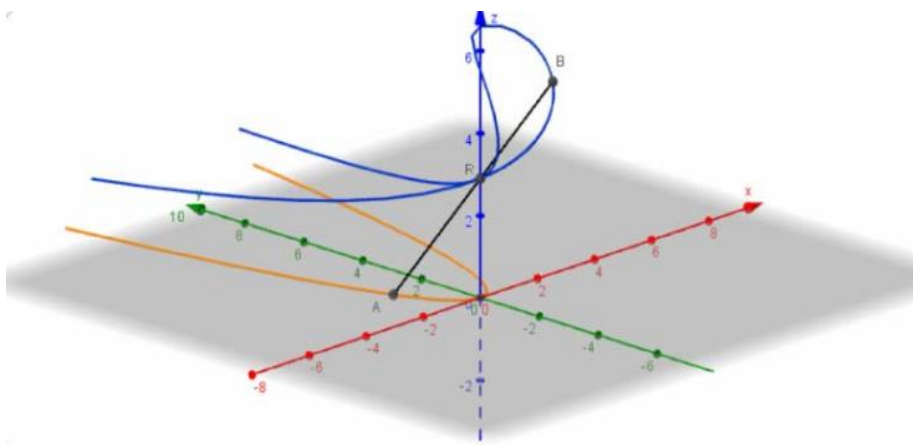


Figura 4 - Curva formada como resultado do movimento do anti-horário da caneta em função $f(x) = x^2$

Fonte: AKTÜMEN (2013, p.95)

Assim, o autor inicia os estudos referentes a curva, por meio de conceitos conhecidos pelos estudantes, no caso uma equação do segundo grau, representada na Figura 4 pela cor amarela, e eleva esse conhecimento para um assunto a nível superior, um estudo de curvas paramétricas, representada pela cor azul. Segundo o autor, essa abordagem favorece a participação ativa dos estudantes na aprendizagem, além de auxiliar os estudantes que apresentam dificuldades em termos de desenvolvimento de suas habilidades espaciais.

PINSKY (2013) apresenta uma análise do conhecimento matemático necessário para o ensino sobre as curvas e superfícies regulares, evidenciando os conceitos importantes em geometria diferencial que generalizam para a noção avançada de uma variedade, tanto em uma sala de aula de faculdade e em um formato de ensino a distância, ou seja, um formato on-line.

Ademais, as abordagens desses conceitos são realizadas por meio de *softwares*, desenvolvendo se com a aplicação de controles deslizantes que movem um ponto ao longo de um traço, ajudando o leitor a pensar na curva como uma função, identificando visualmente um ponto no domínio (o controle deslizante) com um ponto no intervalo (marcado por um pequeno disco). Tomados em conjunto, estes exemplos ilustram gama de maneiras pelas quais uma função pode preencher ou deixar de cumprir as propriedades de curvas diferenciais parametrizadas.

Assim, o autor emprega imagens manipuláveis, juntamente com as propriedades e definições matemática, para simplificar o conteúdo matemático. Por exemplo, nas imagens a seguir, o autor correlaciona a visualização com o conceito de diferenciabilidade de uma curva plana.

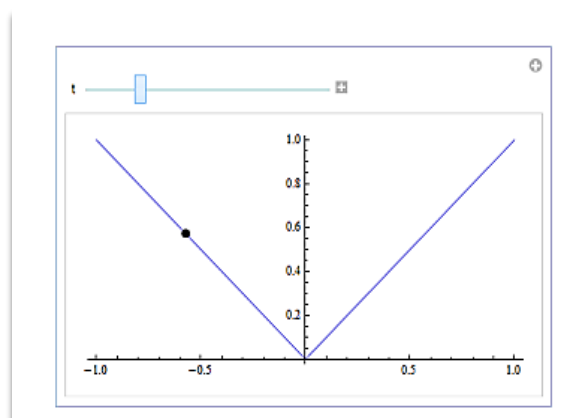


Figura 5 – Exemplificação de uma curva parametrizada que não é diferenciável em um ponto.
Fonte : PINSKY (2013, p. 22)

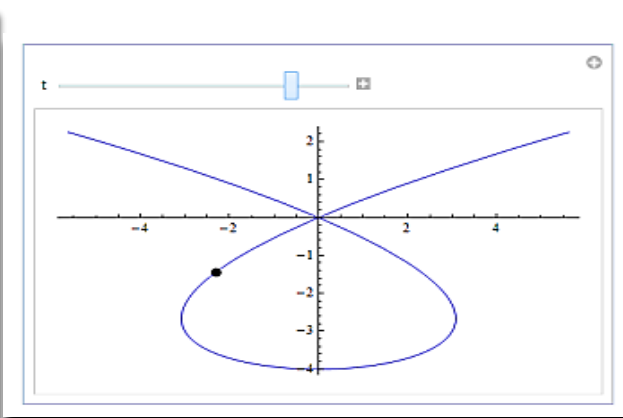


Figura 6 – Exemplificação de uma curva parametrizada diferenciável em todos os pontos.
Fonte : PINSKY (2013, p. 22)

Na pesquisa de FLÓREZ *et al.* (2011), os autores investigam a representação de um tipo de curva bastante utilizada na engenharia, a cicloide, epicycloide, hipocicloide, por meio do *software* Geogebra. Dessa forma, o intuito da pesquisa realizada seria desenvolvimento de simulações no *software* que auxiliassem o aluno a aprofundar e ampliar a compreensão de conceitos mecânicos e leis relacionadas a essas curvas, a seguir, temos um exemplo apresentado pelo autor.

Os autores definem o objeto de estudo como curvas planares obtidas pelo movimento de um ponto de um círculo ou uma linha que rola sem deslizar em outro círculo ou linha. Essa linha ou círculo

em movimento é chamado de roda de rolamento círculo, e a linha ou círculo ao mover a roda é a base do círculo fixo. A seguir, exibiremos a representação, elaborada pelos autores, de uma dessas curvas:

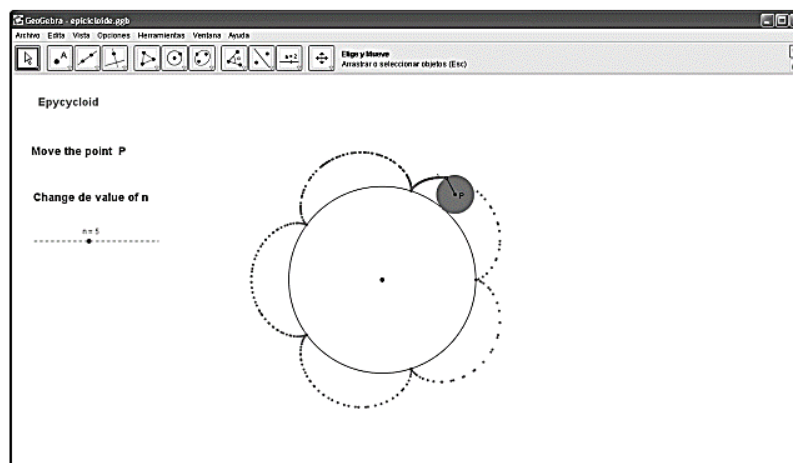


Figura 7 – Representação da epiclóide
Fonte: FLÓREZ *et al.* (2011, p.4)

Ao fim da sua pesquisa, os autores concluem que a visualização dessas curvas, permite ao professor o desenvolvimento do seu próprio design didático, disponibilizando atenção aos entraves de aprendizagem e aos tópicos mais importantes para os estudantes de mecânica.

BREDA *et al.* (2013, p.61) desenvolve uma investigação acerca de algumas aplicações do Geogebra com o intuito de visualizar objetos tri e tetra dimensionais, promovendo a compreensão de conceitos e propriedades a eles inerentes. Em razão disso, os autores desenvolvem sua pesquisa com um experimento com *software* em uma turma do 1º ano do Ensino Secundário, desenvolvendo algumas potencialidades do Geogebra (versão 4.9), tais como: “manipulação de objetos dum plano no espaço e representação de funções vetoriais reais uni ou bidimensionais de duas variáveis reais recorrendo a domínios coloridos no caso tetradimensional”. Na Figura 8, podemos observar o exemplo de tal aplicação:

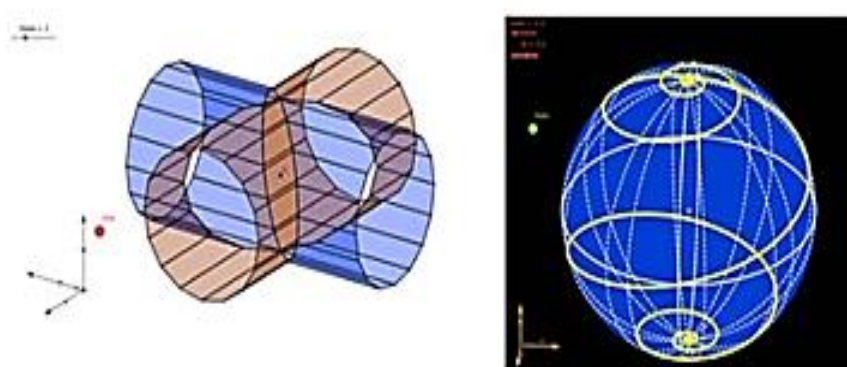


Figura 8 – Representação da interseção de dois cilindros (à esquerda) e da loxodromia esférica (à direita)
Fonte : página Daniel Mentrard <http://dmentrard.free.fr/> apud Breda *et al.* (2013, p.62)

Na aplicação acima, os autores desenvolvem na Figura à direita a visualização da curva loxodromia esférica gerada por meio da aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $f_1(x) = \frac{R \cos(x)}{\cosh(mx)}$, $f_2(x) = \frac{R \sin(x)}{\cosh(mx)}$ e $f_3(x) = R \tanh(mx)$, com $R, m \in \mathbb{R}$, obtendo uma lista de pontos através do comando

sequência do *software* Geogebra. Prosseguindo a percussão investigativa da autora, contemplamos que a execução do *software*, sucedeu-se com a explanação das simulações, sem a necessidade por parte dos alunos, de um conhecimento das ferramentas do *software* :

professor utilizou o *software* projetando o écran do computador, solicitando aos alunos a antecipação das suas ações e, muitas vezes, colocando um aluno a trabalhar no computador, seguindo este as sugestões do professor, doutros colegas, ou sendo ele próprio a propor e a executar o procedimento a adotar (Breda *et al.* 2013,p.65).

Ou seja, o *software* foi utilizado com o intuito de apresentar novos conceitos matemáticos, explorar situações diversas desencadeadas pela resolução de problemas ou exercícios, sem a realização de um estudo dos códigos utilizados para a construção desses conceitos e/ou as funções utilizadas no programa.

Ainda em relação a experiência investigativa, BREDA *et al.* (2013,p.64) disserta que por meio da visualização podemos ultrapassar entraves no entendimento de alguns conceitos geométricos, dado que a visualização “tridimensionalidade dos objetos em estudo é, para os alunos, uma fonte acrescida de dificuldades, ainda mais quando se pensa em conexões envolvendo a álgebra”. Desse modo, os autores defendem que a possibilidade de visualização em 3D “parece ser uma forma de facilitara apreensão de conceitos e de favorecer a aprendizagem dos alunos” (BREDA *et al.* 2013, p.64).

Ao final de tal prática, os autores constataram com a introdução das funcionalidades 3D no Geogebra “passa a estar mais acessível a representação de elementos no espaço. Sem grande esforço de adaptação, qualquer utilizador de um *software* de Geometria Dinâmica poderá construir e manipular objetos em 3D” (BREDA *et al.* 2013, p.64). Ademais, os autores salientam que alguns alunos, por vontade própria, usavam em casa o *software* para os auxiliar na visualização e resolução de exercícios propostos na aula.

BREDA *et al.* (2013) ainda realiza um estudo acerca da representação de superfícies em $\mathbb{R}^3$ e de funções de várias variáveis reais em $\mathbb{R}^3$ no *software*, no entanto, a autora não realiza uma experiência investigativa com esses conceitos. Para realizar a exploração de tais representações, a autora afirma a existência da necessidade de mudança na versão do *software* Geogebra, adotando a versão 5.0, e a aplicação de uma ferramenta do *software* denominada espectro de cores. Nas figuras que se seguem, podemos observar exemplificações da representação desses conceitos em $\mathbb{R}^3$ com a utilização de tal ferramenta:

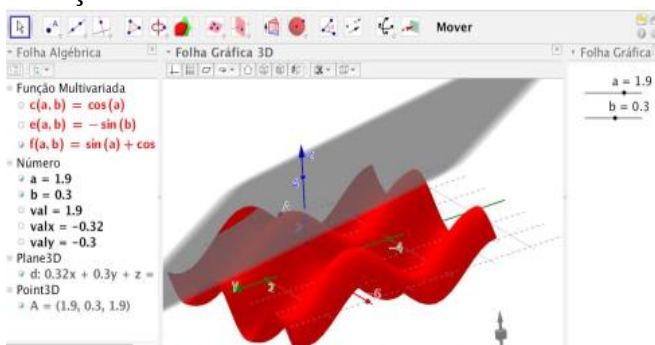


Figura 12- Plano tangente a no ponto A

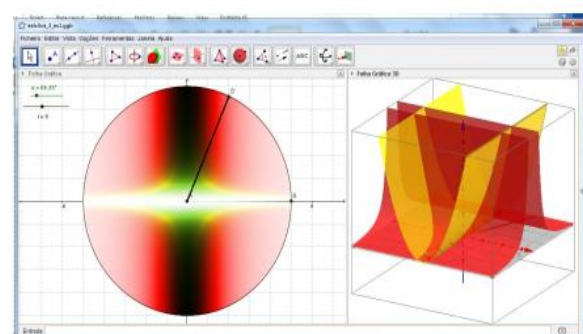


Figura 16. Domínio colorido de $f(x,y)=(x^2,1/y^2)$

Figura 9– Exemplos de construção, no Geogebra, de superfícies em $\mathbb{R}^3$, e funções de várias variáveis em $\mathbb{R}^3$ com a ferramenta espectro de cores.
Fonte: BREDA *et al.* (2013,p.76- figura a esquerda, p.80- figura a direita)

Na Figura a esquerda, encontram-se representados a superfície definida pela função $f(x, y) = \sin(x) + \cos(y)$ e um ponto A situado nessa superfície. Além disso, temos a representação do plano tangente à superfície nesse ponto, para isso, os autores calcularam o valor das derivadas parciais em A e escreveram a equação do plano tangente, por meio dos comandos:

```
fx=Derivada[f,x]; fy=Derivada[f,y];  
f(a,b)+fx(a,b)*(x-a)+fy(a,b)*(y-b).
```

Figura 10- Comandos para a determinação do plano tangente a superfície
Fonte : Fonte: BREDA *et al.* (2013,p.76)

Em relação à Figura da direita, os autores realizam uma análise da função $f(x, y) = (x^2, \frac{1}{y^2})$ no disco limitado pelo círculo de centro em $(0,0)$ e raio 5. Por meio da ferramenta espectro de cores, observa-se, para esta função, que este domínio apresenta simetria de reflexão em relação aos eixos coordenados e simetria central.

Além disso, o aparecimento de uma faixa escura em torno do eixo das ordenadas induz a formulação da conjectura da existência de zeros nessa região, no entanto, vale salientar que esta região tende a fazer fronteira com uma região colorida a branco o que significa que as funções componentes podem estar a oscilar entre valores muito próximos de zero e valores tão grandes que parecem aproximar-se de infinito. Contudo, os autores apontam que apesar desta percepção do comportamento da função f , deve recorrer-se à via analítica para a refutar ou estabelecer tais conjecturas.

Assim, pela via analítica, os autores constataam que uma das funções componentes não tem zeros, ou seja, não existe limite de $f(x, y)$ quando (x, y) se aproxima de $(a, 0)$ qualquer que seja $a \in [-5, 5] \setminus \{0\}$. Breda *et al* (2013, p. 80) salienta que “a imagem da reta $y = 0$ sem a origem é um invariante para f com a particularidade de pontos desta reta de ordenada não nula, entre -1 e 1, serem transformados em pontos da mesma reta cuja ordenada varia entre $] - 1, + \infty[$, sendo que $(0,1)$ é um ponto fixo de f ”.

Desse modo, BREDA *et al.* (2013) desenvolve por meio das potencialidades do Geogebra, recursos que facilitem o processo de entendimento de conceitos geométricos a um nível superior, enfatizando a possibilidade da representação do domínio e do contradomínio de funções, analisando a sua ação sobre determinados tipos de grelhas (cartesianas, polares, etc.), curvas ou regiões.

Em relação as pesquisas de BREDA e SANTOS (2015) os autores legitimam que *software* Geogebra permite a manipulação de objetos no plano, no espaço e a representação de funções vetoriais reais uni ou bidimensionais de duas variáveis reais. Além disso, os autores utilizam a ferramenta Projeção Estereográfica de um ponto do plano na esfera de Riemman, estendido com as propriedades das cores dinâmicas que permitem representar os domínios coloridos, possibilitando o desenvolvimento de aplicações que podem ser usadas no ensino e da aprendizagem de tópicos de geometria diferencial, análise complexas entre outros.

Na Figura 11, apresentaremos algumas das aplicações dessa ferramenta propostas pelos autores para o ensino desses tópicos.

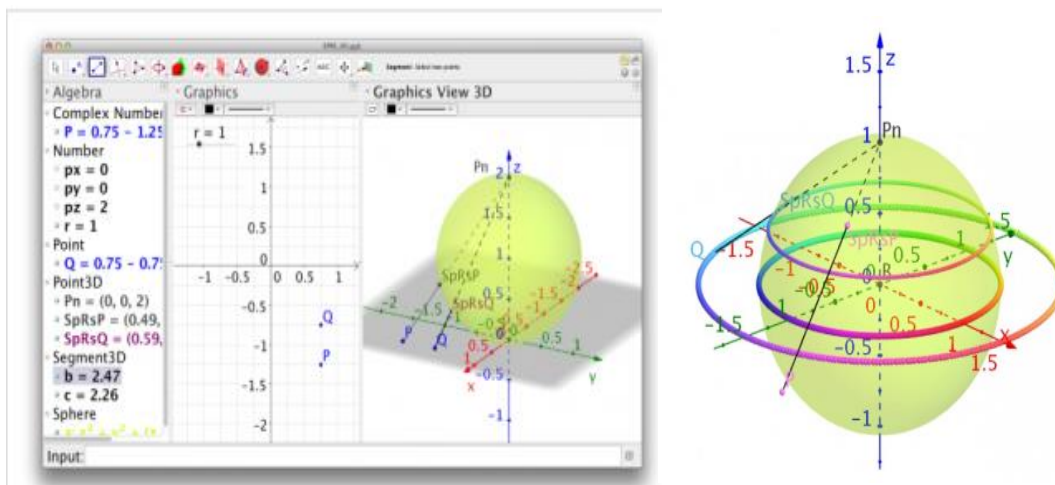


Figura 11 – Algumas das aplicações da ferramenta Projeção Estereográfica
Fonte: BREDA e SANTOS (2015, p. 4 – figura à esquerda, p. 5 -figura à direita)

BREDA e SANTOS (2015) culminam seu trabalho com algumas experiências de aplicação de tarefas baseadas nestas aplicações, e inferem a partir dos dados obtidos que a visualização dos conceitos desempenharam um papel positivo, dados que os alunos compreenderam as atividades, efetuando manipulações e construções as aplicações no Geogebra, apesar da complexidade que lhes são inerentes.

Em relação a pesquisa de PICADO (2019), é realizada uma apresentação da elaboração de sólidos com suas perspectivas angulares, geradas pela intersecção de superfícies, por meio do Geogebra 3D, para isso, o autor efetua uma breve revisão de como parametrizar segmentos de curvas no programa. Além disso, o autor propõem ao leitor alguns exercícios para colocar em prática os conhecimentos adquiridos, bem como algumas soluções dos exercícios.

Em contrapartida atentamos que o foco do autor na utilização do *software* Geogebra remete apenas aos códigos utilizados para a construção, atuando como um tutorial para a elaboração de procedimentos citados anteriormente, ou seja, o *software* não é utilizado para uma melhor significação dos conceitos.

Desta maneira, podemos concluir por meio da revisão bibliográfica realizada, que os estudos desenvolvidos no *lôcus* acadêmico, não apresentam relatos das dificuldades atinentes ao ensino de tópicos de Geometria Diferencial – GD. Por outro lado, vislumbramos certas possibilidades de visualização e aquisição de habilidades perceptuais por meio do ensino dos conceitos de GD, com recursos tecnológicos, de forma mais sucinta, a utilização de *softwares* que promovam a visualização desses conceitos.

2.2 A imprescindibilidade do tema de pesquisa

A partir do levantamento bibliográfico realizado, atestamos que as pesquisas realizadas no âmbito de ensino de conceitos GD, não realizam um estudo acerca dos elementos das dimensões

cognitivas, didáticas e principalmente os elementos de ordem epistemológica e, ainda, por constituir-se um conteúdo significativo em Matemática, defendemos a oportuna pesquisa no âmbito de ensino de GD, sobretudo, o tipo de investigação que explora a tecnologia, com o intuito de descrever/proporcionar determinados cenários de aprendizagem diferenciados daqueles que se apoiam apenas nas propostas dos livros de Geometria Diferencial.

Assim, com origem nas ideias de ALVES (2014), AKTÜMEN (2013), PINSKY (2013) perspectivamos elementos diferenciados e necessários para a abordagem e transmissão didática dos conteúdos de GD. Desse modo, a exploração da tecnologia se torna, imprescindível no sentido de identificar e perceber esses elementos.

Vale assinalar, ainda, que evitamos discutir nossas relações pessoais, individuais e subjetivas de envolvimento com o assunto por se tratarem de elementos de ordem indistinguíveis num relato de natureza científica. Dessa forma, exibiremos, de modo resumido, elementos que confirmam a relevância e justificativa do desenvolvimento para o nosso trabalho, por meio da revisão bibliográfica, a saber:

- O déficit de estudos relacionados ao ensino e aprendizagem de GD no *locus* acadêmico;
- O estudo de GD, necessita de ampla quantidade de pré-requisitos, como a aplicação dos conceitos de funções diferenciáveis, derivada e integral, paralelismo, ortogonalidade e operações entre vetores. Tais conceitos aliados ao grau de complexidade e abstração envolvidos nos conteúdos de GD, pode desenvolver alguns entraves ao estudar mencionado tópico.

Assim, os conceitos basilares de curvas e incipientes de superfícies foram escolhidos por se tratar elementos necessários para a compreensão dessa área matemática, atuando como suporte para o entendimento dos conteúdos avançados da área. Além disso, tais conceitos, possuem um marco inicial no Cálculo de uma Variável- CUV, conhecido como a disciplina de Cálculo 1, com o cálculo de áreas de curvas, volumes de sólidos de revolução, passando para o Cálculo de Várias Variáveis – CVV com o estudo de alguns conceitos relacionados a superfícies, voltando a se manifestar como objeto de estudo em GD. A seguir, realizamos uma abordagem sucinta que contém as ideias norteadoras da nossa problemática, e determina o viés de ensino em que atuamos.

2.3 Perspectiva de investigação do problema.

Através da revisão bibliográfica podemos atestar a complexidade envolvida nesse campo matemático e debater acerca de uma tendência na educação matemática que consiste na utilização de *softwares* de Geometria Dinâmica de modo a oportunizar uma forma diferenciada de exposição do conteúdo matemático, que favorece o entendimento dos conceitos trabalhados.

Portanto, pretendemos concomitantemente ao que assinalamos na introdução desse trabalho, do ponto de vista do *design* de investigação da ED, investigar o uso de *software* ao ensino de GD. Desse modo, por meio da sistemática dessa metodologia de pesquisa, na fases iniciais, as análises prévias, determinamos as principais dimensões que definem o problema a ser estudado e como se relacionam

com o sistema de ensino, por exemplo: as dimensões epistemológicas, cognitivas e didáticas (ALMOULOU,2007).

Por conseguinte, esclarecemos que identificamos os problemas de ensino relacionados aos conceitos basilares de curvas e incipientes de superfície, ao analisarmos o ensino de GD na perspectiva de ALMOULOU (2007, p.172) :

- (i) estudo da organização matemática,
- (ii) análise didática do objeto escolhido.

De modo específico, concernente ao item (i), nos atemos: ao estudo das gêneses históricas envolvendo os conceitos de GD (apresentada no capítulo 3); sua funcionalidade atual na Matemática (limitações para o uso didático); obstáculos relativos ao ensino de GD (os conhecimentos prévios reconhecidamente complexos vinculados ao ensino de GD); a estrutura atual do ensino do GD e seus efeitos. Relativo ao item (ii), apontamos a relevância da análise realizada nos livros didáticos (apresentada no capítulo 3). Ademais, essa análise resultou na formulação de hipóteses que nos auxiliaram a responder a nossa questão norteadora do nosso objeto de investigação :

1ª) Uma mediação condicionada pela abordagem dos livros de GD não promove a visualização e o entendimento gráfico-geométrico (local) atinente ao conceitos dessa área;

2ª) Situações de aprendizagem definidas pelos exercícios propostos pelos autores de livros de GD permitem apenas a aquisição de habilidades manipulativas de equações, que incidem ou acarretam em resultados de significado restrito, sem um entendimento amplo dos conceitos.

Diante do cenário exposto e nesses entraves destacados, enfatizamos a necessidade em realizar um estudo, cujo objetivo envolvesse a identificação de elementos capazes de atuar positivamente no referido contexto de ensino. Em relação ao desenvolvimento de situações didáticas que envolvem os conceitos basilares de curvas e incipientes de superfícies, amparadas pelo *software* Geogebra, enfatizamos que não elaboraremos um tópico específico para o programa Geogebra, devido a existência de inúmeros trabalhos que apresentam a potencialidade desse software no contexto do ensino e aprendizagem de conteúdo específicos da Matemática.

Logo após, apresentaremos de modo detalhado, as teorias que nos auxiliaram com o nosso fenômeno de interesse. Salientamos, de modo sucinto que o capítulo 3 consiste em nosso quadro de referencial teórico, detalhando a nossa metodologia de pesquisa, a Engenharia Didática, esmiuçando as suas fases, depois, exibiremos a forma em que utilizaremos a nossa metodologia de ensino, a Teoria das Situações Didáticas, explicitando as fases para a elaboração das situações didáticas.

3 ENGENHARIA DIDÁTICA E TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Nas seções anteriores, verificamos que a visualização de conceitos geométricos pode desempenhar um papel significativo para a compreensão de alguns tópicos de Geometria Diferencial, mais especificamente, os conceitos basilares de curvas e incipientes de superfícies. Por essa razão, pretendemos apresentar uma perspectiva sistemática que identifique os elementos que possuem a capacidade de atuar positivamente e outros que podem atuar como entraves no ensino de GD, aliados a superação desses entraves por meio de recursos tecnológicos.

Assim, diante de tal perspectiva, iremos detalhar, neste capítulo, as principais teorias aplicadas para investigarmos tal questão e embasarmos de forma qualitativa a nossa pesquisa, a saber: a Engenharia Didática – ED (ARTIGUE,1986), e a Teoria das Situações Didáticas – TSD (BROUSSEAU,1986).

3.1 – A gênese da Engenharia Didática - ED

A concepção da metodologia intitulada Engenharia Didática ocorreu a partir dos anos 80, como uma forma de concretizar os ideais e pressupostos de investigação da Didática da Matemática Francesa - DM. Conforme POMMER (2013, p. 10) *apud* DOUADY (1985) essa didática pode ser definida como:

“a área da ciência que estuda o processo de transmissão e aquisição de diferentes conteúdos no ensino básico e universitário, propondo-se a descrever e explicar os fenômenos relativos ao ensino e a aprendizagem específica da Matemática”.

Nos primórdios da DM, foram criados centros universitários, chamados de Institutos de Pesquisa sobre o ensino de Matemática (*Institut Universitaire de Recherche sur L'Enseignement des Mathématiques* - IREM) que fomentavam a criação de recursos e meios para aprimorar o trabalho em sala de aula, que posteriormente evoluíram para uma estruturação de um quadro teórico mais amplo, de modo a possibilitar a concepção de situações de aprendizagem e também servir como referencial metodológico para a posterior análise do material empírico (ALVES, 2016a); (POMMER,2013).

Segundo ALMOULOU (2016), as teorias psicológicas cognitivas de Piaget sobre o desenvolvimento da inteligência e a aquisição de conceitos conjuntamente com análises epistemológicas e históricas de Vygotsky contribuíram para se estabelecer o campo científico que investigasse a DM. Na concepção de ALMOULOU (2007, p. 25) as reflexões trazidas por esse campo científico, se tratavam de um estudo dos “problemas de ensino de conceitos matemáticos em razão das exigências próprias do saber matemático”.

Assim, os conhecimentos desenvolvidos pela DM se propõem a oferecer elucidações, conceitos e teorias, assim como meios de previsão e análise, de situações relacionadas aos fenômenos de transmissão do saber matemático baseados na epistemologia matemática desse conhecimento.

Contudo, devemos observar que “a didática não consiste em fornecer um modelo para o ensino, mas produzir um campo de conhecimentos e de questões que permitem colocar em prova qualquer situação de ensino e que permita corrigi-la e melhorá-la” (BROUSSEAU, 1989, p. 16).

ALVES (2016a, p.136) traduz uma impressão *sui generis* de BROUSSEAU (1989, p. 14) acerca de um processo explorado pela DM, que consiste no fenômeno de transmissão do saber matemático, dissertando que:

“o matemático não comunica seus resultados sob a forma que eles o encontra; ele os organiza, ele os fornece uma forma mais geral possível, ele desenvolve uma “didática prática” que consiste em colocar o saber sobre forma comunicável, descontextualizada, despersonalizada e destemporalizada”

Vale salientar que, para obtermos sucesso no processo descrito anteriormente, devemos analisar a natureza dos objetos e processos matemáticos, que por si mesmos podem proporcionar entraves e bloqueios ao ensino (ALVES 2016a). O entendimento de tais bloqueios, é sistematizada pelo filósofo Gaston Bachelard (1884 – 1962), que os denomina como obstáculos epistemológicos. Segundo o filósofo esses obstáculos se tratam de elementos que pode retardar, e mesmo impedir um processo de entendimento do estudante submetido a uma ação intencional de ensino (BACHELARD, 1995).

Ademais BACHELARD (1995), defende a importância da exploração de tal conceito, explanando acerca da complexidade existente no mesmo:

A noção de obstáculo epistemológico pode ser estudada no desenvolvimento histórico do pensamento científico e na prática da educação. Em ambos os casos, esse estudo não é fácil. A história, por princípio, é hostil a todo juízo normativo. É, no entanto, necessário colocar-se num ponto de vista normativo, se houver a intenção de julgar a eficácia de um pensamento. (BACHELARD, 1995, p. 21).

Em consoante com as idéias defendidas por BACHELARD (1995), BROUSSEAU (1989), temos diversos pesquisadores como CHEVALLARD (1991), DOUADY (1984) que discutem os variados elementos proeminentes e determinantes no processo de transmissão de saberes matemáticos.

Assim tendo em vista que a DM investiga o processo de transmissão de saberes matemáticos em relação a diversas perspectivas, e a relevância dessa concepção de análise e investigação dos problemas envolvendo o binômio ensino-aprendizagem, surgiu a necessidade de uma sistematização dos conhecimentos cumulativos do campo da DM, exigindo uma formulação de princípios e paradigmas investigativos (ALVES, 2016a).

Desta forma, concebeu-se a disseminação e delimitação de um campo de estudos, direcionados e preocupados com os estilos de investigação, pesquisa-ação e de práticas de intervenção controladas, que passaram a receber o status de *design* de investigação. GONDINO *et al.* (2013, p.3) define esse status como “um paradigma metodológico que possa indicar o processo de condução sistemática de certas investigações que, quase de modo predominante, evoluem a intervenção expressiva nos espaços educacionais”.

Dentre os métodos desenvolvidos para a sistematização de investigação desse campo, destaca-se a Engenharia Didática - ED como um “*modus operandi* de perquirição sistemática e científica dos

fenômenos relacionados com o ensino e com a aprendizagem em Matemática em seus diversos níveis” (ALVES (2016b, p. 50) apud LABORDE, 1997).

Segundo ALMOULOU E SILVA (2012, p.26) o desenvolvimento da ED, ocorreu gradativamente, modificando-se ao longo dos anos:

[...] a noção de Engenharia Didática (clássica ou de primeira geração) emergiu na didática da matemática no início dos anos 1980. Primeiramente em 1982 por Yves Chevallard e Guy Brousseau, depois, em 1989, por Michèle Artigue. Ela foi apresentada como uma metodologia de pesquisa suscetível de fazer aparecer fenômenos didáticos em condições mais próximas possíveis do funcionamento de uma sala de aula clássica.

ALVES E CATARINO (2018) também dissertam a respeito do desenvolvimento dessa metodologia, na perspectiva das mudanças ocorridas durante esse aperfeiçoamento:

a respeito do processo endógeno evolutivo da ED, apreciamos também um progressivo terreno de discussão que repercutiu nos mecanismos de investigação, tendo em vista o entendimento de entraves e obstáculos resistentes, “situações parasitas” indesejadas ao ensino/aprendizagem em Matemática, em seus diversos níveis.

De acordo com ARTIGUE (1984, p.265), essa construção da ED, trouxe um caráter diferenciativo a metodologia, resultando em estruturação que investiga os problemas de natureza nova, pois:

de um lado, a realização experimental supõe, ela mesma, uma espécie de transmissão em direção aos aprendizes, que devem ser os atores e, por outro lado, como quadro de metodologias externas, não podemos importar facilmente o ‘sentido’ de reprodução de outros campos científicos específicos.

À vista desse caráter diferenciativo dessa metodologia conjuntamente a sistematização prevista pela mesma, que apresentaremos a seguir, optamos pela aplicação dessa metodologia para a análise da problemática existente no ensino de GD, por permitir o entendimento e controle epistemológico, por parte do pesquisador. Tal controle, segundo (ARTIGUE, 1984, p. 1), funcionará no sentido de: nos auxiliar a retomada da historicidade dos conceitos científicos matemáticos; e a compreensão do papel das noções matemáticas, como o rigor, cultivado no ensino atual.

3.2 Sistematização prevista pela Engenharia Didática

A Engenharia Didática como metodologia de pesquisa, na visão de ARTIGUE *et al* (1995) traduzida por ALVES (2018c, p. 38) designa “um conjunto de sequências de classes concebidas, organizadas e articuladas no tempo, de maneira coerente, por um professor-engenheiro, como fim de realizar um projeto de aprendizagem para uma população determinada de alunos”.

Em consonância ALMOULOU, DE QUEIROS e COUTINHO (2008, p.66) definem a ED como “um esquema experimental baseado em “realizações didáticas” em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino ”.

Ainda conforme os autores, a metodologia caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre as análises iniciais e finais da pesquisa, denominadas de análises *a priori* e análises *a posteriori*. Tal tipo

de validação é uma das singularidades dessa metodologia, que pode ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste.

Ademais, ALVES (2012) determina que essa metodologia apresenta dois níveis de pesquisa: a microengenharia e a macroengenharia. A pesquisa em microengenharia exterioriza um olhar mais restrito, na medida em que se interessa pelas relações e fenômenos ocorrentes em sala de aula, enquanto que a pesquisa em macroengenharia se aprofunda nas dificuldades metodológicas e institucionais.

Devemos ressaltar que a ED pode classificar-se em duas tendências, a Engenharia Didática clássica, ou Engenharia de 1ª geração, cujo interesse maior se “revelou pela modelização das atividades do estudante, seu progresso de aprendizagem e os elementos clássicos perspectivados no triângulo didático indicado por: estudante – professor – conhecimento”(ALVES,2018b, p.49). Em consonância, ALMOULOU (2012,p.27) declara que a tendência inicial da ED, tinha por objetivo

a elaboração e o estudo de uma proposta de uma transposição didática para o ensino, sendo essa transposição didática o objetivo principal da pesquisa. Mas, ao mesmo tempo, estudavam-se, também, outros fenômenos didáticos mais gerais que permitiam enriquecer e ampliar os quadros teóricos em construção.

Contudo, percebeu-se em tal tendência, determinadas insuficiências que foram apontadas e discutidas pelos didatas da Matemática, correspondentemente ao papel e a atividade do professor de Matemática, acarretando o desenvolvimento de uma nova tendência, sob o viés da ED, todavia, intitulada Engenharia Didática de 2ª geração ou Engenharia Didática de Formação - EDF (ALVES,2018a). Segundo ALMOULOU (2012), essa nova tendência, tem como objetivo o desenvolvimento de recursos (ou objeto de aprendizagem) para o ensino regular, ou a formação de professores.

Assim, tendo em vista que a nossa atenção será dedicada a um público particular de professores em formação continuada, delimitamos que adotaremos os pressupostos de uma Engenharia Didática de 2ª geração. Em relação a sistematização prevista pela ED, estabelecemos que a mesma é composta por quatro fases: análises prévias, análises *a priori*, experimentação, análise *a posteriori* e validação, que serão apresentadas nas seções a seguir.

3.2.1 Análises prévias

Na primeira fase da ED, as análises prévias, o pesquisador determina as principais dimensões que definem o problema a ser estudado e como se relacionam com o sistema de ensino, por exemplo: as dimensões epistemológicas, cognitivas e didáticas (ALMOULOU,2007).

De forma mais sucinta, ALVES (2018b, p.13) retrata a perspectiva de ARTIGUE (1995), descrevendo que a dimensão epistemológica abrange as “características do saber em jogo”, a dimensão cognitiva explora “as características cognitivas do público alvo” e por fim a dimensão didática que averigua “as características relacionadas ao funcionamento do sistema de ensino”.

Desse modo, investigamos a gênese do campo epistêmico matemático de GD e os respectivos conceitos matemáticos desse campo, na análise epistemológica, a mobilização de um pensamento intuitivo dos participantes da pesquisa que conduziu ao desenvolvimento de um raciocínio inferencial durante a aplicação da pesquisa, ou seja, a previsão das possíveis concepções dos alunos, na análise cognitiva, e a adaptação dos conceitos científicos de GD a um saber escolar, na análise didática.

Contudo, ressaltaremos que nessa pesquisa, desconsideraremos o viés da análise didática no que diz respeito a análise institucional, dado que nossa discussão envolve um planejamento para uma eventual experimentação em sala de aula. Prosseguindo, com as finalidades dessa fase inicial da ED, POMMER (2013, p.23) disserta acerca do papel do pesquisador nessa etapa:

Nesta análise preliminar é feita uma revisão bibliográfica envolvendo as condições e contextos presentes nos vários níveis de produção didática e no ambiente onde ocorrerá a pesquisa, assim como uma análise geral quanto aos aspectos histórico epistemológicos dos assuntos do ensino a serem trabalhados e dos efeitos por eles provocados, da concepção, das dificuldades e obstáculos encontrados pelos alunos dentro deste contexto de ensino.

BRUM e SCHUHMACHER (2015, p.65) explicam que por meio dessa revisão bibliográfica o pesquisador estará realizando “a obtenção de um referencial teórico e análise de como se encaminha determinado conhecimento ao estudante, como ocorre o ensino atual em relação àquele conhecimento, as concepções dos estudantes, as dificuldades e ingerências”.

Portanto, é imprescindível realizar uma revisão literária envolvendo condições e contextos presentes nos vários níveis de produção didática e no ambiente em que ocorreu nossa pesquisa, assim como uma análise geral quanto aos aspectos histórico-epistemológicos, pois através de sua origem histórica, pode-se compreender a forma como ocorreu construção do conhecimento constatando os obstáculos epistemológicos encontrados pelos estudantes dentro deste contexto de ensino (BRUM e SCHUHMACHER, 2015).

OLIVEIRA (2018, p.23) complementa a importância da análise epistemológica por permitir ao pesquisador identificar as diferentes concepções sobre um determinado objeto matemático, questionando os seus conceitos, antes apresentados como “verdades absolutas”. Assim, segundo a autora na “análise epistemológica, tem-se a possibilidade de investigar esses conceitos fundamentais, isto é, de questioná-los”.

ALMOULOU (2007, p.156) complementa a utilidade desse tipo de análise, declarando que a mesma pode “auxiliar o pesquisador a entender melhor as relações entre os objetos matemáticos e controlar as variáveis didáticas relacionadas com o processo de ensino e aprendizagem de tais objetos”. Assim, ao final dessa fase, espera-se que o pesquisador obtenha o discernimento dos entraves relacionados a aprendizagem do objeto matemático, e assim possa elaborar conjecturas para superação dos mesmos.

Em relação a nossa investigação, note que por meio da revisão de literatura apresentada no capítulo anterior, iniciamos a primeira fase da metodologia, em que nos deparamos com alguns obstáculos epistemológicos apontados por alguns autores como o alto grau de abstração e

complexidade envolvidos nos conceitos de GD, e o viés utilizado para contornar esses obstáculos, que concerne na utilização de *softwares* com o intuito de proporcionar a visualização e assim, uma melhor transmissão desses saberes.

Além disso, no capítulo 4, realizaremos uma análise histórica do nosso objeto de investigação, com o intuito de compreender a sua natureza, e assim desenvolver mecanismos que superem os entraves encontrados na assimilação desses conceitos. A seguir, debateremos acerca da segunda fase da metodologia em questão, que se propõe a auxiliar o pesquisador a desenvolver mecanismos que superem esses entraves.

3.2.2- Concepção e análises *a priori*

Na segunda fase da ED, as análises *a priori*, o pesquisador deve elaborar e analisar uma sequência de situações didáticas⁷ com a finalidade de responder às questões e validar as hipóteses suscitadas na fase anterior (ALMOULOU, 2007). Na concepção de BROUSSEAU (1986), a gênese artificial dessas situações é análoga àquela que originou o conhecimento, de modo que a aprendizagem dos sujeitos agentes (os alunos) ocorre por adaptação, assimilação e equilibração.

ALMOULOU (2007, p.174) pormenoriza a formulação dessas situações didáticas, atestando que o pesquisador deva conceber “situações-problema⁸ de modo a permitir “ao aluno agir, se expressar, refletir e evoluir por iniciativa própria, adquirindo assim novos conhecimentos”.

DOS SANTOS (2017, p.21) declara que devemos realizar uma análise matemática do objeto matemático explorado, para que possamos identificar os métodos, estratégias de resolução em cada situação, caracterizar os conhecimentos e saberes matemáticos prévios necessários para que o aluno consiga responder a situação-problema:

(...) devemos realizar, a princípio, seguintes considerações: analisarmos se o que está sendo proposto nas situações-problemas são conhecimentos pertinentes, no sentido, de estabelecer uma relação entre os saberes visados e os já constituídos; identificarmos no escopo das situações suas variáveis de comando e escolhermos aquelas necessárias de estudo; estudarmos se as situações escolhidas são consistentes.

O autor ainda complementa que devemos dispor de uma determinada cautela ao escolher as variáveis, pois as variáveis escolhidas podem proporcionar “aos alunos a construção de conhecimentos incompatíveis, mesmo que transitórios ” (DOS SANTOS, 2017, p.21). Por essa razão é importante “prevermos possíveis dificuldades de resolução por parte dos alunos; identificarmos novos conhecimentos e/ou métodos de resolução que os alunos possam adquirir e prevermos os saberes/conhecimento se/ou métodos de resolução que devemos institucionalizar” (DOS SANTOS 2017, p.21).

⁷ Definiremos que uma sequência didática pode ser formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática (MOTOKANE, 2015).

⁸ Definiremos como situações-problema tarefas que permitam ao professor instigar a criatividade e a autonomia dos alunos na formulação de estratégias de soluções, tendo como pressupostos seus conhecimentos prévios (POMMER, 2013)

Além disso, o pesquisador deve trabalhar a compreensão do objeto matemático, ademais de sua natureza endógena, abordando uma adequação didática “a partir das vivências e idiossincrasias particulares que proporciona ao aprendiz a origem de um repertório amplo de situações-problema que o permitam explorar e, paulatinamente, elaborar e reelaborar construções e modelos mentais de ação eficazes” (ALVES, 2016a, p.141).

Na perspectiva de BROUSSEAU (1986, p. 15) traduzida por ALVES (2016a, p.141), o educador matemático desenvolve um pensamento acerca dessa adequação didática, a denominando de “aprendizagem por meio de adaptações”, elucidando o procedimento a ser realizado para que ocorra essa transformação do saber científico para o saber escolar:

A problemática da aprendizagem por adaptação impõe a pesquisarmos, em cada atividade proposta ao aluno, que provoque nesse aluno a criação de um conhecimento visado em termos de respostas e circunstâncias. É raramente possível de se obter, de modo súbito, nestas condições, um saber correto, preciso e definido. Ao contrário, tais circunstâncias são frequentemente locais, particulares e, além disso, ligadas indevidamente, por circunstâncias escolhidas aos outros conhecimentos, ainda provisórios e incorretos. Devem, pois, evoluir, com fins a se inscrever uma gênese visando um saber cultural correto.

Dessa forma, BROUSSEAU (1986) reflete acerca do ambiente no qual a aprendizagem deverá se desenvolver, determinando que esse ambiente interfere no processo de resignificação, conceituação e identificação de uma situação proposta, se tornando um elemento relevante a ser analisado para a formulação dessa adequação didática.

Assim como o educador matemático, CHEVALLARD (1991) se dispôs a estudar esse fenômeno de adequação didática, formulando o termo transposição didática para caracterizar o processo de transformação do saber científico para o saber escolar, ao mesmo tempo que desenvolvia uma perspectiva para a análise dos fenômenos que abrangem o trinômio saber-estudante-professor (ALVES, 2018b).

Devemos salientar que essa perspectiva desenvolvida, carrega, de modo latente, um repertório de extensos fenômenos comprometem o ensino, e que influenciará o desenvolvimento de uma teoria acerca do desenvolvimento de situações didáticas por Brousseau, denominada de Teoria das Situações Didáticas.

Assim, por meio dessa pequena reflexão acerca da concepção de uma situação didática, das peculiaridades envolvidas nesse processo, inferimos que para tal concepção devemos analisar diversos fatores de natureza variada. Logo para o desenvolvimento dessas situações didáticas, em uma perspectiva teórica bem fundamentada, necessita-se de uma teoria de ensino que aponte uma sistematização da construção dessas situações, métodos para transmitir determinado conhecimento científico.

Na contemporaneidade, apreciamos o desenvolvimento de inúmeros trabalhos, que exploram problemáticas evidenciada, isto é, existem diversas metodologias de ensino como a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), a Teoria Antropológica do Didático (TAD), a Teoria do Instrumento-Objeto e a Teoria das Situações Didáticas (TSD).

A nossa opção conceptual para a elaboração da sequência didática prevista para a segunda fase da ED, sustentou-se na TSD, devido a sua estrutura para a elaboração de situações didáticas, que especificaremos mais adiante. Ademais, destacaremos a existência de uma vasta literatura que relacionam que a TSD e a ED, evidenciando que essa complementariedade que pode possibilitar a ruptura de determinados formatos de ensino (ALVES, 2016b).

3.3.2.1 – Teoria das Situações Didáticas - TSD

A Teoria das Situações Didáticas - TSD foi concebida pelo educador matemático Guy Brousseau com o intuito de aplicar situações ditas identificáveis (naturais ou didáticas) para modelar, de uma maneira geral, o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos, considerando as especificidades dos conteúdos (ALMOULOU, 2007). Segundo TEIXEIRA e PASSOS (2013, p.162) tal teoria, a TSD, pode ser descrita como:

Um modelo teórico, apresentando conteúdos matemáticos, que ilustra algumas situações fundamentais e que começa a servir de fundamentação teórica para novos trabalhos de pesquisa em didática e para a prática de professores de matemática. É um campo de reflexões para fazer progredir o ensino dessa disciplina nas classes do ensino básico, onde o professor, com a fundamentação dessa teoria, orienta o aprendiz para que possa desenvolver atividades que lhe permitam apropriar-se de novos saberes.

ALMOULOU (2007) elucida que essa teoria objetiva a caracterização de um processo de aprendizagem ligados ao um encadeamento dessas situações para que ao ser reproduzidas conduzam à modificação de um conjunto de comportamento dos alunos. Contudo, o centro dessa teoria não é o aprendiz, mas sim a situação didática em sua essência que possibilita a interação entre o professor, aluno e o saber matemático.

Conforme ALMOULOU (2016, p.6), na concepção do educador matemático Brousseau os “conhecimentos matemáticos só podem ser compreendidos pelo intermédio de atividades que eles permitem realizar, ou seja, resolver”. Ademais, o educador matemático também estendeu a noção do ensino de matemática assumindo que se tratava de uma “atividade que se realiza em situação e contra um meio”. Assim, a TSD propõe-se a produzir um modelo de interação entre o aprendiz, o saber e o *milieu*. Essa última denominação, significa “meio”, é utilizado para caracterizar o ambiente no qual a aprendizagem deverá se desenvolver (ALMOULOU, 2016).

POMMER (2013) se baseia, de modo análogo as obras de BROUSSEAU (1996) para descrever a sistematização da TSD, e apontar os elementos substanciais para a verificação dos conceitos concebidos pelo aluno durante a transmissão do saber. Dessa forma se propõe um modelo de sistema didático estruturando as três componentes: professor, aluno e saber, intitulado triângulo didático. Tal modelo, apresentado na Figura 12, apresenta as relações estabelecidas entre essas partes durante uma situação didática.

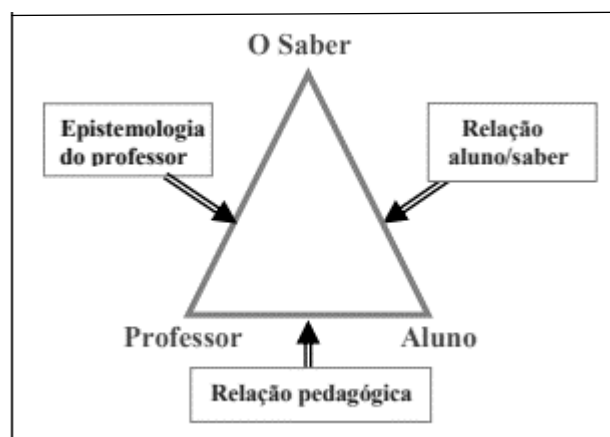


Figura 12 – Triângulo Didático
Fonte: POMMER (2013,p.13)

Em conformidade, ALVES e CATARINO (2018, p.128) dissertam acerca da perspectiva *sui generis* do didata matemático CHEVALLARD (1991), para a análise dos fenômenos envolvendo o trinômio saber-estudante-professor, segundo os autores tal perspectiva “carrega, de modo latente, que, em um repertório de extensos fenômenos envolvidos no ensino, os conhecimentos que precisam ser considerados extrapolam, *de per si*, o conhecimento matemático, sobretudo quando vislumbramos seus modelos de mediação e ensino”.

Em relação a interação professor-estudante, BROUSSEAU (1996) que a prática pedagógica deve ser realizada de modo a estimular o aprendiz à ressignificação, conceituação e identificação de uma situação proposta, para que em posse desses elementos consiga construir um conhecimento matemático.

Em síntese, POMMER (2008) defende o papel do professor como facilitador de aprendizagem, através de elaborações e proposições de situações de que facilitem a aquisição de conhecimentos ao aluno, e a utilização ou modificação de conceitos às exigências do meio e não a um desejo do professor. Por conseguinte, torna-se evidente a necessidade de novas experiências e práticas educativas que inspirem situações de aprendizagem como forma de viabilizar a estruturação do saber matemático.

No que diz respeito a interação entre o professor e o saber, deve-se estabelecer a ideia de que o docente não deve dispor somente do domínio do conteúdo matemático, mas deve ser capaz de elaborar estratégias para incitar o processo de interiorização da situação didática, de modo que o educando se aproprie e use essa situação para significar o conhecimento.

Por fim, a última interação aluno-saber, em que é imprescindível a análise dos conhecimentos prévios dos alunos para que o professor proporcione um ambiente favorável no qual o aluno sinta-se instigado a realizar investigações, fazer deduções e comprovar suas suposições. Além disso, BROUSSEAU (1996) aponta essa última interação como sendo a devolução da situação didática, que significa o aceite do aluno pela responsabilidade na busca da solução do problema proposto. POMMER (2013, p.16) salienta que:

(...)as situações didáticas abrem a possibilidade de o aluno vivenciar uma mudança do ponto de vista didático, o que favorece a construção de uma nova relação deste com o saber, relação que coloca o aluno numa postura construtiva: o autor do próprio conhecimento.

Desse modo, o educando tem a oportunidade de modelar o saber e redescobrir caminhos para ir ao encontro da aprendizagem. Ademais, destacaremos o núcleo central dessa teoria: a situação didática, que pode ser estabelecida como um conjunto de relações determinadas explicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, um certo *milieu* e um sistema educativo (o professor) para que esses alunos adquiram um saber constituído ou em constituição.

Assim, percebemos que a situação didática estará caracterizada sempre que se verificar, por parte do professor, o propósito de proporcionar a aprendizagem de um determinado conteúdo. Outro enfoque relevante que merece evidência é a situação adidática caracterizada como parte substancial da situação didática, em que, o desejo de ensinar não é deixado claro para o discente, mas foi intencionada pelo professor de modo a fornecer oportunidades para que este tome posse do saber (ALMOULOU, 2007).

Isto é, na situação adidática o problema deva ser selecionado de maneira a fazer o educando progredir por interesse próprio. A aquisição de conhecimentos acontecerá por meio do desafio da problemática, concebida sem o apelo às razões didáticas. Novamente o professor encarrega-se da função de mediador, criando oportunidades para que o aluno seja o principal agente da sua aprendizagem. FREITAS (2008, p.86) explica a relevância dessas situações no processo de ensino quando reitera que:

As situações adidáticas representam os momentos mais importantes da aprendizagem, pois o sucesso dos alunos nelas significa que ele, por seu mérito, conseguiu sintetizar algum conhecimento. Nesse sentido, elas não podem ser confundidas com as chamadas situações não-didáticas, que são aquelas que não foram planejadas visando uma aprendizagem.

Ainda conforme FREITAS (2008) é importante evidenciar que as situações adidáticas, ainda que não sejam percebidas pelo aluno, são idealizadas pelo professor com o propósito de conduzir à aprendizagem. Portanto, não deve ser confundida com uma situação que não foi planejada para transmitir conhecimento.

Afim de analisar o processo de assimilação do conhecimento, a TSD fragmenta tal processo, verificando em quatro fases, o desenvolvimento cognitivo dos alunos. Essas fases são denominadas de *ação, formulação, validação e institucionalização*.

A fase inicial, a ação, trata-se do momento em que o aluno têm a oportunidade de interagir com meio e tomar decisões para organizar estratégias para a solução do problema exposto (BROUSSEAU, 2008). A respeito dessa fase, ALMOULOU (2007, p.37) atesta que:

Uma boa situação de ação não é somente uma situação de manipulação livre ou que exija uma lista de instruções para seu desenvolvimento. Ela deve permitir ao aluno julgar o resultado de sua ação e ajustá-lo, se necessário, sem a intervenção do mestre, graças à retroação do *milieu*. Assim, o aluno pode melhorar ou abandonar seu modelo para criar um outro: a situação provoca assim uma aprendizagem por adaptação.

De forma afim, ALVES(2018b, p.15) atesta que os alunos “manifestam uma ação em situação, na condição em que a situação problema manifeste um sentido e desperte o interesse dos mesmos”

rememorando a importância do planejamento das situações problema por parte do pesquisador afim de suscitar o aluno a participar e a aprender.

Segundo PICCELLI (2001) a fase decorrente da ação, a formulação apresenta as interações existentes em determinada atividade proposta, tal situação é caracterizada pela troca de saberes entre alunos que serão emissores ou receptores, essa transferência de informações pode ser expressa, por meio de mensagens escritas ou orais. A decorrência dessa transferência permite a formulação de conjecturas, por parte dos alunos, e a criação de modelos que solucionem a situação proposta (ALVES, 2018b).

Após a formulação da resolução do problema, o aluno deverá convencer os demais participantes sobre a veracidade ou não dos argumentos apresentados à solução do problema, desenvolvendo a fase denominada de validação (BROUSSEAU, 2008). Assim, devemos ater que a comprovação empírica não é suficiente, portanto os alunos devem elaborar provas e demonstrações para manifestar a veracidade das suas afirmações. Além disso, existe a possibilidade do receptor discordar do argumento exposto ou não entender a lógica que foi utilizada e esclarecer sua objeção.

De acordo com ALVES (2018a, p.64) os dados produzidos com origem nas interações dialéticas dos estudantes, com as informações e inferências empregadas na fase anterior, tem como finalidade:

reforçar as relações conceituais entre o modelo matemático formal e as estratégias aprendidas pelos aprendizes. Ademais, os argumentos de ordem formal e de ordem heurística devem constituir um conjunto de elementos a serem apreciados e depurados na fase de institucionalização final, segundo a TSD.

Desse modo, diferente da situação de formulação em que o objetivo fundamental é a comunicação linguística, a da validação propõe a argumentação sobre a firmeza das asserções, e desse modo permite sistematizar as interações com o *milieu*.

Como observado nas fases anteriores, o professor concede parte do seu comprometimento ao aluno com o propósito de desenvolver suas potencialidades, bem como administrar a sua relação com o saber. Na última etapa, a institucionalização, o docente reassume o seu compromisso, realizando uma discussão da situação didática executada, retomando “a posição de agente condutor do processo investigativo”(ALVES, 2018a, p.67).

Nessa fase espera-se do aluno ou grupo de alunos assuma o significado de um saber que foi elaborado por ele mesmo ao longo das fases anteriores. Para isso, o professor deve intervir e resolver o problema proposto, retomando a responsabilidade cedida aos alunos (BROUSSEAU, 2008).

Em suma, após a vivência de todas essas fases, esperasse um progresso na aprendizagem com a efetuação do saber, e que os alunos apropriados do mesmo possam utilizá-lo em questões futuras. Destarte, no Capítulo 6, apresentaremos as sequências didáticas elaboradas e empregues com o intuito de elucidar a nossa investigação. Salientaremos que essa metodologia de ensino, será aplicada nas atividades experimentais que ocorrem na terceira fase da a ED, que explicitaremos a seguir.

3.3.3- Experimentação

Experimentação pode ser definida como a etapa que em ocorre a aplicação da sequência de situações didática, ou seja, é a etapa para garantir os resultados práticos com a análise teórica (ALMOULOU, 2007). Assim, é nessa etapa que é colocado em prática todo o dispositivo planejado no momento anterior, na análise *a priori*.

Nessa fase, o professor deve apresentar os objetivos da pesquisa e deixar claras as condições para a realização do trabalho, estabelecendo dessa forma o contrato didático, que de acordo com BROUSSEAU (1986,p.51) pode ser definido como:

“Uma relação que determina explicitamente em pequena parte, mas sobre tudo implicitamente aquilo que cada parceiro, professore aluno, tem a responsabilidade de gerir e pelo qual será, de uma maneira ou de outra, responsável perante o outro. ”

ALMOULOU (2007, p. 42) esclarece que, ao aceitar o contrato didático, o estudante deve assumir o compromisso de administrar seu envolvimento com o conhecimento nas situações de ação, formulação e validação, ou seja, de participar ativamente nessas fases. Por outro lado, o professor tem a responsabilidade de institucionalizar o saber, pois “ele deve determinar a forma e o conteúdo do saber para o qual ele quer dar um estatuto oficial, levando em conta os efeitos da transposição didática”.

Além disso, o pesquisador deve, nessa etapa, colher e registrar os dados para qualificar a pesquisa e, para tanto, deve utilizar alguns recursos, tais como vídeos, áudios, manuscritos de alunos etc. A seguir, descreveremos a última etapa da ED, em que o pesquisador realizará uma análise desses dados.

3.2.4 Análise *a Posteriori* e Validação

A etapa denominada análise *a posteriori* e a validação refere-se ao tratamento das informações obtidas por ocasião da aplicação da sequência didática, a etapa em que ocorreu efetivamente a fase experimental da pesquisa (ALMOULOU, 2007).

Conforme (POMMER, 2013, p.26) por meio desse tratamento de informações, obtemos uma confrontação com as hipóteses desenvolvidas na análise *a priori*, permitindo a “interpretação dos resultados e em que condições as questões levantadas foram respondidas”. Assim, por meio dessas informações coletadas podemos averiguar se tais hipóteses ocorrem e quais “são as contribuições para a superação do problema, caracterizando a generalização local que permitirá a validação interna do objetivo da pesquisa” (POMMER, 2013, p.26).

3.2.4.1 Validação externa e interna

Inicialmente, devemos discernir que a metodologia investigativa apresenta formas diferenciadas de validação do estudo: externa e interna. A primeira ocorre por meio de comparação entre “as produções inicial e final dos estudantes, a fim de avaliar o desempenho dos alunos durante a realização didática” (OLIVEIRA,2018, p.37), podendo ser efetuada por meio da aplicação e análise de entrevistas e/ou questionários. Além disso, nesse tipo de validação, deve ocorrer uma comparação entre as

produções dos alunos internos à sequência didática e dos alunos externos a esse contexto didático (LABORDE,1997, p.105).

ARTIGUE (1995) distingue a validação externa de uma avaliação interna, afirmando que tal sustentação envolve dados oriundos de uma amostra maior de sujeitos, aplicando o termo validação estatística para tal processo.

Apesar da validação interna também pode ocorrer por meio de uma comparação dos dados obtidos, o propósito dessa validação trata-se do desenvolvimento de uma “descrição genérica dos alunos, observando seu comportamento, sua adaptação e seu desenvolvimento intelectual durante a realização didática, e uma categorização dos tipos de produção majoritária” (OLIVEIRA,2018,p.37).

Dessa forma, inferimos a realização um acompanhamento dos alunos individualmente, sem uma comparação a alunos externos a esse contexto didático. Por essa razão, LABORDE (1997) salienta a atenção necessária ao elaborar a sequência de situações didáticas, pois ao serem avaliadas, devem contribuir significativamente para a validação da pesquisa.

Assim, no capítulo em destaque, assinalamos os elementos relativos à Engenharia Didática e à Teoria das Situações Didáticas que pretendemos explorar nos capítulos subsequentes. A seguir, no Capítulo 4, apresentaremos ao leitor o detalhamento das análises preliminares, ou seja, o resultado da gênese histórica do nosso objeto matemático, bem como a consulta realizada em alguns livros de GD, com fins de auferir um suporte teórico para a elaboração das nossas situações didáticas.

4 ANÁLISES PRELIMINARES DA ENGENHARIA DIDÁTICA NO ESTUDO DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS RELACIONADOS A CURVAS E SUPERFÍCIES

Este capítulo, constitui-se da primeira fase prevista pela Engenharia Didática, em que realizaremos um estudo acerca da gênese histórica da GD, mais especificamente os conceitos basilares de curvas e incipientes de superfícies. Essa abordagem tem como objetivo compreender a estrutura atual de ensino e seus efeitos, bem como, suas limitações para uso didático. Além disso, nesse capítulo, encontra-se uma consulta a um livro didático de GD acerca dos conceitos relacionados a curvas e superfícies, em que tencionamos verificar a abordagem que esses autores trazem a respeito do nosso objeto matemático.

4.1 – A gênese histórica dos conceitos basilares de superfícies e incipientes de curvas

A gênese da Geometria Diferencial iniciou-se com o estudo de curvas, apesar de noções como retas tangentes a curvas já serem encontradas entre os gregos Euclides, Arquimedes e Apolônio. Somente no século XVII, que o alemão Gottfried Leibniz (1646-1716) e o inglês Isaac Newton (1643-1727) geraram os algoritmos do cálculo infinitesimal, os quais permitiram o estudo de curvas e superfícies através de suas propriedades diferenciais (GORODSKI, 2002).

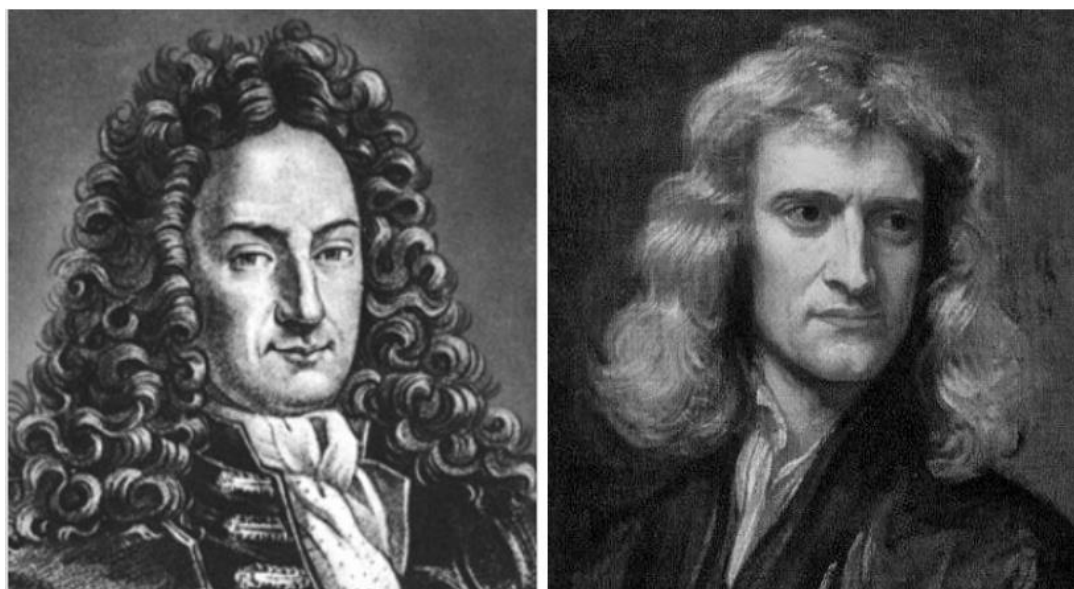


Figura 13 – Matemáticos Gottfried Leibniz(à esquerda) e Isaac Newton(à direita)

Fonte: <https://www.escritas.org/pt/estante/gottfried-wilhelm-leibniz> (figura à esquerda);

https://pt.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton#/media/Ficheiro:GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg (figura à direita)

Um dos primeiros conceitos a serem explorados nesse campo epistêmico, foi o conceito *curvatura* de uma curva plana em um determinado ponto, o que definiremos como “uma medida numérica de quanto a curva deixa de ser uma reta, ou seja, a taxa de variação naquele ponto da direção da reta tangente à curva em relação ao comprimento de arco⁹” (GORODSKI, 2002,p.64).

⁹ Isto quer dizer o limite da razão entre o ângulo $\Delta\alpha$ e as retas tangentes às extremidades de um arco pelo o comprimento Δs daquele arco quando ele se contrai a um ponto, isto é, $k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$. Essa curvatura é também o inverso do *raio de curvatura* no ponto em

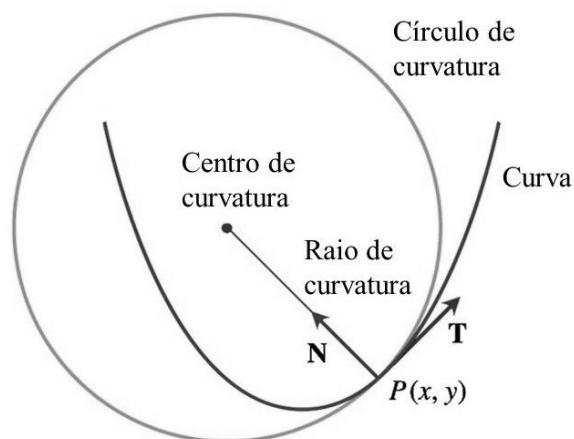


Figura 14– Representação de círculo osculador

Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c0/Circulo_curvatura.jpg

Ainda conforme o autor, embora tais conceitos de curvatura relacionados a uma curva plana e de círculo osculador já fossem conhecidos pelos matemáticos Newton e Leibniz, o precursor do assunto é considerado o holandês Christian Huygens (1629-1695), que ainda não conhecia o cálculo, mas que em 1673 publicou um trabalho sobre curvas planas introduzindo os conceitos de involuta e evoluta de uma curva o qual foi curiosamente motivado pelo seu interesse em pêndulos e relógios .

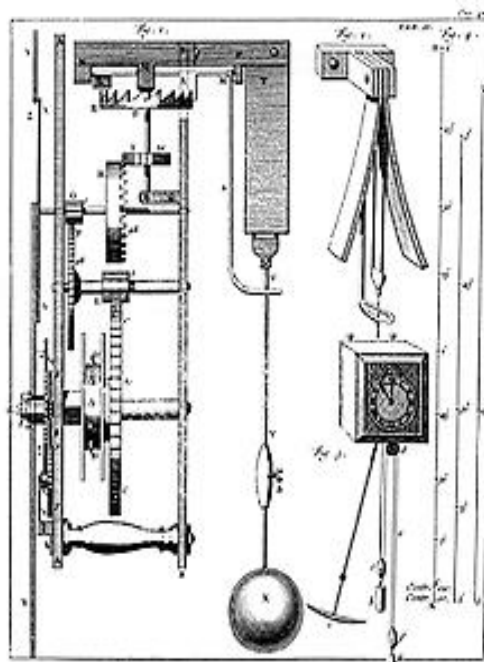


Figura 15- Imagens da obra concebido por Christian Huygens ,em 1673, acerca do estudo de curvas planas e o relógio de pêndulo desenvolvido nessa obra.

Fonte: Página Wikimedia Commons https://pt.m.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Huygens_-_Horologium_oscillatorium,_sive_De_motu_pendulorum_ad_horologia_aptato_demonstrationes_geometricae,_1673_-_869780.jpeg (figura à esquerda) https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/56/H6_clock.jpg (figura à direita)

GORODSKI (2002) também declara que o desenvolvimento dos fundamentos da teoria de curvas e superfícies mergulhadas nos espaço tridimensional, prosseguiu-se durante o século XVIII e até

questão, isto é o raio do círculo osculador à curva naquele ponto. Estabeleceremos o círculo osculador como o círculo que “melhor aproxima” uma curva em um determinado ponto, tangenciando a curva e tendo curvatura $k(t)$ igual à da curva naquele ponto e, portanto, raio $1/k(t)$. O círculo osculador de uma curva em um ponto é uma ferramenta muito útil para compreender curvas porque tem a mesma tangente e curvatura que a curva no respectivo ponto.

o início do século XIX. Ainda de acordo com o autor, Alexis Clairaut (1713-1765), em 1731, estudava curvas no espaço tridimensional limitado às propriedades de primeira ordem (que envolvem apenas as derivadas primeiras, como retas tangentes). Enquanto que Gaspard Monge (1746-1818), em 1775, propôs um investigação em um viés diferenciado, discutindo os conceitos de curvatura e torção de uma curva espacial¹⁰.

A transição natural da teoria de curvas para a teoria de superfícies ocorreu por meio de um problema geodésico, isto é, o problema de se encontrar o caminho mais curto entre dois pontos de uma superfície. GORODSKI (2002) ressalta que até o século XVIII não havia a necessidade de mostrar a existência de tal caminho, a preocupação limitava-se a tentativas de determinação de uma caracterização geométrica da curva que teria tal propriedade. No entanto, tal problema interessou os irmãos Bernoulli, Jacob (1654-1705) e Johannes (1667-1748), que, entre outros, forneceram ambas soluções corretas, sendo a de Johannes considerada mais clara, enquanto que a de Jacob, embora mais confusa e engenhosa, era mais geral (GORODSKI, 2002).

Em 1772, o matemático Leonhard Euler (1707-1783), aluno de Johannes Bernoulli, escreve sobre o problema de se determinar quando uma superfície pode ser desenvolvida isometricamente (isto é, sem distorcê-la) sobre um plano, como por exemplo o cilindro e o cone. Assim, o matemático descobre que a condição necessária para que isso ocorra é que a superfície seja *regrada* (ou seja, folheada por retas). Em relação ao desenvolvimento da teoria das superfícies, uma de suas observações mais significativa acerca da teoria encontra-se num fragmento sem importância: “*Et quia per naturam superficierum quaelibet coordinata debet esse functio binarium variabilium*”, em que o matemático reconhece o fato das coordenadas (x,y,z) dos pontos de uma superfície serem funções de duas variáveis independentes. No entanto, vale salientar que Euler nem seus contemporâneos seguiram essa ideia da representação das superfícies, investigando superfícies de diferentes apastectos menos através da representação das coordenadas x, y, z em termos de funções de duas variáveis (GORODSKI, 2002).

O matemático Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), publicou, em 1826, *Leçons sur l'application du calcul infinitésimal à la géométrie* introduzindo novos métodos ao assunto e sistematiza e esclarece diversos cálculos feitos por seus predecessores. Em particular, Cauchy precisa e refina o trabalho de Monge sobre a curvatura k e a torção τ de uma curva espacial, e determinando às fórmulas, hoje conhecidas como de Frenet-Serret¹¹, que expressam o comportamento local da curva em função de k e τ em relação a um sistema de coordenadas móvel.¹² Os teoremas de existência e

¹⁰ A torção em um ponto de uma curva mergulhada no espaço é uma medida numérica de quanto a curva se afasta de estar contida em um plano numa vizinhança daquele ponto; as curvas espaciais que estão contidas em um plano, ditas curvas planas, são caracterizadas por terem torção nula.

¹¹ Essas fórmulas foram redescobertas independentemente por Jean Frenet (1816-1900) e Joseph Serret (1819-1885) que publicaram seus trabalhos respectivamente em 1847 e 1850.

¹² Esse é essencialmente o “triedro móvel” introduzido por Gaston Darboux (1842-1917) mais tarde em 1872, que substitui o sistema Cartesiano de eixos fixos por um sistema de eixos que acompanha a curva: em cada ponto P da curva considerada, o triedro tem origem em P , o seu primeiro eixo é tangente à curva, o segundo eixo é a direção normal principal (definida de modo que os dois primeiros eixos geram o plano osculador à curva, que é o plano que mais se aproxima de conter a curva numa vizinhança do ponto) e o terceiro eixo é

unicidade de soluções de equações diferenciais devidos a Cauchy permitem mostrar que as funções k e τ determinam completamente a curva a menos de um movimento rígido do espaço (GORODSKI, 2002).

A aplicação de superfícies na perspectiva de duas variáveis, ocorreu em 1827, quando o matemático Carl Friedrich Gauss foi convocado pelo governo de Hanover para supervisionar um levantamento topográfico do reino, em 1820, e vários aspectos dessa tarefa, incluindo exaustivo trabalho de campo e repetitivas triangulações, ocuparam-no por vários anos, mas propiciaram o estímulo que o conduziu às idéias de sua obra *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (GORODSKI, 2002).

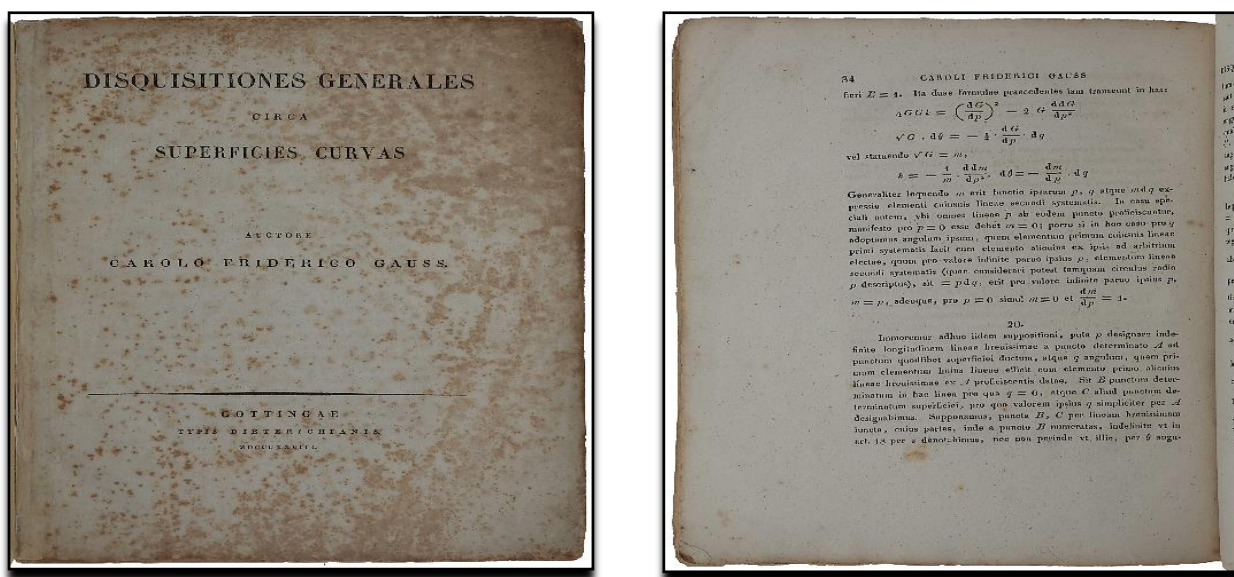


Figura 16 – Imagens da obra *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, concebida por Carl Friedrich Gauss

Fonte: página SOPHIAΣ RARE BOOKS <https://www.sophiararebooks.com/pages/books/4602/carl-friedrich-gauss/disquisitiones-generales-circa-superficies-curvas>

Além disso, Gauss introduz a forma diferencial quadrática ds^2 , hoje conhecida como *primeira forma fundamental*, que essencialmente exprime as distâncias sobre a superfície, e escreve ds^2 em termos de três funções E , F e G de u e v o que lhe permite escrever equações para as curvas geodésicas¹³. O matemático prossegue introduzindo a noção de “representação esférica” de uma superfície, hoje conhecida como *aplicação de Gauss*¹⁴. O estudo dessa representação o leva a definir a “medida de curvatura” da superfície em P , hoje conhecida como *curvatura Gaussiana*¹⁵. A fim de calcular a curvatura Gaussiana através das coordenadas curvilíneas, o matemático introduziu uma outra forma diferencial quadrática, derivada da aplicação de Gauss, hoje conhecida como *segunda forma fundamental*¹⁶ (GORODSKI, 2002).

ortogonal aos dois primeiros. Essa idéia seria consideravelmente generalizada no século XX por Élie Cartan (1869-1951) e aplicada por ele (sob o nome de *método do referencial móvel*) de maneira muito frutífera ao estudo dos grupos de Lie e variedades diferenciáveis, conduzindo enfim, com Charles Ehresmann (1905-1979) à teoria moderna dos fibrados principais e conexões.

¹³ Estas são as curvas na superfície com a propriedade que qualquer segmento suficientemente pequeno é o caminho mais curto entre os seus extremos.

¹⁴ Esta é a aplicação que associa a cada ponto P da superfície o ponto P' da esfera de raio um tal que o raio OP' é paralelo à normal unitária à superfície em P .

¹⁵ Trata-se de uma espécie de taxa de variação da normal unitária à superfície em P , ou equivalentemente, uma medida de quanto a superfície se afasta de ser plana numa vizinhança de P (como a normal unitária a um plano é constante, a sua taxa de variação em qualquer ponto do plano é zero, e portanto a curvatura Gaussiana do plano é zero em qualquer ponto).

¹⁶ A segunda forma fundamental de certa forma descreve a maneira pela qual a superfície se curva dentro do espaço ambiente.

Um dos maiores resultados do matemático Gauss, denomina-se *theoremata egregium*, que afirma que a curvatura Gaussiana, apesar de ter sido definida através da aplicação de Gauss e portanto parecer depender de como a superfície está mergulhada no espaço, depende somente da primeira forma fundamental e é portanto invariante se transformarmos a superfície sobre outra superfície (ou a deformarmos) isometricamente (isto é, sem alterar distâncias sobre ela).

Alguns importantes matemáticos prosseguiram com o trabalho de Gauss, como Pierre Bonnet (1819-1892), Carl Jacobi (1804-1851) e Ferdinand Minding (1806-1885). Em 1848, Bonnet generalizou o teorema de Gauss relativo à área de um triângulo geodésico. Uma outra contribuição importante de Bonnet à teoria de superfícies foi a de estabelecer o que nós chamamos hoje em dia de teorema fundamental de existência de superfícies (GORODSKI, 2002).

Gaspare Mainardi (1800-1879) em 1856 e Delfino Codazzi (1824-1873) em 1867 haviam exprimido as condições de compatibilidade entre os coeficientes das duas formas fundamentais e suas derivadas. Bonnet demonstrou em 1867 que essas condições, hoje conhecidas como *equações de Gauss-Codazzi-Mainardi*, são suficientes para que exista uma superfície com essas formas fundamentais dadas (GORODSKI, 2002).

Em 1839, Minding mostrou que duas superfícies com a mesma curvatura Gaussiana constante podem ser transformadas isometricamente uma sobre a outra. Em outro trabalho, no ano seguinte, Minding estabeleceu as relações trigonométricas de triângulos geodésicos em superfícies de curvatura constante negativa. Apesar deste artigo ter sido publicado na mesma revista em que apareceu a tradução para o francês do artigo de Lobachevski *Geometria imaginária* sobre geometria não-Euclideana, nenhum dos dois notou que as fórmulas trigonométricas no plano hiperbólico de Lobachevski coincidiam com as fórmulas trigonométricas nas superfícies de curvatura constante negativa (GORODSKI, 2002).

No entanto, Eugenio Beltrami (1835-1900), inferiu tal semelhança, considerando o assunto em *Saggio di interpretazione della geometria non-Euclidea* em 1868, e assim construiu o primeiro modelo concreto do plano de Lobachevski demonstrando a consistência da geometria não-Euclideana. Ademais, Beltrami também publicou uma análise de espaços de curvatura constante em várias dimensões baseada nas idéias de Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) incluindo uma versão detalhada do espaço hiperbólico tridimensional. Mais tarde, Felix Klein (1849-1925) e o grande matemático e físico francês Henri Poincaré (1854-1912) propuseram outros modelos para a geometria de Lobachevski (GORODSKI, 2002).

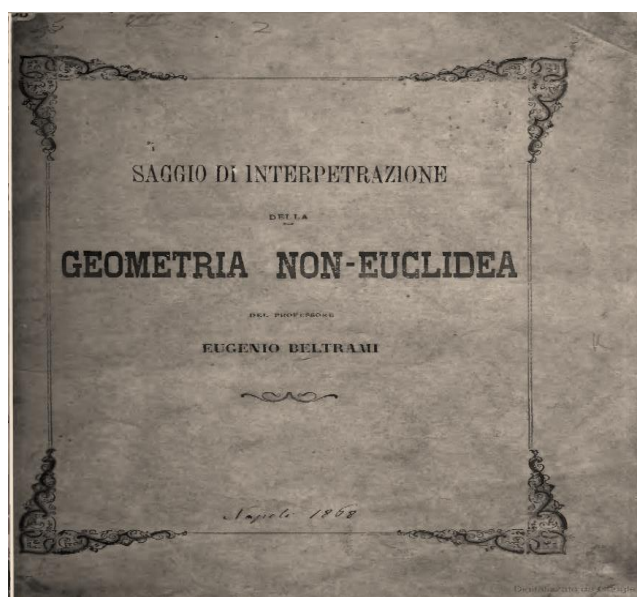


Figura 17 – Obra *Saggio di interpretazione della geometria non-Euclidea* de Eugenio Beltrami
Fonte : página Wikisource https://it.wikisource.org/wiki/Indice:Beltrami_-_Saggio_di_interpretazione_della_geometria_non_euclidea,_1868.djvu

Riemann prosseguiu introduzindo o conceito de variedade n -dimensional de pontos $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que generaliza a idéia de superfície bidimensional tanto no sentido de considerar um número maior de dimensões quanto no sentido de descartar a necessidade do objeto estar mergulhado em algum espaço circundante. Em seguida, estabeleceu uma forma diferencial quadrática (hoje chamada de *métrica Riemanniana*) na variedade que generaliza a primeira forma fundamental das superfícies e define as distâncias sobre ela. Esse é um dos pontos essenciais de sua visão: a separação entre os conceitos do conjunto de pontos (a variedade n -dimensional) e as possíveis métricas que podem ser definidas sobre ele (GORODSKI, 2002).

Tais idéias foram proferidas, em 1854, em uma conferência para os docentes da faculdade de filosofia da universidade de Göttingen com o intuito de satisfazer os requerimentos para a promoção a *Privatdozent*. O texto da conferência não foi publicado durante a sua vida, mas a publicação póstuma em 1868 repercutiu quase que imediatamente entre a comunidade de matemáticos trabalhando em geometria diferencial (GORODSKI, 2002).

Dessa maneira, Riemann aprofundou brutalmente o conceito de geometria intrínseca da teoria de superfícies de Gauss. Instaurando a *curvatura Riemanniana* (que generaliza a curvatura Gaussiana) e discutindo o caso de variedades Riemannianas de curvatura constante. O trabalho de Riemann não apenas unificou a geometria Euclideana e a não-Euclideana, mas representou uma vasta generalização dessas geometrias (GORODSKI, 2002).

As investigações de Riemann foram continuadas por Elwin Christoffel (1829-1900) que publicou um trabalho em 1869 que questionou as condições em que duas métricas Riemannianas determinam a mesma geometria. Assim como a intenção de Riemann era de generalizar a teoria de superfícies de Gauss, a intenção de Christoffel era de generalizar o problema de superposição de superfícies. Para resolver esse problema, Christoffel introduziu os hoje chamados *símbolos de*

Christoffel e o *tensor de curvatura de Riemann-Christoffel*, e derivou como condição necessária a coincidência das tensores de Riemann-Christoffel calculados para as duas métricas Riemannianas. Os cálculos de Christoffel formam a base dos métodos invariantes em geometria Riemanniana que caracterizariam o próximo estágio de desenvolvimento (GORODSKI, 2002).

Ao final do século XIX a teoria de superfícies já estava bem estabelecida, entre 1887 e 1896, foram publicados os quatro volumes do clássico *Leçons sur la théorie générale des surfaces* de Gaston Darboux. Por outro lado, o trabalho de Riemann havia despertado considerável interesse em variedades Riemannianas de dimensão arbitrária e curvatura constante arbitrária, e o problema de se classificar tais variedades, proposto por Killing em seu livro de 1891, ficou conhecido como *problema de Clifford-Klein* pelas contribuições desses dois matemáticos ao assunto (GORODSKI, 2002).

O trabalho de Riemann influenciou diversos campos de estudos, como a álgebra, filosofia do espaço físico que acarretaram no desenvolvimento de diversas teorias como *grupos de Lie*, teoria geral da relatividade iniciada por Einstein *etc* (GORODSKI, 2002).

Desse modo, surgiu uma distinção em relação ao campo geometria diferencial, intitulando a geometria que foi desenvolvida durante o período que vai da época de Riemann até a Segunda Guerra Mundial de “geometria Riemanniana clássica”. Tal geometria, corresponde ao conteúdo lecionado em um primeiro curso de pós-graduação em geometria Riemanniana, enquanto que a teoria de superfícies de Gauss, os conceitos basilares e incipientes de superfícies fazem parte dos currículos de graduação, ao qual realizaremos uma investigação acerca do ensino.

4.2 – Estudo didático do objeto matemático em um livro clássico

Nessa seção, seguindo a sistematização prevista pela metodologia de pesquisa adotada, tendo em vista um melhor entendimento do ensino atual do conteúdo de nosso interesse, apresentamos uma consulta a um livro clássico aplicados pela academia no ensino de GD, influenciada pela perspectiva de ALVES (2012; 2013a; 2013b; 2015; 2016; 2017), no que concerne ao estudo e identificação de entraves no entendimento de conceitos matemáticos, todavia no contexto da GD.

4.2.1 - Escolhas e justificativas acerca da análise de um livro clássico

Ao analisarmos um livro clássico aplicado como recurso didático em sala de aula, conhecemos previamente a abordagem, o método utilizado para trabalhar determinados conceitos e as possibilidades existentes de ensino do conteúdo através desse material. Nesse viés, o Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN reconhece a ampla interferência do livro adotado no ensino-aprendizagem de um conteúdo:

O livro didático é um material de forte influência na prática de ensino brasileira. É preciso que os professores estejam atentos à qualidade, à coerência e a eventuais restrições que apresentem em relação aos objetivos educacionais propostos. Além disso, é importante considerar que o livro didático não deve ser o único material a ser utilizado, pois a variedade de fontes de informação é que contribuirá para o aluno ter uma visão ampla do conhecimento (BRASIL, 1997, p. 67).

Desse modo, por meio da análise de um livro didático podemos inferir “a existência de falhas na sua composição, às vezes na forma de apresentação do conteúdo, nas atividades propostas, no desenvolvimento dos conceitos no decorrer das páginas, ou ainda de inadequação à realidade local, às práticas sociais do grupo escolar em questão” (ROSA *et al.* 2012, p.3).

À vista dos motivos apresentados, destacamos a importância de tal análise, e reconhecemos, em nosso caso, a existência de um extenso rol de compêndios da literatura pertinente. Em relação a essa literatura podemos destacar no contexto nacional, TENENBLAT (2008), DO CARMO (2016), PIRES (2015), ARAUJO (2012), NETO (2014), e no contexto internacional, KLINGENBERG (2013), STRUIK (2012), WILLMORE (2013), MONTIEL (2009), PALMAS *et al.* (2005). Assumimos interesse particular pelo livro de TENENBLAT (2008), a escolha desse compêndio se deve ao fato de ser livro-texto¹⁷ trabalhado em cursos introdutórios de Geometria Diferencial.

4.3 - Uma observação do objeto matemático em livros didáticos

Acentuamos que em virtude da constituição das teorias adotadas e discutidas nas seções passadas, a análise foi realizada na perspectiva de Alves (2011), realizando uma comparação dos pré-requisitos necessário para um estudo do nosso objeto matemático, que se iniciam com elementos de CUV, e precisam de elementos de CVV.

Ademais, salientaremos um olhar para as situações-problema de GD, proposta pelos autores e a significação/representação dos conceitos matemáticos envolvidos; se tais obras exploram os conceitos do GD no espaço $\mathbb{R}^3$, com o intuito de proporcionar a evolução das habilidades de *percepção* e *visualização*; se os autores relacionam as definições algébricas dos conceitos de GD com as suas respectivas significações gráfico-geométrica.

4.3.1- O livro de TENENBLAT (2008)

O livro “Introdução a Geometria Diferencial” de TENENBLAT (2008), tem o objetivo “servir de como livro texto para um curso introdutório de Geometria Diferencial, em nível de graduação”(Prefácio de TENENBLAT (2008). Apresentando “a teoria local das curvas e superfícies, no espaço euclidiano, admitindo como pré-requisitos os cursos básicos de cálculo diferencial e equações diferenciais” (Prefácio de TENENBLAT (2008)).

TENENBLAT (2008) divide sua obra em cinco capítulos, iniciando o estudo acerca de GD recordando, no Capítulo 0, alguns pré-requisitos de álgebra linear, cálculo diferencial e cálculo vetorial de funções de uma ou mais variáveis necessários para o entendimento dos conceitos dessa área, como dependência linear, definições de funções lineares, funções diferenciáveis etc. Assim, a autora inicia o roteiro de descrições e formulações de definições, formulando os elementos básicos e preliminares de certas noções topológicas, dentre as quais destacamos: o espaço euclidiano de dimensão três, $\mathbb{R}^3$, ou seja, o conjunto de termos ordenados de números reais $p = (x, y, z)$ para funções de uma variável.

¹⁷ Livro adotado como texto básico de determinado curso;

Em relação a funções de várias variáveis, a autora define o espaço euclidiano de dimensão n , $\mathbb{R}^n$, definindo para isso o conceito de funções coordenadas. Segundo a autora, ao tomarmos uma função ou aplicação F de um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, denotado por $F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, para cada $p \in A$, associa um único ponto $F(p) \in \mathbb{R}^m$.

Desse modo, tal função (ou aplicação) pode ser representada por $F(p) = (F_1(p), F_2(p), \dots, F_m(p))$, ao considerarmos $p = (x_1, \dots, x_n)$, podemos reescrever a representação da função como: $F(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, \dots, x_n))$. Determinando que as funções $F_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$ são as funções coordenadas de F (TENENBLAT, 2008).

No entanto, TENENBLAT (2008, p.15) salienta que “embora o nosso interesse esteja apenas nos casos em que n e m assumem os valores 1,2 ou 3, vamos enunciar os conceitos e resultados básicos para o caso geral”.

Assim a autora segue nesse sentido topológico, discriminando a ideia de *bola aberta* em $\mathbb{R}^n$ de centro $p_0 \in \mathbb{R}^n$ e raio $\varepsilon > 0$, como um conjunto denotado por $B_\varepsilon(p_0)$, dos pontos $p \in \mathbb{R}^n$ que distam de p_0 menos que ε , denotando em simbologias por $B_\varepsilon(p_0) = \{p \in \mathbb{R}^n; |p - p_0| < \varepsilon\}$. Dessarte, TENENBLAT(2008) ainda precisa que um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ é dito *aberto* em $\mathbb{R}^n$ se para todo $p \in A$ existe uma bola aberta $B_\varepsilon(p) \subset A$. Ademais, explana-se como subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ que contém $p_0 \in \mathbb{R}^n$, como uma *vizinhança* de $p_0 \in \mathbb{R}^n$. Outrossim, um subconjunto D de $\mathbb{R}^n$ é dito *fechado* em $\mathbb{R}^n$ se o seu complemento, isto é $\mathbb{R}^n - D$, é aberto em $\mathbb{R}^n$. Além disso, a autora apresenta os conceitos de *ponto de acumulação*, um conjunto *compacto* para introduzir os conceitos de limite e continuidade de uma função de duas ou mais variáveis.

Desse modo, atinamos elementos que se diferenciam do Cálculo de uma Variável – CUV, devido ao aumento dimensional dos conceitos formulados, o que pode atuar como um *elemento de ruptura* (Alves, 2011). Por esse motivo, devemos dispor de uma certa cautela ao explicar esses tópicos de GD, no entanto, na perspectiva de TENENBLAT (2008, p.1), observamos a ausência de tal cautela em relação as mudanças topológicas, já que segundo a autora foi “conveniente reunir neste capítulo inicial as noções necessárias muito embora, admite-se que são do conhecimento do leitor”, recomendando que “a leitura do texto seja iniciada com o estudo de curvas planas, no Capítulo 1, recordando os conceitos do Capítulo 0, à medida que se tornarem necessários”(Prefácio de TENENBLAT, 2008).

Em relação ao conceito de limite, a autora define que o limite de uma função vetorial, de forma análoga ao conceito de limite de uma função real, assim TENENBLAT (2008) estabelece que o limite de $\alpha(t)$ é L quando dado t se aproxima de t_0 , dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < |t - t_0| < \delta$, então $|\alpha(t) - L| < \varepsilon$. Ou seja, se $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ e $L = (l_1, l_2, l_3)$, então $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = L$, se e só se, $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = l_1$, $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = l_2$, $\lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = l_3$. A autora retoma o conceito de limite de duas ou mais variáveis, após a explanação de outras operações com a função vetorial,

precisando que o limite de uma função F de duas ou mais variáveis, dada por $F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, em que A trata-se de um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$, admite valor L quando $p \in A$ tende a p_0 se dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que, se $0 < |p - p_0| < \delta$, então $|F(p) - L| < \varepsilon$, denotando por $\lim_{t \rightarrow t_0} F(p) = L$.

Veja que a abordagem realizada por TENEBLAT (2008), não menciona os elementos de transição desses conceitos, além de não fazer indicativo ao leitor de nenhuma mudança do espaço topológico, apesar do limite das funções apresentar diferenças em virtude da dimensão e/ou da quantidade de variáveis.

Prosseguindo, acerca da abordagem dos conceitos de diferenciabilidade, encontramos outros elementos, em que também devemos ter cautela, por se tratarem de elementos de ruptura, pois as noções de diferenciabilidade de funções vetoriais de várias variáveis apresentam um conceito singular, intitulado de *derivada direcional*, definida por TENEBLAT (2008, p.20) como: uma função $F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, em que A é um conjunto aberto, fixado um $p_0 \in A$ e w um vetor não-nulo de $\mathbb{R}^n$, dada por : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(p_0 + tw) - F(p_0)}{t}$. Com o intuito, de apresentar tal ruptura, produzimos no *software* Geogebra, uma representação desse conceito geométrico.

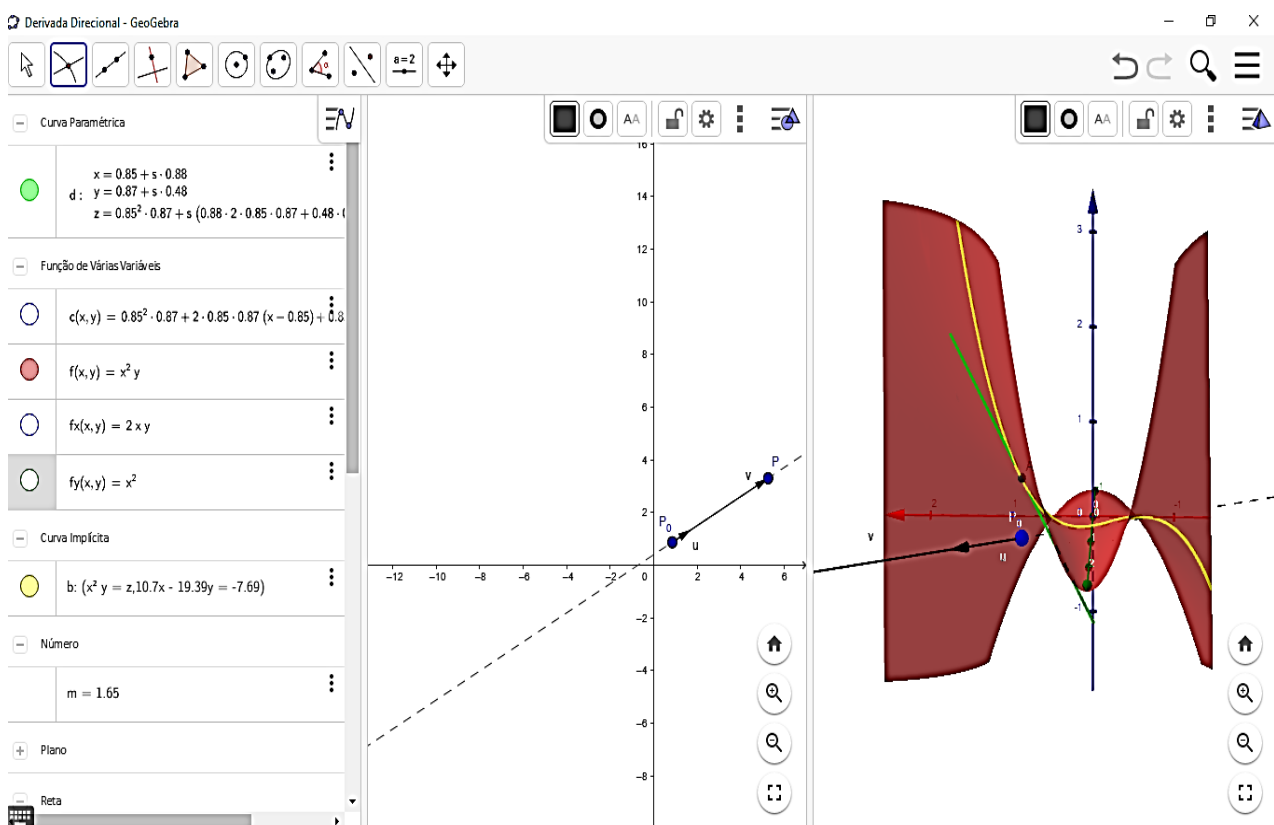


Figura 18 – Representação do conceito de derivada direcional

Fonte :a autora

Na Figura 18, vemos que o gráfico da função $f(x, y) = x^2y$, em vermelho, e a descrição da curva implícita que representa a função ,em amarelo , e a derivada dessa função em virtude das coordenadas, $f_x(x, y) = 2xy$ e $f_y(x, y) = x^2$, em direção ao vetor $\overrightarrow{PP_0}$ resultando em uma reta ,na cor verde. Destarte, o significado geométrico da derivada direcional de uma função de várias

variáveis diferenciável, intuitivamente representa a taxa instantânea de variação da função, movendo-se através de um ponto x com uma velocidade especificada por um vetor em relação esse determinado ponto x . Generalizando assim, a noção de *derivada parcial*, em que a taxa de mudança é tomada ao longo de uma curva em um sistema de coordenadas curvilíneo, com todas as outras coordenadas sendo constantes.

Doravante TENEBLAT (2008, p. 20) realiza uma relação entre esses dois conceitos de derivada, difundindo para a base canônica $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ do espaço topológico $\mathbb{R}^n$, “as derivadas direcionais de F em p_0 nas direções de um vetor da base são denominadas *derivadas parciais* de F em p_0 ”.

Se $F(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, \dots, x_n))$, então a derivada parcial de F em p_0 na direção de e_i é denotada por $\frac{\partial F}{\partial x_i}(p_0)$ ou $F_{x_i}(p_0)$ e é igual a

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(p_0) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}(p_0), \dots, \frac{\partial F_m}{\partial x_i}(p_0) \right).$$

Figura 19 – Definição que correlaciona os conceitos de *derivada direcional* e *derivada parcial*, proposto por TENEBLAT (2008)
Fonte: TENEBLAT (2008, p. 20)

A autora sucede, a noção de derivada parcial para derivada de segunda ordem, se $\frac{\partial F}{\partial x_i}(p)$ existe, para todo $p \in A$, um conjunto aberto, definindo a função $\frac{\partial F}{\partial x_i}(p): A \rightarrow \mathbb{R}^m$ que, para cada $p \in A$, associa $\frac{\partial F}{\partial x_i}(p)$. De forma mais sucinta, a autora utiliza a seguinte simbologia:

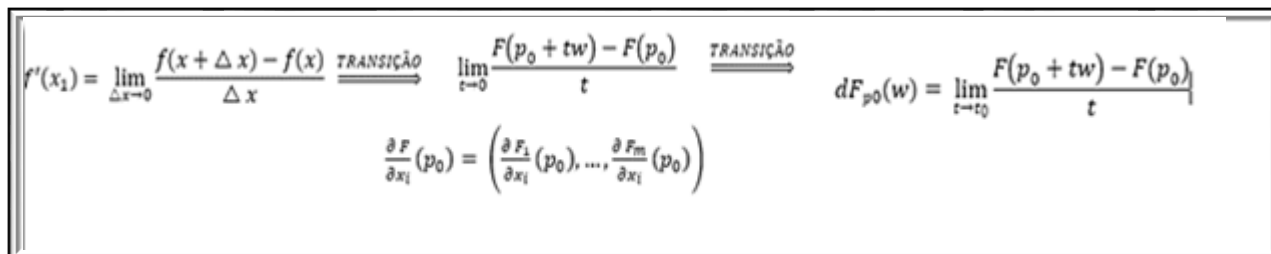
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = F_{x_i x_i} \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} = F_{x_i x_j} \end{cases}.$$

Entrevemos que a autora descreve de modo sucinto todos esses conceitos de derivabilidade para que o aluno, possa compreender e distinguir o conceito de *diferenciabilidade* de uma função, um conceito crucial para o entendimento dos assuntos de GD.

Assim, dizemos que uma função $F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é *diferenciável* de F em p_0 se existe uma aplicação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, denotada por $dF_{p_0}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, tal que, para todo vetor $w \in \mathbb{R}^n$, $F(p_0 + w) = F(p_0) + dF_{p_0}(w) + R(w)$, onde $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{R(w)}{|w|} \right) = 0$, em que aplicação dF_{p_0} é denominada *aplicação diferencial* de F em p_0 .

A função F é dita *diferenciável* se F é diferenciável em p , para todo $p \in A$. Podendo verificar que, se F é diferenciável em p_0 , então, para todo vetor $w \in \mathbb{R}^n$, $dF_{p_0}(w) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(p_0 + tw) - F(p_0)}{t}$. Portanto, se “ F é diferenciável em p_0 , então a derivada direcional de F em p_0 existe em qualquer direção (TENEBLAT, 2008, p.21)”. Entretanto, a autora ressalta que a recíproca não é verdadeira, isto é, uma função pode ter todas as derivadas direcionais em um ponto, sem ser diferenciável no ponto.

Dessa forma, assumimos por meio da análise do capítulo 0 livro de TENEBLAT(2008), que o conceito de derivada parcial em consonância com o conceito de derivada direcional, atua como um elemento de transição entre os conceitos de derivabilidade de várias variáveis, abordado no curso de CVV, para o conceito de diferenciabilidade, abordado no curso de GD.



$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \xrightarrow{\text{TRANSIÇÃO}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(p_0 + tw) - F(p_0)}{t} \xrightarrow{\text{TRANSIÇÃO}} dF_{p_0}(w) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(p_0 + tw) - F(p_0)}{t}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(p_0) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}(p_0), \dots, \frac{\partial F_m}{\partial x_i}(p_0) \right)$$

Figura 20 – Quadro sistemático-simbólico relativo a evolução do conceito de derivabilidade de CUV ao conceito de diferenciabilidade estudado no curso de GD.

Fonte: Elaborado pela autora

Na Figura 20, divisamos as mudanças notacionais e acentuamos também, as alterações operacionais e conceituais, exigidas em função da variação do espaço topológico, que envolve a conceituação do conceito de derivada, para a compreensão da definição de diferenciabilidade, desde a variável real até o tratamento aplicado em Geometria Diferencial.

Ainda nesse capítulo, a autora enumera algumas propriedades de diferenciabilidade, introduzindo o conceito de *difeomorfismo*, quando uma função diferenciável de classe C^k , que possui uma inversa de também diferenciável de classe C^k , denominando *difeomorfismo* de classe C^k . Concluindo o capítulo com o enunciado fundamental do cálculo diferencial, denominado *teorema da função inversa*. Tal teorema, toma $F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável de classe C^k e $p_0 \in A$ tal que dF_{p_0} é injetora. Então, existe uma vizinhança U de p_0 contida em A , tal que $F(U)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ e a restrição de F a U é um difeomorfismo de classe C^k , de U sobre $F(U)$. Em relação a esse teorema a autora não fornece nenhuma demonstração e/ou significação geométrica, apenas o cita com a justificativa que ele será empregado posteriormente, tal fato possivelmente se atribui por se tratar de um teorema de outro curso intitulado Análise no $\mathbb{R}^n$.

Desta maneira, a autora conclui os conteúdos básicos para o entendimento da teoria de GD, incluindo alguns exercícios ao final do capítulo para que o aluno aplique esses conhecimentos prévios. Entretanto, em tais exercícios divisamos um prevalecimento dos o caráter algorítmico dos conceitos trabalhados, não realizando também nenhuma indicação do seu contexto histórico e/ou epistemológico.

2.1 Exercícios

1. Considere as seguintes funções $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

a) $F(x, y) = (x, y, x + y)$

b) $F(x, y) = (x \cos y, x \sin y, 2x)$

c) $F(x, y) = (x + y, (x + y)^2, (x + y)^3)$.

Em cada caso, verifique que F é diferenciável e obtenha a matriz jacobiana. Indique os pontos $p \in \mathbb{R}^2$ onde dF_p não é injetora.

Figura 21 – Exemplo de exercícios propostos por TENEBLAT(2008) no capítulo 0 (introdutório)
Fonte: TENEBLAT(2008, p. 25)

No ponto seguinte, capítulo 1, a autora descreve o conceito de curva fornecendo-se as coordenadas de seus pontos como funções de uma variável real, identificamos exemplos interessantes apresentados pela autora, ao apresentar tal conceito e demonstrar a distinção entre curvas parametrizadas diferenciáveis e curvas parametrizadas não diferenciáveis.

c) A curva parametrizada diferenciável

$$\alpha(t) = (\cos t (2 \cos t - 1), \sin t (2 \cos t - 1)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

é denominada *cardiôide*

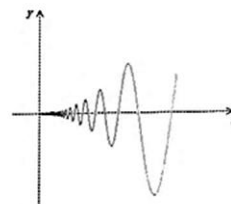
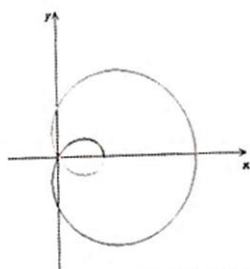


Figura 5

não é uma curva parametrizada diferenciável (ver Figura 5), já que a função

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0, \\ t^2 \sin \frac{1}{t} & \text{se } t > 0, \end{cases}$$

Figura 22- Exemplos de curvas apresentados por TENEBLAT(2008)

Fonte: TENEBLAT(2008,p.29, figura à esquerda, p. 3 figura à direita)

Além disso, evidenciamos em TENEBLAT (2008) que a noção de vetor tangente foi bem explorada por meio de registros algébrico e registro gráfico em 2D, correlacionando o seu significado geométrico ao conceito de derivada, como é apresentado na Figura 23.

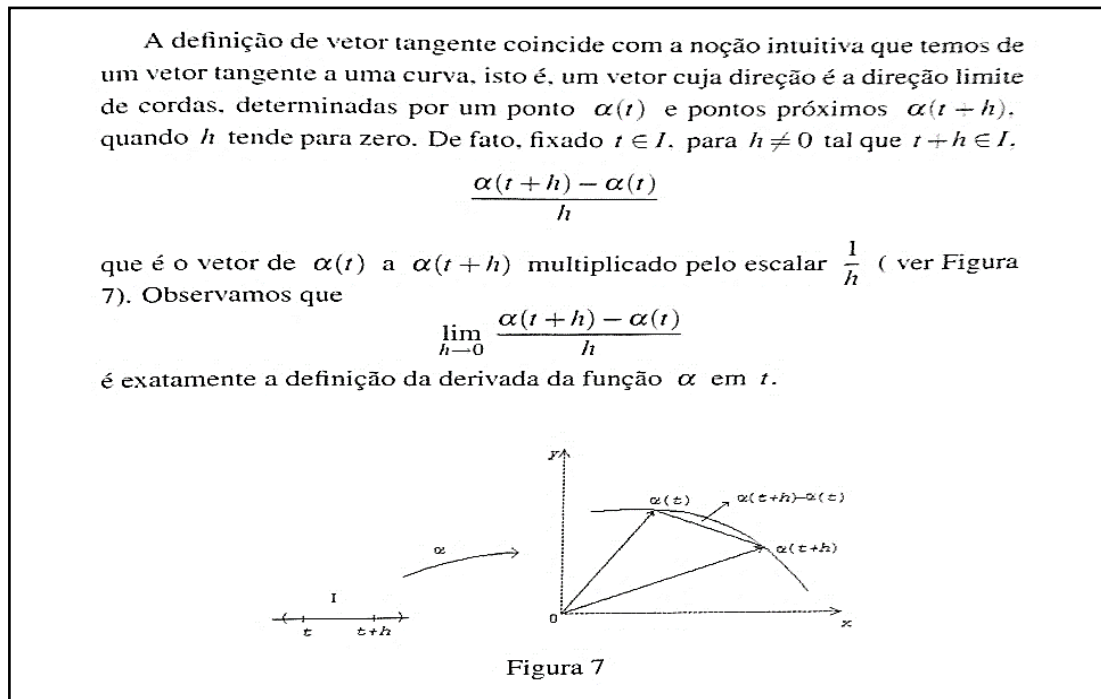


Figura 23 – Concatenação dos conceitos vetor tangente com o conceito de derivabilidade de uma função de uma variável.
Fonte: TENEBLAT(2008, p.33)

Em contrapartida, não observamos a exibição desse conceito geométrico, vetor tangente, nas curvas apresentadas, se limitando apenas a manipulação algébrica nos exemplos fornecidos. Provocando uma dissociação do significado geométrico de vetor tangente ao conceito algébrico nas curvas. Outra importante definição fornecida, decorrente do conceito anterior, é intitulada vetor normal, que é imprescindível para a formulação de outros conceitos correlacionados a curvas planas, entre eles os conceitos: curvatura, Teorema Fundamental das Curvas e Fórmulas de Frenet .

A autora define a curvatura $k(s)$ como *um fator de proporcionalidade* que correlaciona os vetores normal e tangente, de modo mais sucinto, TENEBLAT(2008, p.43) desenvolve por meio de deduções algébricas para curvas *parametrizadas pelo comprimento do arco - ppca* (em que o comprimento do arco independente do parâmetro é unitário), que a curvatura é dada por:

$$\begin{cases} t'(s) = k(s)n(s) \\ n'(s) = -k(s)t(s) \end{cases}$$

Ademais, a autora ainda correlaciona o significado desse conceito ao seu valor, determinando que se $k(s_0) > 0$ temos que $n(s_0)$ tem o mesmo sentido de $\alpha''(s_0)$, ou seja, a derivada no vetor tangente no ponto s_0 , do mesmo modo, se $k(s_0) < 0$ então $\alpha''(s_0)$ e $n(s_0)$ têm sentido opostos, a seguir vemos a ilustração de tal fenômeno pela autora, por meio da Figura 24.

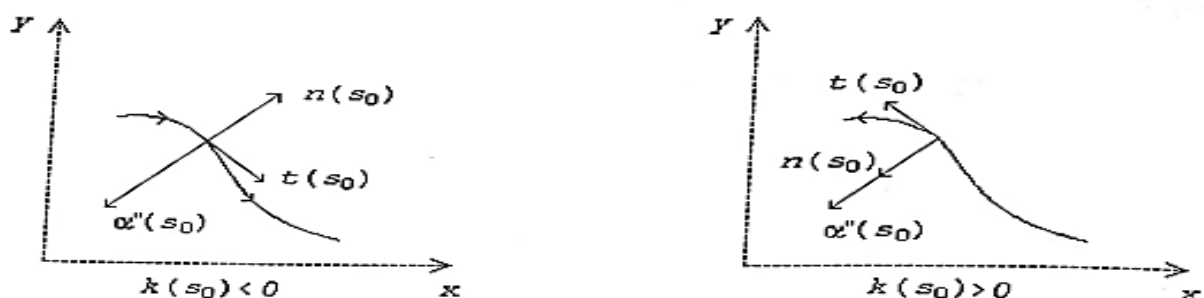


Figura 24 – Significação gráfico-geométrica do sinal da curvatura em curvas planas
Fonte : TENEBLAT(2008, p.44)

Posteriormente, a autora estende o conceito curvatura para curvas que não se enquadrem na definição anteriormente citada. Contudo, na Figura 25, podemos observar que apesar da autora fornecer o significado geométrico dos conceitos anteriores ao defini-los, não verifica-se aplicação desses conceitos e a suas respectivas visualizações nos exemplos, o que poderia amparar na aquisição de conceitos.

a) Seja $\alpha(s)$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco cujo traço é uma reta. Então a curvatura é identicamente nula. De fato, seja

$$\alpha(s) = (as + x_0, bs + y_0), \quad s \in I,$$

onde a e b são constantes e $a^2 + b^2 = 1$. Como $t(s) = \alpha'(s)$ é constante, temos que $t'(s) = 0$ e portanto $k(s) = 0, \forall s \in I$.

b) Consideremos a curva

$$\alpha(s) = \left(a + b \cos \frac{s}{b}, c + b \sin \frac{s}{b}\right), \quad s \in \mathbb{R}, \quad b > 0,$$

cujo traço é uma circunferência de centro (a, c) e raio b . Neste caso

$$\begin{aligned} t(s) &= \left(-\sin \frac{s}{b}, \cos \frac{s}{b}\right) \\ n(s) &= \left(-\cos \frac{s}{b}, -\sin \frac{s}{b}\right). \end{aligned}$$

Logo

$$k(s) = \langle t'(s), n(s) \rangle = \frac{1}{b}.$$

Figura 25 – Exemplificação de aplicação dos conceitos de vetores tangente, normal e da função curvatura propostos por TENEBLAT(2008)
Fonte: TENEBLAT (2008, p. 44)

Finalizaremos a análise desse capítulo, estabelecendo que a autora aborda a teoria local das curvas planas associando as fórmulas de Frenet, obtidas considerando um “diedro ortonormal associado naturalmente a uma curva plana” (TENEBLAT, 2008, p.61).

No capítulo seguinte, a autora desenvolve um estudo análogo, considerando um triedro ortonormal associado a uma curva regular de $\mathbb{R}^3$. Desse modo, a autora dedica-se ao estudo de curvas espaciais de dimensão três, introduzindo de modo análogo a muitos conceitos basilares de curvas planas. Segundo a autora “as noções de vetor tangente, curva regular e mudança de parâmetro para curvas não são motivadas pelas mesmas considerações já vistas para curvas planas, portanto, serão introduzidas sem muitos comentários” (TENEBLAT, 2008, p.57).

O conceito curvatura é definido pela autora como “a velocidade com que as retas tangentes mudam de direção” (TENEBLAT, 2008, p.61), sendo obtido em uma curva $\alpha(t)$ ppca algebricamente como a norma do vetor $\alpha''(s)$, apesar de ser uma significação geométrica para curvatura em curvas de dimensão três, não observamos uma exemplificação visual de tal interpretação. Além disso, a autora não relaciona o conceito para curvas espaciais com o conceito em curvas planas, podendo ocasionar uma distinção do significado algébrico/geométrico do conceito dependendo do espaço vetorial trabalhado.

Em relação ao vetor normal de curvas espaciais ppca com $k(s) > 0$, a autora o define como o quociente $\alpha''(s)$ e a curvatura, para posteriormente, correlacioná-lo através do vetor tangente. Nesses

viés, evidenciamos que a noção de vetor tangente não foi bem explorada por meio de registros algébrico e registro gráfico em 3D .

Ademais, a autora indica a existência de um outro vetor em $\mathbb{R}^3$, intitulado vetor binormal ($b(s)$), determinando o como produto vetorial entre os vetores tangente e normal a um ponto de uma curva $\alpha(t)$. TENEBLAT(2008) define que essa tripla de vetores (tangente, normal e binormal) determinam um referencial ortonormal, intitulado Triedro de Frenet.

A autora também explana acerca dos planos formados por cada par de vetores desse referencial ortonormal, determinando que o plano que contém $\alpha(s)$ e é normal ao vetor $t(s)$ é o Plano Normal à curva , o plano que contém $\alpha(s)$ e é normal a $b(s)$ é denominado Plano Osculador , e por fim, o plano que contém $\alpha(s)$ e é normal a $n(s)$ trata-se do Plano Retificante, na Figura 26, podemos vê uma representação desses planos produzidas pela a autora.

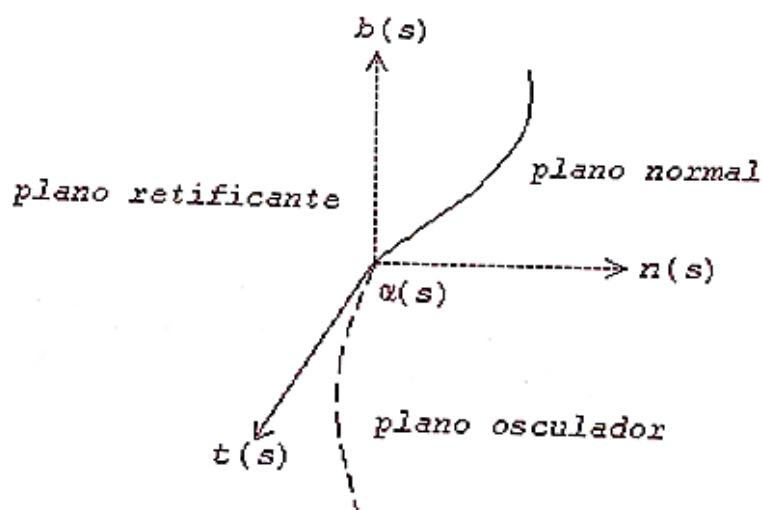


Figura 26- Representação dos planos gerados pelos vetor normal,tangete e binormal.
Fonte : TENEBLAT(2008, p.63)

Outro importante conceito explanado em curvas nessa dimensão, trata-se da torção $\tau(s)$ de uma curva, estabelecido como uma constante de proporcionalidade entre os vetores $b(s)'$ e $n(s)$. TENEBLAT (2008, p.65) indica que o módulo do vetor torção “mede a velocidade com que o plano osculador varia”. Contudo, apesar da autora fornecer uma significação geométrica para o conceito torção em curvas de dimensão três, não observamos uma exemplificação visual de tal interpretação, de modo afim ao acontecido no conceito curvatura em dimensão três.

Em contrapartida, a autora explana propriedades decorrentes do sinal da constante torção, por meio de representações canônicas das curvas. A título de exemplo, se a torção $\sigma(s_0) < 0$, então para todo s suficientemente próximo de s_0 , a curva $\alpha(s)$ pertence ao semi-espço determinado pelo plano osculador, que contém $-b(s_0)$, tal representação dessa propriedade pode ser observada na Figura 27.

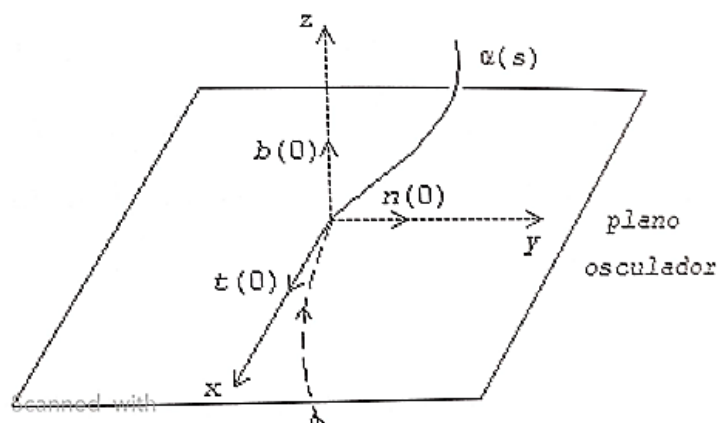


Figura 27- Exemplificação de uma propriedade decorrente da $\sigma(s_0) < 0$

Fonte: TENEBLAT(2008, p. 80)

Outro importante conceito apresentado nesse capítulo, são as fórmulas do triedro de Frenet, que correlacionam os vetores tangente, normal, e binormal por meio dos conceitos torção e curvatura, obtidas por meio de métodos de derivabilidade, as aplicações de tais fórmulas, se sucedem como caracterização de curvas (determinando se a curva é plana, se trata-se de uma circunferência, hélice etc). Desse modo, ao final do capítulo não verificamos a existência de significação geométrica do Triedro de Frenet nem de suas respectivas fórmulas, a seguir na Figura 28, apresentamos uma exemplificação de exercícios trabalhados nesse capítulo, em que evidenciamos um prevalecimento do caráter algorítmico.

1. Considere as seguintes curvas regulares:

- a) $\alpha(t) = (4 \cos t, 5 - 5 \sin t, -3 \cos t), t \in \mathbb{R},$
- b) $\beta(t) = (1 - \cos t, \sin t, t), t \in \mathbb{R},$
- c) $\gamma(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t), t \in \mathbb{R}.$

Reparametrize essas curvas por comprimento de arco, obtenha o triedro de Frenet, a curvatura e a torção de cada curva.

2. Calcule a curvatura e a torção das seguintes curvas:

- a) $\alpha(t) = (t, t^2, t^3),$
- b) $\beta(t) = (\cos t, \sin t, e^t),$
- c) $\gamma(t) = (t, \cosh t, \sinh t).$

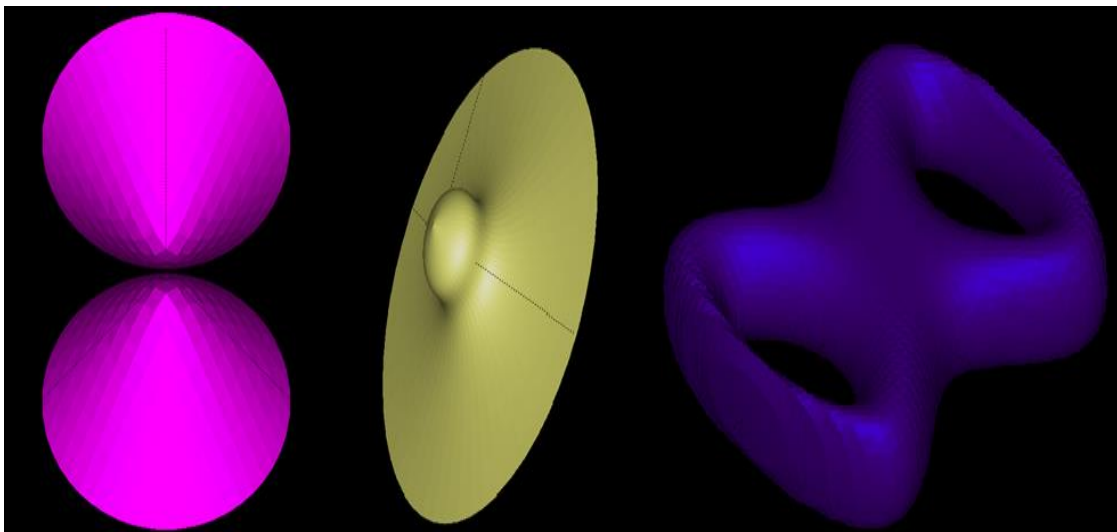
Figura 28- Exemplificação de questões com a abordagem dos conceitos relacionados ao Triedro de Frenet

Fonte : TENEBLAT(2008, p. 69)

No capítulo 3, “tendo em vista o caráter introdutório do curso, o estudo das superfícies é desenvolvido para *superfícies parametrizadas regulares*” (Prefácio de TENEBLAT,2008). Estas superfícies apresentam-se como uma extensão do conceito de curva parametrizada regular. Assim a teoria de superfícies é desenvolvida por meio de derivadas parciais, considerando os vetores X_u, X_v, N associados a uma superfície $X(u, v)$, em que estes vetores X_u, X_v, N formam uma base de $\mathbb{R}^3$ que, de modo geral, não é ortonormal.

Apesar da autora, não realizar indicação do seu contexto histórico/epistemológico do conceito superfícies, ao final desse capítulo, é introduzido algumas aplicações da computação gráfica por meio do programa “ACOGEO”(Apoio Computacional a Geometria Diferencial) com o intuito de visualizar tanto curvas e superfícies no espaço euclidiano como os principais resultados da geometria diferencial apresentados no livro.

O programa “ACOGEO” foi desenvolvido pelo Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, possui algumas expressões de curvas e superfícies, que podem ser rotacionadas sobre os eixos da tela , transladar e centralizar o ponto de observação. A exibição das visualizações proporcionadas por esse programa, são apresentadas na Figura 29, a seguir.



Apesar do programa ainda permitir ao usuário plotar superfícies, definindo os intervalos de

Figura 29 – Superfície 1 (Hipérbole de duas folhas); Superfície 2 (Chapéu de Sherlock); Superfície 3 (Bitoro).

Fonte : <http://www.mat.unb.br/~keti/> - Programa ACOGEO

variação, expressado na Figura 29, o *software* possui algumas limitações, pois não proporciona recursos para a realização de um estudo dos conceitos matemáticos relacionados a superfícies, explanação de propriedades e teoremas.

Superfície implicitamente definida

Digite uma função de x, y e z :

$F(x, y, z) =$ $= 0$

Domínio da função:

x min: y min: z min: Δ :

x max: y max: z max:

Figura 30 – Comandos para plotar superfícies no programa ACOGEO

Fonte : : <http://www.mat.unb.br/~keti/> - Programa ACOGEO

Por fim, no capítulo IV, é incluído um método alternativo de apresentar a teoria das superfícies, intitulado Método do Triedro Móvel, que consiste em escolher adequadamente, para cada ponto da superfície, uma base ortonormal $e_1(u, v), e_2(u, v), e_3(u, v)$ de $\mathbb{R}^3$ de tal forma que os vetores e_1, e_2 sejam tangentes à superfície. Desse modo, a autora proporciona, por meio de outras definições matemáticas, um outro entendimento matemático, embora menos intuitivo, relacionado a superfícies.

Ao final da análise de um livro-texto de Geometria Diferencial podemos contemplar : a ausência da concepção histórica dos conceitos de GD e de uma previsão das possíveis concepções dos alunos (dimensão cognitiva) provenientes a partir da abordagem proposta. Além de inferirmos acerca dos obstáculos epistemológicos¹⁸ identificáveis a partir da abordagem proposta por essa autora.

Desse modo, concluímos que tal obra enfatiza o caráter algorítmico condicionado pelos conceitos de Geometria Diferencial, sendo admitido a noção de existência matemática de modo automático além de desconsiderar os aspectos topológicos locais, de aplicação dos conceitos por meio de uma visualização negligenciando assim a significação gráfico-geométrica dos conceitos, propriedades e teoremas .

¹⁸ Tratam-se de elementos que pode retardar, e mesmo impedir um processo de entendimento do estudante submetido a uma ação intencional de ensino (BACHERLARD, 1995).

5 CAMPO EPISTÊMICO - MATEMÁTICO: UMA FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA DOS CONCEITOS RELACIONADOS A CURVAS E SUPERFÍCIES

A finalidade desse capítulo é apresentar os conceitos basilares de curvas e incipientes, seguindo o roteiro proposto no livro de TENEBLAT(2008) concomitantemente a algumas aplicações desses conceitos no *software* Geogebra. Além disso, é importante ressaltar que esse capítulo apresenta trechos de artigos desenvolvidos ao longo do curso, publicados em PAIVA e ALVES (2018a), PAIVA e ALVES (2018b), PAIVA e ALVES (2019).

5.1 – Conceito de curvatura de uma curva diferenciável

Uma curva diferenciável trata-se de uma aplicação diferenciável $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ , ou seja, uma curva em que podemos derivar quantas vezes desejarmos, em que I é um intervalo aberto da reta. Em coordenadas cartesianas, têm-se $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, em que a variável $t \in I$ é dita parâmetro da curva, e o subconjunto de $\mathbb{R}^n$ dos pontos $\alpha(t)$ é chamado traço da curva (PAIVA e ALVES, 2018a).

Por simplicidade notacional, trataremos curvas diferenciáveis apenas por curvas. À título de exemplo, a seguir, na Figura 31, apresentamos uma curva diferencial em R^2 , intitulada espiral representada pela seguinte expressão $a(t) = (t \cos(t), t \sin(t))$, em que $0 < t < 3\pi$.

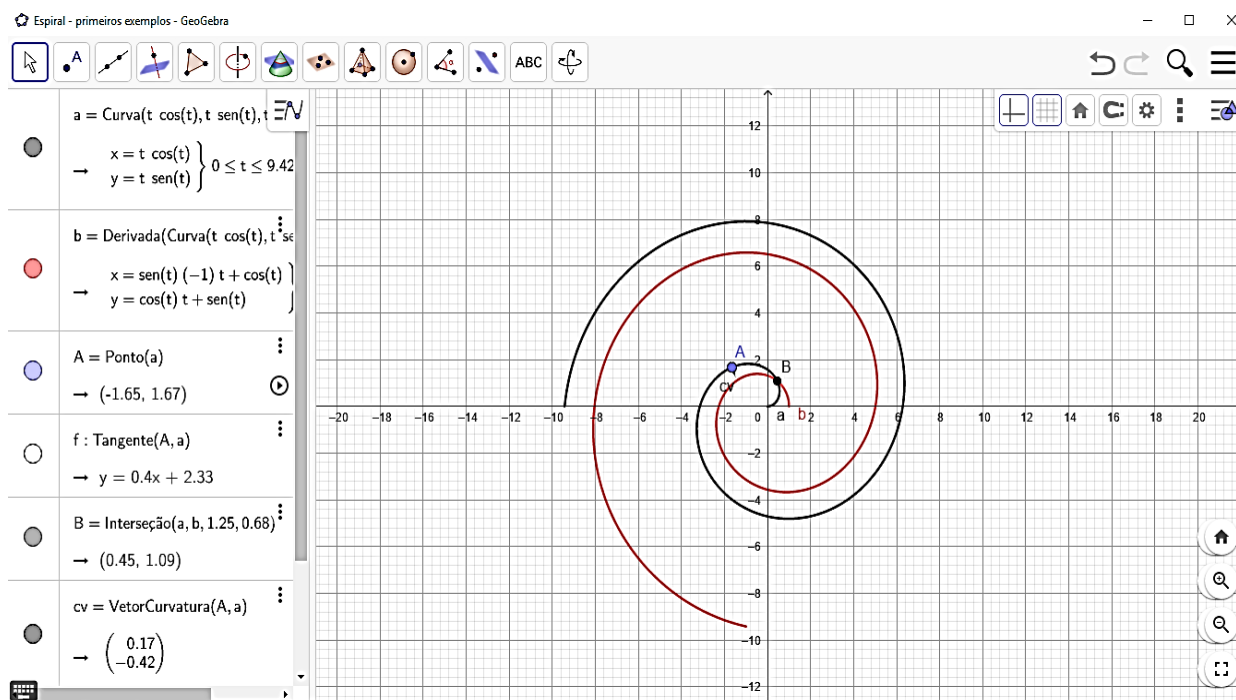


Figura 31- Representação da curva espiral de dimensão dois e a representação da curva gerada por sua respectiva derivada na cor vermelha
Fonte: Elaborada pela autora

Determinaremos que uma curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ será considerada regular quando $\forall t \in \mathbb{R}$ temos que $\alpha'(t) \neq 0$. Estabeleceremos também que uma curva está parametrizada pelo comprimento do arco - curva ppca quando $\forall t \in I$, o comprimento do arco, norma dessa curva é unitária, ou seja $|\alpha'(t)| = 1$, em que

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{[x_1'(t)]^2 + \dots + [x_n'(t)]^2}.$$

Desse modo, tendo como exemplo a curva de expressão a circunferência $\alpha(t) = \left(a \cos \frac{t}{a}, a \sin \frac{t}{a}\right)$, de centro $(0,0)$ e raio a , com $t \in \mathbb{R}$, verificamos que trata-se de uma curva ppca, pois $|\alpha'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$.

Prosseguiremos nosso estudo, definindo o vetor tangente a uma curva α em t , como $T(t) = \alpha'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$, e o vetor tangente unitário a α em t como $T_u(t) = \frac{T(t)}{|T(t)|}$, onde

$$|T(t)| = |\alpha'(t)| = |(x_1'(t), \dots, x_n'(t))| = \sqrt{[x_1'(t)]^2 + \dots + [x_n'(t)]^2}.$$

Veja que, se temos uma curva ppca o vetor tangente coincide com o vetor tangente unitário, pois como $|\alpha'(t)| = 1$, temos que o vetor tangente unitário dado por $T_u(t) = \frac{T(t)}{|T(t)|} = \frac{T(t)}{|\alpha'(t)|} = T(t)$.

Compreendemos ainda que, se um vetor X possui norma $|X|$ constante, então $X'(t)$ é perpendicular a $X(t)$, para todo $t \in I \subset \mathbb{R}$. Dessa forma, tomando uma curva ppca, visto que $T(t)$ tem norma 1, temos que $T'(t)$ é perpendicular a $T(t)$.

Assim, inferimos que, para cada vetor tangente, existem vários vetores ortogonais a ele próprio. Tal fato em curvas ppca pertencentes a $\mathbb{R}^2$ associado a definição de vetor normal $(N(t))$ a curva α em t , como o vetor ortogonal a $T(t)$, tal que a base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ formada por $T(t)$ e $N(t)$ possui a mesma orientação que a base canônica $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, denotado por $N(t) = (-y'(t), x'(t))$ nos leva a concluir que $T'(t)$ e $N(t)$ diferem por uma constante multiplicativa, tratando-se de vetores paralelos. Estabelecendo, dessa forma a seguinte relação:

$$T'(t) = k(t)N(t).$$

Tal função $k(t)$, definida pela equação acima é dita curvatura da curva $\alpha(t)$. Observe que a curvatura $k(t)$ em curvas ppca, também pode ser representada como:

$$k(t) = \langle T'(t), N(t) \rangle = - \langle N'(t), T(t) \rangle,$$

e, generalizando tal função temos que $k(t): I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^∞ quando a curva $\alpha(t)$ se tratar de uma curva de classe C^∞ .

Embora essa fórmula possa ser utilizada em qualquer caso para calcular a curvatura em curvas ppca, em alguns casos em $\mathbb{R}^2$, em que temos a curva somente regular, ALENCAR e SANTOS (2008, p.43), TENEBLAT (2008, p.46) demonstram através dos vetores tangente unitário e normal unitário expressos respectivamente por $T_u = \frac{(x'(t), y'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}$, $N_u = \frac{(-y'(t), x'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}$ outra expressão

para o cálculo da curvatura representada, em termos das coordenadas da curva, por $k(t) = \frac{-x''(t)y'(t) + x'(t)y''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}}$.

Ademais TENEBLAT (2008, p.61) realiza uma análise geométrica de curvas regulares ppca em um espaço de dimensão três $\mathbb{R}^3$, constatando que o módulo da curvatura ppca também pode ser dado por:

$$k(t) = |T'(t)| = |\alpha''(t)|.$$

Posteriormente, a autora define como vetor normal em uma curva ppca em $\mathbb{R}^3$ tal que $k(t) > 0$, o vetor $N(t) = \frac{T'(t)}{k(t)}$. Ao contrário do que realizamos em $\mathbb{R}^2$, para encontrarmos a curvatura em uma curva $\mathbb{R}^3$ somente regular, devemos realizar uma operação intitulada *mudança de parâmetro* para que após essa operação, obtemos uma curva *reparametrizada pelo comprimento do arco*, a seguir dissertamos de modo mais detalhado como ocorre tal operação em $\mathbb{R}^3$, contudo esclarecemos que tal operação ocorre de forma análoga em espaços reais de dimensão dois.

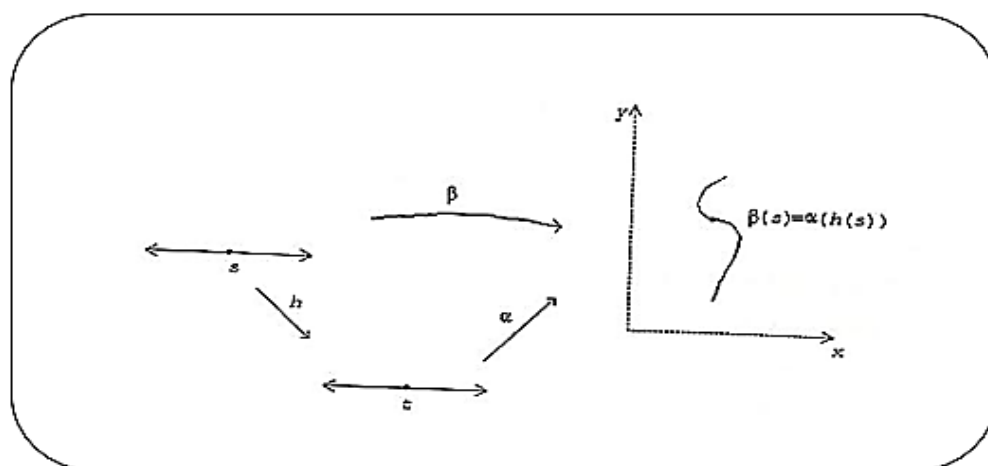


Figura 32 – Sistematização do processo de reparametrização de uma curva plana desenvolvido por TENEBLAT(2008)

Fonte : TENEBLAT (2008, p.37)

Sejam $\alpha(t)$, $t \in I$, uma curva regular de $\mathbb{R}^3$, definiremos a *função comprimento de arco* da curva $\alpha(t)$ a partir de um ponto t_0 como $s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$. Desse modo, se tivermos $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular e $s : I \rightarrow s(I) \subset \mathbb{R}$ a *função comprimento de arco* de α a partir de t_0 , então existe a função inversa h de s , definida no intervalo aberto $J = s(I)$, e $\beta = \alpha \circ h$ representa uma *reparametrização* de α , onde β está *parametriza pelo comprimento de arco – ppca*, sendo importante evidenciar que a função composta $\beta = \alpha \circ h$ é uma curva regular de $\mathbb{R}^3$ que apresenta o mesmo traço de α .

De agora em diante, prosseguiremos o nosso estudo com curvas regulares empregando situações que propiciem uma visualização satisfatória desses conceitos, com o auxílio do *Geogebra*. Utilizando aliás, o posicionamento de TENEBLAT (2008, p. 34) como um alicerce para a razão da utilização de curvas regulares.

“Para o desenvolvimento da teoria local das curvas é preciso que exista a reta tangente a uma curva α para cada valor do parâmetro t , para isso é suficiente que o vetor tangente a α seja não nulo para todo t , ou seja, as retas tomadas têm que ser regulares.”

À título de exemplificação do entendimento de reparametrização pelo comprimento de arco, tomaremos uma hélice circular de expressão $\beta(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ cujo comprimento de arco $|\beta'(t)| = \sqrt{2}$. A função comprimento de arco da hélice é dada por $s(t) = \int_0^t \sqrt{2} dt = \sqrt{2} t$, estabelecendo a operação mudança de parâmetro $h(s) = \frac{s}{\sqrt{2}}$ reparametrizamos a curva pelo comprimento do arco encontrando $\alpha(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$. Apresentamos a seguir, na Figura 33, a representação da hélice $\beta(t)$ e sua respectiva reparametrização $\alpha(s)$, desenvolvidas no software Geogebra com o intuito de atestar visualmente a existente entre igualdade do traço dessas curvas.

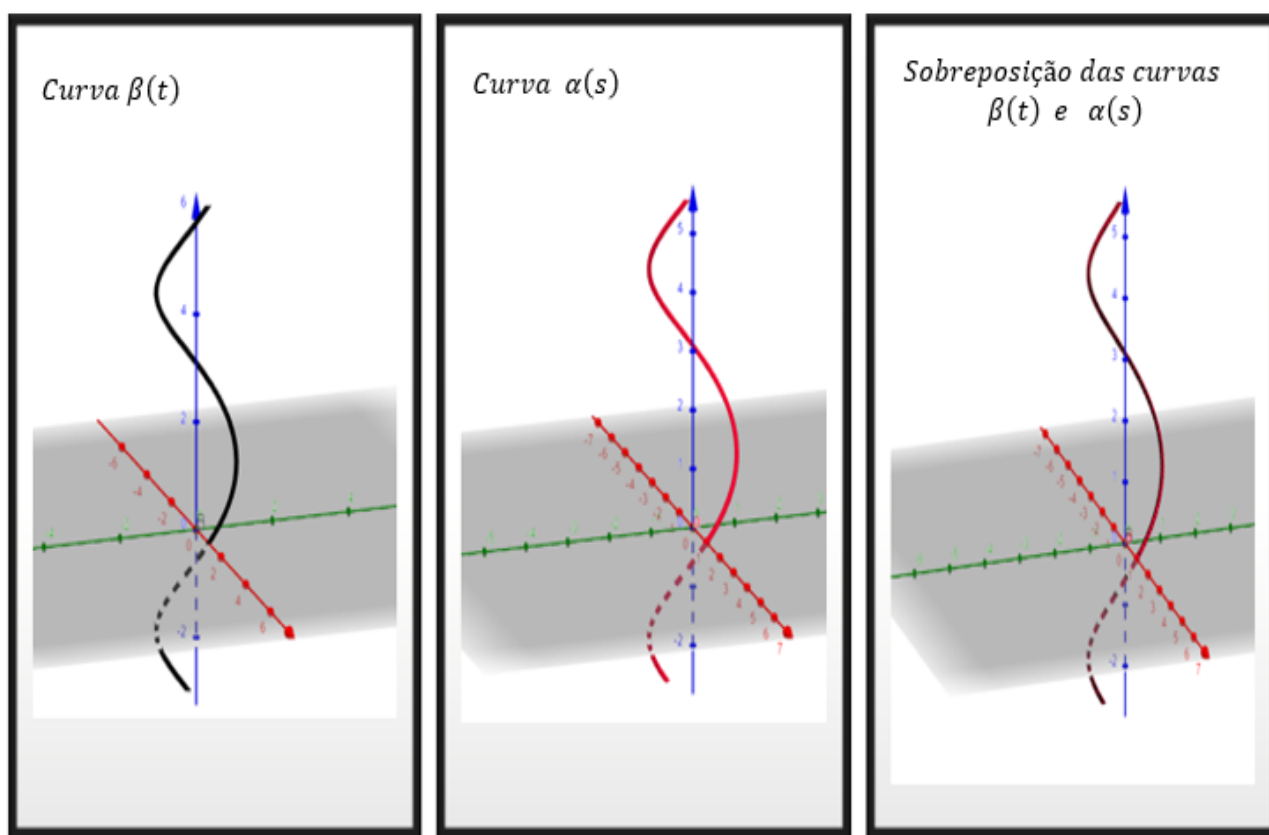


Figura 33 – Representação da conservação do traço da curva após uma reparametrização pelo comprimento de arco.

Fonte : Elaborado pela autora

Retomando a noção geométrica da função curvatura podemos defini-la como uma medida de variação da direção do vetor tangente, que pode ser obtida diretamente da análise da expressão da curva. Outras visões geométricas do conceito de curvatura, podem ser inferidas para um melhor entendimento do aluno, como retratado por ALENCAR e SANTOS (2002, p.41):

“A curvatura então é uma medida de quanto uma curva deixa de ser uma reta. De fato, a curvatura de uma curva regular α é identicamente zero, se e somente se, o traço de α está contido em uma reta.”

Uma forma adequada de retrarmos tal caracterização, poderia ser a apreciação da curvatura das funções exponenciais e logarítmica, retratadas na Figura 34.

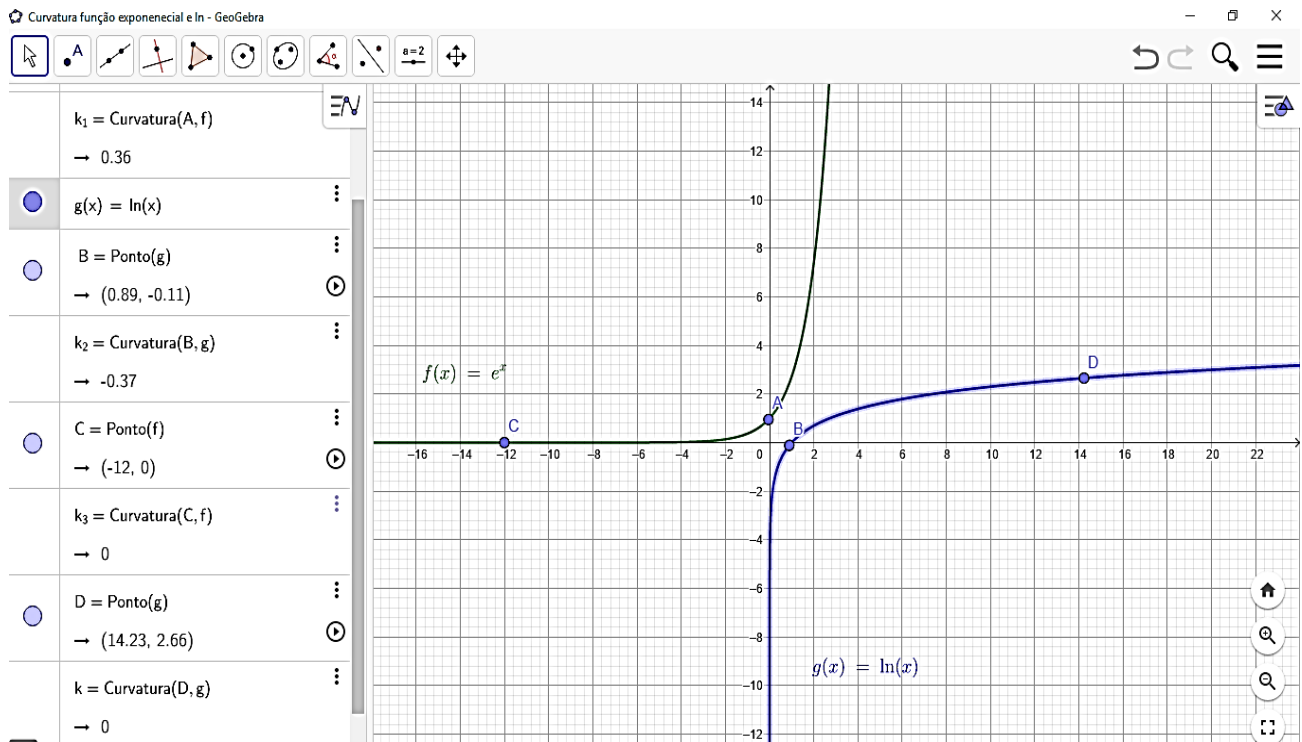


Figura 34 – Representação da variação da curvatura nas curvas que representam as funções exponenciais e logarítmica.

Fonte: Elaborada pela autora

Ao analisarmos a variação do valor da curvatura da função exponencial em $x = -0.05$, representado pelo ponto $A(-0.05, 0.95)$, em que há uma sinuosidade no gráfico da função, em relação ao instante que $x = 12$, representado pelo ponto $C(-12, 0)$, em que o gráfico da função exponencial aproximasse de uma reta, entrevemos que na medida que a curva se assíntota, aproximando-se da reta referente ao eixo horizontal do sistema cartesiano xy , a curvatura torna-se nula.

Do mesmo modo, ao contemplarmos na função logarítmica a variação dos pontos $B(0.89, -0.11)$ e $D(14.23, 2.66)$, inferimos que na medida que o ponto assemelhasse a uma reta horizontal, a curvatura torna-se nula.

Para uma melhor compreensão do significado dos outros conceitos retratados, como vetores tangente e normal, admitiremos uma curva polinomial bastante simples, definida por $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, a(t) = (t^2, t)$ com $t \in \mathbb{R}$. Observe que o vetor tangente em t será dado por $T(t) = (2t, 1)$, a norma de $T(t)$ será $|T(t)| = \sqrt{4t^2 + 1}$, o vetor tangente unitário ($T_u(t)$) por $\left(\frac{2t}{\sqrt{4t^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{4t^2 + 1}}\right)$, o vetor normal $N(t) = \left(\frac{-1}{\sqrt{4t^2 + 1}}, \frac{2t}{\sqrt{4t^2 + 1}}\right)$ e a expressão da curvatura obtida será $k(t) = \frac{-2}{(4t^2 + 1)^{3/2}}$. Na

Figura 35, observamos por meio do comportamento da curva, que à medida que o valor de t se modifica, os valores da curvatura, vetores tangente e normal variam.

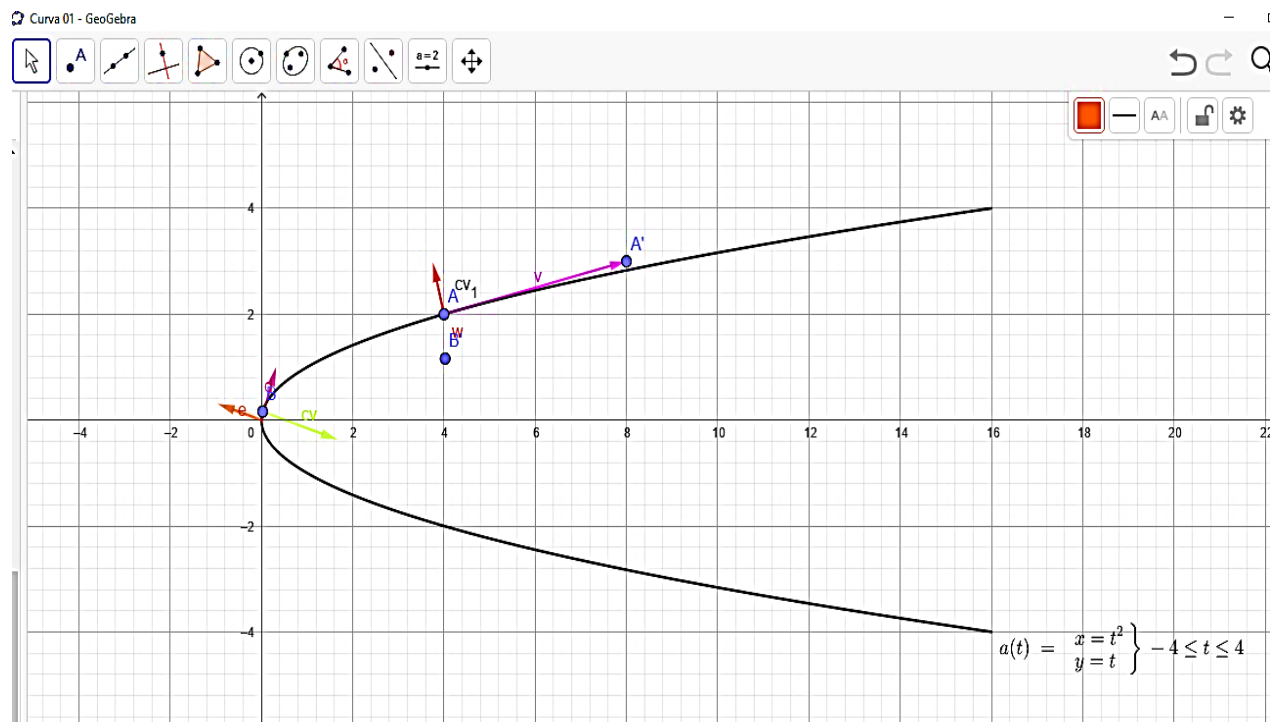


Figura 35- Descrição do traço da curva $a(t) = (t^2, t)$ e estudo da curvatura com o *software* Geogebra
Fonte: Elaborado pela autora.

Assim, ao assumirmos $t = 2$, resultando no ponto $A = (4, 2)$ pertencente a curva, o vetor tangente à curva no ponto A estará representado por meio do vetor v , na cor lilás, $T = (4, 1)$ e o vetor normal unitário está representado pelo vetor w , na cor vermelha, $N = (-0.24, 0.97)$.

A fim de proporcionar uma melhor interpretação da variação da curvatura, utilizaremos o vetor curvatura, que nos fornece por meio do quociente entre a derivada do tangente unitário e a derivada da curva, a visualização de tal acontecimento. Assim, estabelecemos que o vetor curvatura será dado por $\vec{k} = \frac{T_u(t)'}{a'(t)} = \frac{T_u(t)'}{T(t)}$. Através do *software* Geogebra, obtemos o valor do vetor curvatura em A pelos pontos $(0, 01, -0, 03)$, representado por CV, na cor verde. Observe que seu tamanho é bastante reduzido devido ao seu pequeno módulo, e nesse ponto a curvatura é $-0,03$.

Ao tomarmos outro ponto na curva, quando $t = 0,16$, apresentamos na Figura 35, o ponto B $(0.03, 0.16)$ e a variação do comportamento da curvatura, observe o novo valor do vetor tangente, representado por b (cor lilás), com coordenadas $(0.32, 1)$, o vetor normal c unitário (cor vermelha) com coordenadas $(-0.95, 0.3)$, o vetor curvatura é $(1.64, -0.53)$ e a curvatura no ponto B é -1.72 .

De fato, a análise da curva $a(t) = (t^2, t)$ no *software* Geogebra nos permite compreender adequadamente a noção de curvatura, no primeiro ponto retratado, ponto A, onde temos que a curva tende a se aproximar de uma reta horizontal, assim a curvatura nesse ponto encontra-se bastante reduzida enquanto que no ponto B tal curva apresenta uma acentuada sinuosidade.

Daremos continuidade a nossa análise, com a representação no *software* Geogebra de uma curva comum no cotidiano, a circunferência de centro $(0,0)$ cuja a equação é dada por $x^2 + y^2 = r^2$, em que r é o raio da circunferência, que tem equações paramétricas $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, a(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$, com $0 \leq t \leq 2\pi$.

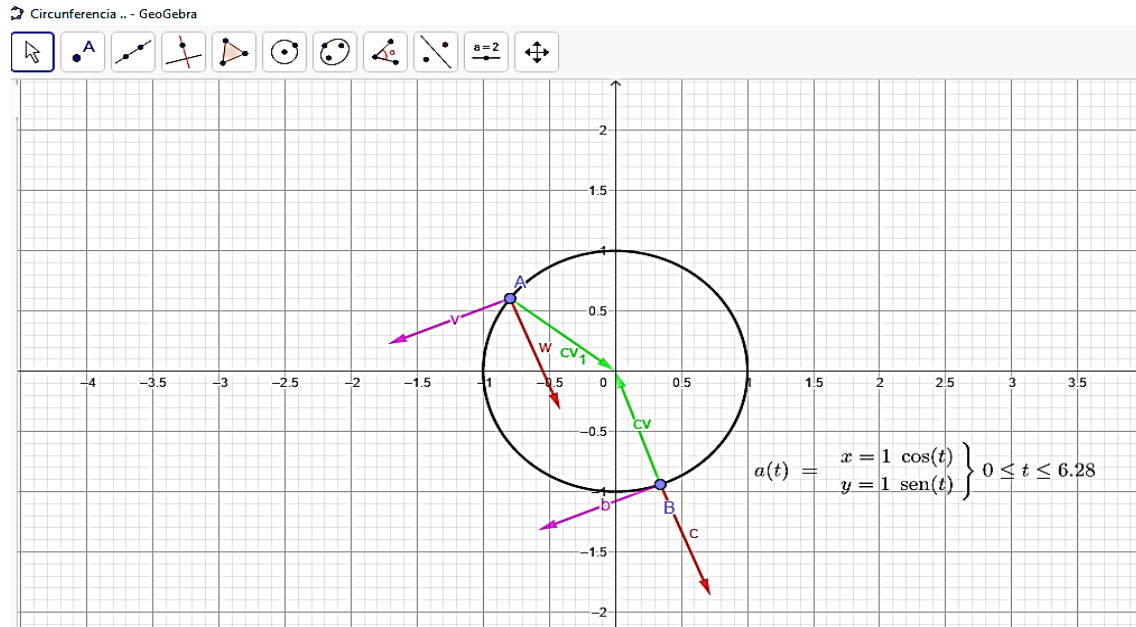


Figura 36 - Descrição gráfica de uma curva com curvatura constante
Fonte : Elaborada pelo autora

Desse modo, verificamos que $|a'(t)| = 1$, assim essa circunferência não encontra-se parametrizada pelo comprimento do arco, a menos que o valor de $r = 1$, nesse caso, o valor do vetor tangente seriam $T(t) = (\sin(t), \cos(t))$, $N(t) = (-\cos(t), -\sin(t))$, $k = 1$. Observe que, na Figura 36 apresentamos o comportamento da circunferência com raio unitário, assim tomando $t = 5.7$, obtemos o ponto $A = (-0.85, 0.52)$. Em que o vetor tangente à curva no ponto A, trata-se do vetor v , na cor lilás, $T = (-0.55, -0.83)$, o vetor normal unitário, está representado por w (cor vermelha), tem coordenadas $N = (-0.83, -0.55)$, e o vetor curvatura representado por CV (cor verde), tem coordenadas $(0.85, -0.52)$, o valor obtido por meio do programa da curvatura no ponto A é unitário, atestando o valor de curvatura calculado.

Observe agora, outro ponto da circunferência, um ponto B de coordenadas $(0.53, -0.85)$ cujo o vetor curvatura $(-0.52, 0.85)$ está representado na cor verde. Por meio do *software* verificamos que a curvatura em B também é unitário e que o vetor curvatura nesse ponto apresenta o mesmo módulo do ponto A, encontrando-se apenas em orientação contrária ao vetor curvatura em A.

Analisaremos tal acontecimento, em uma circunferência de raio r qualquer, em que teremos o o vetor tangente $T(t) = (r \sin(t), r \cos(t))$, por conseguinte $N(t) = (-r \cos(t), -r \sin(t))$, e curvatura $k(t) = \frac{1}{r}$. Desse modo, pela expressão da curvatura, concluímos que o valor da curvatura na circunferência depende apenas do valor do raio, independe do parâmetro t , e assim, a curva apresenta curvatura constante. Os demais vetores dependem do valor do parâmetro t , a medida do

vetor normal unitário no ponto B está representado pela cor vermelha $(-0.83, 0.55)$ e o tangente está exibido pela cor rosa $(-0.55, -0.83)$.

Prosseguindo com o nosso estudo, investigaremos uma curva bastante conhecida, a hipérbole, cuja a equação paramétrica é dada por $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, possuindo as seguintes equações paramétricas $c(t) = (a \sec(t), b \tan(t))$, onde a e b são constantes. Na Figura 37, exibimos o comportamento da curva.

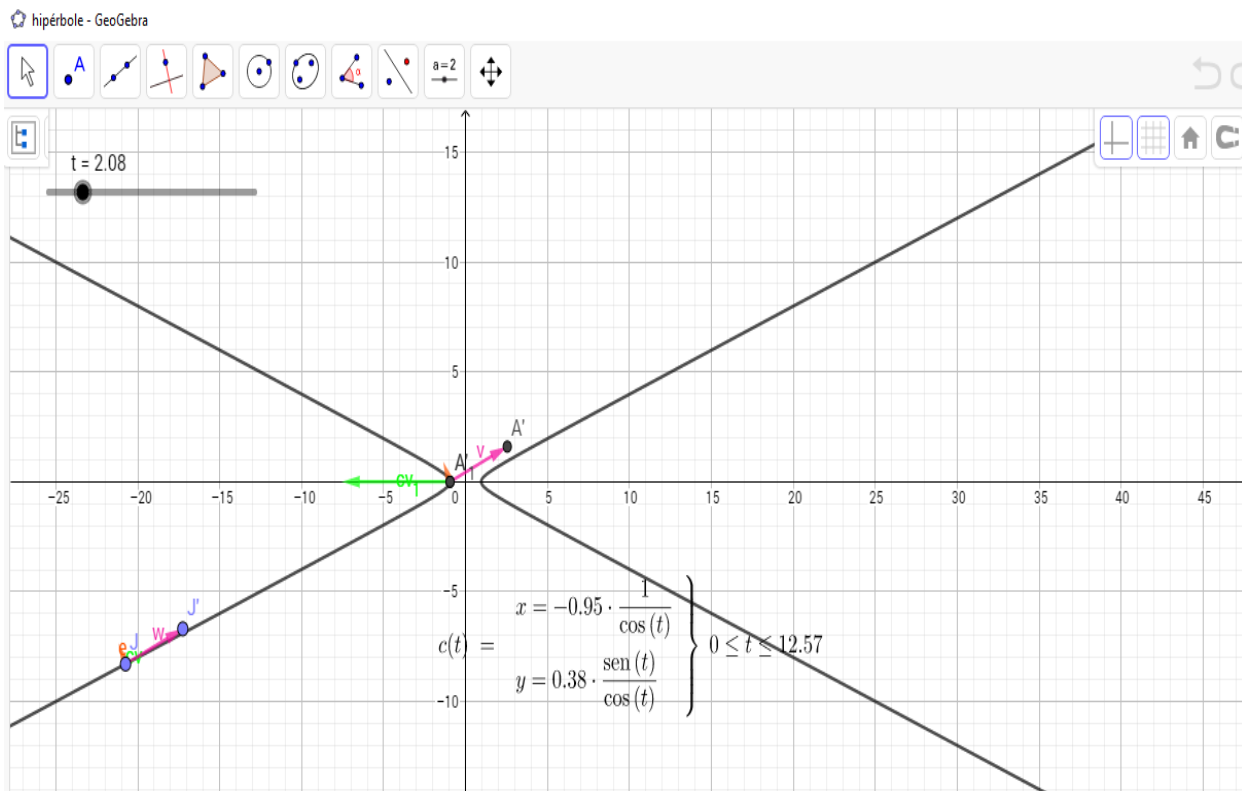


Figura 37 - Descrição do traço da curva plana e estudo da variação curvatura com o software Geogebra
Fonte: PAIVA e ALVES(2018a,p.75)

O ponto utilizado no programa para cálculo dos vetores quando $t = 2.08$, foi $A = (-0.95, 0)$, o vetor tangente a curva no ponto A se trata do vetor v , que está na cor lilás, $T = (3.49, 1.6)$, o valor do vetor normal unitário, que está cor vermelha, é dado por $(0.42, -0.91)$, o vetor curvatura representado por CV (cor verde) tem coordenadas $(-6.58, 0)$ e a curvatura no ponto A assume valor 6,58.

Por outro lado, ao analisarmos outro valor de t , obtidos por exemplo no ponto $J = (-20.74, -8.29)$, obtemos o $T(t) = (3.49, 1.6)$, $N(t) = (-0.42, 0.91)$, vetor curvatura $(0, 0)$ e curvatura nula. Note que essa diferença de curvatura nos pontos A e J ocorre, pois a expressão da curvatura depende do parâmetro t , ou seja, difere de uma função constante como no exemplo anterior. Intuitivamente, podemos afirmar que no ponto A , a curva c se distancia suficientemente de uma reta, enquanto que no ponto J o traço de c está contido em uma reta.

STEWART (2001, p.782) salienta que em exemplos mais abstratos, como uma curvas tridimensionais, o cálculo de tais conceitos são inerentemente mais difíceis de que em curvas planas, e que para uma representação mais precisa necessita-se do uso de uma tecnologia.

Para exemplificação desse pensamento, analisaremos a curva espacial polinomial $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, denominada de cúbica retorcida, cuja equação paramétrica é $a(t) = (t, t^2, t^3)$. Assim, $T(t) = (1, 2t, 3t^2)$, $|T(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$, $T_u = (\frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}, \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}, \frac{3t^2}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}})$, $N(t) = (\frac{-t(9t^2+2)\sqrt{9t^4+4t^2+1}}{9t^4+9t^2+1}, \frac{(2-18t^4\sqrt{9t^4+4t^2+1})}{4(9t^4+9t^2+1)}, \frac{3t(2t^2+1)\sqrt{9t^4+4t^2+1}}{2(9t^4+9t^2+1)})$. Nesse momento aplicaremos a fórmula $k(t) = \frac{|a'(t) \times a''(t)|}{|a'(t)|^3}$, cuja demonstração encontra-se em TENEBLAT(2008, p.67), com o intuito de minimizar as contas.

Da expressão da equação vetorial da cúbica retorcida obtemos os seguintes resultados $a''(t) = (0, 2, 6t)$, $a'(t) \times a''(t) = (6t^2, -6t, 2)$, $|a'(t) \times a''(t)| = 2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}$.

Assim, substituindo na fórmula da curvatura, temos $k(t) = \frac{2\sqrt{9t^4+9t^2+1}}{(1+4t^2+9t^4)^{\frac{3}{2}}}$. Na Figura 38, exibimos o comportamento da curva.

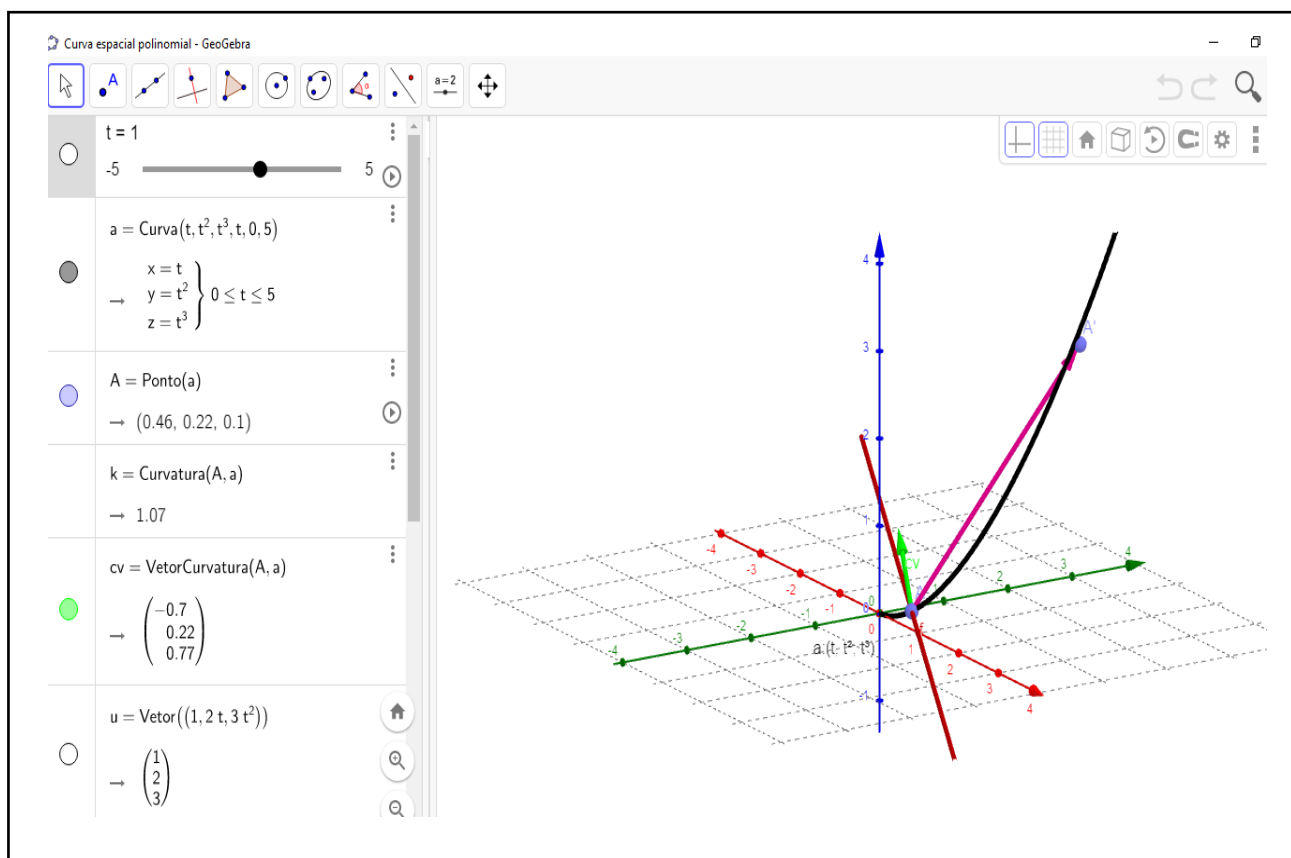


Figura 38- Descrição do traço da curva espacial com o software *Geogebra*
Fonte : PAIVA e ALVES(2018a,p.74)

O ponto utilizado no programa para cálculo dos vetores quando $t = 0.46$, foi o ponto $A = (0.46, 0.22, 0.1)$, o vetor tangente a curva no ponto A trata-se do vetor v , na cor lilás, $T = (1, 0.92, 0.63)$, a reta em que o vetor normal unitário está contido encontra-se na cor vermelha e tem

equação dada por $X = (0.46, 0.22, 0.1) + \lambda(2, -1, 0)$, assim o vetor normal tem coordenadas $N = (0.89, -0.45, 0)$, o vetor curvatura representado por CV (cor verde) tem coordenadas $(-0.7, 0.22, 0.77)$ e a curvatura no ponto A assume valor 1,07.

De fato, contemplamos que em alguns casos de dimensão dois e três, os cálculos são mais complexos, às vezes inexequível, por isso de agora em diante calcularemos os valores dos vetores tangente, normal, curvatura apenas no *Geogebra*. Essa observação juntamente com o fato que o *software* torna a visualização das curvas mais dinâmica o caracteriza uma ferramenta indispensável no ensino desse campo de saberes.

Nesse contexto, analisaremos a hélice, cuja a aplicação no cotidiano encontra-se de diversas formas como em aparelhos de propulsão e tração. As equações paramétricas de tal curva, são dadas por $a(t) = (t \operatorname{sen}(t), t \cos(t), t)$.

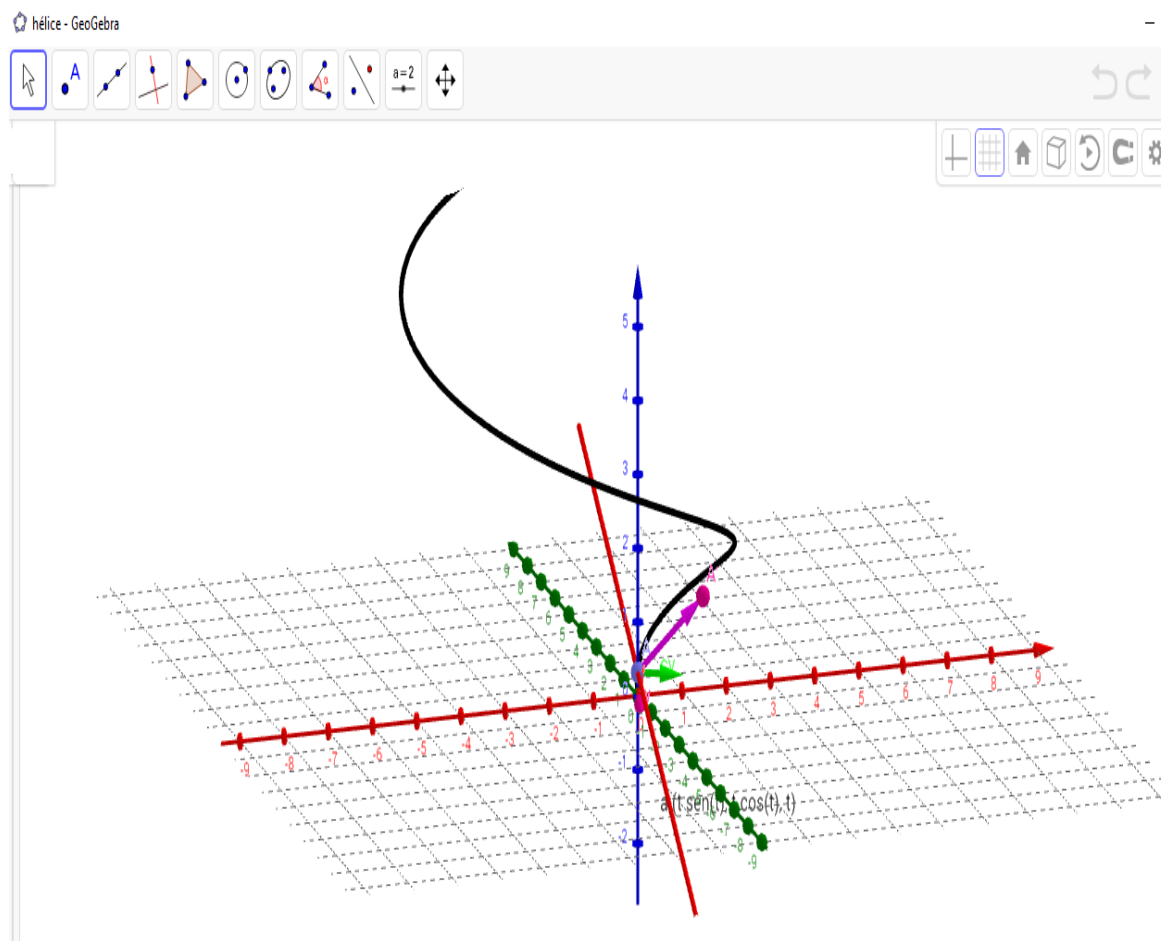


Figura 39 - Descrição do traço da curva espacial e identificação dos vetores em direções afins
Fonte : PAIVA e ALVES(2018a,p.76)

O cálculo dos vetores foi realizado no ponto $A (0,0,0.32)$, o vetor tangente a curva no ponto A se trata do vetor v , que está na cor lilás, tem coordenadas $T = (1.38, -0.3, 1)$, a reta em que o vetor normal unitário está contido, está na cor vermelha, $X = (0,0,0.32) + \lambda(-0.3, 1.38, 0)$, as coordenadas do vetor normal são dadas por $N = (-0.21, 0.98, 0)$, o vetor curvatura representado por CV (cor verde)

em coordenadas $(0.95, -0.27, -0.04)$ e a curvatura no ponto A assume valor 0.99. Veja que, como temos $k > 0$, os vetores $N(t)$ e $T'(t)$ apresentam o mesmo sentido.

Finalizemos nosso estudo acerca da curvatura de uma curva diferenciável, com a seguinte curva $a(t) = (t, t^2 + 2 \operatorname{sen} t, t^5)$. Na Figura 40 temos um esboço de tal curva.

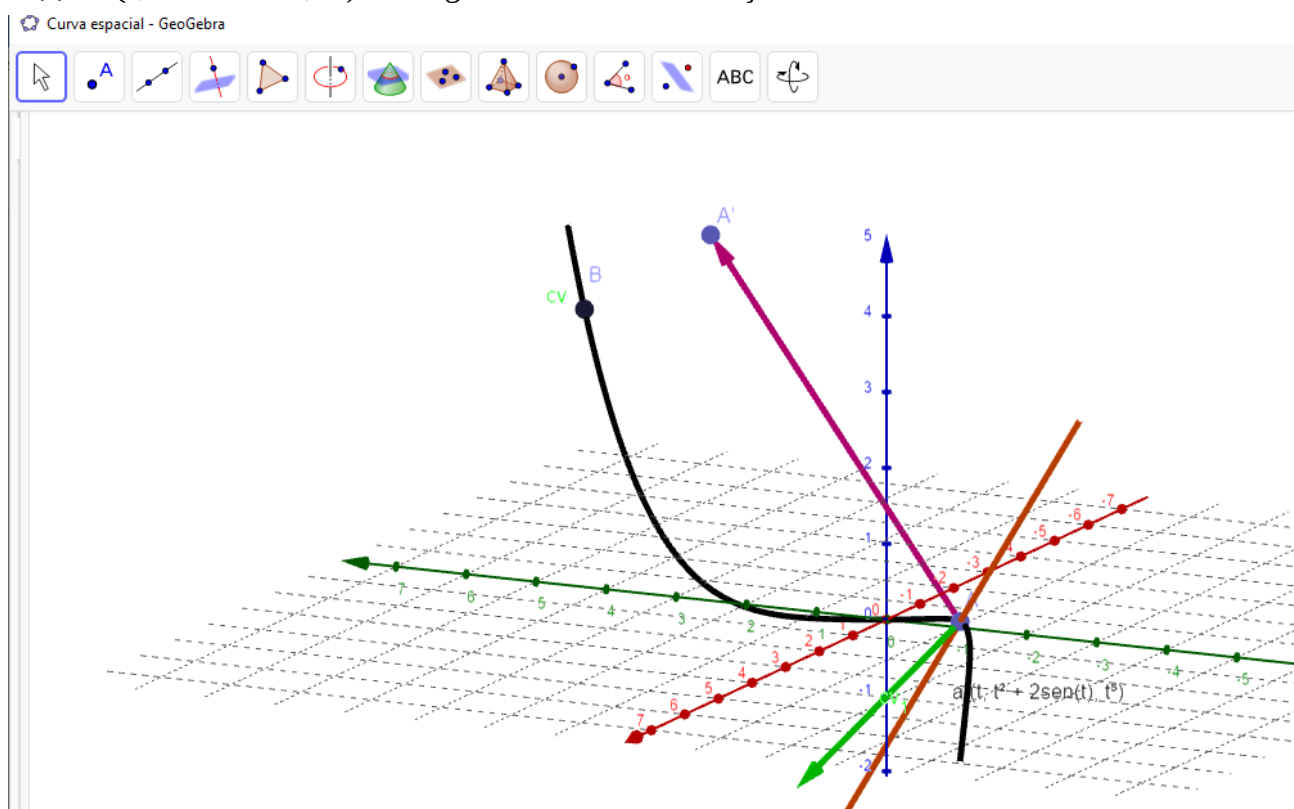


Figura 40 - Descrição do traço da curva espacial e estudo da variação curvatura com o *software* GeoGebra
Fonte: PAIVA e ALVES(2018,p.76)

O ponto utilizado no programa para cálculo dos vetores foi $A = (-0.59, -0.77, -0.07)$, o vetor tangente a curva no ponto A se trata do vetor v , representado na cor lilás $T = (1, 3.08, 5)$, a reta em que o vetor normal unitário está contido, é exibida na cor vermelha, $X = (-0.59, -0.77, -0.07) + \lambda(3.08, 1, 0)$, $N = (0.95, -0.31, 0)$, o vetor curvatura representado por CV (cor verde) tem coordenadas $(0.41, 2.14, -2.33)$ e a curvatura no ponto A assume valor 3.19, enquanto que no ponto B a curvatura assume o valor 0.04, dispondo de um vetor curvatura quase imperceptível.

Por meio desse exemplo, verificamos que a medida que nos afastamos do ponto A , a curva se assíntota e a curvatura se reduz rapidamente, ou seja, a medida que a curva se aproxima de uma reta, a curvatura toma valores próximos a zero.

Ao longo dessa seção propomos a realização do estudo matemático dos conceitos de vetores tangente e normal a curva em um dado ponto conjuntamente a análise do conceito curvatura, amparados pelo apoio de tecnologias. Ademais, esclarecemos que nem sempre o cálculo desses conceitos é exequível a mão, requerendo o uso, de modo rotineiro, tanto do conhecimento matemático, bem como das nossas habilidades de visualização e percepção, na medida em que obtemos, com origem no *Geogebra*, a descrição do traço das curvas planas e espaciais.

5.2 – Teorema fundamental das curvas planas

Essencialmente, o Teorema Fundamental das Curvas Planas - TCP, caracteriza uma curva através de sua função curvatura. Portanto se dispomos de duas curvas diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$, a curvatura torna-se a propriedade característica no seguinte aspecto: duas curvas parametrizadas pelo comprimento de arco que possuem a mesma função curvatura diferem por uma isometria de $\mathbb{R}^2$ (PAIVA e ALVES (2018b)).

Intuitivamente, a apresentação do problema matemático que descreve o TCP garante que dada a função curvatura de uma curva plana, podemos determinar a curva a menos de sua posição no plano. Formalmente, TENEBLAT (2008, p.52) descreve o teorema da seguinte maneira:

- Dada uma função diferenciável $k(t)$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, existe uma curva regular $\alpha(t)$, parametrizada pelo comprimento de arco s , cuja curvatura é o $k(t)$.
- A curva $\alpha(t)$ acima é única quando fixamos $\alpha(s_0) = p_0$ e $\alpha(s_0)' = v_0$, onde v_0 é um vetor unitário de $\mathbb{R}^2$.
- Se duas curvas $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ têm a mesma curvatura, então diferem por sua posição no plano, isto é, existe uma rotação L e uma translação T em $\mathbb{R}^2$, tal que $\alpha(t) = (L \circ T)(\beta(t))$.

Denotamos por movimentos rígidos rotações e/ou translações, sendo denotados tais movimentos pela letra grega φ . Para um melhor entendimento do teorema, desenvolvemos algumas construções com o Geogebra.

Por exemplo, ao tomarmos duas curvas diferenciáveis, denotadas por $c : x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ e $d : x^2 + y^2 - 24x - 6y + 149 = 0$ exibimos a seguir, o comportamento das curvas com o auxílio do *software* Geogebra e utilizaremos o TCP para determinar se elas são congruentes.

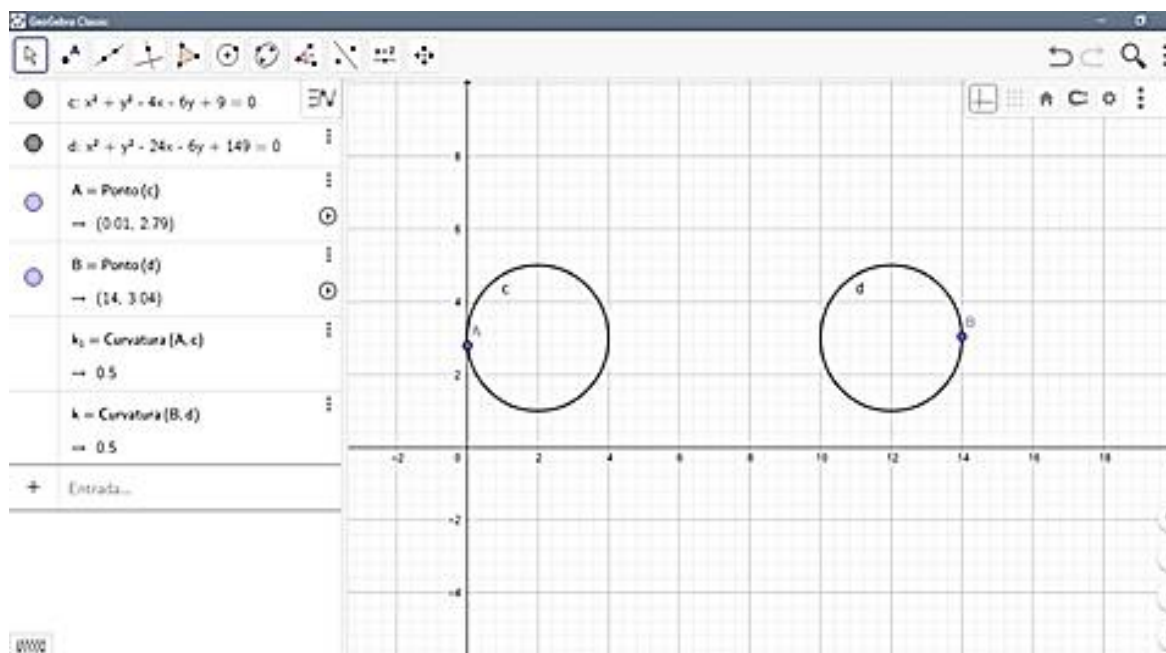


Figura 41 - Descrição do comportamento gráfico-geométrico de curvas congruentes

Fonte: PAIVA e ALVES(2018b, p.128)

Note que ao construir as curvas no Geogebra, observamos que se trata de duas circunferências com raios iguais e centros diferentes. Nessa construção, quando questionamos se as circunferências

são congruentes queremos instigar o aprendiz a utilizar a sua noção intuitiva e criatividade. A princípio podem surgir premissas verdadeiras, mas baseadas em justificativas equivocadas, por exemplo, as duas circunferências são congruentes pois apresentam o mesmo raio. No entanto, pelo TCP duas curvas são congruentes apenas quando possuem a mesma curvatura.

Através do *software*, calculamos a curvatura das circunferências e utilizando o fato que na circunferência, em qualquer ponto arbitrário, a curvatura é constante, percebemos a igualdade nas curvaturas, e só assim, podemos afirmar que as curvas são congruentes.

Note que, que embora não tenhamos utilizado nenhum algoritmo para calcular a curvatura, a visualização proporcionou entendimento do conceito. O TCP também estabelece que curvas que são congruentes e diferem por sua posição no plano, existe uma rotação L e uma translação T em $\mathbb{R}^2$, tal que $c(s) = (L \circ T)(d(s))$. Ou seja, existe um movimento rígido que ao ser realizado as coloca na mesma posição. Pela Figura 42, podemos observar que esse movimento trata-se de uma translação da circunferência d para à esquerda.

Nesse mesmo viés, considere as curvas $c : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ e $d : \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 4$, usando o TCP podemos mostrar que não existe um movimento rígido φ , tal que $c(x, y) = \varphi(d(x, y))$.

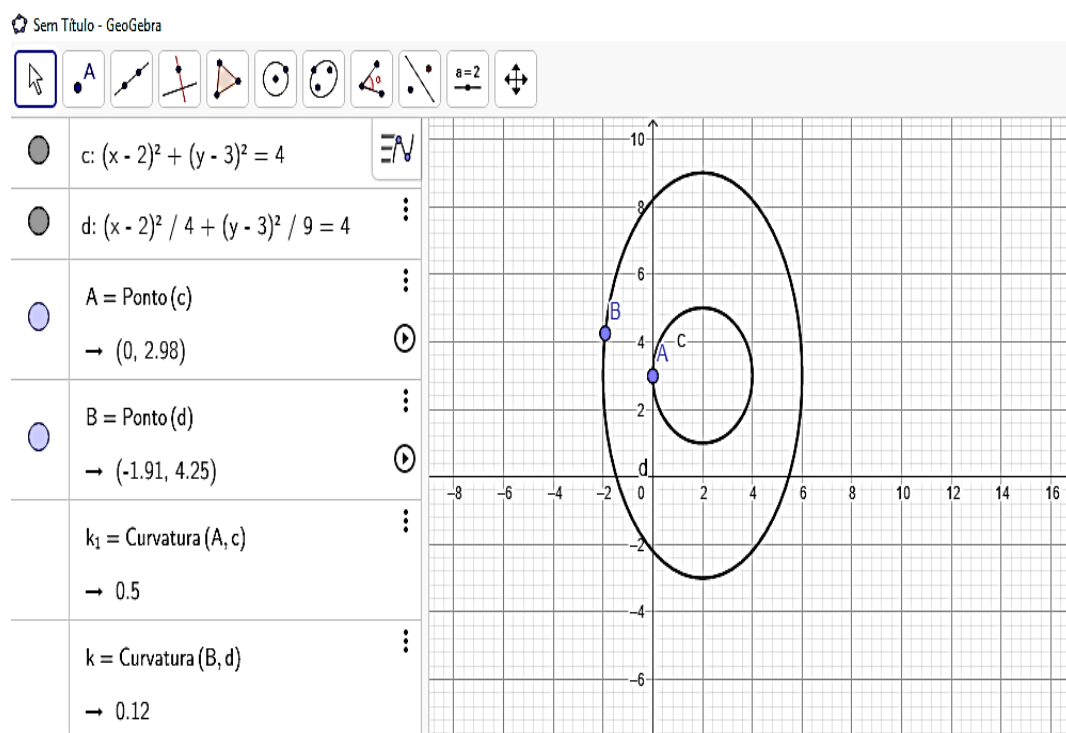


Figura 42 - Descrição do comportamento gráfico-geométrico da situação em que as curvas não são congruentes.

Fonte: PAIVA e ALVES(2018b, p.129)

Observe que primeira curva trata-se de uma circunferência com curvatura constante igual a 0.5, como podemos exemplificar por meio do ponto A , e a segunda curva uma elipse com curvatura variando, por exemplo no ponto B a curvatura apresenta valor 0.12, por meio da simulação no *software* verificamos que o valor máximo atingido pela curvatura na elipse é igual a 0.37, logo pelo TCP não existe movimento rígido que tal que as curvas c e d sejam congruentes.

Prosseguindo com a nossa análise do teorema, tomaremos as funções dadas por $f(x) = -x^2 + 14x + 40$ e $g(x) = x^2 + 14x + 58$, utilizaremos o *software* para a análise e o gráfico dessas funções.

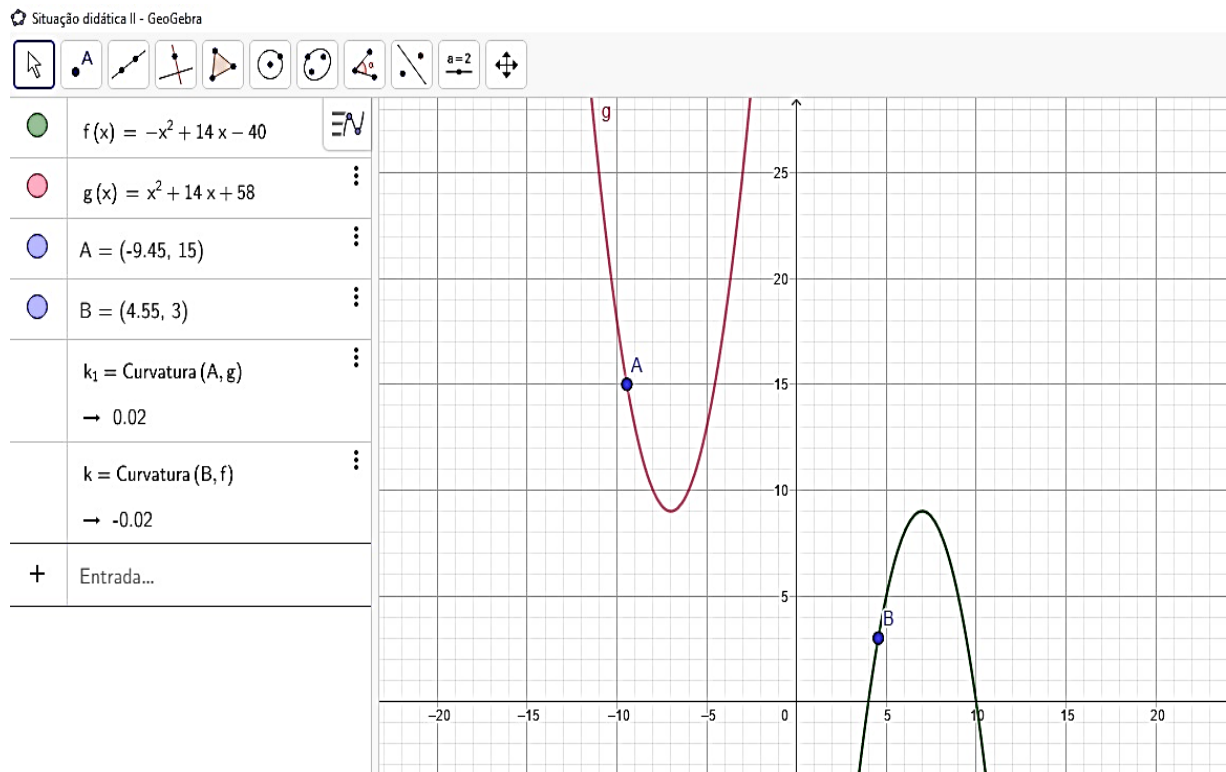


Figura 43 - Descrição do comportamento gráfico-geométrico das curvas planas $f(x)$ e $g(x)$
Fonte: PAIVA e ALVES(2018b, p.128)

Ao construir as funções, observamos que se trata de duas parábolas, a curvatura varia ao longo da parábola, mas note que se tomarmos pontos equivalentes nas curvas obtemos nesses pontos o mesmo valor de curvatura, logo pelo TCP essas curvas são congruentes. Veja que é possível visualizar o movimento rígido que coloca a parábola gerada pela função g , na mesma posição de f , basta fazer uma translação para a esquerda e depois uma rotação para cima (caso o aluno tenha dificuldades em visualizar o movimento rígido, usar a ferramenta do Geogebra de rotação a partir de determinado ponto para mudar a concavidade da curva $f(x)$, e posteriormente a ferramenta de translação). Continuando nosso estudo, vejamos uma outra abordagem para o estudo do TCP, com a parábola.

Sabendo que a equação da parábola é dado por $y = ax^2 + bx + c$, podemos encontrar na curva $y = ax^2 + bx + 0.5$ pelo menos um ponto em que a curvatura é 0.05, em seguida responder se a curvatura varia ou não em função de c .

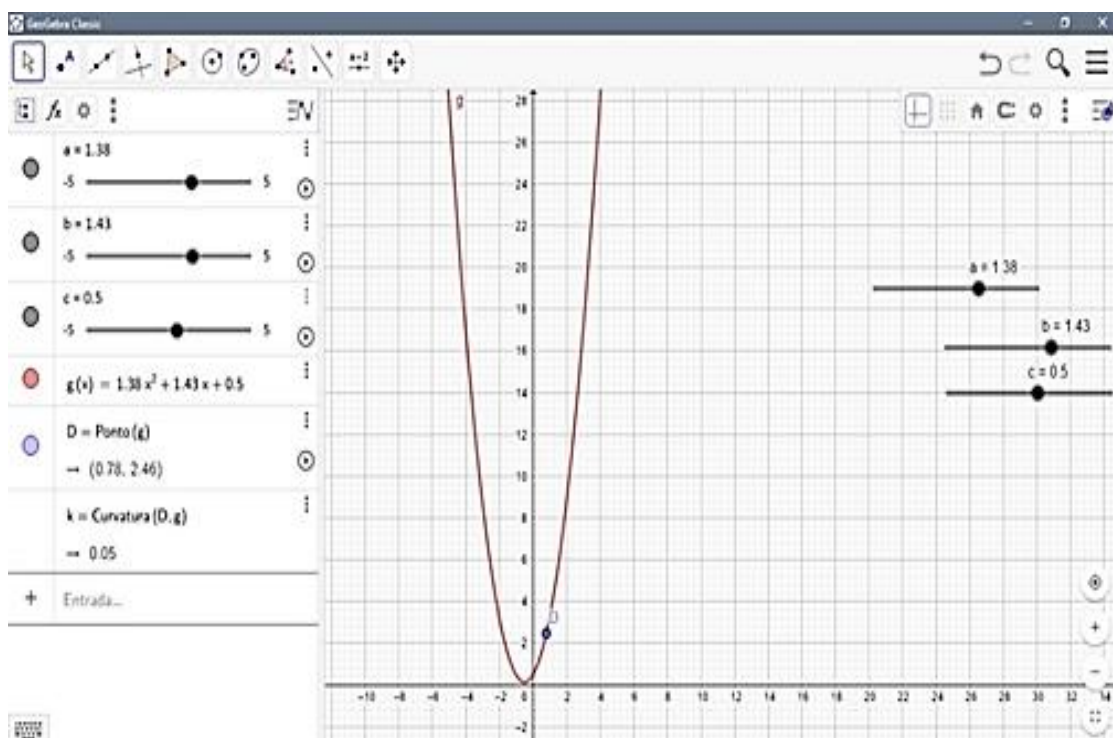


Figura 44 - Descrição do comportamento gráfico-geométrico da curvatura da parábola
Fonte: Elaborado pela autora

Para a resolução desse problema, a partir da formula geral da parábola, podemos criar controles deslizantes e assim detectar uma equação que satisfaça a situação. Por meio dessa situação podemos mostrar para o aluno, a principal propriedade do TCP, que afirma que “dada a função curvatura de uma curva plana, podemos determinar a curva a menos de sua posição no plano”, ou seja, o teorema garante a existência dessa parábola. Determinamos o parâmetro c , para que existisse apenas uma solução, mas através do *Geogebra*, o aluno pode perceber que ao variar o parâmetro c , em nada altera a curvatura, assim, o aluno chega a conclusão da segunda pergunta dessa situação didática ou o aluno pode recorrer a formula algébrica $k(t) = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}$, observando que $k(t) = \frac{-2a}{(\sqrt{1+(2ax+b)^2})^3}$, ou seja, a curvatura independe do parâmetro c .

Uma outra abordagem do teorema, seria propor ao aluno a construção de duas curvas planas arbitrárias e utilizar o *software* Geogebra em sintonia com TCP para a análise da relação entre essas curvas, com o intuito de instigar a criatividade dos alunos, e os incentive a prática da pesquisa. Dado que, ao propor essa atividade, os alunos exercitariam a prática da pesquisa e determinando curvas no $\mathbb{R}^2$, por exemplo hipérbole, catenária, e calculariam a respectiva curvatura. Além disso, observariam através da visualização e dos valores obtidos, a relação de congruência dessas curvas, e caso sejam, mostram o movimento rígido que possibilita que as curvas permaneçam na mesma posição. Essa última situação didática, possibilitaria a oportunidade de várias respostas diferentes, e posteriormente o docente ainda pode propor uma dinâmica para a troca de experiências entre os alunos.

5.3 – Triedro de Frenet

Para iniciarmos o estudo acerca do Triedro de Frenet, faz-se necessário tomarmos uma curva regular diferencial em $\mathbb{R}^3$, parametrizada pelo comprimento do arco. Trazemos à memória que uma curva em $\mathbb{R}^3$ está parametrizada pelo comprimento do arco quando :

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} = 1.$$

Ademais, utilizaremos a definição da curvatura de α em t , denotada por $k(t)$, como uma função dada por:

$$k(t) = |\alpha''(t)|.$$

MENDES (2007, p.2) expressa uma concepção *sui generis* da noção geométrica de curvatura $k(t)$ no espaço vetorial real de dimensão três como “uma medida da variação de $\alpha'(t)$, ou seja, é a velocidade com que as retas tangentes mudam de direção”. A partir de agora, retomaremos as definições de TENEBLAT (2008) para retratarmos de modo detalhado, as noções algébricas de vetor tangente e normal em $\mathbb{R}^3$. Desse modo, é importante salientar que por admitirmos que a curva é ppca, não se faz necessários distinguirmos o vetor tangente unitário do vetor tangente, pois como visto anteriormente nesse caso tais vetores não apresentam distinção:

$$T(t) = \alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

Além disso, designaremos o vetor unitário ortogonal a $T(t)$ como vetor normal a curva α em s , expressando na seguinte fórmula $N(t) = \frac{T'(t)}{k(t)}$. Por fim, definiremos um outro vetor existente nessa dimensão, intitulado vetor binormal à α em s , gerado pelo produto vetorial de $T(s)$ e $N(s)$:

$$B(t) = T(t) \times N(t).$$

Observe que a norma do vetor binormal é unitária, $|B(t)| = 1$, pois $T(t)$ e $N(t)$ são vetores unitários. Prosseguindo, derivando tal vetor obtemos que $\langle B(t), B'(t) \rangle = 0$ e que

$$B'(t) = T'(t) \times N(t) + T(t) \times N'(t).$$

Como ponderamos anteriormente $T'(t) \times N(t) = 0$, dado que o ângulo entre esses vetores é nulo, por conseguinte $B'(t) = T(t) \times N'(t)$, inferindo assim que $B'(t)$ é ortogonal a $T(t)$. Isto é, $B'(t)$ corresponde ao produto de $N(t)$ por um número real. Representaremos tal número real por $\tau(s)$, denominando o *torção* da curva em s . A noção intuitiva referente ao conceito de torção pode ser expressa como a medida de quanto uma curva se afasta de um determinado plano, ou seja, a velocidade com que o vetor binormal se afasta de um plano. Além disso, vale salientar que a equação da *torção* também pode ser apresentada na forma

$$\tau(t) = \langle N'(t), B(t) \rangle.$$

TENEBLAT (2008, p.67) demonstra por meio de uma reparametrização pelo comprimento do arco que dada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular de parâmetro t , podemos estabelecer que a *torção* da curva em t , pode ser representada pela expressão $\tau(t) = \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha''(t) \rangle}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2}$.

O referencial ortonormal composto pelos vetores $T(t)$, $N(t)$, $B(t)$ denominado *Triedro de Frenet* determina três planos: o Plano Osculador que é o plano formado pelo vetor tangente e o vetor normal, o Plano Normal é o plano formado pelo vetor normal e o vetor binormal, e o Plano Retificante é plano formado pelo vetor binormal e o vetor tangente. Na Figura 44, relembramos o esquema do traço de uma curva de uma superfície no Triedro de Frenet-Serret, proposto por TENEBLAT (2008, p.63).

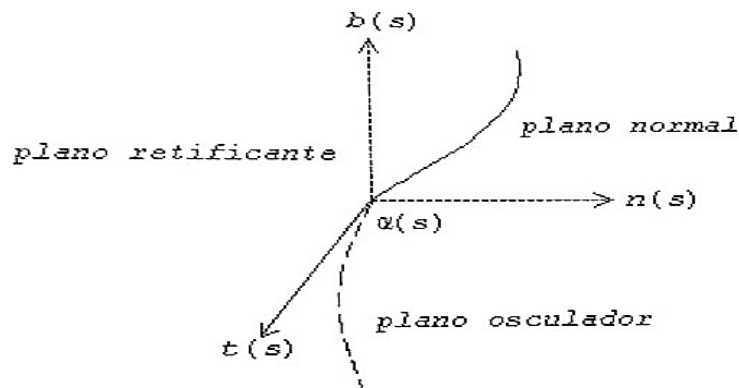


Figura 45 - Triedro de Frenet-Serret ;
Fonte: TENEBLAT (2008,p.6)

À nível de exemplificação, determinaremos as medidas dos vetores pertencentes ao Triedro de Frenet na curva dada pela expressão $\alpha(t) = (R \cos t, R \sin t, ct)$ onde $R > 0$ e $c \in \mathbb{R}$ são constantes fixadas. Na Figura 45, exibimos a representação de tal curva para $R = 4$ e $c = 3$, no entanto antecipamos que realizaremos o cálculo dos vetores de modo generalizado, ou seja, qualquer que seja os valores de R e c .

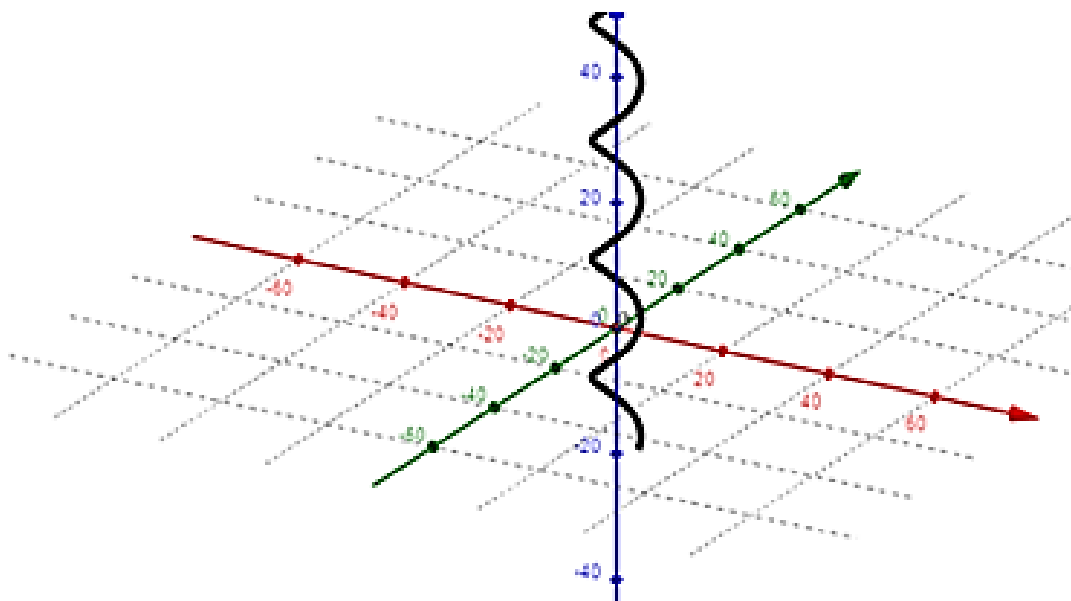


Figura 46 – Traço da curva $\alpha(t) = (4\cos t, 4\sin t, 3t)$
Fonte: Elaborado pela autora

Desse modo temos, $\alpha'(t) = (-R\text{sent}, R\text{cost}, c)$, $|\alpha'(t)| = \sqrt{R^2 + c^2}$, tratando-se de uma curva não *ppca*. Logo para obtermos os vetores pertencentes ao Triedro de Frenet, temos que obter um vetor tangente de norma unitária, assim faz-se necessário dividirmos $\alpha'(t)$ por $|\alpha'(t)|$, obtendo $T(t) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + c^2}}(R\text{cost}, R\text{sent}, ct)$.

Ao derivarmos duas vezes a curva $\alpha(t)$, obtemos $\alpha''(t) = (-R\text{cost}, -R\text{sent}, 0)$, além disso temos :

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = (Rc\text{sent}, -Rc\text{cost}, R^2);$$

$$|\alpha'(t) \times \alpha''(t)| = R\sqrt{R^2 + c^2}.$$

Com relação ao cálculo da curvatura, utilizaremos a expressão $k(t) = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}$, para obter $k(t) = \frac{R}{R^2 + c^2}$. Trazemos à memória que o vetor normal unitário será obtido por $N(t) = \frac{T'(s)}{k(s)}$, resultando em $N(t) = (-\text{cost}, -\text{sent}, 0)$, e por fim realizando o produto vetorial entre $T(t)$ e $N(t)$, obtendo $B(t) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + c^2}}(c\text{sent}, -c\text{cost}, R)$, e por meio da expressão $\tau(t) = \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha''(t) \rangle}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2}$, temos $\tau(t) = \frac{c}{\sqrt{R^2 + c^2}}$.

Com o intuito de estabelecer um melhor entendimento do comportamento desses vetores e do Triedro de Frenet, desenvolvemos uma visualização de tais conceitos por meio do *software* Geogebra, exibido na Figura 46, em uma curva representada pela expressão $\alpha(t) = (2 - \cos(t), \text{sen}(t), \frac{-t}{3\text{sen}(t)})$:

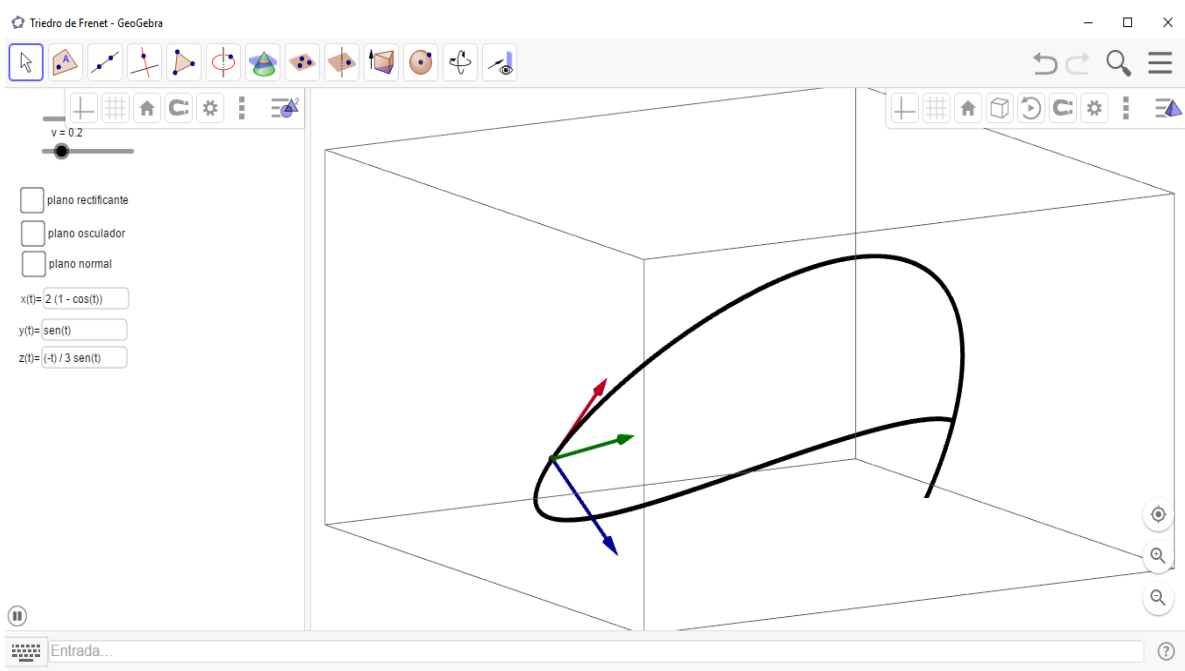


Figura 47 – Representação do Triedro de Frenet na curva $\alpha(t) = (2 - \cos(t), \text{sen}(t), \frac{-t}{3\text{sen}(t)})$ por meio do *software* Geogebra

Fonte: Elaborado pela autora

Note que por meio do *software*, o aluno tem a oportunidade de analisar a curvas de diferentes orientações e observar a variação dos vetores pertencentes ao Triedro de Frenet, e dos respectivos planos gerados por eles, como se pode observar na representação da curva anterior, em que o plano retificante está representado na cor rosa, o plano osculador na cor amarela, por fim o plano normal na cor azul.

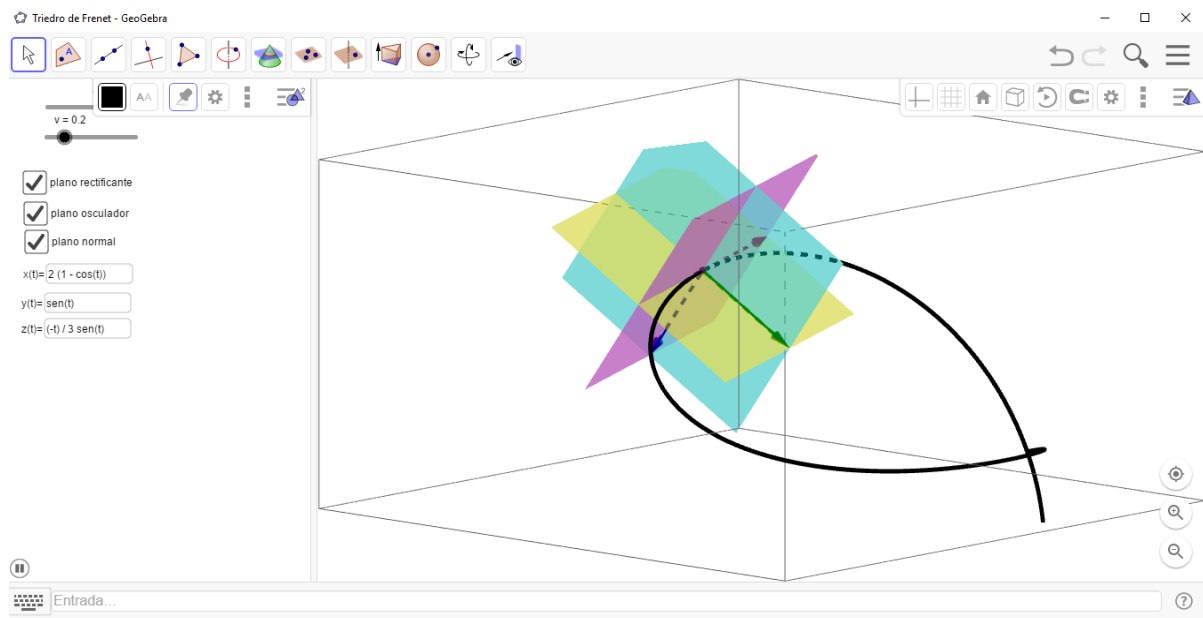


Figura 48 – Representação dos planos resultantes do Triedro de Frenet, plano osculador(amarelo), retificante(rosa) e normal(azul) por meio do *software* GeoGebra
Fonte: a autora

Evidencia-se que os vetores retratados nessa seção pertencem a um referencial ortonormal de $\mathbb{R}^3$, por conseguinte relacionam-se por meio de combinações lineares retratadas através de equações que serão apresentadas na seção subsequente.

5.3.1- Equação de Frenet para curvas

Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento do arco e tal que $k(t) > 0, \forall t \in I$, levando em consideração que o triedro de Frenet da curva α em t é um referencial ortonormal de $\mathbb{R}^3$, iremos obter os vetores $T'(t)$, $N'(t)$, $B'(t)$ como combinação linear de $T(t)$, $N(t)$, $B(t)$. Nas seções anteriores, assinalou-se as seguintes relações $\begin{cases} T'(t) = k(t) \cdot N(t) \\ B'(t) = \tau(t) \cdot N(t) \end{cases}$.

Desse modo, elaboraremos uma expressão associada a $N'(t)$, advindo que o vetor normal em um determinado ponto pode ser obtido como produto vetorial entre os vetores binormal e tangente nesse ponto ($N(t) = B(t) \times T(t)$).

Ao derivarmos tal relação, dispomos :

$$N'(t) = B'(t) \times T(t) + B(t) \times T'(t).$$

Repare que podemos substituir as relações desenvolvidas anteriormente para $T'(t)$ e $B'(t)$, em relação a equação anterior obtemos $N'(t) = (\tau(t) \cdot N(t)) \times T(t) + B(t) \times (k(t) \cdot N(t))$.

Devido a orientação do referencial de Frenet e a definição dos vetores binormal ($B(t) = T(t) \times N(t)$) e tangente ($T(t) = N(t) \times B(t)$), encontramos :

$$N'(t) = -\tau(t).B(t) - k(t).T(t).$$

Designaremos essas três expressões desenvolvidas para os vetores $T'(t)$, $N'(t)$, $B'(t)$ como

$$\text{fórmulas de Frenet : } \begin{cases} T'(t) = k(t).N(t) \\ N'(t) = -\tau(t).B(t) - k(t).T(t). \\ B'(t) = \tau(t).N(t) \end{cases}$$

A seguir apresentaremos algumas aplicações para tais fórmulas, que geralmente ocorrem para caracterização de curvas no espaço.

Propriedade 1: Deduziremos que curvas planas são caracterizadas pelo fato de dispor torção identicamente nula.

Para isso empregaremos uma curva regular $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de curvatura diferente de zero. Assim, se α é uma curva plana, então o plano osculador (formado pelos vetores tangente e normal) independe do parâmetro e é o plano que contém o traço dessa curva. Supondo que $\alpha(t)$ ppca e por tratar-se de uma curva plana, existe um plano de $\mathbb{R}^3$ que a contém $\alpha(I)$. Ao aponderar-se de um vetor v não-nulo e ortogonal a esse plano, mostraremos que v é paralelo ao vetor $B(t)$, $\forall t \in I$.

Ilustramos na Figura 49 uma representação intuitiva da argumentação, que iremos elaborar para demonstrar tal propriedade. Simbolizamos uma curva qualquer pelo objeto geométrico na cor preta, o vetor tangente em um ponto dessa curva, na cor rosa, e o vetor normal nesse mesmo ponto, na cor vermelha, e por fim o vetor perpendicular v a curva na cor azul.

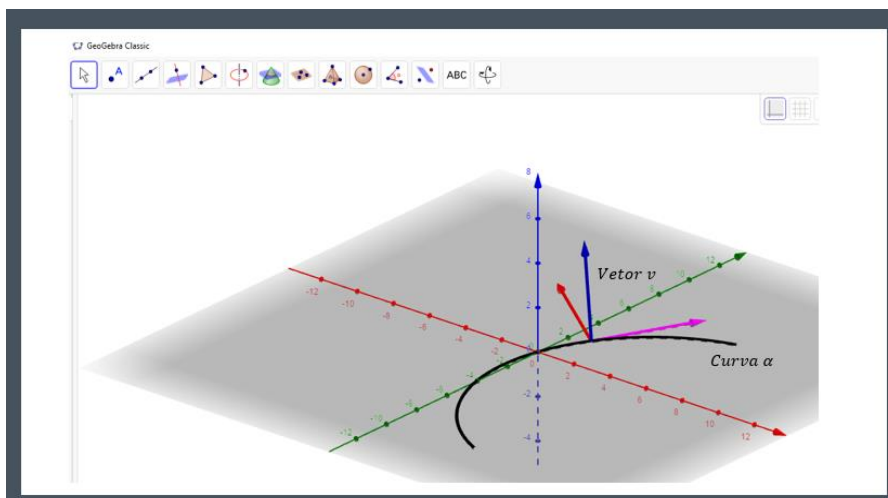


Figura 49 - Representação intuitiva da $\sigma(t) = 0$ em uma curva plana
Fonte: Elaborada pela autora

Determinamos sem perda de generalidade que a curva plana α pertence ao plano xy . Além disso, podemos observar que a curva α encontra-se integralmente no plano xy , desse modo, ao reavivarmos a noção instintiva de torção como “a medida de quanto uma curva se afasta de um determinado plano”, inferimos que a curva está completamente contida no plano xy , ou seja, não está se desviando desse plano, a torção nesse caso é nula. A demonstração formal de tal propriedade, sucede-se da seguinte forma:

Fixado um ponto $t_0 \in I$, então $\forall t \in I$, $\langle \alpha(t) - \alpha(t_0), v \rangle = 0$, derivando tal expressão encontramos $\langle \alpha'(t), v \rangle = 0$, ao derivarmos novamente teremos $\langle \alpha''(t), v \rangle = 0$. Portanto, podemos reescrever as expressões encontradas por meio das equações de Frenet, encontrando:

$$\langle T(t), v \rangle = 0 \text{ e } k(t) \langle N(t), v \rangle = 0.$$

Como $k(t) > 0$, concluímos que v é ortogonal a $T(t)$ e $N(t)$, representado do mesmo modo na Figura 49, ou seja, v é paralelo a $B(t)$, $\forall t \in I$, isto é, o plano osculador de $\alpha(t)$ não depende do parâmetro e contém $\alpha(I)$. A recíproca dessa propriedade também é verdadeira: Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular, de curvatura não-nula. Então, α é uma curva plana se, e somente se, $\tau \equiv 0$.

A argumentação para provar tal recíproca faz-se de maneira elementar, ao considerarmos a curva α ppca, como uma curva plana, pela propriedade 1, o plano osculador de $\alpha(t)$ não depende do parâmetro, portanto $B(t)$ é constante, $\forall t \in I$. Por conseguinte, $B'(t) = 0$, o que nos leva a concluir que $\tau \equiv 0$, $\forall t \in I$, pois $\tau = \langle B'(t), N(t) \rangle$.

Propriedade 2: Considere $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Então, o traço de α está contido em uma circunferência de raio $a > 0$ se, e só se, a torção $\tau \equiv 0$ e a curvatura $k(t) \equiv \frac{1}{a}$.

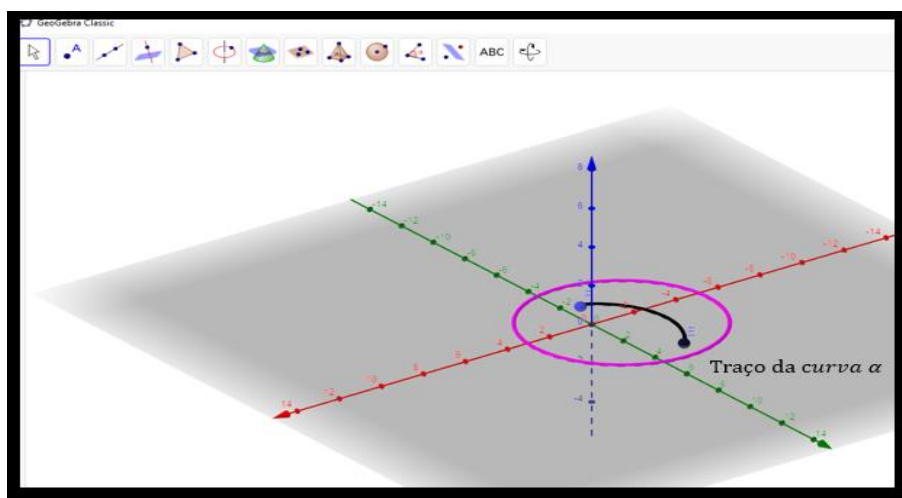


Figura 50 - Representação intuitiva que uma curva plana está contida em uma circunferência

Fonte: Elaborado pela autora

A fim de demonstrarmos essa propriedade, utilizaremos uma curva $\alpha(s)$ ppca e admitiremos que $\alpha(I)$ encontra-se contida em uma circunferência de centro c e raio a . Desse modo, $|\alpha(t) - c|^2 = a^2$ e, pela propriedade 1 temos $\forall s \in I$, $\tau \equiv 0$ e $\langle \alpha(t) - c, B(t) \rangle = 0$.

À vista disso, $\alpha(t) - c$ é ortogonal a $B(t)$, se reescrevermos a expressão $|\alpha(t) - c|^2 = a^2$ na forma de produto interno anterior, e derivando duas vezes a expressão obtemos:

$$\langle \alpha'(t), \alpha(t) - c \rangle = 0 \quad (1) \quad \text{e}$$

$$\langle \alpha''(t), \alpha(t) - c \rangle = -1. \quad (2)$$

Além disso, modificando a notação do produto interno (1), temos $\langle T(t), \alpha(t) - c \rangle = 0$, o que nos leva a inferir que $\alpha(t) - c$ também é ortogonal a $T(t)$, consequentemente $\alpha(t) - c$ é paralelo a $N(t)$. Além disso, segue da relação (2) que $|\alpha''(t)| |\alpha(t) - c| = 1$, logo $k(t) = |\alpha''(t)| = \frac{1}{a}$.

Para mostrarmos a recíproca dessa propriedade, consideraremos a aplicação diferencial $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(t) = \alpha(t) + a N(t)$, ao derivarmos a função $f(t)$, obtemos:

$$f'(t) = T(t) + a N'(t) = T(t) + a(-k(t)T(t) - \tau(t)B(t)).$$

Dado que $\tau(t) = 0$ e $k(t) = \frac{1}{a}$, concluímos que $f'(t) = 0$, logo, $f(t) = c$ é constante, ou seja, $\alpha(t) + a N(t) = c$, isto é, $|\alpha(t) - c| = a$, o traço de $\alpha(t)$ está contido em uma circunferência de centro c e raio a .

Propriedade 3 : Seja $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular de curvatura e torção não-nulas. Então, α é uma hélice se, e só se, $\frac{k}{\tau}$ é constante.

Para demonstrarmos tal propriedade, apresentaremos a seguinte definição de hélice: uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ será considerada uma hélice se existe um vetor unitário v que forma ângulo constante com $\alpha'(t)$, $\forall t \in I$, isto é, $\frac{\langle \alpha'(t), v \rangle}{|\alpha'(t)|}$ é constante.

Além disso, salientaremos a existência de uma particularidade da hélice circular definida expressão $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $t, b \in \mathbb{R}, a > 0$, representada por meio da Figura 51, que possui uma propriedade em relação ao vetor tangente, que sempre forma um ângulo constante com o eixo Oz .

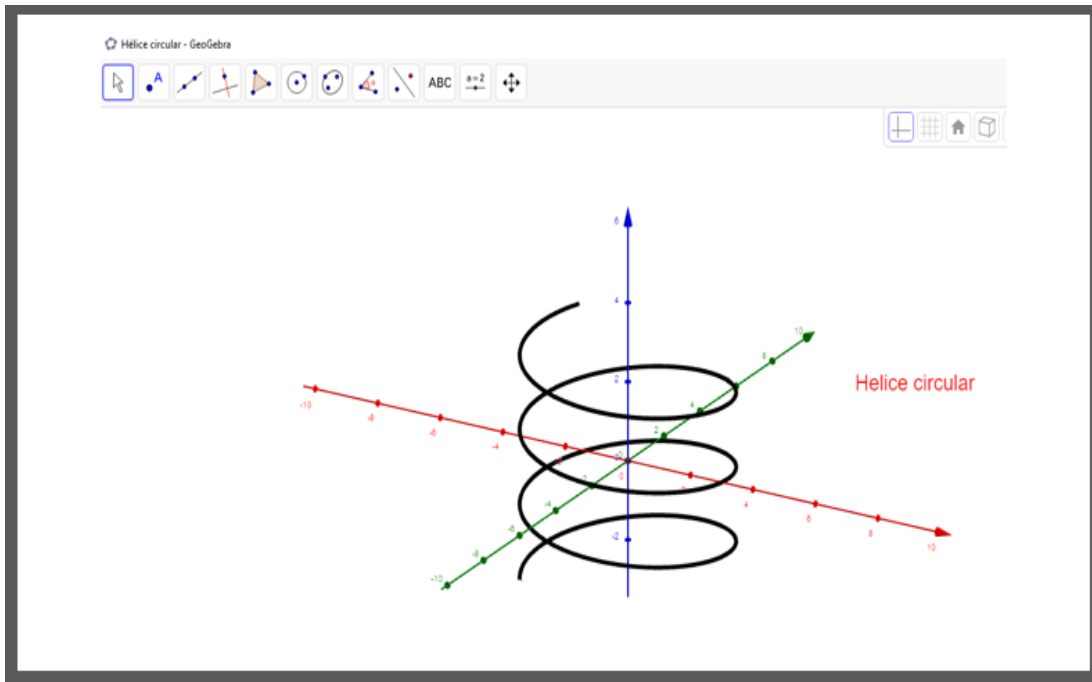


Figura 51 – Hélice circular
Fonte: Elaborado pela autora

De fato, a partir da expressão da hélice circular, encontramos que o vetor tangente $T = (-a \sin t, a \cos t, b)$, com norma $|T| = \sqrt{a^2 + b^2}$, assim ao tomarmos um vetor qualquer pertencente ao eixo Oz representado por $u = (0, 0, c)$, temos que $|u| = c$, e considerando θ o ângulo formado entre o vetor tangente e u , temos que $\cos(\theta) = \frac{T \cdot u}{|T| \cdot |u|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, logo o ângulo entre esses vetores independe de t , concluindo-se que o ângulo θ corresponde a um ângulo constante.

Elucidaremos tal fenômeno relacionado a hélice circular, por meio de uma apresentação particular dessa curva, representada pela expressão $\alpha(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 0.6 t)$, cujo o vetor tangente está representado pelo vetor vermelho com origem no ponto F, e por fim, o vetor u representado na cor laranja com coordenadas $(0,0,3)$. Por intermédio do *software* Geogebra, podemos calcular o ângulo entre o vetor tangente a curva no ponto F com coordenadas $(1.32, 2.69, 0.6)$ e o vetor u , encontrando assim o ângulo constante 78.69° .

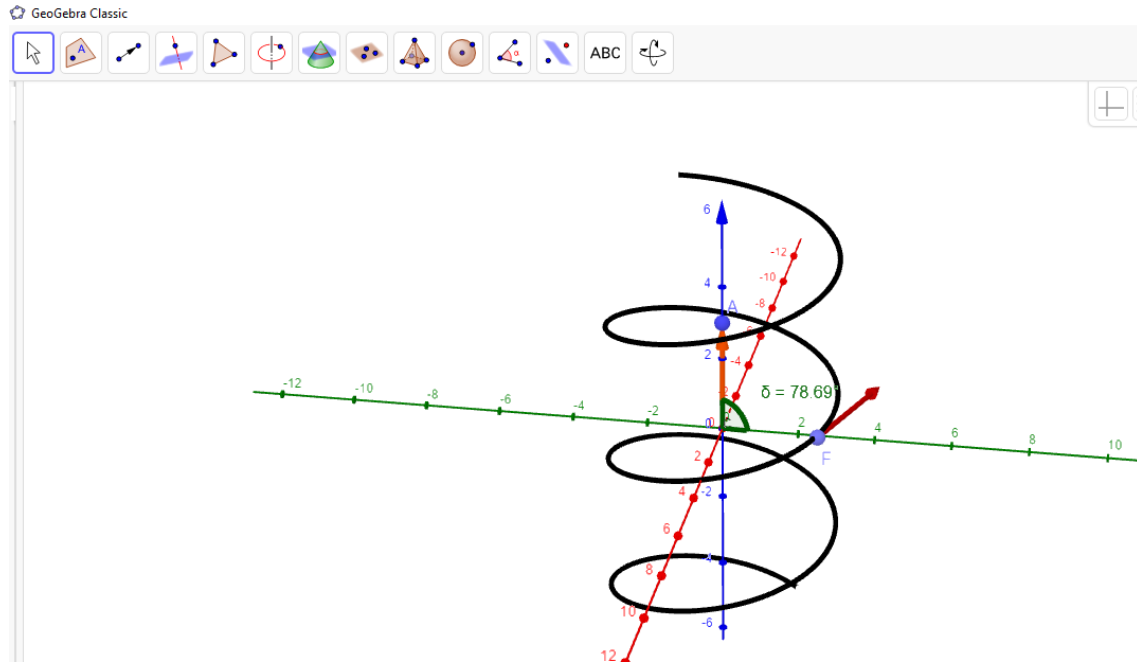


Figura 52- Exemplificação da hélice formando um ângulo constante com $\alpha'(s)$
Fonte: Elaborada pelo autora

Retomando à definição generalista de hélice, à nível de exemplificação, exibiremos na Figura 52 a representação da curva $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$ explanada por TENEBLAT (2008, p.56) que trata-se de uma hélice por formar um ângulo constante com o vetor $(0,0,1)$. Deveras, $\alpha'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t, e^t)$, e, portanto,

$$\frac{\langle \alpha'(t), v \rangle}{|\alpha'(t)|} = \frac{\langle (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t, e^t), (0,0,1) \rangle}{\sqrt{3}e^t} = \frac{e^t}{\sqrt{3}e^t} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

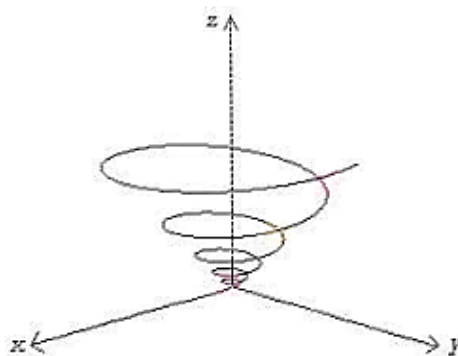


Figura 53 - Representação hélice elíptica
Fonte: TENEBLAT(2008, p.56)

Afim de demonstrarmos algebricamente a propriedade 3, iremos empregar uma curva α ppca. Caso curva α seja uma hélice, existirá um vetor unitário v tal que $\langle \alpha'(t), v \rangle$ será constante, e por conseguinte $\langle \alpha''(t), v \rangle = 0$, isto é, $k(t) \langle N(t), v \rangle = 0$. Como $k(t) \neq 0$, decorre que v pertence ao plano determinado pelos vetores $T(t)$ e $B(t)$ para cada $t \in I$.

Então, seja $v = \cos \theta(t)T(t) + \sin \theta(t)B(t)$. Derivando e usando as fórmulas de Frenet, obtemos:

$$0 = -\sin \theta(t)\theta'(t)T(t) + (k(t)\cos \theta(t) + \tau(t)\sin \theta(t))N(t) + \cos \theta(t)\theta'(t)B(t).$$

E por conseguinte, $\forall t \in I$,

$$-\sin \theta(t)\theta'(t) = 0$$

$$\cos \theta(t)\theta'(t) = 0$$

$$k(t)\cos \theta(t) + \tau(t)\sin \theta(t) = 0$$

Por meio das duas primeiras equações, concluímos que $\theta'(t) = 0$, $\forall t \in I$, dessa forma, $\theta(t)$ é constante. Além disso, a constante $\cos \theta(t)$ é não-nula, pois, caso contrário, teríamos $\tau(t) = 0$, o que contrariaria a hipótese da curva ser uma hélice. Segue da terceira igualdade que $\frac{k}{\tau}$ é constante.

Reciprocamente, se $\frac{k}{\tau}$ é constante, fixemos θ tal que $\tan \theta = -\frac{k}{\tau}$. Então, $v = \cos \theta(t)T(t) + \sin \theta(t)B(t)$ é um vetor unitário constante e $\forall t \in I$, $\langle T(t), v \rangle = \cos \theta(t)$ é constante, concluindo-se que α é uma hélice.

5.3.2- Teorema Fundamental das Curvas em $\mathbb{R}^3$

O Teorema Fundamental das Curvas Espaciais – TCE, disserta acerca da existência e unicidade de uma curva espaciais parametrizada pelo comprimento de arco, em relação a sua curvatura e torção. Outrossim, explana que dada duas curvas espaciais parametrizadas pelo comprimento de arco com mesma curvatura e torção, então diferem apenas na sua posição no espaço.

Assim, estabeleceremos que duas curvas regulares $\alpha(t), \beta(t): I \rightarrow \mathbb{R}^3$ serão congruentes se existir uma isometria¹⁹ F de $\mathbb{R}^3$, tal que $\beta = F \circ \alpha$. A seguir explanaremos de modo mais sucinto, a definição formal apresentada por TENEBLAT (2008, p.91) acerca do TCE :

- Dada duas funções diferenciáveis $k(t) > 0$ e $\tau(t)$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, existe uma curva regular $\alpha(t)$, parametrizada pelo comprimento de arco t , tal que $k(t)$ é a curvatura e $\tau(t)$ é a torção de α em t .
- A curva $\alpha(t)$ é única se fixarmos um ponto $\alpha(t_0) = p_0 \in \mathbb{R}^3$, $\alpha'(t_0) = v_1$, $\alpha''(t_0) = k(t_0) v_2$, onde v_1 e v_2 são vetores ortonormais de $\mathbb{R}^3$.

¹⁹ Conforme TENEBLAT(2008, p.82) : “Uma aplicação $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma isometria de $\mathbb{R}^3$ se preserva distâncias, isto é, qualquer que sejam $p, q \in \mathbb{R}^3$, $|F(p) - F(q)| = |p - q|$.”

- c) Se duas curvas $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ têm a mesma curvatura e torção (a menos de um sinal), então α e β são congruentes.

Uma aplicação de fácil entendimento acerca do TCE, pode ser assinalada por meio do estudo da reta em $\mathbb{R}^3$, relação a variável t , em que $a(t) = (t, t, t)$ e a isometria $F(t) = (2 + t, -t, 4 + z)$ que fornece uma curva $b(t) = (2 + t, -t, 4 + z)$ congruente a curva $a(t)$, mas com orientação distinta.

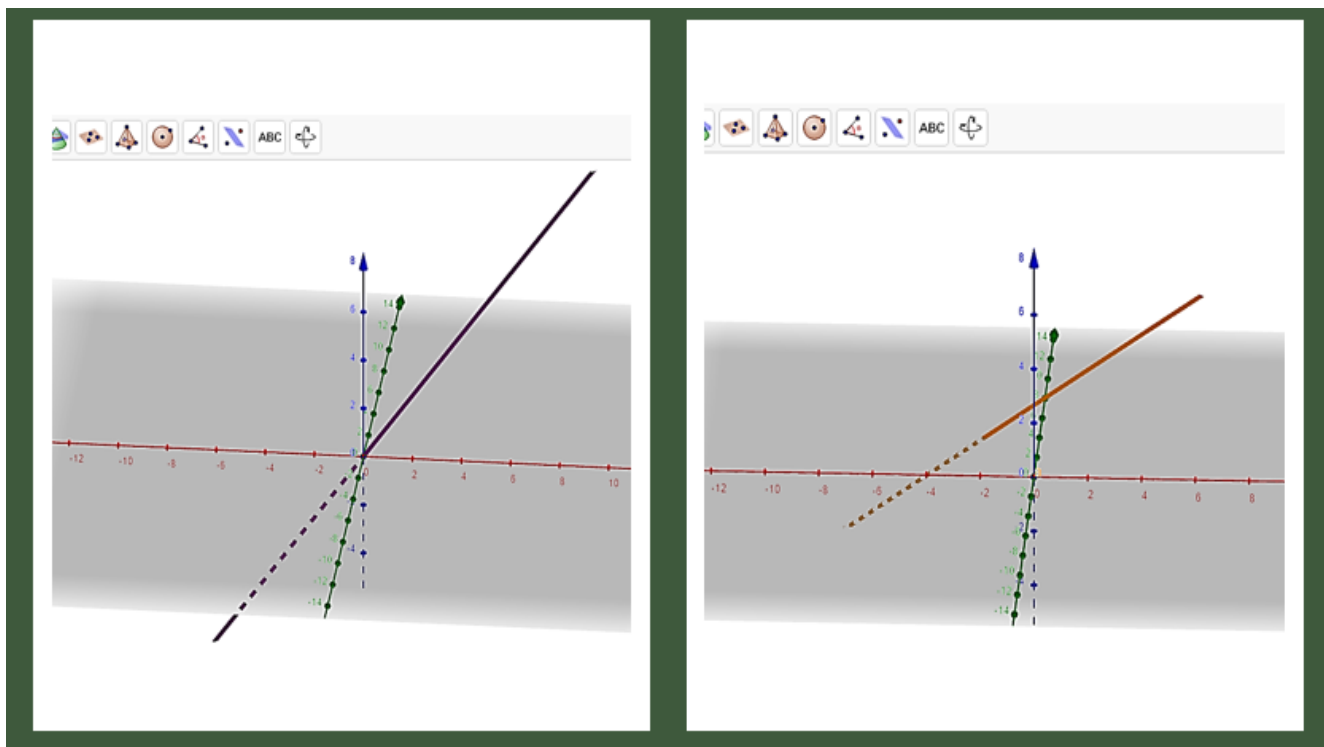


Figura 54 – Exemplificação de retas espaciais congruentes

Fonte: Elaborada pela autora

Prosseguiremos com o estudo das curvas $c(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$, e a curva $d(t) = (t + \sqrt{3} \sin t, 2 \cos t, \sqrt{3} t - \sin t)$, iremos verificar se essas curvas são congruentes e caso sejam, obteremos a isometria F tal que $F \circ c(t) = d(t)$.

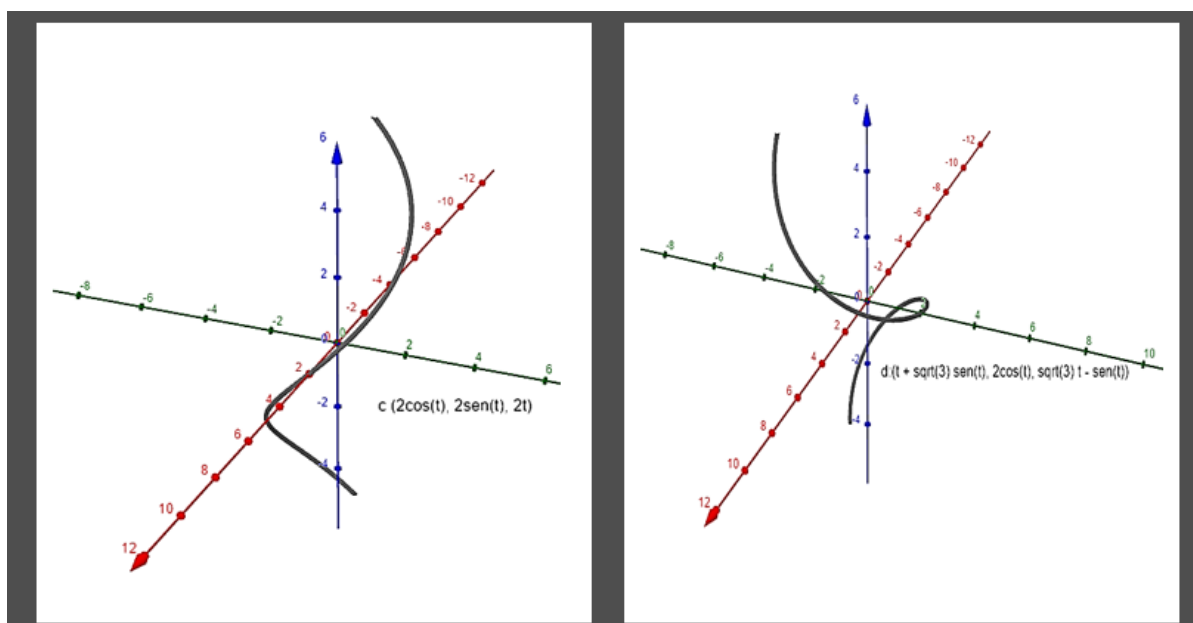


Figura 55 – Exemplificação de curvas espaciais congruentes

Fonte: Elaborada pela autora

De modo que $c'(t) = (-2 \operatorname{sent}, 2 \operatorname{cost}, 2)$, $c''(t) = (-2 \operatorname{cost}, -2 \operatorname{sent}, 0)$ e $k(c(t)) = \frac{|c'(t) \times c''(t)|}{|c'(t)|^3}$, temos que $|c'(t) \times c''(t)| = \sqrt{4 \operatorname{sent}^2 + 4 \operatorname{cost}^2 + 4 \cos^2 t + 4 \operatorname{sent}^2 t} = 4\sqrt{2}$, logo $k(c(t)) = \frac{4\sqrt{2}}{16\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$. Para o cálculo da torção usaremos $\tau(c(t)) = \frac{\langle c'(t) \times c'''(t), c''(t) \rangle}{|c'(t) \times c''(t)|^2}$, por esta razão precisaremos que $c'''(t) = (2 \operatorname{sent}, -2 \operatorname{cost}, 0)$, logo $\tau(c(t)) = \frac{\langle (4 \operatorname{cost}, 4 \operatorname{sent}, 0), (-2 \operatorname{cost}, -2 \operatorname{sent}, 0) \rangle}{32} = \frac{-8}{32} = -\frac{1}{4}$.

Procedendo de forma análoga, temos $d'(t) = (1 + \sqrt{3} \operatorname{cost}, -2 \operatorname{sent}, \sqrt{3} - \operatorname{cost})$, $d''(t) = (-\sqrt{3} \operatorname{sent}, -2 \operatorname{cost}, \operatorname{sent})$ e $|d'(t) \times d''(t)| = |2\sqrt{3} \operatorname{cost} - 2, -4 \operatorname{sent}, -2 \operatorname{cost} - 2\sqrt{3}| = 4\sqrt{2}$, logo $k(d(t)) = \frac{4\sqrt{2}}{16\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$. Em relação a torção de $d(t)$, como temos $d'''(t) = (\sqrt{3} \cos t, 2 \operatorname{sen} t, \operatorname{cost})$, o valor da torção $\tau(d(t)) = \frac{\langle (-2\sqrt{3} \operatorname{sent}, -4 \operatorname{cost}, 2 \operatorname{sent}), (-\sqrt{3} \operatorname{sent}, -2 \operatorname{cost}, \operatorname{sent}) \rangle}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

Portanto como as curvas $c(t)$ e $d(t)$ possuem a mesma curvatura e torção (a menos de um sinal), então são congruentes, de fato dispomos da isometria $F(t) = (\cos^{-1} c + \sqrt{3} \operatorname{sen}(\cos^{-1}(\frac{t}{2})), 2 \cos(\operatorname{sen}^{-1}(\frac{t}{2})), \frac{\sqrt{3}}{2} t - \operatorname{sen}(\frac{t}{2}))$ tal que $d(t) = F \circ c(t)$.

A última aplicação acerca do TCE diz respeito a existência de uma curva regular $\alpha(t)$, parametrizada pelo comprimento de arco s , dada as funções diferenciáveis $k(t) > 0$ e $\tau(t)$. Ressaltaremos que apesar do TCE, garantir a existência, não nos forcene artifícios matemáticos elementares para que encontremos a representação da curva, dado as funções curvatura e torção. Isto é, os conhecimentos prévios de CVV não são suficientes para a resolução de tal problemática e fazendo-se necessário um curso avançado de equações diferenciais ordinárias, por essa razão, omitiremos representações acerca de tal aplicação. Desse modo, na seção posterior, iniciamos o estudo acerca do campo epistêmico dos conceitos incipientes de superfícies.

5.4 – Superfícies

Estabeleceremos uma superfície parametrizada regular, ou simplesmente, uma superfície, a aplicação diferencial de classe C^∞ , representada por $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida em um sistema de coordenadas cartesianas x, y, z em $\mathbb{R}^3$, por meio da função $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ fixada no conjunto aberto U , que atende para todo par ordenado $q = (u, v) \in U$, com a diferencial de sua aplicação X em q ($dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$) injetora, ou seja, qualquer sejam $q_1 = (u_1, v_1)$ e $q_2 = (u_2, v_2)$, a imagem da $dX_{q_1} \neq dX_{q_2}$.

As variáveis u, v serão denominadas de parâmetros da superfície, e o subconjunto obtido pela imagem da aplicação X será nomeado de *traço* de X . Na Figura 56, exibiremos um exemplo de superfície representado por meio do *software* Geogebra.

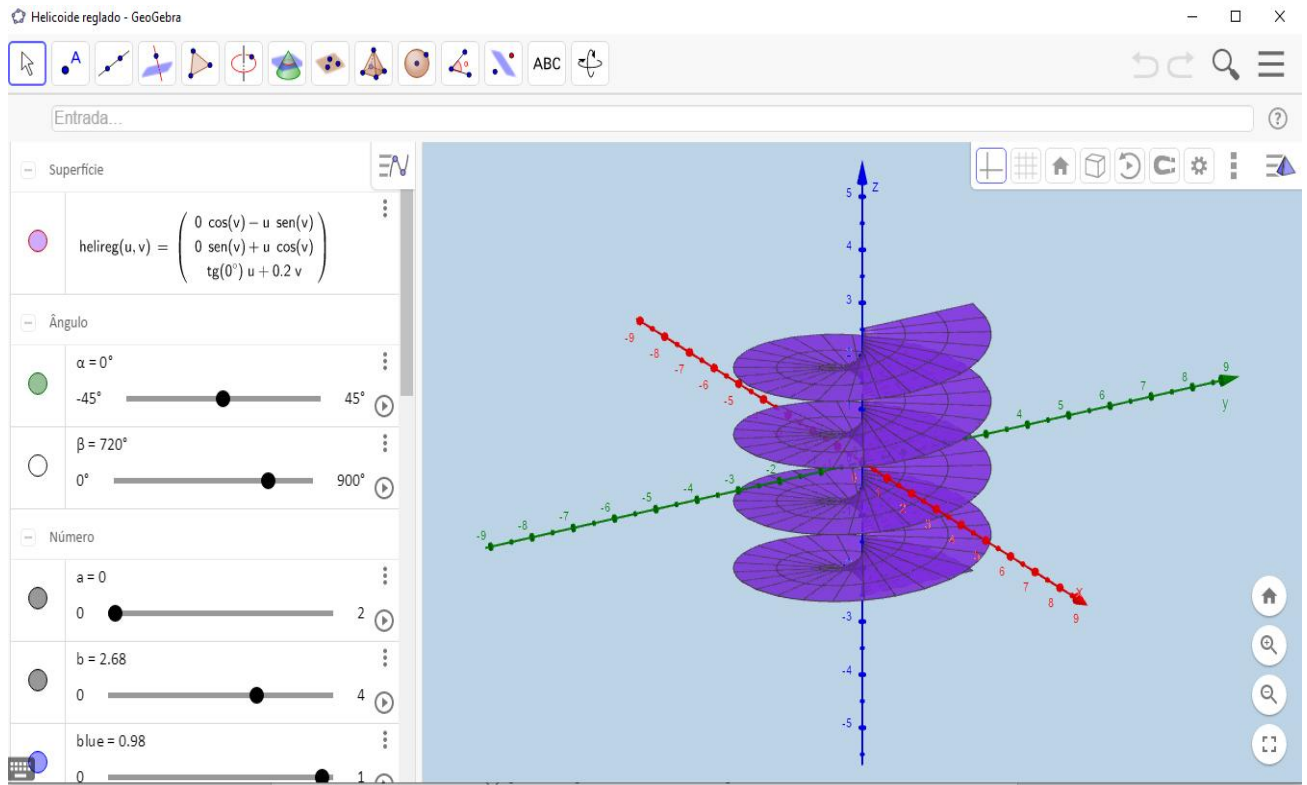


Figura 56 – Representação da superfície denominada Helicoida regada
Fonte : elaborado pela autora

De modo sucinto, TENEBLAT (2008, p.110) explicita que a “aplicação $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ é diferenciável de classe C^∞ quando as funções x, y, z têm derivadas parciais de todas as ordens contínuas”. Além disso, TENEBLAT (2008, p.110) afirma que a condição da diferencial de sua aplicação X em q ($dX_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$) ser injetora garante “a existência de plano tangente em cada ponto da superfície”. Ademais, a autora salienta que existem algumas formas equivalentes para expressar a condição desse item, que equivale a que cada ponto $q = (u_0, v_0) \in U$ exista uma matriz jacobiana, expressa abaixo de posto²⁰ 2,

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{du}(u_0, v_0) & \frac{dx}{dv}(u_0, v_0) \\ \frac{dy}{du}(u_0, v_0) & \frac{dy}{dv}(u_0, v_0) \\ \frac{dz}{du}(u_0, v_0) & \frac{dz}{dv}(u_0, v_0) \end{pmatrix}.$$

Outra forma seria por meio dos vetores $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ sejam linearmente independentes, o que acontece se $X_u(u_0, v_0) \times X_v(u_0, v_0) \neq 0$. Ainda que a definição de superfície apresente determinados requisitos, DO CARMO (2012, p.89) estabelece que dada uma curva regular $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$, $u \in I \subset \mathbb{R}$, tal que $f(u)$ não se anula. A aplicação gerada pela rotação dessa curva α em torno do eixo Oz , descrita por $X(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$, onde $u \in I$ e $v \in \mathbb{R}$,

²⁰ O posto ou característica de uma matriz é o número de linhas não-nulas da matriz quando escrita na forma escalonada por linhas. Equivalentemente, corresponde ao número de linhas ou colunas linearmente independentes da matriz.

trata-se de uma superfície parametrizada regular, denominada *superfície de revolução* em torno do eixo Oz .

Além disso, TENEBLAT (2008, p.117) observa que, “se α é uma curva regular de $\mathbb{R}^3$, cujo traço está contido num plano π , e l é uma reta deste plano que não intercepta a curva, podemos escolher um sistema de coordenadas de $\mathbb{R}^3$ de tal forma que π é o plano xoz e l , o eixo Oz .” Assim, a autora conclui que obtemos uma superfície de rotação da curva α em torno de l , e portanto a autora estende a definição de *superfície de revolução* a rotação em relação a outros eixos e retas.

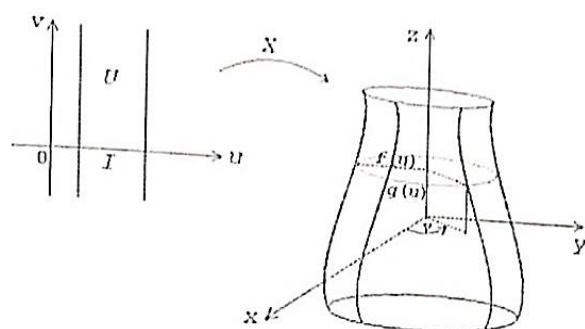


Figura 57 - Esquema proposto por TENEBLAT(2008) acerca da rotação da curva α em torno de l .

Fonte: TENEBLAT(2008, p. 115)

Dessa forma, a partir das curvas $\alpha(u) = (u, a \cosh \frac{u}{a}, 0)$ e $\beta(u) = (\sin(u) + 2, 0, u)$, em que $u \in \mathbb{R}$ e $a > 0$, geramos no Geogebra a representação das respectivas superfícies de revolução obtidas por meio da rotação da curva $\alpha(u)$ em relação ao eixo Ox e da rotação da curva $\beta(u)$ em relação ao eixo Oz , nessa ordem temos $X(u, v) = (u, a \cosh \frac{u}{a} \cos v, a \cosh \frac{u}{a} \sin v)$ e $X^*(u, v) = ((\sin(u) + 2) \cos v, (\sin(u) + 2) \sin v, u)$

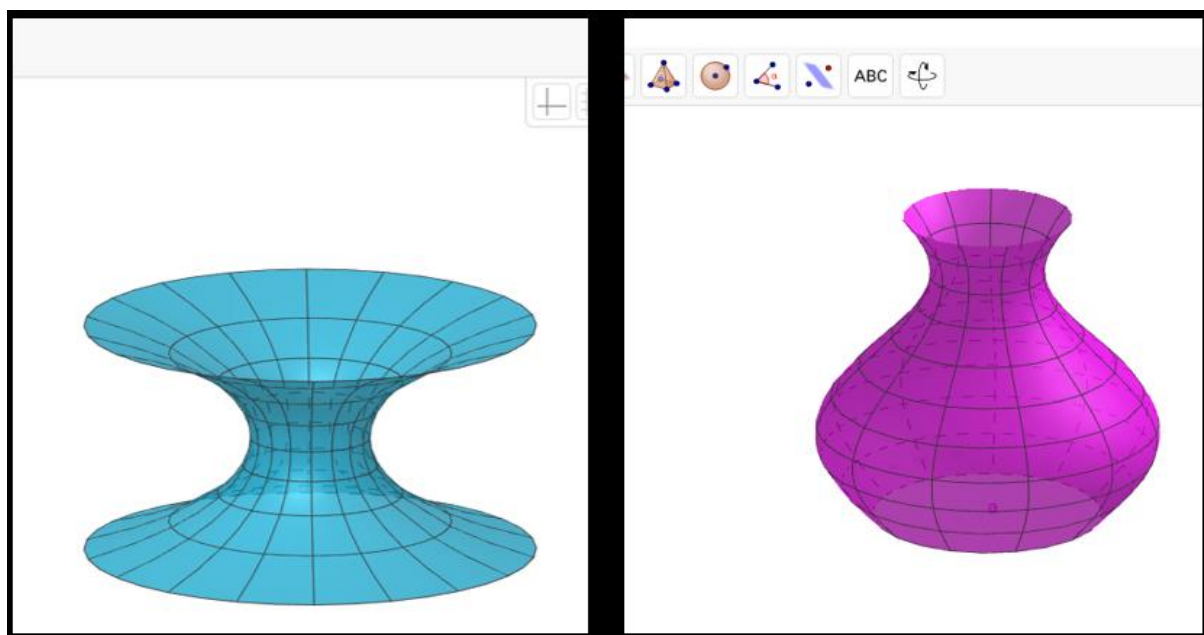


Figura 58 – Superfície de revolução gerada pela rotação da curva $\alpha(u)$ (à esquerda) e da rotação da curva $\beta(u)$ (à direita);

Fonte: Elaborada pela autora

Ainda conforme TENEBLAT(2008, p.115) dispomos de outro resultado para a obtenção e caracterização de superfícies: “Se $f(u, v)$ é uma função diferenciável, onde $(u, v) \in U$, aberto de $\mathbb{R}^2$, então a aplicação $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ é uma superfície parametrizada regular, que descreve o gráfico da função f .”

À nível de exemplificação apresentamos o parabolóide definido pela equação cartesiana $u^2 + v^2 = z$, representado na Figura 59, que descreve a superfície $X(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$.

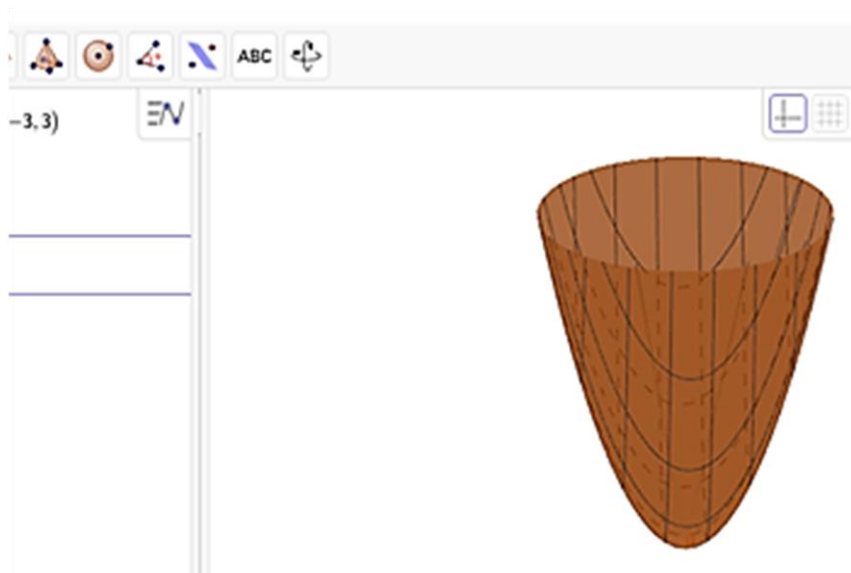


Figura 59 – Representação do parabolóide
Fonte: Elaborado pela autora.

Desse modo, podemos discutir acerca da definição de superfícies e explanar acerca de algumas formas existentes desse objeto matemático. Além disso, como inferimos anteriormente o traço de uma curva pode ser descrita através de diferentes parametrizações, e tal aspecto, ocorre de modo semelhante em uma superfície parametrizada regular, ou seja, podemos obter várias superfícies parametrizadas com o mesmo traço. Discutiremos sobre as condições necessárias para esse procedimento, a seguir.

Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Se $h : \bar{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação diferenciável, cujo determinante da matriz jacobiana não se anula, e $h(\bar{U}) = U$, então $Y = X \circ h$ é uma superfície parametrizada regular que possui o mesmo traço de X , tal procedimento é dito *reparametrização de superfícies* (TENEBLAT,2008).

Dessa forma, a condição imposta para que ocorra a *mudança de parâmetros* é que a função h continue atendendo a todos os requisitos para ser considerada uma superfície e que a a imagem de $h(\bar{U})$ seja congruente ao domínio da superfície inicial. Por exemplo, as superfícies $X(u, v) = (u + v, u - v, 4uv)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ e $Y(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{u}^2 - \bar{v}^2)$, $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^2$ dispõem do mesmo traço $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 - y^2\}$, o parabolóide hiperbólico. De fato, podemos definir que a função $Y(\bar{u}, \bar{v})$ é uma reparametrização de $X(u, v)$ por $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $h(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{2}(\bar{u} + \bar{v}, \bar{u} - \bar{v})$, o traço dessas superfícies está representado na Figura 60.

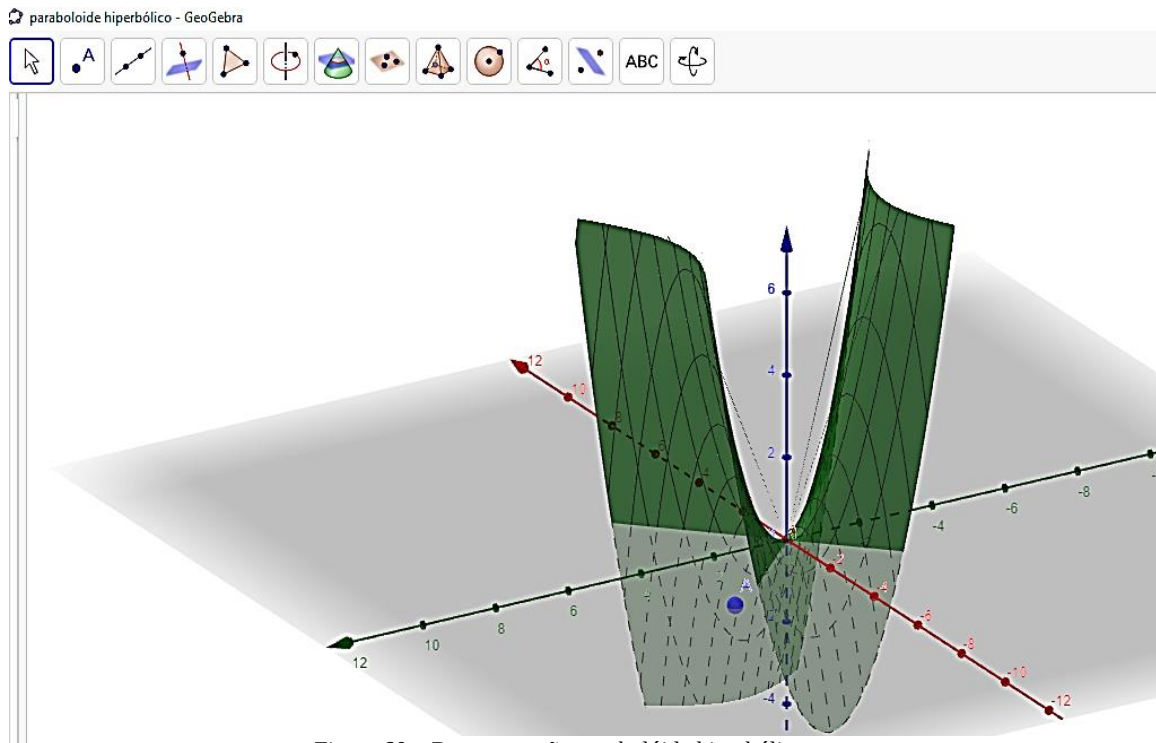


Figura 60 – Representação parabolóide hiperbólico
Fonte: Elaborada pela autora

Uma outra exemplificação, seriam as superfícies parametrizadas $X(u, v) = (u, \sqrt{a^2 - u^2 - v^2}, v)$, $(u, v) \in U$, onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u^2 + v^2 < a^2\}$ e $Y(\bar{u}, \bar{v}) = (a \sin \bar{v} \cos \bar{u}, a \sin \bar{v} \sin \bar{u}, a \cos \bar{v})$, $(\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{U} = \{(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^2; 0 < \bar{u} < \pi, 0 < \bar{v} < \pi\}$, que descrevem o hemisfério da esfera representado na Figura 61.

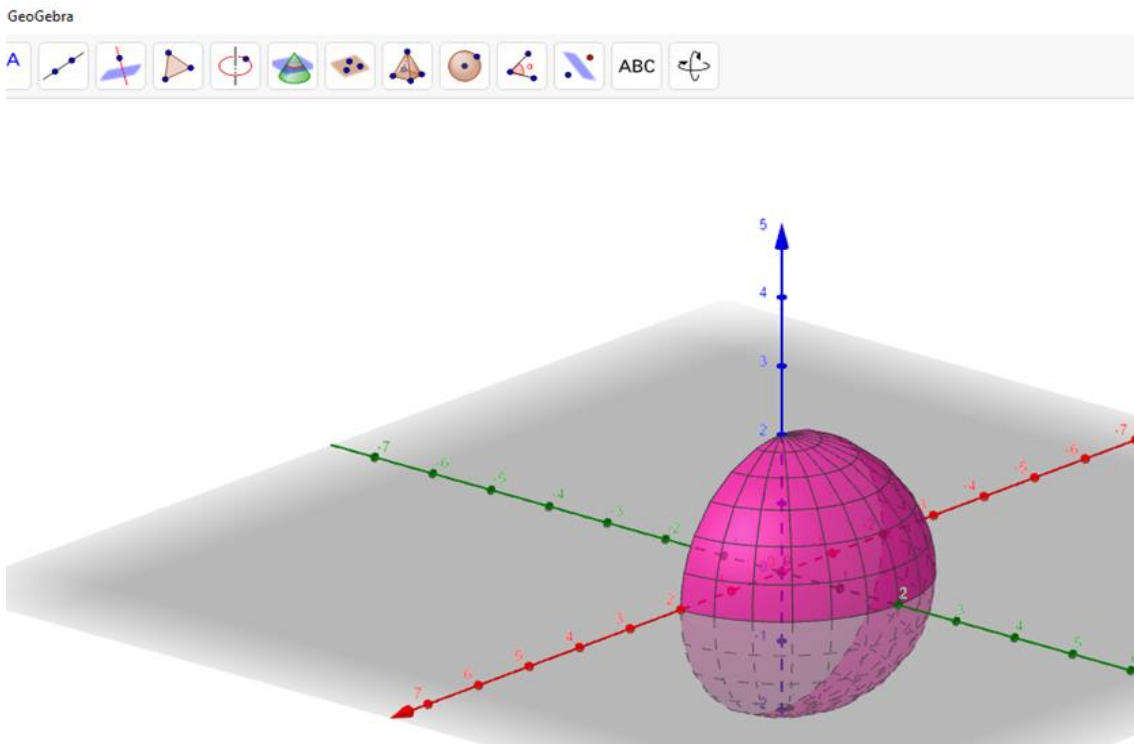


Figura 61 – Representação do hemisfério da esfera
Fonte: Elaborado pela autora

Deveras, $Y(\bar{u}, \bar{v})$ é uma reparametrização de $X(u, v)$ por $h: \bar{U} \rightarrow U$, onde $h(\bar{u}, \bar{v}) = (a \sin \bar{v} \cos \bar{u}, a \cos \bar{v})$.

5.5 – Primeira Forma Fundamental

Seja $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Estabeleceremos o plano tangente a superfície X em ponto (u_0, v_0) como o conjunto de todos os vetores tangentes a X em (u_0, v_0) , denotado por $T_p X$, onde $q = (u_0, v_0) \in U$. A aplicação desse plano tangente da superfície, $\forall q \in U$, dada por:

$$I_q: T_q X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w \rightarrow I_q(w) = \langle w, w \rangle = |w|^2$$

é denominada a primeira forma quadrática de X em q . TENEBLAT(2008) representa um vetor $w \in T_q X$ é da seguinte forma:

$$w = a X_u(u_0, v_0) + b X_v(u_0, v_0), \text{ onde } a, b \in \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$I_q(w) = a^2 \langle X_u, X_u \rangle(u_0, v_0) + 2ab \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0) + b^2 \langle X_v, X_v \rangle(u_0, v_0). \quad (I)$$

Adotando a subsequente notação:

$$E(u_0, v_0) = \langle X_u, X_u \rangle(u_0, v_0),$$

$$F(u_0, v_0) = \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0),$$

$$G(u_0, v_0) = \langle X_v, X_v \rangle(u_0, v_0),$$

teremos que a primeira forma quadrática (I) pode ser reescrita por:

$$I_q(w) = a^2 E(u_0, v_0) + 2ab F(u_0, v_0) + b^2 G(u_0, v_0),$$

com $E(u, v) > 0$ e $G(u, v) > 0$ para todo (u, v) , pois os vetores X_u e X_v não se anulam, variando (u, v) , temos funções $E(u, v)$, $F(u, v)$ e $G(u, v)$ diferenciáveis, que são denominadas *coeficientes da primeira forma quadrática*. Logo após, dissertaremos acerca de propriedades relacionadas a esses coeficientes.

Propriedade (1) : Seja $X : U \rightarrow S$ uma parametrização de uma superfície e seja $X^* : U \rightarrow S^*$ outra parametrização de uma superfície distinta, tais que $E = E^*, F = F^*, G = G^*$ em U . Então a aplicação $\phi = E^* \circ E^{-1} : E(U) \rightarrow S^*$ é uma isometria local, ou seja, existe uma deformação isométrica em X que a torna, a superfície X^* (DO CARMO, 2012, p.263).

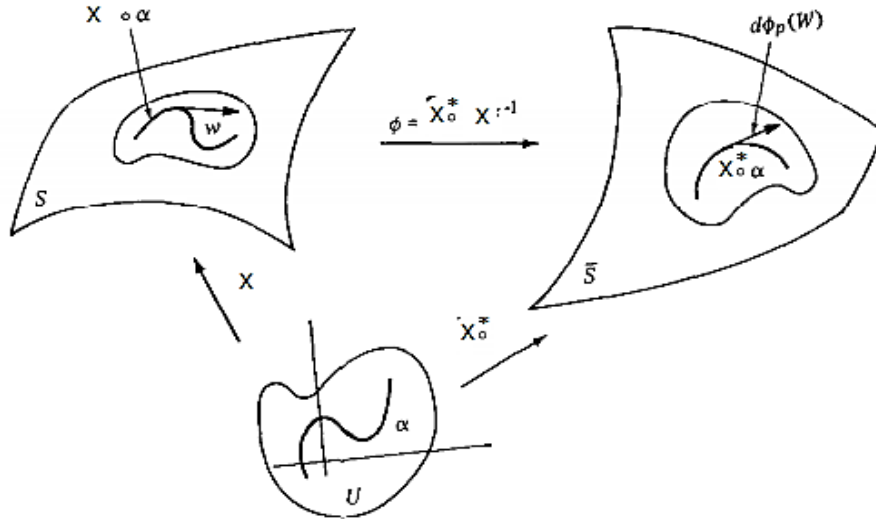


Figura 62 – Esquema de aplicação isométrica

Fonte : DO CARMO (2012, p. 264).

Para o melhor entendimento dessa propriedade, exibiremos e ilustraremos um exemplo: deformação isométrica de duas superfícies isométricas: a catenóide e a helicóide. A parametrização da catenóide é dada por $X(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av)$ em que $0 < u < 2\pi$, $-\infty < v < \infty$, com os respectivos coeficientes da primeira forma fundamental :

$$E(u, v) = \langle X_u, X_u \rangle = a^2 \cosh^2 v,$$

$$F(u, v) = \langle X_u, X_v \rangle = 0,$$

$$G(u, v) = \langle X_v, X_v \rangle = a^2(1 + \sinh^2 v) = a^2 \cosh^2 v.$$

Enquanto, a parametrização da helicóide é dada por $X^*(u^*, v^*) = (v^* \cos u^*, v^* \sin u^*, au^*)$, em que $0 < u^* < 2\pi$, $-\infty < v^* < \infty$. Definiremos uma reparametrização da helicóide para podermos usar a propriedade 1:

$$u^* = u; v^* = a \sinh v, \text{ em que } 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty$$

Assim, teremos: $X^*(u, v) = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, au)$, e os respectivos coeficientes da primeira forma coincidirão com os coeficientes obtidos na catenóide, $E^*(u, v) = a^2 \cosh^2 v$, $F^*(u, v) = 0$, $G^*(u, v) = a^2 \cosh^2 v$. A Figura 63, ilustra as etapas dessa deformação isométrica.

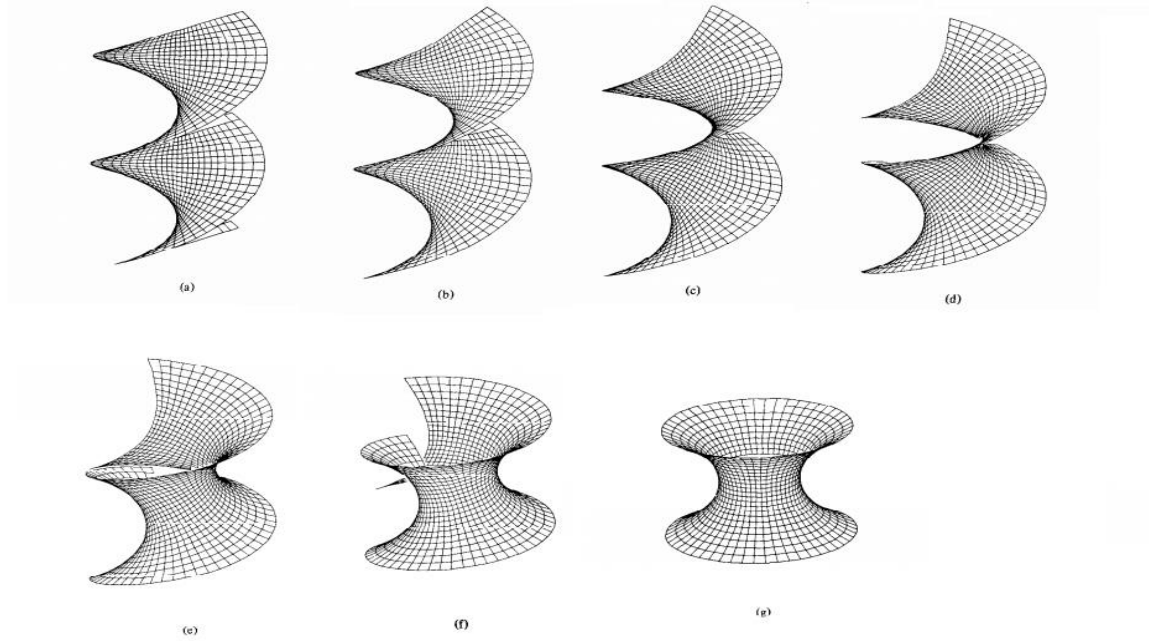


Figura 63 - Deformação isométrica do helicóide no catenóide.
Fonte: DO CARMO (2012, p. 267/268).

Ainda observe a interpretação de TENEBLAT(2008, p.147) “se X e X^* são superfícies isométricas, então as propriedades geométricas das superfícies, que dependem apenas da primeira forma quadrática, são preservadas pela isometria”. Além disso, a autora ainda explana outras propriedades pertinentes a primeira forma, como apresentaremos a seguir.

Propriedade (2) : Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular. Se $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, é uma curva diferenciável da superfície, então, para $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \leq t_1$, o comprimento de t_0 a t_1 é dado por:

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I_{q(t)}(\alpha'(t))} dt,$$

onde usamos o fato de que $\alpha'(t)$ é um vetor tangente à superfície em que $q(t) = (u(t), v(t))$.

Propriedade (3) : Se duas curvas da superfície $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ e $\beta(r) = X(u(r), v(r))$ são tais que $(u(t_0), v(t_0)) = (u(r_0), v(r_0))$, então o ângulo θ com que as curvas se intersectam é dado por :

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(r_0) \rangle}{|\alpha'(t_0)| |\beta'(r_0)|}.$$

Em particular, o ângulo formado pelas curvas coordenadas de $X(u, v)$ em (u_0, v_0) é dado por :

$$\cos \theta = \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{|X_u| |X_v|} (u_0, v_0) = \frac{F(u_0, v_0)}{\sqrt{E(u_0, v_0) G(u_0, v_0)}}.$$

Propriedade (4) : Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular e $D \subset U$ uma região de $\mathbb{R}^2$, tal que X restrita ao interior de D é injetiva. A área da região $X(D)$ é dada por :

$$A(X(D)) = \iint \sqrt{EG - F^2} \, dudv$$

onde E, F, G são os coeficientes da primeira forma quadrática de X .

Explicaremos tais propriedades e conceitos por meio da utilização do Geogebra baseado na concepção de ALVES (2012; 2013a; 2013b; 2015; 2016; 2017) que defende a utilização do *software* Geogebra de forma a contribuir para uma ressignificação de conceitos, estabelecendo conjecturas e verificando geometricamente suas veracidades, propiciando assim um processo de exploração e investigação matemática.

Desse modo, considerando a superfície $X(u, v) = (\sin u, \cos u, v)$, com $-10 < u < 10$, $-10 < v < 10$, que descreve um cilindro reto, sendo obtida por meio da rotação da reta $x = (1, 0, v)$ em torno do eixo Oz .

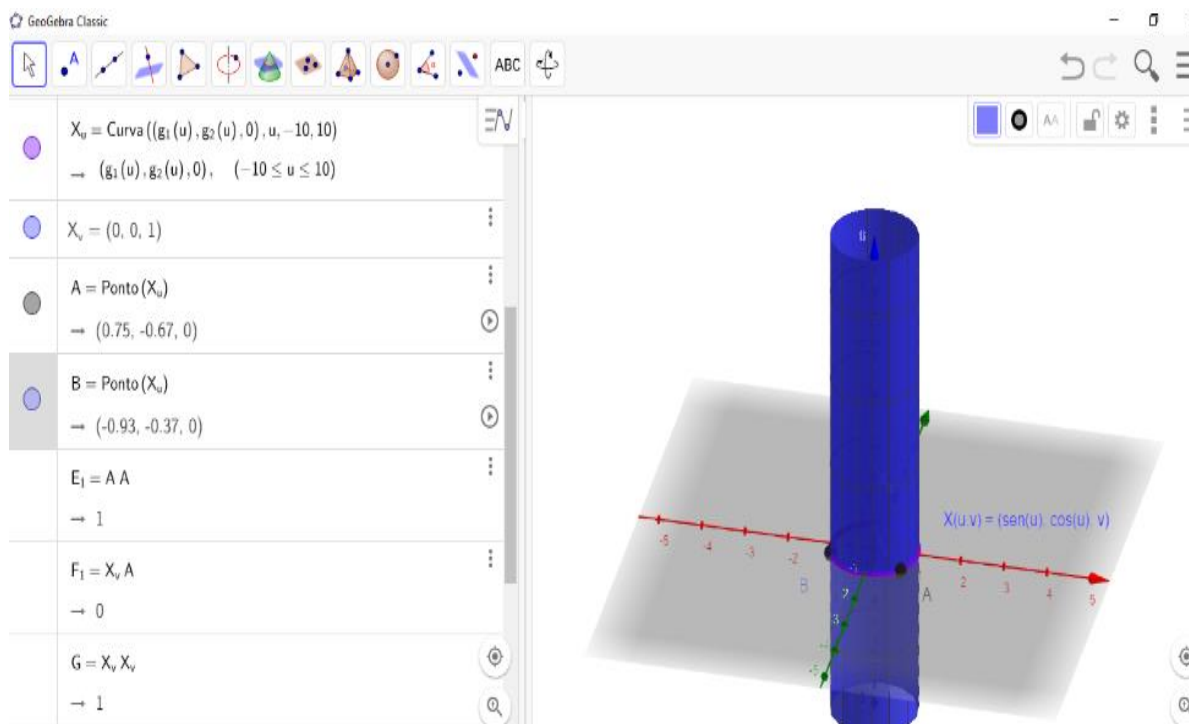


Figura 64 – Representação do cilindro no *software* Geogebra
Fonte : Elaborado pela autora

Tomaremos o ponto $A(0.75, -0.67, 0)$ para a análise e obtenção dos coeficientes da primeira forma quadrática, para isso, inicialmente calcularemos a derivada da superfície X em relação às variáveis u e v . Para isso, deveremos calcular as derivadas das coordenadas separadamente, denominadas as funções coordenadas de f_n , em que n designa a coordenada e as derivadas por g_1, g_2 as derivadas relativas a u e g_3 a derivada relativa a v . Note que não definimos a derivada da terceira coordenada da superfície em relação a u , nem a derivada da primeira e segunda coordenada em relação a v , por assumirem valores nulos. Assim, calculamos no Geogebra, apenas as derivadas diferentes de zero, encontrando $X_u = (\cos(u), -\sin(u), 0)$, e em relação à segunda variável $X_v = (0, 0, 1)$. Na Figura 65, se encontra o protocolo de construção para o cálculo de tais derivadas.

Índice	Nome	Descrição	Valor
1	Função f_1		$f_1(u) = \text{sen}(u)$
2	Função f_2		$f_2(u) = \text{cos}(u)$
3	Função g_1	Derivada de f_1	$g_1(u) = \text{cos}(u)$
4	Função g_2	Derivada de f_2	$g_2(u) = -\text{sen}(u)$
5	Função f_3		$f_3(v) = v$
6	Função g_3	Derivada de f_3	$g_3(v) = 1$
7	Curva Paramétrica X_u	Curva($(g_1(u), g_2(u), 0), u, -10, 10$)	$X_u: (\text{cos}(u), -\text{sen}(u), 0)$
8	Ponto $X_v(0, 0, 1)$		$X_v = (0, 0, 1)$
9	Ponto A	Ponto sobre X_u	$A = (0.75, -0.67, 0)$
10	Ponto B	Ponto sobre X_u	$B = (-0.93, -0.37, 0)$
11	Número E_1	A A	$E_1 = 1$
12	Número F_1	X_v A	$F_1 = 0$
13	Número G	X_v X_v	$G = 1$
14	Número E_2	B B	$E_2 = 1$
15	Número F_2	X_v B	$F_2 = 0$
16	Superfície X	Superfície($\text{sen}(u), \text{cos}(u), v, u, -10, 10, v, -10, 10$)	$X(u,v) = (\text{sen}(u), \text{cos}(u), v)$

Figura 65– Protocolo de construção para o cálculo das derivadas parciais do cilindro

Fonte : Geogebra

Ao analisarmos a derivada da superfície em relação a u , constatamos que se trata de uma função que depende do ponto escolhido, no caso o ponto A , enquanto que a derivada em relação a v , se trata de um vetor constante logo independe do ponto escolhido. Assim, com base nas ferramentas do *software*, calculamos os coeficientes da primeira forma quadrática no ponto A , obtendo $E_1(u, v) = 1$, $F_1(u, v) = 0$, $G(u, v) = 1$. Assim, como foi definido anteriormente, a primeira forma quadrática será dada por $I_q(w) = a^2 + b^2$, em que $a, b \in \mathbb{R}$.

Veja que ao propor essa construção podemos, no Geogebra, variar o ponto A e analisar o comportamento dos coeficientes da primeira forma quadrática. Por exemplo, variar o valor do ponto A , tomando um ponto $B(-0.93, -0.37, 0)$ podemos observar na Figura 65, por meio dos cálculos dos produtos internos, que os valores dos E , F e G não variam, ou seja, apesar da derivada em relação a u não ser uma função constante, os coeficientes da primeira forma quadrática são funções constantes, ou seja, independem do ponto escolhido.

Além disso, observa-se que os valores obtidos nos coeficientes da primeira forma quadrática do cilindro coincidem com os coeficientes da primeira forma quadrática do plano $X(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, onde $p_0 \in \mathbb{R}^3$ e w_1, w_2 são vetores ortonormais de $\mathbb{R}^3$. Apresentando as seguintes derivadas parciais $X_u = w_1 = (1, 0, 0)$ e $X_v = w_2 = (0, 0, 1)$. Se analisarmos as derivadas parciais desse plano, constatamos que se tratam de funções que independem do ponto escolhido, obtendo $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$. Veja na Figura 66, um exemplo de tal plano.

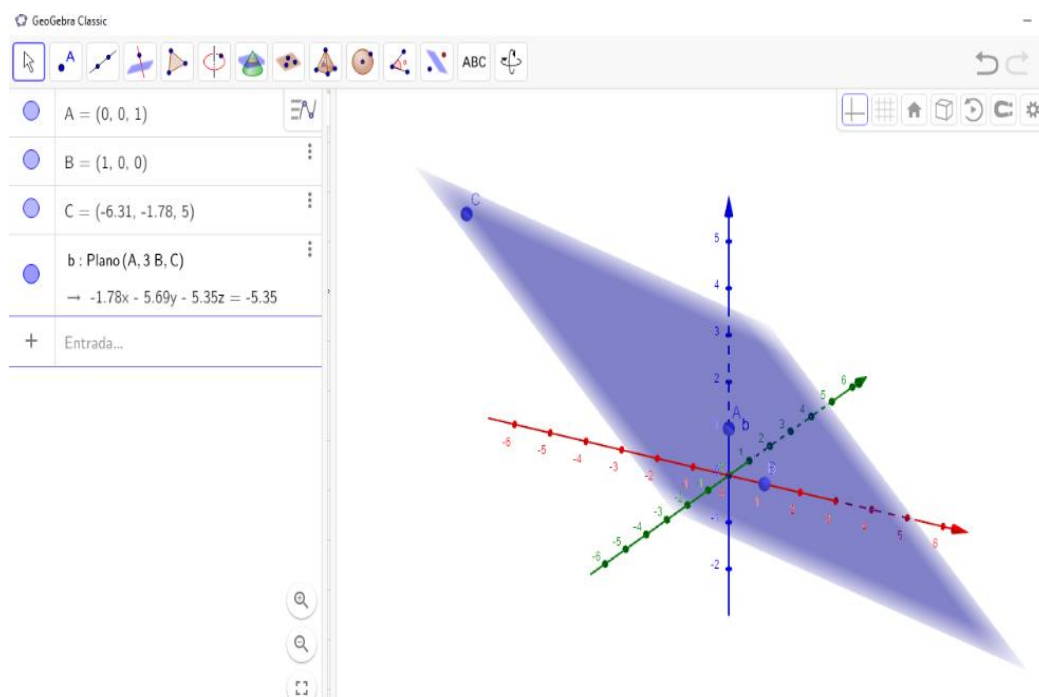


Figura 66 – Exemplo de planos formado por um ponto e dois vetores ortogonais distintos
Fonte : Elaborado pela autora

Utilizando o fato dos coeficientes da primeira forma quadrática do cilindro e o plano assumirem valores constantes e congruentes, concluímos que estas superfícies são isométricas. Intuitivamente, podemos pensar no plano como uma folha de papel plana que pode ser enrolada em um cilindro, sem deformação. Veja que por meio dessa construção, assumimos o ponto de vista de VALENTE (1993), oportunizando o desenvolvimento de uma construção do conhecimento, com o aprendiz no centro do processo educativo compreendendo conceitos e reconhecendo a sua aplicabilidade em situações por ele vivenciadas, defendendo a utilização do computador como ferramenta facilitadora nesse processo por auxiliar na descrição, reflexão e depuração de ideias.

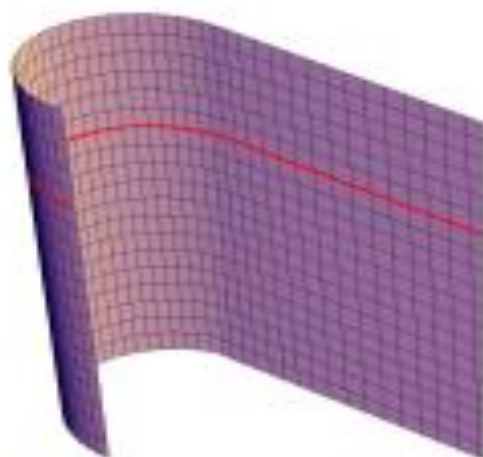


Figura 67– Idéia intuitiva da transformação isométrica do plano em um cilindro
Fonte : NUNES(2010, p.37)

Prosseguiremos, analisando a superfície obtida pela rotação da curva $a = (3 + r \cos u, r \sin u, 0)$ em torno dos eixos xy, denominada de toro, cuja aplicação é dada por: $X = ((3 + r \cos u) \cos v, (3 + r \cos u) \sin v, u)$ em que adotamos $r = 1.8$ e $-2\pi < u < 2\pi$, $-3\pi < v < 3\pi$.

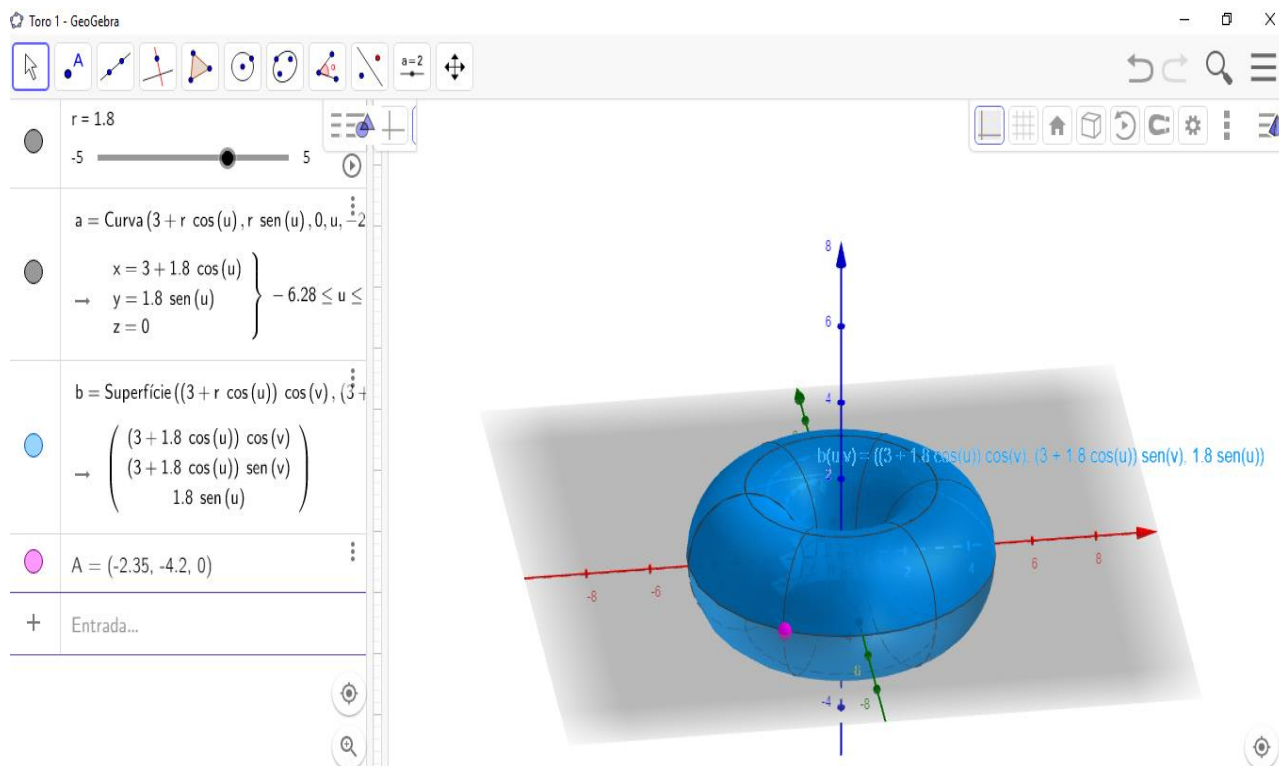


Figura 68– Construção do toro no *software* Geogebra
Fonte : Elaborado pela autora

A realização do cálculo das derivadas parciais, no *software* torna-se mais dificultoso, devido ao fato das funções coordenadas possuírem duas variáveis, o protocolo de construção dessa superfície fazendo-se uso de uma interface do Geogebra denominada Cálculo simbólico, representada na Figura 69 :



Figura 69 – Simbolização da função CAS no *software* Geogebra
Fonte : Geogebra

Veja que, essa função do *software* assente com o pensamento do educador matemático ALMOULOU *et al.* (2004, p.94), que defende que os ambientes informáticos na educação proporcionam ao aluno condições favoráveis à aquisição de conhecimento e a superação das dificuldades na aprendizagem, por proporcionar o cálculo de operações complexas. Veja na Figura 70, o uso da ferramenta CAS para o cálculo das derivadas parciais, vale lembrar que designamos as funções coordenadas de forma análoga à primeira construção.

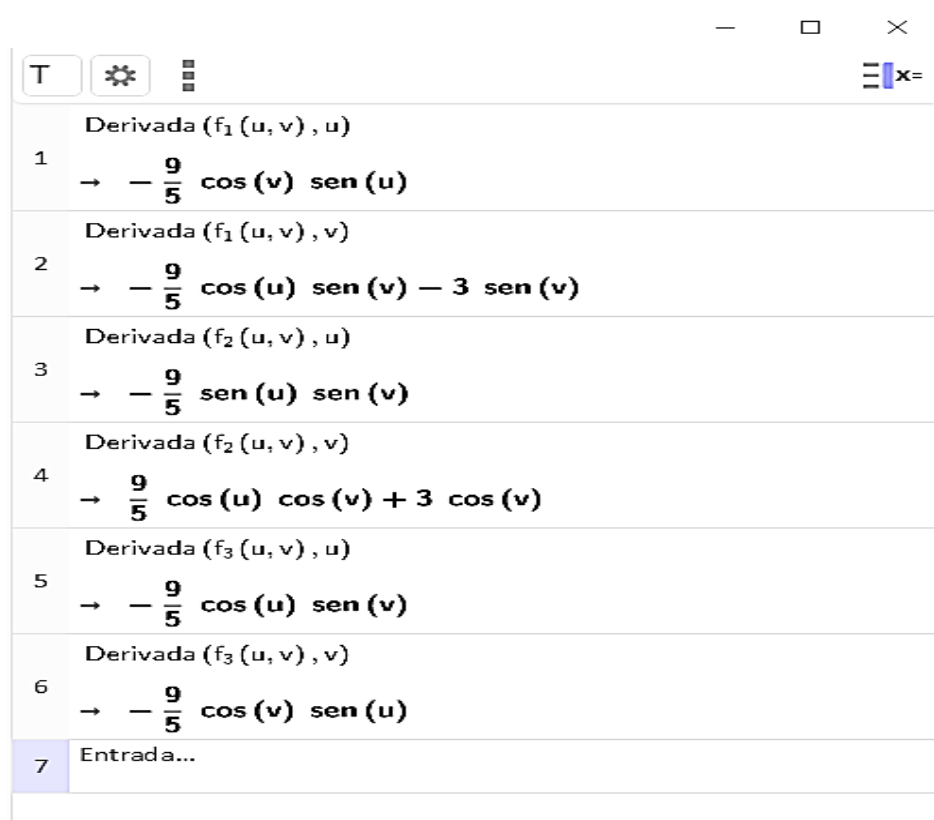


Figura 70 – Utilização da função CAS do *software* Geogebra para o cálculo das derivadas parciais do toro
Fonte : Elaborado pela autora

Considerando os dados apresentados, concluímos que:

$$X_u = \left(-\frac{9}{5} \cos v \sin u, -\frac{9}{5} \sin u \sin v, -\frac{9}{5} \cos u \sin v \right), \text{ e}$$

$$X_v = \left(-\frac{9}{5} \sin u \sin v, \frac{9}{5} \cos u \cos v + 3 \cos v, -\frac{9}{5} \cos v \sin u \right).$$

Por meio dessas derivadas, calculamos no Geogebra, os coeficientes da primeira forma quadrática desta parametrização obtendo: $E(u, v) = \left(-\frac{9}{5} \right)^2 = (1.8)^2 = 3.24$, $F(u, v) = 0$ e $G(u, v) = (3 + 1.8 \cos u)^2 = (3 + 3.24 \cos u)^2$. Além disso, como foi dito anteriormente podemos definir a primeira forma como:

$$I_q(w) = 3.24 a^2 + b^2(3 + 3.24 \cos u)^2.$$

Observe que se variamos o ponto A , os coeficientes da primeira forma quadrática variam seus valores, pois nem todos são funções constantes, nesse caso o valor da primeira forma quadrática varia do ponto escolhido.

Não detalharemos o cálculo desses coeficientes, pois ao realizarmos essa construção, temos como objetivo elencar outra potencialidade do *software* no ensino de primeira forma quadrática, que remete a visualização e um melhor entendimento de um dos conceitos integrantes do cálculo do referido conceito, a derivada parcial. Por esse motivo, na Figura 71, exibimos o comportamento das derivadas do toro.

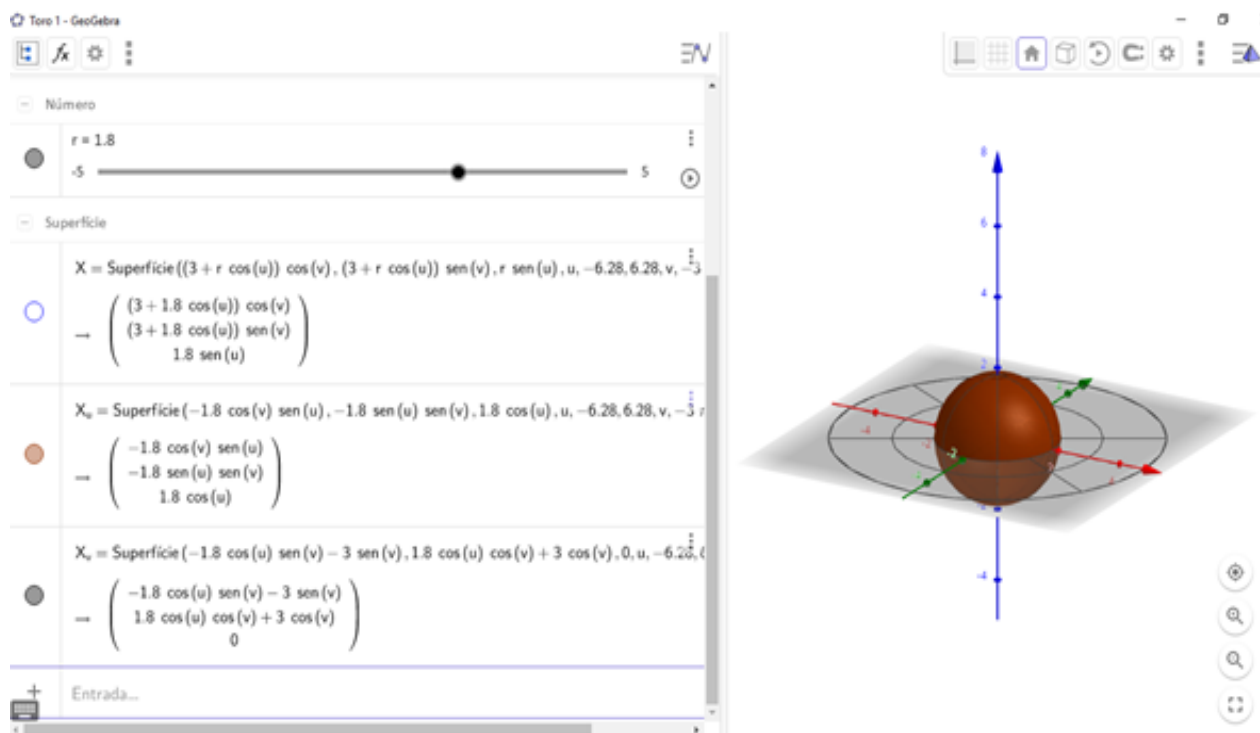


Figura 71 – Representação das derivadas parciais do toro no software Geogebra

Fonte : Elaborado pelos autores

Note que o gráfico da derivada em relação a u , se trata de uma esfera, enquanto que a derivada em relação a v , se trata de uma curva planar. Segundo Guzmán (2002) por meio da construção gráfica, no Geogebra, podemos observar a continuidade das derivadas em um determinado ponto e explorar a noção do conceito. Entretanto vale ressaltar que para essa exploração, os alunos devem possuir uma boa fundamentação dos conceitos de domínio, imagem, raízes, pontos críticos, extremos, intervalos de crescimento e decrescimento, concavidade, pontos de inflexão, limites no infinito e assíntotas.

Prosseguiremos analisando, uma superfície intitulada de sela, definida por : $X(u, v) = \left(u, v, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} (16 u^2 + 36)(16 v^2 + 9) - 144} \right)$, na Figura 72 apresentamos a representação dessa superfície, ademais salientaremos que o cálculo dos respectivos coeficientes da primeira forma quadrática foi realizado no software.

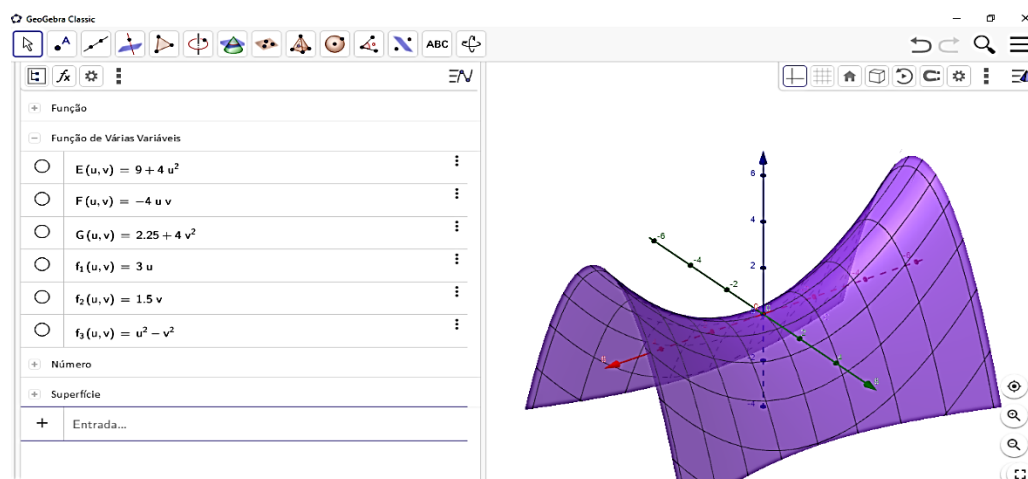


Figura 72- Representação superfície de sela

Fonte: Elaborado pela autora

À vista do que mencionamos anteriormente, a finalidade dessa construção é a utilização do *software* para o cálculo da área da superfície. Para isso, precisamos obter a expressão definida na propriedade (4) :

$$A(X(D)) = \iint \sqrt{EG - F^2} \, du dv$$

Veja na Figura 73, que utilizamos a janela CAS para o cálculo da expressão que deve ser integrada, e que além de nos fornecer a expressão, os comandos realizados nessa janela nos permitem obter os valores algébricos, como está exibido para o ponto $(0.6, -1.3)$.

The screenshot shows the GeoGebra Classic CAS interface. On the left, the input area contains the following steps:

- $E(u, v) = \frac{261}{25}$
- $G(u, v) = \frac{45}{4}$
- $E(u, v) \cdot G(u, v) = \frac{2349}{20}$
- $F(u, v)^2 = \frac{324}{25}$
- $X(D) = \sqrt{E(u, v) \cdot G(u, v) - F(u, v)^2}$
 $\rightarrow X(D) = \frac{9}{10} \sqrt{129}$

On the right, the 'Função de Várias Variáveis' (Functions of Several Variables) list contains:

- $E(u, v) = 9 + 4 u^2$
- $F(u, v) = -4 u v$
- $G(u, v) = 2.25 + 4 v^2$
- $f(u, v) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} (16 u^2 + 36) (16 v^2 + 9) - 144}$
- $f_1(u, v) = 3 u$
- $f_2(u, v) = 1.5 v$
- $f_3(u, v) = u^2 - v^2$

Below the functions, there are sliders for the variables u and v :

- $u = 0.6$ (slider range from -3 to 3)
- $v = -1.5$ (slider range from -3 to 3)

Figura 73 – Representação do cálculo da expressão $\sqrt{EG - F^2}$ dos coeficientes da superfície sela

Fonte : Elaborado pela autora

Após o cálculo de tal função basta escolhermos o intervalo de integração para o cálculo da área da superfície. Conforme definido na propriedade 4, por se tratar de uma integral dupla, e inexistir, no *software*, comando direto para o cálculo de tal operação, nos baseamos nos algoritmos definidos em ÁVILA e DE ARAÚJO(2012), para contornar tal obstáculo.

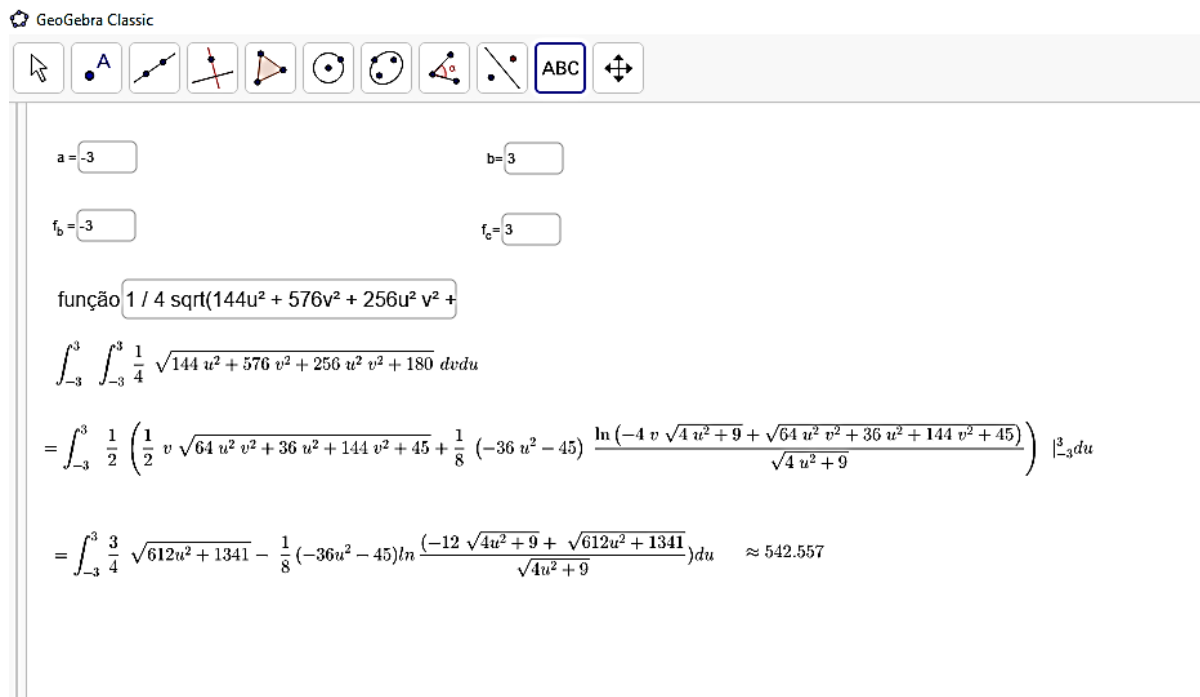


Figura 74 – Cálculo da área da superfície de sela
Fonte : Elaborado pela autora, baseado em Ávila e de Araújo(2012)

Através dessa construção, por meio da visualização e das operações desenvolvidas, pretendemos incitar os conhecimentos intuitivos sobre a integral, e exibir uma das aplicações relacionadas ao conceito de primeira forma quadrática.

Além disso, notamos que por meio dessas construções apresentadas podemos mobilizar conhecimentos prévios (função, produto interno, derivada, etc), necessários para o entendimento do conceito em questão. Além da realização de uma articulação entre os conceitos algébricos e suas respectivas configurações geométricas.

5.5 – Segunda Forma Fundamental

Preliminarmente a definição de segunda forma fundamental, estabeleceremos o conceito de um vetor normal a uma superfície regular parametrizada. Assim, se $X(u, v)$ é uma superfície regular parametrizada e $q = (u_0, v_0)$ um ponto pertencente a U , definiremos que um vetor de $\mathbb{R}^3$ é *normal* a X em q se é ortogonal a $T_q X$, isto é, é ortogonal a todos os vetores tangente a X em q . Conforme TENEBLAT(2008,p.134) “dado um plano tangente $T_q X$, existe uma única direção normal a este plano e, portanto, existem dois vetores unitários normais a X em q ”. Por essa razão, determinaremos o vetor unitário normal a X em q como sendo o vetor :

$$N(q) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(q).$$

No caso de o domínio da superfície X ser um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, ao variarmos $(u, v) \in U$, teremos uma aplicação diferenciável $N : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, intitulada *aplicação normal de Gaus*, definida por :

$$N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(u, v),$$

cuja imagem está contida na esfera unitária, centrada na origem. Adiante, exibiremos a interpretação de TENEBLAT(2008, p.134) acerca de tal aplicação.

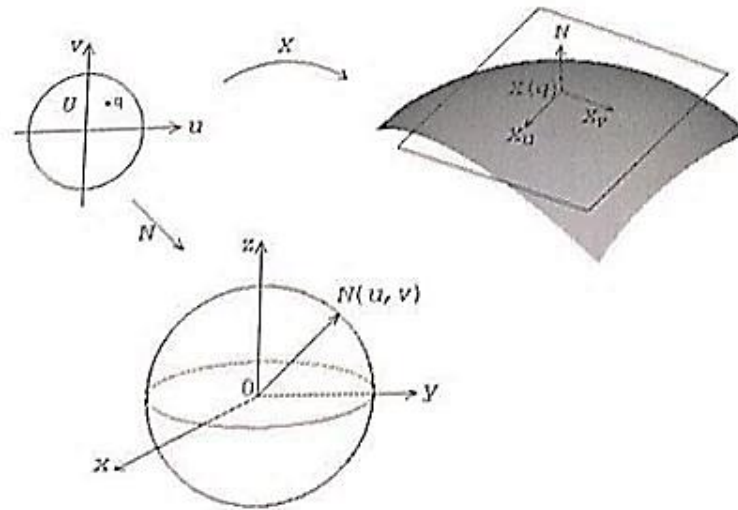


Figura 75 - Ilustração da aplicação normal de Gauss elaborada por TENEBLAT(2008)

Fonte: TENEBLAT(2008, p.134)

Se $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma superfície parametrizada regular. Estabeleceremos fixado um ponto $q = (u_0, v_0) \in U$, a *segunda forma quadrática* de X em q , como a aplicação $II_q : T_q X \rightarrow \mathbb{R}$, que para cada vetor $w \in T_q X$ associa $II_q(w)$ da seguinte maneira: se $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva diferenciável da superfície, tal que $(u(t_0), v(t_0)) = q$ e $\alpha'(t_0) = w$, então definimos

$$II_q(w) = \langle \alpha''(t_0), N(u_0, v_0) \rangle, \text{ onde } N \text{ é o vetor normal a } X.$$

Salientaremos que $II_q(w)$ não depende da curva escolhida, apontaremos tal circunstância aponderando-se de um vetor $w = a X_u(u_0, v_0) + b X_v(u_0, v_0)$ e da curva $\alpha(t)$ definida anteriormente. Assim dado que $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$, $(u'(t_0), v'(t_0)) = (a, b)$,

$$\alpha'(t) = u'(t)X_u(u(t), v(t)) + v'(t)X_v(u(t), v(t)) \text{ e}$$

$$\begin{aligned} \alpha''(t) = & u''(t)X_u(u(t), v(t)) + (u'(t))^2 X_{uu}(u(t), v(t)) + 2 u'(t) v'(t) X_{uv}(u(t), v(t)) + \\ & (v'(t))^2 X_{vv}(u(t), v(t)) + (v''(t))X_v(u(t), v(t)), \end{aligned}$$

como temos por definição, que a *segunda forma quadrática* é dada por

$$II_q(w) = \langle \alpha''(t_0), N(u_0, v_0) \rangle.$$

Logo,

$$II_q(w) = a^2 \langle X_{uu}, N \rangle (u_0, v_0) + 2ab \langle X_{uv}, N \rangle (u_0, v_0) + b^2 \langle X_{vv}, N \rangle (u_0, v_0),$$

que independe da curva α . Além disso, usaremos a notação

$$e(u_0, v_0) = \langle X_{uu}, N \rangle (u_0, v_0);$$

$$f(u_0, v_0) = \langle X_{uv}, N \rangle (u_0, v_0);$$

$$g(u_0, v_0) = \langle X_{vv}, N \rangle (u_0, v_0),$$

isto é, podemos reescrever a *segunda forma quadrática* como:

$$II_q(w) = a^2 e(u_0, v_0) + 2abf(u_0, v_0) + b^2 g(u_0, v_0).$$

Assim, ao variarmos (u, v) dispomos de funções diferenciáveis $e(u, v)$, $f(u, v)$, $g(u, v)$, que serão intituladas de *coeficientes a segunda forma quadrática* da superfície parametrizada X .

À nível de exemplificação, consideraremos a superfície $X(u, v) = (rcos u, r sen u, v)$, que como vimos anteriormente descreve o cilindro circular, para o cálculo da segunda forma quadrática.

Como $X_u = (-rsen u, rcos u, 0)$, $X_v = (0, 0, 1)$ e $N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(u, v) = (cos u, sen u, 0)$, obtemos:

$$X_{uu} = (-rcos u, -rsen u, 0),$$

$$X_{uv} = (0, 0, 0),$$

$$X_{vv} = (0, 0, 0).$$

Calculando os seguintes coeficientes da primeira e segunda forma quadrática:

$$E(u, v) = r^2, F(u, v) = 0, G(u, v) = 1.$$

$$e(u, v) = -r, f(u, v) = 0, g(u, v) = 0.$$

Portanto, se $w = aX_u + bX_v$, é um vetor tangente a X em $q = (u, v)$, então

$$I_q(w) = a^2 r^2 + b^2$$

$$II_q(w) = -a^2 r^2.$$

A principal aplicabilidade do conceito de segunda forma quadrática, sucede-se em relação ao cálculo da *função curvatura normal* de uma superfície em um ponto q . Definiremos conforme TENEBLAT(2008,p.154) que dada uma superfície $X(u, v)$ parametrizada regular, que a *função normal curvatura* em um ponto $q = (u, v)$ “é uma aplicação $k_n: T_q X - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ que, para cada vetor $w \in T_q X$, não-nulo associa $k_n(w) = \frac{II_q(w)}{I_q(w)}$ ”.

Doravante, salientaremos que se $w \in T_q X$, $w \neq 0$, então $k_n(\lambda w) = k_n(w)$ para todo número real $\lambda \neq 0$. De fato, seja $w = a X_u(u_0, v_0) + b X_v(u_0, v_0)$ em que $(a, b) \neq (0, 0)$, e indicando e_0, f_0, g_0 os coeficientes da segunda forma quadrática em (u_0, v_0) , temos:

$$k_n(w) = \frac{II_q(\lambda w)}{I_q(\lambda w)} = \frac{\lambda^2 a^2 e_0 + 2\lambda^2 abf_0 + \lambda^2 b^2 g_0}{\lambda^2 \langle w, w \rangle} = \frac{a^2 e_0 + 2abf_0 + b^2 g_0}{\langle w, w \rangle} = \frac{II_q(w)}{I_q(w)} = k_n(w)$$

Retomaremos ao exemplo da superfície $X(u, v) = (rcos u, r sen u, v)$ que descreve o cilindro circular, para calcularmos e analisarmos a função curvatura normal. Portanto, se $w = a X_u + b X_v$ é um vetor tangente a X em $q = (u, v)$, então $k_n(w) = \frac{II_q(w)}{I_q(w)} = \frac{-a^2 r^2}{a^2 r^2 + b^2}$.

Analisando, a função $k_n(w)$ com o intuito de inferimos uma interpretação geométrica da curvatura normal e da segunda forma quadrática, temos que se $a \neq 0$:

$$\frac{-a^2 r^2}{a^2 r^2 + b^2} \leq \frac{1}{r},$$

e se $b = 0$,

$$\frac{-a^2 r^2}{a^2 r^2 + b^2} \geq -\frac{1}{r}.$$

Isto é, a função $k_n(w)$ admite um máximo e um mínimo nas direções tangentes X_v e X_u .

Prosseguiremos com a análise da superfície $X(u, v) = (u, v, v^2 - u^2)$ que descreve o parabolóide hiperbólico, representado na Figura 76.

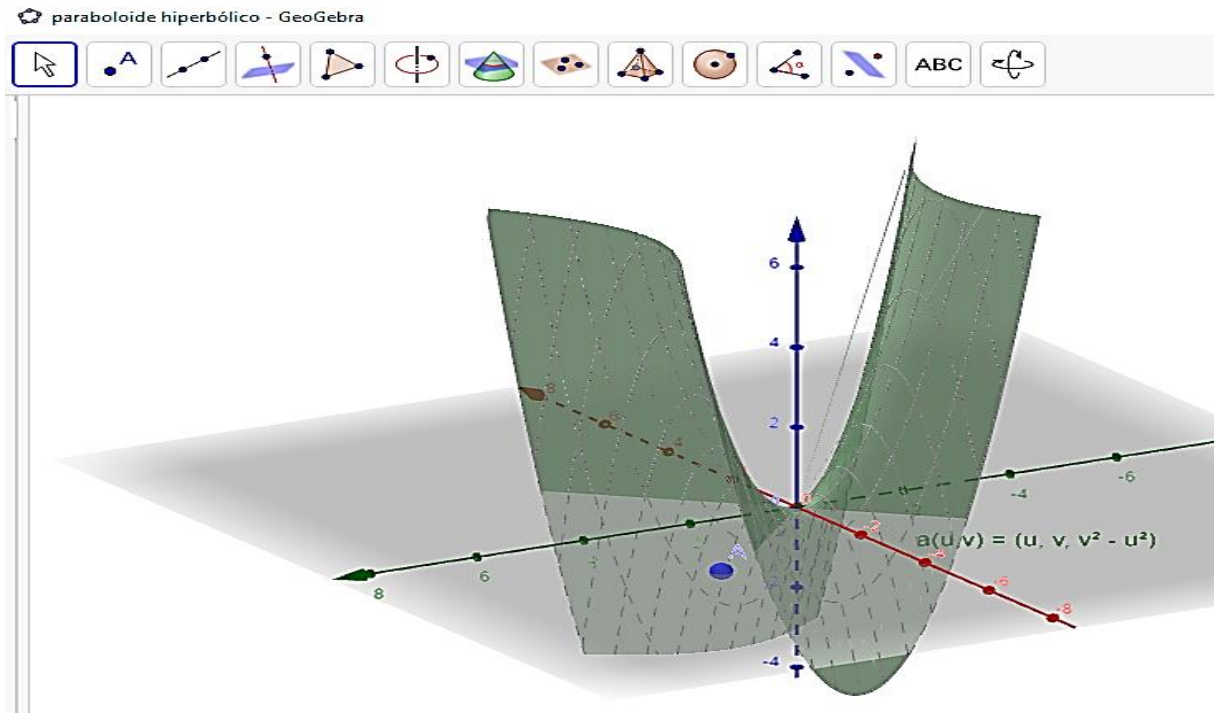


Figura 76- Representação do parabolóide hiperbólico

Fonte: Elaborado pela autora

Efetuando o cálculo dos coeficientes da primeira e segunda formas quadrática em $q = (0,0)$, obtemos:

$$E(0,0) = 1, F(0,0) = 0, G(0,0) = 1,$$

$$e(0,0) = -2, f(0,0) = 0, g(0,0) = 2.$$

Dessa forma, se $w = aX_u(0,0) + bX_v(0,0) \in T_qX$, dispomos

$$I_q(w) = a^2 + b^2$$

$$II_q(w) = -2a^2 + 2b^2,$$

e para $w \neq 0$,

$$k_n(w) = \frac{-2a^2 + 2b^2}{a^2 + b^2}.$$

Assim, concluímos que k_n assume o valor máximo 2 e o valor mínimo -2, nas direções de X_v e X_u respectivamente. Por fim, examinaremos a superfície $X(u, v) = (u, v, u^3 - 3uv^2)$, apresentada na Figura 77 que descreve a sela de macaco.

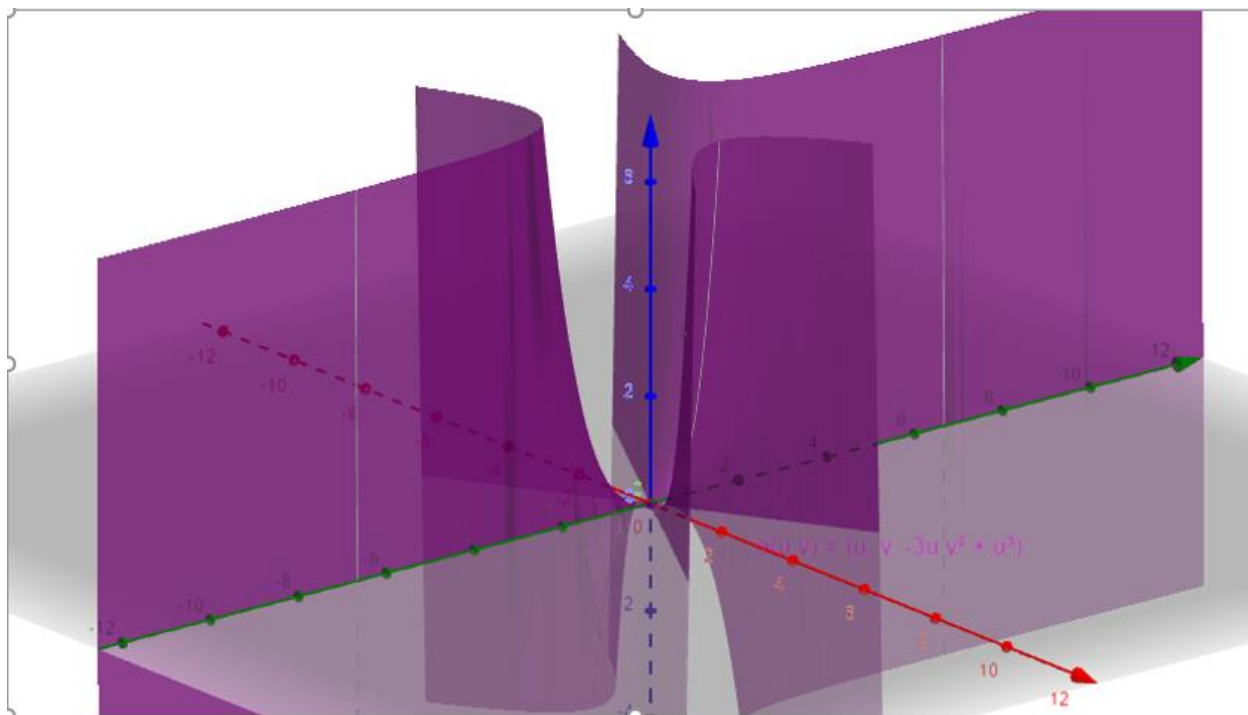


Figura 77 - Representação da superfície $X(u, v) = (u, v, u^3 - 3uv^2)$

Fonte: Elabora pela autora

Efetuada o cálculo dos coeficientes da primeira e segunda formas quadrática em $q = (0,0)$, obtemos:

$$E(0,0) = 1, F(0,0) = 0, G(0,0) = 1,$$

$$e(0,0) = 0, f(0,0) = 0, g(0,0) = 0.$$

Portanto, inferimos que a curvatura normal e a segunda forma quadrática em q são funções nulas.

Dessa forma, encerra-se o estudo acerca do campo epistêmico-matemático dessa pesquisa, que atua como aporte teórico oferecendo ao professor-pesquisador um repertório de simulações no software Geogebra para o ensino de conceitos de GD. Ademais, evidenciamos que tal estudo foi realizado a fim de selecionar conceitos que serão transpostos para situações didáticas, discutidas no capítulo posterior.

6 CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI DOS CONCEITOS RELACIONADOS A CURVAS E SUPERFÍCIES

Nesse capítulo, apresentaremos a aplicação da segunda fase da ED, em que elaboramos e analisamos uma sequência de situações problema, as situações didáticas, que envolvem os conceitos basilares de curvas e incipientes de superfícies. Para efeito de maior sistematização, assumiremos que uma situação problema envolve “a escolha de questões abertas ou fechadas numa situação matematizada ou menos matematizada, vinculada a um campo de problemas colocados em um ou vários domínios do saber ” (ALMOULOU, 2007, p. 174).

Vale observar que, no campo de saberes referenciados por ALMOULOU (2007, p.174), é possível, tendo em vista o nível elementar da Matemática, considerar situações “menos matematizada”. Entretanto, em nosso caso, o modelo matemático condiciona, fortemente, todas as estratégias e ações e decisões dos aprendizes. De forma mais sucinta, o nosso campo epistêmico-matemático, pertencente a um corpus teórico-formal, implica em fortes condicionantes derivados da própria construção/demonstração e descrição dos conceitos de GD.

Para a elaboração dessas situações didáticas, levaremos em consideração, com vistas à estruturação das situações-problema, as seguintes características apontadas por ALMOULOU (2007, p.174):

- As situações devem contemplar um campo conceitual em que se deseja efetivamente explorar;
- Os conhecimentos antigos não devem ser suficientes para a resolução completa do problema;
- O problema deve envolver vários domínios do conhecimento.

No entanto, assinala-se que as características explicitadas acima tratam-se apenas de uma parte das características apontadas por ALMOULOU (2007, p. 174). Nesse sentido, precisamos distinguir e especificar os seguintes elementos: os problemas que tencionamos explorar envolvem domínios analíticos e gráfico-geométricos de GD, entretanto, os conhecimentos antigos (no caso os saberes relacionados a CVV) não devem ser suficientes para a resolução. Outrossim, nas situações que buscamos apresentar, desejamos que “elas permitam adaptações dos alunos, na medida em que tomam decisões e as modificam” (BROUSSEAU, 1986, p. 440).

Além disso, como visamos descrever situações de ensino fundamentadas de uma Matemática procedente de nível avançado, nosso campo conceitual é condicionado, por vezes, por uma definição formal ou um teorema estruturante, esse fato, concomitante ao caráter de não trivialidade/abstracionismo dos conceitos de GD, remete que as situações-problema requeram conhecimentos suficientes da área para sua resolução, portanto, inferimos que a nossa abordagem deva ser determinante.

Por esta razão, utilizamos a visualização proporcionada pelos *softwares* como uma variável didática recorrente no cenário de aprendizagem apresentado aos estudantes. Além disso, também assumimos posição consoante com ALMOULOU (2007, p. 174) ao acentuar que “as atividades

devem ser concebidas, levando-se em consideração os resultados dos estudos prévios”, e terão por objetivos: auxiliar o aluno na construção de conhecimentos e saberes de uma maneira construtiva e significativa; desenvolver certas habilidades como, por exemplo, saber ler, utilizar as diferentes representações matemáticas e desenvolver raciocínio dedutivo. Assim, destacamos que “os objetivos da análise *a priori* devem determinar que as escolhas realizadas permitam o controle do comportamento dos alunos e seu significado”. (ARTIGUE, 1995, p. 45).

Desta forma, as escolhas e descrição de ações futuras, nessa seção, são fundamentadas em pressupostos teóricos, que devem permitir o controle didático da transposição didática e do sentido das ações futuras envolvendo a mediação de saberes. O controle didático que propomos é passível de certa hierarquização ou descrição de momentos na mediação do saber científico.

Nesse sentido, recordamos que BROUSSEAU (1986, p. 440-441) explica que “a aprendizagem no contexto da resolução de problemas, evolui a partir da compreensão do papel e função de alguns momentos particulares”, condicionados pelo trinômio *professor-saber-aluno*. ALVES (2014, p.157), constrói uma figura no qual, indica (em cor vermelha) elementos condicionados por momentos que envolvem o ensino de GD acrescidos das variáveis didáticas que consideramos relevantes em nosso caso.

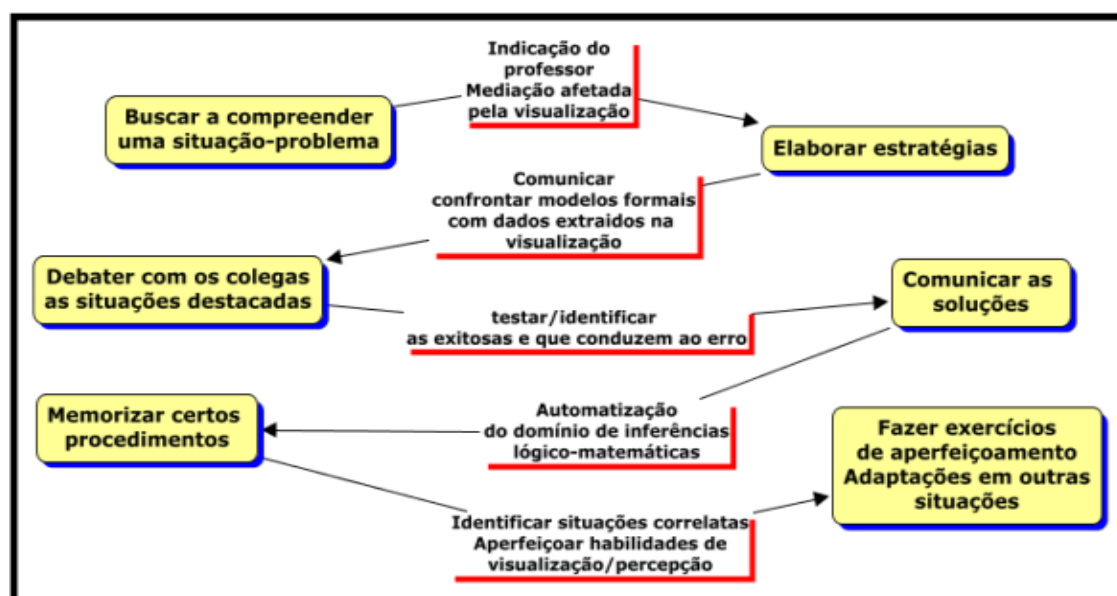


Figura 78 - Adaptação do esquema proposto por BROUSSEAU (1986, p. 440-441) construído por ALVES(2014)
Fonte: ALVES(2014)

Na Figura 78, na passagem de transição de cada momento didático, notamos a manifestação de uma decisão tomada (ou várias decisões) pelo sujeito ou pelos sujeitos. Em cada passagem, prevemos “a manifestação de um conhecimento” (BROUSSEAU, 1986, p.27). Para que o aluno vivencie possibilidades de mobilizar e/ou manifestar seu conhecimento privado, “modelizamos situações” (BROUSSEAU, 1986, p. 400) que possuem o potencial de várias descobertas, em função de suas escolhas e decisões.

O surgimento dessas descobertas e a ocorrência de elementos inesperados determinam “o grau de incerteza” (BROUSSEAU, 1986, p. 270). Além disso, BROUSSEAU (1986,

p, 270) destaca que “a aprendizagem de um conhecimento ocorre na medida em que diminui o grau de incerteza” relativa às situações didáticas apresentadas pelo professor em sala de aula. Doravante, apresentaremos a concepção dessas situações didáticas baseadas nos pressupostos debatidos.

6.1 Concepção e análise *a priori* das Situações Didáticas

ALMOULOU (2007, p.174) explana acerca das ações para se alcançar os objetivos de uma pesquisa, afirmando que “garantir, minimamente, o alcance desses objetivos, o pesquisador ou o construtor de situações-problema necessita escolher as variáveis didáticas que podem provocar as mudanças desejadas, no que diz respeito ao processo de ensino e de aprendizagem do objeto em jogo”. Ou seja, na perspectiva do pesquisador, as variáveis didáticas devem ser escolhidas de modo a assistir o pesquisador a alcançar seus objetivos.

Desse modo, dentre as variáveis microdidáticas (locais) que colocamos ênfase, indicaremos: os conteúdos envolvidos nas atividades propostas, implementação de conceitos/saberes por meio do uso da tecnologia, dado que revisão de literatura encontramos diversos autores que indicavam o uso de *softwares* de modo a facilitar a assimilação de conceitos.

Além disto, delimitaremos um pequeno segmento de GD, para a elaboração dessas situações, curvas e os conceitos incipientes relacionados ao entendimento de curvas, devido a complexidade e extensão do nosso campo epistêmico matemático. De modo mais sucinto, no que concerne tal segmento, tratemos dos conceitos intitulados: curvatura, torção, TCP e Triedro Móvel de Frenet correlacionando esses conceitos matemáticos as suas respectivas aplicações, com o intuito de proporcionar uma diminuição na abstração e ressignificação desses conceitos.

Conjuntamente descreveremos uma previsão das etapas de ação, formulação, validação e institucionalização da TSD durante a resolução das situações problema, dado que as situações problema são elaboradas com enfoque na TSD. Tais situações encontram-se descritas nos questionários que se encontram no apêndice no final deste estudo.

Vejamos agora, nossa primeira situação, em que requeremos aos alunos uma relação entre o conceito curvatura e os vetores tangente e normal correlacionando as simulações efetuadas no *software* durante a fundamentação teórica ministrada.

Situação-problema (1): Encontre por meio de uma correlação entre os vetores tangente e normal, as fórmulas do diedro de Frenet, desenvolvendo assim, o significado do conceito curvatura.

Nessa primeira situação problema, na etapa de ação, esperamos que o aluno deva assumir responsabilidade de resolver o problema proposto. Assim, a partir dos conceitos prévios de álgebra linear, geometria analítica com consonância a fundamentação teórica dos conceitos de GD, espera-se que o aluno busque estabelecer uma relação entre o significado algébrico e geométrico dos vetores tangente e normal em curvas ppca para encontrar as fórmulas do Diedro de Frenet.

Na situação de formulação, neste momento, deve ocorrer a troca de informações entre o aluno e o meio organizado, ou seja, a linguagem usada habitualmente deve passar pelo processo de formalização. Para isso, se faz necessário que os alunos se apropriem de novos conhecimentos para elaborar argumentos, que posteriormente, possam ser validados.

Dessa forma, dando continuidade a fase anterior, esperasse que os aluno formulem a partir da visualização e do fato que os vetores tangente e normal em uma curva *ppca* possuem norma unitária para determinação do Diedro de Frenet.

A fase de validação é caracterizada por ter como objetivo, convencer os demais participantes acerca da veracidade dos argumentos utilizados para a resolução do problema, além do mais, possibilita ao aluno provar ou refutar as conjecturas elaboradas, por meio de uma linguagem matemática mais apropriada.

À vista disso, nesta etapa, o aluno prosseguirá realizando alguns cálculos com relação à norma do vetor tangente $||T|| = 1$, e depreender que pode reescrever como $\langle T, T \rangle = 1$, e para em seguida derivar tal produto interno, chegando a conclusão que $\langle T, T' \rangle = 0$, ou seja, T é perpendicular a T' . De modo análogo, o participante deve a partir do fato que o vetor normal em uma curva *ppca* possui norma unitária $||N|| = 1$, e assim concluir que N é perpendicular a N' . Logo, temos que T' encontra-se na mesma direção de N , diferindo de N por uma constante e sentido, coincidindo com a definição de curvatura. E analogamente, por meio da segunda relação temos que N' encontra-se na mesma direção de T , diferindo de T pela curvatura, e sinal.

A institucionalização acontece com a mediação do pesquisador, que deixa explícita sua intenção, ao conferir as propriedades construídas, a fim de identificar, sistematizar e reconhecer o saber construído por meio da formalização e generalização. Dessa maneira, quando o pesquisador retoma posse do problema, deve-se ter condições de verificar os mecanismos que os participantes utilizaram para demonstrar o Diedro de Frenet, obtido por meio da derivação do produtos internos relacionados aos vetores tangente e normal.

Situação - problema (2): Analise e efetue o cálculo da curvatura das seguintes curvas $\gamma(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$; $\beta(t) = (t, t^4)$ e $\alpha(t) = (\cos(t)(2 \cos(t) - 1), \sin(t)(2 \cos(t) - 1))$, $t \in \mathbb{R}$. Depois disso, correlacione e analise por meio do *software* Geogebra geometricamente o comportamento da curvatura nas curvas a seguir, nos pontos indicados.

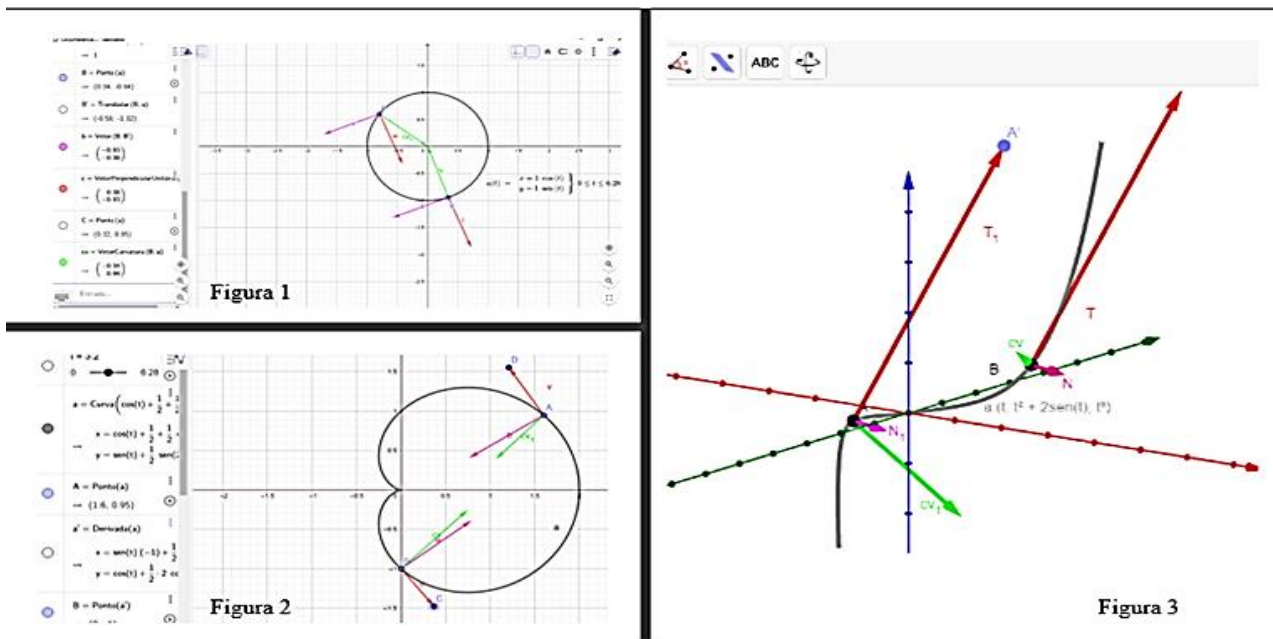


Figura 79 - Explicação das curvas $\gamma(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$; $\beta(t) = (t, t^4)$ e $\alpha(t) = (\cos(t)(2 \cos(t) - 1), \sin(t)(2 \cos(t) - 1))$ utilizadas na situação – problema (2)
Fonte: Elaborado pela autora

No que concerne a situação problema (2), é requerido que os participantes, na ação, se comprometam a efetuar alguns cálculos para identificarem em algumas curvas, alguns valores de curvatura, e por fim analisar o comportamento da curvatura geometricamente nas curvas apresentadas. Assim, ensina-se que o participante observe que o conceito curvatura em um ponto de determinada curva significa mais que uma constante, nos fornece diversos esclarecimentos no que diz respeito a posição dos vetores tangente, normal a essa curva, o quanto essa curva distancia-se de uma reta no plano.

Desse modo, esperasse que o aluno compreenda o significado geométrico e algébrico desse conceito, conseguindo efetuar o cálculo desse conceito para qualquer tipo de curva, estando ou não parametrizada pelo comprimento de arco, e que o entendimento geométrico desse conceito auxilie na assimilação desse saber.

Na formulação, os alunos devem verificar a natureza das curvas propostas (encontram-se na forma ppca ou não), para desse modo empreguem a equação adequada para o cálculo da curvatura em cada situação, e verifiquem por meio da simulação o comportamento da curvatura em curvas de qualquer natureza.

Por esta razão, a segunda parte dessa situação, é requerido aos alunos apenas o significado geométrico, com isso, esperasse que o participante interprete o que a constante curvatura em um dado ponto representa, e assim realize uma associação entre os significados algébricos e geométricos. Para isso, apresentamos curva de naturezas diferentes, a primeira trata-se de uma circunferência (ppca), que

apresenta curvatura constante, enquanto as demais curvas (não ppca), possuem curvaturas que variam de acordo com o ponto que se relaciona.

Na validação, em relação a primeira curva, o participante deve observar que trata-se de uma curva ppca, e determinar os vetores tangentes e normal para aplicar o Diedro de Frenet, enquanto as demais curvas (não ppca) deve se utilizar a expressão $k(t) = \frac{-x''y' + x'y''}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}$. Na segunda parte, o participante deve inferir que na primeira curva, circunferencia, temos curvatura constante, variando inversamente proporcional ao raio. Enquanto as demais apresentam curvaturas que variam conforme o ponto, e por esta razão em determinados pontos assumem valores positivos e negativos. Em relação, a Figura 3, o participante ainda deve discernir que entre os pontos propostos ocorre uma grande variação de valores de curvatura, que a partir do ponto B, a curvatura tende a zero, o que ocorre devido o fato da curva está se assintotando, ou seja, aproximando-se de uma reta. Desse modo na etapa seguinte, a institucionalização, o pesquisador deve efetivar uma análise dos argumentos para se determinar a curvatura e as concepções proferidas acerca desse conceito.

Situação-problema (3): Desenvolva um entendimento intuitivo geométrico acerca do TCP, prosseguindo com a utilização o teorema através da análise das curvas construídas no *software* Geogebra.

- a) $C(x): x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ e $D(x): x^2 + y^2 - 24x - 6y + 149 = 0$.
- b) $F(x) = -x^2 + 14x + 40$ e $G(x) = x^2 + 14x + 58$
- c) $H(x) : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ e $R(x): \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 4$

Na situação-problema (3), empregamos as simulações elaboradas por PAIVA e ALVES(2018b) por meio do *software* Geogebra com o intuito de validar a hipótese de que ocorre uma melhor assimilação do significado desse teorema com o emprego da visualização. Desta forma, a visualização das curvas propostas na situação-problema (3), estão descritas nas figuras referente a seção de TCP , no Capítulo 4.

Na situação de ação, o aluno deve constatar que o TCP diz respeito a curvatura de curvas planas em relação a três circunstâncias, a associação entre a curvatura e a existência de uma curva plana, unicidade de curvas planas e a semelhança que pode ocorrer entre duas curvas planas. Posteriormente o participante deve empregar-se de tal teorema para o estudo da analogia entre as curvas retratadas.

Na etapa posterior, na situação de formulação, espera-se que os alunos dediquem-se a elucidar com suas palavras o teorema, ou seja, expressar o seu entendimento do teorema, podendo relacionar com curvas estudadas anteriormente. Em seguida, os alunos devem utilizar o TCP nas curvas apresentadas para determinar a existência de movimentos rígidos possíveis para que as curvas tornem-se congruentes.

Na validação esperasse que o participante observe que no primeiro par de curvas, temos duas circunferências de mesmo raio, conseqüentemente mesma curvatura, logo existe o movimento de

rotação que converta uma curva na outra. No segundo par de curvas, o participante deve deduzir a existência de duas parábolas com mesma curvatura, logo pelo TCP, podemos torna-las congruentes com um movimento de translação e rotação. Por fim, no terceiro par de curvas, temos uma elipse d e uma circunferência c , respectivamente, curvas com curvatura variável de acordo com o ponto e curvatura constante em todos os pontos, logo o TCP não se aplica e não existe movimento rígido φ tal que $c(x, y) = \varphi(d(x, y))$. Na última etapa, a institucionalização, ensina-se que o pesquisador apresente o desenvolvimento da aplicação do teorema, e disponha de argumentos dos participantes que indique uma melhor compreensão do TCP.

Situação-problema (4) : Encontre por meio de uma correlação entre os vetores tangente , normal e binormal as fórmulas do Triedro de Frenet, e em seguida, desenvolva o significado geométrico do conceito torção.

Em relação a situação problema (4), dispomos de um estudo de curvas tridimensionais, e com isso observamos, o aparecimento de novos conceitos (torção e vetor binormal), que resulta para curvas ppca nessa dimensão o Triedro de Frenet.

Na situação-problema (4), na etapa de ação, o aluno deve partir da definição do vetor binormal e tentar correlacionar aos mecanismos utilizados para a determinação do Diedro de Frenet para determinar as fórmulas do Triedro de Frenet.

Assim, de modo afim a situação-problema (1), o participante deve basear-se nos conceitos prévios de álgebra linear, geometria analítica com consonância a fundamentação teórica dos conceitos de GD, para o estabelecimento de uma relação entre o significado algébrico e geométrico dos vetores tangente e normal e binormal em curvas ppca para encontrar as fórmulas do Triedro de Frenet.

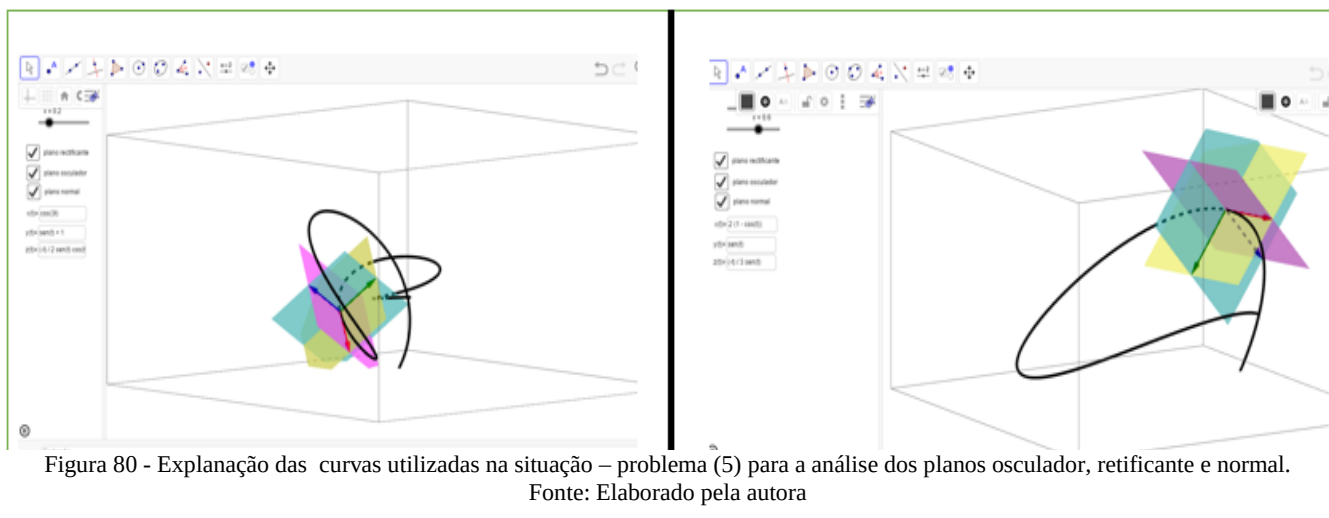
Na formulação, o participante deve compreender que a relação $T'(s) = k(s).N(s)$, encontrada no Diedro de Frenet permanece correta para curvas de dimensão três. Posteriormente, o participante deve articular a utilização das técnicas de derivação para determinar uma relação a partir do vetor binormal, normal.

Na validação, após a derivação do produto vetorial $B(s) = T(s) \times N(s)$, o participante encontrará $B'(s) = T(s) \times N'(s)$, e concluir que $B'(s)$ é ortogonal a $T(s)$. Concomitantemente, inferir, devido a norma do vetor $B(s)$ ser unitária, que $B'(s)$ é ortogonal a $B(s)$. Logo, ocorre que B' encontra-se na mesma direção de N , diferindo de N por uma constante e sentido, coincidindo com a definição de torção.

Por fim, o participante deve empregar as duas expressões encontradas: $\begin{cases} T'(s) = k(s).N(s) \\ B'(s) = T(s) \times N'(s) \end{cases}$, de modo articulado ao fato de que o vetor normal, pode ser expresso como $N(s) = B(s) \times T(s)$, empregando novamente a derivação do produto vetorial para encontrar que $N'(s) = -\tau . B(s) - k(s). T(s)$, encontrando assim as fórmulas do Triedro de Frenet. Na situação

de institucionalização, finalmente, deve-se ter argumentos para se determinar uma analogia entre os conceito geométrico de curvatura e torção para a curvas tridimensionais.

Finalmente, encerra-se o conjunto de situações didáticas com a discussão da seguinte situação-problema (5): Analise e efetue o cálculo da torção e curvatura da hélice circular cuja expressão é dada por $\gamma(s) = (a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}})$ em que, $a, b \in \mathbb{R}$. Em seguida, correlacione e analise por meio do *software* Geogebra geometricamente o comportamento os planos gerados a partir do Triedro Móvel de Frenet nas curvas $\beta(s) = (\cos(3s), \sin s + 1, \frac{-s}{2 \sin(s) \cos(s)})$ e $\alpha(s) = (2 - 2 \cos(s), \sin s, \frac{-1}{3 \sin(s)})$.



No que concerne a situação problema (5), ensejasse que os participantes, na ação, se comprometam a efetuar o cálculo da torção e curvatura, e analisem o comportamento dos vetores tangente, normal e binormal, resultando dessa maneira na caracterização dos planos formados por meio desses vetores: osculador, retificante e normal.

Na formulação, os alunos devem verificar a natureza da curva proposta (encontram-se na forma ppca ou não), para desse modo empreguem a equação adequada para o cálculo da curvatura e torção, prosseguindo com a verificação por meio da simulação o comportamento de curvas de qualquer natureza em um espaço vetorial de dimensão três.

Na etapa posterior, a validação, o participante deve derivar a equação da curva, para assim, concluir que trata-se de uma curva ppca. Em seguida, devido a natureza da curva, conclui-se que a primeira derivada da curva refere-se a expressão do vetor tangente. Efetuando o cálculo da norma da expressão gerada por meio de uma segunda derivação da curva, encontra-se a expressão da curvatura, e a partir disso, encontra-se o valor do vetor normal. Neste momento o participante deve realizar o produto vetorial entre os vetores tangente e normal para obter o vetor binormal, e por fim, encontrar a torção. As expressões encontradas ao fim do raciocínio, devem ser $\sigma = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $k = \frac{a}{a^2+b^2}$.

Ainda na segunda parte dessa situação, é requerido aos alunos apenas o significado geométrico desses conceitos, com isso, esperasse que o participante interprete as curvas e assim realize por meio de

uma associação entre a definição desses vetores, uma representação desses vetores e dos respectivos planos gerados por eles. Por fim, na institucionalização, deve formalizar-se e sistematizar os argumentos para verificar o valor da curvatura, torção e os vetores tangente, normal e binormal.

No Capítulo a seguir, apresentaremos a aplicação das situações-problemas discutidas na terceira fase da ED, a experimentação, assim, especificaremos os sujeitos da pesquisa e quais métodos foram usados para a coleta de dados.

7 UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS RELACIONADOS A CURVAS E SUPERFÍCIES EM UM CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO

A seguir, desenvolveremos a aplicação da pesquisa, ou seja, o momento em que as situações didáticas foram efetivadas com alunos de uma pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática - PGECM, ou seja, professores formados em Matemática e em processo de formação continuada. A aplicação sucedeu-se através da proposição de atividades que colocassem em prática a nossa metodologia de pesquisa e ensino no que concerne a transmissão de saberes da Geometria Diferencial, mais especificamente o ensino de curvas, com o intuito de analisar os dados obtidos com o objetivo de refutar nossas hipóteses de investigação.

Nesse sentido, na discussão das situações-problema, são consideradas algumas variáveis didáticas debatidas no capítulo anterior. Além disso, vale recordar que nas análises prévias da ED, o conceito matemático curva foi definido como campo epistêmico-matemático, assim, as situações-problema direcionam os alunos à compreensão dos conceitos fundamentais relacionados ao entendimento do conceito curva como: curvatura, torção, Triedro de Frenet e Teorema Fundamental das Curvas Planas.

Desta forma, inicialmente apresentamos a área matemática intitulada GD aos alunos, desde a sua gênese a aplicações no cotidiano, com o intuito de despertar o interesse dos mesmos pelo tema a ser investigado. Vale salientar, que os alunos que participaram da pesquisa, já possuíam conhecimentos de Geometria Analítica, Álgebra Linear e Cálculo de Várias Variáveis, desse modo, os estudantes compreendiam alguns conhecimentos necessários para o entendimento dessa área, como derivadas parciais, produto vetorial, com isso, as fases de validação, das questões que envolviam a discussão de teoremas e propriedades, foram caracterizadas pelo uso do método de derivabilidade de funções de várias variáveis do CVV.

7.1- Caracterização do *locus* de pesquisa

A experimentação aconteceu no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) no campus Fortaleza, com professores de Matemática que estão participando do programa de pós-graduação PGECM do IFCE, por meio de um minicurso intitulado “O Estudo de Curvas com a utilização do *software* Geogebra”, desse modo, tivemos oito alunos presentes nesse minicurso. Em relação aos participantes da pesquisa, é importante salientar que embora tratem-se de professores que lecionem à nível médio, e que estejam a um determinado tempo afastados dos conteúdos relativos a Matemática do ensino superior, no prelúdio do minicurso fora realizado uma explanação acerca dos conceitos necessários para a compreensão dos conceitos abordados no curso.

Além disso, a pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) (ver Anexo a), dessa forma, foi disponibilizado o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) assinado pelos alunos participantes (ver Anexo B). Assim, a aplicação aconteceu durante oito dias, em formas de aulas de uma hora e meia, realizadas como situações didáticas com enfoque na TSD.

As situações-problema foram propostas em formato de lista de exercícios sendo discutidos em grupo e as estratégias de soluções foram descritas no quadro e/ou papel. Nos três primeiros dias, foram apresentados os conceitos matemáticos que fundamentam a área GD e sua perspectiva histórica, evidenciando o seu viés epistemológico-matemático. Nos demais dias, a sistemática foi realizada da seguinte forma: em cada encontro, realizamos a discussão de uma situação-problema distinta, com a realização de alguns procedimentos de coleta de dados como: observações, registros fotográficos das produções escritas, gravações dos depoimentos dos alunos e questionários.

No próximo tópico, serão analisados os dados e resultados obtidos durante a aplicação da TSD, assim, serão apresentadas as descrições e observações mais relevantes para a validação da pesquisa.

7.2 Análise *a Posteriori* das Situações Didáticas

No primeiro dia do minicurso, foi realizado com os alunos uma revisão das noções de produto interno, produto vetorial e regras de derivação, sendo detectado algumas dificuldades em relação a derivação, no entanto, após essa breve revisão todos estavam aptos a participar do minicurso e prosseguir com os problemas propostos nas atividades.

A realização didática iniciou-se através da distribuição da lista com situações-problema aos alunos, orientando-os a interagir entre si para refletirem sobre quais elementos serão necessários para a resolução das situações-problema. E, assim, buscassem sistematizar uma estratégia de resolução e formulassem argumentos que possam ser validados posteriormente. Nesse momento, as discussões e construções feitas pelos alunos são coletadas por meio de gravações de áudios e registro de imagens de suas produções.

Desse modo, em relação a situação-problema (1), com o intuito de obter as fórmulas do Diedro de Frenet, o aluno A_1 assume uma curva plana ppca, nas fases de ação e formulação, elaborando a partir da norma unitária dos vetores tangente e normal, a derivação do produto interno de $\langle T, T \rangle$ e $\langle N, N \rangle$, buscando demonstrar a relação $\begin{cases} T' = k \cdot N \\ N' = -k \cdot T \end{cases}$, como pode-se observar na Figura 81.

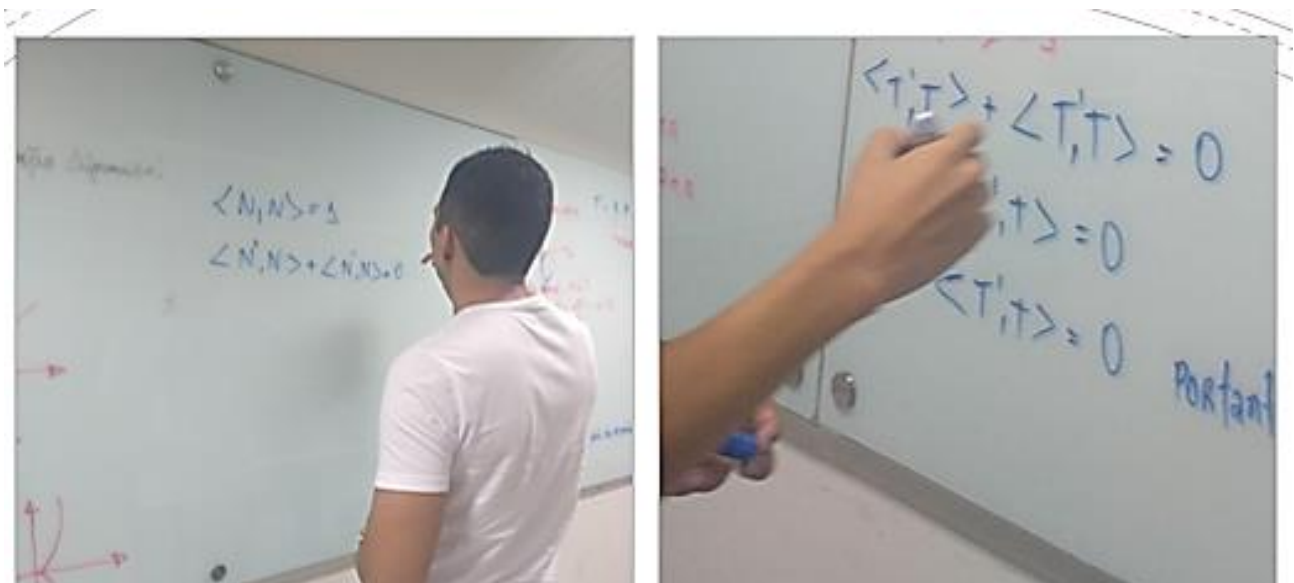


Figura 81 – Aluno A_1 nas fases de ação e formulação em relação a situação-problema (1)

Fonte: Dados da pesquisa

Com o objetivo de validar seus argumentos, o aluno A₁, conclui que T' é ortogonal a T e que N' é ortogonal a N e assim infere que por se tratar de uma curva plana (em $\mathbb{R}^2$), os vetores N' e T encontram-se na mesma direção, podendo diferir por uma constante, retratada pela curvatura. De modo análogo, como podemos contemplar na Figura 82, o aluno A₁, estabelece que T' e N também encontram-se na mesma direção, constatando assim a outra fórmula do Diedro de Frenet.

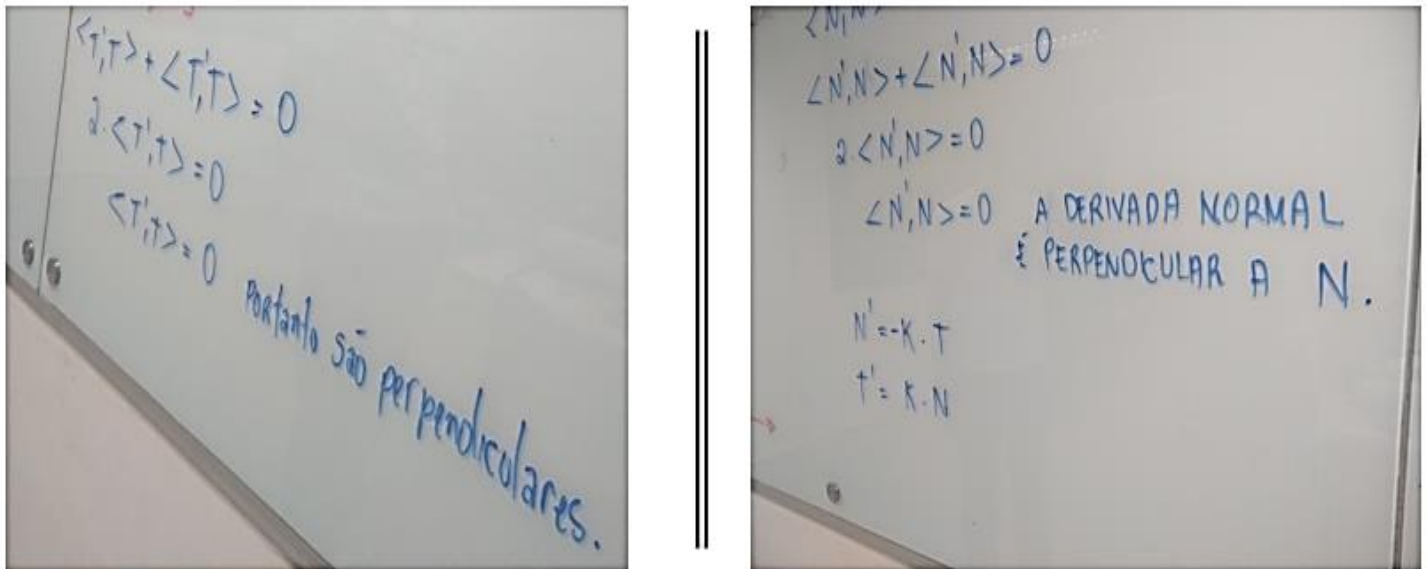


Figura 82 - Momento de validação em relação a situação-problema (1)
Fonte: Dados da pesquisa

Em relação a definição do conceito curvatura, o aluno A₂ parte da definição de curvatura de curvas ppca, por meio do produto interno $k(s) = \langle T', N \rangle$, para explicitar através da fórmula $k(t) = -x(t)''y(t)' + y(t)''x(t)'$ uma expressão para esse conceito matemático envolvendo as coordenadas de uma curva no plano, formulando assim seu significado algébrico, como se pode observar na figura 83.

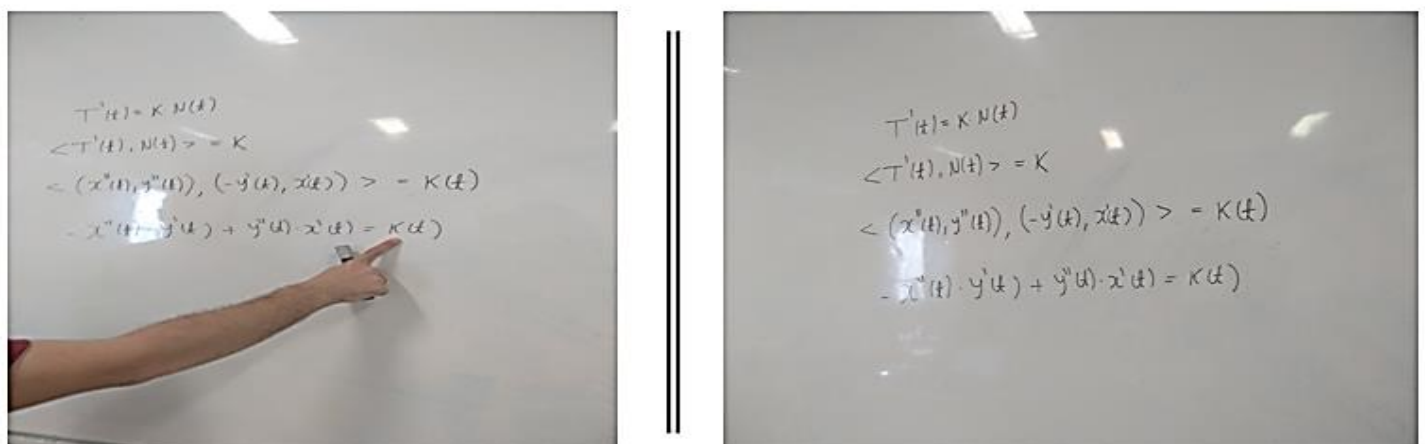


Figura 83 – Elucidação algébrica do aluno A₂ do conceito curvatura
Fonte: Dados da pesquisa

A seguir, na Figura 84, temos outras concepções que os outros participantes propuseram acerca do significado do conceito curvatura. Note que para alguns alunos o significado geométrico do conceito curvatura está intimamente relacionado a curvatura de uma reta (nesse objeto geométrico a curvatura é nula).

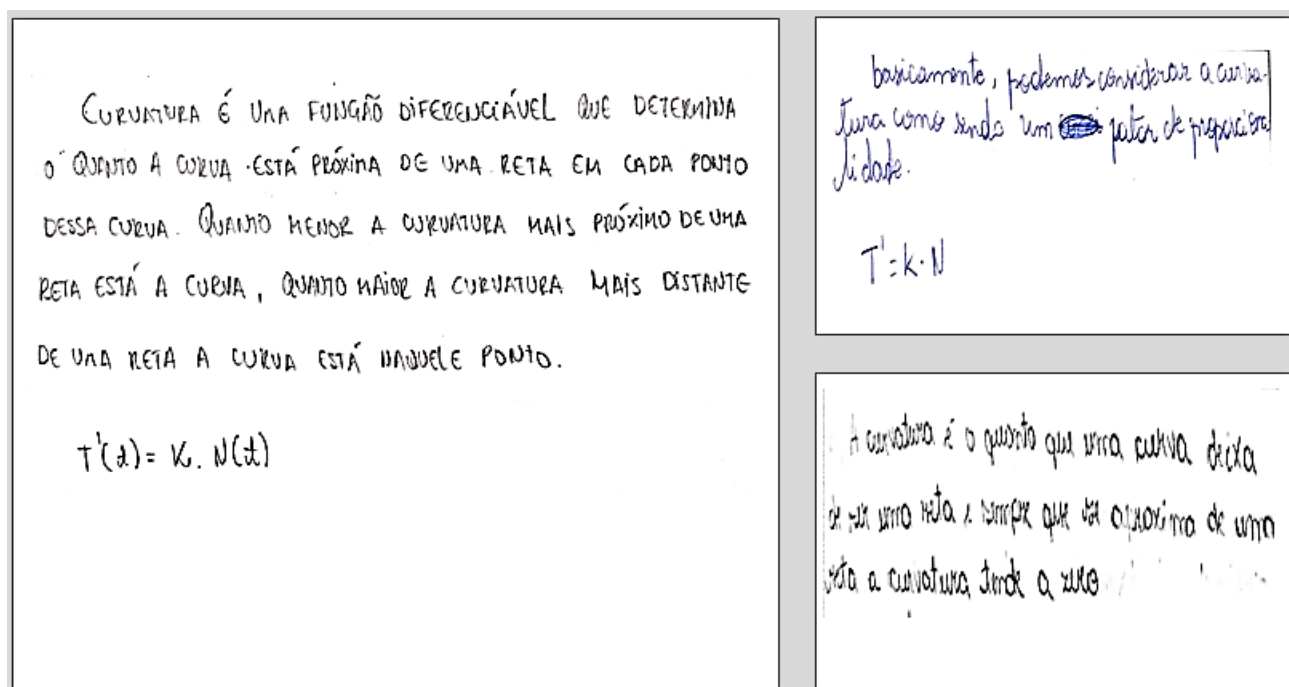


Figura 84 – Entendimento dos participantes dos alunos acerca do conceito curvatura; à direita Aluno A6, à esquerda (superior) Aluno A3, à esquerda inferior Aluno A7
Fonte : Dados da pesquisa

Em relação a última fase da TSD, a institucionalização, que ocorre com “a mediação do professor, que deve deixar explícita sua intenção, ao conferir as propriedades construídas, a fim de identificar, sistematizar e reconhecer o saber construído por meio da formalização e generalização”(OLIVEIRA, 2018, p.171). Assim ao retomarmos a posse do problema, verificamos que as fórmulas desenvolvidas representam o Diedro de Frenet, e as noções intuitivas do conceito curvatura representam, de fato, o conceito matemático.

Na situação-problema (2), a aluna A3, inicia as fases de ação e formulação, analisando a natureza da primeira curva (circunferência), para posteriormente calcular a curvatura, nessa fase a aluna constata que não se trata de uma curva ppca, dado que a $|y(t)'| = r$, tais fases estão explicitadas na Figura 85.

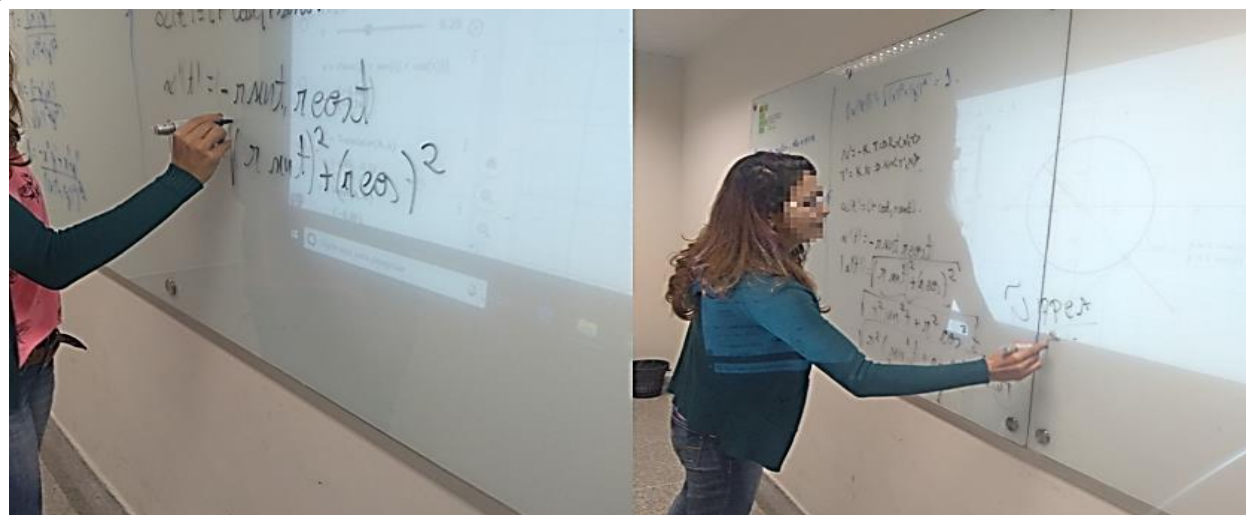


Figura 85 -Aluna A3 nas fases de ação e formulação na situação problema (2)
Fonte : Dados da pesquisa

Enquanto que o aluno A₂ resolve iniciar a formulação do problema por um caso particular, quando o raio da circunferência possui valor unitário, tornando a assim a curva ppca e determinando que nesse caso, a curvatura também possui valor unitário.

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$T(t) = (-\sin t, \cos t), \quad N(t) = (-\cos t, -\sin t)$$

$$T'(t) = (-\cos t, -\sin t)$$

Figura 86 – Elaboração de um caso particular da situação problema(2) por parte do aluno A₂
Fonte: Dados da pesquisa

Nesse instante, a aluna A₃ elabora a hipótese que “na circunferência a curvatura é o valor do raio”. No entanto, não ocorre a veracidade de tal hipótese, quando a aluna A₄ (Figura 87, à direita), continua a formulação, calculando pela definição os vetores tangente e normal, para que a partir da relação entre eles, possa deduzir o valor da curvatura. Assim, inicialmente a aluna, deduz que o vetor tangente unitário é dado por $T(t) = (-\sin(t), \cos(t))$, com sua respectiva derivada $T' = (-\cos t, -\sin t)$ enquanto que o vetor normal unitário é dado por $N(t) = (\frac{-\cos t}{r}, \frac{-\sin t}{r})$, inferindo pelas relações provenientes do Diedro de Frenet que a curvatura $k(t) = \frac{1}{r}$.

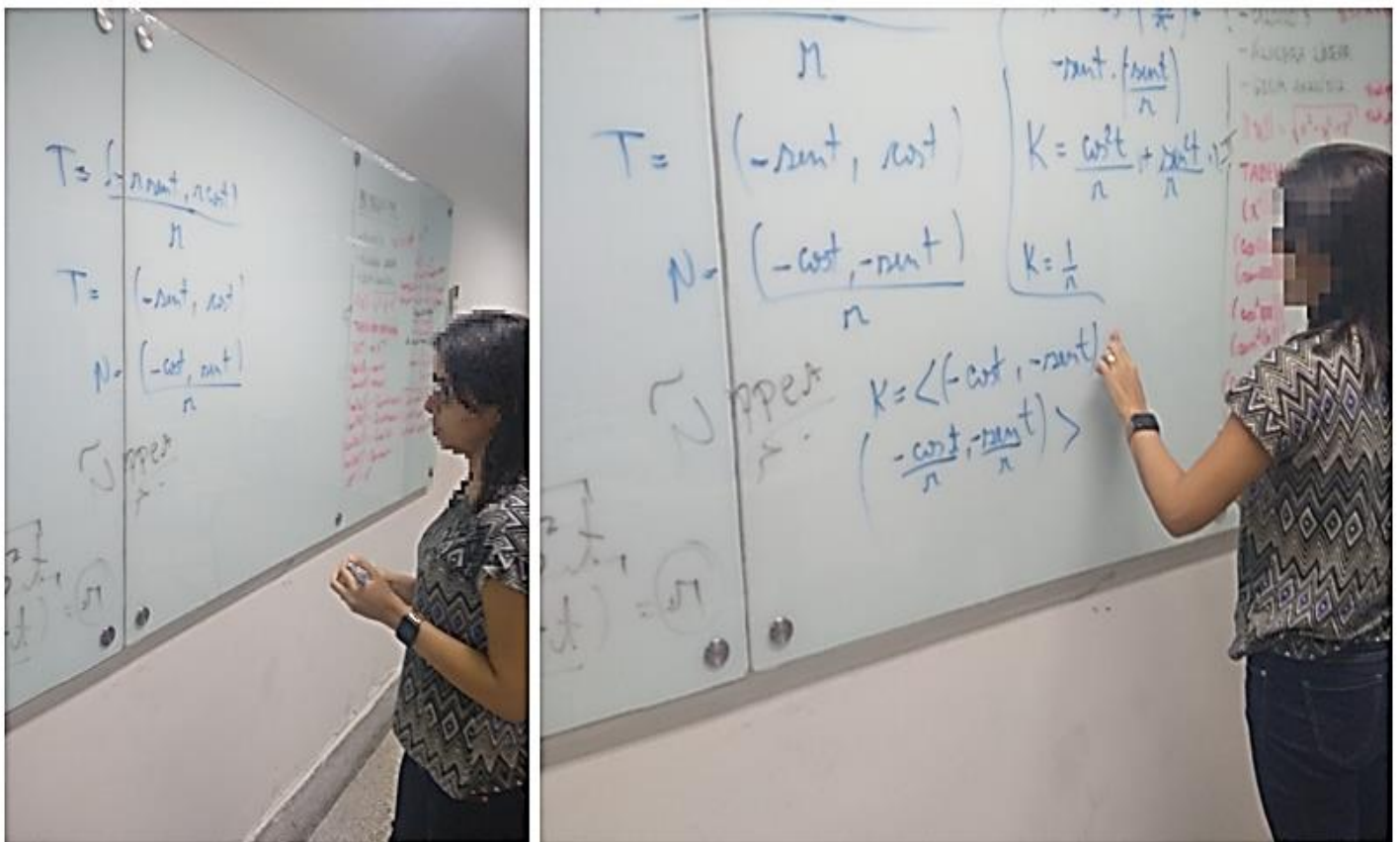


Figura 87- Aluna A₄ nas fases de ação e formulação (à direita) da situação-problema(2); Aluna A₄ nas fases de validação (à esquerda) da situação-problema(2);
Fonte : Dados da pesquisa

Com o intuito de validar a resposta, a aluna A₄ (Figura 87, à esquerda) apresenta por meio do produto interno $\langle T(t)', N(t) \rangle$ o valor da curvatura, encontrando novamente $k(t) = \frac{1}{r}$. Nesse momento, a aluna A₃ argumenta:

Aluno A₃ : [...]Em um circunferência, como a curvatura só depende do raio, a curvatura é constante ao longo da curva, não alterando o valor nem o sinal. E quanto maior o raio, menor a curvatura [...]

Assim, inferimos que o momento de formulação apresentado na situação problema (2), exibida nas Figuras 86 e 87, possibilitou inicialmente a compreensão da gênese das relações do Diedro de Frenet e do conceito curvatura, e posteriormente, a sua aplicação em curvas ppca, com o intuito de aplicar o conceito curvatura em curvas independente de sua natureza, propomos nessa situação problema, outras curvas não ppca.

Destarte, em relação a segunda curva dada explicitada nessa situação problema, cuja a representação é dada por $\alpha(t) = (t, t^4)$, temos inicialmente nas fases de ação e formulação, a aluna A₅ analisando a natureza da curva, para posteriormente, na validação, empregar a expressão do cálculo de curvatura em curvas não ppca $k(t) = \frac{-x''y' + x'y''}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}$ apresentado em TENEBLAT (2008,p.46).

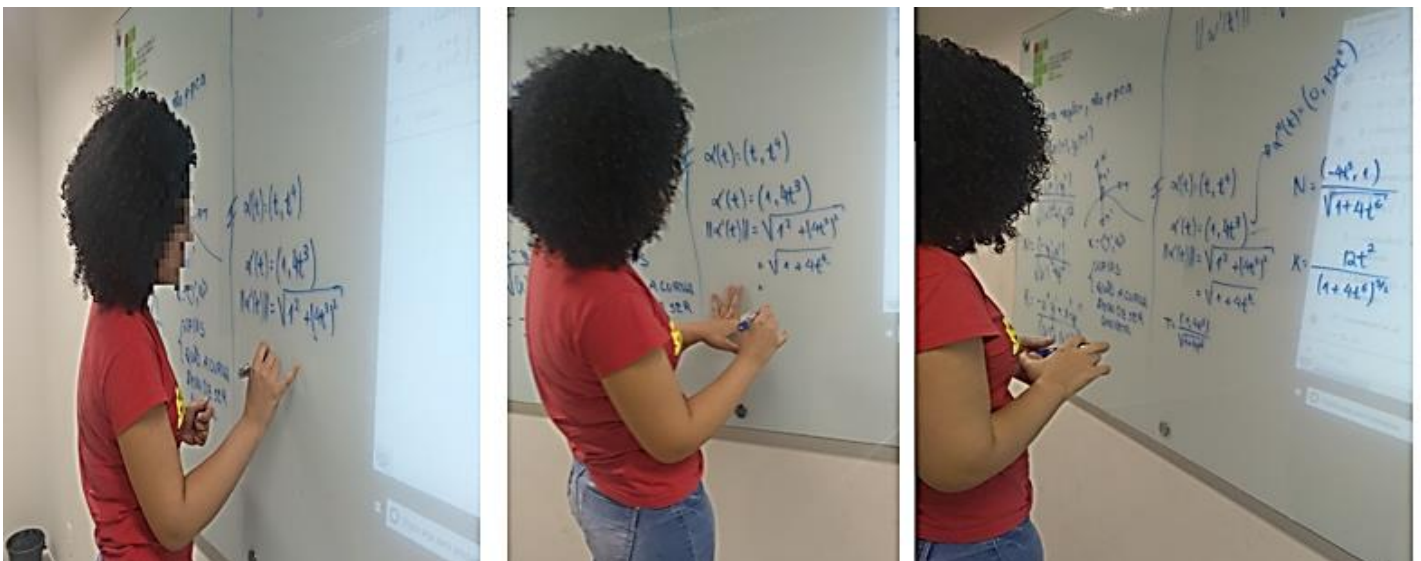


Figura 88 – Visualização das fases de ação, formulação e validação da Aluna A₅ na segunda curva da situação problema (2)
Fonte : Dados da pesquisa

De modo análogo, podemos verificar na Figura 89, a validação da aluna A₄ , que deduziu por meio do produto interno da derivada do vetor tangente unitário e o vetor normal unitário, o valor da

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \alpha(t) &= (t, t^4), \quad t \in \mathbb{R} \\
 \alpha'(t) &= (1, 4t^3) \quad ; \quad \alpha''(t) = (0, 12t^2) \\
 \|\alpha'(t)\| &= \sqrt{1^2 + (4t^3)^2} = \sqrt{1 + 16t^6} \\
 T &= \frac{(1, 4t^3)}{\sqrt{1 + 16t^6}} \quad ; \quad N = \frac{(-4t^3, 1)}{\sqrt{1 + 16t^6}} \quad ; \quad K = \frac{12t^2}{(1 + 16t^6)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

Figura 89 – Validação da aluna A₄ segunda curva apresentada na situação problema(2);
Fonte : Dados da pesquisa

Em relação a última curva, determinada pela expressão $\alpha(t) = (\cos(t)(2\cos(t) - 1), \sin(t)(2\cos(t) - 1)), t \in \mathbb{R}$ que descreve uma cardioide, evidenciamos que apesar da aluna A6 não apresentar dificuldades nas fases de ação e formulação, pois sabia que se tratava de uma curva não ppca e conhecia a sistematização que deveria utilizar para encontrar a expressão que determinaria o valor da curvatura em um ponto, a participante apresentou dificuldades, na validação, para a execução da derivada primeira e segunda de uma função trigonométrica, sendo necessário a intervenção de outros alunos, para a cálculo da curvatura.

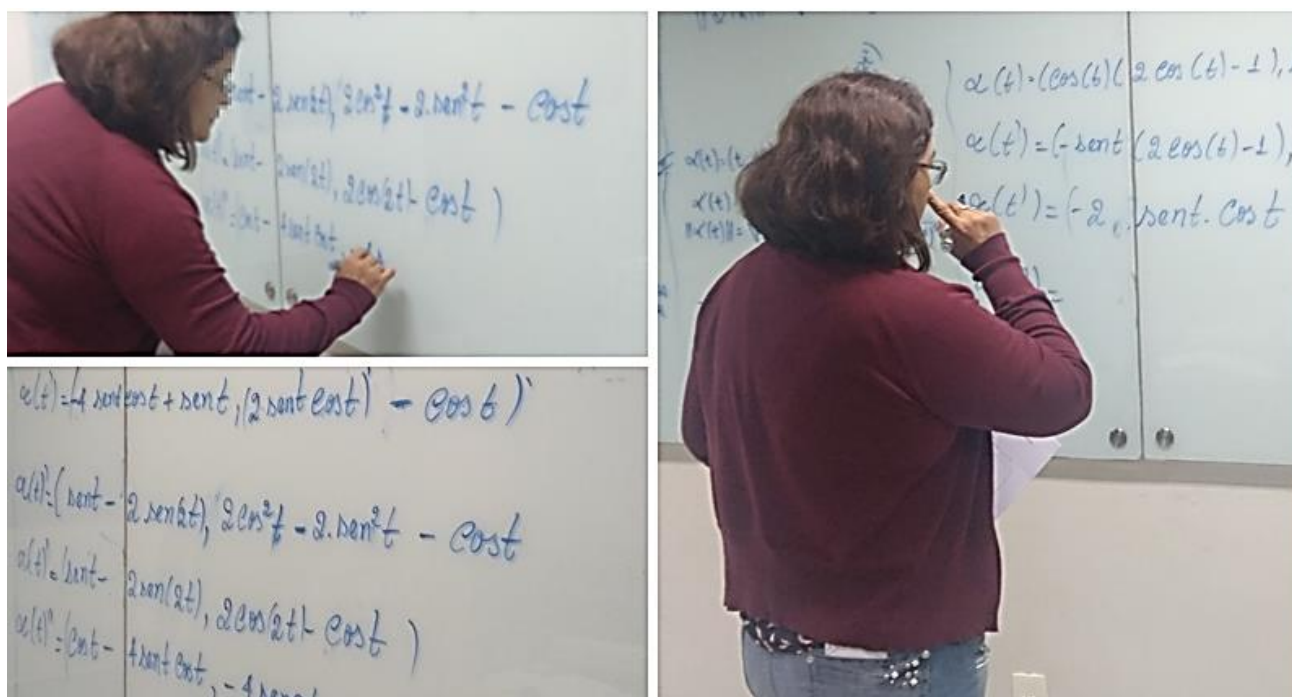


Figura 90 – Representação das fases de ação e formulação da Aluna A6 em relação a terceira curva da situação problema (2) ;
Fonte: Dados da pesquisa

Em contrapartida, na Figura 91, apresentamos o desenvolvimento da validação da aluna A5, que constatou a expressão de curvatura da cardioide, e ainda, no decorrer da vivência didática compartilhou seus resultados com colegas e os ajudou nas reflexões coletivas.

The figure shows a whiteboard with handwritten mathematical work by student A5. The work is as follows:

$$(ii) \alpha(t) = (\cos(t)(2\cos(t) - 1), \sin(t)(2\cos(t) - 1)), t \in \mathbb{R}$$

$$\alpha'(t) = (-4\sin t \cos t + \cos t, (2\sin t \cos t) - \cos t)$$

$$= (\cos t - 2\sin(2t), 2\cos^2 t - 2\sin^2 t - \cos t)$$

$$= (\cos t - 2\sin(2t), 2\cos(2t) - \cos t)$$

$$\alpha''(t) = (\cos t - 4\sin t \cos t, -4\sin(2t) + \sin t)$$

$$k = \frac{(\cos t - 4\sin t \cos t)(2\cos(2t) - \cos t) + (\sin t - \sin(2t))(-4\sin(2t) + \sin t)}{([\cos t - 2\sin(2t)]^2 + [2\cos(2t) - \cos t]^2)^{3/2}}$$

Figura 91 – Cálculo da curvatura da cardioide pela aluna A5
Fonte : Dados da pesquisa

Desta forma, por meio dessas situações problema buscamos consolidar o significado algébrico dos conceitos (vetor tangente, vetor normal e curvatura), para posteriormente, no Geogebra os participantes pudessem estabelecer uma relação entre significado e o respectivos significados geométricos. Por essa razão, no segundo momento dessa situação problema, indagamos ao aluno a interpretação geométrica dos conceitos trabalhados no *software* Geogebra, reutilizando circunferência e cardióide para a análise desses conceitos.

Em relação a circunferência, evidenciamos, que apesar de alguns alunos não apresentarem dificuldades para calcular os vetores tangente e normal, e a expressão da curvatura, esses alunos definem de forma errônea os conceitos nas curvas apresentadas, dado que o vetor tangente é o vetor diretor da reta tangente, que têm apenas um ponto de interseção com a curva.

Na Figura 92, assistimos os dados obtidos após as fases de ação e formulação, e observamos que se construíssemos retas pelos vetores definidos como tangente pelos alunos A₁ e A₃, teríamos retas secantes, logo tais vetores não podem ser os vetores tangentes. Ainda explicitamos que o vetor normal (definido como perpendicular ao tangente) também foi definido de forma errônea, tal fato sucede devido a determinação errada do vetor tangente.

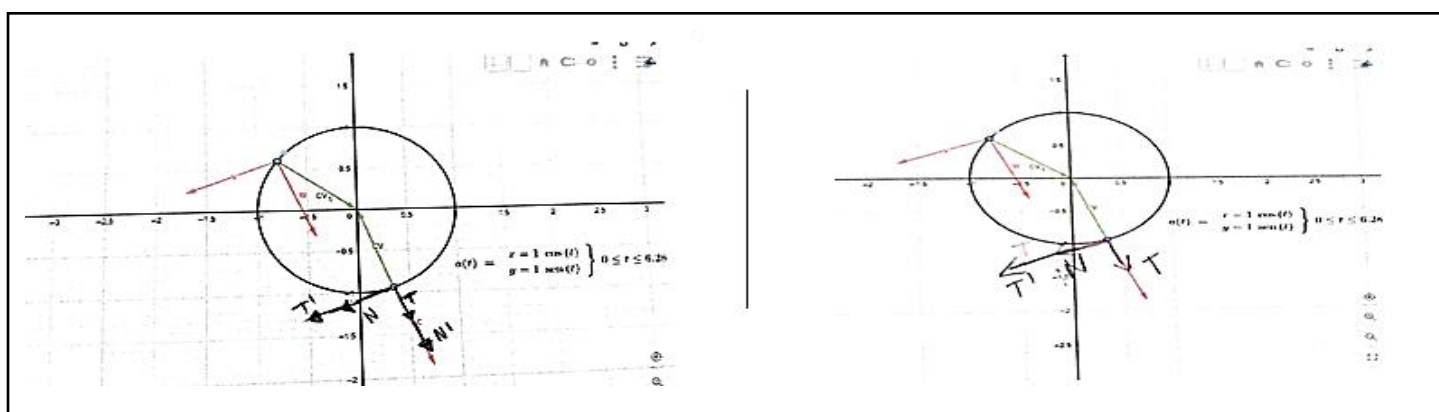


Figura 92 – Resultados referentes a determinação dos vetores pertencentes ao Diedro de Frenet na circunferência; à direita aluno A₁ e à esquerda Aluno A₃
Fonte : Dados da pesquisa

Em relação a cardióide, Figura 93, novamente constatamos os mesmos erros dos alunos para definição dos vetores tangente e normal. Assim, verificamos que apesar dos participantes serem capazes de obter os vetores, curvatura pertencente a essa curva, as definições geométricas relacionadas a esses conceitos não se encontravam consolidadas.

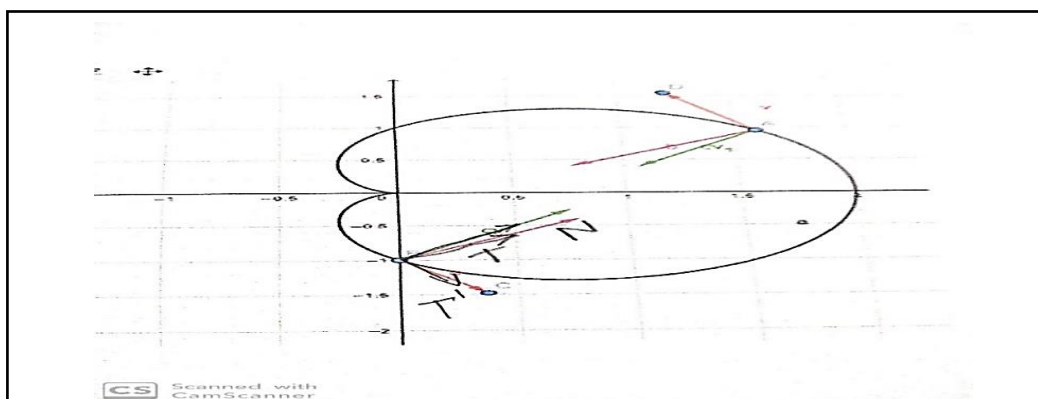


Figura 93 - Representação dos vetores pertencentes ao Diedro de Frenet na cardióide pelo Aluno A₃
Fonte : Dados da pesquisa

Em compensação, no que concerne as características analíticas dessas duas curvas, consegue-se observar na Figura 94, por meio da explicação das alunas A₅, argumentações bem fundamentadas acerca do comportamento da função curvatura. Manifestando assim indícios que os alunos não compreendem absolutamente os conceitos geométricos, apenas entendem o algoritmo algébrico necessário para determiná-los.

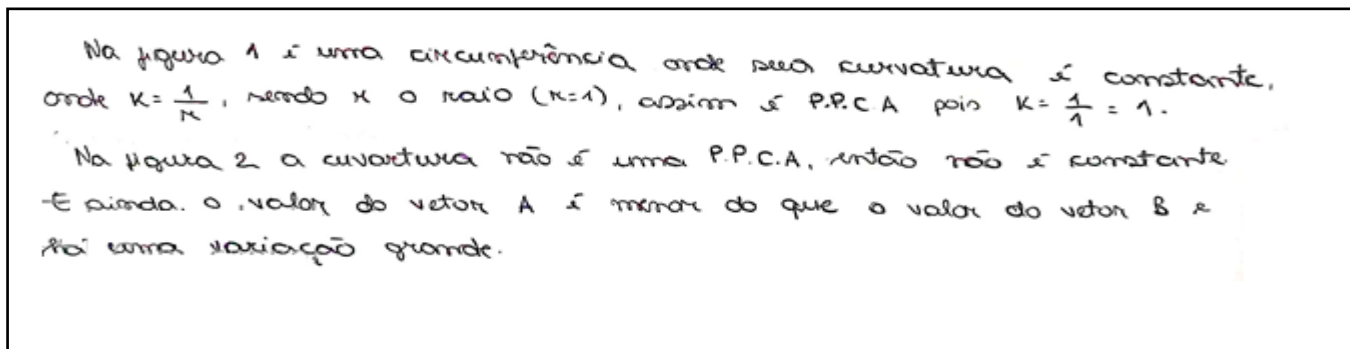


Figura 94– Explicação do comportamento curvatura na circunferência e na cardioide pela Aluna A₅
Fonte : Dados da pesquisa

Por fim, em relação a Figura (3) da situação problema (2), as fases de ação e formulação foi realizada pelos alunos, em relação a análise do conceito curvatura, através de uma comparação entre os dois pontos representados na curva, verificando por meio da dimensão do vetor curvatura, a respectiva variação dos valores nos pontos A e B. Com intuito de elucidar tal acontecimento, observe na Figura 95, a concepção do aluno A₅, que retoma o significado geométrico de curvatura, comparando que ponto B em diante, a curva se assíntota, portanto tende a assumir o comportamento de uma reta, o que faz com que a curvatura a partir desse ponto aproxime-se do valor nulo.

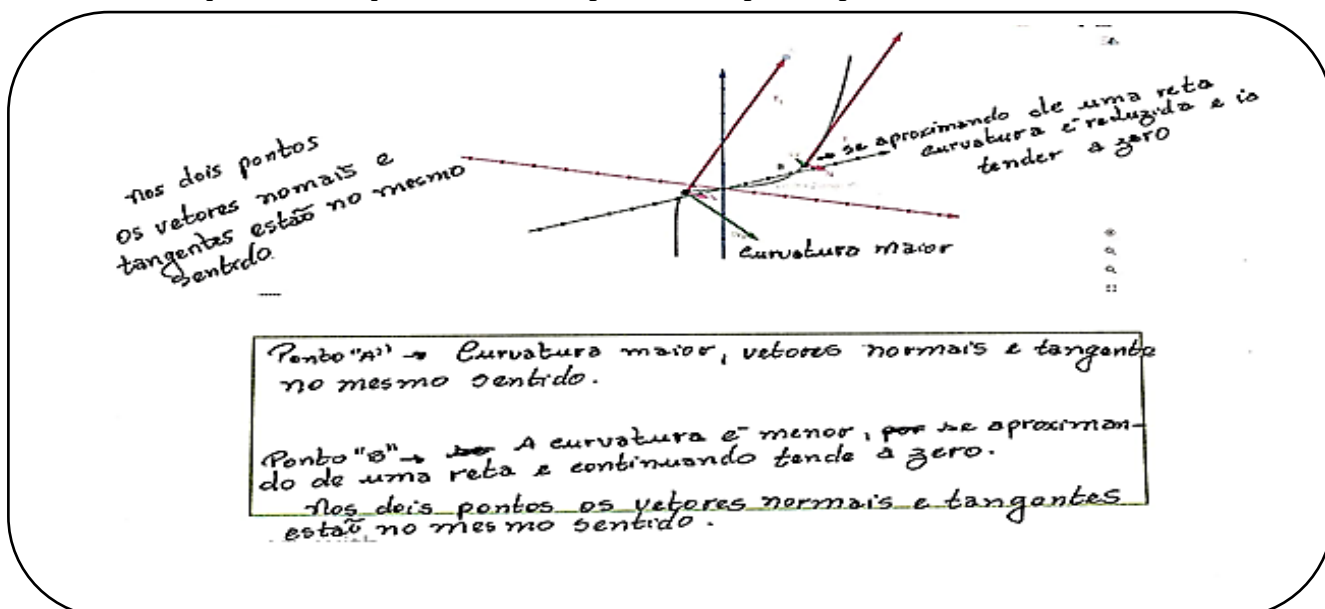


Figura 95 – Comparação da curvatura nos pontos ilustrados na figura (3) da situação problema(2) elaborado pelo Aluno A₅
Fonte : Dados da pesquisa

Note que apesar do aluno A₆ afirmar que os vetores tangente e normal estão na mesma direção, trata-se de erro notacional, pois durante a institucionalização, tal aluno esclarece ainda que “nesses pontos, por a curvatura ser sempre positiva e $T' = k \cdot N$, a derivada do vetor tangente e o vetor normal estão na mesma direção e sentido”. A seguir, apresentamos formulações análogas realizadas pelos

demais participantes, como se pode verificar na Figura 96.

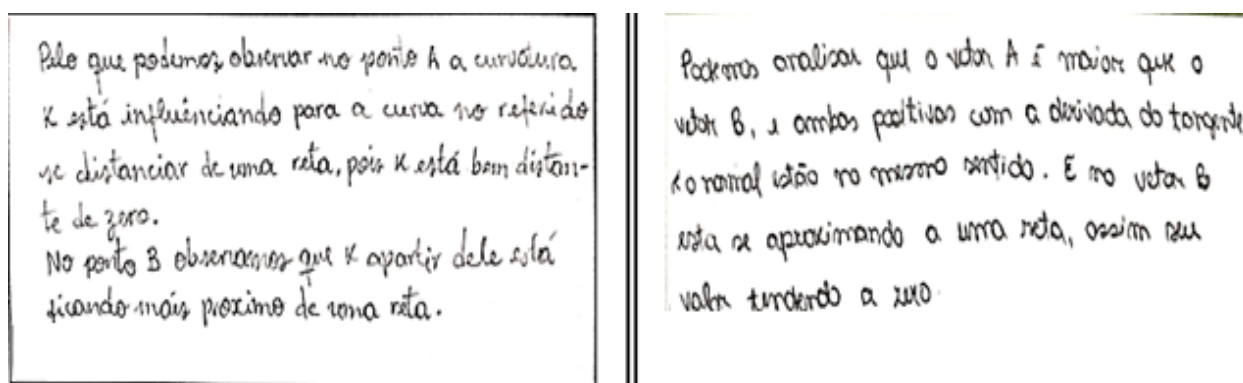


Figura 96 -Análises realizadas pelos alunos A5 (à direita) e A7 (à esquerda) da figura 3 da situação problema (2) ;
Fonte : Dados da pesquisa

Na situação-problema (3), nas fases de ação e formulação, os alunos A4 e A8 elaboraram concepções acerca do TCP, realizando uma transposição acerca do um significado complexo matemático para um entendimento intuitivo geométrico do teorema, como evidenciado na figura 97.

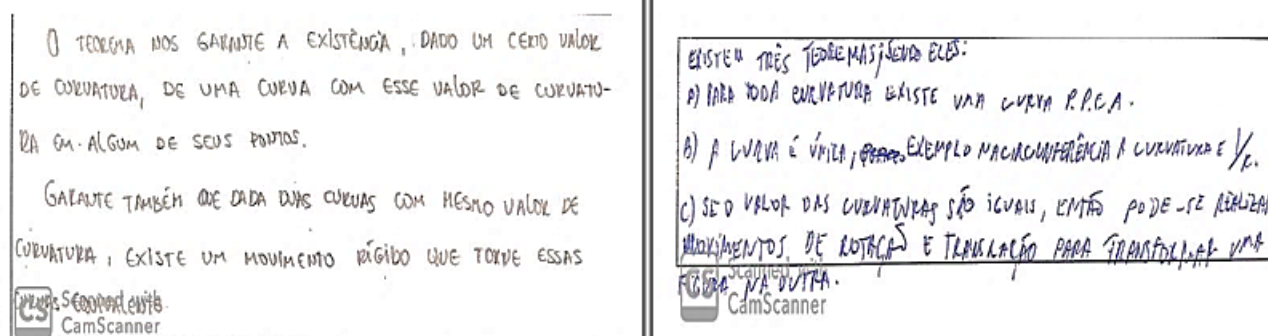


Figura 97 – Perspectivas dos alunos acerca do TCP, à direita Aluno A4 e à esquerda Aluno A8
Fonte : Dados da pesquisa

Note que o entendimento do aluno A1 acerca desse teorema envolve a existência e igualdade de curvas, enquanto que o aluno A5 acrescenta outro importante aspecto associado ao TCP, no que diz respeito a unicidade da curva, apontando como exemplificação a circunferência. Esses mesmos aspectos, foram evidenciados por outros alunos, como apresentado a diante na Figura 98.

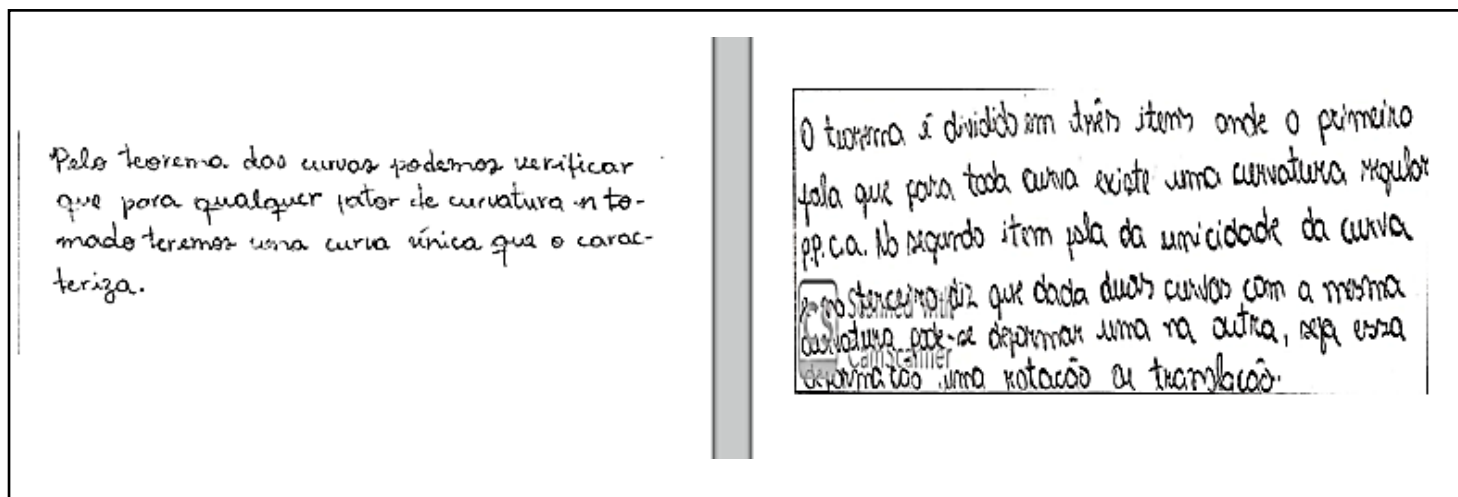


Figura 98 – Formulação do TCP dos alunos A4 (à direita) e A7 (à esquerda)
Fonte: Dados da pesquisa

A aluna A₃, ainda especifica na Figura 99 como tais movimentos de equivalência entre curvas, poderiam ocorrer, sem alteração de tamanho e forma da curva, que seria exatamente a definição de movimento rígido.

Se duas curvas possuem mesma curvatura
uma pode ser transformada na outra
através de uma rotação ou translação

Figura 99 – Manifestação da Aluna A₃ do modo em que ocorre a equivalência entre as curvas

Fonte : Dados da pesquisa

No que concerne, o primeiro par de curvas, o aluno A₁ formulou que se tratava de duas circunferências, assim na fase de ação, o aluno buscou as equações gerais da circunferência, para encontrar as respectivas curvaturas dessas circunferências. Encontrando assim, as seguintes equações gerais $c: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ e $d: (x - 12)^2 + (y - 3)^2 = 4$, concluindo portanto, que as circunferências apresentavam a mesma curvatura, dado que a curvatura da circunferência é $\frac{1}{r}$, e as circunferências possuem o mesmo raio.

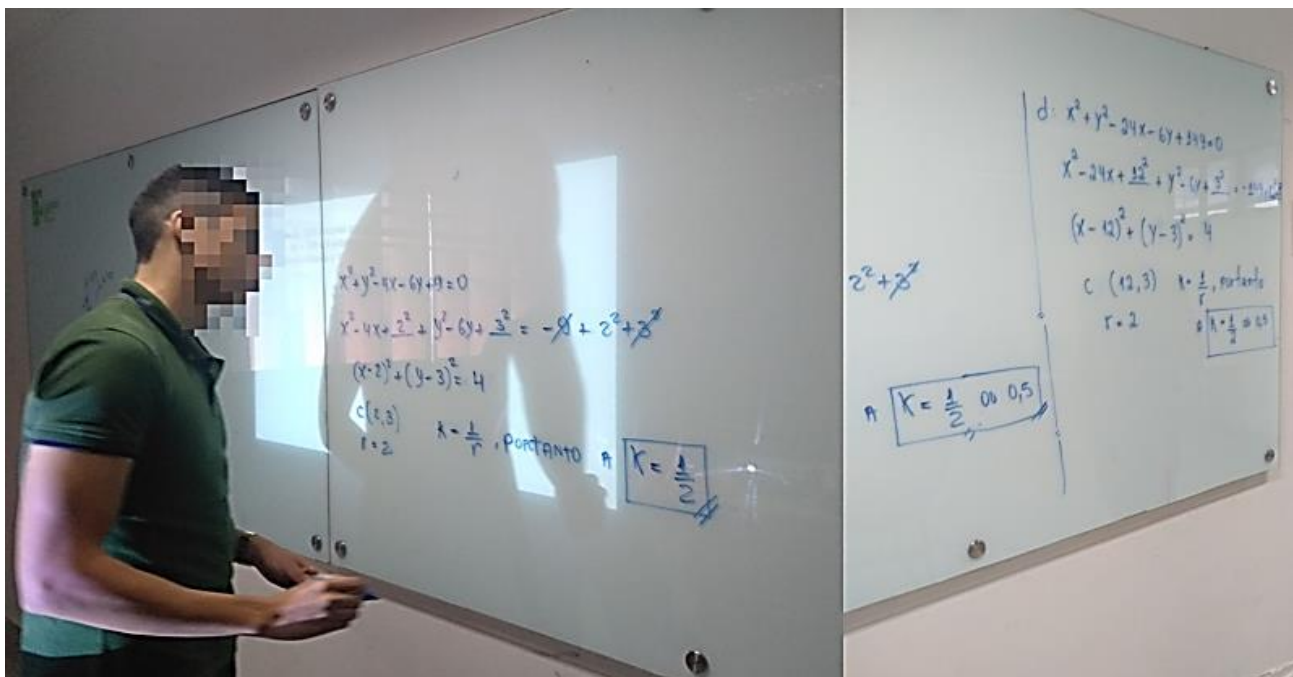


Figura 100 - Ação e formulação do Aluno A₁ no tocante ao primeiro par de curvas da situação-problema (3)

Fonte : Dados da pesquisa

Com o intuito de validar seus argumentos, podemos contemplar na Figura 100 que o aluno A₁ calculou a curvatura das duas circunferência e argumentou que na circunferência o valor da curvatura não apresenta variação, além disso, o aluno mostrou por meio da representação dessas curvas no *software* Geogebra, Figura 101, os possíveis movimentos rígidos que tornam essas curvas equivalentes.

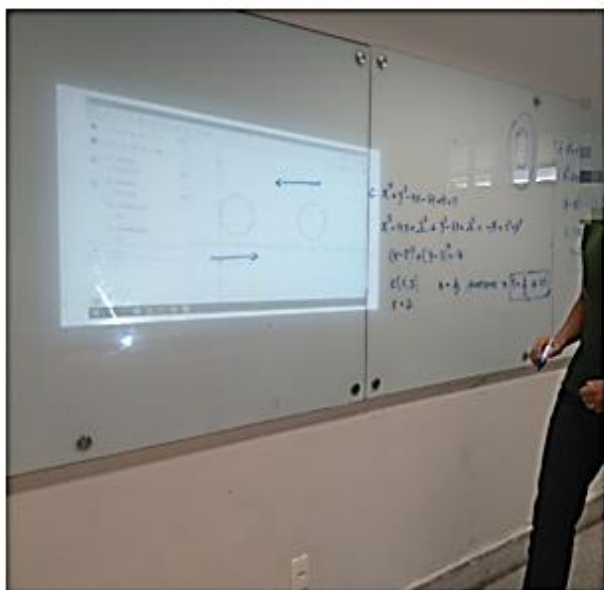


Figura 101 – Representação da fase de validação do aluno A₁ no que concerne ao primeiro par de curvas na situação-problema (3)
Fonte : Dados da pesquisa

Em relação, ao segundo par de curvas, que tratavam-se de duas parábolas, os alunos evidenciaram por meio do *software* Geogebra, Figura 102, as fases de ação e formulação, que embora essas curvas apresentem-se variações de curvatura, nos pontos análogos tínhamos os mesmos valores de curvatura.

Pelo terceiro item do Teorema Fundamental das curvas planas, temos que se duas curvas tem a mesma curvatura pode-se deformar uma na outra como visto na imagem $K_1 : K_2 = 0,02$. Assim, rotacionando a parábola $g(x)$ e fazendo a translação da mesma pode-se torná-la igual a parábola $f(x)$.	
Pode-se fazer o movimento de rotação e translação para elas ficarem iguais As duas curvas K_1 e K_2 possuem movimentos rígidos, pois são iguais	Como o valor das curvaturas calculadas pelo software são aproximadamente iguais, pode-se realizar um movimento de rotação ou translação, pois de acordo com a figura é possível realizar a rotação de uma das figuras para "transformá-la" na outra figura (parábola), uma translação para "transformá-la" foi completo.

Figura 102-Fases de ação e formulação referente a segunda curva da situação-problema(3) do Aluno A₅ (imagem superior), Aluno A₃ (imagem inferior à esquerda) e do Aluno A₁ (imagem inferior à direita)

Fonte : Dados da pesquisa

Aos alunos A₂ e A₃, apresentaram como forma de validar as suas formulações acerca equivalência dessas curvas, os movimentos rígidos que as tornariam congruentes.

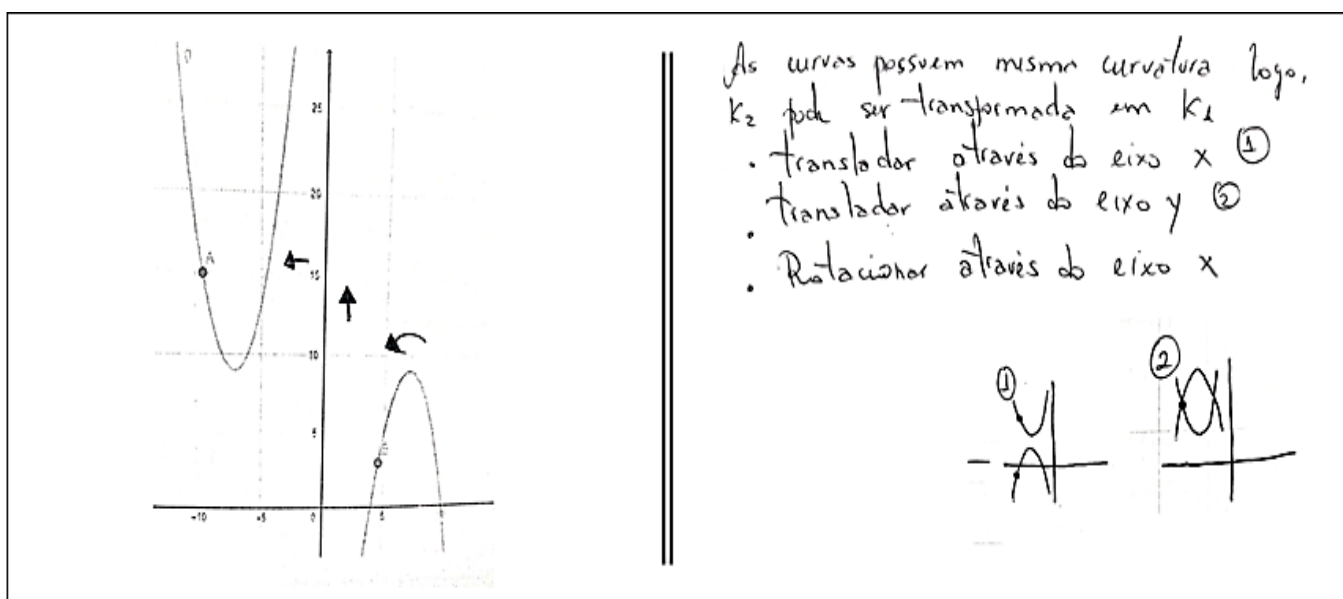


Figura 103 – Validação dos Alunos A₂ (à direita) e A₃ (à esquerda), por meio da ilustração do movimento rígido que torna as duas parábolas equivalentes
Fonte : Dados da pesquisa

Ainda em relação as parábolas, questionamos aos alunos se mudássemos um dos parâmetros das curvas, se esse par de curvas continuariam equivalentes. A Aluna A₃, observou que quando expandimos a curva ou a transladamos (esquerda ou direita), alteramos a curvatura, nesse caso, alterando os valores das constantes a e b na expressão da parábola, no entanto, quando transladamos a parábola para cima ou para baixo, ou seja, alteramos o valor da constante independente c , em nada se altera o valor da curvatura.

Desse modo, a Aluna A₃ elaborou a seguinte conjectura que “se modificássemos apenas o parâmetro c , ainda teríamos a equivalência entre essas curvas, no entanto, se alterássemos os valores dos parâmetros a ou b modificaríamos os valores da curvatura nos pontos, e assim as curvas não apresentariam o mesmo valor de curvatura nos pontos equivalentes”.



Figura 104- Ação gestual da aluna A₃, durante a formulação, com o intuito de explicar a hipótese elaborada da independência da curvatura da parábola em relação a variável c

Fonte : Dados da pesquisa

Com o intuito de investigar a razão de tal acontecimento, a aluna A₅, analisou o comportamento da curvatura em uma parábola generalizada, como se pode observar na Figura 105, encontrando que a curvatura dependia apenas dos parâmetros a e b , independentemente do valor da variável c , validando assim, a formulação da aluna A₃.

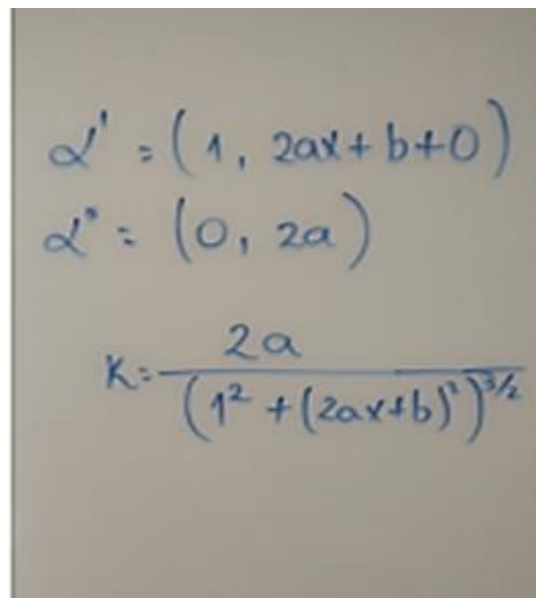
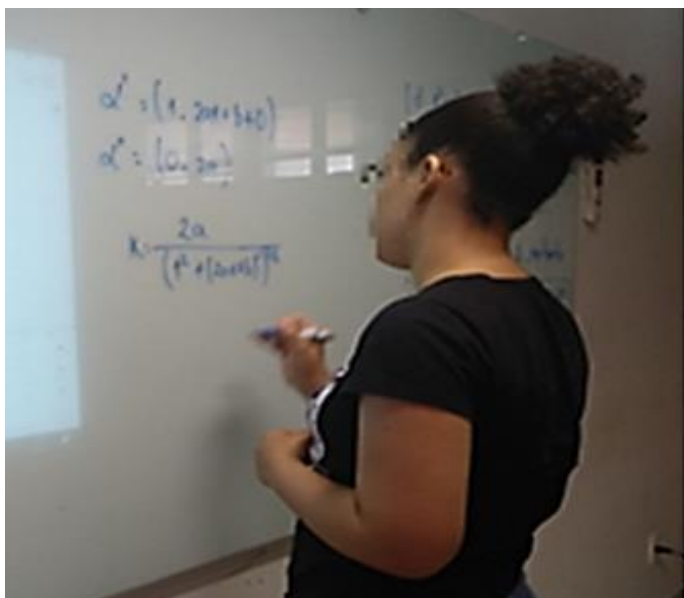


Figura 105 – Explicação algébrica do conceito curvatura em parábolas, de modo a validar, a não dependência do valor da curvatura em relação a variável independente, elaborado pela Aluna A5

Fonte : Dados da pesquisa

Finalmente, no que concerne ao último par de curvas, nas fases de ação e formulação, os alunos analisaram por meio do cálculo da curvatura no *software* Geogebra, que nos pontos análogos a circunferência e a elipse apresentavam valores diferentes de curvatura, e portanto, não existia um movimento rígido que tornassem as curvas análogas.

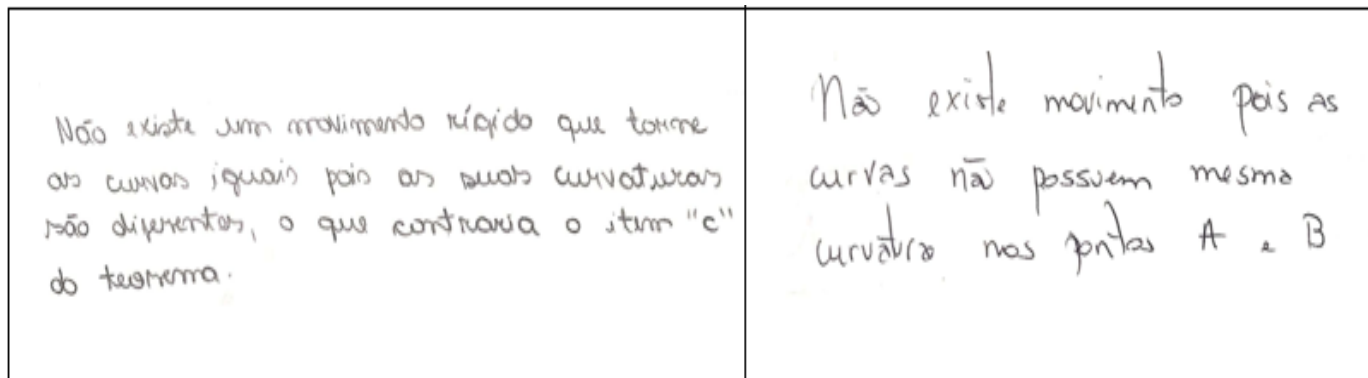


Figura 106 – Argumentação do Aluno A4 (figura à esquerda) e Aluno A6 (figura à direita) nas fases de ação e formulação do terceiro par de curvas da situação problema (3)

Fonte: Dados da pesquisa

Apesar do aluno A7, não conseguir formular uma explicação fundamentada matematicamente da impossibilidade de existência do movimento rígido de equivalência entre essas curvas, tal participante tentou validar seu argumento, ilustrando na Figura 107, de modo intuitivo, tal impossibilidade. Além disso o aluno A7 ainda salientou que “o único movimento que tornaria as curvas equivalentes, seria se pudéssemos deformar uma na outra”, o que contraria o TCP.

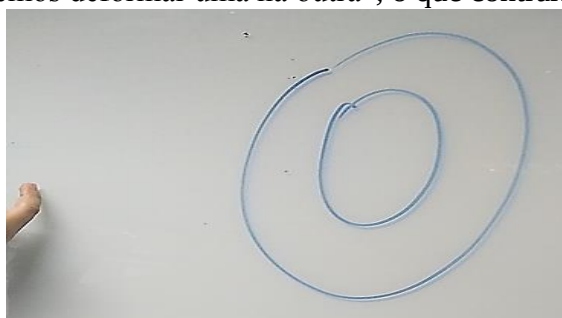


Figura 107 – Explicação ilustrativa do aluno A7 de que a elipse e a circunferência não são equivalentes pelo TCP

Fonte: Dados da pesquisa

No tocante, a situação-problema (4), a aluna A₄ inicia as fases de ação e formulação, por meio da derivação do vetor binormal $B = T \times N$ em uma curva ppca, concluindo que a derivada de tal vetor é ortogonal ao vetor tangente. Em seguida, a aluna prossegue tais fases, dispondo do fato da curva ser ppca e portanto o módulo do vetor binormal ser unitário, $|B| = 1$, para reescrevê-lo na forma de produto interno e executar sistemática similar a adotada em $\mathbb{R}^2$ para encontrar a curvatura, com o objetivo de definir a função torsão (τ).

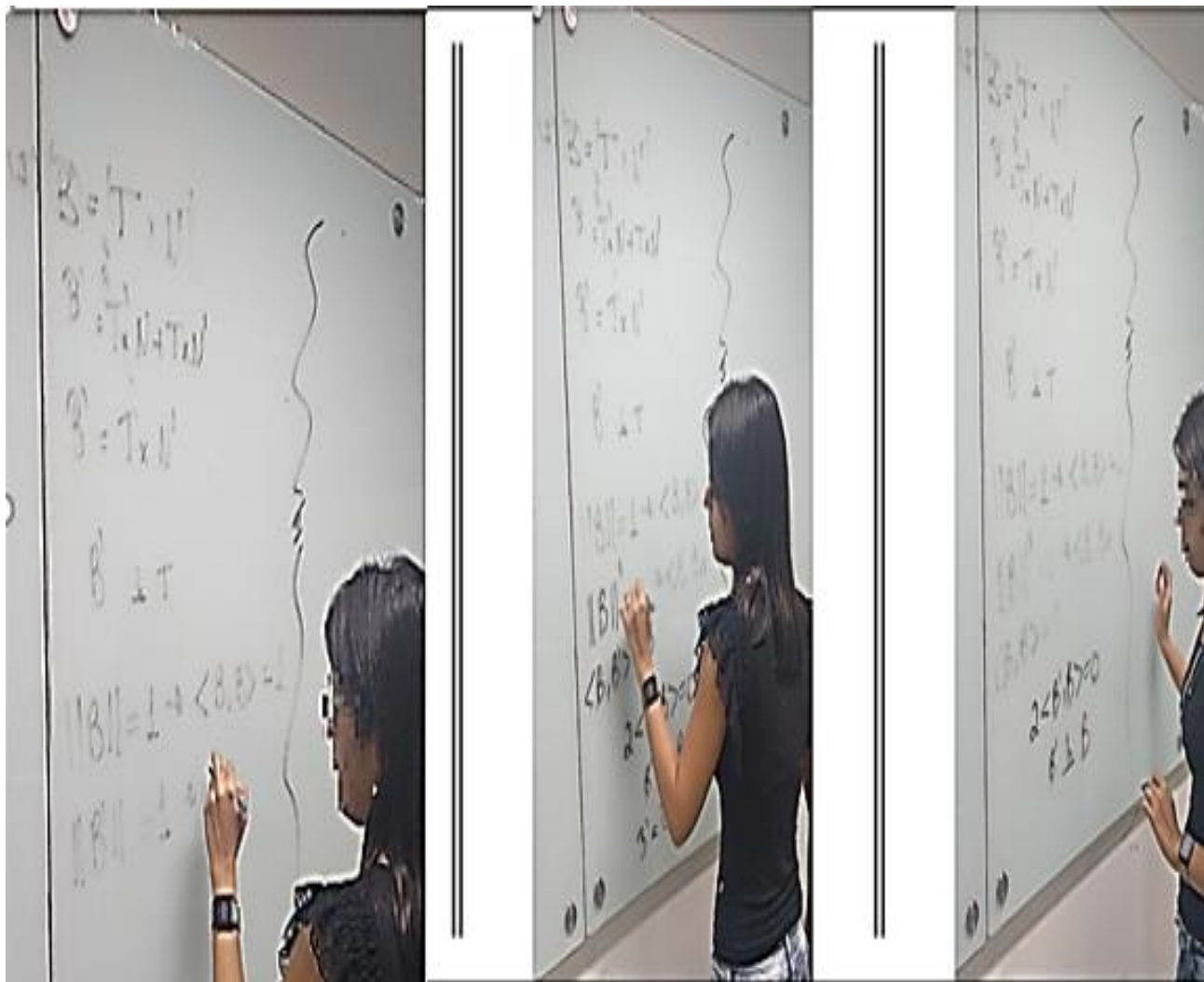


Figura 108 – Ação e formulação da Aluna A₄ na situação problema(4)

Fonte : Dados da pesquisa

A formulação prossegue, com a aluna determinando que a derivada do vetor binormal B' é ortogonal aos vetores tangente e binormal, estando portanto na direção do vetor normal, a seguir na Figura 109, expomos tal argumentação.

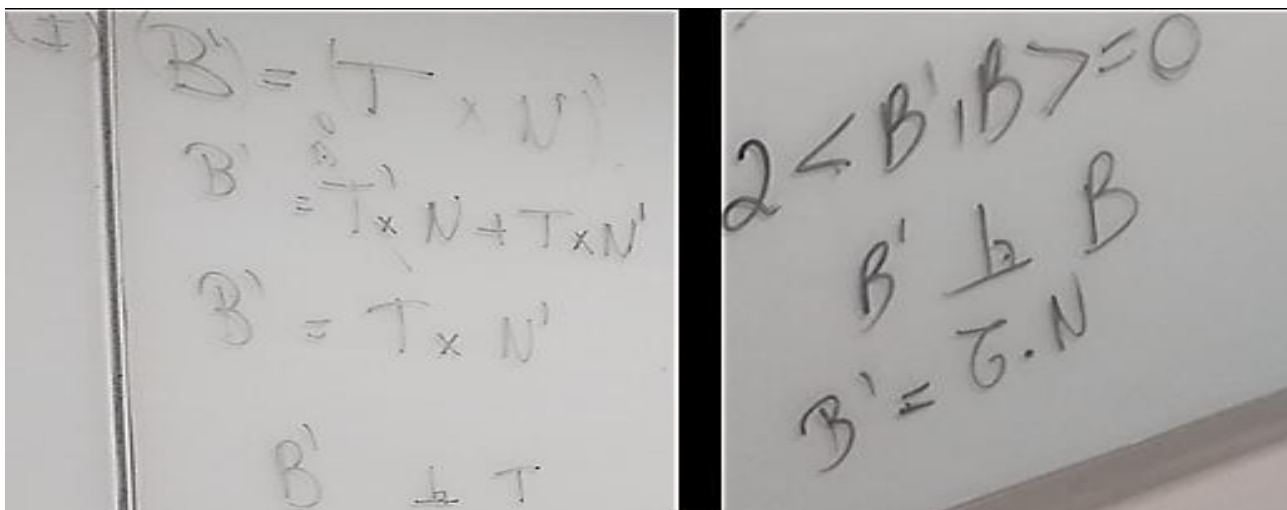


Figura 109 – Argumentação algébrica acerca do desenvolvimento da aluna A4 do conceito torção

Fonte : Dados da pesquisa

A aluna A3, retoma a formulação das equações de Frenet a partir da derivação produto interno que define o vetor normal, e uma associação entre as duas fórmulas anteriormente desenvolvidas com os vetores pertencentes ao Triedro de Frenet. Assim, a aluna substitui o valor da derivada do vetor binormal, e o valor da derivada do vetor tangente, com o intuito de estabelecer em função desses vetores uma relação para a derivada do vetor normal.

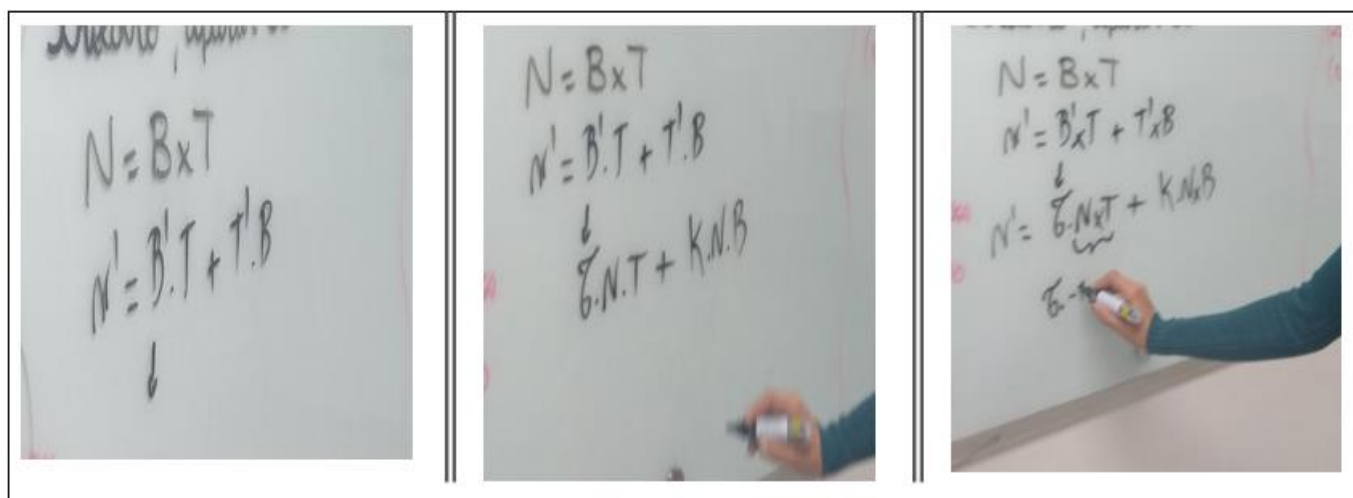


Figura 110 – Ação e formulação da Aluna A3 na situação problema(4)

Fonte : Dados da pesquisa

Desse modo, a Aluna A3, conclui que a derivada do vetor tangente depende conjuntamente dos vetores tangente e binormal, e as constantes de proporcionalidade intituladas de curvatura e torção, deduzindo assim as fórmulas de Frenet, retratadas na Figura 111. Note que a validação de tal situação, ocorre por meio da confrontação entre a fórmula encontrada, e o modelo proposto em TENEBLAT(2008).

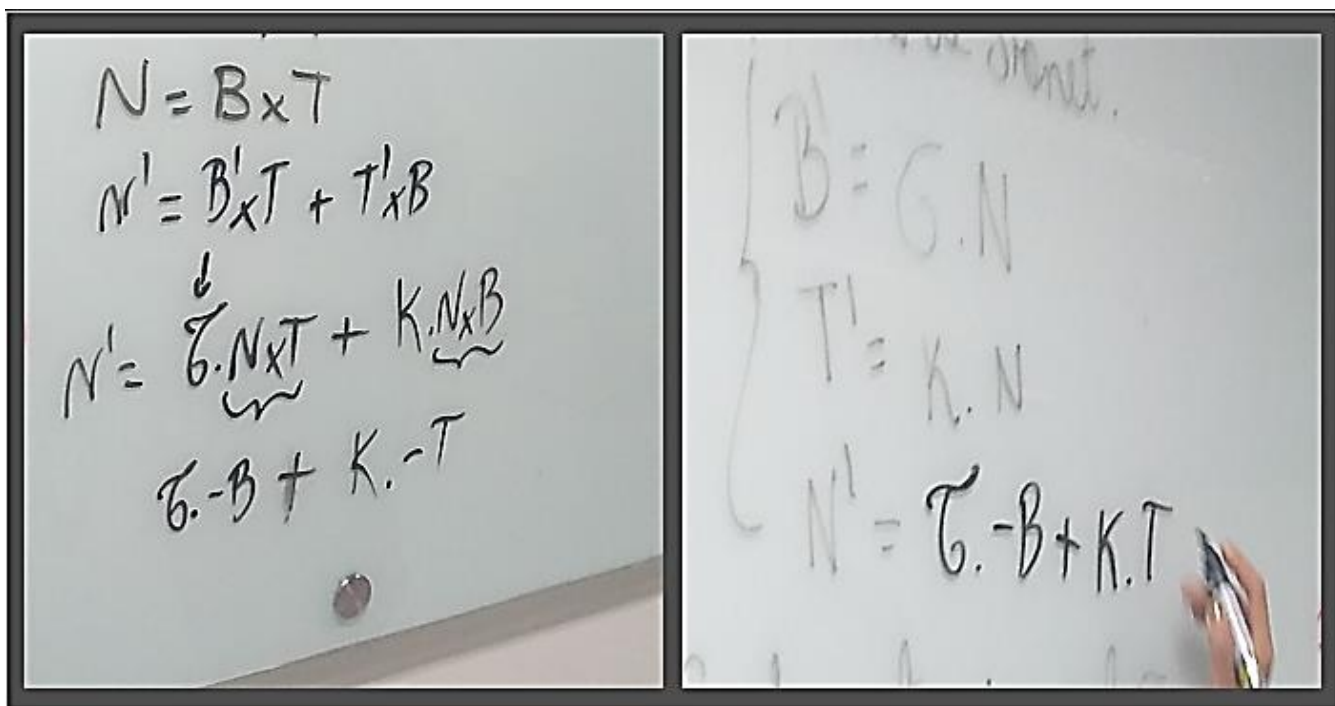


Figura 111- Dedução da terceira equação de Frenet pela aluna A3
Fonte :Dados da pesquisa

De modo análogo, verificamos que outros alunos empregaram argumentações semelhantes para a dedução de tais fórmulas, como representado na Figura 112.

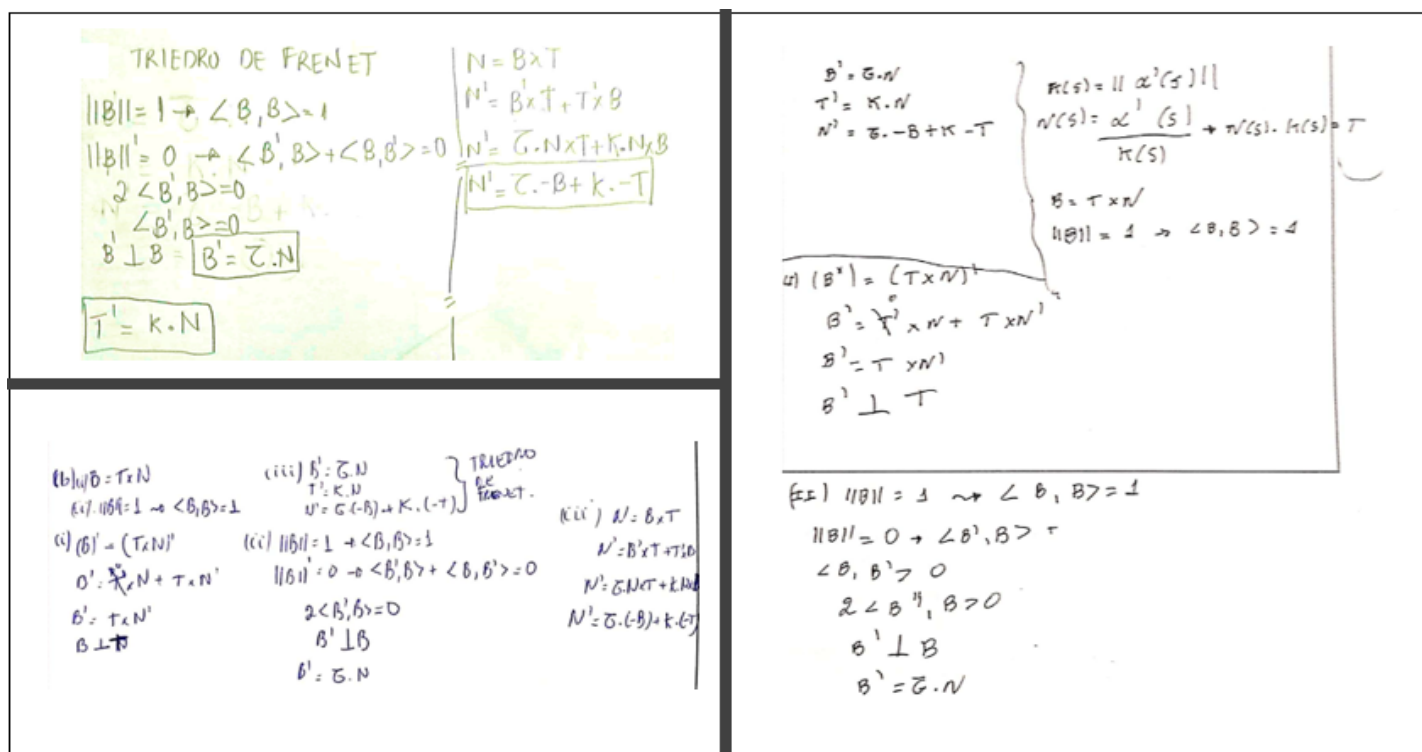


Figura 4 – Dedução das fórmulas de Frenet pelo Aluno A1(à esquerda na parte superior), Aluno A7(à esquerda na parte inferior), Aluno A3 (à direita)
Fonte : Dados da pesquisa

Em relação ao significado do conceito torção, os alunos os expressam de forma comparativa a torção de uma plano (nesse caso a medida da torção é nula), assim quanto maior o valor da torção mais distante se está desse objeto geométrico. Desse modo, a seguir , apresentamos algumas declarações dos alunos :

Aluno A2 :[...] o conceito geométrico da torsão expressa a medida de quanto a curva espacial deixa de ser uma plano [...].

Aluno A₆ : [...] A torsão é uma constante entre B' (derivada do vetor binormal) e N (vetor normal), que mede o quanto que uma curva deixa de ser um plano [...].

As fases de ação e formulação na situação-problema(5), iniciam-se com a análise da natureza da curva espacial, para a o cálculo adequado dos vetores pertencentes ao Triedro de Frenet. Note que a aluna A₅ conclui, que trata-se de uma curva ppca, logo a primeira derivada em relação a curva, trata-se do vetor tangente.

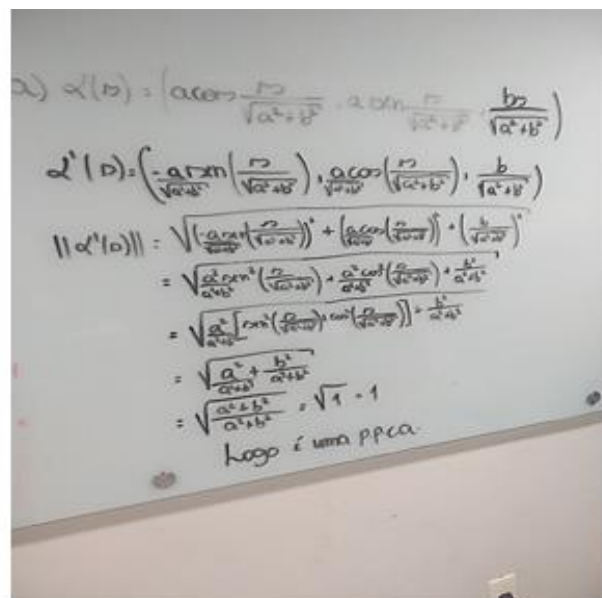
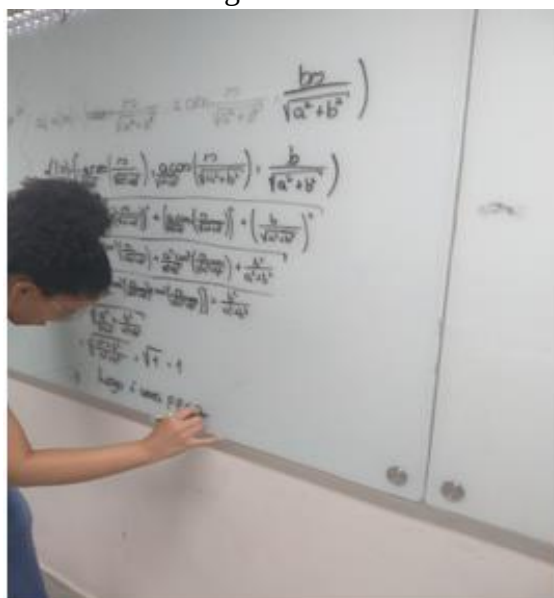


Figura 113 – Aluna A₅ durante as fases de ação e formulação referentes a situação problema(5), estabelecendo a natureza da curva.
Fonte : Dados da pesquisa

Em seguida, a Aluna A₅, prossegue as fases de ação e formulação efetuando o cálculo do valor do módulo da segunda derivada da função que expressa a curvatura. E a partir, do valor encontrado, realiza a validação dessa situação problema estabelecendo uma relação com o vetor tangente,

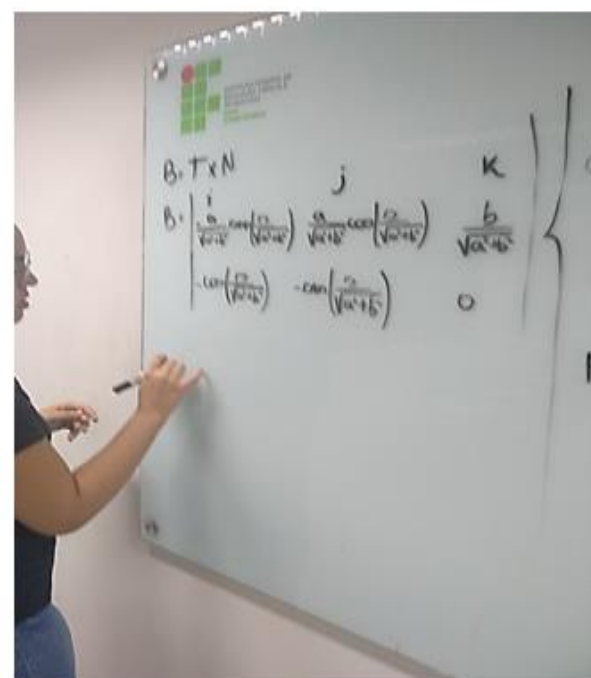
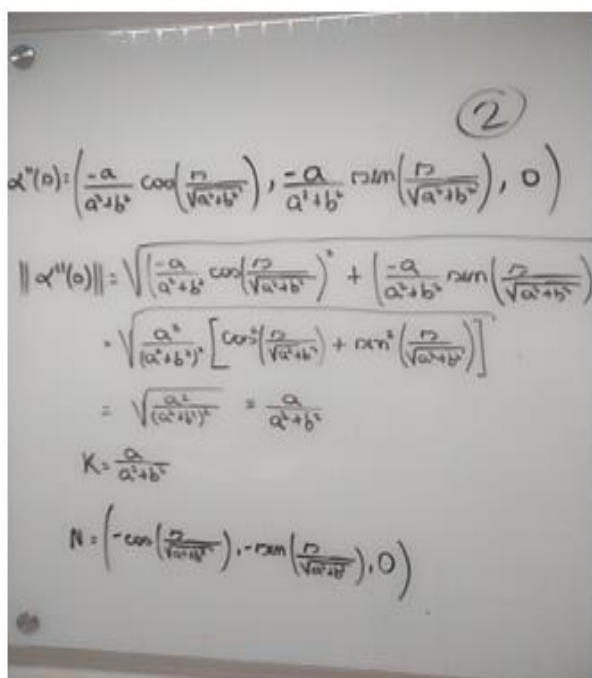


Figura 114– Aluna A₅ durante as fases de ação e formulação referentes a situação problema (5), definindo os valores referentes a curvatura, vetores normal e binormal da hélice circular.

Fonte: Dados da pesquisa

encontrando assim o vetor normal, para que a partir desse vetor, consiga calcular o vetor binormal e por fim, o valor da torção dessa curva.

Handwritten mathematical work by Aluna A5. It shows the derivation of the binormal vector B from the Frenet-Serret frame. The work includes the definition of $B = T \times N$, the calculation of the cross product using a determinant, and the final expression for B in terms of a , b , and s . The magnitude $\|B\|$ is also calculated.

Handwritten mathematical work by Aluna A5. It shows the calculation of the binormal vector B and the torsion τ . The work includes the definition of $B = T \times N$, the calculation of the cross product, and the final expression for B and τ .

Figura 115 - Aluna A5 validando a situação problema (5), definindo através do vetor binormal, o valor da torção da hélice circular.
Fonte: Dados da pesquisa

Mediante a dedução dos valores dos vetores do Triedro de Frenet, e dos valores de curvatura e torção, caracterizado na fase validação, a partir do emprego de conhecimentos prévios de álgebra linear, geometria analítica ensejava-se efetivar uma relação algébrica entre a fundamentação teórica desses conceitos de GD, para posteriormente estabelecermos uma significação geométrica desses conceitos. A seguir, pode-se observar de modo análogo, as descrições de alguns aspectos das fases de ação, formulação e validação do Aluno A8.

Handwritten mathematical work by Aluno A8. It shows the derivation of the binormal vector B from the Frenet-Serret frame. The work includes the definition of $B = T \times N$, the calculation of the cross product using a determinant, and the final expression for B in terms of a , b , and s . The magnitude $\|B\|$ is also calculated.

Handwritten mathematical work by Aluno A8. It shows the calculation of the binormal vector B and the torsion τ . The work includes the definition of $B = T \times N$, the calculation of the cross product, and the final expression for B and τ .

Figura 116 - Fases de ação, formulação e validação do Aluno A8 no que concerne a situação-problema(5)
Fonte: Dados da pesquisa

Em relação a segunda etapa da situação problema (5), na fase de ação, o aluno A_1 interpretou as curvas e assim realizou, na fase de formulação, por meio de uma associação entre a definição desses vetores, uma representação desses vetores e dos respectivos planos gerados por eles.

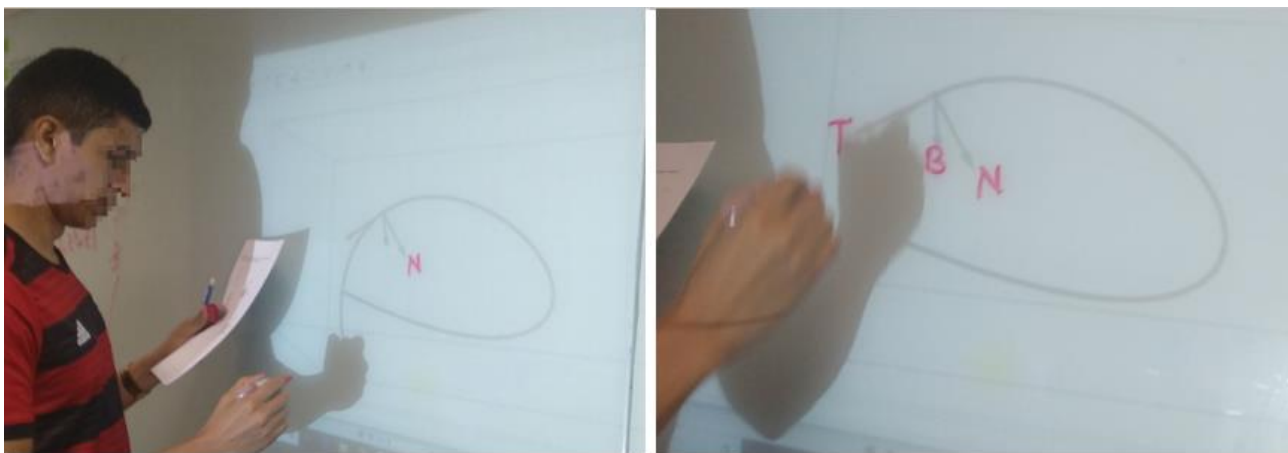


Figura 117 – Representação dos vetores do Aluno A_1 na figura 1 da situação problema (5)

Fonte : Dados da pesquisa

No que concerne a etapa de validação, os alunos formalizaram e sistematizaram os argumentos para a determinação dos vetores e dos respectivos planos gerados por eles: Binormal, Normal e Osculador. Nesse momento, o aluno A_2 definiu o vetor vermelho como vetor tangente expressando “que esse vetor só possui um ponto em comum com a curva”, definindo os demais vetores por meio deste. Assim, constatamos uma mudança de comportamento dos alunos na hora de definir os vetores, tentando sempre correlacioná-los com o significado geométrico dos vetores.

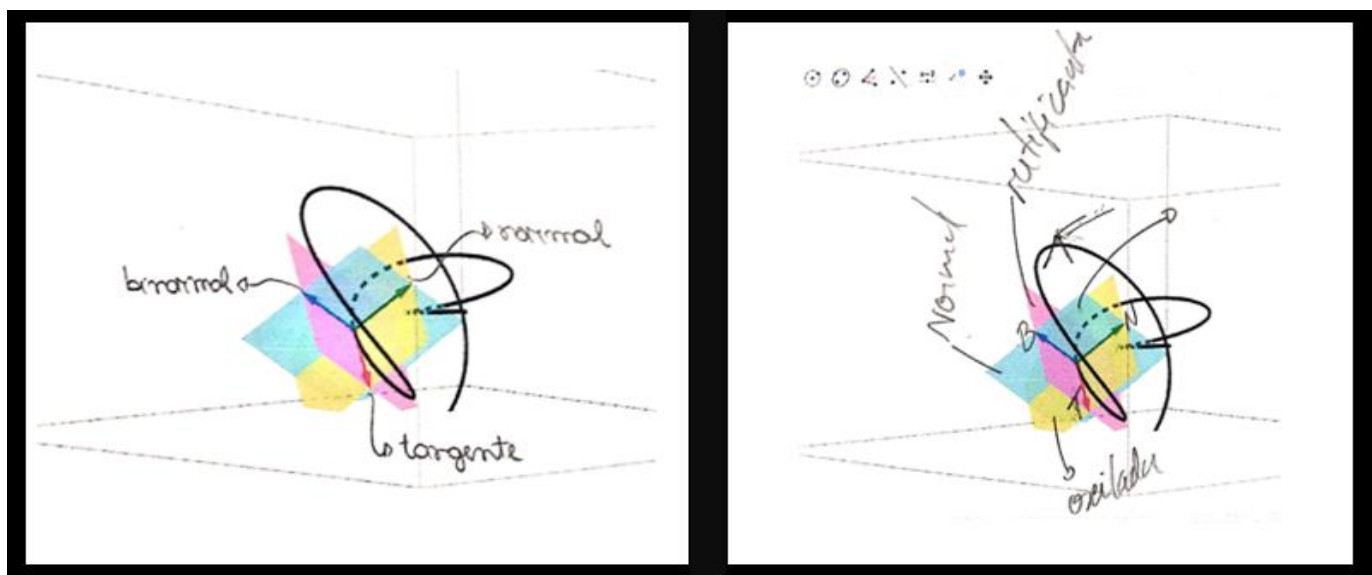


Figura 118 – Representação dos vetores do Triedro pela Aluna A_5 (à esquerda) e representação dos planos gerados por esses vetores pelo Aluno A_3 (à direita) na figura 1 da situação problema(5)

Fonte: Dados da Pesquisa

Além disso, Aluna A_3 apontou que por meio do aspecto dinâmico do *software*, a compreensão dos conceitos apresentava-se mais exequível afirmando “ao movimentar a figura deixa mais claro a teoria aplicada, além de ficar claro a representação em si”. A seguir, apresentamos as determinações dos vetores pertencentes ao Triedro de Frenet e os respectivos planos produzidos pelos alunos nas figuras desta situação problema.

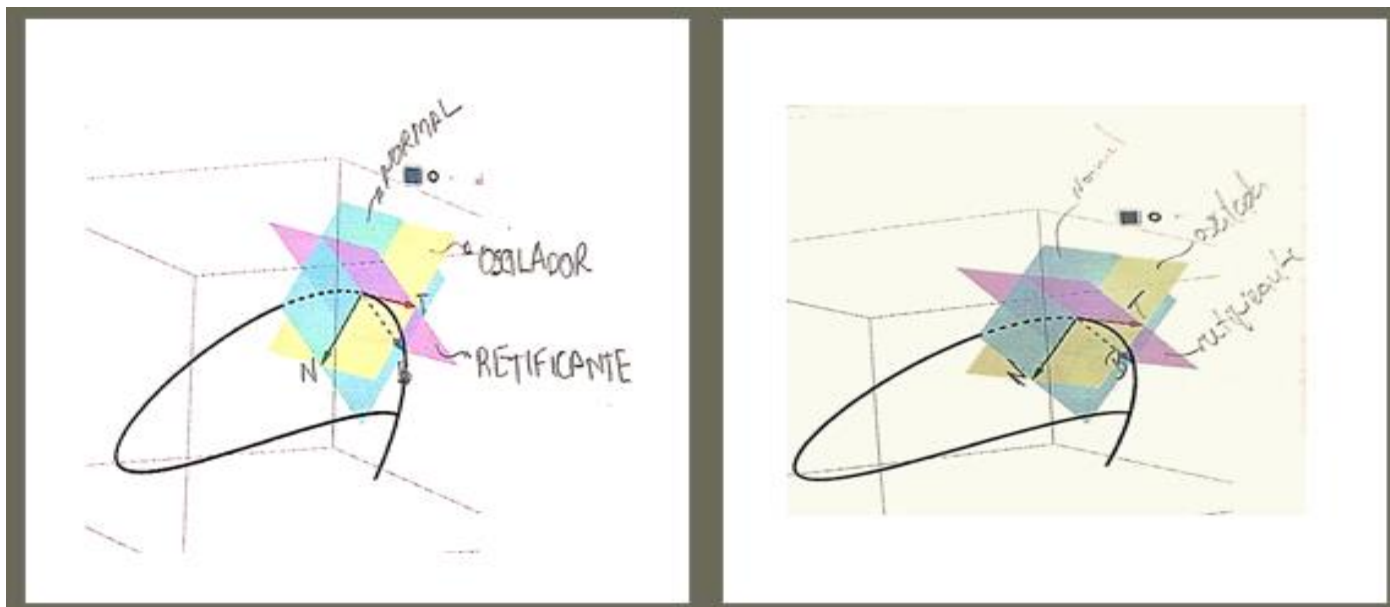


Figura 119 – Representação dos vetores do Triedro pela Aluna A₁ (à esquerda) e representação dos planos gerados por esses vetores pelo Aluno A₃ (à direita) na figura 2 da situação problema(5)
Fonte: Dados da Pesquisa

Na figura 120, podemos contemplar uma formalização realizada pela aluna A₄, na fase da validação, em que conseguimos claramente verificar o pensamento para a determinação dos planos Osculador, Binormal e Normal.

Na imagem 1, temos: o plano normal da cor verde sendo representado pelos vetores normal (Verde) e binormal (azul). o plano osculador é da cor amarelo sendo representado pelo vetor normal (Verde) e tangente (Vermelho) e ainda o plano retificante é da cor rosa sendo representado pelo vetor tangente (vermelho) e binormal (azul).
De forma análoga, os vetores são das mesmas cores: Normal = Verde, tangente = vermelho e binormal = azul.

Figura 120 – Argumentação realizada pela aluna A₄, na fase de validação da situação problema (5), no que diz respeito a análise geométrica das curvas apresentadas.
Fonte: Dados da pesquisa

À vista disso, ao analisar a situação-problema (5), pode-se verificar que as discussões realizadas permitiram aos alunos compreender alguns conceitos relacionados a curvas espaciais, considerando seu aspecto algébrico, por meio das fórmulas matemáticas que os define conjuntamente a compreensão do significado geométrico, por meio de suas visualizações/representações com o intuito de colaborar a assimilação desses conceitos.

Ao final da experimentação, evidenciamos que os alunos conseguiram generalizar as informações contidas nas situações problema e intuíram corretamente as relações entre as fórmulas, no entanto, vale salientar que alguns alunos apresentaram obstáculos no que concerne aos conhecimentos prévios necessários para o desenvolvimento da teoria como dificuldades em relação a derivação das funções.

No tocante ao significado geométrico dos conceitos trabalhados, verificamos por meio da escolha e das situações problemas aqui apresentadas que os alunos sentiram dificuldades para uma elaboração e representação de uma noção intuitiva desses conceitos, tal fato associado a aptidão no

aspecto algébrico remete aos elementos considerados negativos nos livros apresentados nessa pesquisa.

7.2.1-Validação interna da pesquisa

Na seção anterior, apresentamos os momentos de resolução das situações problema, em que identificamos as circunstâncias em que ocorriam as fases da TSD, para que encontrássemos aspectos que validassem a nossa pesquisa. No que concerne a validação de uma pesquisa embasada na ED, é importante salientar que apesar dessa metodologia admitir dois tipos de validação: interna e externa, legitimação dessa pesquisa é realizada internamente, com foco nas situações didáticas. Pois, além dessa pesquisa ter envolvido um número pequeno de participantes (alunos), são analisados apenas as produções e o desempenho dos estudantes que foram observados nesta pesquisa, não havendo comparação com produções externas a esta aplicação.

Assim, a validação interna desta pesquisa ocorreu por meio de comparações entre as fases de análise *a priori* e *a posteriori* com base nos dados coletados durante a experimentação. Desse modo, trazemos à memória que na análise *a priori* desenvolvemos a sequência didática aplicada e realizamos algumas previsões. Após a experimentação, nas análises *a posteriori* nos deparamos com dificuldades por parte dos alunos em formular um significado dos conceitos geométricos dissociado da concepção algébrica, o que refuta as nossas hipóteses que as situações de aprendizagem definidas pelos exercícios propostos pelos autores de livros de GD permitem apenas a aquisição de habilidades manipulativas de equações, que incidem ou acarretam em resultados de significado restrito, sem um entendimento amplo dos conceitos.

Outrossim, por meio da última etapa da nossa metodologia de ensino, a TSD, também podemos verificar o progresso obtido na transmissão dos saberes, quando os participantes visualizavam os conceitos abordados durante o minicurso.

Ainda durante a experimentação, evidenciamos o surgimento de alguns obstáculos epistemológicos e cognitivos típicos de um processo de aprendizagem. Nesse contexto, foi observado que alguns alunos manifestaram dificuldade de lidar com alguns conceitos de CVV, de modo mais específico, derivação de funções trigonométricas, e alguns conceitos de Geometria Analítica, no que concerne a operações com produto interno e produto vetorial.

Retomando com a perspectiva da institucionalização das relações e dos conceitos abordados nas situações didáticas, na primeira situação problema, os alunos demonstraram as equações do Diedro de Frenet, através da derivação da norma do vetor tangente uma curva ppca em $\mathbb{R}^2$ e a dedução da orientação de vetores em $\mathbb{R}^2$, o que permitiu simultaneamente ao emprego desses conceitos de outros saberes matemáticos um aperfeiçoamento da compreensão do conceito curvatura.

Na institucionalização da situação problema (2), foi analisado e efetuado o cálculo da curvatura de algumas curvas, o que possibilitou a mobilização dos conhecimentos adquiridos de GD, com o intuito de consolidar o conceito trabalhado. Ademais foi realizado pelo professor intervenções que

requeriam a identificação dos vetores tangente e normal nessas curvas, nesse instante verificamos imprecisões e desacertos em relação as representações desses vetores que contrariando as respectivas definições desses conceitos. Por esta razão, nessa situação problema, tal etapa da TSD mostrou-se indispensável, pois nesse instante o professor possuiu a oportunidade de realizar uma discussão acerca das argumentações dos alunos para posteriormente indicar o desarcerto, alcançando a solução retificada.

A institucionalização da situação posterior, a situação problema(3), evidenciamos que os alunos desenvolveram entraves no entendimento na definição do TCP, mas após exemplificações da aplicação do teorema no *software* Geogebra, os alunos conseguiram desenvolver significados para o teorema, realizando uma adaptação do significado matemático complexo para um significado usual, esclarecendo com suas locuções o que entendiam do teorema. Ainda empregaram o TCP, no estudo de pares de curvas, assegurando quando havia a existência de uma equivalência entre essas curvas.

Na situação problema (4), sucedeu a correlação entre os vetores tangente, normal e binormal determinando as fórmulas do Triedro de Frenet, enriquecendo a concepção que tinham do assunto, dado que os alunos que conheciam o campo de saberes de GD, não conheciam a gênese de tais fórmulas e suas respectivas demonstrações, declarando que assimilaram as fórmulas de modo desapropriado de sentido, pois antes haviam assimilado tais fórmulas de modo decorativo.

Por fim, na situação problema (5) através da análise e efetuação do cálculo da torção e curvatura da hélice circular, os alunos conseguiram compreender e aplicar os conceitos algébricos desenvolvidos. Além disto, na segunda etapa dessa situação problema ocorreu a correlação e análise, por meio do *software* Geogebra, do comportamento os planos gerados a partir do Triedro Móvel de Frenet o que permitiu que os alunos realizassem por meio de análise a partir dos vetores tangente, normal e binormal, a identificação dos planos Osculador, Normal e Retificante.

Desta forma, reconhecemos que a discussão dos dados coletados nesta pesquisa permitiu compreender alguns obstáculos epistemológicos referentes a compreensão de saberes da área intitulada Geometria Diferencial.

Além disso, constatamos que as hipóteses desenvolvidas durante desta pesquisa foram atestadas, dado que durante a experimentação, no primeiro momento discorremos apenas as definições algébricas que seria a mediação condicionada pela abordagem dos livros de GD, depreendendo que tal abordagem acarretam em resultados de significado restrito, sem um entendimento amplo dos conceitos, pois na concepção dos alunos a visualização proporcionada pelo *software* Geogebra contribuiu para a significação geométrica dos conceitos abordados, facilitando assim a assimilação desses conceitos.

Ademais, na seção seguinte apresentamos alguns resultados coletados individualmente referentes a um questionário aplicado com o intuito de inferir contribuições acerca da metodologia utilizada no minicurso, uso de *softwares* no ensino de GD e compreender melhor alguns obstáculos que tenham surgido ao decorrer do minicurso. Salientamos que tal questionário é composto de dez

questões, encontra-se no apêndice B, e que os alunos também não identificaram as folhas desse questionário, continuando portanto, uma análise às cegas de suas respostas.

7.2.1.1 – Mensuração da pesquisa por meio do instrumento metodológico questionário

As opiniões específicas do questionário centram-se sobre a utilização do *software* Geogebra e características relacionadas a TSD, pois as informações reveladas por tal procedimento favorecerá a teorização mais aprofundada do método com amparo nas impressões dos alunos que vivenciaram a pesquisa, produzindo dados que revelem resultados imprescindíveis aos objetivos da demanda acadêmica ora relatada.

Além disso, cada pergunta do questionário inserido como Apêndice B foi representada por sua temática conforme descrito na sequência. Por exemplo, “**P.1(O potencial da visualização no desenvolvimento de um novo significado dos conceitos de GD)**” significa impressões sobre a pergunta número 01 por parte dos alunos cuja temática é um estudo dos conteúdos abordados com as suas respectivas representações no *software* Geogebra.

Assim, na primeira pergunta, os alunos foram indagados acerca da utilização no *software* em relação a uma ressignificação dos conceitos trabalhados. De forma condensada os alunos declararam que os conceitos eram abstratos e complexos mas que a abordagem auxiliou na compreensão, facilitando o entendimento que tinham, enquanto que para alguns tratou-se de um conteúdo novo dado que não havia sido ministrado durante a graduação. Adiante, discorreremos algumas transcrições de comentários dos alunos acerca dessas representações dos conceitos de GD.

P.1 (O potencial da visualização no desenvolvimento de um novo significado dos conceitos de GD)

Aluno A₅ : A visualização ajuda a entender exatamente onde a curvatura assume valores, e através dele você passa a compreender a parte aritmética melhor.

Aluno A₄ : Apesar de não ter estudado o conteúdo na graduação, foi possível ter uma noção superficial deste. Os teoremas estudados, eram de difícil compreensão, e ao serem visualizados no software foi possível entendê-los melhor.

Aluno A₂ : Os meus conhecimentos sobre curvas e curvaturas era bem limitados e com a representação do conteúdo ficou mais fácil o entendimento.

Aluno A₆ : Tiveram conceitos, como o Teorema Fundamental das Curvas, que só foi possível entender com os exemplos dados no Geogebra, vê os conceitos me ajudou bastante a entender o comportamento deles, o que significava as fórmulas matemáticas.

Verifica-se que para os alunos participantes da pesquisa, a visualização possui um papel fundamental na assimilação dos conceitos de GD, que somente a definição algébrica dificulta a compreensão e interpretação desses conceitos. Em relação as dificuldades sentidas ao estudar as aplicações dos conceitos de curvas durante o minicurso, foi relatado por alguns alunos que devido ao

longo período que se passara desde sua graduação não recordavam-se de alguns conhecimentos necessários, enquanto outros declararam que tratava-se de um conteúdo novo e esse motivo aliado ao curto tempo de duração do curso foram uma dificuldade. A seguir, apresentamos relatos acerca de tais questões:

P.2 (Dificuldades quanto aos conhecimentos prévios necessários para o estudo dos conceitos de GD)

Aluno A₁ : O conteúdo matemático teórico foi bastante complexo, logo para realizar a aplicação foi necessário um entendimento prévio e um embasamento teórico, como não houve este embasamento durante o curso de graduação, o minicurso tornou-se difícil.

Aluno A₄ : Por ser um conteúdo que não estudei anteriormente, existiu um pouco de dificuldade em assimilar os conceitos, mas após os exemplos e aplicações no Geogebra, a dificuldade diminuiu.

Aluno A₆ : Na realização dos cálculos da derivada trigonométrica, se não tivesse o apoio do software ficaria difícil o entendimento.

Aluno A₃ : Foi relembrar os assuntos de derivada e álgebra linear, mas foi muito bom rever tudo.

Salienta-se que a sessão didática iniciou-se com revisão dos conceitos prévios necessários para o entendimento do minicurso, como comentado pelo Aluno A₃, mas nem todos chegavam ao ponto em que o professor desejava, ensejando maior atenção a esses estudantes no decorrer da aplicação do minicurso. Além disso, em algumas situações problema, era requerido aos alunos aspectos relacionados ao entendimento dos conceitos, por essa razão, os alunos poderiam empregar resultados determinados no *software*, o que para alguns, como o Aluno A₆ tornou-se indispensável não só para a resolução, como para o entendimento dessas situações problema.

Nessa perspectiva do emprego do *software* Geogebra, os alunos foram indagados como tal utilização auxiliava no entendimento dos conceitos, muitos apontaram o potencial dinâmico do *software* e a visualização proporcionada.

P.3 (Utilização do software Geogebra para representação e aplicação dos conceitos de GD)

Aluno A₆ : Ajudou pois ao ver os conceitos aplicados tornou-se mais lúdico e pude ver o movimento de um ponto durante a curva e como a curvatura se modificava.

Aluno A₅ : Na realização do cálculo puro e simplesmente você ver que a curva é uma aplicação diferencial, mas isto somente, não mostra sua representação e o comportamento da curvatura.

Aluno A₃ : Em determinados casos, com o Geogebra foi possível compreender alguns teoremas que não estavam muito claros.

Aluno A₄ : Foi essencial visualizar a representação dos conceitos no software para poder entender, ajudar na compreensão.

Em relação a metodologia utilizada pelo professor na condução das aulas, os alunos declararam que perceberam por parte do docente uma previsão de possíveis obstáculos no entendimento dos conceitos, dado que ao surgir tais dificuldades o docente sugeria artifícios que auxiliava na solução dos problemas propostos. Outro aspecto apontado de forma favorável pelos alunos foi o fato do professor instigar a ida à lousa para a apresentação dos resultados, de modo a incitar discussões, pois cada informação escrita na lousa era utilizada pelos alunos para ratificar ou perceber algum erro em suas resoluções.

P.4 (Opinião sobre a metodologia utilizada)

Aluno A₇ : Achei interessante, pois apesar do assunto ser complicado, consegui entender os conceitos. Além disso, o formato utilizado foi interessante porque nos mantinham atentos as execuções na lousa.

Aluno A₆ : Foi uma metodologia de fácil compreensão, pois ela previa as dificuldades, possibilitando os alunos trilhar e perceber os caminhos a seguir.

Aluno A₃ : A metodologia ajudou a instigar os processos investigativos do conteúdo.

Aluno A₁ : Uma metodologia diferente com o auxílio da tecnologia, facilitou no momento da visualização, o que tornou a aprendizagem mais fácil.

No momento em que solicitou-se aos alunos que descrevessem a metodologia utilizada pelo professor, muitos assinalaram que tratava-se de uma metodologia diferente do convencional, constatando assim que os a diferença do método da TSD com as aulas expositivas que geralmente os alunos estavam habituados a participar.

P.5 (Descrição da metodologia)

Aluna A₆: A professora utilizou uma aula expositiva para uma breve revisão sobre o assunto e as demonstrações dos teoremas, depois com o auxílio do Geogebra demonstrou de maneira mais prática a teoria. Os participantes estavam um pouco envergonhados no começo, mas depois fomos perdendo o medo e interagindo de maneira produtiva com a professora e os demais companheiros.

Aluna A₄: A professora apresentou a teoria, as definições, exemplos e utilizou o software Geogebra para explicar o comportamento das curvas relacionando o que foi apresentado na teoria.

Aluna A₃: O processo sucedeu de forma a estimular o lado investigativo e indutivo, realizando um pequeno embasamento teórico acerca do conteúdo, e só então realizando o determinado processo.

Aluna A₁: Primeiro ela lançava o problema e algumas definições, depois nos deixava pensando um pouco e chamou alguns alunos para mostrarem seus resultados, por fim, ela refazia todo o processo.

Através das menções realizadas pelos alunos, também infere-se que os alunos identificaram um planejamento por parte do professor, em explanar o conhecimento prévio necessário para a assimilação dos conceitos de GD e a aplicação desses conceitos em simulações no *software* Geogebra.

Além disso, evidenciaram que as situações propostas pelo docente os induzia a prática da investigação por meio de demonstrações matemáticas, de modo a propiciar durante a situação problema uma apropriação do conhecimentos e emprego dessa situação para significação do conhecimento. Note que a Aluna A₁ caracterizou a execução da institucionalização pelo docente, mencionando que o educador discutia as soluções das situações problema, realizando uma troca de ideias acerca das estratégias utilizadas pelos alunos para a resolução dessas situações.

Na ocasião em que os alunos foram questionados acerca dos aspectos que a metodologia empregada diferenciava-se de outros estilos de aula de matemática, fora relatado o planejamento do tempo das atividades durante a aula e o estímulo ao protagonismo do aluno, por existir momentos em que o aluno participava ativamente do processo de construção do conhecimento, por meio das participações e da prática de demonstrações matemáticas.

P.6 (Peculiaridades da metodologia aplicada)

Aluna A₁: Diferencia pois os alunos são membros participantes das aulas, enquanto na metodologia “tradicional” só o professor que conduz a aula. E sim, a metodologia utilizada tem a capacidade de haver um aprendizagem maior para os alunos.

Aluna A₄: No aspecto de deixar fluir a autonomia do aluno no desenvolvimento do processo de ensino e também pelo fato de ter auxílio do Geogebra, que é uma ferramenta que auxilia o entendimento do assunto.

Aluna A₈: Sim. Na distribuição do tempo, cada parte da aula é bem planejada, definida, sendo realizado na primeira parte apenas a apropriação do conteúdo, e depois os problemas são propostos aos alunos .

Aluno A₁: Em muitas aulas, os professores não trabalham este lado investigativo, “entregando” muita vezes o conteúdo “mastigado” fazendo com que os alunos fiquem estagnados e não aflorem seu lado indutivo .

Em relação a análise acerca das ações do professor, realizadas durante as aulas do minicurso, inferiu-se um incentivo por parte do professor em fazer com que o aluno alcançasse os resultados de demonstrações ou cálculo. Outro aspecto evidenciado fora a possibilidade de interação entre os alunos, possibilitando a troca de ideias para a resolução das atividades e as intervenções do professor que sempre ocorriam com orientações para a resolução das situações, mas sem resolve-las diretamente, sendo necessário uma concatenação de ideias pelo aluno para solucionar os problemas.

P.7 (Intervenções do professor)

Aluna A₂: Os momentos de discussão, em muitos casos, instigados pelo professor, foi possível haver uma maior compreensão do conteúdo para a posteriori evoluir no processo investigativo.

Aluna A₆: O fato da professora insistir em nossa participação no quadro, pois além de facilitar

para o nosso desenvolvimento do conhecimento, nos fez colocar com maior interação com a turma e também prestar mais atenção nas abordagens.

Aluna A4: Por haver maior interação entre aluno e professor, houve troca de conhecimento o que facilitou a aprendizagem.

Aluna A7: O momento em que ela mostrou o comportamento das funções no Geogebra, facilitou compreensão dos conceitos dos conteúdos repassados.

Aluna A5: A aplicação no Geogebra foi essencial para compreender os teoremas trabalhados.

Desse modo, inferimos que a concepção dos alunos apresentou-se de forma semelhante a perspectiva de MENEZES (2018, p.100) que defende o “comportamento docente em conceder a oportunidade de o aluno ir à lousa com frequência e conceber diálogos e reflexões transformou a mentalidade e motivou o aprendizado no grupo”.

Prosseguindo com as indagações referentes as ações não realizadas pelo professor mas que poderiam ter sido efetivadas nas aulas com a intenção de melhorar o nível de aprendizagem, alguns alunos não recomendaram sugestão alguma, enquanto outros explanaram interesse em manipular o *software* diretamente e um maior tempo de execução do minicurso.

P.8 (Sugestões de ações que poderiam ser implementadas)

Aluna A1: Acredito que o conteúdo foi bem explicado e distribuído, não notei a necessidade de mais ações além das que foram realizadas.

Aluna A6: Por ser um minicurso o tempo é reduzido e não se consegue apresentar mais exemplos do conteúdo, caso conseguisse praticar mais o nível de aprendizado seria maior.

Aluna A3: Que houvesse uma atividade em que pudessemos manipular o Geogebra.

Além disso, solicitou-se aos alunos a realização de uma autoavaliação acerca de sua participação no minicurso com o intuito que aluno reflita acerca dos obstáculos particulares que teve durante o seu percurso de aprendizagem no minicurso para que assim possamos, posteriormente, desenvolver ferramentas que auxiliem a contornar tais obstáculos.

P.9 (Autoavaliação durante o minicurso)

Aluna A4: Como a professora pedia uma participação dos alunos isso me levou a tentar expor no quadro o que tinha entendido dos conceitos e expor isso me ajudou na aprendizagem pois havia a necessidade da explicação do que estava fazendo.

Aluna A6: Na medida do possível, tentei compreender o conteúdo e interagir durante os problemas propostos aplicados, mesmo com as dificuldades pessoais sobre os assuntos abordados.

*Aluna A7: Fraca, pois no início, ao serem realizados cálculos baseados nos conceitos, não participava devido ao fato de não ter ocorrido o entendimento, porém ao serem visualizados esses conceitos no *software*, houve um melhor entendimento.*

Aluna A5: Fui participativa, em alguns momentos fiquei um pouco receosa, mas no final

melhorei e aprendi conceitos que serão aprimorados por mim através de mais estudos e pesquisas, pois me incomodou o fato de saber pouco sobre o assunto.

Através dos comentários dos alunos inferimos que apesar de tratarem-se professores que já exercem a profissão, alguns alunos apresentavam entraves emocionais por não possuir a prática ir à lousa com frequência, conceber diálogos e reflexões acerca do conteúdo matemático quando encontram-se no posicionamento de aprendiz. Outro aspecto evidenciado por esses alunos que auxiliaria nesses entraves seria as limitações nos conhecimentos prévios. Dessa forma, compreendemos que os alunos na posição de educador assentem dificuldades em trabalhar os conteúdos matemáticos com aplicações e findam usando-os como meros processos de algoritmização.

Por fim, sugeriu-se que os alunos proferissem comentários acerca de melhorias a serem realizadas na execução do minicurso, no entanto, muitos absteram-se de opiniões, relatando-se apenas uma maior parcela de tempo na aplicação do minicurso.

P.10 (Comentários/Sugestões)

Aluno A₂: Os assuntos são instigantes, levando nos a querer saber além do que foi visto no minicurso. Acredito que a metodologia da professora tenha contribuído para isso também, a sugestão é que deveria ter mais tempo para realizar os problemas com mais completude.

Destarte, concluímos a necessidade dos alunos em vivenciar mais situações como as aplicadas durante o minicurso, em que os alunos participem ativamente do processo de aprendizado, com o emprego do *software* Geogebra, que atuará como um facilitador de compreensão dos conceitos matemáticos de GD. A ação facilitadora desse *software* acontece em consequência do seu dinamismo e possibilidade de uma realização de atividades investigativas conjuntamente com a exploração e visualização de conceitos matemáticos, teoremas e propriedades.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa pesquisa apresentou uma abordagem epistemológica de um campo de saberes intitulado Geometria Diferencial, área que apesar de apresentar inúmeras pesquisas em Matemática Pura, possui uma quantidade limitada de investigações em Educação Matemática.

Nessa perspectiva, esta pesquisa analisou de que modo se encontrava o ensino de GD por meio de um levantamento bibliográfico, em que deparamo-nos com artigos específicos que discutiam a necessidade de um estudo nessa área e propunham o uso de *softwares* como forma de contornar os obstáculos epistemológicos relacionados ao entendimento dos conceitos de GD, entre os quais se destacam a abstração dos conceitos e a complexidade envolvida. Por essa razão, esse estudo buscou indícios que o *software* Geogebra aliado a nossa metodologia de ensino auxiliava na transmissão de saberes desse campo, atuando como um facilitador no entendimento dos conceitos geométricos, por possibilitar a visualização desses conceitos.

Para a realização e fundamentação da nossa investigação, de forma criteriosa, acerca da nossa problemática fez-se necessário a sistematização proposta pela Engenharia Didática - ED, ao qual dedicamos uma parte do terceiro capítulo à sua gênese e significação. Desse modo, podemos compreender a estrutura da ED, que nos permitiu compreender de forma diferenciada o nosso fenômeno de interesse, sendo composta de quatro fases (análise preliminar, análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori*).

Por meio da análise preliminar, realizamos um estudo histórico de curvas e superfícies, aliado a uma fundamentação matemática com a finalidade de identificar os principais problemas existentes no ensino do objeto matemático, elaborando, em seguida, alternativas metodológicas de trabalho com tais problemas encontrados.

De forma mais sucinta, realizamos no capítulo 4, a análise de um livro – texto adotado em cursos introdutórios de GD, em diversas universidades do país, o livro de TENEBLAT(2008). No decorrer da nossa análise, deparamo-nos com limitações (e certos entraves) atinentes à abordagem do livro, que priorizou as manipulações natureza algébrico-analíticas e não tratavam, segundo nosso entendimento, importantes situações didáticas que referem-se papel da visualização e da percepção de propriedades relacionadas aos conceitos matemáticos fundamentais de GD.

No Capítulo 5, descrevemos e exemplificamos os vários conceitos abordados ao longo deste estudo, de modo a fornecer ao estudante que esteja a iniciar-se no campo de saberes da geometria diferencial uma forma diferenciada de explicação e visualização da matéria. Desse modo, buscamos transmitir o significado dos conceitos com o auxílio do *software* Geogebra de modo a relacionar a definição ao significado geométrico.

Assim verificou-se, inicialmente a noção geométrica do conceito curvatura em curvas planas, correlacionando-os aos vetores tangente e normal e analisando o seu comportamento ao longo das

curvas analisadas. Além disso, verificou-se que dadas duas curvas regulares, estas serão equivalentes se suas parametrizações apresentam o mesmo traço ou for possível aplicar uma mudança de parâmetros, tal fenômeno encontra-se ilustrado na Figura 33 por meio de uma simulação do Geogebra. Por meio da operação mudança de parâmetro, também compreendemos que sempre podemos reparametrizar pelo comprimento do arco, ou seja, mudar o parâmetro da curva afim que a curva apresente norma unitária.

Através da aplicação do conceito curvatura para curvas planas, averiguamos que se duas curvas parametrizadas pelo comprimento de arco possuem a mesma função curvatura diferem por uma isometria de $\mathbb{R}^2$, ou seja, essas curvas são congruentes conforme o TCP, ao explorarmos tal característica no *software* podemos compreender de forma mais clara, como ocorre o movimento rígido que torna uma curva congruente a outra.

Ao sucedermos a aplicação do conceito curvatura em curvas espaciais (em $\mathbb{R}^3$) constatamos que a função curvatura é uma propriedade que depende da orientação da curva, variando o seu sinal, isto é, não trata-se de um invariante topológico. Uma vez que a curvatura não caracteriza suficientemente a forma do traço de uma curva espacial, e para distinguir se duas curvas estão contidas num mesmo plano, recorreu-se ao conceito de torção, por tratar-se de uma propriedade geométrica invariante, dado que não depende do sentido do vetor normal nem da orientação da curva.

A inclusão do conceito geométrico torção, nos trouxe um encadeamento de novos conceitos e teoremas, como o vetor binormal e TCE, o que torna a compreensão do conceito indispensável. Por esta razão, correlacionamos o significado geométrico de curvatura ao significado geométrico de torção. Doravante, inferimos a existência de uma base ortonormal gerada pelos vetores normal, binormal e tangente, intitulada de Triedro de Frenet. Os vetores pertencentes a esse triedro também estabelecem três planos intitulados: plano normal, plano retificante e planos osculados, aos quais foram explanados na Figura 48, prosseguimos com a obtenção de equações através do Triedro de Frenet e propriedades relacionadas.

Finalizamos o estudo do campo epistêmico matemático, ponderando acerca das propriedades geométricas do conceito superfície através das duas formas fundamentais, tendo em conta que em ambas, primeira e segunda forma fundamental, tem propriedades invariantes perante a uma mudança de parâmetro. Em relação a segunda forma fundamental, necessitamos definir a aplicação normal de Gauss para facilitar o entendimento. Devemos ressaltar que o *software* tornou-se indispensável para definição de tais conceitos, por abstrair e descomplexificar o cálculo desses conceitos.

Desse modo, a ED oportunizou o desenvolvimento de uma compreensão histórica associada ao processo epistemológico-matemático dos conceitos de GD. No entanto, ainda não compreendíamos como poderíamos elaborar situações de ensino relacionadas aos conceitos basilares de curvas e incipientes de superfícies, de modo que, com a exploração do *software* Geogebra, possamos identificar um melhor entendimento e/ou a resignificação desses conceitos. Destarte, tornou-se necessário um

aporte teórico metodológico que nos auxiliassem a elaboração de situações-problema com os conceitos discutidos anteriormente. Por conseguinte, adotamos a TSD, por se tratar de um modelo teórico que se refere a transmissão de conteúdos matemáticos, ilustrando algumas situações fundamentais de aprendizagem, a elucidação acerca de tal metodologia de ensino foi desempenhada no Capítulo 3, conjuntamente a descrição da ED.

Na etapa de *análise a priori* da nossa pesquisa, desenvolvemos uma sequência de situações didáticas embasadas pelo pressupostos da TSD, em que buscamos indicadores da compreensão de conceitos relacionados a curvas planas e espaciais. Salientamos que a escolha desse objeto matemático para a análise, sucede-se por necessitar de conhecimentos prévios apenas de CVV.

Salientaremos, que a nossa pesquisa sucedeu-se no contexto da microengenharia didática e considerando os efeitos da transposição didática, os conceitos de GD foram desenvolvidos em situações de ensino que proporcionassem através da visualização o entendimento dos conceitos curvatura, torção, noções relacionadas aos vetores tangente, normal e binormal (Apêndice A) e simultaneamente confrontassem com o entendimento algébrico que alguns alunos possuíam desses conceitos.

Assim, na etapa de experimentação, podemos estabelecer as etapas da TSD, e a partir da análise dos dados compreender que os objetivos da nossa pesquisa foram alcançados. Apesar dos participantes da nossa pesquisas serem professores, e se inscreverem voluntariamente no minicurso em que executamos a nossa sequência didática, evidenciamos um certa timidez e desconforto no instante de expor suas resoluções e explicações. Por esta razão, tornou-se necessário a efetivação de um contrato didático, em que inicialmente pesquisador precisou explanar as finalidades do minicurso dialogando a importância da participação, para que pudéssemos investigar com profundidade se a metodologia associada a representação dos conceitos no software efetivamente a assimilação dos conceitos de GD envolvidos, para que participassem efetivamente da pesquisa e se propendessem ir a lousa demonstrar suas soluções. Por conseguinte, incluímos ao final do minicurso um questionário metodológico a fim de nos conferir melhorias a aplicação da nossa sequência didática.

Ainda durante a experimentação, intuímos que apesar do nosso público alvo tratar-se de professores licenciados, não estavam habituados com a prática de demonstração, e esperavam por parte do pesquisador uma exposição de tal prática, mencionando no questionário que a metodologia utilizada os colocava em um posicionamento de desenvolvimento de protagonismo estudantil.

Em relação aos vetores tangente, normal em curvas planas identificamos que os participantes os calculavam corretamente, no entanto quando requerido que reconhecessem esses vetores nas curvas erravam, o que nos levar a verificar que tais conceitos algébricos estavam adequadamente estabelecidos no ponto de vista algébrico mas não encontrava-se devidamente estabelecido geometricamente. Do mesmo modo, percebemos dificuldades por parte dos professores para a realização das operações de derivação de funções trigonométricas e utilização de propriedades

atinentes ao produto interno, o que tornou-se um entrave ao apropriação do conceito. Ademais, salientaremos que alguns participantes afirmaram que a compreensão de alguns conceitos sucedeu-se apenas após a visualização, atestando que o *software* simplificava a compreensão dos conceitos.

Desse modo, na etapa de validação, podemos identificar por meio da confrontação dos resultados que a utilização do Geogebra contribuiu para a compreensão e mudança de significação dos conceitos de GD analisados.

Assim, ao final dessa pesquisa, esperamos que nosso trabalho contribua no sentido de detalhar, sistematizar, identificar, pormenorizar e discutir elementos inerentes ao ensino de GD, dado a pouca visibilidade, tanto no contexto nacional quanto internacional, de pesquisas de ensino/aprendizagem em relação a essa área.

Por conseguinte, concluímos que esta pesquisa também oportunizou aos alunos (professores em formação continuada), do ponto de vista acadêmico, a ampliação de seu repertório de conhecimentos relativo a área de Geometria Diferencial. Além disso, possibilitou o desenvolvimento de uma concepção epistemológico-matemática do ensino de GD, isso é, do ponto de vista de ordem didática, fornecemos indicações e descrevemos procedimentos que permitem o uso e a exploração, sobretudo em sala de aula, do *software* Geogebra no campo de saberes de GD, de modo complementar. Dessa forma, desenvolvemos tal processo por meio da transposição didática fundamentada em uma teoria de ensino específica para a DM, que no caso desta pesquisa, destacou-se a TSD.

Em relação a essa metodologia de ensino, os participantes relataram que apesar de desconhecer tal prática, consideram uma prática diferenciada de ensino, que leva os alunos a refletir e participar ativamente do processo de ensino do conhecimento matemático. Assim, inferimos que essa pesquisa pode ser empregue a alunos que possuam conhecimentos CVV e queiram adquirir conhecimentos acerca do campo epistêmico GD quanto a alunos que disponham de conhecimentos de GD e ensejem melhorar o entendimento desse campo epistêmico. Outra aproveitamento da pesquisa concerne a sua utilização como uma proposta de ensino destinada a professores que busquem uma forma de diferente da convencional, para a transmissão de conceitos de GD.

Além disso, salientamos que esta pesquisa dispôs de caráter exploratório e descritivo acerca do ensino de GD, buscando tentar entender algumas questões relativas ao tema, e ao mesmo tempo levantar questões adicionais a serem estudadas posteriormente. Dado este caráter e a falta de estudos sobre o tema, acreditou-se que este trabalho deveria ter também, como objetivo, levantar o máximo possível destas questões. Sendo assim, a seguir são apresentadas possíveis considerações para estudos posteriores :

- Uma análise aprofundada/caracterização da manifestação de habilidades intuitivas dos sujeitos por intermédio da percepção e visualização proporcionada pelo *software* Geogebra durante a transmissão de saberes de GD que geralmente são desconsideradas no ensino tradicional;

- Identificar/registrar as formas de manifestação do *raciocínio intuitivo* durante a sequência didática proposta;

- A elaboração de outras aplicações no *software* Geogebra a conceitos avançados de Geometria Diferencial.

- Aprofundar o estudo acerca da aprendizagem de GD, em uma tentativa, de verificar se a sequência didática proposta por esta pesquisa é completamente satisfatória.

Desse modo, finalizamos nossa pesquisa, ensejando que esta dissertação contribua para outras pesquisas que buscam explorar, com o viés didático da TSD, outros conceitos matemáticos de GD.

REFERÊNCIAS

- AKTÜMEN, Muharem; HORZUM, Tugba; CEYLAN, Tuba. Modelagem e Visualização do Processo da Curva de Pen Point por GeoGebra. **Revista Européia de Educação Contemporânea**, v. 4, n. 2, p. 88-99, 2013.
- ALBUQUERQUE, R. (2004). **Introdução à Geometria Diferencial**. Departamento de Matemática. Universidade de Évora, Portugal.
- ALENCAR, H.; SANTOS, W. **Geometria das curvas planas**. Universidade Federal de Goiânia. 2002.
- ALENCAR, Hilario; SANTOS, Walcy. **Introdução às curvas planas**. IMPA/UFC, 2008.
- ALMOULOUD, Saddo Ag. A teoria das situações didáticas. **São Paulo: PUC-SP**, 2004.
- ALMOULOUD, Ag Saddo; SILVA, M. J. F. Engenharia didática: evolução e diversidade. **Revemat:R. Eletr. de Educação Matemática**, v.7, n. 2, p. 22-52, 2012. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/viewFile/1981-1322.2012v7n2p22/23452>>. Acesso em : 03 de Agosto de 2019.
- ALMOULOUD, Ag Saddo. **Fundamentos da Didática da Matemática**. São Paulo: Editora UFPR. 2007.
- ALMOULOUD, S. A. Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. **REVEMAT**. Florianópolis (SC), v.11, n. 2, p. 109-141, 2016.
- ALMOULOUD, S. A.; DE QUEIROZ, C.; COUTINHO, S. 2008. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 3, n. 1, p. 62-77. Acesso em 16 de julho de 2018, de <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/download/1981-1322.2008v3n1p62/12137>
- ALVES, F. R. **Aplicações da sequência Fedathi na promoção do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis**. 2011. Tese de Doutorado. Tese doutoral em educação matemática). Universidade Federal do Ceará–UFC. Disponível em: http://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/3166/1/2011_Tese_%20FRVALVES.pdf. Acesso em : 03 de Agosto de 2019.
- ALVES, Francisco Regis Vieira. Engenharia Didática para a construção de gráficos no Cálculo: experiência num curso de Licenciatura em Matemática. **Anais do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, p. 1-21, 2012.
- ALVES, Francisco. R. V. (2013a) Exploring L'Hospital Rule with the Geogebra. **GGIJRO - Geogebra International Journal of Romania**, p. 15-20. Disponível em: <http://ggijro.wordpress.com/issues/vol-3-no-1/>. Acesso em : 03 de Agosto de 2019.
- ALVES, Francisco. R. V. (2013b) Visualizing in Polar Coordinates with Geogebra. **GGIJRO - Geogebra International Journal of Romania**. 2013b, p. 21-30. Disponível em: <http://ggijro.wordpress.com/issues/vol-3-no-1/>. Acesso em : 03 de Agosto de 2019.

ALVES, Francisco Regis Vieira. Construção de curvas parametrizadas: uma discussão sobre o uso dos *softwares* Geogebra e CAS Maple. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**. ISSN 2237-9657, v. 3, n. 1, p. 22, 2014.

ALVES, Francisco Regis Vieira. Didática de Matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. **Interfaces da Educ.**, Paranaíba, v.7, n. 21, p.131-150, 2016a.

ALVES, Francisco Regis Vieira. Engenharia Didática no contexto da Transição Complexa do Cálculo: aspectos epistemológicos e metodológicos sobre a noção de integração de funções. **Revista Thema**, v. 13, n. 1, p. 47-64, 2016b.

ALVES, Francisco Regis Vieira. Sobre a evolução matemática, histórico-epistemológica do modelo de Fibonacci: sobre a abordagem matricial. **Revista Thema**, v. 14, n. 1, p. 91 – 111, 2017a.

ALVES, Francisco Regis Vieira. Engenharia Didática de Formação (EDF): sobre o ensino dos Números (Generalizados) de Catalan (NGC) Didactical Engineering: about the teaching of generalized Catalan numbers. **Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, [S.l.], v. 20, n. 2, out. 2018a.
ISSN 1983-3156. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/36808>>.
Acesso em: 05 jan. 2019. doi:<https://doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i2p47-83>.

ALVES, Francisco Regis Vieira; CATARINO, Paula Maria Machado Cruz Catarino. ENGENHARIA DIDÁTICA DE FORMAÇÃO (EDF): REPERCUSSÕES PARA A FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA NO BRASIL. **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA-RS**, v. 2, n. 18, 2018b.

ALVES, Francisco Regis Vieira. Engenharia didática para o ensino de variável complexa: visualização de conceitos relacionados ao processo matemático de integração. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis, v. 11, n. 2, p. 3-29, nov. 2018b. ISSN 1982-5153. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/1982-5153.2018v11n2p3>>. Acesso em: 05 jan. 2019. doi:<https://doi.org/10.5007/1982-5153.2018v11n2p3>.

ALVES, Francisco Regis Regis Vieira; CATARINO, Paula Maria Machado Cruz Catarino. Engenharia Didática De 2ª Geração Com O Tema: H (X)-Polinômios De Jacobsthal. **Revista ENCITEC**, v. 8, n. 3, p. 28-55, 2018c.

ARAÚJO, Cláudio Lourenço *et al.* **Geogebra como recurso facilitador do processo de ensino-aprendizagem de curvas planas**. Dissertação mestrado, Universidade Federal de Goiás - UFG, 2018. Disponível em :
<https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/8479/5/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20-%20Cl%C3%A1udio%20Louren%C3%A7o%20Ara%C3%BAjo%20-%202018.pdf>. Acesso em: 25 de Setembro de 2019.

ARAUJO, Paulo Ventura. **Geometria Diferencial**. 2ª ed. Rio de Janeiro: Editora SBM;2012

ARTIGUE, M. Modélisation et reproductibilité em Didactique des Mathématiques. **Les Cahier Rouge**, nº 8, p.1-22, 1984.

ARTIGUE, Michéle *et al.* **Ingeniería didáctica en educación matemática**. 1995. Disponível em :
<http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf> . Acesso em 30 de Setembro de 2019.

ARTIGUE, Michèle; DOUADY, Régine. La didactique des mathématiques en France. **Revue française de pédagogie**, p. 69-88, 1986. Link: https://www.persee.fr/doc/rfp_0556-7807_1986_num_76_1_1503

BACHELARD, Gaston. **A formação do espírito científico**. São Paulo: Contra-Ponto, 1995.

BATISTA, Ricardo Alexandre. **Tópicos de geometria diferencial**. 2011. 91 f. Dissertação - (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2011. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/94373>>. Acesso em : 25 de Setembro de 2019.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais : introdução aos parâmetros curriculares nacionais**. Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília : MEC/SEF, 1997.

BREDA, Ana; TROCADO, Alexandre; SANTOS, José. O GeoGebra para além da segunda dimensão. **Indagatio Didactica**, v. 5, n. 1, 2013.

BREDA, A.; SANTOS, J. The Riemann Sphere in GeoGebra. **Sensos-e**, v. 2, n. 1, p. 2183-1432, 2015.

BROUSSEAU, Guy. **Théorisation de phénomènes d'enseignement des mathématiques**. (thèse de doctorat). Bordeaux : Université de Bordeaux I. (1986) 905f.

BROUSSEAU, Guy. Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. Nadine Bednarz, Catherine Garnier. Construction des savoirs Obstacles et Conflits, **CIRADE Les éditions** Agence d'Arc inc., pp.41-63, (1989). fhal-00516581v1f. Disponível em : https://hal.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/516581/filename/Les_obstacles_epistemologiques_et_la_didactique_des_mathematiques89.pdf. Acesso em 25 de Setembro de 2019.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino**. Ática, 2008.

BRUM, Wanderley Pivatto; SCHUHMACHER, Elcio. A engenharia didática como campo metodológico para o planejamento de aula de Matemática: análise de uma experiência didática para o estudo de geometria esférica. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 6, n. 2, 2015.

CHEVALLARD, Y. **La Transposition didactique**. Paris: La Pensée Sauvage Édition, 1991.

COIMBRA, Jose de Ribamar Viana et al. **Uma introdução a geometria diferencial**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática Aplicada, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2008. Disponível em: http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/307015/1/Coimbra_JosedeRibamarViana_M.pdf. Acesso em : 25 de Setembro de 2019.

DA SILVA, C. P. **Aspectos históricos do desenvolvimento da pesquisa matemática no Brasil**. Editora Livraria da Física. 2009.

DIKOVIĆ, Ljubica. Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level. **Computer Science and Information Systems**, v. 6, n. 2, p. 191-203, 2009.

DOUADY, R. **Didactique des Mathématiques**. Encyclopedia Universalis, 1985, p.885-889.

DOUADY, Régine. Didáticas des Mathématiques. **Les Cahier Rouge**, 1984, nº 6, p. 1 – 22, 1984, ISSN 2177-7691.

DOUADY, Régine. Géométrie, graphiques, fonctions au collège. In : **Revista Eletrônica de investigação en educación e ciencias**. 2008, nº 1, p. 1-7.

DOS SANTOS, Arlem Atanazio. (2017). **ENGENHARIA DIDÁTICA SOBRE O ESTUDO E ENSINO DA FÓRMULA DE BINET COMO MODELO DE GENERALIZAÇÃO E EXTENSÃO DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI**. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará- IFCE, Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Fortaleza.

DOMINGUES, João Paulo Felipe. **Geometria diferencial das curvas planas**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Estadual Paulista - UNESP, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2013. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/94342/000734154.pdf?sequence=1>. Acesso em : 25 de Setembro de 2019.

DO CARMO, Manfredo P. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 2ª ed. Rio de Janeiro: Editora SBM; 2016.

EVES, Howard Whitley. **Introdução à história da matemática**. Unicamp, 1995.

FARIA, Esmeralda Pereira de. **Um estudo sobre curvas, superfícies e suas parametrizações**. 2017. Tese de Doutorado, Universidade de Madeira – UMA, Funchal, Portugal. Disponível em: [//repositorio.uma.pt/bitstream/10400.13/1592/1/MestradoEsmeraldaFaria.pdf](http://repositorio.uma.pt/bitstream/10400.13/1592/1/MestradoEsmeraldaFaria.pdf). Acesso em: 03 de Agosto de 2019

FLÓREZ, M.; CARBONELL, M. V.; MARTÍNEZ, E. Design of Cycloids, Hypocycloids and Epicycloids Curves with Dynamic Geometry *Software*. Engineering Applications. **EDULEARN11 Proceedings**, p. 1011-1016, 2011.

FREITAS, JLM de. Teoria das situações didáticas. **Educação Matemática: uma nova introdução**. 3ª ed. São Paulo: Ed. PUC, p. 77-111, 2008.

GRANDE, A.L. NUNES, L.D.O. SILVA, M.P.D. **O estudo do Teorema Fundamental das Curvas Planas utilizando o Geogebra**. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática. Tuxtla-Chiapas - México. 2015.

GONDINO, Juan. D. *et al*. Didactic engineering design-based research in mathematics education. **CERME**, 2013, p.1-10. Disponível em: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/Godino_CERME_2013.pdf. Acesso em: 15 de maio de 2017.

GORODSKI, Cláudio. Alguns aspectos do desenvolvimento da geometria. **Humboldtbrasil[S.l: s.n.]**, 2002.

GUZMÁN, M. The role of visualization in the teaching and learning of mathematical analysis. In: International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level, 2., 2002, Hersonissos. **Proceedings of 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level**. Hersonissos: University of Crete, 2002. p.1-24. Disponível em: <http://www.math.uoc.gr/~ictm2/>. Acesso em: 9 maio de 2018.

KABACA, T.; AKTUMEN, M. Using the Geogebra as an Expressive Modeling Tool: discovering the anatomy of Cycloids parametric equation. In : **First Eurasia Meeting of Geogebra**. 2010.

Disponível em:

<https://www.researchgate.net/profile/Tolga_Kabaca/publication/290393956_Using_GeoGebra_as_an_Expressive_Modeling_Tool_Discovering_the_Anatomy_of_the_Cycloid's_Parametric_Equation/links/5696a7a408aea2d743747e54.pdf > . Acesso em: 23 de março de 2018.

KLINGENBERG, Wilhelm. **A Course in Differential Geometry**. Editora: Springer Science & Business Media, 2013.

LABORDE, Collete. Affronter la complexité des situations didactiques d'apprentissage des mathématiques en classe: défis et tentatives. **DIDASKALIA**, 10(1), 97 – 112, 1997.

LIMA, Elon Lages. **Variedades diferenciáveis**. Instituto Matemática Puro e Aplicada, Conselho Nacional de Pesquisas, 1973.

MIYASAKI, Rodrigo et al. **Um estudo de curvas planas utilizando o GeoGebra**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática- PROFMAT. Universidade Federal de Goiás -UFG, Instituto de Matemática e Estatística, 201. Disponível em:

<https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/7153/5/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20-%20Rodrigo%20Miyasaki%20-%202017.pdf> Acesso em : 03 de Setembro de 2019

MEIER, Melissa; DA SILVA, Rodrigo Sychocki. O uso da Geometria Dinâmica em Modelagens Geométricas : possibilidade de construir conceitos no ensino fundamental. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 4, n. 6, 2015.

MENDES, Luis Felipe Porto; CHAVES, Rosa Maria B. Evolutas e Involutas de Curvas Espaciais. **IME-USP**, 2007. Disponível em : https://www.ime.usp.br/arquivos/4congresso/42%20Luis%20Felipe%20Porto%20Mendes_N.pdf. Acesso em 30 de Setembro de 2019.

MENEZES, Daniel Brandão. **O ENSINO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA PERSPECTIVA DA SEQUÊNCIA FEDATHI: CARACTERIZAÇÃO DO COMPORTAMENTO DE UM BOM PROFESSOR** (Tese de Doutorado) – UFC. Fortaleza, 2018. Disponível em: http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/37124/1/2018_tese_dbmenezes.pdf Acesso em : 02 de Agosto de 2019.

MOTOKANE, Marcelo Tadeu. Sequências didáticas investigativas e argumentação no ensino de ecologia. **Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências (Belo Horizonte)**, v. 17, n. spe, p. 115-138, 2015.

MONTIEL, Sebastián; ROS, Antonio. **Curves and surfaces**. Editora: American Mathematical Soc., 2009.

NETO, Antonio Caminha Muniz. **Tópicos de geometria diferencial**. 1ª ed. Rio de Janeiro: Editora SBM; 2014.

O'NEILL, B. **Elementary Differential Geometry** .Rev. 2ª ed. Academic Press. London—New York, 2006.

OLIVEIRA, R.R. (2018). **ENGENHARIA DIDÁTICA SOBRE O MODELO DE COMPLEXIFICAÇÃO DA SEQUÊNCIA GENERALIZADA DE FIBONACCI: RELAÇÕES RECORRENTES N-DIMENSIONAIS E REPRESENTAÇÕES POLINOMIAIS E MATRICIAIS**. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará-IFCE, Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Fortaleza.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PAIVA, Ana Carla Pimentel; ALVES, Francisco Regis Vieira. Utilização do Geogebra como auxílio no ensino de curvatura de curvas planas e espaciais. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**. ISSN 2237-9657, v. 7, n. 2, p. 65-79, 2018a .

PAIVA, Ana Carla Pimentel; ALVES, Francisco Régis Vieira. ENGENHARIA DIDÁTICA PARA O TEOREMA FUNDAMENTAL DAS CURVAS PLANAS: ANÁLISES PRELIMINARES E A PRIORI. **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA-RS**, v. 2, p. 123-131, 2018b.

PAIVA, Ana Carla Pimentel; ALVES, Francisco Regis Vieira. Um estudo da Primeira Forma Quadrática: Uma proposta de ensino com construção dinâmica. **Unión: revista iberoamericana de educación matemática**, n. 55, p. 123-143, 2019.

PALMAS, Óscar A. V.; VICTORIA, Reyes; GUADALUPE, J. **Curso de geometría diferencial. Parte 1. Curvas y superficies**. Editora: Editorial: Universidad Nacional Autónoma de México-UNAM. 2005

PICADO, Luis Fernando Mora. Parametrizaciones de curvas y superficies: Construcción de sólidos con GeoGebra 3D. **Revista Digital: Matemática, Educación e Internet**, v. 19, n. 1, 2019.

PICCELLI, P. H. **Processos de Validação de Conjecturas em Geometria Plana**. 2001.105f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, MS, 2001.

PIRES, Antônio S. T. **Geometria Diferencial para físicos** .1ª ed. São Paulo : Livraria da Física; 2015.

PINSKY, Nathan. (2013). **Mathematical Knowledge for Teaching and Visualizing Differential Geometry**. Monografia, Bacharelado em Matemática, Harvey Mudd College -Claremont, Califórnia, EUA. Disponível em : http://scholarship.claremont.edu/hmc_theses/49 . Acesso em 25 de Setembro de 2019.

POMMER, Wagner Marcelo. Brousseau e a idéia de Situação Didática. **SEMA–Seminários de Ensino de Matemática**. São Paulo, FEUSP, 2008.

POMMER, Wagner Marcelo. A Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares. **São Paulo:[sn]**, 2013

ROSA, C. P., RIBAS, L., & BARAZZUTTI, M. (2012). *ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS*. In: III Escola de Inverno de Educação Matemática 1o Encontro Nacional PIBID-MATEMÁTICA, 01 a 03 de agosto de 2012, Santa Maria: Rio Grande do Sul. **Anais: 1º Encontro Nacional do Pibid-Matemática**, Universidade Federal de Santa Maria — UFSM, Santa Maria. Disponível em : http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/RE/RE_2_Rosa_Carine_Pedroso.pdf . Acesso em 6 de dezembro de 2018.

RESENDE, Kepler Alves *et al.* **Curvas e Aplicações**. 2017.- Dissertação de mestrado . Universidade Federal de Goiás- UFG, Instituto de Matemática e Estatística. Disponível em : <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/download/35458/26493> . Acesso em: 25 de Setembro de 2019.

SILVA, Danielle Apolinário da. **A utilização dos softwares Geogebra, Winplot e K3dsurf no estudo das superfícies quádricas: uma experiência com alunos do curso de licenciatura em**

matemática. Monografia, Universidade Federal da Paraíba – UFP , Centro de Ciências Aplicadas e Educação, Departamento de Ciências Exatas, 2017. Disponível em : <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/3285/1/DAS19062017.pdf>. Acesso em 25 de Setembro de 2019.

STEWART, James. Cálculo vol. II. **Pioneira Thompson Learning**, 2001.

STRUIK, Dirk J. **Lectures on classical differential geometry**. Editora: Courier Corporation, 2012.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães; PASSOS, Claudio Cesar Manso. Um pouco da Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau Some of the theory of didactic situations (tsd) Guy Brousseau. Zetetike, v. 21, n. 1, p. 155-168, 2013.

TENEBLAT, K. 2008. **Introdução à Geometria Diferencial**.ed. 2ª. Editora Blucher. São Paulo.

ZBIEK, R.M., & CONNER, A. (2006). Beyond motivation: Exploring mathematical modeling as a context for deepening students' understandings of curricular mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, 63(1), 89 - 112.

WILLMORE, Thomas James. **An introduction to differential geometry**. Editora: Courier Corporation, 2013.

ANEXO A



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA DO CEARÁ



PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: ENGENHARIA DIDÁTICA SOBRE O ESTUDO E ENSINO DE CONCEITOS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL: DESCRIÇÃO DE SITUAÇÕES DIDÁTICAS COM A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Pesquisador: ANA CARLA PIMENTEL PAIVA

Área Temática:

Versão: 2

CAAE: 08813119.5.0000.5589

Instituição Proponente: INSTITUTO FEDERAL DE EDUCACAO, CIENCIA E TECNOLOGIA DO CEARA

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 3.239.452

Apresentação do Projeto:

Trata-se de projeto de pesquisa a ser desenvolvido com base nos princípios da Engenharia Didática, visando estudar e discutir as contribuições que o uso do *software* Geogebra pode oferecer para a compreensão de alguns conceitos matemáticos de Geometria Diferencial.

Objetivo da Pesquisa:

Objetivo geral

Investigar o ensino da disciplina Geometria Diferencial, em particular os conceitos basilares de curvas e incipientes de superfícies, sob a perspectiva de uma proposta metodológica intitulada Engenharia Didática, e o uso do *software* Geogebra aplicado a um grupo de professores em formação inicial. Objetivos específicos

-Analisar as aulas desenvolvidas no grupo de estudos com os conteúdos da disciplina Geometria Diferencial sob a perspectiva da metodologia Engenharia Didática;

-Compreender os processos envolvidos na visualização de conceitos matemáticos proporcionados pelo *software* Geogebra que influenciam no aprendizado, assim como as dificuldades sentidas pelos alunos na realização das atividades;

-Investigar se as situações didáticas elaboradas influenciaram para alguma mudança das ações nos estudos dos alunos com apoio no comportamento adotado pelo professor.

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703
Bairro: Jardim América
UF: CE **Município:** FORTALEZA
Telefone: (85)3401-2332

CEP: 60.410-426

E-mail: cep@ifce.edu.br

Página 01 de 03



Continuação do Parecer: 3.239.452

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

Riscos apresentados:

Essa pesquisa apresenta risco mínimo, dado não se realiza nenhuma intervenção ou modificação intencional nas variáveis fisiológicas ou psicológicas e sociais dos indivíduos que participam no estudo. Além disso, garantimos o anonimato, confiabilidade e participação voluntária e a não utilização das informações em prejuízo das pessoas. No entanto, o participante estará sujeito aos seguintes desconfortos: insatisfação, perda de tempo e desgaste emocional. Com o intuito de diminuir esses riscos, asseguramos que o estudo será suspenso imediatamente ao percebermos algum risco ou danos à saúde do sujeito participante da pesquisa, estando atentos aos sinais verbais e não verbais de desconforto. Benefícios apresentados:

Esperamos que este estudo traga um notável progresso aos professores no que se refere ao entendimento dos conceitos fundamentais dos tópicos de Geometria Diferencial e informações importantes sobre as metodologias Engenharia Didática e Teoria das Situações Didáticas, que serão utilizadas durante a aplicação da pesquisa, de forma que o conhecimento que será construído a partir desta pesquisa possa subsidiar futuras adesões à mesma metodologia

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

A pesquisa tem aplicabilidade prática e mostra-se importante para a área de estudo em questão. O projeto apresenta referencial teórico atual e metodologia descrita em tópicos, facilitando a sua compreensão.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

Todos os termos foram devidamente apresentados.

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

O protocolo de pesquisa não apresenta pendências ou inadequações éticas.

Considerações Finais a critério do CEP:

Enviar ao CEP, relatório ao final da pesquisa.

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_1244678.pdf	20/03/2019 17:20:52		Aceito

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703

Bairro: Jardim América

CEP: 60.410-426

UF: CE

Município: FORTALEZA

Telefone: (85)3401-2332

E-mail: cep@ifce.edu.br



Continuação do Parecer: 3.239.452

TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE.docx	20/03/2019 17:20:29	ANA CARLA PIMENTEL PAIVA	Aceito
Cronograma	Cronograma.pdf	20/03/2019 17:19:25	ANA CARLA PIMENTEL PAIVA	Aceito
Outros	Questionario.docx	25/02/2019 22:07:29	ANA CARLA PIMENTEL PAIVA	Aceito
Declaração de Pesquisadores	Regresso.pdf	23/02/2019 16:08:51	ANA CARLA PIMENTEL PAIVA	Aceito
Orçamento	orcamento.pdf	23/02/2019 15:58:38	ANA CARLA PIMENTEL PAIVA	Aceito
Declaração de Pesquisadores	Compromisso_de_Apresentacao_de_Resultados.pdf	23/02/2019 15:51:48	ANA CARLA PIMENTEL PAIVA	Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	infraestrutura.pdf	23/02/2019 15:48:39	ANA CARLA PIMENTEL PAIVA	Aceito
Folha de Rosto	Folhaderosto.pdf	23/02/2019 11:09:39	ANA CARLA PIMENTEL PAIVA	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	PROJETO.pdf	13/02/2019 17:45:31	ANA CARLA PIMENTEL PAIVA	Aceito

Situação do Parecer:

Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:

Não

FORTALEZA, 02 de Abril de 2019

Assinado por:

Arinilson Moreira Chaves Lima

(Coordenador(a))

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703

Bairro: Jardim América

UF: CE

Município: FORTALEZA

CEP: 60.410-426

Telefone: (85)3401-2332

E-mail: cep@ifce.edu.br

Página 03 de 03

ANEXO B



TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Título da pesquisa:

**Engenharia Didática sobre o estudo e ensino de conceitos de Geometria Diferencial :
descrição de situações didáticas com a utilização do software Geogebra .**

Pesquisadora : Ana Carla Pimentel Paiva

Orientador: Francisco Régis Vieira Alves

Você está sendo convidado a participar como voluntário de uma pesquisa. Este documento, chamado Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, visa assegurar seus direitos como participante e é elaborado em duas vias, uma que deverá ficar com você e outra com o pesquisador.

Por favor, leia com atenção e calma, aproveitando para esclarecer suas dúvidas. Se houver perguntas antes ou mesmo depois de assiná-lo, você poderá esclarecê-las com o pesquisador. Se preferir, pode levar este Termo para casa e consultar seus familiares ou outras pessoas antes de decidir participar. Não haverá nenhum tipo de penalização ou prejuízo se você não aceitar participar ou retirar sua autorização em qualquer momento.

Justificativa e objetivos:

Este estudo tem como questionamento norteador: Como elaborar situações de ensino relacionadas a conceitos basilares de curvas e incipientes de superfícies, de modo que, com a exploração do *software* Geogebra, possamos identificar a mobilização de um raciocínio intuitivo?

Objetivo Geral da pesquisa:

Investigar o ensino da disciplina Geometria Diferencial, em particular, os conceitos basilares de curvas e incipientes de superfícies, sob a perspectiva de uma proposta metodológica

intitulada Engenharia Didática e o uso do *software* Geogebra aplicado a um grupo de professores em formação inicial.

Objetivos Específicos:

- Analisar as aulas desenvolvidas no grupo de estudos com os conteúdos da disciplina Geometria Diferencial sob a perspectiva da metodologia Engenharia Didática;
- Compreender os processos envolvidos na visualização de conceitos matemáticos proporcionados pelo *software* Geogebra que influenciam o aprendizado e as dificuldades sentidas pelos alunos na realização das atividades;
- Investigar se as situações didáticas elaboradas influenciaram uma mudança das ações nos estudos dos alunos com apoio no comportamento adotado pelo professor;

Procedimentos:

Participando do estudo você está sendo convidado a fazer o preenchimento de questionário e gravação de entrevista em áudio ou vídeo. Estes procedimentos descritos acima ocorrerão nas dependências da Universidade Estadual do Ceará dentro do horário do minicurso, não sendo necessário o deslocamento ao campus em outros períodos. Somente o pesquisador e a orientadora terão acesso ao material coletado e a identidade dos participantes será mantida em sigilo absoluto. As entrevistas e aplicação de questionários devem ocorrer no período de uma aula (50 minutos). Ao fim da pesquisa, os dados serão discutidos pelos pesquisadores envolvidos e, em seguida, o material coletado na forma de questionário e entrevistas de vídeo ou áudio serão descartadas, ficando de posse dos pesquisadores por um período máximo de 12 meses.

Desconfortos e riscos:

Essa pesquisa apresenta risco mínimo: dado que se trata de estudo que emprega técnicas e métodos retrospectivos de pesquisa e aqueles em que não se realiza nenhuma intervenção ou modificação intencional nas variáveis fisiológicas ou psicológicas e sociais dos indivíduos que participam no estudo, entre os quais se consideram: questionários, entrevistas, revisão de prontuários clínicos e outros, nos quais não haja identificação do participante ou intervenção considerada invasiva à intimidade do indivíduo;

Benefícios:

Ao participar desta pesquisa você não terá nenhum benefício direto. Entretanto, esperamos que este estudo traga um notável progresso dos professores no que se refere ao entendimento dos conceitos fundamentais dos tópicos de Geometria Diferencial e informações importantes sobre

as metodologias Engenharia Didática e Teoria das Situações Didáticas que serão utilizadas durante a aplicação da pesquisa, de forma que o conhecimento que será construído a partir desta pesquisa possa subsidiar futuras adesões a mesma metodologia, onde o pesquisador se compromete a divulgar os resultados obtidos.

Acompanhamento e assistência:

Caso o participante necessite de algum acompanhamento ou assistência poderá solicitar aos pesquisadores responsáveis pela pesquisa. Se assim o desejar, poderá solicitar a interrupção da participação na pesquisa, se a mesma estiver lhe causando algum desconforto.

Sigilo e privacidade:

Você tem a garantia de que sua identidade será mantida em sigilo e nenhuma informação será dada a outras pessoas que não façam parte da equipe de pesquisadores. Na divulgação dos resultados desse estudo, seu nome não será citado.

Ressarcimento e indenização:

Você terá direito ao ressarcimento das despesas diretamente decorrentes de sua participação na pesquisa e à indenização pelos danos resultantes desta, nos termos da Lei.

Contato:

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, você poderá entrar em contato com os pesquisadores Ana Carla Pimentel Paiva ou Francisco Régis Vieira Alves, Av. Treze de Maio, 2081 - Benfica, Fortaleza - CE, 60040-531, Coordenação do Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciência e Matemática (PGECEM, sala 141, fone (85) 99287482, e-mail: carlapimentel00@gmail.com

Em caso de denúncias ou reclamações sobre sua participação e sobre questões éticas do estudo, você poderá entrar em contato com a secretaria do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) do IFCE das 08:00hs às 12:00hs e das 13:00hs as 17:00hs no IFCE Reitoria - R. Jorge Dumar, 1703 - Jardim América, Fortaleza - CE, 60410-426; fone (85) 34012332 e-mail: cep@ifce.edu.br

Consentimento livre e esclarecido:

Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais riscos e o incômodo que esta possa acarretar, aceito participar e declaro estar recebendo uma via original deste documento assinada pelo pesquisador e por mim, tendo todas as folhas por nós rubricadas:

Nome do(a) participante:

Contato telefônico (opcional):

e-mail (opcional):

(Assinatura do participante ou nome e assinatura do seu RESPONSÁVEL LEGAL)

Data: ____/____/____.

Responsabilidade do Pesquisador:

Asseguro ter cumprido as exigências da resolução 466/2012 CNS/MS e complementares na elaboração do protocolo e na obtenção deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Asseguro, também, ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Informo que o estudo foi aprovado pelo CEP perante o qual o projeto foi apresentado. Comprometo-me a utilizar o material e os dados obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

Nome do(a) pesquisador(a):

[Assinatura do(a) pesquisador(a)]

Data: ____/____/____.

APÊNDICE A



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CEARÁ



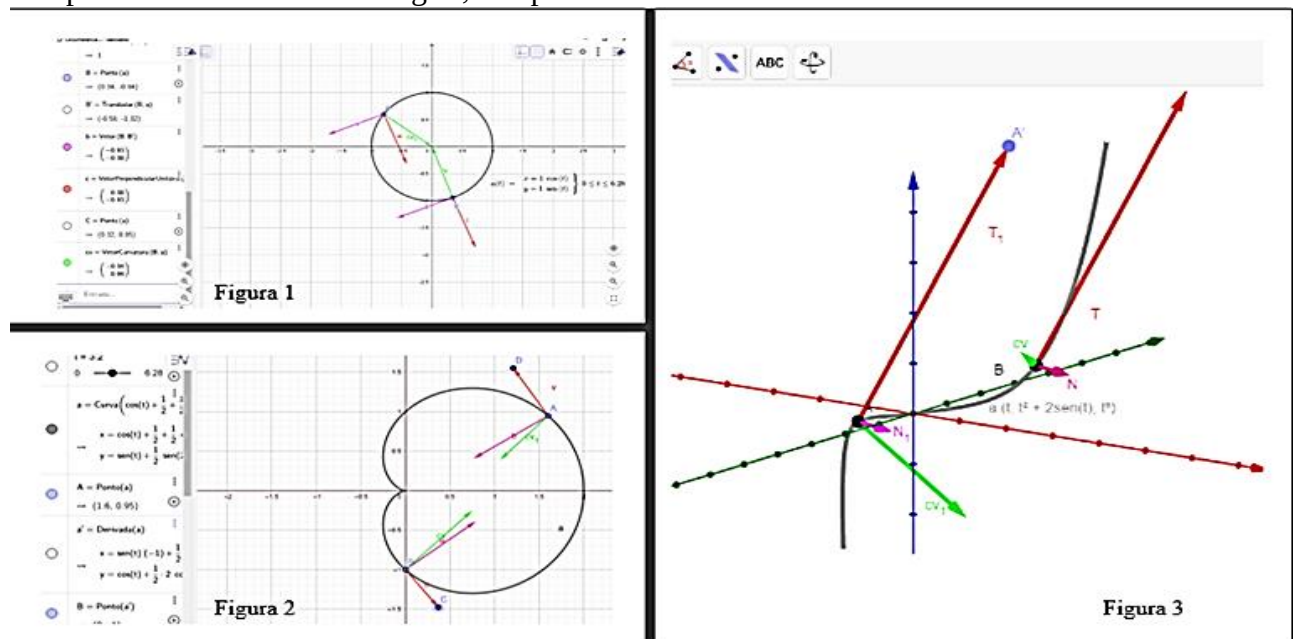
PGECM

QUESTIONÁRIO: SITUAÇÕES-PROBLEMA O ESTUDO DE CURVAS COM A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Local de Aplicação: IFCE- Campus Fortaleza
Pesquisadora : Ana Carla Pimentel Paiva
Orientador: Francisco Régis Vieira Alves

Situação I: Encontre por meio dos vetores tangente e normal, as fórmulas do diedro de Frenet, desenvolvendo assim, o significado do conceito curvatura.

Situação II: Analise e efetue o cálculo da curvatura das seguintes curvas $\gamma(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$, $\alpha(t) = (t, t^4)$ e $\alpha(t) = (\cos(t)(2 \cos(t) - 1), \sin(t)(2 \cos(t) - 1))$, $t \in \mathbb{R}$. Depois disso, avalie por meio do *software* Geogebra geometricamente o comportamento das curvas a seguir, nos pontos indicados.



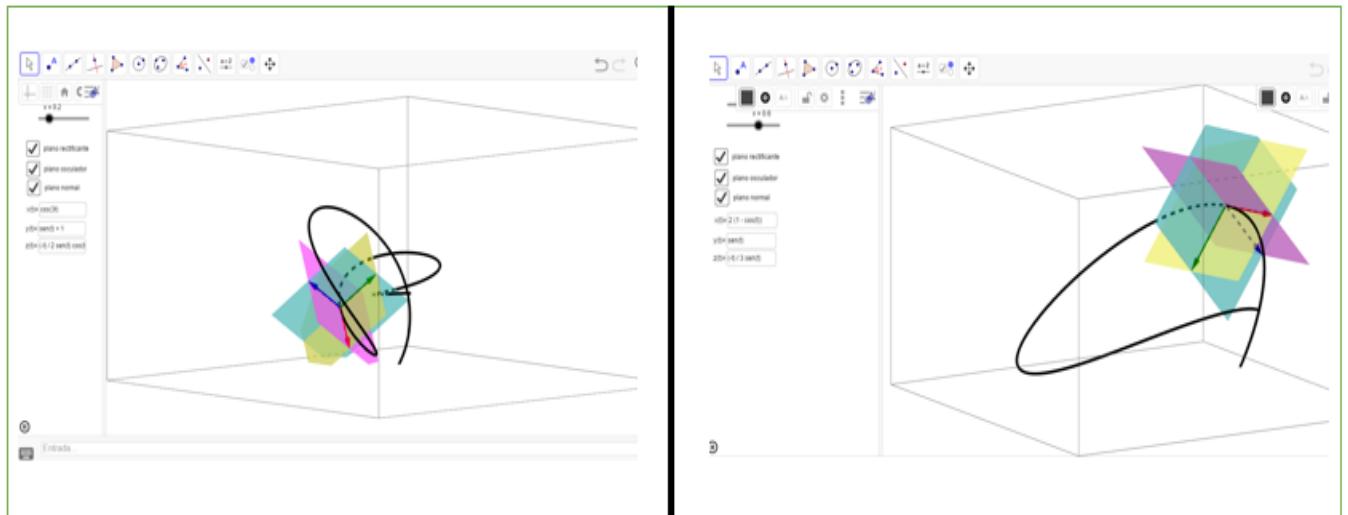
Situação-problema (3): Desenvolva um entendimento intuitivo geométrico acerca do TCP, prosseguindo com a utilização o teorema através da análise das curvas construídas no *software* Geogebra.

- a) $C(x): x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ e $D(x): x^2 + y^2 - 24x - 6y + 149 = 0$.
- b) $F(x) = -x^2 + 14x + 40$ e $G(x) = x^2 + 14x + 58$

c) $H(x) : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ e $R(x) : \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 4$

Situação-problema (4) : Encontre por meio de uma correlação entre os vetores tangente , normal e binormal as fórmulas do Triedro de Frenet, em seguida, desenvolva o significado geométrico do conceito torção.

Situação-problema (5): Analise e efetue o cálculo da torção e curvatura da hélice circular cuja expressão é dada por $\gamma(s) = (a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}})$ em que, $a, b \in \mathbb{R}$. Em seguida, correlacione e analise por meio do *software* Geogebra geometricamente o comportamento os planos gerados a partir do Triedro Móvel de Frenet.



APÊNDICE B



QUESTIONÁRIO METODOLÓGICO DO MINICURSO

1. As atividades desenvolvidas no minicurso “O estudo de curvas com a utilização do *software* Geogebra” contribuíram para a ressignificação dos seus conhecimentos sobre curvas, curvatura? Em quais aspectos ou tópicos do conteúdo?
2. Quais as maiores dificuldades sentidas ao estudar as aplicações das aplicações dos conceitos de curvas durante o minicurso?
3. Avalie se a utilização do *software Geogebra* auxiliou na aquisição dos conceitos? Explique.
4. Disserte acerca da metodologia utilizada pelo professor na condução das aulas, e comente se o formato trabalhado contribuiu para sua aprendizagem.
5. Como descreveria a metodologia com a qual o professor conduziu as aulas? Explique tudo que foi observado por você no decorrer das aulas.
6. A metodologia abordada diferencia-se de outros estilos de aula de matemática que você vem estudando? Em que aspectos? Considera as diferenças positivas?
7. Que ações do professor, realizadas no decorrer das aulas, foram mais importantes para sua aprendizagem?
8. Que ações distintas poderiam ter sido realizadas nas aulas, para melhorar ainda mais seu nível de aprendizagem? Justifique.
9. Como avalia sua participação nas aulas e atividades trabalhadas?
10. Comentários / sugestões / observações.