



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ
IFCE CAMPUS FORTALEZA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

ANA PAULA RODRIGUES ALVES SANTOS

SITUAÇÕES DIDÁTICAS OLÍMPICAS (SDO): UM CONTRIBUTO DA ENGENHARIA
DIDÁTICA CLÁSSICA NO ENSINO DE OLIMPIADAS

MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA –
PGECM

FORTALEZA

2018

ANA PAULA RODRIGUES ALVES SANTOS

SITUAÇÕES DIDÁTICAS OLÍMPICAS(SDO): UM CONTRIBUTO DA ENGENHARIA
DIDÁTICA CLÁSSICA NO ENSINO DE OLIMPIÁDAS

Dissertação de Mestrado Acadêmico apresentado
ao Programa de Pós-graduação em Ensino de
Ciências e Matemática – PGECM – do Instituto
Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do
Ceará – IFCE – Campus Fortaleza, como exigência
parcial para obtenção do título de Mestre em
Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.
Coorientador: Prof. Dra. Katia Vigo Ingar

Fortaleza – CE

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal do Ceará - IFCE
Sistema de Bibliotecas - SIBI
Ficha catalográfica elaborada pelo SIBI/IFCE, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

As Alves Santos, Ana Paula Rodrigues.
 Situações Didáticas Olímpicas (SDO):Um Contributo da Engenharia Didática Clássica no Ensino de
 Olimpíadas. / Ana Paula Rodrigues Alves Santos. - 2018.
 143 f. : il.

 Dissertação (Mestrado) - Instituto Federal do Ceará, Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática,
Campus Fortaleza, 2018.
 Orientação: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.
 Coorientação: Prof. Dr. Katia Vigo Ingar .

 1. Engenharia Didática. 2. Geogebra. 3. Teoria das Situações. 4. Olimpíadas de Matemática. I. Título.
 CDD 510.07

ANA PAULA RODRIGUES ALVES SANTOS

SITUAÇÕES DIDÁTICAS OLÍMPICAS(SDO): UM CONTRIBUTO DA ENGENHARIA
DIDÁTICA CLÁSSICA NO ENSINO DE OLIMPIADAS

Dissertação de Mestrado Acadêmico apresentado ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PGECM – do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE – Campus Fortaleza, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovado (a) em: ____ / ____ / ____.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves (Orientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e tecnologia do Ceará - IFCE

Profa. Dr^a. Katia Vigo Ingar (Coorientadora)
Universidad Nacional del Callao – UNAC Lima Perú

Profa. Dr^a. Maria José Costa dos Santos
Universidade Federal do Ceará – UFC

Prof. Dr. David Carneiro de Souza
Instituto Federal de Educação, Ciência e tecnologia do Ceará - IFCE

Profa. Dr^a. Antônia Lis de Maria Martins Torres
Universidade Federal do Ceará – UFC

Profa. Dr^a. Juscileide Braga de Castro
Universidade Federal do Ceará – UFC
Fortaleza – CE

EM ESPECIAL

*Ao meu marido Rogers Sampaio Santos e ao meu filho João Pedro Santos pela força
e apoio em prol da realização dos meus sonhos.*

*Ao Professor e orientador Doutor Francisco Régis Vieira Alves pela confiança,
sapiência e apoio dedicados durante todo o processo dessa investigação.*

*Aos meus ex e atuais alunos, os quais fomentam constantemente meu prazer em
ensinar, pesquisar e lutar por uma educação melhor para todos.*

Ao meu Pai José Osmar Fernandes Alves por tudo que fez por mim.

À minha Mãe Maria Gorete Rodrigues Alves pela vida de doação às filhas.

Dedico

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida, força e luz que ilumina o caminho que devo seguir.

À professora Maria José Costa dos Santos, pelos ensinamentos, orientações e incentivo a perseverar pela pesquisa em educação matemática.

Ao professor Judson Santos pelas palavras de força, motivação e determinação para que eu chegasse até aqui.

Aos professores examinadores Dr^a. Katia Ingar, Dr^a. Antônia Lis de Maria Torres, Dr^a. Juscileide de Castro e Dr. David de Souza por ofertarem o seu precioso tempo e saber para contribuírem com este trabalho.

Aos alunos das turmas olímpicas pela participação na parte experimental.

À minha família especialmente pais e irmãs, por compartilharem nossas vidas com fé, amizade e apoio.

À minha avó Francisca Rodrigues Lima que sempre me incentivou a ir além das minhas expectativas.

Aos meus amigos Munik Monteiro e Wallen Serra que me ajudaram com companheirismo e paciência em todos os momentos.

RESUMO

Esta investigação apresenta uma Engenharia Didática – ED desenvolvida no contexto do ensino das Olimpíadas de Matemática. Propomos situações didáticas olímpicas (SDO), sob a visão metodológica da Teoria das Situações Didáticas (TSD), em que a estruturação das sessões de ensino segue as quatro fases da Engenharia Didática (ED): as análises preliminares, a análise *a priori*, a experimentação e a análise *a posteriori*. Utilizamos o *software* GeoGebra para realizar a transposição didática de cada situação olímpica, com o intuito de identificar as categorias intuitivas estabelecidas por Efraim Fischbein. Portanto, enfatizamos SDO que são descritas/estruturadas com o amparo do *software* GeoGebra. Essas situações buscam privilegiar a visualização dos elementos matemáticos e assim, o registro das categorias intuitivas previstas por Efraim Fischbein. A mediação realizada pela exploração adequada de softwares possibilita ultrapassar determinadas dificuldades/entraves a um entendimento ou até mesmo, à construção conceitual em geometria. De modo específico, as situações olímpicas descritas propõem a possibilidade da construção de conceitos em geometria plana. A ED apresenta-se nesta investigação, numa concepção de complementaridade que utiliza a teoria das situações didáticas – TSD. Desse modo, as situações olímpicas descritas representam uma alternativa para aulas direcionadas às olimpíadas de matemática, sua indicação e estruturação, descrevem elementos atinentes à mediação didática durante os processos de ensino e de aprendizagem, os quais enfatizam pormenores que detêm a possibilidade de controlar/prever as ações dos estudantes, assim como, proporcionar um sentido mais significativo para o estudo da geometria no contexto olímpico.

PALAVRAS-CHAVE: Engenharia Didática, Geogebra, Teoria das Situações, Olimpíadas de Matemática

ABSTRACT

This research presents a Didactic Engineering - ED developed in the context of the teaching of the Mathematical Olympiads. We propose Olympic didactic situations (ODS), under the methodological view of the Theory of Didactic Situations (TSD), in which the structuring of teaching sessions follows the four phases of Didactic Engineering (DE): the preliminary analyzes, the a priori analysis, the experimentation and a posteriori analysis. We use GeoGebra software to perform the didactic transposition of each Olympic situation, in order to identify the intuitive categories established by Efraim Fischbein. Therefore, we emphasize SDO that are described / structured with the support of GeoGebra software. These situations seek to privilege the visualization of mathematical elements and thus the recording of the intuitive categories predicted by Efraim Fischbein. The mediation performed by the proper exploration of software makes it possible to overcome certain difficulties / obstacles to an understanding or even to the conceptual construction in geometry. Specifically, the described Olympic situations propose the possibility of constructing concepts in flat geometry. The DE is presented in this research, in a conception of complementarity that uses the theory of didactic situations - TSD. Thus, the described Olympic situations represent an alternative to mathematics Olympics classes, their indication and structuring, describe elements related to didactic mediation during the teaching and learning processes, which emphasize details that have the ability to control / predict students' actions, as well as providing a more meaningful sense for the study of geometry in the Olympic context.

KEYWORDS: Didactic Engineering, GeoGebra, Situation Report, Mathematical Olympiads.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Problema abordado na OBM 2007	24
Figura 2 – Problema abordado na OBM 2007	24
Figura 3 – Problema abordado na OBM 2007	25
Figura 4 – Problema abordado na OBM 2009	25
Figura 5 – Problema abordado na OBM 2012	26
Figura 6 – Problema abordado na OBM 2013	26
Figura 7 – Problema abordado na OBM 2015	26
Figura 8 - Problema abordado na OBM 2001	27
Figura 9 - Problema abordado na OBM 2015	27
Figura 10 – Problema abordado na OBM 2005	28
Figura 11- Exemplo de intuição afirmativa.....	34
Figura 12 – Triângulo didático	38
Figura 13 – Dialética de Ensino	39
Figura 14 – Representação dos elementos que envolvem a dialética da ação	39
Figura 15 – Dialética de formulação	40
Figura 16 – Dialética da validação	41
Figura 17 – As diferentes fases da Engenharia Didática	46
Figura 18 – Representação do <i>software</i> GeoGebra empregada na SDO1	57
Figura 19 – Representação do <i>software</i> GeoGebra empregada na SDO1	58
Figura 20 – Representação do <i>software</i> GeoGebra empregada na SDO3	58
Figura 21– Representação do <i>software</i> GeoGebra empregada na SDO4.....	59
Figura 22 – Aplicação direta do teorema de Pitot	64
Figura 23 – Problema que prioriza o raciocínio algébrico	64
Figura 24 – Problema que prioriza o raciocínio algébrico	65
Figura 25 – Problema que exige demonstração	65
Figura 26 – Problema que exige demonstração	65
Figura 27 – Problema abordado na prova da 1. ^a fase da OBM (2015)	66
Figura 28 – Representações do <i>software</i> GeoGebra empregadas na SDO	68

Figura 29 – A visualização como componente fundamental na atividade do grupo de estudantes nas fases dialéticas de uma SDO	69
Figura 30 – Primeiro passo ao interpretar os dados do problema	71
Figura 31 – Representação da situação didática olímpica.....	72
Figura 32 – Dialética da formulação	73
Figura 33 – Semelhança de triângulos	73
Figura 34 – Relação métrica no triângulo retângulo $h^2 = m \cdot n$	74
Figura 35 – Representação da SDO 3 no <i>software</i> GeoGebra	77
Figura 36 – Representação do <i>software</i> GeoGebra empregadas na SDO	78
Figura 37 – Identificando padrões ao movimentar a construção	78
Figura 38 – Estratégia 2 visualizada pelo aluno.....	79
Figura 39 – Relacionar elementos matemáticos na formulação de conjecturas.....	80
Figura 40 – A visualização como componente fundamental na manifestação das categorias intuitivas.....	81
Figura 41 – Representação da Situação Didática Olímpica	84
Figura 42 – Movimento horizontal e vertical.....	85
Figura 43 – Situação de ação representada no <i>software</i> Geogebra	86
Figura 44 – alunos em seu primeiro contato com a SDO.....	89
Figura 45 – Momento em que o aluno inicia a ação de modelização através do GeoGebra.....	89
Figura 46 – Representação do <i>software</i> GeoGebra	90
Figura 47 – Modelização da SDO1	90
Figura 48 – Conjecturas elaboradas ao visualizar os elementos matemáticos no <i>software</i> GeoGebra	91
Figura 49 – Aluno 2 a expor a sua estratégia	91
Figura 50 – Estratégia elaborada pelo aluno 2 (representação geométrica).....	92
Figura 51– Estratégia assumida pelo aluno 3.....	93
Figura 52 – Aluno observando a modelização da SDO	94
Figura 53 – simulações realizadas pelo aluno 2	95
Figura 54 – simulações realizadas pelo aluno 2	95
Figura 55 – Estratégia assumida pelo aluno 3	96
Figura 56 – Alunos verificaram a validade do teorema de Pitot (construção)	97

Figura 57 – Alunos verificaram a validade do teorema de Pitot	98
Figura 58 – A semicircunferência é o arco capaz do ângulo reto.....	100
Figura 59 – Alunos simulando situações através da modelização da SDO2.....	100
Figura 60 – Momento para analisar os elementos matemáticos envolvidos na SDO ao movimentar o ponto D.....	101
Figura 61– Estratégia descrita pelo aluno 3 – Semelhança de triângulos	102
Figura 62 – Resolução da SDO2 pelo aluno 3	103
Figura 63 – Aluno 3 descrevendo a sua estratégia	103
Figura 64 – Visualização do aluno 5 através da modelização da SDO2	104
Figura 65 – Justificativa do aluno 4 para a resolução da SDO2	105
Figura 66 – O grupo 1 usou a linguagem escrita como forma de representação.	107
Figura 67 – Exposição oral da argumentação do grupo 2	108
Figura 68 – Estratégia representada no quadro pelo grupo 1	109
Figura 69 – Dados extraídos da visualização no software Geogebra.....	110
Figura 70 – Discurso que menciona implicitamente a congruência entre os triângulos	111
Figura 71 – Representação da situação X Resolução da SDO	112
Figura 72 – Estratégia exposta oralmente pelo grupo 2	113
Figura 73 – Discussão durante a dialética da ação.....	114
Figura 74 – Aluno se confronta com a modelização da SDO4 no <i>software</i> GeoGebra	115
Figura 75 – Estratégia apresentada pelos alunos 1 e 2.....	117
Figura 76 – Situação visualizada pelos alunos 1 e 2.....	118
Figura 77 – Elaboração de conjecturas dos alunos 1 e 2.....	119
Figura 78 – Elementos identificados (altura e lados) pelos alunos 1 e 2	120
Figura 79 – Dialética da ação.....	120
Figura 80 – Momento de confrontação entre o modelo visual e o modelo analítico	123
Figura 81 – Produção escrita do aluno 3 na fase de validação.....	124
Figura 82 – Produção escrita do aluno 4 na fase de validação.....	124
Figura 83 – Momentos da demonstração do método K	125
Figura 84 – Método K: $\frac{S_{AIE}}{S_{ADE}} = \frac{\overline{IE}}{\overline{DI}}$	126

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Evolução da Olimpíada Brasileira de Matemática - OBM.....	20
Tabela 2 – análise de livros direcionados às olimpíadas de matemática.....	51

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DM – Didática da Matemática

ED – Engenharia Didática

TSD – Teoria das Situações Didáticas

OBM – Olimpíada Brasileira de Matemática

OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

SDO – Situação Didática Olímpica

SBM – Sociedade Brasileira de Matemática

IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada

TP – Teorema de Pitot

PO – Problema selecionado de provas olímpicas

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	14
1.1. Análises Prévias.....	18
1.1.1. Aspectos Históricos sobre as Olimpíadas de Matemática.....	18
1.1.2. As Olimpíadas da Matemática e o Ensino da Geometria.....	23
1.2. Justificativa do Tema da Pesquisa	28
1.3. Delimitação do Problema	29
2. REFERENCIAL TEÓRICO.....	31
2.1. Categorias Intuitivas no Ensino da Geometria	31
2.2. Teoria das Situações Didáticas – TSD.....	36
2.2.1. A Situação Didática Olímpica (SDO) e a Transposição Didática.....	42
2.3. Elementos de uma Engenharia Didática de Primeira geração	44
3. ANÁLISES PRELIMINARES DA ENGENHARIA DIDÁTICA	49
3.1. O objeto matemático em livros didáticos	50
3.2. Análise de dissertações do PROFMAT	52
4. ANÁLISE A PRIORI E CONCEPÇÃO DE SDO	54
4.1. O <i>locus</i> e os Sujeitos da Investigação.....	59
4.2. Análise <i>a Priori</i> das Situações Didáticas.....	61
4.2.1. Situação Didática Olímpica 1 – Teorema de Pitot	63
4.2.2. Situação Didática Olímpica 2 – Relações Métricas no Triângulo Retângulo	70
4.2.3. Situação Didática Olímpica 3 – Cálculo de Áreas	75
4.2.4. Situação Didática Olímpica 4 – Método K	82
5. EXPERIMENTAÇÃO	88

5.1.	Experimentação da SDO1	88
5.2.	Experimentação da SDO2	98
5.3.	Experimentação da SDO3	106
5.4.	Experimentação da SDO4	113
6.	ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO DA ENGENHARIA.....	128
6.1.	Validação Interna	129
6.2.	Validação Externa	130
7.	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	132
	REFERÊNCIAS	138

1. INTRODUÇÃO

Com o crescente avanço das Olimpíadas de Matemática dentro das escolas, tanto públicas como privadas. Exige-se cada vez mais do professor um aperfeiçoamento da sua *práxis* em sala de aula culminando em fomentar o gosto pela Matemática em seus alunos. Esta pesquisa descreve alternativas de ensino para aulas direcionadas às Olimpíadas de Matemática, o público-alvo é uma turma de alunos do 8º e 9º anos do Ensino Fundamental, composta por cinco alunos que desejam se preparar para a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM).

Esta investigação foca no estudo da Geometria Plana, explorando alguns conceitos como propriedades das retas tangentes, teorema de Pitot, semelhança de triângulos, relações métricas no triângulo retângulo, cálculo de áreas de figuras planas e o método K. Devido as suas características que envolvem um caráter de abstração, percebemos que o aluno manifesta alguns entraves ao estudar estes conceitos, pois exige habilidades que dificilmente alunos do ensino fundamental (8º/9º anos) tenham desenvolvido.

Além disso, indubitavelmente, as aulas voltadas para as olimpíadas de matemática nas escolas, seguem um modelo *standard*, isso recorrente ao uso de modelos aplicados pelos compêndios especializados, daí supomos que os professores nessa área de competições olímpicas tendem a seguir tais modelos, ou seja, o uso de aplicações que enfatizam somente o caráter analítico e estruturante, ou seja, os problemas são consequências diretas das demonstrações realizadas pelo professor em sala de aula. Desse modo, diante do contexto atual que, em maior ou menor substância, determinou nossa realidade no contexto olímpico, iremos realizar uma investigação cujo objeto matemático é o estudo de alguns conceitos em Geometria Plana, por representarem dificuldades no momento da assimilação do conhecimento.

Para a realização e fundamentação desse estudo, buscamos trabalhos/pesquisas que abordam e de alguma maneira se mostram relacionadas com o nosso objeto matemático de interesse, o estudo da Geometria Plana no contexto das Olimpíadas de Matemática. No entanto, inicialmente na nossa incursão investigativa, percorremos duas trajetórias. A primeira foi demarcada pela seleção de um objeto de pesquisa e investigação com amplo interesse, na literatura

especializada, ou seja, buscamos conceitos geométricos que pudéssemos investigar seu atual quadro de ensino.

Sendo assim, uma segunda trajetória, foi balizada a partir da preocupação com um elemento que é deixado de lado na literatura da área, ou seja, identificamos escassez em trabalhos que nos norteariam nessa temática, pormenor que nos exigiu como demonstraremos logo a seguir, nos próximos capítulos, na construção de uma perspectiva alternativa de ensino.

Desse modo, diante do que delineamos, este trabalho tem como objetivo principal, desenvolver uma engenharia didática (ED) que permita a descrição de situações didáticas olímpicas envolvendo a construção e aplicação de conceitos referentes a Geometria Plana. E assumiremos como objetivos específicos: elaborar situações didáticas olímpicas (SDO) com ênfase na visualização, através da modelização no *software* GeoGebra e identificar no contexto de resolução das situações didáticas que envolve conceitos de Geometria Plana, a manifestação do raciocínio intuitivo, que contemple as categorias intuitivas (intuição afirmativa, intuição conjectural e intuição antecipatória).

Ademais, assumimos a Engenharia Didática (ED), como nossa metodologia de pesquisa, no capítulo 2 daremos de modo detalhado sua fundamentação, tendo em vista garantirmos a escolha de critérios sistemáticos, de pressupostos adequados que permitam a evolução de uma trajetória adequada. A própria estrutura que essa metodologia apresenta, permite-nos compreender nosso fenômeno de interesse, visto que a mesma é caracterizada por quatro fases (análise prévias, análise a priori, experimentação e análise a posteriori) permite a conexão dos objetivos que pretendemos responder ao decurso dessa investigação, para tanto, realizamos um estudo histórico do nosso objeto de estudo, as Olimpíadas de Matemática e em seguida elaboramos alternativas metodológicas de explorar com tais problemas encontrados, no caso ressaltamos que na segunda fase da ED se deu a elaboração de situações didáticas com o enfoque na visualização, para que possamos identificar tais categorias intuitivas mencionadas anteriormente e para coleta dos dados utilizamos na fase da experimentação, o recurso tais como: imagens, registros de produções, entrevistas. A importância da aplicação da ED nessa investigação, dá-se pelos modos de validação que lhe são associados: a comparação entre análise a *priori* e análise a *posteriori*. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste.

Desse modo, nossa pesquisa repousou no uso da ED e da TSD, com o intuito de garantirmos uma perspectiva teórica segura para a discussão do nosso objeto, ou seja, a TSD trata-se de uma metodologia de ensino, apresentaremos em seu pormenor no capítulo 2, cujo nosso interesse com a mesma é na elaboração de situações didáticas olímpicas, em que diante das fases previstas nessa teoria (ação, formulação, validação e institucionalização), objetivamos identificar a manifestação das categorias intuitivas. Nesse sentido, compreendemos por meio de pesquisas que relacionam a TSD e ED, que a complementaridade pode proporcionar a ruptura de determinadas rotinas de ensino, que tendem a condicionar o ensino de determinados conteúdos à predominância do ensino tradicional.

Nossa pesquisa é demarcada pelo estudo da Geometria Plana, que envolve conceitos geométricos que são balizados pelo processo de visualização, com o intuito de garantir a mobilização de um conhecimento que não se restringe apenas ao domínio de rotinas algorítmicas.

Sendo assim, para que possamos identificar os possíveis dados produzidos pelos sujeitos da nossa investigação, utilizamos a teoria das categorias intuitivas de Efrain Fischbein, apresentada no capítulo 2, essa teoria nos permite compreender inúmeros fenômenos cognitivos, tais como, o raciocínio intuitivo, tendo como amparo a visualização, em que nos permitirá uma compreensão relacionada com os conceitos geométricos estudados. Dessa forma, ao longo do percurso trilhado por essa investigação, procuramos associar as formas de manifestação do raciocínio intuitivo para cada uma de suas fases de ensino, mediadas pela organização da ED.

Em síntese, a complementaridade entre a TSD e a ED, para a compreensão do fenômeno de interesse de nossa investigação consiste em elaborarmos situações didáticas olímpicas balizadas nos pressupostos da TSD e, quando aplicadas em sala de aula, identificamos qual tipo de categoria intuitiva está sendo manifestada em cada fase prevista pela TSD, e a ED servirá como organizadora desse momento.

Dentre os pesquisadores de nossa revisão bibliográfica – análise das dissertações do PROFMAT, verificamos a ausência de uma metodologia de ensino que concorra para a aprendizagem dos alunos. Assim como, não encontramos trabalhos/pesquisas que utilizassem a tecnologia. Enfatizamos, desta forma, um problema que restringe o público de estudantes beneficiados, bem como adota uma perspectiva limitada ao ensino, na medida que observamos as ideias, o estilo e as características da abordagem da Matemática, mais especificadamente da

geometria, no interior das competições eminentemente por meio de situações problemas, endereçadas para um público menor de estudantes.

Portanto, queremos por meio da problemática levantada responder a seguinte questão geral de investigação: Como elaborar situações de ensino relacionadas com a geometria plana, de modo que, com a exploração da visualização, amparada pelo *software* Geogebra, possamos identificar a mobilização de um raciocínio intuitivo?

Vale ressaltar que ao decorrer da investigação, a problemática poderá sofrer alterações, modificações, adaptações, a fim de aprimorá-la, pois ajustes possíveis e necessários estão previstos por uma pesquisa que assume alguns pressupostos da ED. Nesse sentido, nossa pesquisa está estruturada da seguinte maneira:

No capítulo 1. Problemática, destacamos os problemas abordados em provas da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), percebemos similaridades que nos permitiram organizá-los em categorias. Com isso, identificamos aspectos que devem ser focados durante às aulas olímpicas, a fim de obtermos êxito dos alunos nas competições em matemática. A seguir, realizamos um breve levantamento histórico das olimpíadas (OBM e OBMEP) de matemática no nosso país.

No contexto das olimpíadas de matemática, identificamos e descrevemos alguns elementos que fortaleceram a nossa questão de identificação. Ressaltamos que nosso intuito é realizar uma transposição didática, readaptar o saber científico para o saber escolar, apoiada na visualização, através do *software* Geogebra, que nos auxiliará como suporte metodológico, em que priorizamos explorar na fase de experimentação das situações didáticas olímpicas, cujo objetivo é identificar a manifestação de categorias intuitivas. Apresentaremos também, a justificativa da nossa pesquisa, a delimitação do problema.

No capítulo 2. Apresentamos de modo pormenorizado nosso quadro de referencial teórico, por exemplo, categorias intuitivas em que consiste nossa teoria de análises, TSD metodologia de ensino e a ED nossa metodologia de pesquisa, ou seja, as teorias que nos possibilitam em caráter de complementariedade responder ao nosso fenômeno de interesse.

No capítulo 3. Análises preliminares da ED, em que apresentamos uma análise do material didático disponível em *Internet*, livros nacionais e internacionais, manuais de preparação, banco de questões de provas e o material do POTI (pólo olímpico de treinamento intensivo). abordagem da Geometria Plana em livros didáticos nacionais e internacionais.

No capítulo 4. Experimentação e análises, realizaremos a experimentação, a caracterização do *locus* da nossa investigação, colégio privado de Fortaleza-CE, assim como os sujeitos de nosso estudo, cinco alunos de uma turma olímpica, nível 2 (8º/9º anos). Apresentaremos as situações didáticas olímpicas que elaboraremos, bem como suas análises *a priori* e *a posteriori*.

No capítulo 5. Considerações Finais, apresentaremos os resultados mais relevantes desta investigação, originados da aplicação de cada SDO, que apontam respostas aceitáveis no âmbito da aprendizagem dos alunos, com amparo no raciocínio intuitivo durante o processo de resolução dos problemas.

A seguir apresentaremos ao leitor nossa problemática de interesse, e o delineamento da nossa pesquisa, visto que, a leitura realizada anteriormente tem como objetivo possibilitar uma rápida noção do que iremos apresentar nos próximos capítulos.

1.1. Análises Prévias

Na seção atual, será exposta a problemática da nossa investigação mediante a revisão bibliográfica de dissertações, material didático – livros nacionais e internacionais, revistas, materiais de apoio, *sites*, entre outros – relacionados aos conteúdos de geometria no contexto olímpico. Também, após contextualizarmos nosso estudo por meio de um quadro teórico, ou seja, de um levantamento de dados que constituem o terreno epistêmico em questão, apresentaremos a justificativa do nosso trabalho e os objetivos geral e específicos que se pretende alcançar nesta investigação.

1.1.1. Aspectos Históricos sobre as Olimpíadas de Matemática

As olimpíadas são competições de diferentes modalidades esportivas que são realizadas a cada quatro anos, nela participam atletas de todos os continentes. As primeiras olimpíadas aconteceram com o objetivo de cultuar aos deuses e aconteceu por volta de 2 500 a.c. na cidade de Olympia, na Grécia. O caráter e a importância dos jogos olímpicos eram respeitados a ponto dos reis desistirem das guerras para participar dos jogos olímpicos (ALVES, 2010).

Isso permite-nos fazer uma analogia das Olimpíadas de Matemática com as esportivas, no sentido de que os diretores e coordenadores da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, da SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) e do IMPA (Instituto de matemática Pura e Aplicada), também se envolvem em disputas entre si e também se unem com o objetivo de valorizar o conhecimento matemático.

Os jogos olímpicos foram se estruturando com o passar do tempo. Entretanto, em 393 d.c., com a proibição da adoração aos deuses, ocorreu a interrupção dos jogos olímpicos, marcando o final da Era Antiga (ALVES, 2010).

Em 1896, surgiram os primeiros jogos olímpicos da Era Moderna, em Atenas. A partir de então, centenas de países participaram. Antes desses jogos, já aconteciam disputas que envolviam o conhecimento matemático. A esse respeito, Carneiro (2004) afirma que

Os livros nos contam que, em tempos mais antigos matemáticos desafiavam uns aos outros propondo questões complicadas e por muitas vezes se reuniam em praça pública para realização de torneios, onde teriam que resolver equações difíceis. O que nasceu talvez por um capricho do ego destas pessoas tomou forma mais salutar com a realização da primeira olimpíada de Matemática, na Hungria em 1986 (CARNEIRO, 2004, p.3).

Vale destacar que, as competições de matemática entre alunos vêm cada vez mais tomando espaço nas escolas, estruturando-se e organizando-se, além de representar um excelente indicador de novos talentos para a ciência (BONFIM, 2013). Em 1959, foi realizada na Romênia, a 1.^a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) com a participação apenas de países comunistas. Já em 1965, a Finlândia se torna o primeiro país não comunista a participar da IMO, tornado assim, essa competição a maior de matemática do mundo atual, hoje na sua edição 58^a, com mais de 100 países participantes por ano que reúne em média, 500 participantes em todo o planeta (CARNEIRO, 2004).

A 58^a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO 2017), é a primeira edição da IMO a ser realizada no Brasil, sediada no Rio de Janeiro. Organizada pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), a IMO 2017 é realizada em conjunto com o Congresso Internacional de Matemáticos (ICM) 2018, como parte do Biênio de Matemática Gomes de Souza 2017-2018, uma iniciativa que pretende disseminar o conhecimento matemático e científico para a sociedade.¹

A Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM)

¹ <https://www.imo2017.org.br/home-portugues.html> acessado em 20/08/2017.

Em 1979, a Sociedade Brasileira de Matemática (OBM) organizou a 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM). Desde então, a OBM passou por mudanças em sua estrutura (Quadro 1), mas permaneceu o objetivo que é de fomentar o estudo da Matemática nos alunos com o intuito de desenvolver e aprimorar a capacitação dos professores de Matemática e influenciar na melhoria do ensino, além de promover o aparecimento de novos talentos.

Tabela 1 - Evolução da Olimpíada Brasileira de Matemática - OBM

1979	I Olimpíada Brasileira de Matemática	
1971	Dois níveis: Júnior: para alunos completando no máximo 15 anos em 1991. Sênior: para alunos cursando o ensino médio.	
1992	Duas fases: 1ª fase: prova com 25 questões de múltipla escolha 2ª fase: dois dias com 3 problemas em cada dia. O nível Júnior passa a ser para alunos cursando até a 8ª série.	
1993	1993 – A 2ª fase do nível júnior volta a ser realizada em um dia com 5 problemas.	
1995	1995 – O nível júnior volta a ser para estudantes de até 15 anos.	
1998	Três níveis: I: 5ª e 6ª séries. II: 7ª e 8ª séries III: Ensino médio	Três fases: 1ª fase: múltipla escolha com 20 ou 25 questões. 2ª fase: prova aberta com 6 questões. 3ª fase: 5 questões (níveis I e II) e 6 questões do nível II (em dois dias).
1999	As provas do nível 2 passam a ser realizadas em dois dias na fase final.	
2001	É criado o nível universitário, com duas fases	
2017	A OBM se integra à OBMEP realizando apenas a fase única para os níveis 1, 2 e 3.	

Fonte: <http://www.obm.org.br>

Assim, como fizemos na presente seção, ao destacarmos o universo que envolve a OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática), abordaremos a seguir, a evolução da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), com o intuito de compreendermos a sua articulação junto a OBM.

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP

Em 2005 foi implantada a Olimpíada Brasileira de Matemática das escolas públicas – OBMEP que tem como objetivo estimular o estudo da Matemática e revelar talentos na área. Esta olimpíada teve sua primeira edição realizada em 2005, contou com a parceria de diversos setores: Ministério da Ciência e Tecnologia (MCT), Ministério da Educação (MEC), Petrobrás, e teve como executores a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e o Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Além disso, a OBMEP conta com a colaboração da Secretaria de Comunicação (SECOM), Casa Civil e Secretaria de Articulação Política do Governo Federal (ALVES, 2010).

A OBMEP 2018 é a 13ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas foi realizada pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), com apoio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). É promovida com recurso oriundos do contrato de gestão firmado pelo IMPA com o Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações (MCTIC) e com o Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações (MCTIC) e com o Ministério da Educação (MEC). A OBMEP 2018 conta com a participação de alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental e alunos do Ensino Médio, de Escolas Públicas municipais, estaduais e federais, e Escolas Privadas, aos respectivos professores, escolas e secretarias de educação.

Vale destacar os objetivos da OBMEP² 2018:

- Estimular e promover o estudo da Matemática no Brasil.
- Contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que o maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade.
- Promover a difusão da cultura matemática.
- Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades nas áreas científicas e tecnológicas.

² <http://www.obmep.org.br/regulamento.htm>

- Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional.
- Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, com os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas.
- Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

A OBMEP 2018 realiza-se em 2 (duas) etapas: na primeira fase aplica-se uma prova objetiva (múltipla escolha) a todos inscritos pelas escolas, e na segunda fase aplica-se uma prova discursiva aos alunos selecionados pelas escolas, segundo os critérios de distribuição de vagas para a segunda fase (Documento 4).

Os alunos participantes da OBMEP 2018 serão divididos em 3 (três) níveis, de acordo com o seu grau de escolaridade:

Nível 1 – alunos que cursam em 2018, o 6º ou 7º ano do Ensino Fundamental.

Nível 2 – alunos que cursam em 2018, o 8º ou 9º ano do Ensino Fundamental.

Nível 3 – alunos que cursam em 2018, qualquer ano do Ensino Médio.

No que concerne a premiação, professores, alunos, escolas e secretarias de educação são premiados com base nos resultados da segunda fase. Inicialmente eram distribuídas para as escolas públicas, 300 (trezentas) medalhas de ouro, 405 (quatrocentos e cinco) de prata e 405 (quatrocentos e cinco de bronze). Além, de até 30 000 menções honrosas (ALVES, 2010). Com o passar dos anos, houve um crescimento no número de participantes, elevando-se também o número de premiações, sendo atualmente, concedidas aos alunos 500 (quinhentas) medalhas de ouro, 1.500 (um mil e quinhentas) medalhas de prata, 4.500 (quatro mil e quinhentas) medalhas de bronze, e até 46.200 (quarenta e seis mil e duzentos) certificados de Menção Honrosa.

Além das medalhas e menções honrosas, destaca-se o Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC), programa destinado aos 6.500 (seis mil e quinhentos) alunos de Escolas Públicas premiados na OBMEP 2017 com medalhas de ouro, prata ou bronze e matriculados em Escolas Públicas em 2018, será oferecida a oportunidade de participar do Programa de Iniciação Científica Júnior (PIC Jr -OBMEP). A participação no PIC inclui o recebimento de uma bolsa de Iniciação Científica Jr do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). A estrutura e o planejamento do programa serão definidos e divulgados no início de 2018. Em caso de vacância de bolsas, a critério da coordenação do PIC-Jr, um medalhista poderá ser substituído por um aluno que tenha recebido Menção Honrosa e que esteja matriculado no ensino público.

A partir de 2017 a OBMEP integra-se a OBM (quadro 1), realizando as premiações dos alunos das escolas privadas, classificados na segunda fase. São estabelecidos os seguintes critérios: serão concedidas aos alunos de escolas privadas 75 (setenta e cinco) medalhas de ouro, 225 (duzentas e vinte e cinco) medalhas de prata, 675 (seiscentas e setenta e cinco) medalhas de bronze, e até 5.700 (cinco mil e setecentos) certificados de menção honrosa. Além dessas premiações, será oferecida a oportunidade aos alunos de participar como ouvintes no Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC). Aos 975 (novecentos e setenta e cinco) alunos de Escolas Privadas premiados na OBMEP 2017 com medalhas de ouro, prata ou bronze e que estiverem cursando o Ensino Fundamental ou Médio em 2018.

Aos medalhistas de ouro, prata ou bronze de qualquer edição da OBMEP, regularmente matriculados no Ensino Superior, poderão candidatar-se ao Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME) oferecido por diversas Instituições de Ensino Superior.

Verifica-se que há um interesse em promover o conhecimento matemático de modo a consagrá-lo, possibilitando a sua manutenção, refletindo assim em um possível progresso científico e tecnológico do aluno.

A seguir apresentamos detalhadamente o estudo da Geometria no contexto das olimpíadas de Matemática, através de um levantamento de questões de provas da OBM, destacando uma análise dos problemas abordados nas provas.

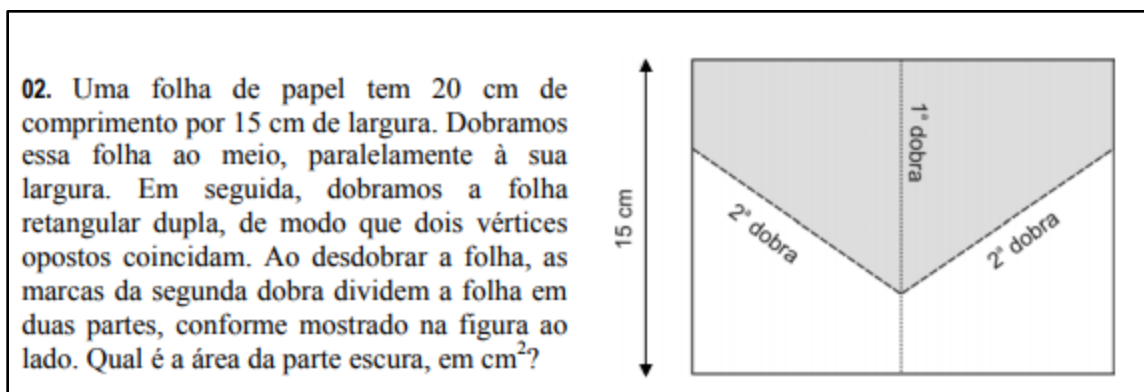
1.1.2. As Olimpíadas da Matemática e o Ensino da Geometria Plana

Nesta seção, evidenciaremos e identificaremos os elementos que se sobressaem a partir da proposta de determinados problemas de provas da OBM – Olimpíada Brasileira de Matemática, com o intuito de compreendermos como a Geometria é abordada no contexto olímpico. Esse pormenor ajuda-nos a perceber e relacionar elementos pertinentes que devem estar presentes no ensino voltado para as olimpíadas de Matemática.

A seguir exemplificamos a partir das questões de provas, três categorias de problemas: (a) problemas que envolvem aplicação direta de conceitos geométricos; (b) problemas que priorizam a interpretação geométrica e (c) problemas que envolvem demonstrações. Seleccionamos questões de provas da OBM dos últimos dez anos (2007 a 2017), destacamos apenas alguns desses problemas catalogados.

Nosso primeiro exemplo é extraído da OBM/2007 – Nível 2 – Fase 2, observamos na figura 1 que o referido problema imprime ênfase a conceitos como translação, decomposição de figuras planas e cálculo de áreas, enquadrando-se na categoria (a).

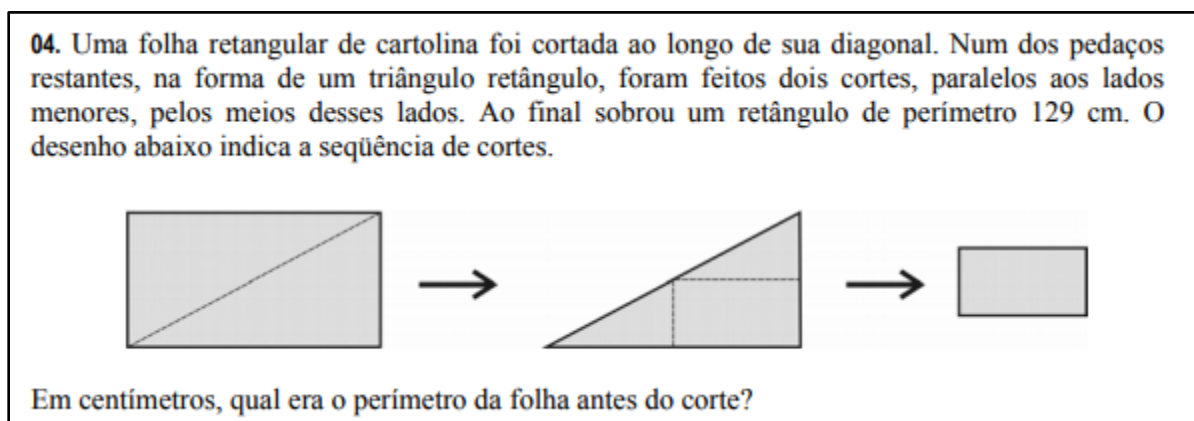
Figura 1 – Problema abordado na OBM 2007



Fonte: OBM 2007

Da OBM/2007 – Nível 1 – Fase 2, extraímos um problema (Figura 2) com abordagem semelhante ao da figura 1, ao exigir que o aluno aplique conceitos da geometria de transformação (translação de figuras), além de exigir o conceito de perímetro.

Figura 2 – Problema abordado na OBM 2007



Fonte: OBM 2007

Ainda na mesma avaliação identificamos outro problema (Figura 3) que trata dos mesmos conceitos já mencionados, incluindo o conceito de área.

Figura 3 – Problema abordado na OBM 2007

PROBLEMA 1
A área do quadrado $ABCD$ é 300 cm^2 . Na figura, M é ponto médio de CD e o ponto F pertence à reta BC .

a) Qual é a área do triângulo ABF ?
b) Qual é a área do triângulo ADF ?

Fonte: OBM 2007

Da prova OBM do ano de 2009, apresentamos o problema 1(Figura 4) que aborda os conceitos da geometria de transformação, de área e perímetro. Ao solucionar este problema, o aluno deve concluir que a figura de maior perímetro é obtida quando fazemos coincidir os dois menores lados de cada um dos triângulos. Constatando que figuras planas de mesma área, podem ter perímetros diferentes.

Figura 4 – Problema abordado na OBM 2009

PROBLEMA 1
Carlinhos tem folhas iguais na forma de triângulos retângulos de lados 6 cm, 8 cm e 10 cm. Em cada triângulo, o ângulo assinalado opõe-se ao menor lado. Fazendo coincidir lados iguais desses triângulos sobre uma mesa, sem superpor as folhas, ele desenha o contorno de cada figura obtida (linha grossa), como nos exemplos ao lado. O perímetro de uma figura é o comprimento do seu contorno.

a) Qual é a diferença entre os perímetros das figuras 1 e 2 do exemplo?
b) Com figuras de três triângulos, qual é o maior perímetro que pode ser obtido?

fig 1
fig 2

Fonte: OBM 2009

Este tipo de problema, exige do aluno uma maior compreensão dos conceitos geométricos envolvidos, e não apenas uma aplicação de um raciocínio mecânico.

No que concerne o problema exposto na figura 5, os alunos além de identificar os triângulos, recordando da sua classificação quanto aos lados, devem aplicar o teorema de Pitágoras e finalmente realizar o cálculo das áreas de figuras planas. Ademais, requer dos alunos interpretação e análise dos objetos matemáticos envolvidos no problema, visto que não há figuras que representem a situação, contrariamente, como vemos na figura 4.

Figura 5 – Problema abordado na OBM 2012

PROBLEMA 2

Seja $ABCD$ um retângulo tal que $AD = 6$ e $DC = 8$. Construa um triângulo equilátero CED tal que E, A e B estão no mesmo semi-plano determinado pela reta CD . Determine a área do triângulo AEC .

Fonte: OBM 2012

Destacamos que, o problema exposto na figura 6, exige dos alunos, conhecimentos das propriedades dos paralelogramos e a soma dos ângulos internos de um triângulo. Semelhantemente, a figura 7, apresenta um problema que para resolvê-lo os alunos devem recordar e aplicar o conceito de arco capaz e de polígonos inscritíveis.

Figura 6 – Problema abordado na OBM 2013

PROBLEMA 4

Seja M o ponto médio do segmento AC do triângulo ABC . Se $\angle ABM = 2 \cdot \angle BAM$ e $BC = 2 \cdot BM$, determine a medida, em graus, do maior ângulo do triângulo ABC .

Fonte: OBM 2013

Figura 7 – Problema abordado na OBM 2015

PROBLEMA 3

No triângulo acutângulo ABC , o ângulo $\hat{A}$ mede 45° . Sejam BE e CF alturas com E sobre AC e F sobre AB , e O o circuncentro de ABC , ou seja, o centro do círculo que passa por A, B e C . Calcule a medida do ângulo $E\hat{O}F$.

Fonte: OBM 2015

Desse modo, concluímos que os três problemas apresentados (Figuras 5,6 e 7) enquadram-se na categoria (b), ou seja, problemas que priorizam a interpretação geométrica do seu enunciado. Vale ressaltar que sem a interpretação geométrica adequada, os alunos dificilmente solucionariam o problema.

Segundo Ferreira (2008), a figura geométrica interpretada através do contexto do problema determina duas atitudes: (i) A assimilação perceptiva das formas; (ii) e a assimilação discursiva dos elementos e propriedades da figura (verificação). Podemos comprovar tal fato, com os problemas apresentados anteriormente nas figuras 5,6 e 7.

Já, os problemas exemplificados nas figuras 8, 9 e 10, são aqueles que se enquadram na categoria (c), ou seja, problemas que envolvem prioritariamente demonstrações. Ferreira (2008) destaca que os problemas que se enquadram nesta categoria, exigem um novo elemento na estrutura de resolução de problemas, o raciocínio dedutivo formal, que se distingue do raciocínio discursivo natural que comumente encontramos nos problemas (Figura 1, 2 e 3), exemplificados anteriormente.

Figura 8 - Problema abordado na OBM 2001

PROBLEMA 6:

Em um quadrilátero convexo, a *altura* em relação a um lado é definida como a perpendicular a esse lado passando pelo ponto médio do lado oposto. Prove que as quatro alturas têm um ponto comum se e somente se o quadrilátero é inscritível, isto é, se e somente se existe uma circunferência que contém seus quatro vértices.

Fonte: OBM 2001

Figura 9 - Problema abordado na OBM 2015

PROBLEMA 2

No triângulo retângulo ABC , os catetos AB e BC medem, respectivamente, 3 cm e 4 cm. Seja M o ponto médio da hipotenusa AC e seja D um ponto, distinto de A , tal que $BM = MD$ e $AB = BD$.

- a) Prove que BM é perpendicular a AD .
- b) Calcule a área do quadrilátero $ABDC$.

Fonte: OBM 2015

Figura 10 – Problema abordado na OBM 2005

PROBLEMA 2

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. As retas AB e CD cortam-se em E e as retas BC e AD cortam-se em F . Sejam P e Q os pés das perpendiculares de E sobre as retas AD e BC , respectivamente, e sejam R e S os pés das perpendiculares de F sobre as retas AB e CD , respectivamente. As retas ER e FS se cortam em T .

a) Mostre que há uma circunferência que passa pelos pontos E, F, P, Q, R e S .

b) Prove que a circunferência que passa pelos vértices do triângulo RST é tangente à circunferência que passa pelos vértices do triângulo QRB .

Fonte: OBM 2005

Em Geometria, o raciocínio dedutivo formal, exige duas condições: uso de proposições, tendo como partida um estatuto teórico: axiomas, definições, teoremas, hipóteses, conjecturas etc.; e a utilização de axiomas, teoremas ou definições para cada avanço realizado em direção à conclusão da demonstração.

A demonstração matemática é um processo de ratificação da veracidade de um enunciado, assim como explicar e elucidar as afirmações matemáticas (VILLIERS, 2001 *apud* FERREIRA, 2008). Porém, a demonstração também tem um aspecto de comunicação e, como tal, utiliza uma linguagem específica de domínio da ciência matemática: a algébrica. Dessa forma, para fazer uma demonstração matemática, é necessário se apropriar da linguagem utilizada e saber operacionalizar dentro da mesma.

Verificar e analisar cada questão das provas da OBM, como vimos, categorizando-as, permite-nos perceber os elementos que devem ser enfatizados na preparação dos alunos para as competições em Matemática.

1.2. Justificativa do Tema da Pesquisa

As Olimpíadas de Matemática estão cada vez mais conquistando espaço dentro das escolas brasileiras. Observa-se uma crescente participação dos alunos nas competições nacionais e regionais a cada ano. Isso ocorre porque essas competições, em si, não exigem do aluno, memorizações de fórmulas e o conhecimento total da disciplina, mas apenas o conhecimento de alguns conceitos básicos, um raciocínio ágil e determinada criatividade (MARTINS, 2015). Ademais, este crescente interesse pelas Olimpíadas de Matemática advém dessas competições promoverem um meio de divulgação entre as escolas quando têm seus alunos premiados

(BADARÓ, 2015). Assim como, também podemos destacar que as escolas que participam das olimpíadas de matemática, disponibilizam aos estudantes e aos professores uma coleção de problemas estimulantes e desafiadores (Pinheiro, 2013; Carvalho, 2013). Vale ressaltar que as olimpíadas de matemática a que este artigo faz referência é a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e a Olimpíada Brasileira das Escolas Públicas (OBMEP). Portanto, mediante as análises das análises das dissertações que abordam o tema e do material didático (livros, vídeos, *site*, material do POTI) constatamos a ausência de uma metodologia de ensino, assim como do uso de uma ferramenta tecnológica que possa auxiliar durante o processo de ensino e aprendizagem.

Diante desse cenário, esta pesquisa de mestrado propõe uma alternativa construída para trabalhar com turmas olímpicas compostas por alunos do Nível 2 (8.º e/ou 9.º anos), apresentamos situações olímpicas, nas quais utiliza-se como metodologia de ensino a teoria das situações didáticas (TSD) de Brousseau. A TSD foi desenvolvida por Guy Brousseau (1986), pesquisador francês da Universidade de Bordeaux. Essa metodologia de ensino busca criar um modelo de interação entre o aprendiz, o saber e o *milieu* (ou meio) no qual a aprendizagem deve acontecer. Ademais, essa investigação, tem como metodologia de pesquisa a Engenharia Didática (ED). A noção de engenharia didática surgiu na Didática da Matemática em França no início dos anos 80. Segundo Artigue (1988), a ED vista como metodologia de pesquisa é caracterizada por um esquema experimental com base em realizações didáticas em sala de aula (ALMOULOU, 2007).

A proposta desta investigação é apresentar situações olímpicas, nas quais os estudantes têm a oportunidade de vivenciar as quatro fases da TSD (ação, formulação, validação e institucionalização) modelada pelo *software* GeoGebra. Vale ressaltar, que para a construção dessa situação olímpica, o pesquisador utilizou como alicerce da sua investigação as quatro fases da ED (análises preliminares, análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori*).

1.3. Delimitação do Problema

Mediante o debruçar sobre trabalhos/investigações que abordam o ensino da Geometria nas escolas brasileiras, realizamos uma análise sobre as questões de provas que a Olimpíada Brasileira de Matemática propõe aos alunos, a fim de compreendermos e antevermos, os possíveis entraves/dificuldades enfrentadas pelos alunos. Identificamos que a ausência de uma metodologia adequada dificulta o processo de ensino e aprendizagem dos estudantes. Outro resultado coletado

é a não modelização das situações problemas que é consequência direta da abordagem realizada durante as aulas olímpicas.

Diante do cenário exposto, destacamos a nossa preocupação eminentemente conceitual e metodológica. Verificamos que o papel das Olimpíadas de Matemática é promover o estudo da Matemática entre os estudantes tanto de escolas públicas, como de escolas privadas. Desse modo, uma atenção especial é concedida e direcionada para os alunos que possuem um « talento nato » pelo estudo da matemática. Dessa forma, surge um problema que, limita e restringe a participação de determinados alunos nas competições, a partir do momento que observamos as ideias, o estilo e as características de abordagem da Matemática no interior das competições, direcionadas para um menor número de estudantes. Desse modo, formulamos as seguintes hipóteses de trabalho que serão objeto de investigação empírica nesse estudo teórico, entretanto, podem ser objeto de interesse em outros estudos empíricos, envolvendo a mesma temática ou outro tópico no ensino das olimpíadas de matemática:

Hipótese 1: A TSD possibilita perspectivar as Olimpíadas de Matemática como uma proposta metodológica de ensino.

Hipótese 2: O uso do *software* GeoGebra possibilita a exploração e visualização dos elementos matemáticos presentes nas situações didáticas olímpicas. Ademais, permite a manifestação das categorias intuitivas, no contexto de ensino da Geometria.

Com base nesses entraves/obstáculos destacados, ressaltamos a necessidade em realizar uma investigação cujo objetivo envolvesse a identificação de modo empírico das categorias intuitivas, que iremos pormenorizar no capítulo seguinte, no contexto de resolução de situações didáticas olímpicas (SDO) que envolvessem o estudo da Geometria Plana, amparadas pelo *software* GeoGebra.

E para concluir a seção, apresentamos os objetivos de interesse, como já foi mencionado anteriormente e, justificamos nosso tema de pesquisa. A seguir, apresentamos detalhadamente, as teorias que nos auxiliará com o nosso objeto de estudo. Evidenciamos sucintamente que o capítulo 2 apresenta o nosso quadro teórico, constituído pelas categorias intuitivas – teoria cognitiva responsável pela interpretação dos dados recolhidos na fase de experimentação; TSD – metodologia de ensino, responsável pela elaboração das situações didáticas olímpicas (SDO) e, a engenharia didática (ED) que consiste na metodologia de pesquisa, responsável pela organização e análise do ambiente que ocorrerá o desenvolvimento das SDO.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, vamos abordar detalhadamente os principais tópicos das teorias que elegemos para compor o referencial teórico da nossa investigação, a saber: a Teoria das Categorias do Raciocínio Intuitivo de Fischbein (1987), em que optamos pela descrição e caracterização de sua natureza, a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1998) e a Engenharia Didática de Artigue (1988), como metodologia de pesquisa.

Sendo assim, apropriamo-nos da visão de complementaridade das fundamentações de Efraim Fischbein (1987) e de Guy Brousseau (1986), com o intuito primordial de oferecer para a nossa investigação, nos momentos de aplicação das SDO, uma maior complexidade, ou seja, como já havíamos mencionado a TSD nos permite a elaboração das SDO, em que nas suas fases (ação, formulação, validação e institucionalização) destacamos o papel da teoria de Fischbein que consiste em identificar em cada momento dialético qual tipo de raciocínio intuitivo está sendo manifestado. Desse modo, utilizamos às categorias intuitivas relacionadas ao raciocínio matemático, na visão de Fischbein (1987) para interpretarmos os dados recolhidos na nossa experimentação, e antevemos que a respectiva teoria se mostra como um elemento que adotamos para deter a possibilidade de evitar entraves/obstáculos apontados no estudo da Geometria no contexto das olimpíadas de Matemática. Ressaltamos que a TSD que comumente vem sendo discutida em vários trabalhos da vertente francesa, que é caracterizada por um esquema experimental de situações didáticas que se desenvolvem no contexto da sala de aula, tendo o professor como mediador. Apresentaremos também, o esmiuçar de suas fases, assim como, sua relação com o nosso objeto de investigação.

Concluímos, com a nossa metodologia de pesquisa - ED, discutimos as suas fases detalhadamente, assim como a sua adequação ao nosso estudo.

2.1. Categorias Intuitivas no Ensino da Geometria

Primeiramente, delineamos o trabalho desenvolvido por Efraim Fischbein (1920-1998). Gradua-se na Universidade de Bucareste em 1947 e torna-se membro do Departamento Educacional de Psicologia, de 1959 a 1975. Efraim Fischbein apresenta um trabalho reconhecido e de suma relevância perante à comunidade contemporânea internacional de pesquisadores em Educação Matemática (ALVES, 2011).

Fischbein afirma que a manifestação de uma consciência coletiva no que diz respeito ao esforço pelo aprimoramento de ações de especialistas direcionados ao ensino e aprendizagem em Matemática não é recente. Neste sentido, enfatiza que grandes matemáticos, como Henri Poincaré e Felix Klein foram altamente interessados em Educação Matemática e publicaram suas ideias em concordância com a Didática da Matemática (FISCHBEIN, 2000).

Em 1963, Fischbein publica sua tese de doutoramento intitulada *The Figural Concepts: the nature of geometric entities and their development in children*³. Enfatiza, na sua tese, a preocupação com as faculdades intuitivas dos aprendizes exigidas na aprendizagem e no contato inicial com alguns conceitos da Matemática. Um pormenor é identificado na teorização abordada por ele em relação ao papel e às fontes de explicação da natureza do conhecimento que obtemos por meio da faculdade psíquica que denominamos de intuição. Destacamos que para Fischbein e Gazit (1984), o termo ‘intuição’ significa “basicamente, uma avaliação global, sintética, não explicitamente justificada ou predição. Tal cognição global é sentida por um sujeito como auto-evidente, auto-consistente, e duramente questionável” (Fischbein; Gazit, 1984, p. 2).

Desse modo, Fischbein busca apoiar-se, tanto no terreno filosófico como no campo da pesquisa em psicologia Cognitiva, a fim de estruturar e desenvolver suas discussões, vislumbrando respostas adequadas aos problemas que possivelmente estão conectados a ambas as áreas do saber científico.

Destacamos, ainda que, em um dos seus trabalhos, argumentações em relação a sua visão sobre a definição de intuição. Fischbein (1971), afirma:

diferentes definições do termo ‘intuição’ têm sido propostas, exprimindo como de hábito o ponto de vista do autor sobre a natureza deste fenômeno. [...] Citamos apenas alguns para recordar a diversidade de orientações. Mas de todos os autores, identificamos um elemento comum. O termo intuição em sua acepção mais geral, significa conhecimento imediato (FISCHBEIN, 1971, p. 264).

Ademais, identificamos nos seus trabalhos acadêmicos, a presença de um discurso que assume os pressupostos piagetianos. Desse modo, Fischbein (1969) destaca que Jean Piaget (1896-

³ Os conceitos figurativos: A natureza das entidades geométricas e seu desenvolvimento em crianças.

1980) propõe uma das teorias mais relevantes em relação aos estádios mentais, fruto de uma pesquisa de aproximadamente cinco décadas.

E com o amparo em alguns pressupostos assumidos por Piaget, Fischbein afirma que um ensino estrutural contribui para a elaboração de estruturas mentais. O ensino deve evidenciar os conceitos essenciais, sobre técnicas de descoberta, de organização, de interpretação em um domínio de conhecimentos (FISCHBEIN, 1969).

Com apoio nesse e em outros pressupostos, Fischbein verifica a complexidade do raciocínio lógico-matemático. Ressalta o modo diferenciado na Matemática, em relação às outras áreas. Analisa a origem, evolução, abstração e a sistematização dos conhecimentos matemáticos.

Ademais, Fischbein analisa cuidadosamente o processo de ensino e aprendizagem quando afirma que muito frequentemente, o sujeito enfrenta dificuldades em sua aprendizagem, compreensão e resolução de problemas desafiadores porque suas estratégias de raciocínio são controladas por modelos tácitos inadequados. O professor deve tentar identificar tais modelos e auxiliar o estudante para corrigir seus modelos mentais ou adquirir outros mais adequados neste caso (FISCHBEIN, 1987).

Como identificar características intuitivas nos modelos apresentados pelos estudantes, se o professor desconhece os modos de manifestação do raciocínio intuitivo? Como utilizar a subjetividade dos modelos mentais empregados na elaboração de conjecturas?

Ressaltamos que conforme Fischbein (1987), o raciocínio intuitivo que pode surgir no contexto de resolução de problemas, envolve o caráter de maturidade e de experiência do sujeito, por exemplo, a atividade de um especialista (físico, matemático, engenheiro, dentre outros), urge identificar formas de raciocínio especializado e complexo.

Sendo assim, concluímos que um dos aspectos relevantes de um matemático é a capacidade de representar conclusões importantes, inicialmente ocultas. Ressaltamos que este processo ocorre de forma aparentemente mecânica, antecedendo uma análise sistemática maior. Desse modo, os resultados surgem de maneira intuitiva, a partir de uma visão global.

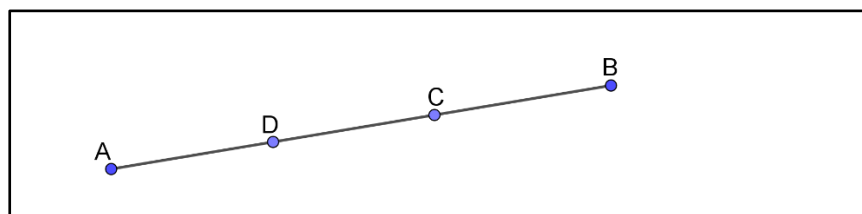
Anteriormente, porém, de descrever as categorias intuitivas que identificaremos em nossa investigação, é relevante abordarmos a natureza dos processos cognitivos, com base intuitiva. Como já mencionamos, iremos propor situações didáticas olímpicas (SDO), e no decorrer de cada momento dialético da TSD, iremos identificar qual tipo de raciocínio tem a maior probabilidade de ocorrer. Por exemplo, no que concerne à *intuição afirmativa*, prevemos que na dialética da ação o

estudante manifeste esse tipo de intuição, uma vez que a ação é o momento que o aluno se depara com o objeto de estudo (SDO). Portanto, é nesse momento conforme a perspectiva de Fischbein (1987) que o estudante estrutura suas conjecturas, formule as ideias, isso sem perceber a necessidade de uma prova formal, como caracteriza essa categoria intuitiva. Por exemplo, quando dizemos que “dois pontos determinam uma linha reta” ou que “o todo é maior do que as suas partes constituintes”, manifestamos um conhecimento baseado em intuições afirmativas (ALVES, 2011).

Observemos que na primeira afirmação declaramos algo em relação a um objeto que possui uma definição formal dentro de uma teoria axiomática que denominamos Geometria Plana. Ao passo que na segunda afirmação, aplicamo-la em um contexto não preciso.

Outro exemplo pode ser mencionado quando afirmamos que “se numa reta o ponto C reside entre os pontos A e B, e o ponto D se encontra entre A e C, conseqüentemente, o ponto D estará também entre A e B”. Vemos a descrição da situação na figura 11.

Figura 11- Exemplo de intuição afirmativa



Fonte: ALVES (2011, p.44)

Sublinhamos que, no caso de “*intuição afirmativa*”, o sujeito afirma algo a respeito de um fenômeno aceito como verdadeiro, ou seja, são representações de fenômenos aceitos como auto-consistentes e auto-evidentes.

Em contrapartida, as intuições conjecturais representam declarações sobre eventos futuros ou sobre o curso de certo evento. Esse tipo de intuição desempenha uma importância essencial em todo tipo de atividade profissional. Esta categoria representa “uma visão preliminar, global que antecede uma solução analítica e completamente desenvolvida de um problema” (FISHEBEIN, 1987). Sua importância didática destaca-se ao afirmarmos que iniciamos uma boa aula de Matemática ao propor um bom problema. Os entraves nem sempre explicitados se manifestam quando percebemos a dificuldade em identificar e distinguir um bom problema de um outro menos adequado. A intuição conjectural é representada por possuir elementos próximos da

solução de modo identificável, entretanto, não envolvidos diretamente na estratégia de efetiva solução do problema.

Seguindo a sequência didática proposta pela TSD, após a dialética da ação, temos a formulação, sendo assim, nesse momento o estudante se debruçará a elaborar as suas conjecturas de modo analítico, podendo construí-las com a utilização do *software* GeoGebra, inspecionado pelo aspecto visual, agora mediado pela dialética da ação, em que só mobilizava um sentimento de certeza, agora nessa fase (formulação), o aluno necessitará mostrar que há uma resposta para as suas conjecturas, desse modo, inferimos que nesse momento, há probabilidade de ocorrer a intuição conjectural, pois conforme Fischbein (1987), o estudante compreende o que deve fazer para obter a solução, recordando que somente ele possui esse pensamento, mas ainda nesse momento não encontrou a solução do problema. Então, o aluno identifica uma situação que envolve um problema e exige uma argumentação mais detalhada, apesar de ainda, não necessariamente se encontra imerso num esforço para a sua resolução de fato.

As intuições conjecturais são fundamentais na postura do professor, uma vez que, ele deve ter a capacidade de antever as possibilidades de êxito ou fracasso de qualquer argumentação apresentada pelo aluno. Por outro lado, no que diz respeito ao estudante, não é muito imediata a identificação implícita de uma manifestação intuitiva, pois elas não ocorrem de modo isolado, uma vez que estamos falando sobre processos mentais. Em todo caso, com suporte nas argumentações de Fischbein, podemos descrever a possibilidade de manifestação de uma intuição conjectural numa fase eminentemente anterior à resolução do problema e, em outra fase, destacadamente em um momento posterior. Note-se, porém, que a intuição conjectural numa fase após a resolução efetiva do problema proporciona ao estudante a identificação de consequências futuras daquele resultado particular obtido.

As intuições antecipatórias representam a solução preliminar de uma situação problema. Esta aparece como uma descoberta, como uma solução de um problema e como resultado de um esforço pela busca da solução, resultam de uma consequência do esforço de verificação e indicam uma mudança de estágio cognitivo mais elevado.

Fischbein sublinha ainda que, quando falamos de intuições antecipatórias, nos referimos a uma fase no processo sistemático de resolução de problemas. Enquanto isso, as ‘intuições conjecturais’ se relacionam a um momento não necessariamente ligado à atividade de busca para a solução intrínseca de um problema. Portanto, o aluno se encontra na fase de aplicação concreta de

estratégias, emprego de fórmulas, elaboração de desenhos que auxiliam efetivamente a identificação de uma solução. Inferimos que, considerando que falamos sobre processos cognitivos mentais, as três formas de intuição descritas não ocorrem de modo isolado.

Vale ressaltar que na ação o aluno elabora suas conjecturas, na formulação ele estabelece uma possível ideia de solução para o problema, e lembrando que em cada fase o estudante chega a uma conclusão, mediada pelos seus raciocínios intuitivos, sendo assim a próxima fase dialética é a validação, momento em que o aluno apresenta de modo formal uma solução matemática para o problema, ou seja, por meio da confrontação do resultado obtido na ação e na formulação. Com isso, podemos identificar uma intuição antecipatória, ou seja, o aluno já encontrou a solução da situação problema.

No que concerne ao ensino da Geometria, essa classificação hierárquica, na concepção de Fischbein (1987), permite-nos identificar aplicações diferenciadas na construção dos conceitos geométricos.

Em nosso estudo ao detalharmos a complementaridade da TSD com a teoria das categorias intuitivas de Fischbein, podemos concluir que a TSD nos permite organizar de modo sistemático uma sessão didática a fim de analisar os fenômenos que ocorrem no contexto da sala de aula. Assim essa metodologia de ensino permite-nos aperfeiçoarmos as técnicas que aplicamos durante o processo de ensino e aprendizagem, em contrapartida a teoria das categorias intuitivas nos permite compreender e identificar manifestações de modo mais cognitivo presentes implicitamente ou explicitamente durante o processo de ensino e aprendizagem.

Desta forma, com o intuito de estruturar a sessão de ensino com a construção da SDO, iremos apresentar a Teoria das Situações Didáticas (TSD).

2.2. Teoria das Situações Didáticas – TSD

A Teoria das Situações Didáticas foi desenvolvida por Guy Brousseau (1986), pesquisador francês da Universidade de Bordeaux. A TDS permite-nos modelar o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos (ALMOULOU, 2007). Portanto, o intuito de Brousseau é caracterizar um processo de aprendizagem por uma série de situações reprodutíveis, conduzindo à modificação de um conjunto de ações dos alunos. Essa modificação é caracterizada pela

assimilação de um determinado conjunto de conhecimentos, da ocorrência de uma aprendizagem significativa (ALMOULOUD, 2007).

Destacamos neste escrito, a tese de doutorado de Guy Brousseau (1986) intitulada *Théorisation des phénomènes d'enseignement de mathématiques* – teorização de fenômenos de ensino da Matemática, na qual o pesquisador afirma:

Para produzir, melhorar, reproduzir, descrever e compreender situações de ensino da Matemática se torna necessário e possível teorizar esta atividade de ensino como um objeto original de estudo e não somente como a simples conjunção de fatos teorizados unicamente por intermédio de domínios autônomos, como Pedagogia, a Sociologia, a Psicologia, a Matemática, a Linguística e a Epistemologia (BROUSSEAU, 1986, p.3)

Ademais, Brousseau (1986, p. 3) destaca elementos que são essenciais durante o processo de ensino e aprendizagem em Matemática, tais como: poder comparar, não apenas os resultados, mas todo o raciocínio matemático desenvolvido pelos aprendizes, assim como também, as condições nas quais foram obtidos e de modo que tais condições sejam reprodutíveis.

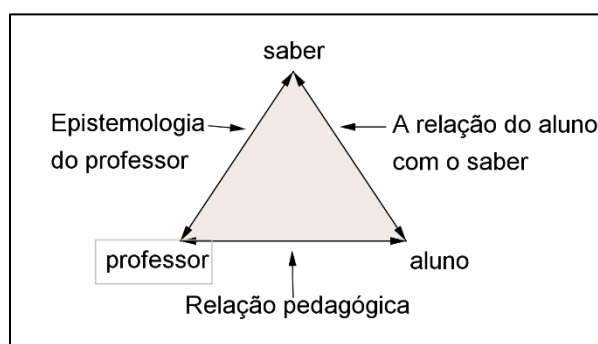
O pesquisador ainda acrescenta que “a reprodutibilidade repousa, então, na compreensão dos fenômenos fundamentais, isto é, do tecido de relações atestadas, constituindo a teoria e permitindo se escolher as condições de ensino, de explicar seus efeitos e de prevê-los” (BROUSSEAU, 1986, p. 3).

Outro aspecto relevante mencionado pelo pesquisador Brousseau (1986) resgata conceitos presentes na teoria de Piaget, quando destaca características vinculadas ao processo de aprendizagem por meio de adaptações e esclarece que

A problemática da aprendizagem por adaptação impõe a pesquisarmos, em cada atividade proposta ao aluno, que provoque nesse aprendiz a criação de um conhecimento visado em termos de respostas e circunstâncias. É raramente possível de se obter, de modo súbito, nestas condições, um saber correto, preciso e definido. Ao contrário, tais circunstâncias são frequentemente locais, particulares e, além disso, ligadas indevidamente, por circunstâncias escolhidas, por outros conhecimentos, ainda provisórios e incorretos. Devem, pois evoluir, com fins a se inscrever numa gênese visando um saber cultural correto (BROUSSEAU, 1986, p.15).

Evidenciamos que o objeto central nessa teoria é a situação didática, a partir da qual identificamos as interações estabelecidas entre professor, aluno e saber (figura 12). De fato, Brousseau (1988) descreve na sua teoria, uma relação didática apresentada de forma ternária, isto é, o aluno, o professor e o saber matemático.

Figura 12 – Triângulo didático



Fonte: ALMOULOU (2007, p.35)

Segundo Almouloud (2007, p. 35), a teoria das situações apoia-se em três hipóteses, as quais esclarecemos a seguir:

- i. O aluno aprende adaptando-se a um *milieu*⁴ que é fator de dificuldades, de contradições, de desequilíbrio. Esse conhecimento, fruto da adaptação dos alunos, manifesta-se pelas novas descobertas, que são a prova da aprendizagem.
- ii. O professor deve criar e organizar um *milieu* que seja suficiente para desenvolver situações suscetíveis de promover uma aprendizagem mais significativa.
- iii. O *milieu* juntamente com as situações didáticas devem engajar os conhecimentos matemáticos envolvidos durante o processo de ensino e aprendizagem.

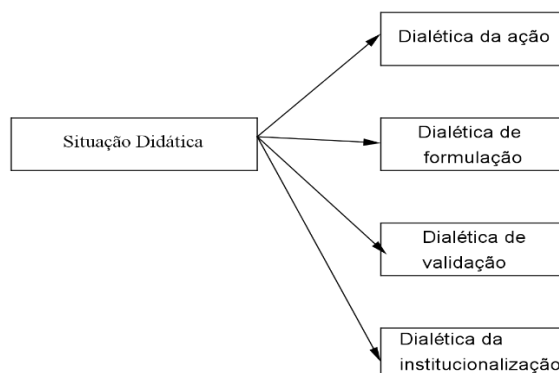
Podemos ainda acrescentar a afirmação de Brousseau (1998) quando descreve a relação do aluno com o *milieu*:

O aluno ao entrar em contato com o *milieu*, e por meio do mesmo surge adaptações/desequilíbrios, sendo assim, resulta num processo de aprendizagem, tendo em vista que as situações problemas propostas aos alunos devem levá-los a pensar, refletir, agir, conjecturar e inferir; sendo que o aluno aprende de forma autônoma, por vontade própria (BROUSSEAU, 1998, p. 59)

Para analisar o processo de aprendizagem, a TSD divide-se em quatro fases distintas, nas quais o saber tem funções diferentes e o aluno não tem a mesma relação com o saber. Desse modo, Brousseau (1986) caracteriza e distingue quatro momentos dialéticos de ensino ou momentos didáticos: ação, formulação, validação e institucionalização (Figura 13).

⁴ Local ou meio que fomenta a interação do aluno e professor, com as situações didáticas (SDO)

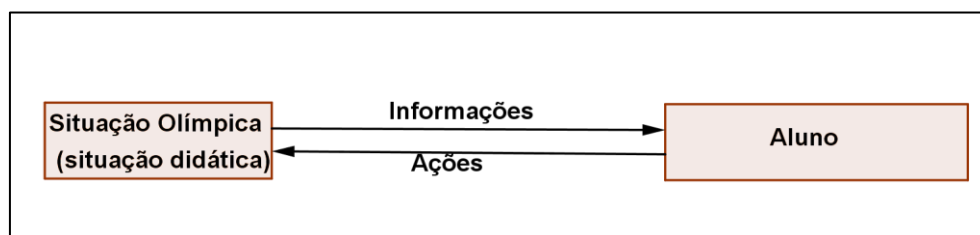
Figura 13 – Dialética de Ensino



Fonte: Autora (2017)

Dialética de ação: Consiste em colocar os alunos numa situação de ação, ou seja, o professor coloca um problema para os alunos cuja melhor solução é o conhecimento a ensinar. Assim os alunos podem agir sobre essa situação, obtendo *feedback* sobre a sua ação (ALMOULOU, 2007, p. 37). A figura 14 mostra as relações da dialética de ação.

Figura 14 – Representação dos elementos que envolvem a dialética da ação

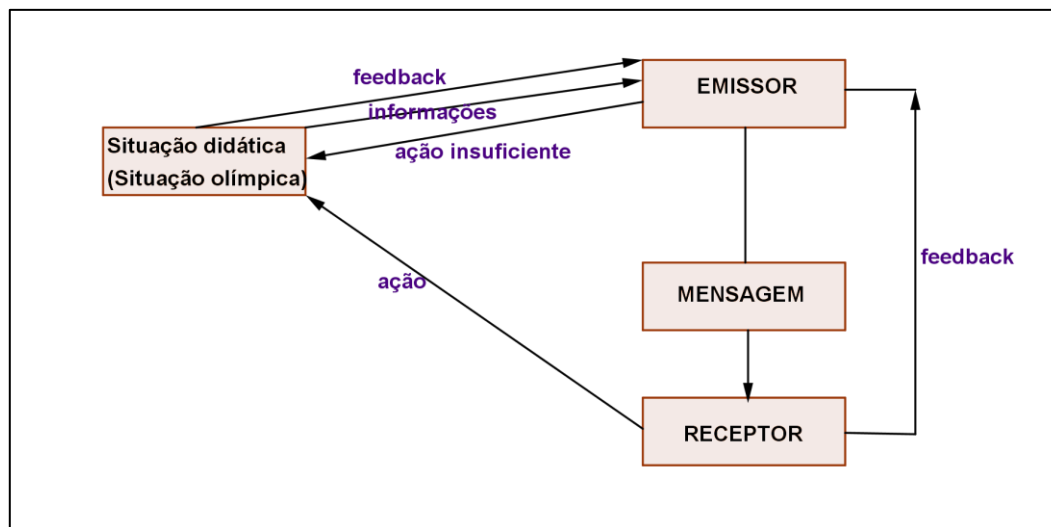


Fonte: adaptação ALMOULOU (2007, p.37)

A situação de ação deve permitir ao aluno julgar o resultado de sua ação e ajustá-lo, conforme a retroação do *milieu*. Consequentemente, o aluno pode aprimorar ou abandonar seu modelo para criar um outro: caracteriza-se uma aprendizagem por adaptação. Este pormenor faz referência à epistemologia construtivista de Piaget, segundo a qual a aprendizagem decorre de processos de adaptação, desenvolvidos pelo sujeito diante de situações problemas (Almouloud, 2007, p. 32).

Dialética de formulação: Nesta fase o aluno troca informações com o professor ou com os colegas, que serão os emissores e receptores. Estas mensagens podem ser expressas oralmente ou por símbolos matemáticos. Segundo Almouloud (2007) essa dialética permite criar um modelo explícito com conhecimentos antigos ou novos, pode ser escrito ou oralmente, as ferramentas que utilizou e a solução encontrada. Portanto, o objetivo dessa fase é a troca de informações (Figura 15).

Figura 15 – Dialética de formulação

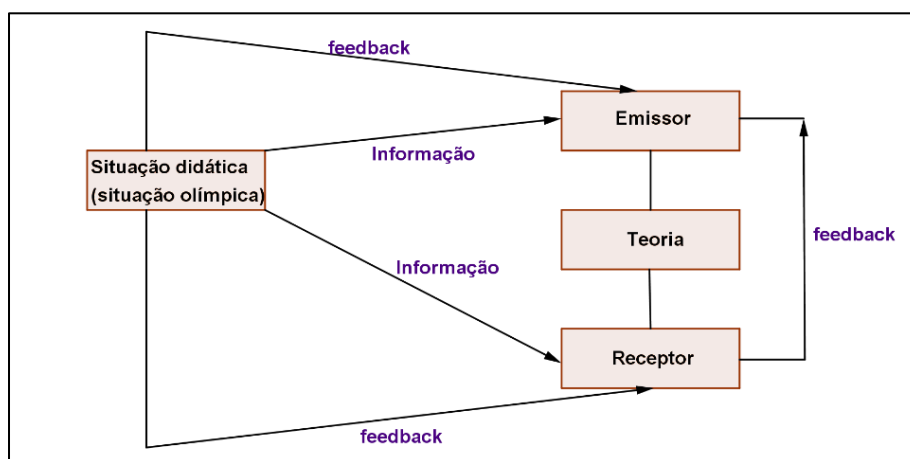


Fonte: adaptação ALMOULOU (2007, p.38)

Segundo Brousseau (1986), a dialética de formulação, proporciona ao aluno condições para que este construa, uma linguagem compreensível por todos, que considere objetos e as relações matemáticas envolvidas na situação didática.

Dialética da validação: O aluno deve mostrar a validade do modelo que criou, submetendo a mensagem Matemática. Para Almouloud (2007), o emissor deve justificar a exatidão e a validade do seu modelo. O receptor, pode pedir mais explicações ou refutar as suas estratégias e possíveis soluções, justificando a sua refutação. Sendo assim, a TSD funciona nos debates entre alunos, como *milieu* de estabelecer provas ou refutá-las (Figura 16).

Figura 16 – Dialética da validação



Fonte: adaptação ALMOULOU (2007, p.39)

Dialética da institucionalização: Nessa fase o professor deve fixar convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber. Segundo Almuloud (2007), o novo conhecimento vai fazer do patrimônio matemático da turma. Depois da institucionalização, feita pelo professor, o saber torna-se oficial e os alunos devem incorporá-lo a seus esquemas mentais, tornando-o assim disponível para utilização na resolução de problemas matemáticos. Vale ressaltar, que é o aluno que tem a responsabilidade (contrato didático) de administrar sua relação com o saber nas fases anteriores, estando o professor responsável pela fase de institucionalização. Ele deve determinar a maneira e o conteúdo do saber para o qual ele quer dar um estatuto oficial.

Diante de alguns pressupostos assumidos pela teoria das situações didáticas (TSD), acentuamos o seu uso em nossa investigação, conforme delineamos anteriormente as suas principais características, fica evidente que diante do cenário de dificuldades existentes durante o processo de ensino e aprendizagem em Matemática, a respectiva teoria surge como amparo ao trabalho do professor, sendo assim, sua relação com o nosso objeto de estudo surge exatamente pela necessidade de realizar uma prática alternativa para o ensino das olimpíadas de matemática, desse modo adotaremos a TSD como metodologia de ensino, ou seja, assumindo alguns pressupostos da TSD, iremos elaborar situações problemas – situações didáticas olímpicas (SDO) que nos permitirá identificar empiricamente o raciocínio intuitivo, em que assumimos como objetivo da nossa investigação.

A partir de então, em nosso trabalho, denominaremos a situação didática, de situação didática olímpica (SDO). Pois, partindo do pressuposto que Oliveira (2016) considera que as

situações didáticas olímpicas são situações de ensino para resolução de problemas olímpicos segundo as fases dialéticas do Brousseau (1986).

2.2.1. A Situação Didática Olímpica (SDO) e a Transposição Didática

A partir do cenário delineado nas seções anteriores, podemos introduzir nossa preocupação eminentemente conceitual e metodológica. De fato, o movimento dialético previsto pelas fases da TSD, tendo em vista a modelização de situações de ensino de Matemática que, por intermédio da adoção de certos pressupostos assumidos, deve concorrer para a aprendizagem dos estudantes, por intermédio da adaptação e aquisição de novos conhecimentos, como podemos observar logo em seguida.

A teoria das situações matemáticas - mas não somente ela - destaca os motivos e as formas de reunir uma coleção de conhecimentos e organizá-los para facilitar seu uso e aprendizado - sua adaptação - a um conjunto de situações (BROSSEAU, 2011, p.5, tradução nossa).⁵

As situações didáticas olímpicas serão abordadas segundo uma noção concebida e descrita como aplicação de alguns pressupostos assumidos pela TSD, mas situada no contexto de situações problemas oriundos das Olimpíadas de Matemática. Nas competições de Matemática, identificamos situações problemas que desconsideram, de modo explícito, uma metodologia de ensino que, em consonância com seus fundamentos, permitam modelizar os momentos dialéticos que indicamos na seção anterior.

De fato, constatamos que o papel das Olimpíadas de Matemática se destaca, com o intento de estimular o estudo da Matemática entre estudantes de escolas públicas (municipais, estaduais e federais) e privadas, contribuindo para a melhoria do ensino da matemática no Brasil. Desse modo, uma atenção especial é concedida e direcionada, irremediavelmente, para os alunos « mais talentosos ».

Divisamos, desta forma, um problema que, em maior ou menor substância, restringe o público de estudantes beneficiados, bem como adota uma perspectiva limitada ao ensino, na medida em que observamos as ideias, o estilo e as características da abordagem da Matemática no

⁵ La théorie des situations mathématiques – mais pas ele seule – se pose le problème des raisons et des façons de rassembler une collection de connaissances, et de l’organiser pour faciliter son usage et son apprentissage – son adaptation – à une collection de situations.

interior das competições eminentemente por meio de situações problemas, endereçadas para um público menor de estudantes. Desse modo, assumimos um caráter imprescindível de proporcionar uma transposição didática ou, de modo simplificado, as alterações e modificações substanciais de situações ou conjunto de situações olímpicas que permitam o alcance de um número maior de estudantes e, não apenas como ocorre atualmente, a participação ativa apenas dos estudantes cujo talento ou habilidades matemáticas se evidenciam. Diante do entrave anterior, propugnamos a seguinte definição:

Situação Didática Olímpica (SDO): Um conjunto de relações estabelecidas implicitamente ou explicitamente, entre um aluno ou grupo de alunos, um certo meio (compreendo ainda o conhecimento matemático abordado por intermédio de problemas de competição e de olimpíadas) e um sistema educativo, como o objetivo de permitir a apropriação, por parte destes alunos um conhecimento constituído ou em vias de constituição, oriundo de um ambiente de competição e problemas ou conjunto de problemas característicos das olimpíadas de Matemática.

Ressaltamos que o elemento diferencial da definição anterior reside no fato de assumir e adotar os pressupostos dos momentos dialéticos (ação, formulação, validação e institucionalização) indicados na seção anterior, para o caso da TSD. Desse modo, indicaremos alguns objetivos básicos de uma SDO, tendo em vista o ensino da Matemática no contexto olímpico:

- i. A partir de uma transposição didática adequada dos problemas olímpicos, permitir o acesso ou inclusão de um conjunto maior de estudantes ao ambiente de discussão ou « clima » de competição matemática, visando a elaboração de conhecimentos;
- ii. A partir de uma transposição didática adequada permitir ao professor de Matemática perspectivar novas formas de abordagem (com o uso da tecnologia e exploração de *softwares* de Matemática) e descrição de problemas olímpicos, que não sejam intimamente restritos a uma tarefa de resolução de problemas, com o tempo previamente demarcado e atividades hegemonicamente individuais;
- iii. Divulgar e promover a sociabilização das ideias matemáticas intuitivas e estratégias características de situações problemas de olimpíadas não apenas para alunos reconhecidos como mais habilidosos diante do conhecimento matemático.

Por outro lado, a fim de descrever com precisão uma SDO, urge assumir alguns pressupostos e antever determinadas concepções rotineiras no âmbito do ensino de Matemática. Desse modo, recordamos o seguinte aspecto:

Em todas as situações didáticas o professor deve suscitar no aprendiz, a descoberta passo a passo do conhecimento matemático. De forma que o estudante consiga decodificar, compreender e identificar a mensagem oculta. Sendo assim, produzirá uma resposta (*feedeback*). Para atingir esse objetivo é fundamental que o professor transmita as informações suficientes ao aluno, durante a sua mediação (BROUSSEAU, 1986, p. 793).

A partir das considerações acima e, tendo como objetivo envolver um maior número de estudantes, assumiremos o seguinte pressuposto para a noção de SDO: o professor deverá promover um ambiente de aprendizagem, balizado pela discussão e debate científico de um grupo de estudantes, a partir da exploração de problemas originalmente de Olimpíadas de Matemática,⁶ entretanto, apenas na dialética da institucionalização, o novo saber que deve ser incorporado pela turma envolverá a comunicação explícita de que a natureza dos problemas discutidos são, de fato, de ordem especializada, competitiva e oriundos de Olimpíadas de Matemática. Dessa maneira, o professor poderá atuar no sentido de uma maior inclusão e estimular a aproximação dos estudantes com a Matemática.

A seguir, para que possamos organizar o meio, os tipos de ferramentas que utilizaremos para coletar os dados da nossa investigação e o modo de utilização de tais instrumentos, apresentaremos a metodologia de pesquisa adotada na nossa investigação – Engenharia Didática (ED), em que descreveremos as fases atinentes a cada momento dialético dessa teoria, assim como, descreveremos o nosso objetivo em cada etapa, e salientamos a complementaridade que a TSD possui com essa metodologia, uma vez que a TSD está voltada a um campo experimental (ARTIGUE, 1988), sendo assim, podem ser articuladas numa mesma investigação.

2.3. Elementos de uma Engenharia Didática de Primeira geração

A metodologia de pesquisa adotada nessa investigação é a Engenharia Didática – ED, conforme Artigue (1998), a ED vista como metodologia de pesquisa, é caracterizada, em primeiro lugar, por um esquema experimental com base em “realizações didáticas” em sala de aula, isto é,

⁶ Problemas provenientes das provas de Olimpíadas Brasileiras de Matemática ou de livros comumente utilizados em aulas olímpicas. Fonte: <https://www.obm.org.br> acessado em 17/08/2017.

na construção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Recordamos que Artigue (1998, p. 243) afirma que:

A noção de Engenharia Didática emergiu em Didática da Matemática no início dos anos 1980. E trata-se de classificar por este termo uma forma de trabalho didático; comparável ao do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apoia sobre um conjunto de conhecimentos científicos do seu domínio, aceita se submeter a um controle do tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se encontra obrigado a trabalhar sobre objetos mais complexos do que os objetos depurados pela ciência e assim, se debruça praticamente, com todos os meios pelos quais ele dispõe mesmo os problemas ainda não considerados pela ciência.

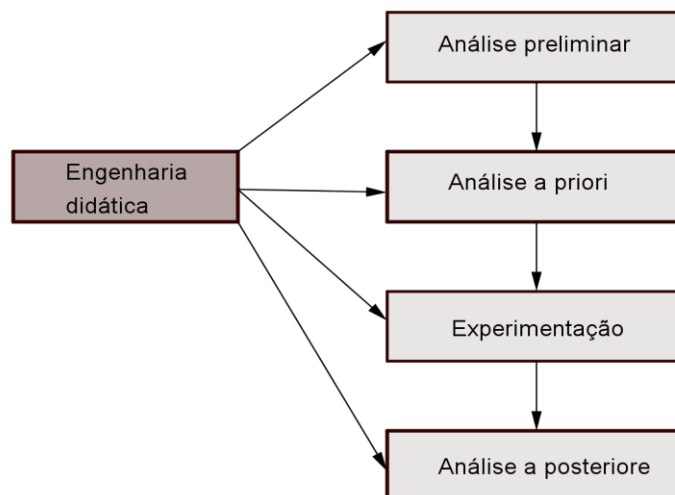
A ED caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e pelos modos de validação que lhe são associados: a comparação entre análise *a priori* e análise *a posteriori*. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste (ALMOULOU, 2007).

Artigue (1988) acentua características intrínsecas sobre a organização da ED, estabelecendo dois níveis de organização envolvidos na Engenharia, em termos de variáveis didáticas – micro-engenharia e macro-engenharia. A investigação em micro-engenharia se apropria das relações existentes nos fenômenos que ocorrem em sala de aula, portanto esse nível de investigação tem uma visão mais limitada. No segundo nível, depara-se com entraves/dificuldades de ordem metodológica e/ou institucionais, busca uma visão mais ampla.

A nossa pesquisa enquadra-se em uma micro-engenharia, que busca desenvolver uma ED no ensino das Olimpíadas de Matemática relativo ao conteúdo de Geometria Plana. Essa ED apresenta também variáveis macrodidáticas e variáveis microdidáticas. As variáveis macrodidáticas referem-se à organização global da ED, enquanto as variáveis microdidáticas se apresentam especificadamente na fase da experimentação da ED.

Essa metodologia de pesquisa (ED) apresenta-se em quatro fases interligadas e distintas (Figura 17), a seguir descreveremos cada uma delas.

Figura 17 – As diferentes fases da Engenharia Didática



Fonte: Autora (2017)

Fase 1 - As análises Preliminares ou prévias

O pesquisador deve considerar o quadro teórico didático geral e os conhecimentos já adquiridos sobre o assunto em questão, incluem a análise epistemológica do ensino atual e seus efeitos, das concepções dos alunos, dificuldades e obstáculos, e análise do campo das restrições e exigências no qual vai se situar a efetiva realização didática (ALMOULOUD, 2012, p.172).

Com respeito a essa fase, no capítulo 3 realizamos uma análise sobre o material didático – livros nacionais e internacionais direcionados a preparação de alunos para as Olimpíadas de Matemática, com o intuito de perceber como a Geometria Plana é abordada no contexto olímpico. Também, analisamos dissertações do PROFMAT que abordam o tema. Para que assim possamos compreender os entraves/obstáculos que remetem ao ensino desse objeto matemático, como resultado pretendemos elaborar a SDO balizada nesses entraves indicados nessa fase.

Destacamos que ainda nessa fase realizaremos algumas situações didáticas para que possamos compreender quais os conhecimentos prévios dos alunos, Artigue (1988) destaca que esse momento é relevante, nomeando-o de *concepções dos alunos*.

Fase 2 - Análise a priori e concepção das situações didáticas

Nesta segunda fase, conforme Artigue (1988), o pesquisador toma a decisão de agir sobre certo número de variáveis de comando – são variáveis relevantes que podem provocar as mudanças

desejadas, no que diz respeito aos processos de ensino e de aprendizagem do objeto matemático em questão.

Artigue (1988) com uma preocupação operacional, distingue dois tipos de variáveis manipuladas pelo pesquisador: *variáveis macro-didáticas* e *variáveis micro-didáticas*. As primeiras dizem respeito à organização global da engenharia, enquanto as variáveis micro-didáticas são relativas a organização de uma sessão ou de uma fase.

Destacamos que nesta fase, com o intuito de responder as questões e validar as hipóteses levantadas na análise preliminar, o pesquisador deve elaborar e analisar uma sequência de problemas (ALMOULOU, 2007). A situação problema tem por objetivo auxiliar o aluno na construção do conhecimento de uma maneira construtivista e significativa. Também como, desenvolver habilidades e competências necessárias para resolução de problemas, utilizando as diferentes representações matemáticas. Para Almouloud (2007), essas situações devem ser concebidas de modo a permitir ao aluno agir, se expressar, refletir e evoluir por iniciativa própria, adquirindo assim novos conhecimentos.

No que concerne a nossa investigação, destacamos que nesta fase apoiamo-nos sobre alguns elementos destacados na fase de análise preliminar, ou seja, diante dos entraves/obstáculos detectados na fase anterior, iremos realizar o planejamento da Situação Didática Olímpica – SDO = TSD + PO (problema selecionado de provas olímpicas) que iremos aplicar na fase posterior (Experimentação). Portanto, na análise *a priori*, descrevemos as escolhas das variáveis didáticas e realizamos a elaboração da SDO, em que iremos antever/controlar os possíveis comportamentos dos alunos.

Fase 3 – Experimentação

Segundo Almouloud (2007, p. 177) a fase da experimentação é clássica. É nesta fase que pesquisador coloca em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade, o que implica um retorno a análise *a priori*. Deve ser realizado um confronto/discussão entre os objetivos e o quadro teórico que sustentam o dispositivo da experimentação, ou seja, justificar as escolhas feitas.

Em relação a nossa investigação, na primeira fase nos debruçamos sobre o material didático que trabalha com a Geometria Plana no contexto olímpico. Assim como, analisamos os trabalhos desenvolvidos que envolvem a mesma temática e como as instituições de ensino realizam a

preparação dos alunos para as Olimpíadas de Matemática. Em seguida, realizamos a construção da SDO que iremos aplicar, em que enfatizamos que o planejamento é realizado mediante a análise dos obstáculos/entraves destacados na fase preliminar. Após, realizar toda essa preparação teórica, podemos seguir para a terceira fase – a *experimentação*, que segundo Artigue (1988) esta fase consiste na aplicação da SDO assumindo os pressupostos de apresentar os objetivos e condições da realização da investigação, estabelecer o contrato didático e registrar as observações realizadas durante a experimentação.

Nesta fase, vale ressaltar que realizamos a observação dos alunos durante as aplicações das sessões de ensino estruturadas com o amparo das dialéticas propostas por Brousseau – TSD, assumindo uma visão de complementaridade com a teoria de Fischbein (1987), como já discutimos em seções anteriores a adequação dessas teorias. Deste modo, para a realização desta fase, utilizamos registros de imagens, gravações e produções realizadas pelos alunos.

Fase 4 – *Análise a posteriori e validação*

Conforme Artigue (1988), a análise *a posteriori* é o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos e que contribui para a melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre as condições da transmissão do novo conhecimento. Assim, esta análise depende das ferramentas técnicas (material didático) ou teóricas (teoria das situações, contrato didático etc.) utilizadas com as quais se coletam os dados que permitirão a construção dos protocolos de pesquisa. O objetivo do pesquisador é relacionar as observações com os objetivos definidos *a priori* e estimar a reprodutibilidade e a regularidade dos fenômenos didáticos identificados (ALMOULOU, 2007).

Desse modo, objetivamos nessa fase confrontar as hipóteses que definimos no planejamento das SDO e, após o recolhimento dos dados, os interpretar com a finalidade de validá-los em nosso estudo.

A seguir, no capítulo 4, apresentaremos detalhadamente as *análises preliminares*, em que é resultado de um estudo sobre o material didático – livros nacionais e internacionais direcionados a preparação de alunos para as olimpíadas de matemática. Assim como, a análise de dissertações/pesquisas que abordam o referido tema.

3. ANÁLISES PRELIMINARES DA ENGENHARIA DIDÁTICA

Neste capítulo, em que consiste a primeira fase prevista da engenharia didática, destacamos que um dos objetivos das análises prévias ou preliminares é identificar os problemas de ensino e aprendizagem do objeto de estudo e esquematizar de forma fundamentada as questões, as hipóteses e os fundamentos teóricos e metodológicos da pesquisa. Portanto, devemos estar atentos aos seguintes pormenores: estudar a gênese histórica do objeto de estudo, analisar a estrutura matemática do saber investigado, analisar o ensino atual e seus efeitos, evidenciar os conhecimentos prévios do aprendiz em relação ao saber visado; analisar o contexto de que depende a construção e realização de cada sessão de ensino (ARTIGUE, 1988).

No que concerne a análise do objeto matemático escolhido (ALMOULOU, 2007, p.173), deve-se: estudar a evolução do tratamento do conceito a ser estudado; analisar livros didáticos enfatizando aspectos, tais como: os obstáculos que podem ser superados ou não, fundamentando a sua justificativa, o papel da história e da epistemologia levado em consideração no estudo do objeto matemático e as concepções possíveis que os aprendizes podem desenvolver, assim como também, fazer uma análise das tarefas propostas pelos autores (efeitos do contrato didático e transposição didática). Analisar as concepções de alunos e professores a propósito do objeto de estudo em questão. Nessa fase, também é relevante, fazermos um levantamento de referências bibliográficas

Conforme Artigue (1988), cada uma dessas fases pode ser retomada conforme a necessidade do pesquisador. Na realidade deve-se realizar um trabalho concomitante com as demais fases da pesquisa.

Portanto, as análises prévias correspondem a primeira fase do desenvolvimento de um quadro teórico de uma pesquisa fundamentada na ED. Nessa fase devemos identificar as variáveis didáticas potenciais que serão explicitadas e manipuladas nas fases seguintes: a construção da sequência de ensino e análise *a priori* (ALMOULOU, 2007). Para tanto, devemos analisar o material didático utilizado em turmas de preparação para as olimpíadas de matemática, as diferentes instituições de ensino em que o saber deve ser ensinado/aprendido e analisar a evolução do tratamento do conceito, realizar ainda uma análise praxeológica de tipos de tarefas propostas e seus possíveis efeitos do contrato didático e de transposição didática, realizar um estudo dos principais problemas relacionados com o ensino e aprendizagem da noção estudada (estudo da

geometria), assim como também, destacamos os problemas de ensino e aprendizagem que serão objeto da pesquisa em andamento e para os quais pretende-se buscar uma solução.

Ao seguir alguns pressupostos estabelecidos pelas análises preliminares, analisamos o material disponível em *internet*, livros nacionais e internacionais, manuais de preparação, banco de questões de provas e o material do POTI (pólo olímpico de treinamento intensivo). Com esta análise buscamos perceber a abordagem da Geometria no contexto das olimpíadas, assim como, buscamos identificar problemas olímpicos que possam desenvolver potencialidades de aprendizagem com o auxílio do *software* GeoGebra.

3.1. O objeto matemático em livros didáticos

Descreve-se na tabela 2, o resultado da análise de quatro livros que comumente são utilizados durante a preparação de alunos para as Olimpíadas de Matemática.

Tabela 2 – Análise de livros direcionados às olimpíadas de matemática.

Livros	Resultado da análise
Fundamentos de Matemática Elementar Autor(es): Osvaldo Dulce e José Nicolau Pompeo. 8ª edição Ano: 2005	Inicia cada capítulo com demonstrações e exemplos que posteriormente auxiliam o aluno a desenvolver determinados raciocínios para resolução de problemas. Os exercícios são propostos conforme o nível de dificuldade (fácil, médio, difícil).
Problemas de Matematicas Elementales Autor(es): V. Lidski y otros 3ª edição Ano: 1983	Os problemas propostos têm como objetivo ajudar aqueles que desejam se aprofundar nos conhecimentos matemáticos elementares. Porém, inclui conteúdos que não são estudados no programa das escolas de ensino médio e também apresenta problemas com elevado nível de dificuldade.
Mathematical Circles – Russian Experience Autor (es): Dmitri Fomin, Sergey Genkin e Ilia Itenberg) Edição: UK Ano: 1996	Os problemas estão estruturados de acordo com o nível de dificuldade, porém finaliza cada capítulo com problemas com nível de dificuldade elevado, exigindo bastante criatividade.
Solving Problems in Algebra and Trigonometry Autor (es): V. Litvinenko e A. Mordkevica 2ª Edição Ano: 1998	Há problemas de fácil resolução, assim como também há problemas cuja solução exige um trabalho árduo e por vezes, criativo. O aluno encontra nesse livro uma grande variedade de exercícios resolvidos com resoluções elegantes e criativas.

Fonte: Autora (2017)

No que concerne aos livros selecionados para a análise destaca-se uma similaridade entre a abordagem do conteúdo matemático, verifica-se que os autores seguem mesma sequência didática: Teoria (demonstração) - exploração de situações-problemas – muitas vezes apresentam problemas com alto nível de dificuldade, sem um direcionamento metodológico ou procedural para a resolução dos problemas propostos.

3.2. Análise de dissertações do PROFMAT

Nessa investigação descreve-se a análise das dissertações do PROFMAT que abordam o tema Olimpíadas de Matemática, totalizando vinte dissertações, dentre as quais descreve-se os objetivos das pesquisas selecionadas para serem mencionadas neste trabalho, com o intuito de fazer uma conexão entre esses objetivos e a razão que fomentou o desenvolvimento de investigar sobre essa temática. Apesar da escassez de obras que abordem o tema Olimpíadas de Matemática, focalizaremos nas dissertações do PROFMAT, por apresentarem resultados e considerações relevantes que possam contribuir com a nossa investigação.

Destacamos, Badaró (2015) que apresenta uma proposta que ajuda o professor e aos gestores escolares a organizarem um curso preparatório para alunos que desejem participar dessas competições. Martins (2015) tem o objetivo de enfatizar conceitos geométricos que ao serem explorados representam entraves/dificuldades para o aprendiz. Bonfim (2013), Carvalho (2013), Do Carmo (2014) e Pinheiro (2013) em suas dissertações destacam a produção de blocos de exercícios separados por semelhança de conteúdos programáticos, nos quais tem como objetivo mostrar as várias alternativas de resoluções. Já, Carvalho Júnior (2013) apresenta diversas soluções de problemas presentes em provas de Olimpíadas de Matemática de diversos países com o objetivo de compreender a abordagem da aritmética modular na relação de congruência no conjunto dos inteiros para a resolução de problemas olímpicos. Alves (2010) analisa o impacto da Olimpíada de Matemática para alunos das escolas públicas. Cocco (2013), analisa a olimpíada de matemática das escolas públicas (OBMEP) a fim de verificar se ela se constitui como uma política educacional de avaliação em larga escala. Calazans (2014) e Bragança (2013) investigam as possibilidades da elaboração de um material de suporte e apoio aos interessados em implantar um centro de estudo, pesquisa e preparação para Olimpíada de Matemática. Araújo (2014) faz uma análise crítica das provas de primeira fase da OBMEP (nível 1). Verifica-se que tais pesquisas não têm a preocupação

em desenvolver o raciocínio matemático do aluno através da vivência de uma nova metodologia que se diferencie da tradicional ou até mesmo o uso de uma ferramenta tecnológica.

Nesta investigação prioriza-se o raciocínio lógico-dedutivo, a elaboração e realização de estratégias, com o intuito de desenvolver habilidades e competências que permitam os estudantes a construir o conhecimento, a suscitar o raciocínio matemático, a reflexão, a análise, e sobretudo a descoberta através do estímulo de algumas ações, para isso adotamos a Teoria das Situações Didáticas (TSD) como metodologia de ensino.

A seguir no capítulo 4, abordaremos a segunda fase prevista na ED, *análise a priori*, que consiste na elaboração das situações didáticas olímpicas (SDO), em que nosso interesse surgiu da necessidade de construir alternativas metodológicas no ensino da Geometria Plana no contexto olímpico, mediante o estudo realizado sobre os trabalhos/pesquisas e nos livros didáticos consultados, como já foi mencionado anteriormente. Recordamos que essa descrição do planejamento é de grande relevância, pois abordaremos a elaboração da SDO, o que objetivamos em cada momento dialético da TSD, ou seja, antever/controlar os possíveis comportamentos dos alunos que participaram da nossa investigação.

4. ANÁLISE A *PRIORI* E CONCEPÇÃO DE SDO

Neste capítulo objetivamos descrever o planejamento das situações didáticas olímpicas (SDO), assim como, as características do local em que o nosso estudo se desenvolveu, como também, os sujeitos envolvidos na nossa pesquisa.

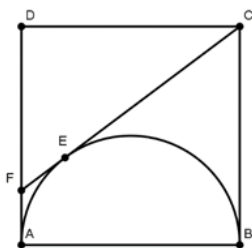
Recordamos que este estudo trata do tópico de Geometria voltado às Olimpíadas de Matemática. As situações didáticas olímpicas elaboradas têm o objetivo de mobilizar os conhecimentos prévios atinentes ao estudo especificadamente da Geometria Plana, visto que, os alunos ao se depararem com alguns problemas olímpicos, não conseguem identificar certos conceitos que são estudados no ensino convencional, os quais podem ajuda-los na elaboração de conjecturas e na validação das estratégias adotadas. Neste sentido esperamos que os alunos mobilizem seus conhecimentos ao desenvolver o raciocínio geométrico exigido por cada SDO.

Descrevemos neste capítulo alguns momentos vivenciados durante a nossa pesquisa (quatro situações didáticas), que foram realizadas numa escola privada de Fortaleza-Ce, contando com a participação de cinco alunos de turmas olímpicas de Nível 2 (8º/9º anos), cujo objetivo é a identificação de modo empírico, das categorias intuitivas no contexto de resolução da SDO que envolvem a Geometria Plana.

Os alunos trabalham com a manipulação do *software* GeoGebra, o professor permite que o aluno realize simulações no computador com o auxílio desse *software*, em que autores como Alves (2011) destaca as potencialidades desse recurso como promovedor da transposição didática. Recordamos a teoria de Chevallard (1991) que enfatiza a adaptação do saber acadêmico para o contexto escolar, ou seja, o professor planeja uma mediação de maneira que um conhecimento específico de natureza e funções sociais distintas, que muitas vezes são implícitas no processo de ensino de aprendizagem, promova uma melhor assimilação, desse modo, baseados nos pressupostos de Chevallard, utilizaremos o *software* GeoGebra para trabalharmos a Geometria, apoiada na visualização. O tempo de duração de cada situação didática olímpica foi aproximadamente de 80 min.

SITUAÇÃO DIDÁTICA OLÍMPICA (SDO 1)

(OBM - 2017) No desenho ao lado, o segmento CF é tangente ao semicírculo de diâmetro AB . Se $ABCD$ é um quadrado de lado 4, determine o comprimento de CF .

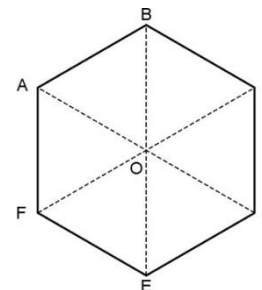


SITUAÇÃO DIDÁTICA OLÍMPICA (SDO 2)

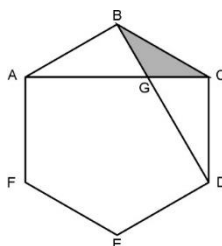
(OBM - 2012) O grande artilheiro Tornado está prestes a fazer o gol mais bonito de sua carreira. Ele está de frente para o gol e apenas o goleiro está entre ele e a trave. Ele está a x metros do goleiro que, por sua vez, se encontra a 2 metros da linha do gol, onde Tornado deseja que a bola caia após passar por cima do goleiro. Em um gol dessa magnitude, a trajetória da bola deve ser uma semicircunferência. Tornado sabe que a bola deve passar a exatamente 3 metros de altura do solo quando ela estiver acima do goleiro. Qual a distância de Tornado até o goleiro, ou seja, x , em metros?

SITUAÇÃO DIDÁTICA OLÍMPICA (SDO 3)

(OBM - 2015) O hexágono regular $ABCDEF$ e centro O , representado ao lado, é composto de seis triângulos equiláteros de área 6 cm^2 cada um.

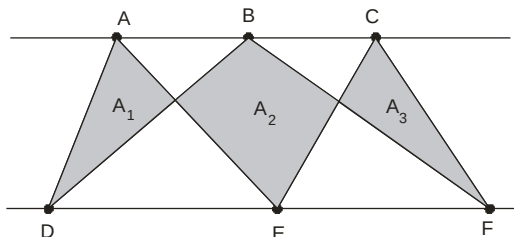


- Qual é a área, em cm^2 , do triângulo cujos vértices são os pontos B , F e D ?
- Qual é a área, em cm^2 , do quadrilátero $ACDF$?
- Os triângulos ABC e BCD superpõem-se parcialmente. Qual é a área, em cm^2 , da região comum aos dois triângulos, indicada em cinza na figura abaixo?
- Qual é a área, em cm^2 , do triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados AB , CD e EF ?



SITUAÇÃO DIDÁTICA OLÍMPICA (SDO 4)

(OBM - 2008) Na figura abaixo os pontos A , B , C são colineares, assim como os pontos D , E , F . As duas retas ABC e DEF são paralelas.

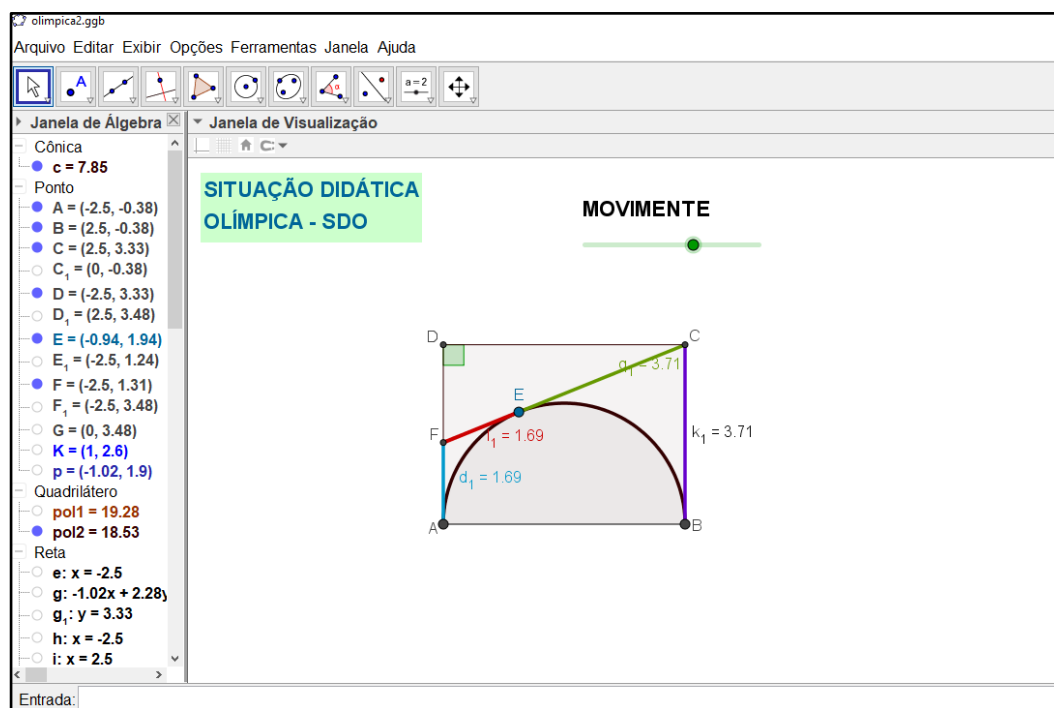


Sendo A_1 , A_2 e A_3 as áreas das regiões destacadas na figura, podemos afirmar que:

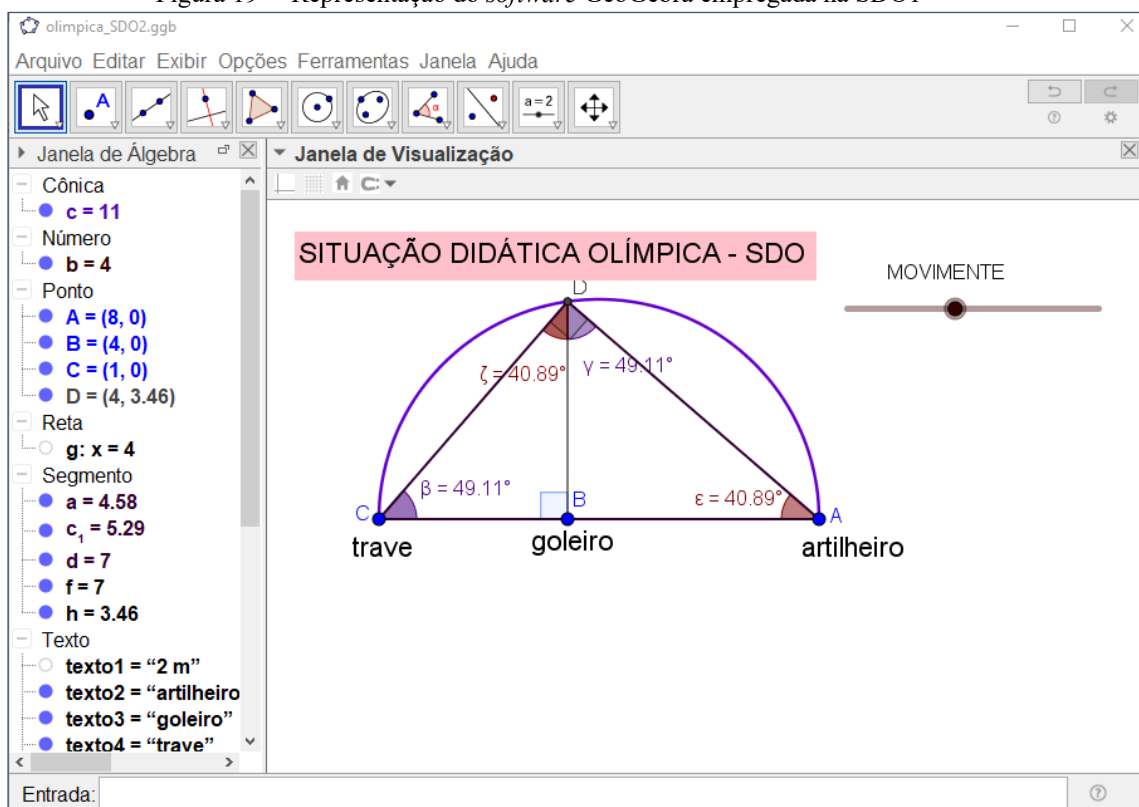
- A)** $A_2 = 2A_1 = 2A_3$ **B)** $A_2 = A_1 + A_3$ **C)** $A_2 > A_1 + A_3$
D) $A_2 < A_1 + A_3$ **E)** $A_2^2 = A_1 \cdot A_3$

As situações didáticas foram propostas de forma que permitisse a mobilização dos conhecimentos prévios com a utilização do *software* GeoGebra. Sendo assim, para cada SDO temos uma construção elaborada pela pesquisadora (Figuras 18, 19, 20, 21 e 22).

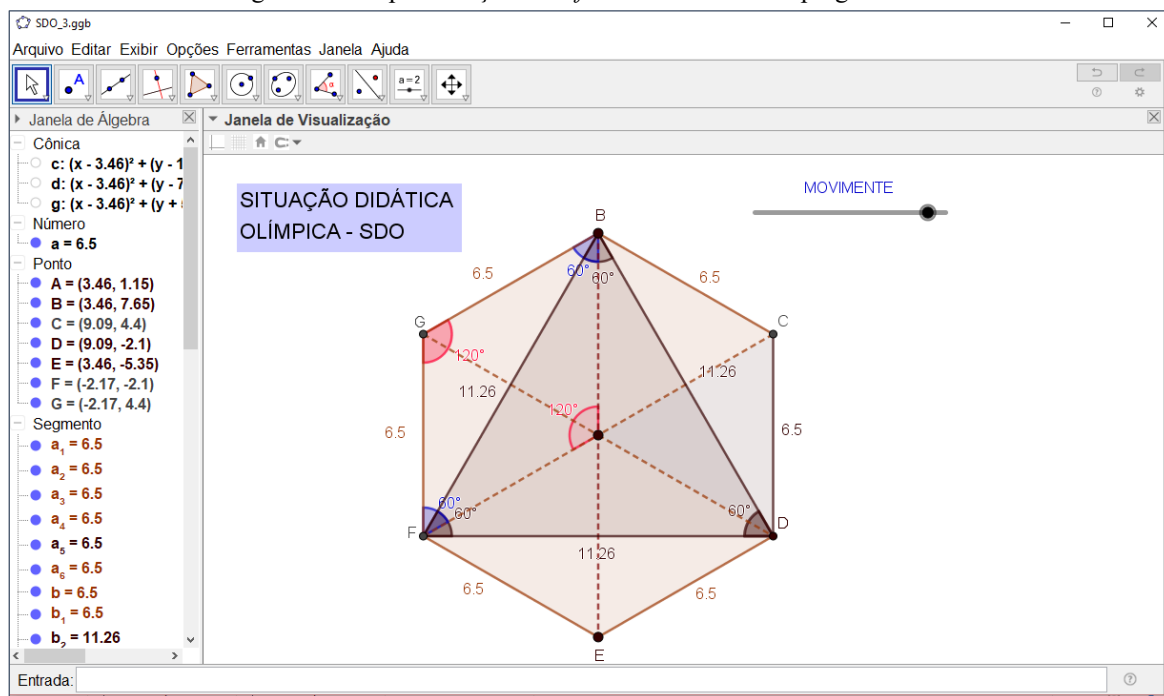
Figura 18 – Representação do *software* GeoGebra empregada na SDO1



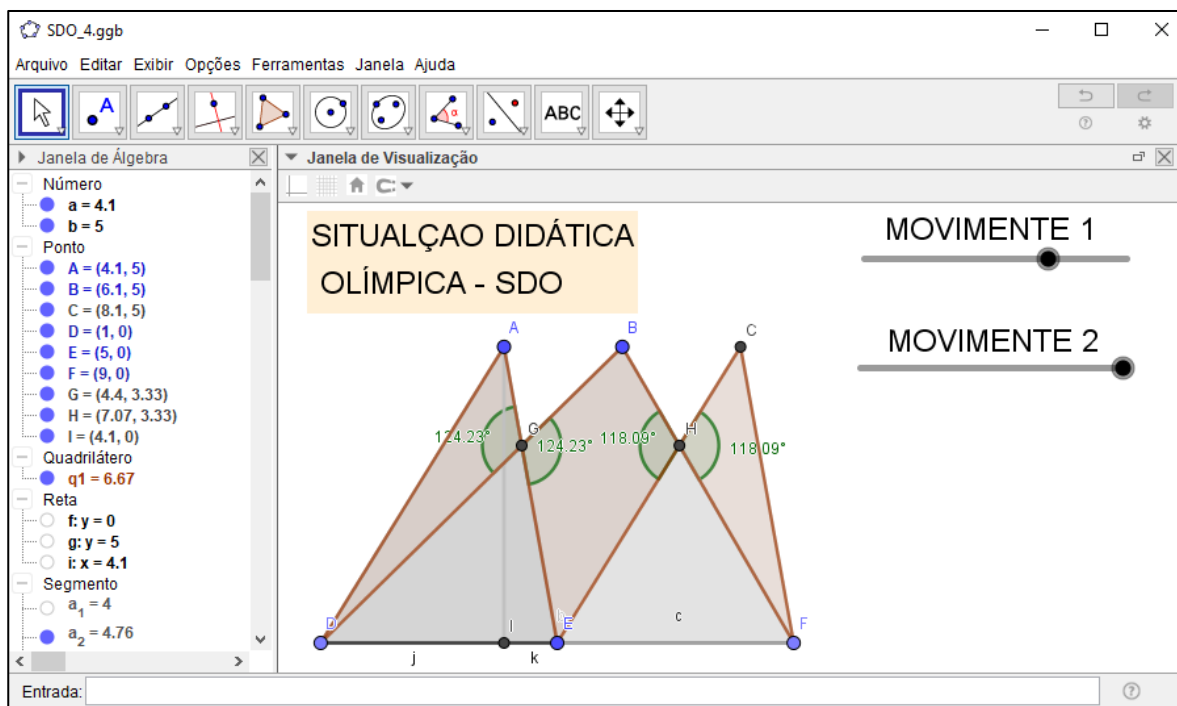
Fonte: Autora (2017)

Figura 19 – Representação do *software* GeoGebra empregada na SDO1

Fonte: Autora (2018)

Figura 20 – Representação do *software* GeoGebra empregada na SDO3

Fonte: Autora (2018)

Figura 21– Representação do *software* GeoGebra empregada na SDO4

Fonte: Autora (2018)

As situações didáticas olímpicas foram apresentadas de maneira sequencial, buscando enfatizar os conceitos geométricos de forma sistemática, para que os alunos pudessem mobilizar os seus conhecimentos prévios mediante cada SDO. A seguir, daremos detalhamento sobre o *locus* e os sujeitos envolvidos na nossa investigação, a seguir apresentaremos as SDO, acompanhadas de suas análises *a priori* e *a posteriori*.

4.1. O *lôcus* e os Sujeitos da Investigação

Nosso estudo se desenvolveu numa escola privada na cidade de Fortaleza-Ce, com alunos que cursam o 8.º/9.º anos do ensino fundamental II, que pretendem participar de competições olímpicas nacionais e internacionais na área de Matemática. Seguimos o programa de geometria plana proposto para as olimpíadas brasileiras (OBM, OBMEP e OCM). Vale ressaltar que a turma é constituída por dez alunos e que durante a realização das sessões de ensino, trabalhamos com uma amostra final de 5 alunos, em decorrência a alguns critérios de escolha adotados: (i) alunos que mais participaram durante a realização da SDO; (ii) os sujeitos que desempenharam maior disponibilidade em participar dos problemas propostos, fomentando discussões entre

professor/alunos e alunos/alunos; (iii) alunos que manifestaram estratégias durante a resolução da SDO.

Os alunos trabalharam em grupo, composto por cinco alunos. Ressaltamos que para manter a identidade dos sujeitos que participaram da nossa pesquisa, resolvemos trabalhar com aluno: 1,2,3,4,5.

No que concerne a preparação de alunos para as Olimpíadas de Matemática no Ceará, as escolas, em especial as escolas privadas, enfatizam o modelo tradicional, em que os recursos mais utilizados são ficha de exercícios/lápis/lousa, priorizando os alunos que já possuem talento para o estudo da Matemática.

Nossa investigação, ao decurso das aulas olímpicas, realiza um acompanhamento das sessões de ensino, caracterizando a nossa ação por construir, aplicar, coletar dados e interpretá-los em cada SDO. De modo sistemático, planejamos e acompanhamos cada sessão de ensino, explorando alguns conceitos geométricos, tais como: congruência de triângulos, semelhança de triângulos, teorema de Pitágoras, relações métricas no triângulo retângulo, teorema das retas tangentes a uma circunferência, Teorema de Pitot, decomposição e cálculo de áreas, método K, estudo das principais cevianas em um triângulo, Paralelismo e ângulos.

Portanto, planejamos nossas intervenções nos momentos em que esses conceitos seriam explorados, isto é, momentos nos quais faremos nossas mediações com a apresentação de cada SDO direcionada para o ensino de turmas olímpicas. Vale destacar, ainda que, ao transcorrer das sessões de ensino, a pesquisadora assume a postura de professor-pesquisador, analisando a sua mediação na condução das SDO, a fim de reunir elementos que possam constituir as análises cognitivas dos alunos, como previsto numa ED.

A coleta de dados em nossa experimentação foi por meio de gravações e registro de fotos dos sujeitos. Utilizamos o aplicativo *Cantasia*, para captar o áudio e as produções realizadas no computador pelos alunos.

Na seção a seguir, abordamos cinco SDO, com suas análises *a priori* e análise *a posteriori*. Com o intuito de promover uma aprendizagem mais sistematizada, em consonância com a descrição de Brousseau (1986, p.49).

A concepção moderna do ensino solicita, pois, ao professor que provoque no aluno as adaptações desejadas, por uma escolha judiciosa dos problemas que lhe propõe. Estes

problemas, escolhidos de forma a que o aluno possa aceitá-los, devem levá-lo a agir, a falar, a refletir, a evoluir por si próprio. Entre o momento em que o aluno aceita o problema como seu e o momento em que produz sua resposta, o professor recusa-se a intervir como proponente dos conhecimentos que pretende fazer surgir. O aluno sabe perfeitamente que o problema foi escolhido para o levar a adquirir um conhecimento novo, mas tem de saber igualmente que esse conhecimento é inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que pode construí-lo sem fazer apelo a razões didáticas.

As variáveis didáticas serão destacadas e, sua manipulação e exploração didática adequada, devem fomentar novos cenários para efetivar uma aprendizagem mais significativa. À medida que destacamos elementos de mediação e transmissão dos saberes, que detêm a possibilidade de evitar os entraves/obstáculos anteriormente mencionados. A seguir, apresentaremos as análises *a priori* e as análises *posteriori* de cada SDO.

4.2. Análise *a Priori* das Situações Didáticas

Nessa fase o pesquisador deve elaborar, construir e analisar uma sequência de situações-problema com o objetivo de responder as questões e validar as hipóteses determinadas na fase anterior. Sua função principal é a utilização de novos objetos matemáticos através de questões colocadas pelos alunos no momento da resolução do problema (ALMOULOU, 2007).

Segundo Almouloud (2007, p.174), a construção dessa situação (SDO) deve levar em consideração as seguintes características:

- i. Os alunos entendem facilmente os dados da situação olímpica e podem se empenhar na resolução, usando os seus conhecimentos prévios.
- ii. Essa situação olímpica deve colocar em jogo o conceito que se deseja explorar e no qual o conhecimento está inserido;
- iii. Os conhecimentos antigos dos alunos são insuficientes para a resolução completa da situação olímpica;
- iv. A situação olímpica pode envolver vários conhecimentos: geometria, álgebra, aritmética, dentre outros.

Vale ressaltar que a situação olímpica selecionada tem como objetivos:

- i. Auxiliar o aluno na construção de conceitos de forma construtiva e significativa;
- ii. Desenvolver habilidades tais como, saber ler, interpretar e utilizar as diferentes representações matemáticas, assim como também desenvolver o raciocínio dedutivo;

- iii. Estimular o raciocínio intuitivo através da modelagem da situação olímpica feita através do *software* Geogebra;

Destaca-se que a SDO deve ser concebida de modo a permitir ao aluno agir, refletir, conjecturar e evoluir com autonomia. Pois, o professor deve exercer o papel de mediador e orientador (ALMOULOU, 2007, p. 174). Segundo Artigue (1995), a situação didática deve ser concebida de tal forma que é possível prever o comportamento dos alunos.

Na análise realizada durante a primeira fase da ED, a análise prévia ou preliminar, seleciona-se situações olímpicas em que pudéssemos fazer uso do *software* GeoGebra na elaboração de conjecturas das possíveis soluções dos problemas propostos e que suscitasse os conhecimentos prévios dos alunos. Ou seja, as situações olímpicas propostas têm o objetivo de construir o novo conhecimento a partir de conhecimentos antigos, esse pormenor permite a mobilização de conhecimentos matemáticos. Sendo assim “o aluno aprende adaptando-se a um meio que é um fator de contradições, de obstáculos, de desequilíbrios. Este saber proveniente da adaptação do aluno, revela-se através de respostas novas, que representam a aprendizagem” (BROUSSEAU, 1996a, p. 49).

Segundo Alves (2016), diante de um conjunto de modificações necessárias que devem ser realizadas para que uma ação de ensino aconteça, não podemos desconsiderar a natureza intrínseca dos conteúdos, dos objetos matemáticos e dos processos matemáticos que procuramos tornar evidentes durante o processo de ensino e aprendizagem. Sendo assim, a situação olímpica proposta trata do estudo da Geometria, explora um teorema que frequentemente está presente em provas de Olimpíadas de Matemática, busca realizar uma transposição didática através da utilização do *software* GeoGebra.

Descrição e elaboração da situação didática olímpica (SDO)

As situações didáticas olímpicas apresentadas nessa investigação são selecionadas de provas das Olimpíadas Brasileiras de Matemática – Nível 2⁷. A análise a priori é de fundamental importância.

Pois de sua qualidade depende o sucesso da situação-problema; ademais, ela permite, ao professor poder controlar a realização das atividades dos alunos, e também, identificar e compreender os fatos observados. Assim, as conjecturas que vão aparecer poderão ser

⁷ Provas destinadas a alunos que cursam o 8.º e/ou 9º anos do ensino fundamental II.

consideradas, e algumas poderão ser objeto de um debate científico em sala de aula. (ALMOULOU, 2007, p. 176).

Partindo deste pressuposto, o professor tem o ambiente adequado para auxiliar os estudantes a obter êxito identificando, pelo menos, uma estratégia de solução.

A seguir apresenta-se ainda, os procedimentos necessários e as possíveis estratégias que podem ser realizadas através da construção geométrica visualizada no software Geogebra.

4.2.1. Situação Didática Olímpica 1 – Teorema de Pitot

Apresentaremos uma SDO selecionada da 2.^a fase de provas da OBM de 2017. O teorema abordado por essa situação didática é o Teorema de Pitot. Portanto iniciaremos esta seção com uma breve discussão sobre o referido teorema.

Sobre o Teorema de Pitot (TP)

O teorema de Pitot (TP) afirma que um quadrilátero é circunscritível se, e somente se, as somas das medidas de seus lados opostos são iguais. Vale ressaltar que o teorema de Pitot faz referência a qualquer quadrilátero convexo circunscritível a uma circunferência.

O objetivo dessa seção não é demonstrar o teorema de Pitot (PT), visto que há vários trabalhos que abordam essa questão. Apresentaremos uma situação didática olímpica que permite o aluno a construção do teorema de Pitot. Utilizando os seus conhecimentos prévios, tais como: segmentos tangentes traçados de um mesmo ponto exterior a uma circunferência são congruentes, teorema de Pitágoras e equações do 2.^o grau. Utilizaremos como referência a modelização da SDO com o auxílio do *software* GeoGebra. O problema é determinar o valor do segmento $\overline{CF}$ tangente ao semicírculo, conseqüentemente, recordar o TP. As seções seguintes tratam de um levantamento sobre o material didático que abordam o tema. A seguir descrevemos a construção da SDO proposta aos alunos.

Análise em materiais didáticos

Nesta seção, evidenciaremos e identificaremos os elementos que se sobressaem a partir da proposta de abordagem de certos materiais tradicionalmente utilizados durante as aulas olímpicas, no que concerne o teorema de Pitot. Exemplificaremos a seguir, três categorias de problemas: (a) problemas que envolvem aplicação direta do teorema; (b) problemas que priorizam o raciocínio algébrico e (c) problemas que exigem demonstrações. Nosso primeiro exemplo é extraído de Dolce

& Pompeo (2005). Nesse sentido, observamos que, na figura 22, o referido autor imprime ênfase a aplicação direta do teorema de Pitot.

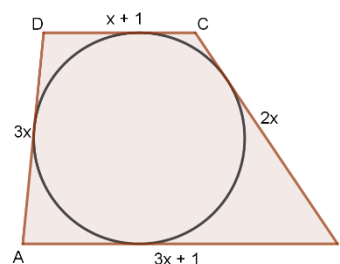
Figura 22 – Aplicação direta do teorema de Pitot

Exemplo 1:

Determine o perímetro do quadrilátero ABCD, circunscritível, da figura.

$$AB = 3x + 1, BC = 2x$$

$$CD = x + 1 \text{ e } DA = 3x$$



Fonte: Dolce e Pompeo (2005 p. 164)

Vale destacar, que os autores Dolce e Pompeo (2005), apresentam os problemas conforme o nível de dificuldade (Fácil, médio ou difícil). Sendo assim, os exemplos 2 e 3, enquadram-se na categoria (b), ilustrados através das figuras 23 e 24, respectivamente.

Figura 23 – Problema que prioriza o raciocínio algébrico

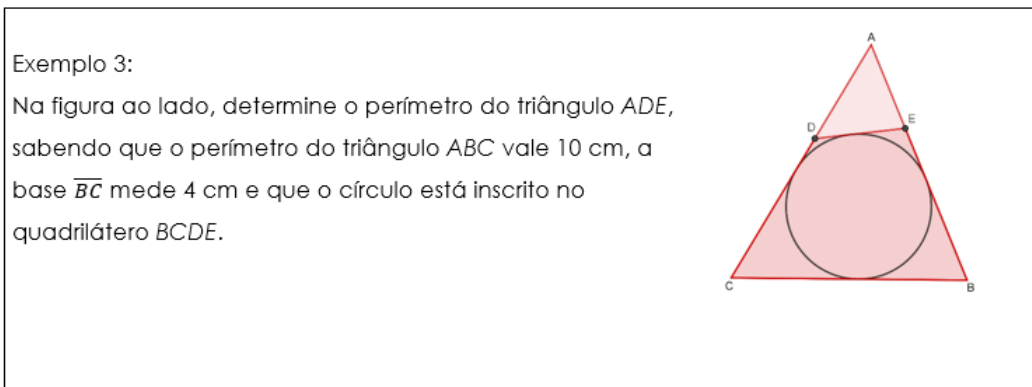
Exemplo 2:

A diferença de dois lados opostos de um quadrilátero circunscritível é igual a 8 cm e a diferença dos outros dois lados é 4 cm. Determine os lados do quadrilátero, sendo 56 cm a sua soma.

Fonte: Dolce e Pompeo (2005, p. 165)

No que concerne o exemplo 2 (Figura 23), os alunos além de conhecer e aplicar o TP, devem ter conhecimentos algébricos – resolução de problemas com equações com duas variáveis – para solucionar o problema. Ademais, requer dos alunos interpretação e análise dos objetos matemáticos envolvidos no problema, visto que não há figuras que representem a situação, contrariamente, como vemos no exemplo (3).

Figura 24 – Problema que prioriza o raciocínio algébrico



Fonte: Dolce e Pompeo (2005, p. 166)

Muniz Neto (2012) prioriza problemas que se enquadram na categoria (c), como destacamos na figura 25. Assim como, propõe ao estudante, uma variedade de problemas provenientes das provas de olimpíadas internacionais.

Figura 25 – Problema que exige demonstração

Exemplo 4: Se um hexágono convexo $A_1A_2A_3 \dots A_6$ é circunscritível, prove que

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_3A_4} + \overline{A_5A_6} = \overline{A_2A_3} + \overline{A_4A_5} + \overline{A_6A_1}$$

Fonte: MUNIZ NETO (2012, p. 151)

Recordamos, que o material do POTI (pólo olímpico de treinamento intensivo), a sua abordagem em relação ao teorema de Pitot, semelhantemente a Muniz Neto (2012), se enquadra na categoria c (Figura 26).

Figura 26 – Problema que exige demonstração

Exemplo 5 - (Romênia - 1999) No quadrilátero convexo ABCD, as bissetrizes dos ângulos A e C encontram-se no ponto I. Mostre que ABCD é circunscritível se, e somente se, $[AIB] + [CID] = [AID] + [BIC]$, onde $[XYX]$ denota a área do triângulo XY Z.

Fonte: POTI – Pólo Olímpico de Treinamento (2017)

Portanto, as abordagens descritas refletem a ausência de um elemento definidor para o estudo da Matemática e que não pode ser desconsiderado, refere-se ao fato de modelização de situações estruturadas para o ensino de Olimpíadas de Matemática, planejadas de maneira sistemática, a ponto de, mobilizar os raciocínios e os conhecimentos matemáticos ao longo de uma

sequência didática, que permita a sua replicação e reprodução para um grupo ampliado de estudantes. Portanto, tendo em vista esse objetivo, apresentaremos uma SDO balizada nos pressupostos das dialéticas (ação, formulação, validação e institucionalização) estabelecidas por Brousseau (1986).

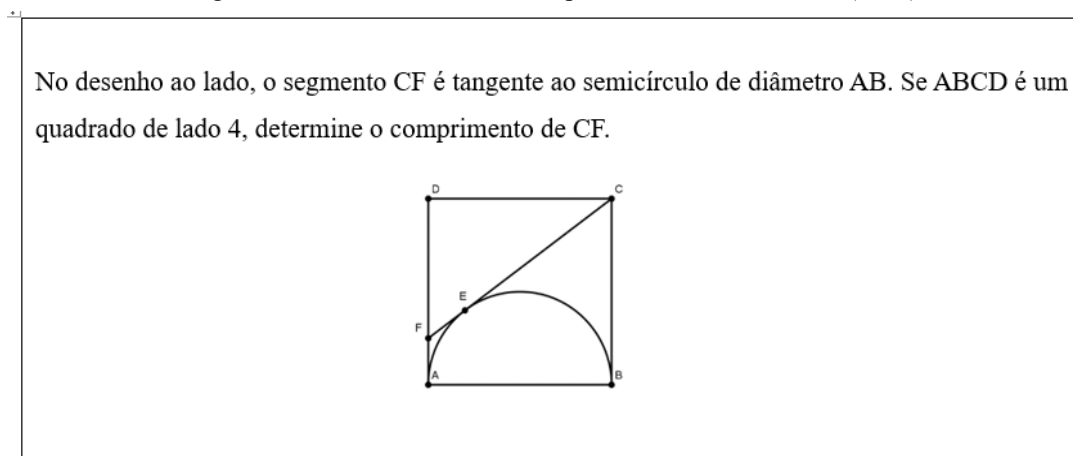
Propomos uma sequência didática que foi planejada mediante a previsão de dificuldades evidenciados pelos estudantes quando trabalham com conceitos matemáticos, particularmente a Geometria Plana. O público alvo são alunos que estão a se preparar para a Olimpíada de Matemática, OBMEP e/ou OBM - nível 2 (8.º e/ou 9.º anos).

O material necessário para a realização de cada SDO: lápis, caderno, projetor multimídia, computador e o *software* GeoGebra Classic 5.0. O *software* GeoGebra será utilizado como ferramenta didática ampliando a visão espacial do aluno no momento de elaborar conjecturas para solucionar o problema proposto.

Situação Didática Olímpica 1 (SDO 1) – Teorema de Pitot

Na figura a seguir (Figura 27) trazemos o enunciado original da SDO e a partir do enunciado, iremos descrevê-la, a fim de estruturar as fases dialéticas de ação entre o professor e um grupo de alunos que atuam no âmbito das Olimpíadas de Matemática.

Figura 27 – Problema abordado na prova da 1.ª fase da OBM (2015)



Fonte: OBM (2015)

Objetivo: solucionar o problema proposto e demonstrar o Teorema de Pitot.

Conhecimentos prévios: a propriedade das retas tangentes a uma circunferência, o teorema de Pitágoras, Resolução de equações do 2º grau e produtos notáveis.

Nesse momento, verifica-se quais os conhecimentos prévios dos alunos e estabelecemos o contrato didático. Segundo a Teoria das Situações Didáticas, o contrato didático enfatiza o desenvolvimento do trabalho do professor, a organização de estratégias metodológicas que possam ser pensadas durante a preparação de uma SDO, a postura que o professor deve assumir durante o processo de ensino e aprendizagem, que é a postura de mediador, ao observar as investigações dos estudantes, acompanhando-os durante a descoberta do novo saber, tornando-os mais investigativos, reflexivos, críticos, autônomos e colaborativos entre si.

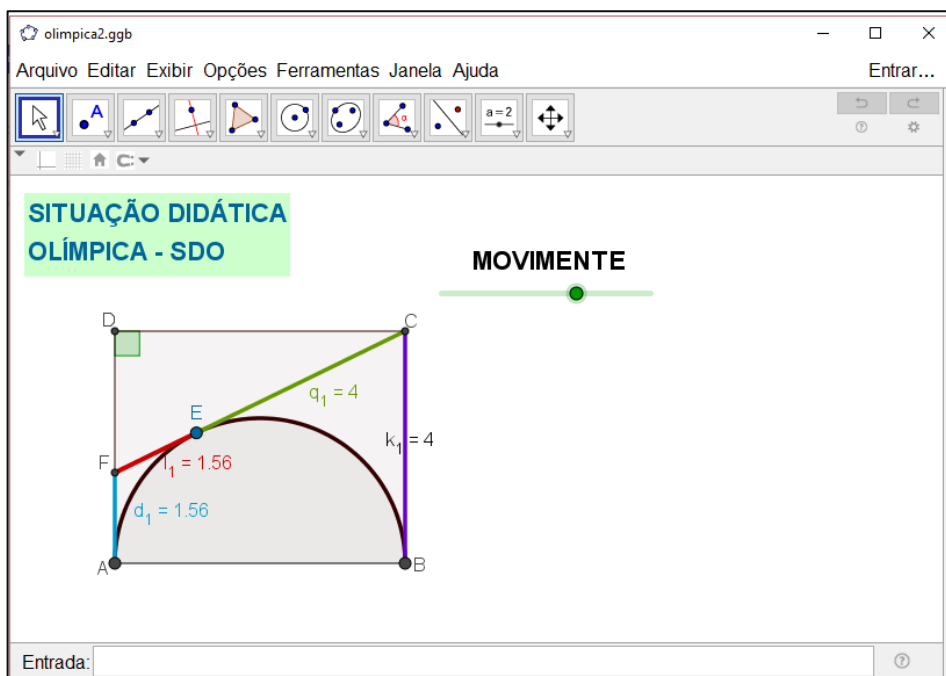
Dialética da ação:

Primeiramente, adotamos estratégias que possam suscitar o interesse e a participação dos estudantes. Na figura 1, nas aulas olímpicas comumente vivenciadas, os estudantes restringiam-se ao uso de papel e lápis, assim tentavam mobilizar os raciocínios matemáticos provenientes da leitura e da identificação de elementos matemáticos presentes na situação problema. Identificamos nesse momento, uma posição concomitante a de Brousseau que afirma “pour un sujet à choisir directement les états du milieu antagoniste en fonction de ses propres motivations. Si le milieu réagit avec une certaine régularité, le sujet peut être conduit à anticiper ces réactions et à en tenir compte dans ses propres actions” (BROUSSEAU, 1997 p.6, tradução nossa).⁸

Desse modo, esperamos que o professor estimule o debate científico entre os estudantes enfatizando que através de simulações realizadas com a exploração da construção obtida com o *software* GeoGebra, as relações existentes entre os elementos matemáticos podem ser visualizadas (Figura 28). Com a modelização da SDO e observando os movimentos, esperamos que os alunos recordem e verifiquem a propriedade existente entre as retas tangentes a uma circunferência (Figura 28).

⁸ Para que um sujeito escolha diretamente os estados do meio antagonístico de acordo com suas próprias motivações. Se o meio reage com certa regularidade, o sujeito pode ser levado a antecipar essas reações e levá-las em consideração em suas próprias ações.

Figura 28 – Representações do software GeoGebra empregadas na SDO



Fonte: Autora (2017)

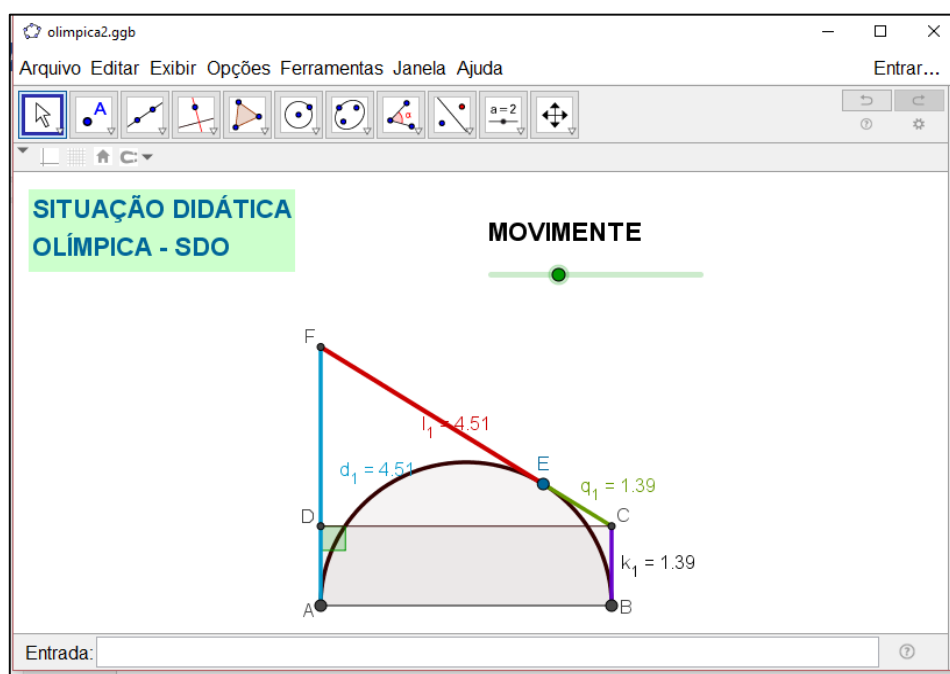
Dialética da Formulação: A partir das simulações realizadas com a figura acima, o professor deve sugerir que os alunos registrem as suas observações. Nesse momento, começam a elaborar conjecturas. Um aspecto importante é, a adoção pelo grupo de uma linguagem ou forma de representação homogênea que possibilitem inferir as conclusões adequadas a fim de obter a solução para a SDO. Destacamos o ponto de vista de Brousseau (1997, p.15), quando observa que «Les sujets (et les institutions) s'adaptent aux situations qu'ils rencontrent et fabriquent pour cela des connaissances et des savoirs»⁹. Portanto, o professor deve estimular os alunos na busca pela estratégia mais conveniente, relacionando as propriedades das retas tangentes com o lado do

⁹ Os sujeitos (e as instituições) se adaptam às situações que enfrentam e produzem o conhecimento (tradução nossa).

quadrado, elementos que são visualizados com o *software* GeoGebra, de forma dinâmica com o deslocamento do ponto E (Figura 29).

Dialética da validação: Destacamos que «Les savoirs sont les moyens sociaux et culturels d'identification, d'organisation, de validation et d'emploi des connaissances»¹⁰ (BROUSSEAU, 1997, p.8). Sendo assim, a partir do conhecimento que foi construído pelos estudantes, neste momento, suscitou a necessidade de provar e demonstrar as estratégias adotadas. Tais estratégias foram originadas da interação e exploração da construção geométrica que observamos nas figuras 28 e 29.

Figura 29 – A visualização como componente fundamental na atividade do grupo de estudantes nas fases dialéticas de uma SDO



Fonte: Autora (2017)

Ainda nesta fase, destacamos a validação realizada pelos alunos do teorema de Pitot, modelizada no *software* Geogebra. Portanto, o entendimento que o professor deve suscitar em cada aluno, sobre a necessidade de inferir e demonstrar as conjecturas elaboradas, com origem na exploração e interação da construção do GeoGebra.

Esperamos que ainda durante a dialética da validação, ocorra a demonstração realizada pelos alunos do teorema de Pitot, modelizada no *software* Geogebra.

¹⁰ Os saberes são os meios sociais e culturais de identificação, organização, validação e uso do conhecimento (tradução nossa).

Dialética da institucionalização: Nesta fase o professor deve incorporar o teorema de Pitot ao grupo de alunos que vivenciam as quatro fases dialéticas de discussão e de construção de conhecimentos para a resolução da SDO. Destacamos que em se tratar de situações problemas referentes às olimpíadas de matemática e que reconhecidamente, atingem um menor número de estudantes, a partir da utilização da tecnologia, a contribuição de discussão do grupo de estudantes, permite uma maior proximidade dos raciocínios matemáticos na elaboração e validação de conjecturas.

4.2.2. Situação Didática Olímpica 2 – Relações Métricas no Triângulo Retângulo

(OBM - 2.^a Fase/ Nível 2 – 2012): O grande artilheiro Tornado está prestes a fazer o gol mais bonito de sua carreira. Ele está de frente para o gol e apenas o goleiro está entre ele e a trave. Ele está a x metros do goleiro que, por sua vez, se encontra a 2 metros da linha do gol, onde Tornado deseja que a bola caia após passar por cima do goleiro. Em um gol dessa magnitude, a trajetória da bola deve ser uma semicircunferência. Tornado sabe que a bola deve passar a exatamente 3 metros de altura do solo quando ela estiver acima do goleiro. Qual a distância de Tornado até o goleiro, ou seja, x , em metros?

Objetivo: Demonstrar as relações métricas no triângulo retângulo.

Conhecimentos prévios: Teorema de Pitágoras, semelhança de triângulos, proporção, equações do 1.º grau com uma variável.

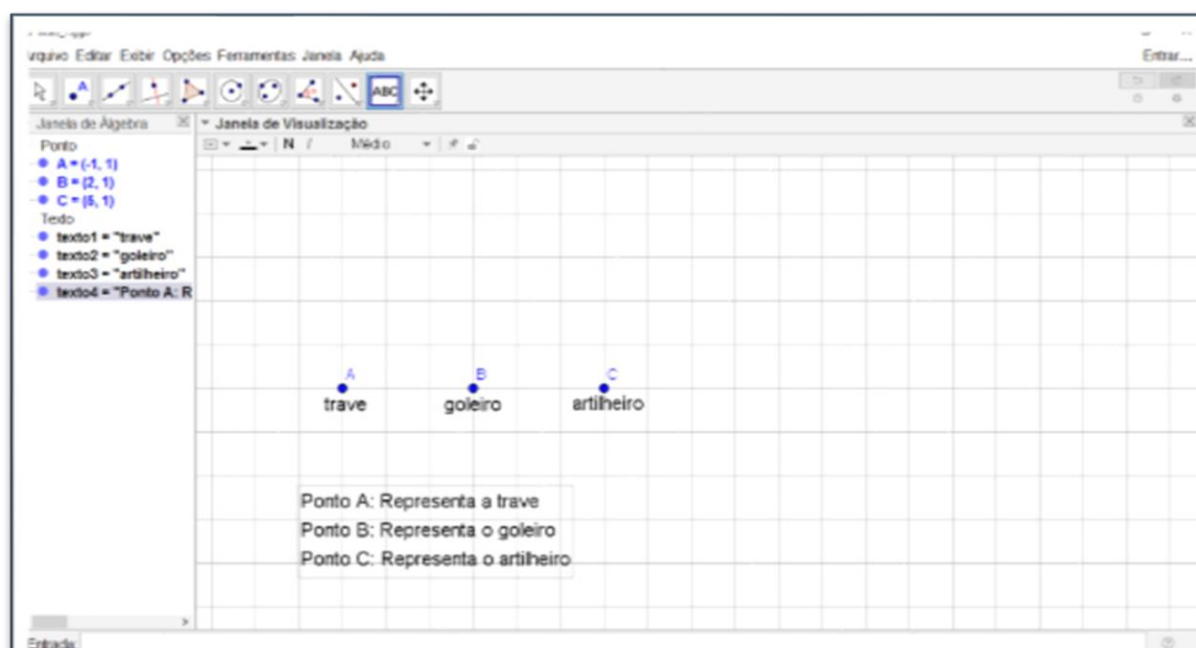
A dialética da ação:

Nesta etapa os estudantes se deparam com um problema cuja a solução é o conhecimento a ser ensinado; os alunos agem sobre essa situação, obtendo *feedback* sobre sua ação. Ou seja, uma situação olímpica adequada deve permitir aos alunos “julgar o resultado de sua ação e ajustá-lo, se necessário, sem a intervenção do professor, devido à retroação do *milieu*” (ALMOULOU, 2007, p. 37).

Portanto, essa fase é caracterizada pela ação inicial dos aprendizes que ao se debruçar sobre o enunciado da situação olímpica proposta, deve lê-lo atentamente para interpretá-lo, selecionando as informações mais relevantes e posteriormente, realizar as suas conjecturas.

Alguns alunos podem apresentar dificuldades/entraves em interpretar a situação olímpica. Prevê-se que alunos que não tenham habilidades com o *software* GeoGebra, iniciem a construção geométrica com lápis e papel, vale ressaltar que os aprendizes devem ser orientados a utilizar o *software* GeoGebra (Figura 30).

Figura 30 – Primeiro passo ao interpretar os dados do problema



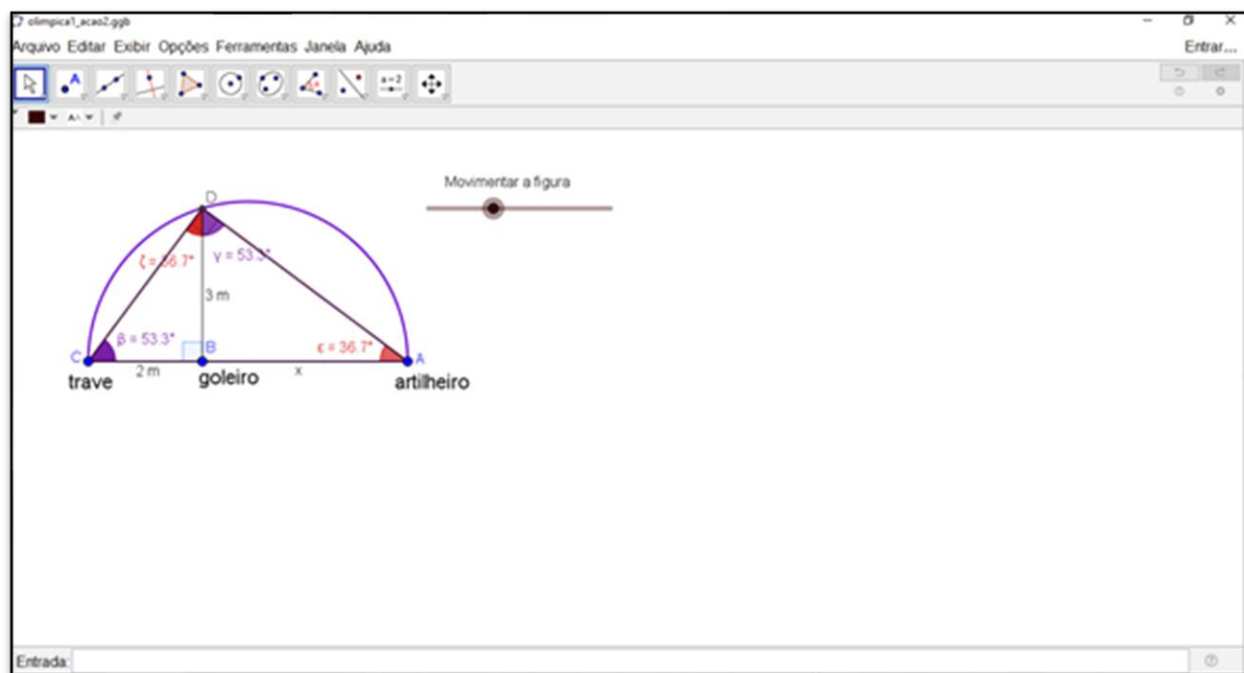
Fonte: Autora (2017)

Dialética de Formulação:

Nesta fase, há a troca de informações entre os alunos e/ou entre os alunos e o professor, essa troca de ideias pode ser da forma escrita ou oral. “Como resultado, essa dialética permite criar um modelo explícito que pode ser formulado com sinais e regras comuns, já conhecidas ou novas” (ALMOULOU, 2007, p. 38). Esta etapa caracteriza-se também, pela exposição das ideias e estratégias adotadas durante o processo pela busca da solução do problema. Para se alcançar este objetivo, o professor deve promover a interação entre os alunos. Por exemplo, se o aluno deve agir e não dispõe de toda a informação necessária, seu colega pode auxiliá-lo, complementando com o que lhe falta.

A dialética da formulação permite ao aluno construir, gradativamente, a elaboração da estratégia que possibilita solucionar o problema em questão. Nesta fase, o professor instigará os alunos a analisar a representação da situação olímpica construída com o auxílio do *software* GeoGebra (Figura 31).

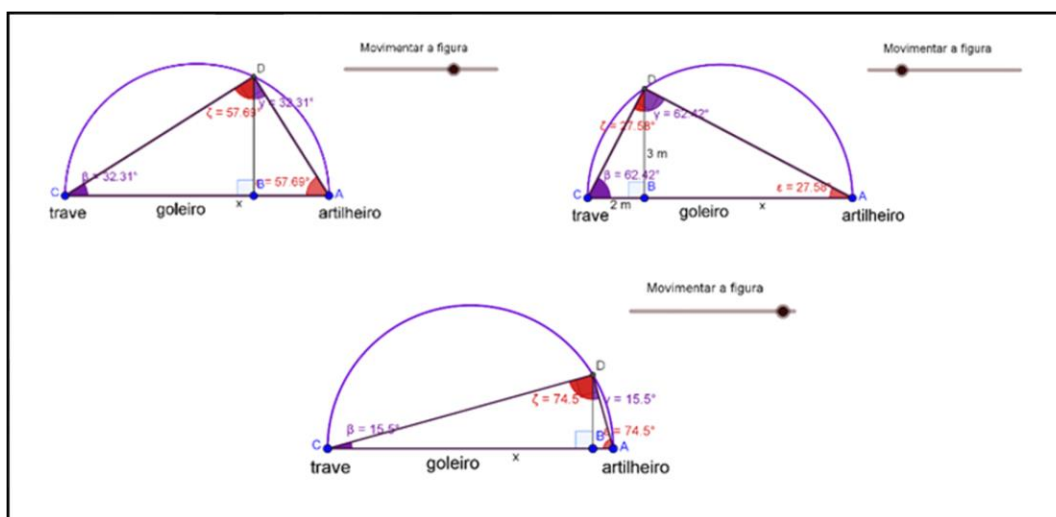
Figura 31 – Representação da situação didática olímpica



Fonte: Autora (2017)

Partindo dessa construção (Figura 31), os alunos devem analisar as relações matemáticas existentes entre os elementos matemáticos, resgatando os seus conhecimentos prévios (Figura 32).

Figura 32 – Dialética da formulação



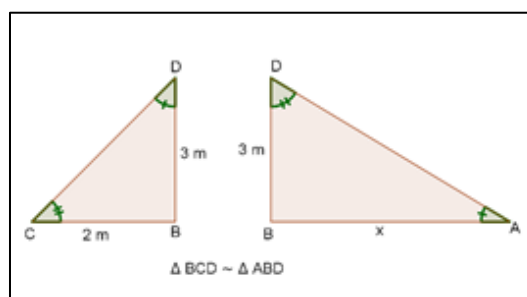
Fonte: Autora (2017)

Ademais, os alunos devem identificar os triângulos semelhantes e a relação de proporcionalidade entre os seus lados. Ao identificar os elementos matemáticos envolvidos na situação didática, com a interatividade e simulação de situações, o aluno verifica que qualquer que seja a posição do ponto D sobre o semicírculo (Figura 28), os ângulos τ e ε são congruentes, assim como também os ângulos β e γ . Partindo desse pressuposto, conclui-se que pelo caso de semelhança de triângulo Ângulo-Ângulo (A.A), os triângulos $\triangle BCD$ e $\triangle BAD$ são semelhantes. Daí começa a elaborar estratégias para determinar o valor de x que representa a distância entre o Tornado e o goleiro.

De acordo com as conclusões que devem ser elaboradas pelos alunos (Figura 33), temos:

$$\frac{3}{x} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2x = 9 \Leftrightarrow x = 4,5 \text{ m}$$

Figura 33 – Semelhança de triângulos



Fonte: Autora (2017)

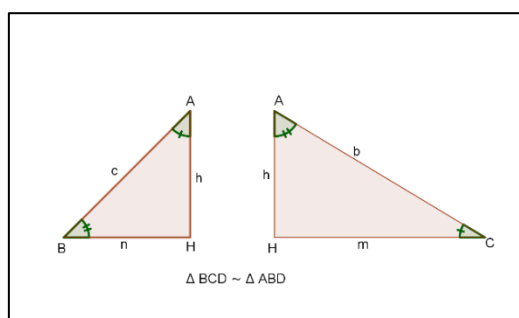
Dialética da validação: Nesta etapa os alunos devem expor a estratégia que os levaram solucionar o problema, ou seja, mostrará a validade do modelo que criou. Outro pormenor importante é o de justificar a eficácia do seu modelo. Assim, os alunos são submetidos à análise de todos que o escuta, podendo ter que dar mais explicações diante das possíveis indagações por parte dos colegas que podem não entender ou discordar. Assim, suscita-se o debate entre os alunos, com o objetivo de estabelecer provas ou de refutá-las. O debate sobre a certeza das conclusões permite organizar as interações com o *milieu*, validando as estratégias que possam permitir solucionar o problema (ALMOULOUD, 2007, p. 38)

Em relação à solução da situação olímpica, verifica-se que é crucial descobrir os triângulos semelhantes, aplicando corretamente a proporcionalidade entre os lados homólogos dos triângulos. Os alunos podem confundir-se e ter dificuldades em identificar os lados homólogos, consequentemente apresentando erros na resolução. Entretanto, nesta fase deve ser validada a estratégia adotada pelos alunos através da interatividade da construção feita no ambiente do *software* GeoGebra, utilizando os conhecimentos algébricos necessários para aplicar o caso de semelhança de triângulos.

De uma forma geral, tem-se explicitamente, o enunciado do teorema: a medida da altura relativa à hipotenusa é média geométrica (ou média proporcional) entre as medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa (Figura 34).

$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h} \leftrightarrow h^2 = m \cdot n$$

Figura 34 – Relação métrica no triângulo retângulo $h^2 = m \cdot n$.



Fonte: Autora (2017)

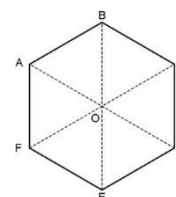
Dialética de institucionalização

Esta etapa é caracterizada pela exposição do novo conhecimento pelo professor, de forma clara e explícita. O professor deve prever o momento adequado para formalizar o novo conhecimento. No caso apresentado, os alunos devem vivenciar as etapas descritas anteriormente. Segundo Almouloud (2007), se a institucionalização desse novo conhecimento for feita muito cedo, o seu significado será interrompido, impedindo uma aprendizagem adequada e produzindo dificuldades no seu entendimento. Assim como, quando feita de forma tardia, ela atrasa a aprendizagem e dificulta a compreensão e assimilação por parte dos alunos. A institucionalização deve ser feita através do diálogo entre alunos e professores para sedimentar o novo conhecimento. O professor institucionalizando o novo saber no momento adequado, torna-o patrimônio da turma e será utilizado na resolução de outros problemas matemáticos (Brousseau, 1986).

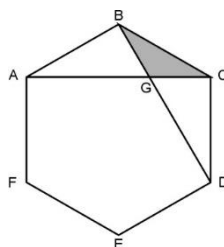
Sendo assim, verifica-se a oportunidade de vivenciar as etapas estabelecidas pela TSD, descrevendo situações didáticas que auxiliem os alunos a desenvolver a capacidade de resolver problemas de forma autônoma, reflexiva e colaborativa.

4.2.3. Situação Didática Olímpica 3 – Cálculo de Áreas

OBM - 2.^a fase (2015) O hexágono regular $ABCDEF$ e centro O , representado ao lado, é composto de seis triângulos equiláteros de área 6 cm^2 cada um.



- Qual é a área, em cm^2 , do triângulo cujos vértices são os pontos B , F e D ?
- Qual é a área, em cm^2 , do quadrilátero $ACDF$?
- Os triângulos ABC e BCD superpõem-se parcialmente. Qual é a área, em cm^2 , da região comum aos dois triângulos, indicada em cinza na figura abaixo?
- Qual é a área, em cm^2 , do triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados AB , CD e EF ?



Objetivo: Determinar a medida de áreas de figuras geométricas através da sua decomposição, sem o uso de fórmulas.

Conhecimentos prévios: Reconhecer os elementos de um triângulo. Classificar um triângulo quanto aos lados e aos ângulos. Decomposição de áreas. Operações básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão.

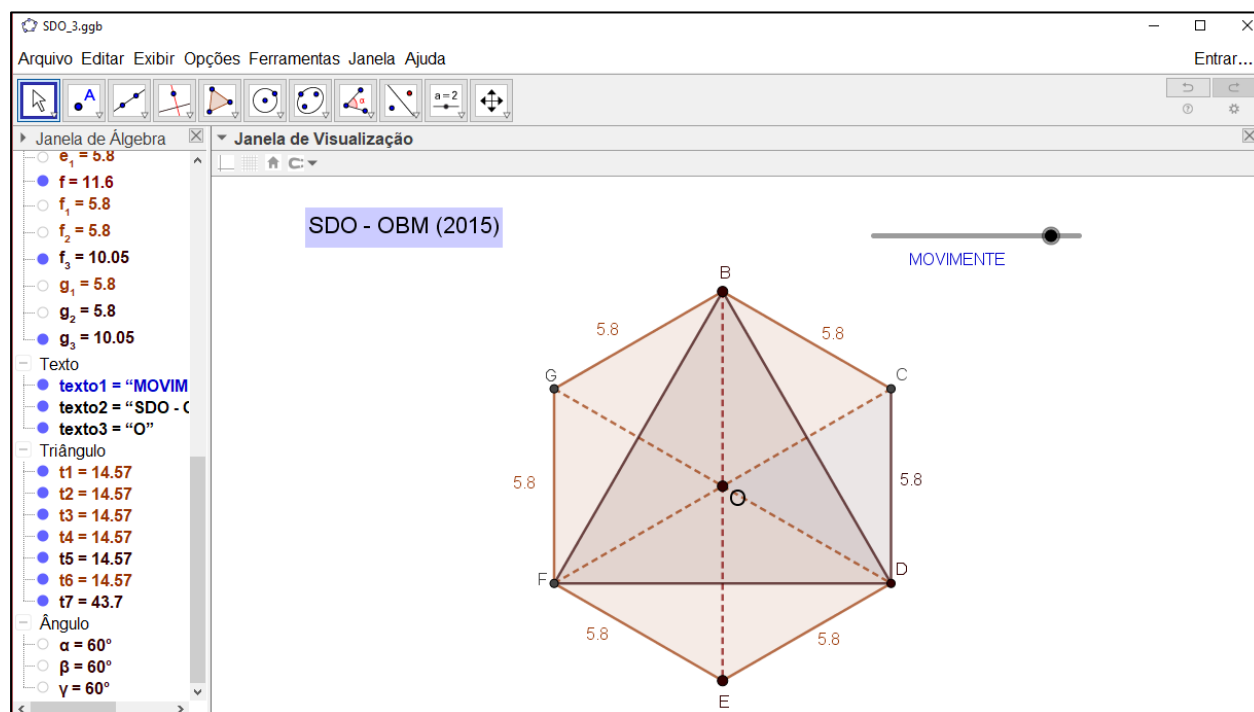
Dialética da ação:

Primeiramente, o professor procurou adotar estratégias que pudessem suscitar o interesse e a participação dos estudantes. Durante as aulas olímpicas comumente vivenciadas, os estudantes restringiam-se ao uso de papel e lápis, assim tentavam mobilizar os raciocínios matemáticos provenientes da leitura e da identificação de elementos matemáticos presentes na situação problema. Identificamos nesse momento, uma posição concomitante a de Brousseau que afirma para que um sujeito escolha diretamente os estados do meio antagônico de acordo com suas próprias motivações. Se o meio reage com certa regularidade, o sujeito pode ser levado a antecipar essas reações e levá-las em consideração em suas próprias ações (BROUSSEAU, 1997 p.6, tradução nossa).

O professor realizou a transposição didática da SDO através do software Geogebra (Figura 31), ao recorda que para Fischbein, a criança enfrenta dificuldades em sua aprendizagem, compreensão e resolução de problemas desafiadores porque suas estratégias de raciocínio são controladas por modelos inadequados. O professor deve tentar identificar tais modelos a auxiliar o estudante para corrigir seus modelos mentais ou adquirir outros mais adequados neste caso (FISCHBEIN, 1987 p. 203).

Com este intuito o professor apresentou a SDO representada no *software* GeoGebra (Figura 35), fomentando o debate científico na turma, indagando-os e instigando-os a analisar os elementos matemáticos visualizados na janela geométrica do GeoGebra.

Figura 35 – Representação da SDO 3 no *software* GeoGebra

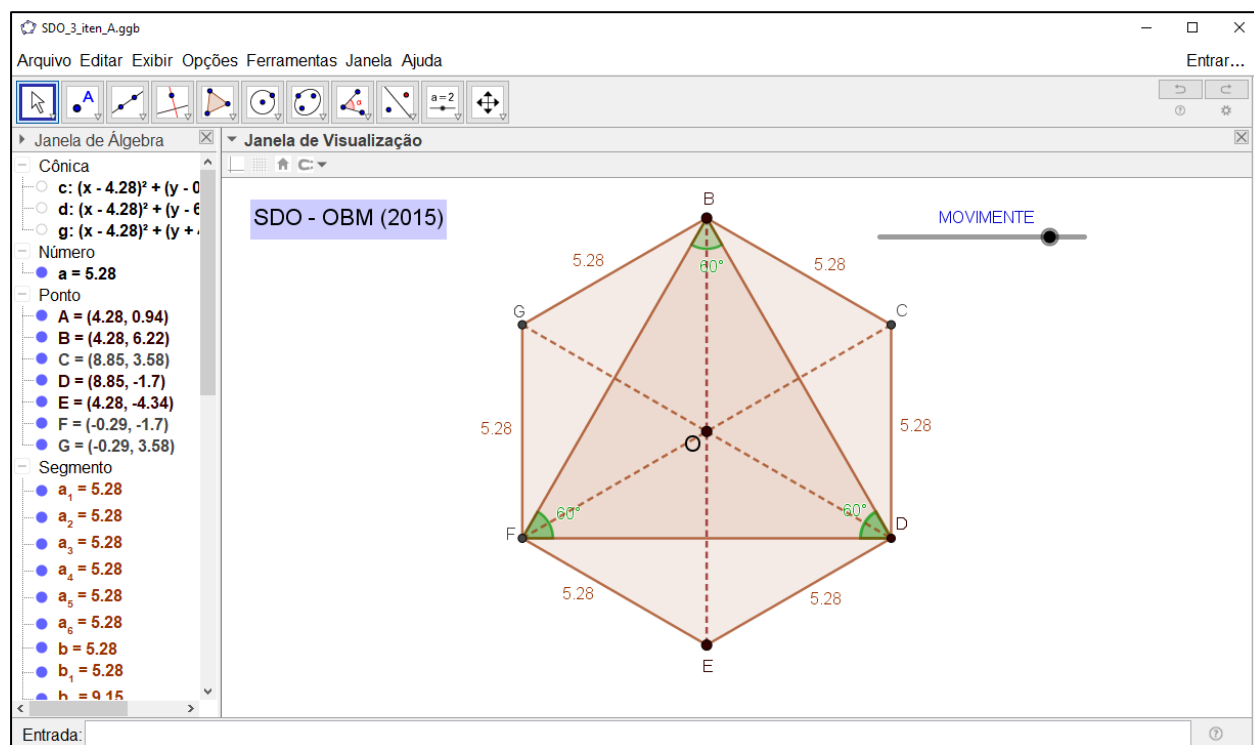


Fonte: Construção realizada pela autora (2017)

Os alunos devem evidenciar as medidas dos ângulos $\widehat{DFB}$, $\widehat{FBD}$ e $\widehat{BDF}$ pertencentes ao triângulo $\triangle FBD$ e concluir que se trata de um triângulo equilátero (Figura 35). O professor deve instigar essas conclusões comparando a visualização geométrica e algébrica através da construção. Assim, os alunos identificam e relacionam os elementos matemáticos envolvidos. Pois, ao

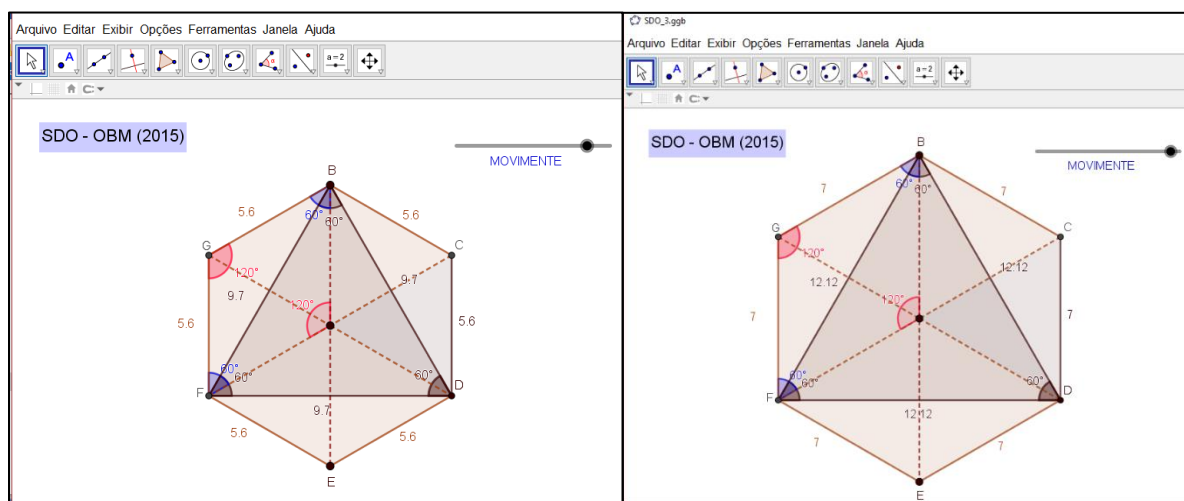
movimentar a figura identificam propriedades e padrões existentes (Figura 36), conclui-se que o triângulo ΔBDF é constituído por seis figuras planas equivalentes.

Figura 36 – Representação do *software* GeoGebra empregadas na SDO



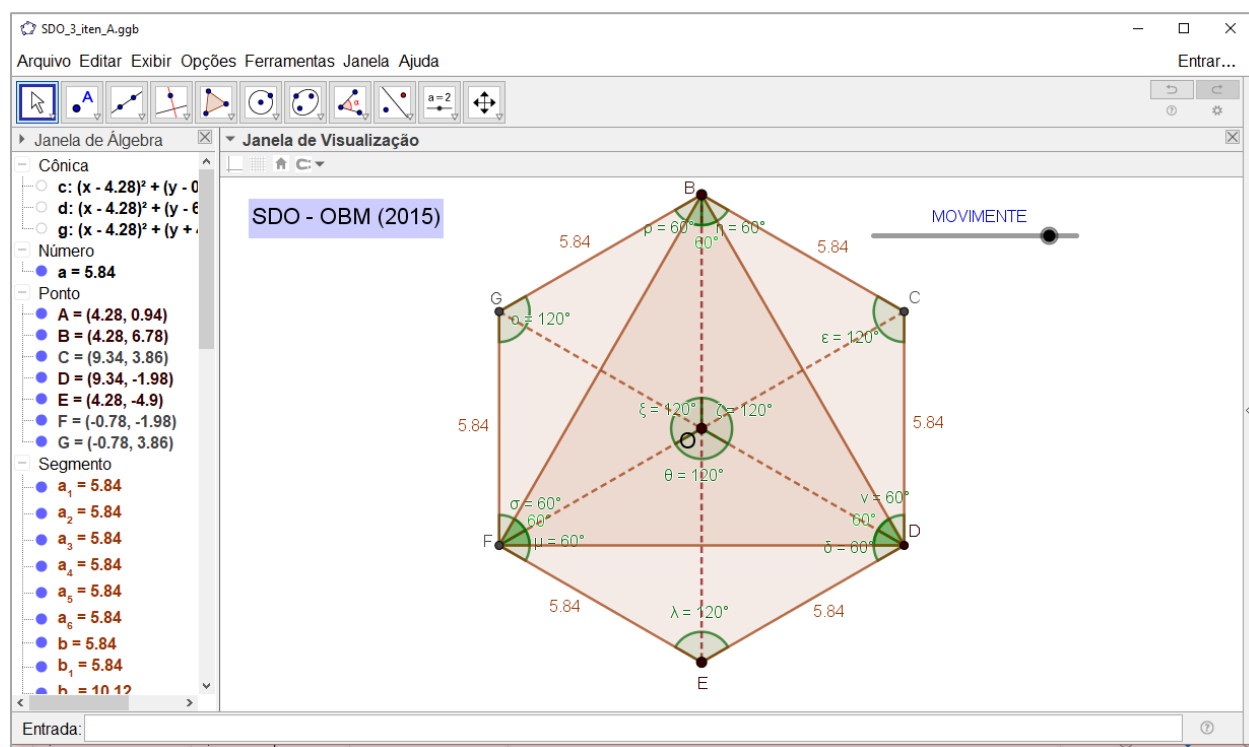
Fonte: Autora (2017)

Figura 37 – Identificando padrões ao movimentar a construção



Fonte: Autora (2017)

Figura 38 – Estratégia 2 visualizada pelo aluno.



Fonte: Autora (2017)

De uma forma mais simples e menos redundante, a estratégia 2 adotada por outro aluno, apresentou também intuições afirmativas, verificando através do *software* GeoGebra a sua validade.

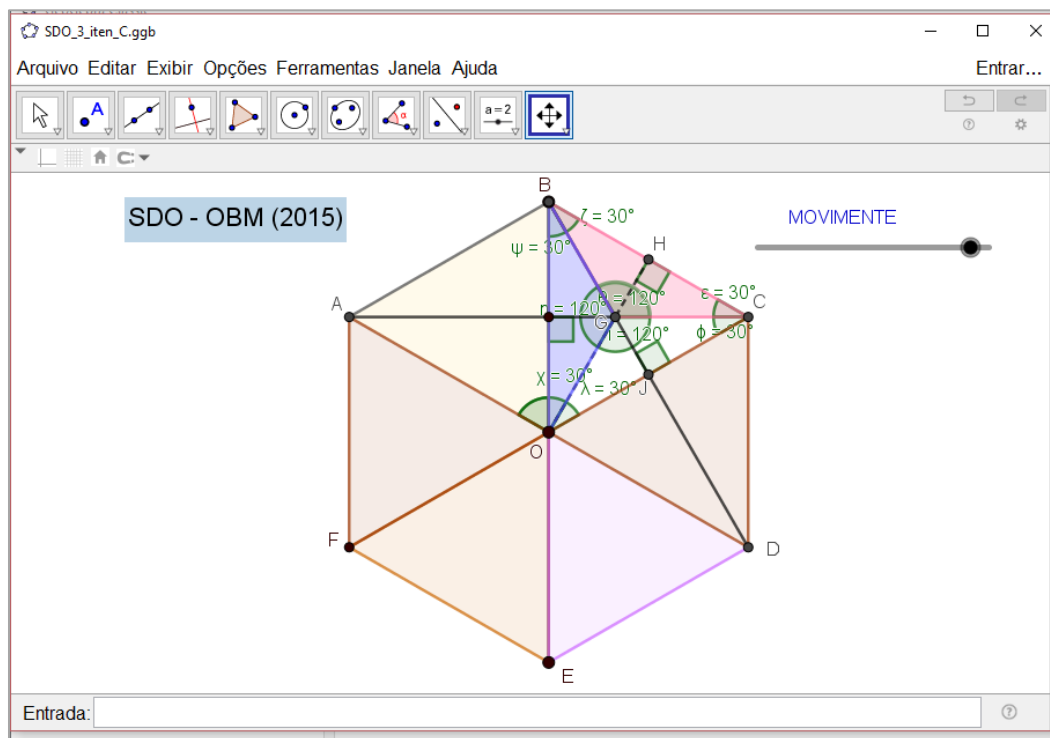
Destacamos que os estudantes ao realizarem as simulações através da modelização da SDO, devam explicitar alguns questionamentos, pois a construção dinâmica enfatiza os elementos matemáticos (ângulos, lados e diagonais) das figuras geométricas envolvidas, o que não acontece com uma representação feita apenas com lápis e papel

O professor explicou que a variação do lado e da área das figuras planas envolvidas devem ser observadas, juntamente com a descoberta de novas propriedades explicitadas. Com a modelização da SDO e observando os movimentos (Figura 37), através da decomposição de áreas, o aluno facilmente determina a área do quadrilátero ACDF.

Dialética da Formulação: A partir da análise da figura construída (Figura 39) no ambiente de geometria dinâmica, os alunos são instigados a manifestar e formular algumas conjecturas. Podemos destacar que são elaboradas eminentemente a partir da observação/percepção das propriedades que proporcionem uma maior atenção dos alunos. Com o intuito de identificar as

estratégias que apresentam maiores probabilidades de êxito, o professor estimulou o relato e a descrição das estratégias selecionadas pelos estudantes.

Figura 39 – Relacionar elementos matemáticos na formulação de conjecturas



Fonte: Autora (2017)

Portanto, o professor estimulou os alunos na busca pela estratégia mais conveniente, relacionando as propriedades existentes entre os triângulos $\triangle OBG$, $\triangle GBC$ e $\triangle GCO$, destacando elementos que podem ser visualizados com o *software* GeoGebra, de forma dinâmica movimentando o seletor (Figura 39). Essas observações registradas pelos alunos são formuladas com o apoio nas próprias características do *software* GeoGebra, que não está livre de imperfeições. A transposição didática realizada dessa forma, permite os alunos identificarem as propriedades existentes entre as figuras, produzindo conflitos cognitivos e, assim, preparamos o terreno para a evolução das intuições.

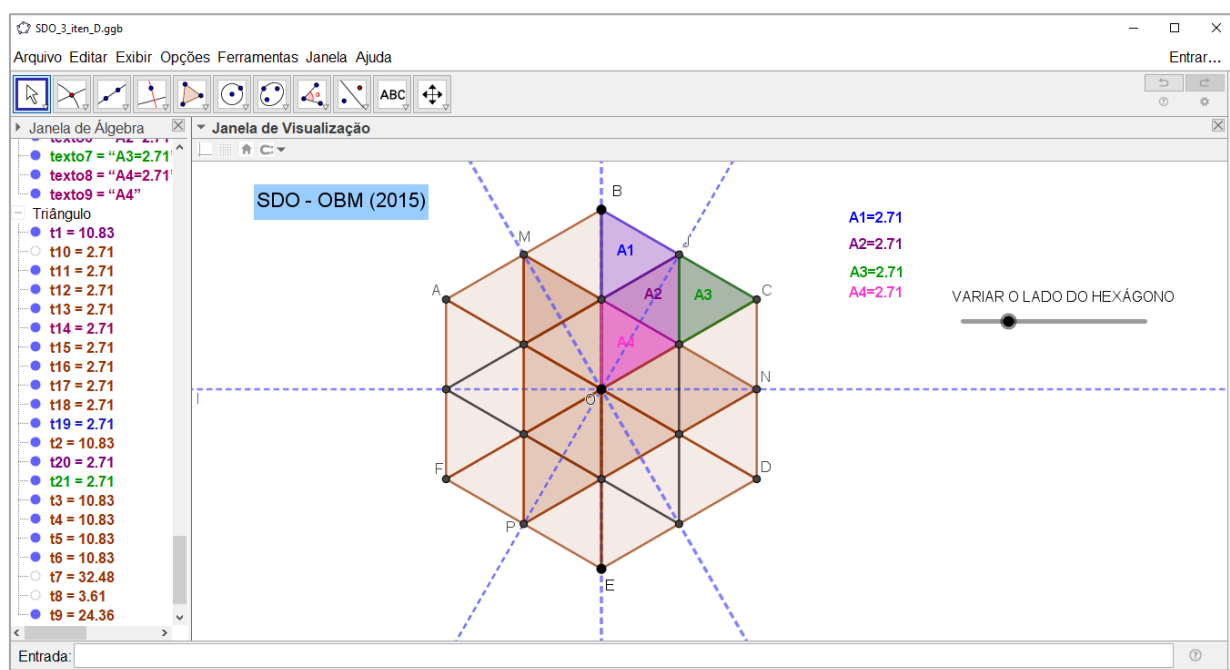
Nesse momento, o professor age como mediador com o objetivo de auxiliar os alunos a percorrerem o melhor caminho. Momento de analisar, registrar e identificar os elementos matemáticos envolvidos para então, iniciar as formulações de conjecturas entre os alunos.

Ressaltamos que a manifestação de uma intuição conjectural é determinante na figura do professor, uma vez que ele deve ter a capacidade de prever e antecipar as possibilidades de êxito

ou fracasso das estratégias assumidas pelos alunos. Por outro lado, no que concerne ao aluno, não é imediata a identificação de uma manifestação intuitiva, pois elas não ocorrem de forma isolada.

As formulações de conjecturas e a adoção de estratégias continuam, visto que há outro desafio a ser solucionado – determinar a área do triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados AB, CD e EF. Portanto, através da decomposição de áreas os alunos devem determinar a área do triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados AB, CD e EF. Ressaltamos que a visualização e a relação estabelecida na estruturação de estratégias são componentes fundamentais para a manifestação das categorias intuitivas (afirmativas, conjecturais e antecipatórias).

Figura 40 – A visualização como componente fundamental na manifestação das categorias intuitivas



Fonte: Autora (2017)

Dialética da validação: Momento em que o professor confronta os alunos com conceitos já estudados, tais como os casos de congruência de triângulos. Utilizando a construção através do software Geogebra, os alunos demonstraram as estratégias adotadas.

Tais estratégias foram originadas da interação e exploração da construção geométrica que observamos na figura 40, destacamos a validação realizada pelos alunos, modelizada no software Geogebra. Os alunos validam a sua estratégia, através de argumentos e de uma linguagem matemática apropriada. Fazer analogias para demonstrarem a congruência entre os triângulos, mencionando outros elementos como as principais cevianas de um triângulo, verificando as suas

consequências através do *software* GeoGebra. Assim, como as propriedades dos quadriláteros, como losangos, quadrados e retângulos, oportuniza os alunos verificarem de forma dinâmica cada propriedade e validar suas conclusões. Destacamos que o professor deve fazer um fio condutor com outros conteúdos como eixos de simetrias e o conceito de áreas equivalentes.

Desse modo, os alunos percebem que há vários caminhos para se chegar a solução, porém é necessário que se demonstre sistematicamente cada estratégia assumida.

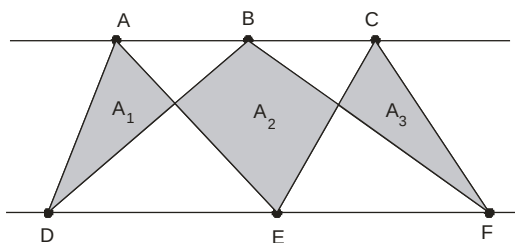
Dialética da institucionalização: Recordamos que Brousseau afirma que cada método particular de tratar uma noção matemática constitui o que chamamos de um *design* (BROUSSEAU, 1997).

Desse modo, a exploração adequada de um *software* para o estudo da Geometria, proporciona a possibilidade de obtermos uma variedade de estratégias que podem ser comprovadas ao analisarem os elementos matemáticos através da interatividade.

Destacamos que nesta fase o professor incorporou os novos conhecimentos matemáticos ao grupo de alunos que participou das quatro fases dialéticas de discussão e de construção dos conceitos matemáticos para a resolução da SDO. Destacamos que em se tratar de situações problemas oriundos às Olimpíadas de Matemática e que reconhecidamente, atingem um menor número de estudantes, a partir da utilização da tecnologia, a contribuição de discussão do grupo de estudantes, permite uma maior proximidade dos raciocínios matemáticos na elaboração e validação de conjecturas.

4.2.4. Situação Didática Olímpica 4 – Método K

OBM - 1.^a fase (2008) Na figura abaixo os pontos A, B, C são colineares, assim como os pontos D, E, F. As duas retas ABC e DEF são paralelas.



Sendo A_1 , A_2 e A_3 as áreas das regiões destacadas na figura, podemos afirmar que:

$$\text{A)} A_2 = 2A_1 = 2A_3$$

$$\text{B)} A_2 = A_1 + A_3$$

$$\text{C)} A_2 > A_1 + A_3$$

$$\text{D)} A_2 < A_1 + A_3$$

$$\text{E)} A_2^2 = A_1 \cdot A_3$$

Objetivo: Definir cevianas. Construir o Método K. Diferenciar casos de congruências de triângulos e casos de semelhanças de triângulos.

Conhecimentos prévios: Decomposição de áreas. Casos de Congruência de triângulos. Casos de Semelhança de Triângulos. Calcular a área de um triângulo. Identificar as principais cevianas. Teorema do ângulo externo.

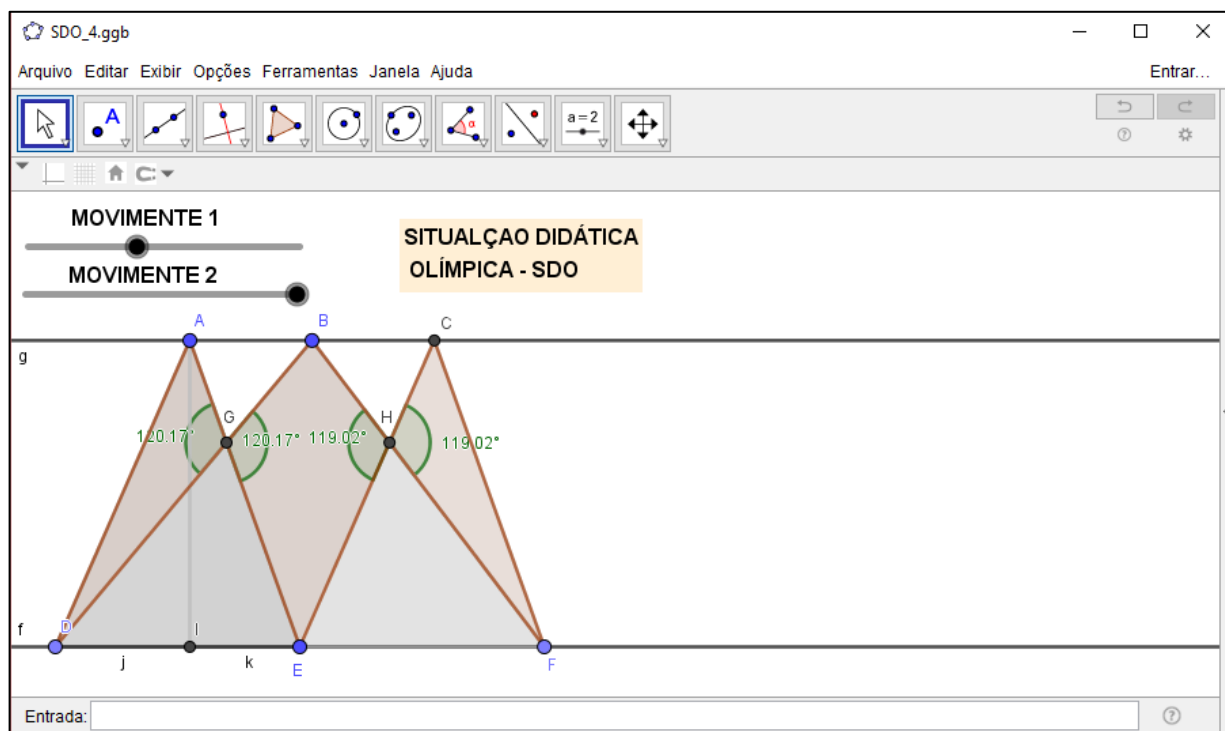
Dialética da ação:

Inicialmente os alunos se deparam com o enunciado do problema paralelamente com a representação da SDO no *software* GeoGebra (Figura 41). O objetivo desta fase é levar o aluno a perceber os elementos matemáticos envolvidos na resolução do problema. Deste modo, instigamos o aluno a movimentar a figura tanto na horizontal (movimento 1), como na vertical (movimento 2), tendo em vista a identificação dos elementos matemáticos variantes e invariantes na SDO. Assim, os alunos identificam a congruência entre os pares dos ângulos ($\widehat{AGD}$ e $\widehat{BGE}$) e ($\widehat{BHE}$ e $\widehat{CHF}$). Outro pormenor relevante deve ser enfatizado com o movimento do controle deslizante 1, pois há uma variação na medida dos lados dos triângulos - ΔAGD e ΔCHF , sendo que a medida da área permanece inalterada, devido a medida da altura de cada triângulo permanecer constante. Se movimentarem os dois controles deslizantes simultaneamente, perceberão que a área também irá variar. Essas conclusões indicam ao aluno os elementos matemáticos pertinentes que farão parte da resolução da SDO.

Assim o objetivo desta situação é conduzir o aluno a construir o conceito de figuras equivalentes e identificar uma das principais cevianas (altura). E nessa perspectiva identificar qual o tipo de raciocínio intuitivo o sujeito manifesta, visto que a pesquisadora questiona o aluno a respeito dos elementos comuns entre os triângulos ΔADE e ΔBDE . E a seguir, por analogia os triângulos ΔEBF e ΔECF .

Ainda com relação a SDO4, esperamos que o aluno trabalhe a congruência dos triângulos e a relação existente entre medidas de áreas em triângulos com natureza distintas. Pois, ao calcular a área, dois elementos são relevantes: a altura e o lado relativo a essa altura.

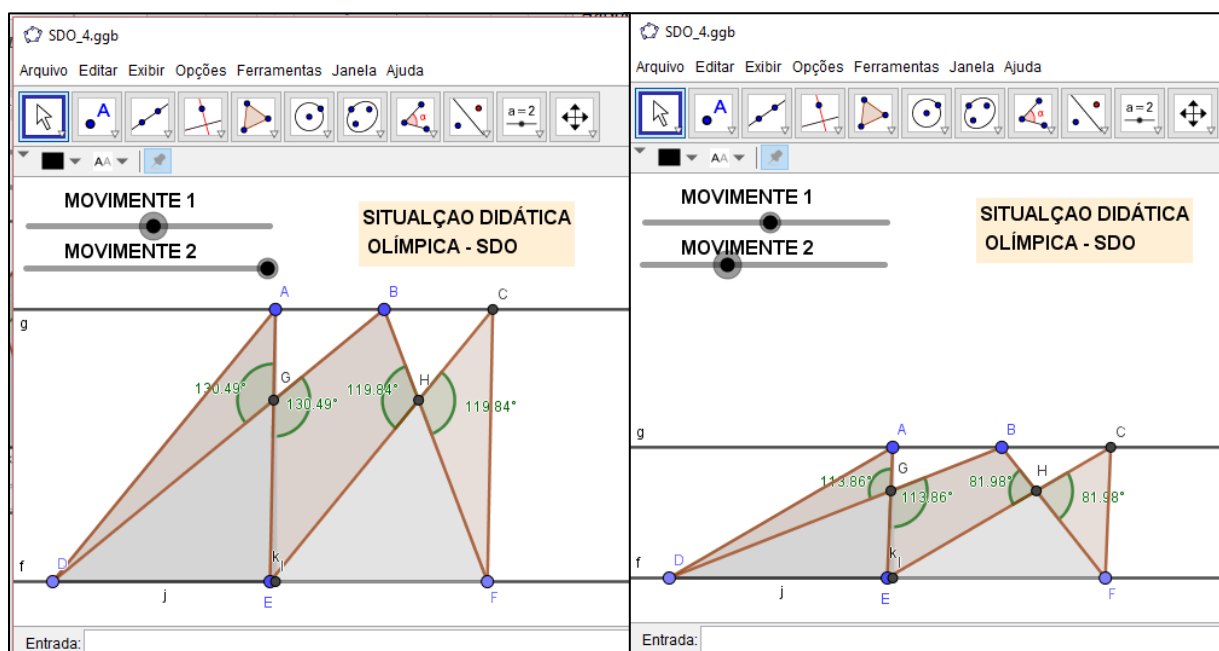
Figura 41 – Representação da Situação Didática Olímpica



Fonte: Autora (2017)

Posto isso, destacamos que nossos pressupostos com relação à primeira fase da TSD, acentuam a visualização e exploração da tecnologia com vistas à elaboração das conjecturas, com o intuito de fomentar um entendimento tácito do aluno para a compreensão do Método K. Pois, esse entendimento o ajudará a solucionar outros problemas semelhantes. Esperamos que os alunos após lerem a SDO4, não recorram ao uso de simbologias, ou seja, ao trato analítico para o cálculo da área da região destacada. Portanto, esperamos que o aluno comece a manipular o *software* GeoGebra, assim trabalha os aspectos geométricos dos conceitos que envolve o Método K. Enfatizamos que todos esses momentos se desenvolveram em sala de aula. A seguir, apresentamos a construção (Figura 42) que mostra a SDO a ser trabalhada.

Figura 42 – Movimento horizontal e vertical

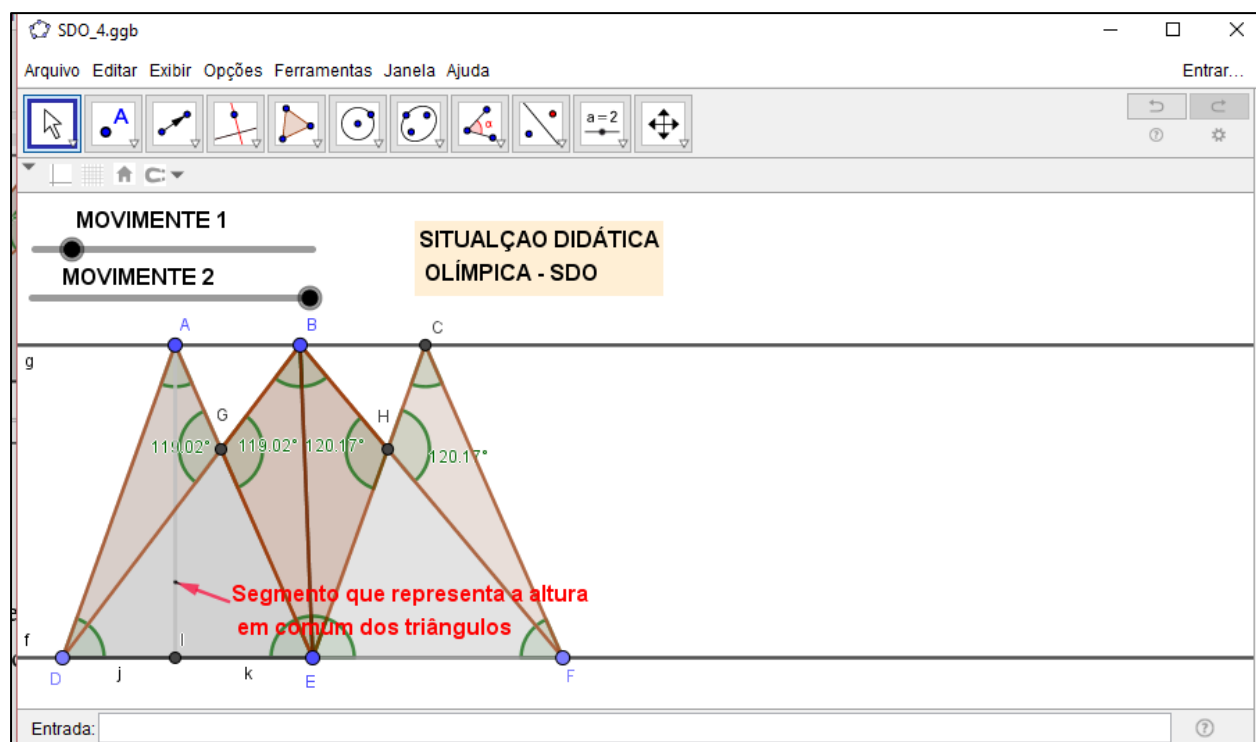


Fonte: Autora (2017)

Portanto, na figura anterior o estudante analisa os ângulos e os lados, buscando um padrão/similralidade entre os componentes matemáticos, a fim de trabalhar seus conhecimentos prévios na construção de um novo saber.

Na situação indicada na figura 43, o aluno ao observar que o segmento $\overline{AI}$ representa a altura dos triângulos - $\triangle AED$ e $\triangle BED$. Ainda de uma maneira não-formal e sem simbologias, seguindo as intuições intuitivas que surgem, o aluno deve inferir que os triângulos $\triangle AED$ e $\triangle BEP$, possuem a área do $\triangle GED$ em comum. Logo, se essa área for retirada, verificamos que os triângulos $\triangle AGD$ e $\triangle BGE$ são figuras equivalentes. De modo análogo, concluímos essa equivalência em relação aos triângulos $\triangle BHE$ e $\triangle CHF$. Essa estratégia será demonstrada na formulação. Assim como, o método K, também será demonstrado analiticamente pelos alunos na próxima fase da TSD.

Figura 43 – Situação de ação representada no software Geogebra



Fonte: Autora (2017)

Dialética de formulação: Nessa fase esperamos que o aluno represente a solução do problema analiticamente, ou seja, o aluno inicie seu processo em busca de respostas para as conjecturas elaboradas na fase anterior. Portanto, o aluno não se debruça no *software* GeoGebra, mas sim, na resolução analítica da situação didática.

O objetivo da dialética de formulação é a troca de informações. Sendo assim, o aluno ao perceber que não possui as informações necessárias para resolver o problema, e que seu parceiro possui as informações que lhes faltam, pode haver trocas, julgamentos e debates de validade (ALMOULOU, 2007).

Dialética de validação: Nesse momento, o objetivo principal é a comunicação linguística, pois fomentamos no aluno o debate sobre a certeza das asserções, o que permite organizar as interações com o *milieu* (ALMOULOU, 2007).

Em síntese, as informações e inferências produzidas com origem nas interações dos alunos nas fases anteriores são empregadas a fim de obter a sua validade. Assim, o papel do professor atua no sentido de mediar os alunos em fazer um paralelo entre a modelização no *software* GeoGebra, empregada na fase da ação, e a descrição formal do modelo matemático, momento de formulação

e, em dependência da evolução do grupo, demonstrações das propriedades mobilizadas na fase da formulação. Portanto, nessa fase o aluno deve concluir que o modelo geométrico visto no software Geogebra e a descrição analítica representada por simbologias, são idênticas.

Situação de Institucionalização: Nessa fase, o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber (ALMOULOU, 2007), tornando-o patrimônio matemático da turma. Destacamos que os saberes formais mobilizados e as inserções adquiridas, através da modelização da SDO pelo *software* GeoGebra, deverão fazer parte do patrimônio matemático da turma, que envolveu a colaboração do grupo de alunos na elaboração de um novo saber.

Mediante a descrição do nosso objetivo em cada momento ou dialética da TSD, em nossas análises *a priori*, destacamos ao leitor que nossa pretensão não consiste em descrever a situação em si, mas o conjunto de ações previstas, que podem ser manifestadas pelo aluno, identificamos categorias intuitivas, no momento da resolução da SDO.

Ademais, a ação do professor deverá determinar a forma e o conteúdo do saber para o qual ele quer dar um estatuto oficial, fazer uma síntese das estratégias e informações relevantes destacadas pela turma nas fases anteriores. Ressaltamos que as fases descritas pela TSD apoiam-se na noção de devolução, que definimos como o ato pelo qual o professor faz o aluno aceitar a responsabilidade de uma situação de aprendizagem aceitando as consequências dessa transferência (ALMOULOU, 2007). Em contrapartida, o professor realiza a sua mediação sob a influência do uso da tecnologia (ARTIGUE, 2009; 2012;2013), fomentando a ação de devolução em cada fase da TSD (ação, formulação, validação), que são anteriores a dialética de institucionalização. Portanto, destacamos que em cada fase anterior ocorre retroações às ações dos estudantes, permitindo-os refletir a respeito de suas ações e de sua aprendizagem. Ou seja, o estudante é o responsável pela sua aprendizagem. Vale ressaltar que o professor deve garantir que a ação do grupo não fique limitada ao quadro analítico e assuma a visualização como componente relevante e imprescindível em cada fase da investigação – esse pormenor permite-nos analisar a nossa questão de investigação), sendo que, o *software* GeoGebra constitui as variáveis didáticas utilizadas.

5. EXPERIMENTAÇÃO

Esta fase é clássica, caracteriza-se por representar o momento em que colocamos em funcionamento todo o dispositivo estabelecido, corrigindo-o quando necessário, o que implica um retorno à análise *a priori*, quando as análises indicam essa necessidade (ALMOULOU, 2007).

A seguir apresentaremos os momentos dialéticos, previstos na TSD, vivenciados pelos alunos, objetivando identificar alguns registros de intuição, segundo a perspectiva de Fischbein (1987), manifestados pelos estudantes durante o processo de ensino e aprendizagem em cada SDO:

SDO 1 – Teorema de Pitot

SDO 2 – Relações Métricas no Triângulo Retângulo

SDO 3 – Cálculo de Áreas de Figuras Planas

SDO 4 – Método K

Apresentaremos as imagens de modo sequencial das ações que foram desenvolvidas pelos sujeitos em nossa investigação, mediante a identificação de intuições ao decurso dos diálogos entre o aluno e a pesquisadora, de maneira que, confrontaremos os dados obtidos com os dados previstos. A seguir iniciaremos a análise de dados referentes a SDO1.

5.1. Experimentação da SDO1

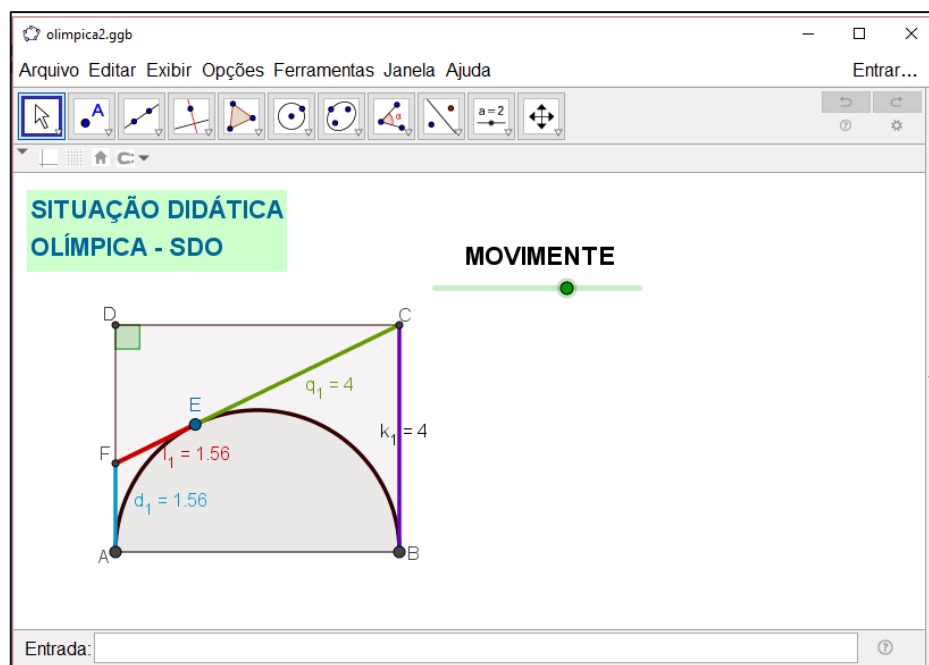
A seguir iniciaremos a análise de dados referentes a SDO1. Primeiramente apresentamos as imagens (figuras 44 e 45) respectivamente, temos os alunos no primeiro contato com a SDO1 e a representação da dialética de ação do aluno 1, quando inicia a manipular a construção proposta pelo professor através do software GeoGebra com a finalidade de construir um modelo conjectural que possibilite a compreensão dos elementos matemáticos envolvidos na SDO1 (Figura 45), fato que mencionamos antecipadamente na análise *a priori*. Vale destacar um pormenor que não foi previsto na análise *a priori*, no entanto foi exposto pelo aluno no momento dialético da ação, em que descreveu e manifestou ações gestuais, a fim de mostrar os segmentos congruentes, esse entendimento posteriormente, ajudou-o a recordar a propriedade das retas tangentes a uma circunferência, pré-requisito necessário para elaborar uma boa estratégia de resolução.

Figura 44 – alunos em seu primeiro contato com a SDO



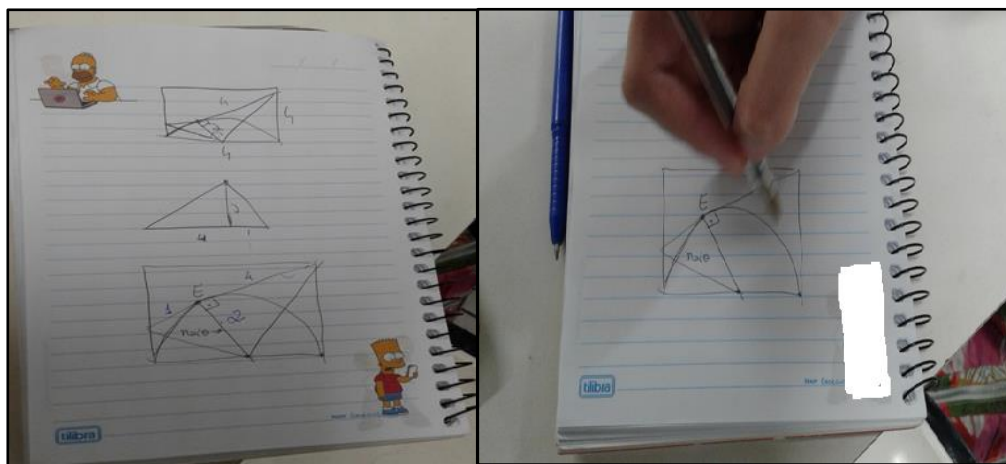
Fonte: Autora (2017)

Figura 45 – Momento em que o aluno inicia a ação de modelização através do GeoGebra



Fonte: Autora (2017)

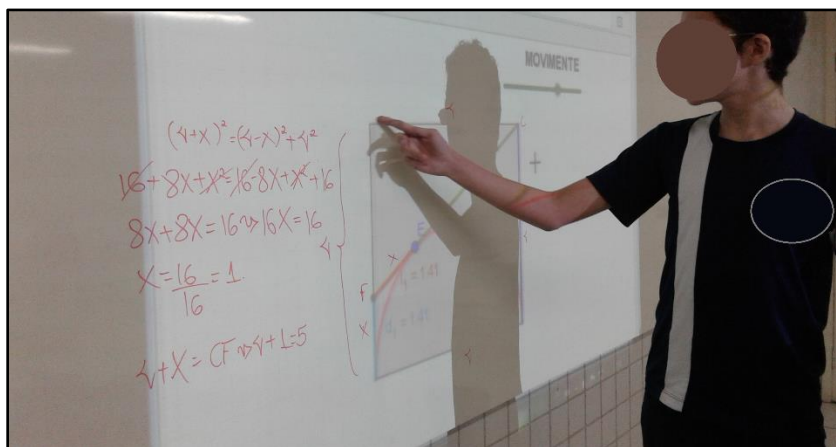
Figura 48 – Conjecturas elaboradas ao visualizar os elementos matemáticos no *software* GeoGebra



Fonte: Autora (2017)

A imagem a seguir (figura 49) representa a dialética da formulação, o aluno 2 realiza a exposição da estratégia que o levou a chegar à solução da SDO proposta.

Figura 49 – Aluno 2 a expor a sua estratégia

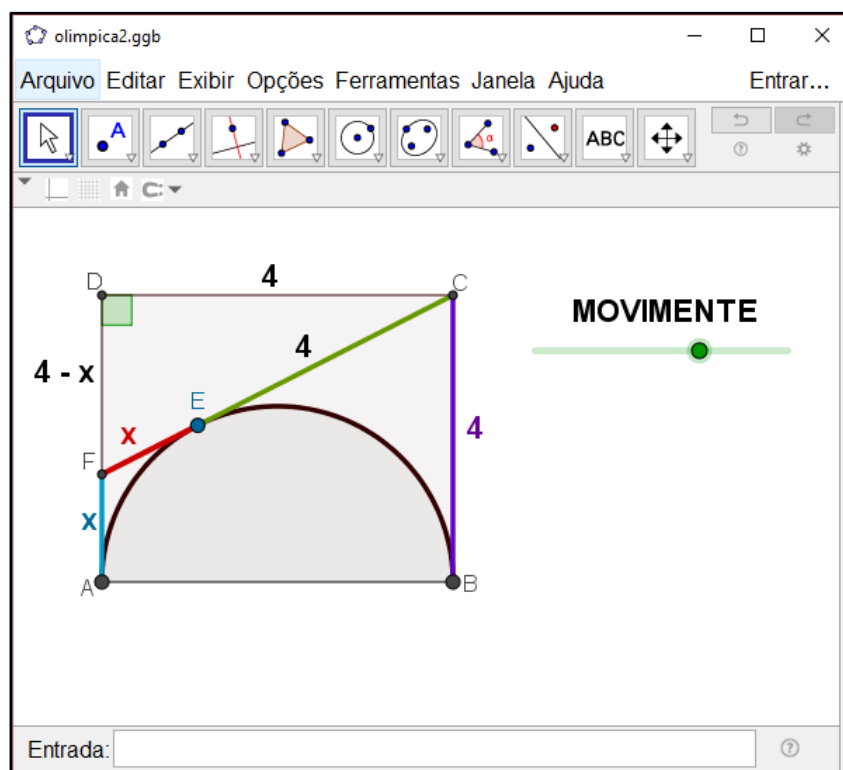


Fonte: Autora (2017)

Descrevendo a estratégia do aluno 2, temos: os segmentos $\overline{EC} = \overline{CB}$ e $\overline{EF} = \overline{FA}$. Se $\overline{EC} = 4$, então $\overline{CB} = 4$ (justificou ao visualizar a construção no GeoGebra). Logo, o aluno recordou que dois segmentos de retas tangentes de um ponto exterior a um círculo têm comprimentos iguais. Esta afirmação tem como consequência o teorema de Pitot que afirma: “Em um quadrilátero convexo circunscritível (i.e. um quadrilátero em que um círculo pode ser inscrito) o resultado da soma dos comprimentos dos lados opostos é o mesmo. Esta estratégia tem sua representação geométrica na figura 9. Sendo x o comprimento do segmento $\overline{FA}$. Como, $\overline{FC}$ é tangente ao semicírculo, segue que

$\overline{FE} = \overline{FA} = x$ e $CE = CB = 4$. Consequentemente, $DF = 4 - x$ e $FC = 4 + x$. Aplicando o teorema de Pitágoras, obtém-se: $(4 - x)^2 + 42 = (4 + x)^2$. Neste momento, o aluno 2 foi ao quadro (Figura 50) explicar a estratégia encontrada desenvolvendo a equação anterior, encontrando $x = 1$. Logo, $FC = 5$.

Figura 50 – Estratégia elaborada pelo aluno 2
(representação geométrica)

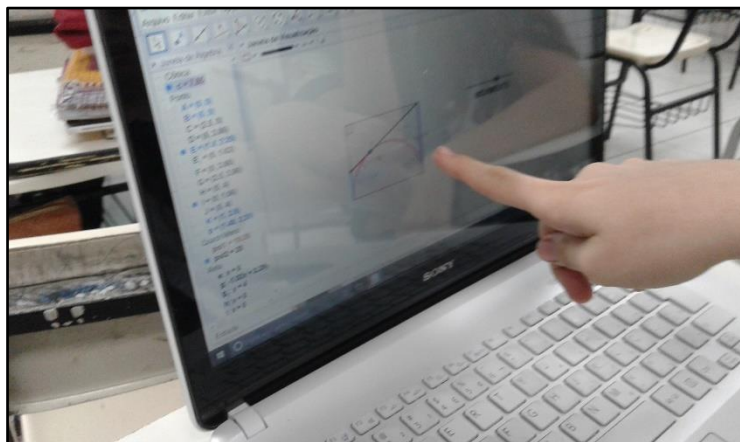


Fonte: Autora (2017)

Destacamos outra estratégia (Figura 51) realizada pelo aluno 3 que ao visualizar os ângulos da construção no software GeoGebra, inferiu que o triângulo $\triangle COF$ é retângulo. Então, utilizaram a relação métrica em um triângulo retângulo $h^2 = m \cdot n$, substituindo os valores $h = 2$ e $m = EC = 4$, encontraram $x = 1$. Portanto, $FC = 5$.

Ao mover o ponto E, eu percebo que as “retas” têm a mesma medida. Eu lembro disso do ano passado. Mas, não sei por que isso acontece. Como é que chamam essas retas? Só sei que elas têm a mesma medida. Posso verificar aqui no GeoGebra? Como faço? (aluno 3)

Figura 52 – Aluno observando a modelização da SDO



Fonte: Autora (2017)

No que se refere ao aluno 3, e analisando seu discurso, conforme a perspectiva de Fischbein (1987), podemos inferir que este aluno manifesta uma intuição afirmativa. Enfatizamos que o estudante não conseguiu verbalizar corretamente, a propriedade das retas tangentes a uma circunferência e a consequência dessa propriedade para a elaboração de uma estratégia para chegar a solução do problema.

Segundo Fischbein (1987), temos a manifestação de uma *intuição afirmativa*, quando o elemento solução não é explícito pelo sujeito, ou seja, o indivíduo não consegue elaborar com eficácia argumentos que possam comprovar as suas conclusões, assim, aceitando-o apenas como verdadeiro/falso, sem uso de explicações.

Observamos que aluno 2 mostrou um pensamento similar ao do aluno 3, em que analisou por intermédio da visualização, o movimento do ponto E, as medidas dos segmentos determinados por este ponto (Figura 53 e 54), e explicou:

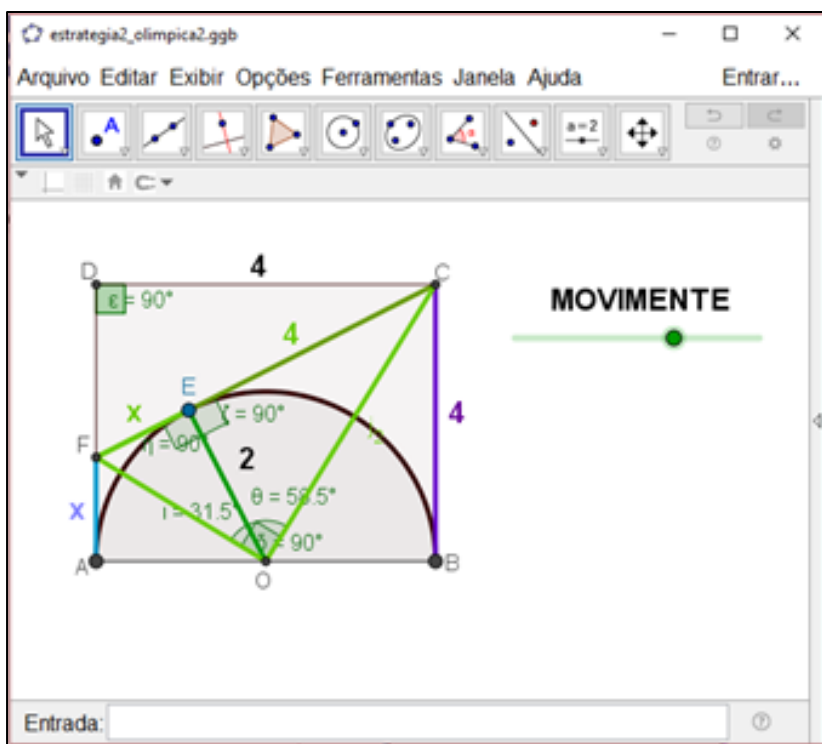
Ah! Já sei porque os segmentos $\overline{EC}$ e $\overline{CB}$ são iguais. E os outros dois também são iguais, o $\overline{EF}$ e o $\overline{FA}$. Aquela propriedade que diz os segmentos de tangentes traçados de um mesmo ponto exterior a uma circunferência são congruentes. É só perceber que os triângulos são iguais (ALUNO 2).

O aluno 3 como destacamos anteriormente, mostrou determinados entraves/obstáculos na compreensão da propriedade das retas tangentes. Porém, ele continuou a fazer as simulações e a observar os elementos matemáticos envolvidos. Ao continuar a fazer as simulações começa a elaborar conjecturas e a relacionar os elementos matemáticos envolvidos. Desse modo, surgem novas indagações:

Eu sei que devo calcular o segmento $\overline{AF}$. O segmento FC é hipotenusa desse triângulo retângulo (apontou na tela do computador para mostrar o triângulo). Por isso, posso utilizar a relação métrica no triângulo retângulo. Mas, não sei explicar essa ideia. Como faço? (Aluno 3)

No que concerne ao discurso do aluno 3, e analisando sua fala conforme Fischbein (1987), podemos inferir que este aluno manifesta uma *intuição conjectural*, em que a estratégia que o levará a solução já se mostra de modo explícito, mas, no entanto, o aluno ainda não sabe verbalizar corretamente sua justificativa. Observamos que o obstáculo que o aluno 3 enfrentou, colaborou para que ele buscasse uma nova estratégia, um novo caminho. O aluno verificou a veracidade da sua afirmação no *software* GeoGebra (Figura 55). Sendo assim, elaborou uma estratégia e conseguiu resolver o problema usando uma relação métrica no triângulo retângulo.

Figura 55 – Estratégia assumida pelo aluno 3



Fonte: Autora (2018)

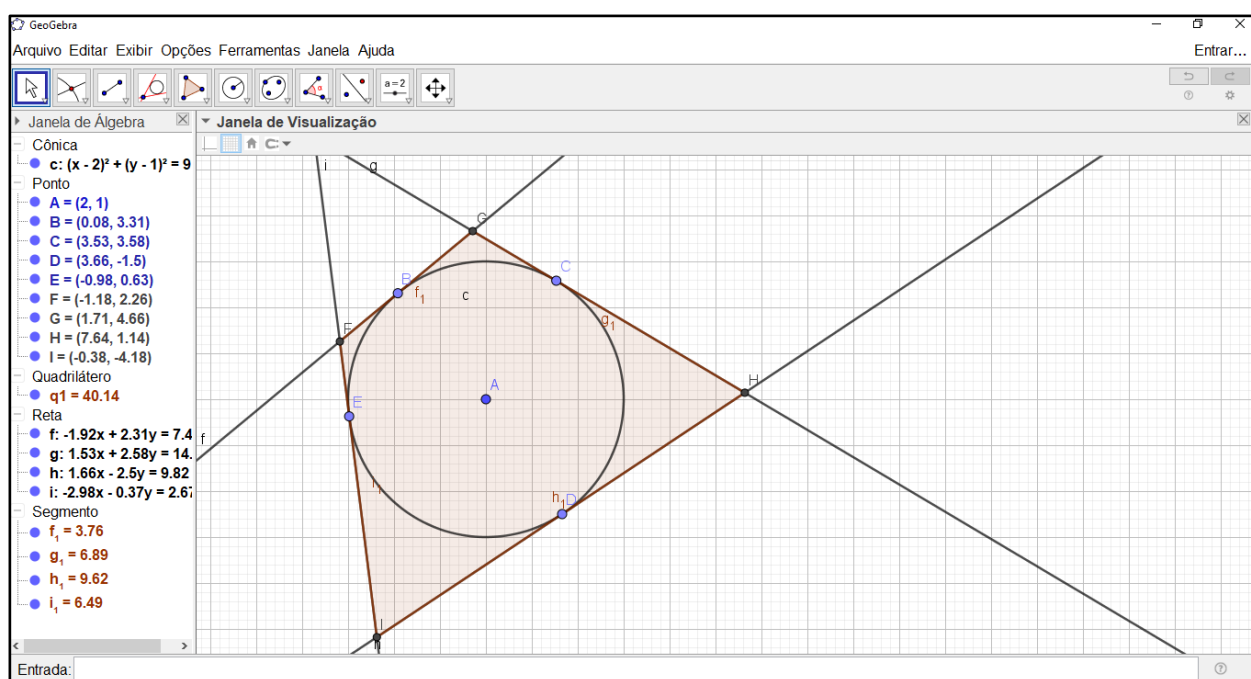
O aluno 4 desenvolve uma linha de raciocínio semelhante ao aluno 3, em que percebe que $\triangle FOC$ é triângulo retângulo. Porém, não consegue demonstrar no GeoGebra, a seguir temos a transcrição da sua fala:

Ah! Professora muito fácil. Aplicada aquela fórmula do triângulo retângulo e pronto.
Tá, feito! Mas, se a senhora perguntar porque... Eu não sei explicar! (ALUNO 4)

Enfatizamos que na perspectiva de Fischbein (1987), o aluno não consegue explicar utilizando os conceitos geométricos necessários a afirmação, no entanto está se dispondo de um modelo de pura sorte, pois mesmo tendo consciência da solução do problema, o mesmo não consegue validar a estratégia que deseja utilizar, se está correta ou não. Desse modo, o aluno 4 também desenvolve uma *intuição conjectural*.

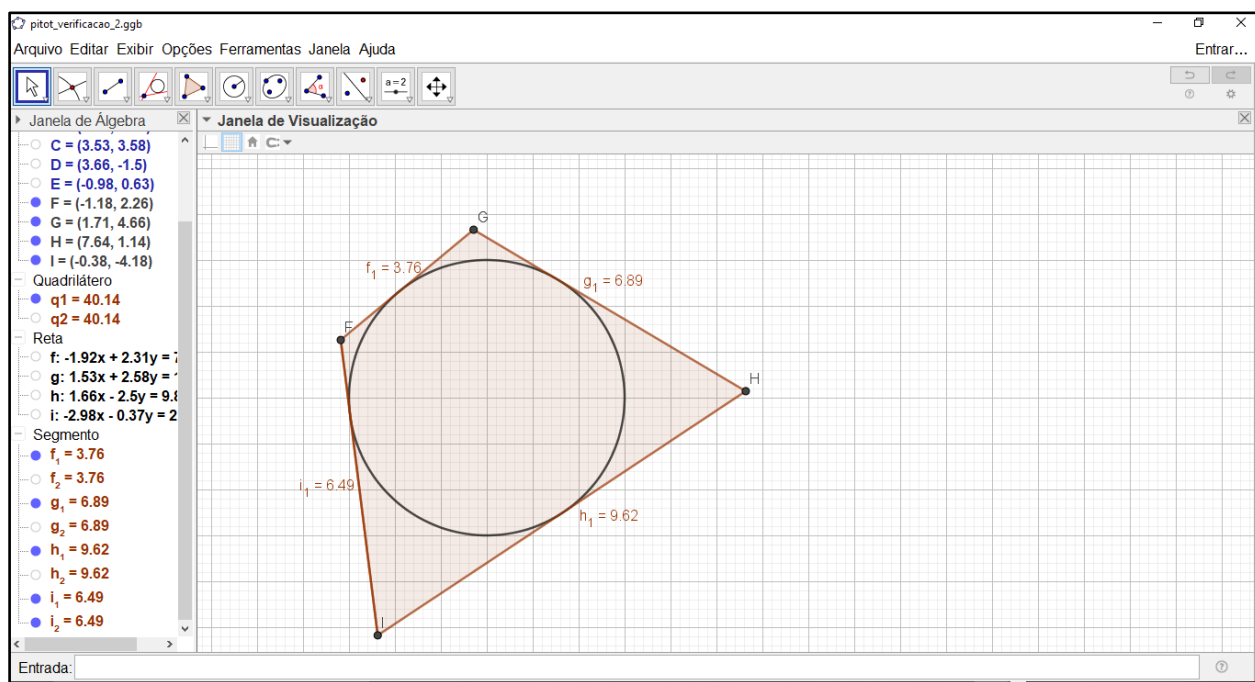
Na dialética da validação, destacamos a representação geométrica realizada pelos alunos 2 e 4 do teorema de Pitot, modelizada no *software* Geogebra (Figura 56 e 57).

Figura 56 – Alunos verificaram a validade do teorema de Pitot (construção)



Fonte: Autora (2018)

Figura 57 – Alunos verificaram a validade do teorema de Pitot



Fonte: Autora (2018)

A seguir apresentaremos os momentos didáticos, previstos pela TSD, realizado pelos alunos, em que pretendemos identificar alguns registros de intuição, segundo a perspectiva de Fischbein (1987), manifestado pelos alunos nos momentos de resolução da SDO2.

5.2. Experimentação da SDO2

As ações desenvolvidas pelos sujeitos serão apresentadas sequencialmente em nossa investigação, mediante o registro de intuições identificadas ao decurso dos diálogos entre os alunos e a pesquisadora, de forma que, iremos confrontar os dados obtidos com os dados previstos.

Primeiramente a pesquisadora indagou aos alunos como poderiam representar a situação descrita pela SDO2, promovendo um debate entre os alunos da turma. À medida que a pesquisadora os indagava, os alunos internalizavam a situação problema, preparando-se para a análise da SDO através do *software* GeoGebra. A seguir, a pesquisadora conduziu os alunos a analisar os elementos matemáticos envolvidos no problema, visualizados na modelização da SDO.

O aluno 2 no momento da dialética da ação, recordando que anteriormente mencionamos que os sujeitos envolvidos na nossa pesquisa serão identificados por números; com o objetivo de garantir a sua privacidade, inicia a simulação no *software* GeoGebra a fim de estruturar um modelo

conjectural que possibilite a compreensão de tal conhecimento que envolve as situações previstas, pormenor que citamos na análise *a priori*. Por outro lado, destacamos ações que havíamos previsto, no entanto foi exposto pelo aluno 2 no momento da dialética de ação, em que o mesmo afirmou:

Sendo $\hat{D}$ um ângulo reto, esse triângulo é retângulo. E percebe-se claramente na construção geométrica. Aqui no Geogebra, tá claro, isso! (ALUNO 2).

Podemos identificar, ao analisar o discurso do aluno 2, a manifestação de uma intuição afirmativa. Segundo Fischbein (1987), esse tipo de intuição, representa uma indagação cujo elemento solução não é explícito pelo sujeito, isto é, o indivíduo não possui as informações necessárias para solucionar o problema.

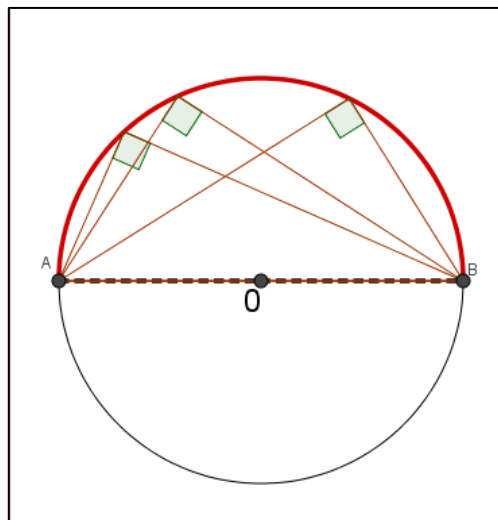
Já o aluno 1 desenvolve um raciocínio semelhante ao aluno 2, recordando a propriedade que todo triângulo inscrito em uma circunferência é um triângulo retângulo, o mesmo ainda não consegue elaborar com eficácia argumentos que possam ratificar as deduções feitas nas estratégias do seu problema, desse modo, aceitando-o apenas como verdadeiro/falso, sem o uso de demonstrações. Podemos verificar esse pormenor na transcrição do seu discurso:

Percebo aqui no GeoGebra, realmente é um triângulo retângulo. Um dos lados desse triângulo pertence ao diâmetro da circunferência. Quando eu movimento a figura, percebo isso. Acho que está aí, a solução... Deve ser por aí... (ALUNO 1)

Desse modo, a pesquisadora indaga o aluno 1 a provar tal afirmação, enunciando o Teorema exposto pelo aluno: “Todo triângulo inscrito em uma semicircunferência é um triângulo retângulo”. É relevante mencionarmos que alguns conhecimentos prévios – arco capaz do ângulo reto (Figura 58) – foram trabalhados para demonstrar tal afirmação; de forma que, o aluno pudesse prosseguir continuamente na construção do novo conhecimento. Brousseau (1996, p. 49) menciona a relevância dessa etapa, quando afirma:

O professor confronta-se com o grande desejo de pular as etapas preliminares, evitando que o aluno siga um fio condutor, que possa levá-lo a construção do novo saber, desse modo o docente ensina diretamente o saber como objeto cultural. Evitando neste caso, apresentar ao aluno o saber, e com isso o aluno se apropria dele como puder.

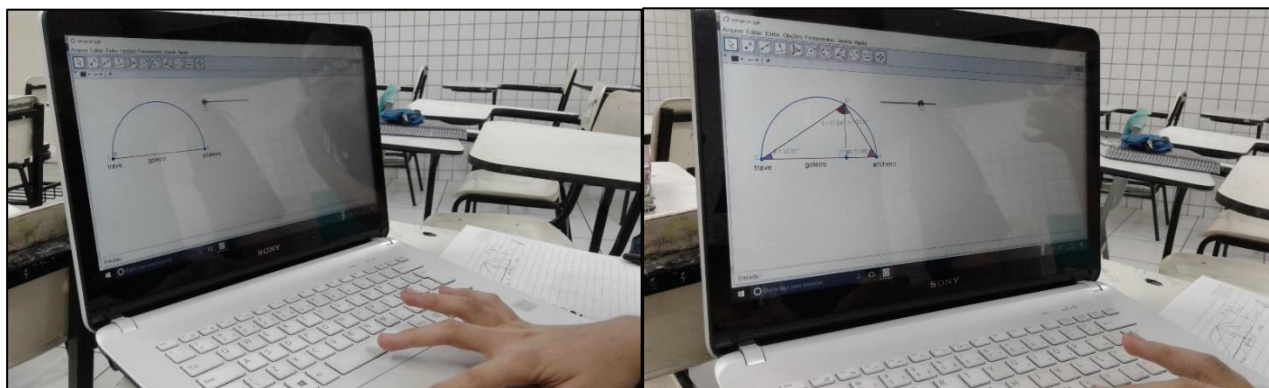
Figura 58 – A semicircunferência é o arco capaz do ângulo reto



Fonte: Autora (2018)

Nesse momento os alunos estão interagindo com a construção geométrica que representa a SDO2 no *software* GeoGebra. Os alunos movimentam o ponto D e concluem que os ângulos $\widehat{BDC}$ e $\widehat{BDA}$, também são congruentes (Figura 59).

Figura 59 – Alunos simulando situações através da modelização da SDO2



Fonte: Autora (2018)

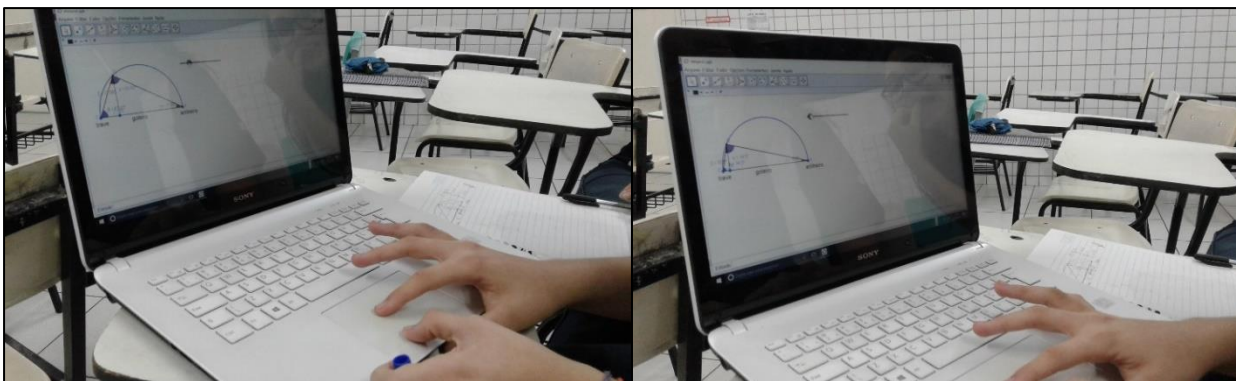
O aluno 1 ao assumir que o triângulo $\triangle ADC$ é retângulo, mencionou a aplicação da relação métrica $h^2 = m \cdot n$. Podemos verificar em seu discurso:

Professora, sendo o triângulo retângulo. Aquela relação da altura. Como é mesmo? É... $h^2 = m \cdot n$. Essa relação resolve o problema, né? (ALUNO 1)

A pesquisadora o questionou a buscar a certeza de tal afirmação. De acordo com a perspectiva de Fischbein (1987), inferimos que o aluno 1 manifesta uma intuição conjectural, em que segundo o autor de referência o elemento solução já se mostra de modo explícito. No entanto, o aluno ainda não sabe como demonstrar sua justificativa.

A seguir o aluno 3 ao ser questionado com relação ao mesmo problema mencionado anteriormente, interage com a modelização da SDO2 no *software* GeoGebra (Figura 60).

Figura 60 – Momento para analisar os elementos matemáticos envolvidos na SDO ao movimentar o ponto D.



Fonte: Autora (2018)

Nesse momento o aluno 3, inicia a análise dos elementos envolvidos na construção, ele percebe que o triângulo $\triangle ADC$ é constituído por dois triângulos semelhantes. Desse modo, a verbalização do aluno 3 foi a seguinte:

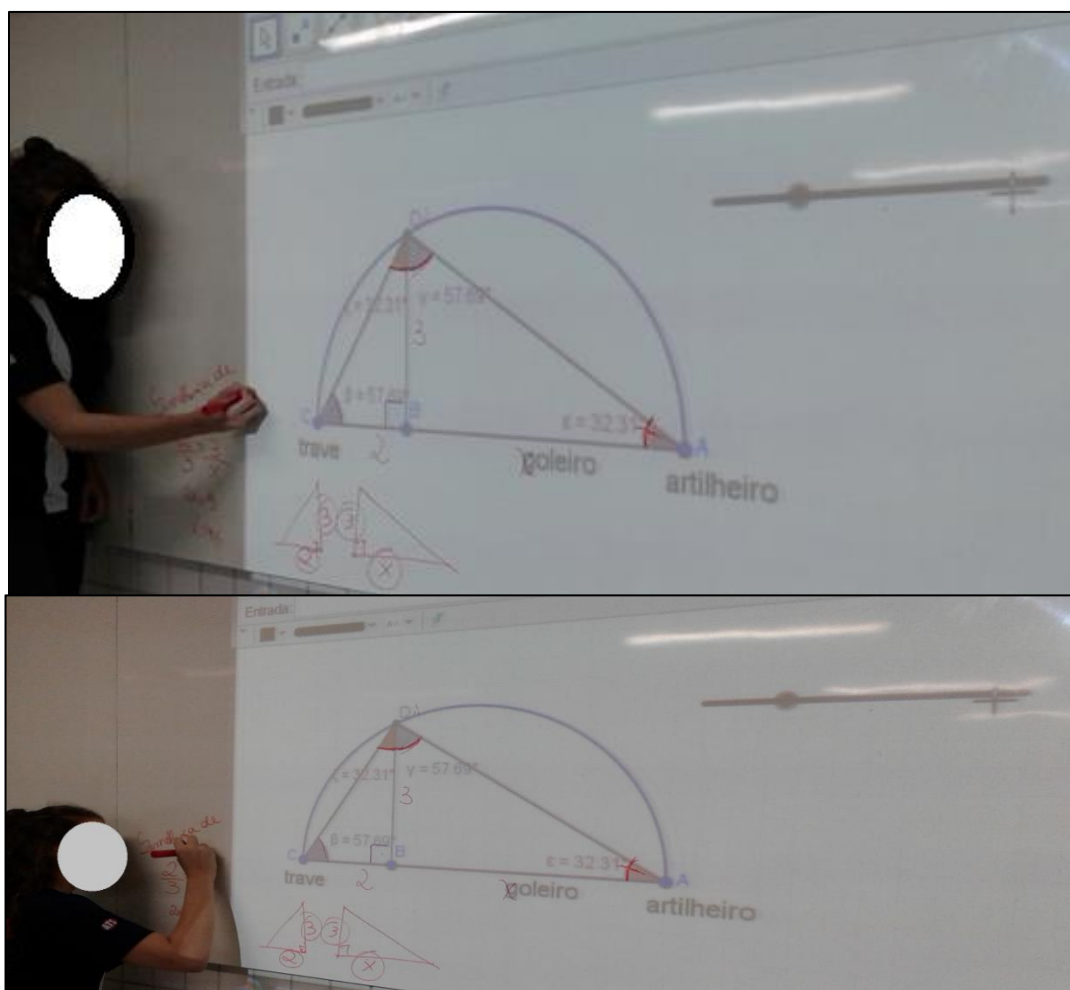
Realmente, esses triângulos possuem os mesmos ângulos, mesmo mudando a posição do ponto D, verificamos isso. Agora, consigo compreender que a demonstração da daquela fórmula é por aí. Vamos continuar a manipular o Geogebra para ver se tem outros elementos que possam nos ajudar (ALUNO 3).

Destacamos que o discurso desse aluno já é mais elaborado do que o discurso do aluno 1, porém sem nenhuma formalidade. Quando afirma “os mesmos ângulos”, ele quer dizer “ângulos congruentes”. Assim, segundo Fischbein (1987), o aluno nesse momento desenvolve uma intuição antecipatória, em que ele já consegue ter uma noção de onde percorrer para chegar a solução do

problema proposto, e ainda já se depara ao uso de estratégias para a resolução final da situação problema.

A seguir, apresentaremos a estratégia realizada pelo aluno 3 (Figura 61) e o modo como ele manipulou o Geogebra, a ponto de demonstrar a relação métrica no triângulo retângulo $h^2 = m.n$.

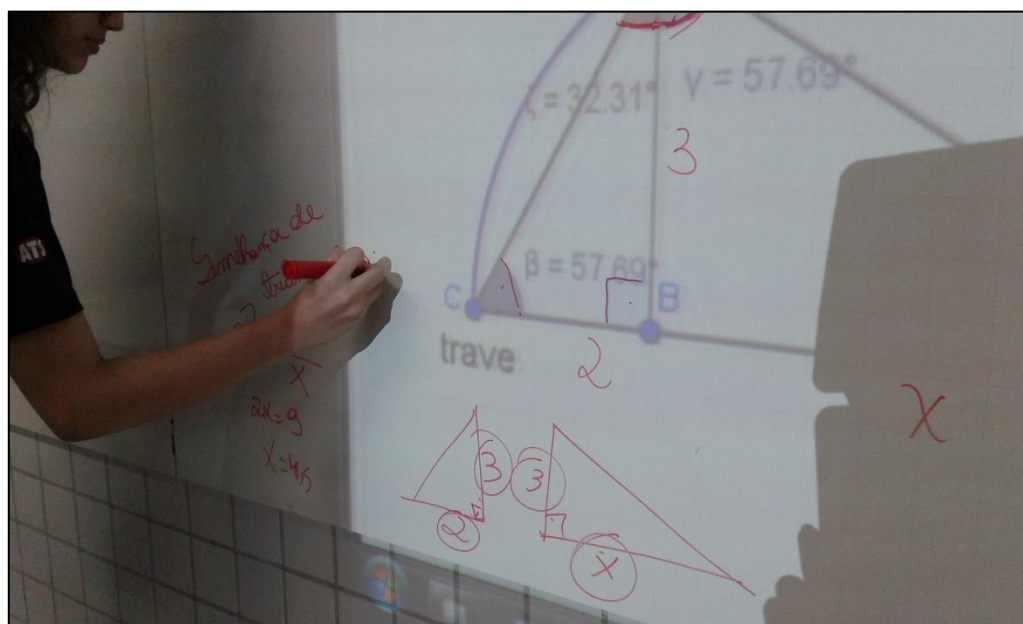
Figura 61– Estratégia descrita pelo aluno 3 – Semelhança de triângulos



Fonte: Autora (2018)

Portanto, nesse momento o aluno 3 realiza a solução da SDO2 com êxito, como podemos verificar a sua finalização na Figura 62.

Figura 62 – Resolução da SDO2 pelo aluno 3

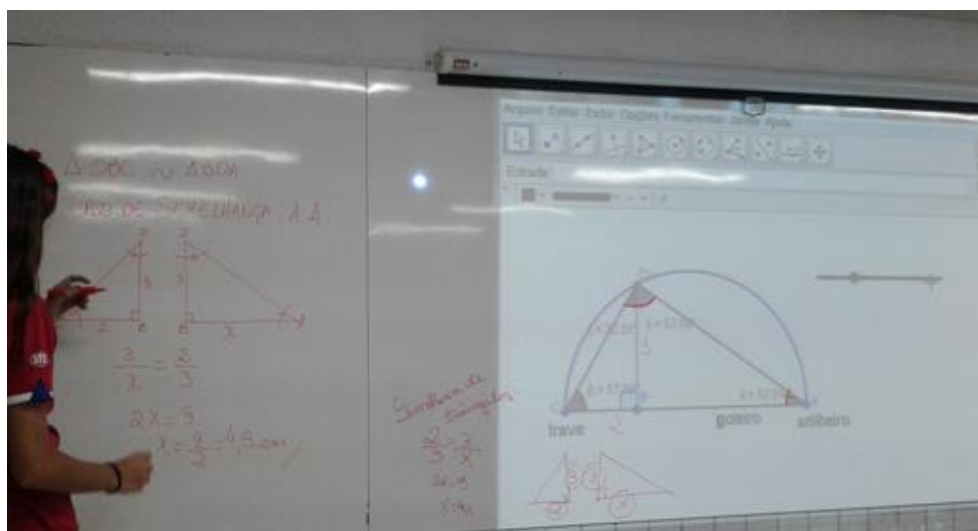


Fonte: Autora (2018)

No que concerne as imagens anteriores, podemos afirmar que o aluno 3 (FIGURA 63) encontra uma estratégia que o permite compreender o teorema que representa a média geométrica entre duas grandezas, esse pormenor pode ser ratificado com a sua verbalização, quando diz:

Ah, agora sim! Posso deduzir a fórmula da altura relativa no triângulo retângulo em função das projeções dos catetos. Desse modo, usando a semelhança dos triângulos chego na demonstração do teorema (ALUNO 3).

Figura 63 – Aluno 3 descrevendo a sua estratégia

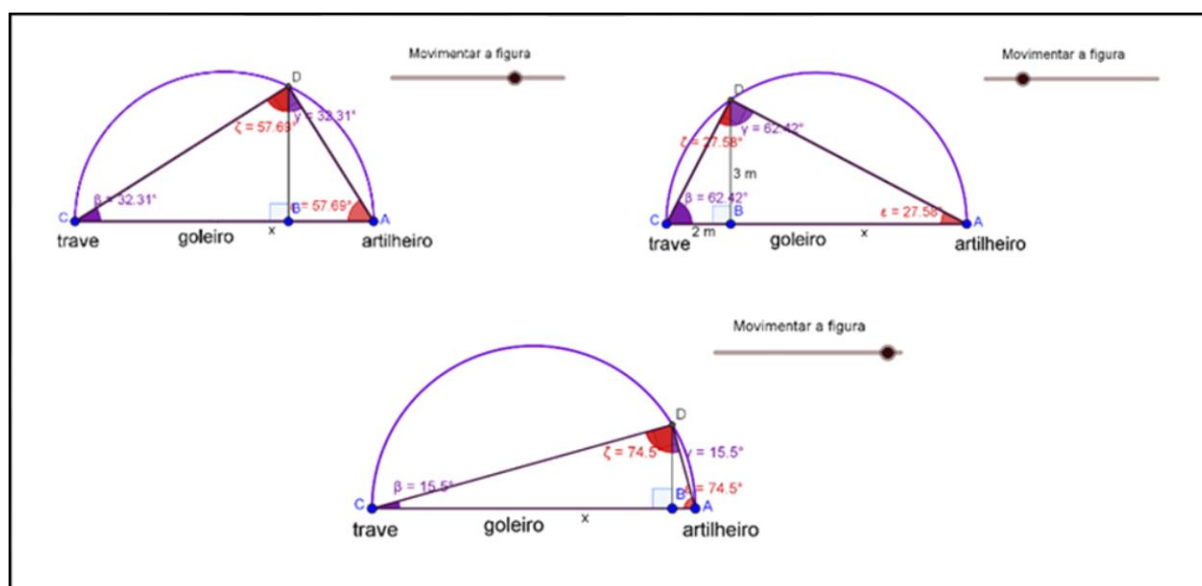


Fonte: Autora (2018)

Prosseguimos com a análise, destacando as ações do aluno 5 que não conseguiu compreender a relação existente entre os ângulos e o movimento do ponto D (Figura 64). A verbalização do aluno pode ser descrita, a seguir:

Eu consigo visualizar que ao movimentar o ponto D, os ângulos permanecem com a mesma medida. Mas, não entendo o porquê, e não consigo compreender e nem explicar como isso acontece (ALUNO 5).

Figura 64 – Visualização do aluno 5 através da modelização da SDO2



Fonte: Autora (2018)

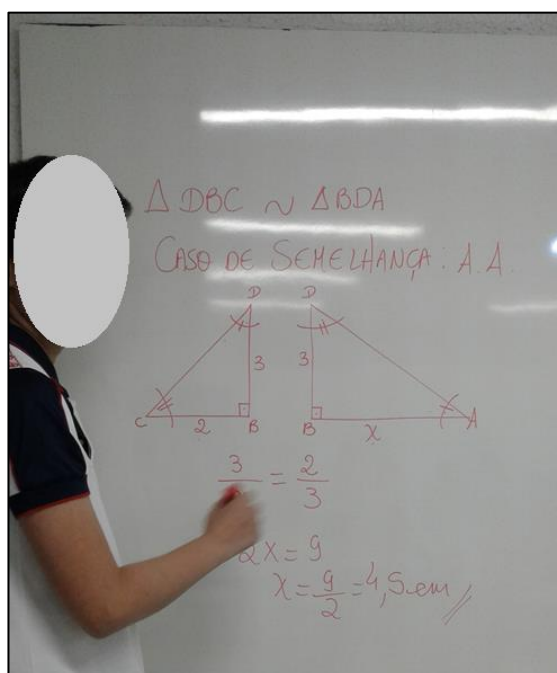
De acordo com Fischbein (1987), temos a manifestação de uma intuição afirmativa, cujo elemento solução não é explícito pelo sujeito, ou seja, o indivíduo não consegue elaborar com eficácia os argumentos que possam estruturar as suas possíveis estratégias para solucionar o problema.

Destacamos que o aluno 4, desenvolveu o raciocínio similar ao do aluno 1, em que ao concluir que se tratava de um triângulo retângulo, associou a resolução da SDO2 à relação métrica no triângulo retângulo $h^2 = m \cdot n$. A seguir, temos a descrição do seu discurso:

Professora, já sei, usa a fórmula $h^2 = m \cdot n$. Porque ao movimentar o ponto D, o triângulo continua sendo retângulo. Assim, descobrimos a solução do problema (ALUNO 4).

Ao analisar o discurso do aluno 4, enfatizamos que para Fischbein (1987), o aluno não consegue demonstrar formalmente o evento que está ocorrendo, pois mesmo identificando o triângulo retângulo e recordando o teorema $h^2 = m.n$ (média geométrica), não consegue demonstrá-lo, e assim provar que sua estratégia o levará a resolução do problema. Desse modo, o aluno 4 manifesta uma intuição conjectural, intuição que exige uma justificativa demonstrada na figura 65.

Figura 65 – Justificativa do aluno 4 para a resolução da SDO2



Fonte: Autora (2018)

Mediante a análise apresentada, verificamos que os alunos 1,2,3,4 e 5, mesmo que de modo não formal, conseguem desenvolver o processo de visualização através da modelização da SDO2 através do *software* GeoGebra. De acordo com os seus relatos, ao movimentar o ponto D e analisarem os componentes matemáticos existentes, percebem os elementos que são relevantes na elaboração das estratégias que possam levá-los a solucionar a situação didática.

Aluno 3: Professora, com o Geogebra é mais fácil, porque conseguimos simular várias situações ao mesmo tempo, sem ter que perder tempo desenhando. Pois assim, conseguimos ver na construção os elementos que precisamos utilizar para chegar na solução.

Destacamos, que o aluno 5, mesmo não conseguindo perceber a relação existente entre os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle CBD$ com o movimento do ponto D. Simulou algumas situações com o *software* GeoGebra, em que o fez perceber que os ângulos $(\widehat{BCD} \cong \widehat{BDA})$ e $(\widehat{CDB} \cong \widehat{DAB})$ são congruentes. Concluindo a seguir, que $\overline{BD}$ é lado comum entre os triângulos. Desse modo, seguindo passo a passo, com o auxílio da visualização, efetivando a elaboração de sua estratégia.

Nesse sentido, os alunos identificaram a semelhança entre os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle CBD$, visualizando os elementos matemáticos envolvidos na situação didática, demonstrando uma das relações métricas $h^2 = m \cdot n$ (média geométrica), solucionando a SDO. Assim, podemos afirmar, mediante as reproduções realizadas dos áudios dos alunos, assim como, as produções escritas, que o nosso objetivo proposto foi atingido, ou seja, algumas ações dos alunos previstas foram identificadas e outras foram apresentadas e, ao final, o aluno consegue solucionar o problema.

A seguir apresentaremos a análise sobre os dados que obtemos na fase de experimentação da SDO3.

5.3. Experimentação da SDO3

Observe que havíamos previsto nas análises *a priori* que o aluno aceitaria a situação problema proposta e, assim, elaboraria conjecturas para a sua resolução. Para Brousseau (ALMOULOU, 1986) essa concepção de ensino solicita:

Ao professor que provoque no aluno as adaptações desejadas, por uma escolha judiciosa dos problemas que lhe propõe. Estes problemas, escolhidos de forma a que o aluno possa aceita-los, devem leva-lo a agir, a falar, a refletir, a evoluir por si próprio. Entre o momento em que o aluno aceita o problema como seu e o momento em que produz sua resposta, o professor recusa-se a intervir como proponente dos conhecimentos que pretende fazer surgir. O aluno sabe perfeitamente que o problema foi escolhido para o levar a adquirir um conhecimento novo, mas tem de saber igualmente que esse conhecimento novo, mas tem de saber igualmente que esse conhecimento é inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que pode construí-lo sem fazer apelo a razões didáticas (Brousseau, 1986, p. 49, tradução Almouloud).

Esse processo de ensino e aprendizagem apoia-se na noção de devolução (ALMOULOU, 2007), definida como o ato pelo qual o professor faz o aluno aceitar a responsabilidade de uma situação de aprendizagem ou de um problema aceitando as consequências dessa transferência. Nesse sentido, os alunos aceitaram a responsabilidade de solucionar a situação didática.

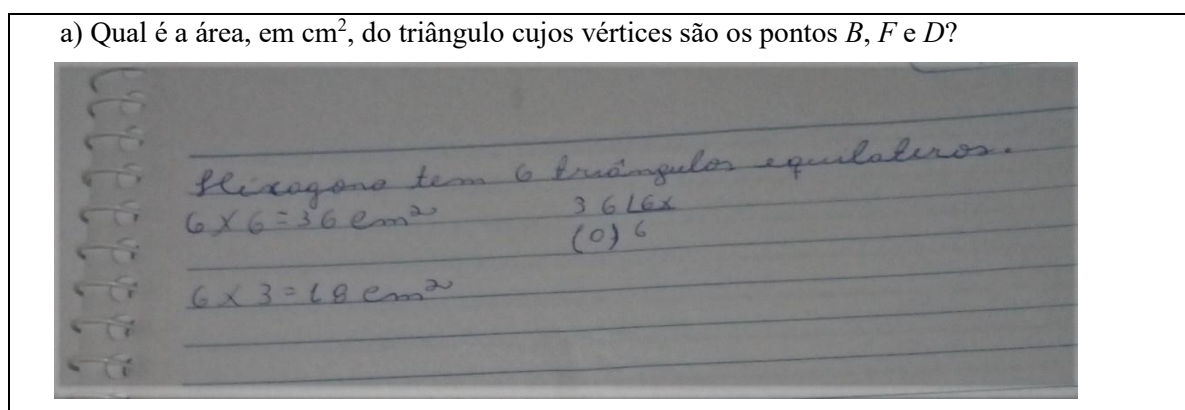
Ao analisar a fase de experimentação dessa SDO, selecionamos as informações mais relevantes obtidas através das ações de quatro alunos que se dividiram em dois grupos, os quais

denominaremos de grupo 1 e grupo 2. Os alunos conseguiram relacionar os elementos matemáticos e suas propriedades através da visualização do software GeoGebra, dado obtido através da observação da pesquisadora.

Para Almouloud (2007) colocamos em funcionamento todo o dispositivo estabelecido. Portanto, a análise *posteriori* se apoia no conjunto de dados recolhidos durante a experimentação. Na experimentação, consideramos observações realizadas sobre a sessão de ensino, as produções escritas em sala de aula e a fala durante entrevistas semiestruturadas e uma atividade em grupo de quatro alunos. Vale ressaltar que destacamos os aspectos mais relevantes para a nossa investigação.

O experimento teve uma duração de aproximadamente 100 minutos, o que corresponde a duas aulas, com a aplicação da SDO proposta. Fornecemos o problema impresso e iniciamos a discussão com base na análise da SDO representada no *software* GeoGebra. Para o item (a) da SDO, o primeiro grupo analisado de alunos, obtivemos a seguinte resposta (Figura 66):

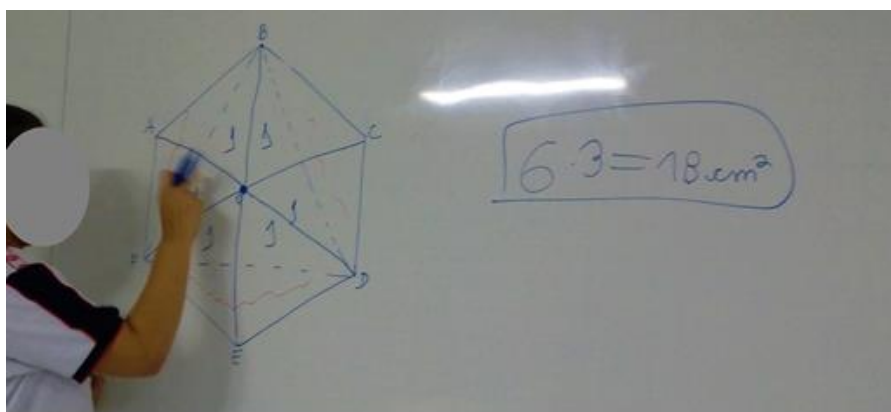
Figura 66 – O grupo 1 usou a linguagem escrita como forma de representação.



Fonte: autora (2018)

Na figura 67, o grupo 2 representou no quadro o caminho que percorreu para determinar a área do triângulo BFD.

Figura 67 – Exposição oral da argumentação do grupo 2



Fonte: Autora (2018)

Quando os dois grupos foram questionados sobre suas conjecturas ao decorrer da resolução apresentada, o grupo 1 respondeu:

Bem, ao observar aqui no Geogebra percebo que BFD também é um triângulo equilátero. Sendo assim, é como se dividisse o hexágono em seis triângulos iguais. Então, a área do hexágono é $6 \times 6 = 36 \text{ cm}^2$. Para determinar a área divido por 6 e o resultado multiplico por 3. Pronto, encontramos a área!

No entanto, o grupo 2 afirmou: “Temos aqui, seis triângulos iguais. Então, para calcular a área do triângulo BDF basta multiplicar seis por três”.

Ao analisar o discurso do grupo 1 verificamos que os alunos ao indagarem que o triângulo BFD é equilátero, sem qualquer justificativa, retratando algo aceito como correto e sem buscar os elementos matemáticos envolvidos que possam validar essa afirmação. Os alunos manifestam assim, uma intuição afirmativa. Para Fischbein (1987), as intuições afirmativas são representações ou interpretações de vários fatos aceitos como corretos, auto-evidentes e auto-consistentes. Prosseguindo com as elaborações de conjecturas o grupo se apoiou nos elementos visualizados no software Geogebra para justificar a sua afirmação.

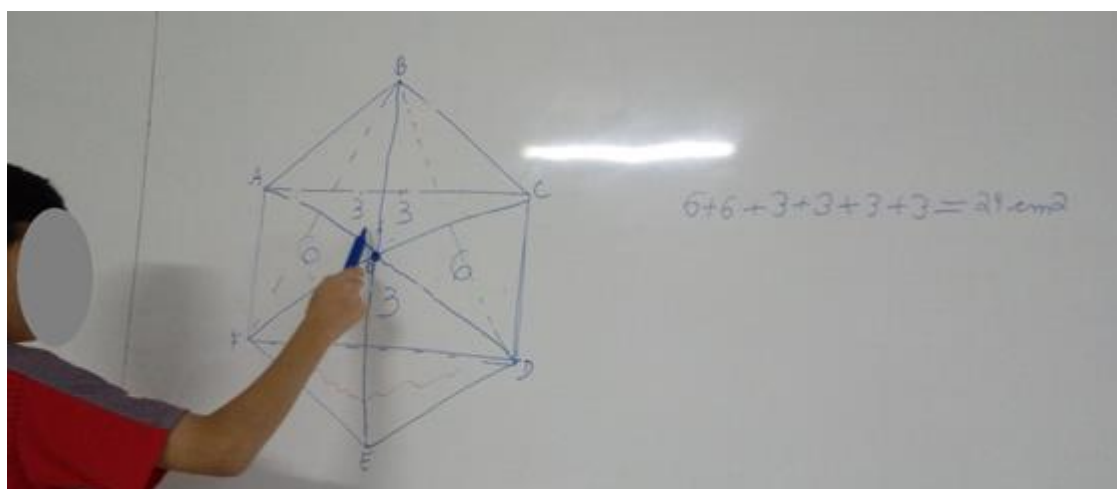
Ao analisar o discurso do grupo 2 identificamos também a manifestação da intuição afirmativa, ao tomarem como certo que os seis triângulos são iguais, sem justificativa a priori.

Nesse momento, o professor promove a discussão entre os participantes fomentando o uso de uma linguagem matemática adequada, utilizando o software Geogebra para auxiliar na análise dos componentes matemáticos invariantes para justificar as afirmações.

Com a modelização da SDO e utilizando a decomposição de áreas, os grupos facilmente verificaram que a área do quadrilátero ACDF mede $4 \times 6 = 24 \text{ cm}^2$ - Solucionando o item (b) da SDO (Figura 68). A visualização da SDO através do *software* GeoGebra auxiliou-os a resolução desse item de uma forma mais ágil. Podemos verificar esse pormenor no seguinte discurso:

Agora percebemos aqui no Geogebra, podemos decompor a figura em seis triângulos iguais, sendo que quatro deles fazem parte do quadrilátero ACDF. Ficou fácil de ver!

Figura 68 – Estratégia representada no quadro pelo grupo 1



Fonte: Autora (2018)

Esse discurso representou o eixo condutor que os alunos necessitavam para inferir as propriedades dos quadriláteros através do *software* GeoGebra, identificamos uma intuição conjectural.

Na fase da formulação para solucionar o item (c) – os triângulos ABC e BCD superpõem-se parcialmente. Qual é a área, em cm^2 , da região comum aos dois triângulos, indicada em cinza na figura abaixo? Destacamos o seguinte discurso, mencionado pelo grupo 1.

Ora, ao dividir o triângulo OBC ao meio. Vejo que posso dividir em mais triângulos iguais. Assim, ficam seis triângulos iguais. Eles são iguais mesmo? Porque se for mesmo, a área total é seis. Cada triângulo pequeno mede $6 : 6 = 1 \text{ cm}^2$. Então, temos aí dois deles, né? Aí, a área cinza mede 2 cm^2 .

Analogamente, o grupo 2 explicitou estratégia semelhante, sem indagar-se por tais afirmações.

Dividimos o triângulo OBC em dois triângulos iguais ...
Mas, aí vemos que dá para dividir o OBC em três triângulos iguais. Então, deve ser 2 cm^2 a medida da área cinza.

Ao analisarmos a fala dos dois grupos, percebemos que o grupo 1 sente a necessidade de demonstrar sua estratégia, mesmo tendo consciência que está correta. Nesse momento, identificamos a manifestação das intuições conjecturais. Conforme Fischbein (1987) uma intuição conjectural se manifesta quando o sujeito compreende o que deve fazer para obter a solução, recordando que somente ele possui esse pensamento, mas ainda nesse momento não encontrou a solução do problema ou ainda, identifica uma situação que envolve o problema e exige uma argumentação mais detalhada.

Notemos, porém que a intuição conjectural numa fase após a resolução efetiva do problema proporciona ao estudante a identificação de consequências futuras daquele resultado obtido (ALVES; BORGES NETO, 2011, p.65). No nosso caso, implica no estudo dos casos de congruência de triângulos e na exploração das propriedades do losango.

Portanto, nessa fase de Formulação, o aluno necessita mostrar que há uma resposta para as suas conjecturas, identificamos a manifestação da intuição conjectural e a partir daí instigamos os estudantes a organizar os dados numa tabela (Figura 69). Prosseguimos destacando a validação dos argumentos mencionados. Portanto, demarcamos a fase da validação.

Figura 69 – Dados extraídos da visualização no software Geogebra

$GB = GC = BC$ triângulos equiláteros

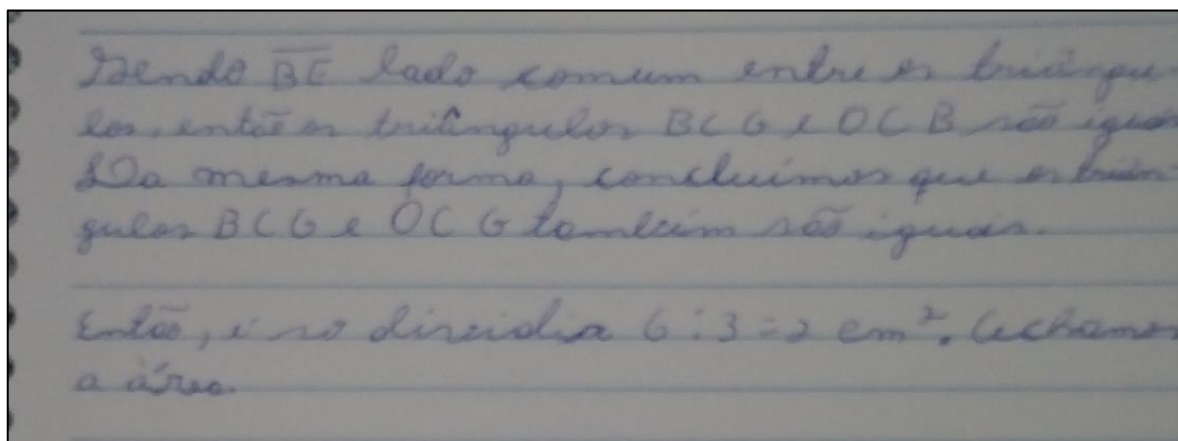
Triângulos	lados	Ângulos
OBG	$\overline{BE}$	30°
	$\overline{GO}$	120°
	$\overline{BO}$	30°
CGB	$\overline{CG}$	30°
	$\overline{GB}$	120°
	$\overline{BG}$	30°
CGO	$\overline{CE}$	30°
	$\overline{GO}$	120°
	$\overline{OC}$	30°

Fonte: Autora (2018)

A mediação do professor é relacionar as propriedades existentes entre os triângulos OBG, GBC e GCO; destacando os elementos invariantes visualizados na modelização da SDO ao movimentar o seletor. Assim, os participantes perceberam que os ângulos e os lados possuem

valores constantes entre si. Assinalamos, a manifestação da intuição antecipatória que suscita em um dos alunos mencionar a congruência entre os triângulos. Podemos verificar no discurso do grupo 1, a seguir (Figura 70).

Figura 70 – Discurso que menciona implicitamente a congruência entre os triângulos



Fonte: Autora (2018)

Destacamos que o grupo 2 para provar suas conjecturas apoiou-se primeiramente, nas medidas dos ângulos, mas depois também mencionou as medidas dos lados, inferindo o conceito de congruência entre as figuras. Vejamos no discurso de um dos alunos:

Grupo 2: Se OBC têm ângulos que medem 60° , então ele é equilátero. Se dividirmos OBC em três triângulos, temos triângulos com ângulos de 30° , 120° e 30° cada um. Aí, podemos dizer que os triângulos são iguais.

Pesquisadora: O que vocês podem afirmar sobre os lados?

Grupo 2: Hum... Vamos ver aqui... Acho que possuem a mesma medida.

Pesquisadora: Veja na modelização da SDO!

Grupo 2: Sim! Têm lados comuns e os outros possuem a mesma medida.

Momento fundamental do experimento, pois construímos o conceito de figuras congruentes, tornando-o patrimônio da turma” (ALMOULOU, 2007, p.40).

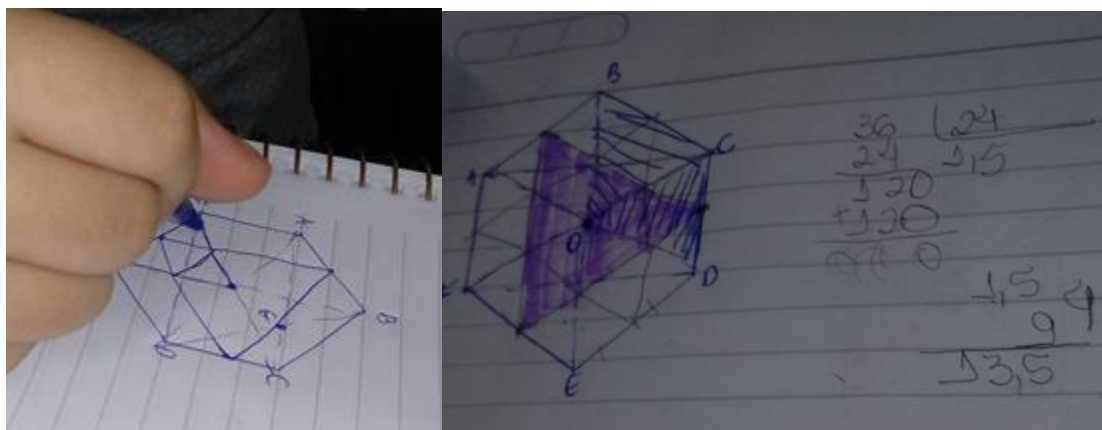
Portanto, o professor confrontou os alunos com as suas observações, instigando-os a recordarem os casos de congruência de triângulos e assim sentindo a necessidade de validar os seus conhecimentos, destacamos nesse momento, mais uma vez a manifestação da intuição antecipatória

durante a fase da validação. As estratégias mencionadas são oriundas da interação e exploração da construção geométrica que representa a SDO, destacamos a validação realizada pelos alunos modelizada pelo *software* GeoGebra, inferindo as propriedades do losango e os casos de congruência de triângulos.

Prosseguimos ainda na fase da validação com a resolução do item (d - Qual é a área, em cm^2 , do triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados AB , CD e EF ?). O grupo 1 enfrentou dificuldades na resolução deste item, optando por fazer uma representação da situação no caderno (Figura 71). Enquanto o grupo 2 preferiu ir ao quadro demonstrar a sua estratégia (Figura 71). Podemos destacar a argumentação do grupo 2:

Percebi que cada triângulo menor representa $\frac{1}{4}$ dos triângulos que formam o hexágono. Então, eu fiz a divisão $6:4 = 1,5 \text{ cm}^2$. No total que compõe o triângulo procurado são nove triângulos com cada um com área de $1,5 \text{ cm}^2$. Então, eu fiz $1,5 \times 9 = 13,5 \text{ cm}^2$.

Figura 71 – Representação da situação X Resolução da SDO

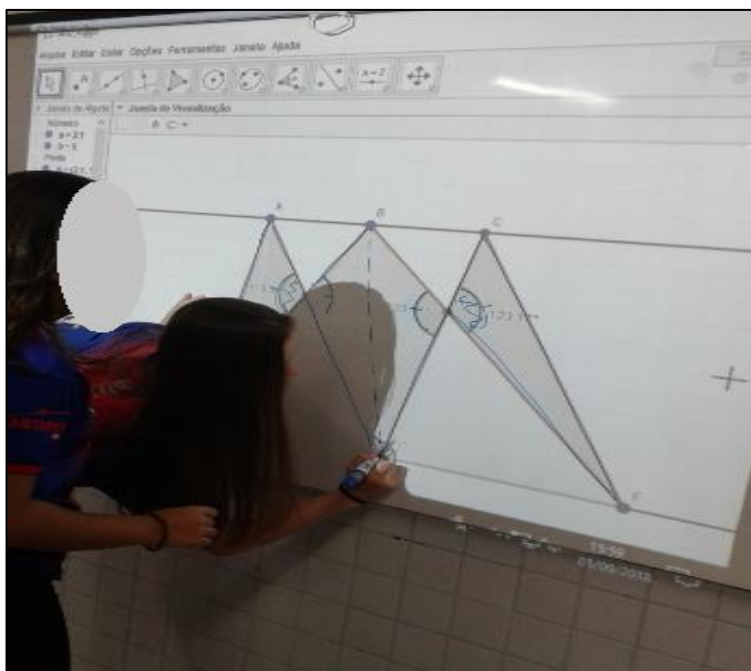


Fonte: Autora (2018)

cujos registros seguem as fases que caracterizam a TSD (ação, formulação, validação e institucionalização).

Desse modo, após a apresentação da SDO4 aos alunos, a pesquisadora instiga-os individualmente a visualizar a modelização da situação didática no *software* GeoGebra. Essa construção que representa a SDO4, permitirá ao aluno analisar os componentes matemáticos envolvidos e selecionar aqueles mais relevantes para elaborar as suas possíveis estratégias. Sendo assim, destacamos que as imagens (Figura 73 e 74) representam momentos na dialética da ação, em que iremos descrever alguns discursos captados, por meio do software Voice Recorder Pro, que nos dão registros de manifestações das categorias intuitivas, relacionando o discurso de cada aluno com a teoria de Fischbein (1987).

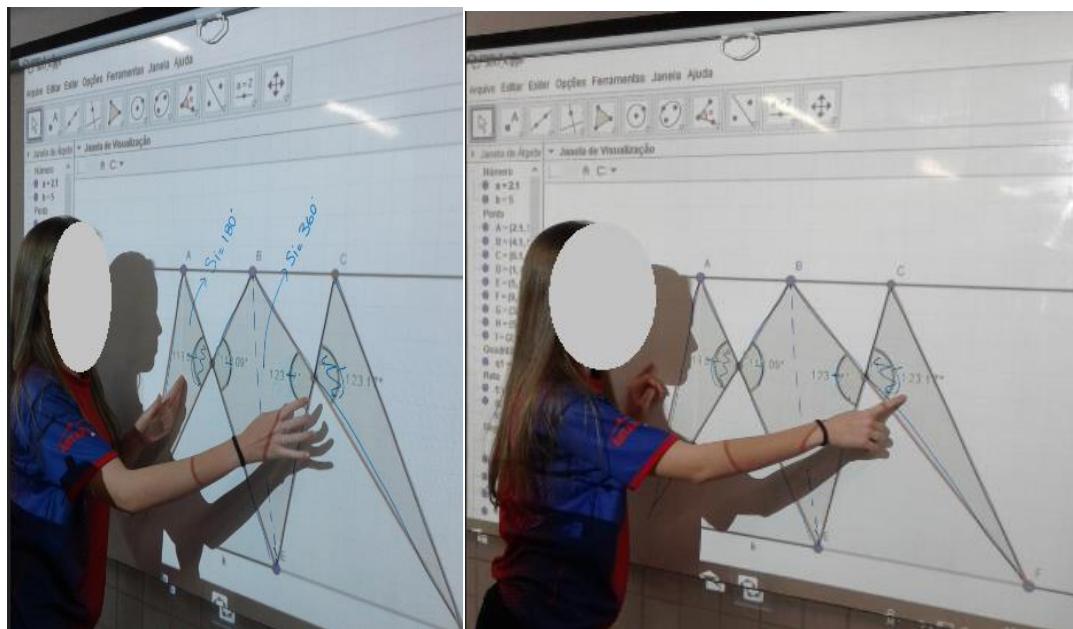
Figura 73 – Discussão durante a dialética da ação



Fonte: Autora (2018)

Observe que na imagem anterior (Figura 73), o contato do aluno 1 com a representação da SDO4 no software Geogebra. Essa fase caracteriza-se pela apropriação do aluno com a SDO4, ou seja, nesse momento o aluno relaciona os elementos matemáticos envolvidos. Percebamos que o estudante analisa primeiramente os ângulos de cada figura geométrica (Figura 74), identificando os triângulos e o quadrilátero. A seguir, transcrevemos alguns trechos do áudio, que foi gravado o discurso entre o aluno 1, aluno 2 e a pesquisadora.

Figura 74 – Aluno se confronta com a modelização da SDO4 no *software* GeoGebra



Fonte: Autora (2018)

Pesquisadora: Observe os elementos que compõem a construção. O que acontece ao movimentar a figura? Quais são os elementos que você pode identificar com a simulação?

Aluno 1: Vejo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° . E a soma dos ângulos internos dos polígonos é 360° .

Pesquisadora: E o que mais?

Aluno 2: Hum, quando movimentamos também percebemos que os ângulos $\widehat{A\hat{E}D}$ e $\widehat{B\hat{G}E}$ têm a mesma medida.

Pesquisadora: Porquê?

Aluno 2: são ângulos opostos pelo vértice.

Segundo Fischbein (1987), temos a manifestação de uma intuição afirmativa, cujo elemento solução não é explícito pelo sujeito, ou seja, o estudante não consegue elaborar uma estratégia que seja eficaz para solucionar o problema, aceitando tais afirmações apenas como verdadeiras/falsas, sem o uso de justificativas. Ademais, com esse discurso percebemos que os alunos 1 e 2 tinham uma grande tendência em focar as suas estratégias em função dos ângulos, por consequência não alcançariam a solução com êxito. Mediante a esse pormenor, a pesquisadora prosseguiu indagando-os, comprovamos esse fato com o discurso transcrito a seguir.

Pesquisadora: Vamos refletir sobre o que você busca calcular no problema?

Aluno 2: Ah, a área do quadrilátero em função das áreas dos triângulos...

O aluno 2 juntamente com o aluno 1, observaram novamente a construção no Geogebra e indagaram: “Nossa, já sei. Então, a área 3 é a junção das áreas dos triângulos. É sim!”

De fato, observamos que na transcrição da fala do aluno 2, o mesmo desenvolve intuições antecipatórias. Vale ressaltar que para Fischbein (1987, p. 64) as conclusões que seguem, com origem em momentos iluminatórios e repentinos, não são equivocadamente e especialmente condicionadas por dados de um problema particular. Verificamos esse pormenor quando Fischbein (1987, p. 64) afirma que “Elas dependem de um maior grau pessoal de segurança, atitudes cognitivas instáveis”.

A pesquisadora buscou instigá-los a refletir e a elaborar uma estratégia que os levassem a ratificar o raciocínio exposto. Sendo assim, prosseguimos com a transcrição do discurso entre os alunos e a pesquisadora.

Pesquisadora: Vocês sabem que caminho seguir para provar que tal afirmação é verdadeira ou falsa?

Aluno 1: Eu penso que dá para provar pela congruência entre os triângulos. Os triângulos são iguais, né?

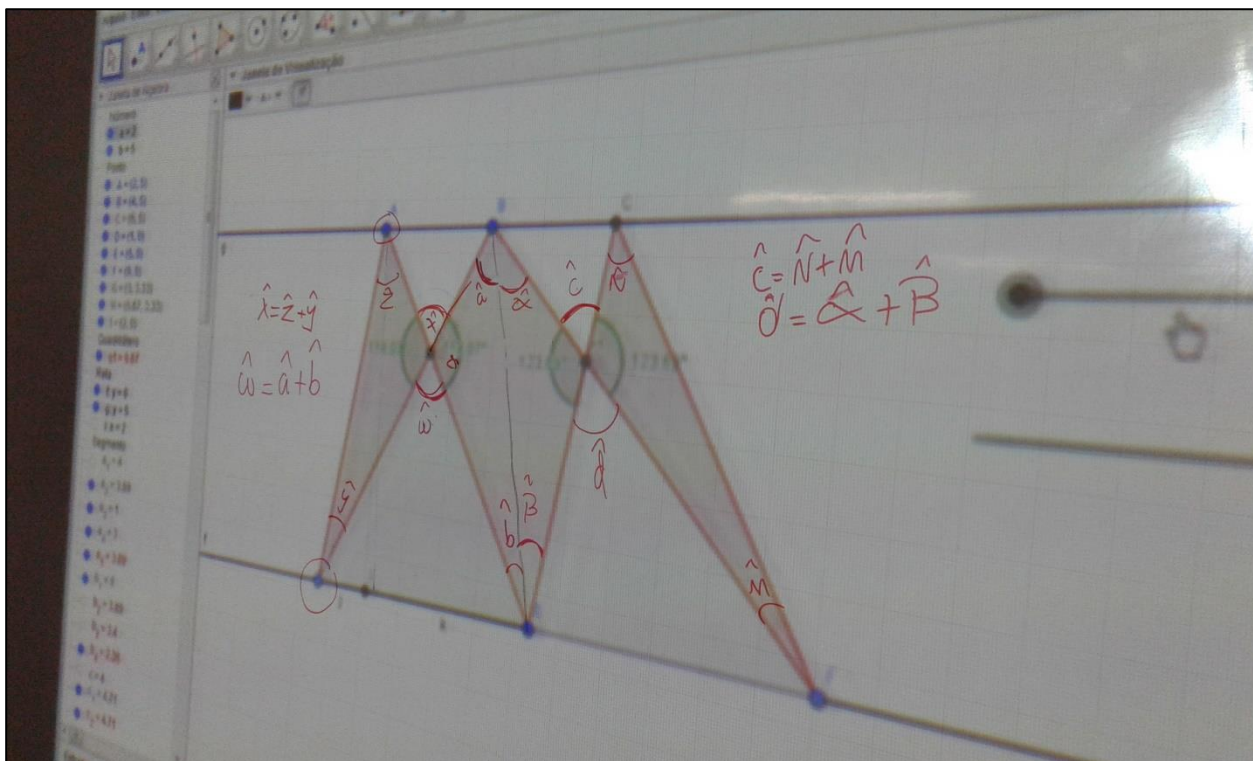
Pesquisadora: Duas afirmações e nenhuma justificativa. Sigam passo a passo, para verificar cada afirmação. Ok?

Aluno 1: Certo! Vamos analisar e tentar ver como fazer com a utilização do Geogebra.

Com o discurso do aluno 1, podemos observar que o referido aluno desenvolve uma intuição conjectural, pois segundo Fischbein (1987) existe uma representação do fenômeno de interesse, mas ainda não há uma justificativa formal.

Destacamos pormenores relevantes nas ações realizadas pelo aluno 1, com a mediação da pesquisadora durante o processo de resolução da SDO4, o aluno 1 desenvolve estratégias distintas das quais prevemos e descrevemos nas análises *a priori*, por exemplo, buscou aplicar o teorema do ângulo externo, como o objetivo de demonstrar a equivalência entre os triângulos (Figura 75).

Figura 75 – Estratégia apresentada pelos alunos 1 e 2.



Fonte: Autora (2018)

A seguir, apresentamos a transcrição da fala do aluno 1 que caracteriza esse momento registrado na imagem (Figura 75).

Pesquisadora: Então, justifique formalmente como caracterizar a relação entre as áreas?

Aluno 1: Ora, é fácil ver... É assim, se o ângulo $\hat{x}$ e $\hat{w}$ são opostos pelo vértice, eles possuem a mesma medida. Então, são ângulos congruentes. Mas, também são ângulos externos ao triângulo e o ângulo $\hat{x}$ é a soma dos ângulos $\hat{z}$ e $\hat{y}$. Sendo assim, o ângulo $\hat{w}$ é igual a soma do $\hat{a}$ e $\hat{b}$. Então, a soma dos ângulos $\hat{z}$ e $\hat{y}$ é igual a soma dos ângulos $\hat{a}$ e $\hat{b}$. Logo, os triângulos são congruentes e possuem a mesma área.

Ao analisar o discurso do aluno 1, verificamos um equívoco em relação ao conceito de congruência, pois o referido aluno enfatizou apenas um elemento do triângulo, os ângulos. A pesquisadora recordou nesse momento que dois triângulos são congruentes quando seus elementos (lados e ângulos) determinam a congruência entre os triângulos. Esse pormenor é fácil de ser verificado através da janela de álgebra do GeoGebra. A seguir, relatamos a discussão entre o aluno 1, aluno 2 e a pesquisadora.

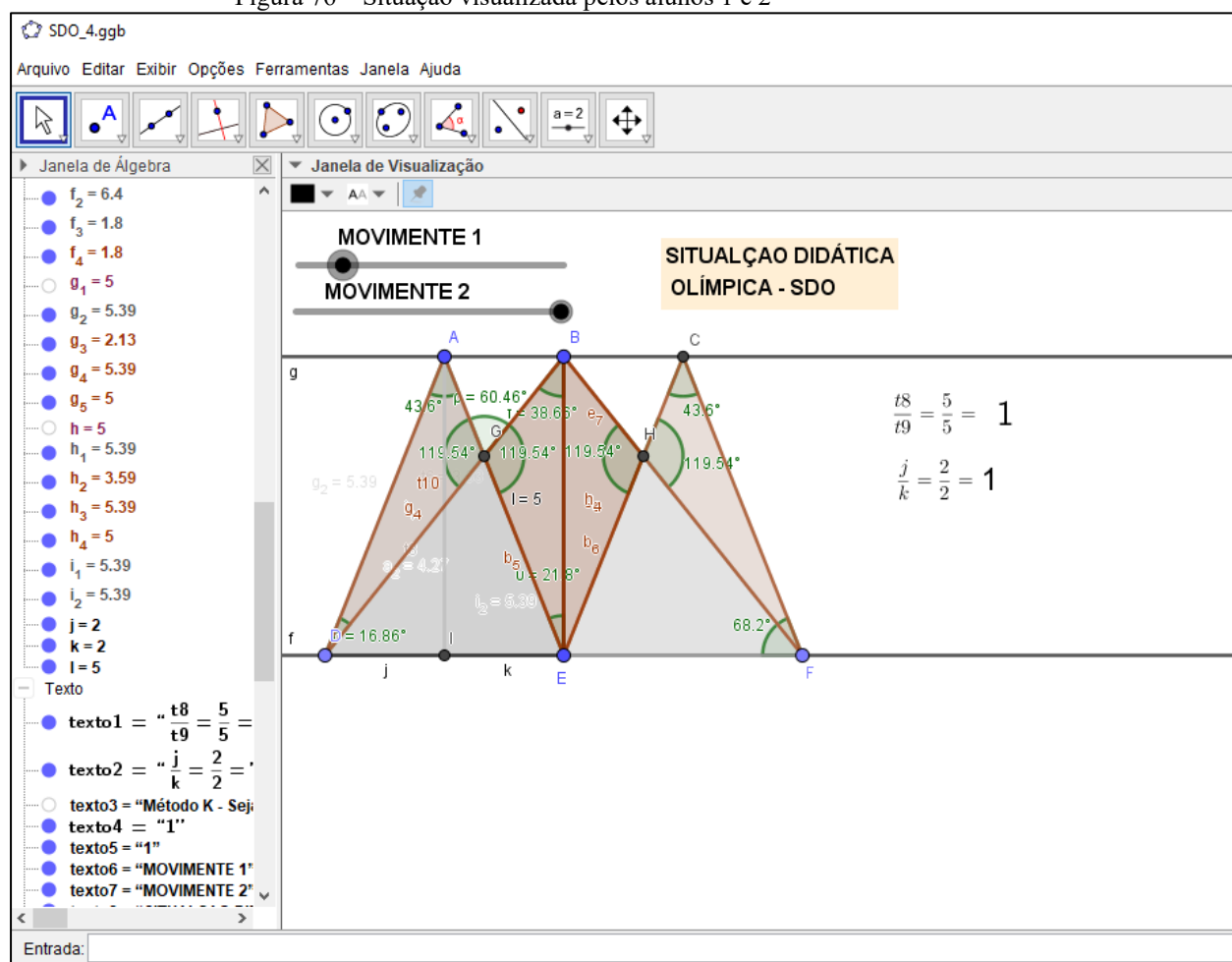
Pesquisadora: Há uma pequena confusão entre o conceito de congruência de triângulos e triângulos equivalentes. Vocês concordam?

Aluno 2: Professora, acho que meu colega tem razão. Pois se os triângulos são iguais, ou seja, como chama? Ah! Triângulos congruentes, eles possuem a mesma área.

Pesquisadora: Verifiquem se esses triângulos possuem a mesma área, através da construção, vocês podem comprovar ou refutar a afirmação.

A seguir apresentamos a imagem (figura 76) que apresenta a comprovação que os triângulos não são congruentes. Essa verificação foi feita pelos alunos 1 e 2 através da visualização da janela algébrica do *software* GeoGebra. A partir daí, seguiram na exploração dos elementos matemáticos que são relacionados com o conceito de área em um triângulo. Apresentamos a transcrição do diálogo entre a pesquisadora e os estudantes:

Figura 76 – Situação visualizada pelos alunos 1 e 2



Fonte: Autora (2018)

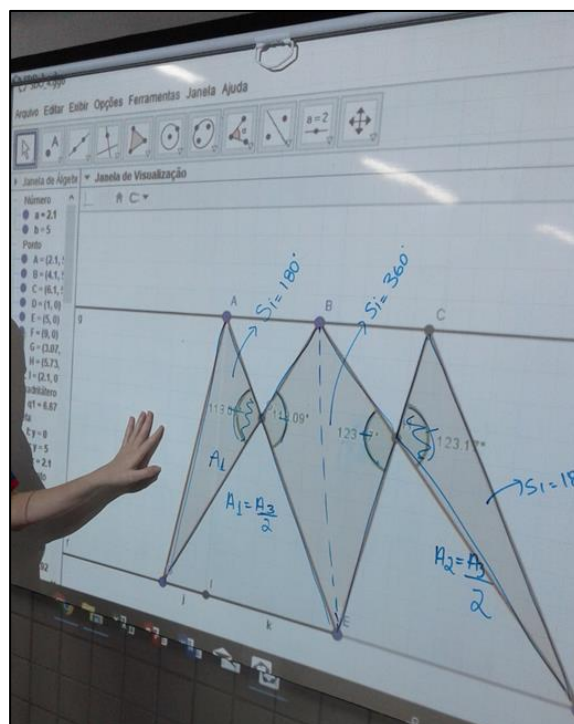
Pesquisadora: Agora, devem buscar uma outra estratégia. Então, busquem analisar os elementos envolvidos no cálculo de área de um triângulo.

Aluno 2: Para calcular a área precisamos da medida da altura e da base.

Aluno 1: Hum ...Vamos analisar! Já sabemos que área do quadrilátero é uma junção das áreas dos triângulos. Então...

Enfatizamos que a intuição conjectural entre os alunos permanece, exigindo que realizem uma ratificação de tal afirmação. Ao analisar os elementos relevantes para o cálculo da área (Figura 77), iniciam a elaboração de novas conjecturas.

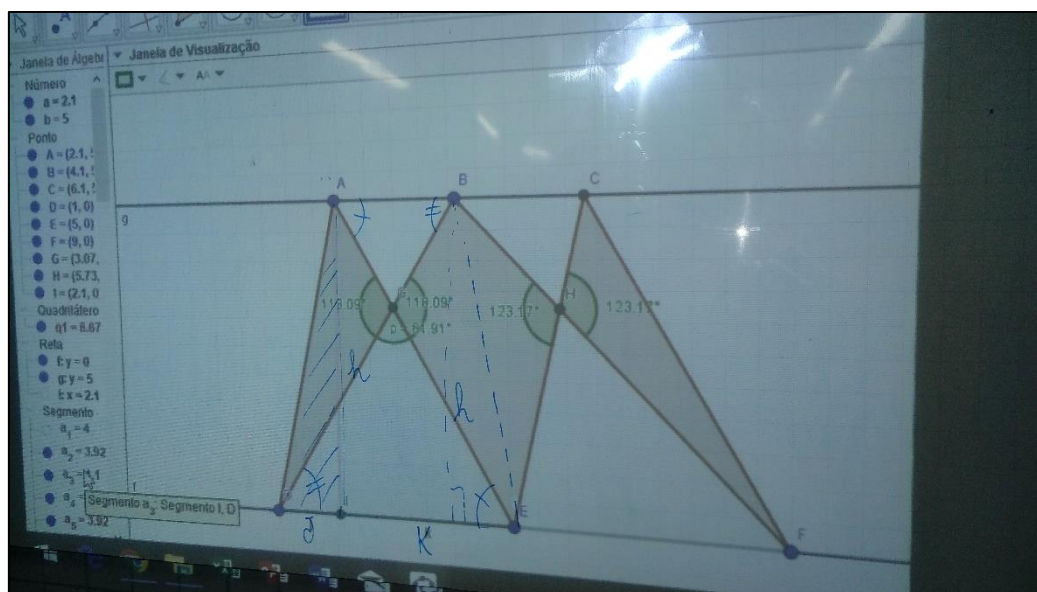
Figura 77 – Elaboração de conjecturas dos alunos 1 e 2



Fonte: Autora (2018)

Essa fase em que verificamos o surgimento das intuições intuitivas antecipatórias, corresponde a dialética de formulação estabelecida por Brousseau (1986). O aluno 2 também modeliza a SDO4 em busca de criar um próprio modelo conjectural que possibilite a solução do problema (Figura 77). Podemos verificar na imagem (Figura 78), o destaque de elementos que possam levá-los a solução do problema.

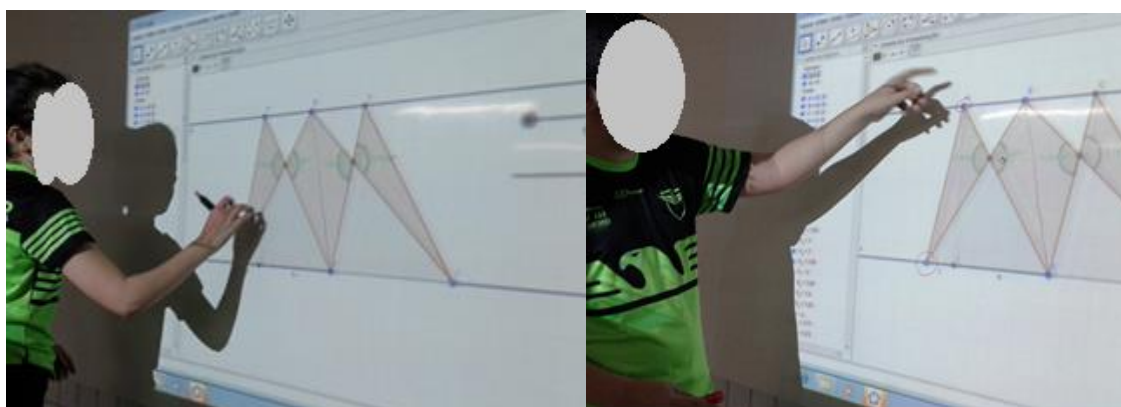
Figura 78 – Elementos identificados (altura e lados) pelos alunos 1 e 2



Fonte: Autora (2018)

Nesse sentido, os alunos 3, 4 e 5, apresentaram dados mais representativos em um menor intervalo de tempo em relação ao desenvolvimento dos raciocínios intuitivos manifestados pelos alunos 1 e 2 (Figuras 79) que seguem, trazemos o registro desse momento na dialética da ação e da formulação, respectivamente.

Figura 79 – Dialética da ação



Fonte: Autora (2018)

Os alunos 3 e 4 discutiram acerca da SDO proposta e verificaram que os elementos matemáticos a serem enfatizados deveriam ser a altura e a base do triângulo. Logo, percorreram uma estratégia mais conveniente em busca da solução da SDO4.

Verificamos a manifestação de intuições afirmativas, ao analisarmos a transcrição da fala dos alunos e da pesquisadora.

Pesquisadora: Pelo visto, já conseguiram ressaltar elementos que farão parte da solução da SDO.

Aluno 3: Professora, vimos que se focarmos na altura. Verificamos que todas as figuras possuem a mesma altura. Isso já é um ponto importante, né?

Pesquisadora: Sem dúvida! Mas, o que mais concluíram?

Aluno 4: Foi assim, movimentamos a construção verticalmente e horizontalmente, assim logo percebemos. Certo?

Pesquisadora: Mostre-me, por favor!

Aluno 4: Então, se para calcular a área do triângulo precisamos da base e da altura. E já sabemos que a altura é igual pra todas as figuras. Deve ser por aí, esse deve ser o caminho. Sendo assim, a área do quadrilátero é a soma da área dos triângulos.

Aluno 5: Eu também penso que esse seja o caminho. Se nos basearmos no cálculo da área de um triângulo, que é a base vezes a altura dividido por 2, né?

O discurso anterior descreve a dialética de formulação que é marcada pela elaboração de conjecturas (Figura 79) e pela seleção da estratégia mais adequada para solucionar o problema. Ademais identificamos na fala do aluno 4, intuições afirmativas e antecipatórias, simultaneamente. Observe que todas as ações desenvolvidas na dialética da ação foram apoiadas na visualização da modelização da SDO e no diálogo entre pesquisadora e alunos. A partir do momento que destacamos a elaboração e verificação de estratégias, estamos enfatizando fatos ocorridos na dialética da formulação.

As discussões transcritas caracterizam as duas primeiras fases previstas pela TSD, a dialética da ação e a da formulação, respectivamente. Destacamos que nessas duas fases, podemos inferir por meio das discussões transcritas que o software Geogebra é um recurso que proporciona o manifesto das intuições, pois a medida que o aluno realiza a modelização do problema, ele percebe que há diversas possibilidades de elaboração de estratégias, algumas mais imediatas que outras, para resolução do problema. Podemos mencionar que nessas fases da TSD, ação e formulação, o software Geogebra permitiu ao aluno desenvolver a sua capacidade de raciocínio, pois o aluno refletiu, simulou, verbalizou, elaborou estratégias e ao final criou suas próprias conjecturas. Nesse sentido, compreendemos que as categorias intuitivas de nosso interesse se mobilizam e aprimoram à medida que é fomentado o uso desse software.

A seguir, nos debruçaremos nos momentos que indicam características da dialética da validação, segundo Brousseau (1986) é o momento em que o sujeito deve apresentar a validade do modelo por ele criado. Desse modo, o aprendiz deve justificar a exatidão e a pertinência de sua estratégia e fornecer uma validação.

Vale ressaltar algo interessante que ocorreu no momento da experimentação com o aluno 5, em que a pesquisadora ao instigá-lo sobre os elementos identificados na simulação da SDO4, visualizados através da construção no Geogebra, de modo bem similar aos alunos 3 e 4 (ver argumentação anterior), ele recorda o cálculo da área de um triângulo, enfatizando que a medida da altura é a mesma para as figuras identificadas. Ademais, confronta sua argumentação com a modelização da SDO4 no *software* GeoGebra, movimentando horizontalmente e verticalmente a construção. Adiante destacamos sua representação simbólica, seguida de alguns trechos que envolveram esse momento.

Na sequência apresentamos o diálogo transcrito correspondente à situação anterior.

Pesquisadora: Então, você está convencido, de que a melhor estratégia para solucionar o problema é através do cálculo da área do triângulo?

Aluno 5: Sim professora, tenho certeza...

Pesquisadora: E o que mais você concluiu?

Aluno 5: Ora, é fácil perceber que a área do polígono BHEG é igual a soma da área dos triângulos AGD e CFH. No Geogebra, tá claro isso!

Pesquisadora: Como comprovar esse argumento? Se está certo ou não?

Aluno 5: É fácil ver, é assim... Os triângulos AED e BED possuem a mesma base, e também mesma altura. Portanto, possuem mesma área. Se retirarmos a área comum aos dois triângulos, percebemos que os triângulos AGD e BEG possuem a mesma área. E isso também, vale para o outro lado. Aplico a mesma ideia para os triângulos BFE e CFE. Por isso, posso concluir o que falei anteriormente.

Pesquisadora: Ok, você está certo!

Aluno 5: Percebi analisando o movimento da figura tanto verticalmente como horizontal. Sabia que tinha alguma coisa a ver com isso.

Pesquisadora: Você pode descrever/caracterizar o seu raciocínio com uma linguagem matemática mais formal e adequada?

Aluno 5: Sim, professora. Vou escrever todo o raciocínio aqui.

Destacamos outro fato relevante, nos trechos citados, o aluno 5 manifestou uma concepção diferente dos demais alunos, ele antecipou as fases previstas na TSD, ou seja, temos nesse momento passagens de validação, em que segundo Brousseau (1986), o aluno confronta a modelização da SDO4 com o analítico, e ao final percebe que a construção criada no *software* GeoGebra representa o modelo analítico e assumindo os registros de intuição, ele primeiramente manifesta intuições afirmativas que o conduz a manifestação de intuições antecipatórias, pois claramente descobre o elemento solução.

Enfatizamos que embora os alunos 1 e 2, tenham percorrido trajetórias de elaboração de conjecturas distintas dos alunos 3, 4 e 5, as estratégias formuladas convergiram para o mesmo raciocínio. A seguir temos uma representação do momento da modelização da SDO4 com o *software* GeoGebra, e os argumentos expostos pelos alunos 1 e 2, caracterizando a dialética da

validação. Nesse momento os alunos 1 e 2 manifestaram uma intuição antecipatória, validando a estratégia adotada e demonstrando o resultado encontrado.

Aluno 1: Professora é assim, percebemos que a área do triângulo 1 é $\overline{DE} \cdot b$ dividido por 2 que é igual a área do triângulo 2. Ok?

Pesquisadora: Você pode complementar o raciocínio do colega?

Aluno 2: Hum... Vejamos, se esses triângulos possuem a mesma área, se retirarmos a área do triângulo do meio. Concluímos que os triângulos AGD e BGE têm a mesma área.

Pesquisadora: Muito bem! Mas, a área que vocês pretendem encontrar é a do quadrilátero BHEG. Correto?

Aluno 1: Sim, professora. Entendemos isso.

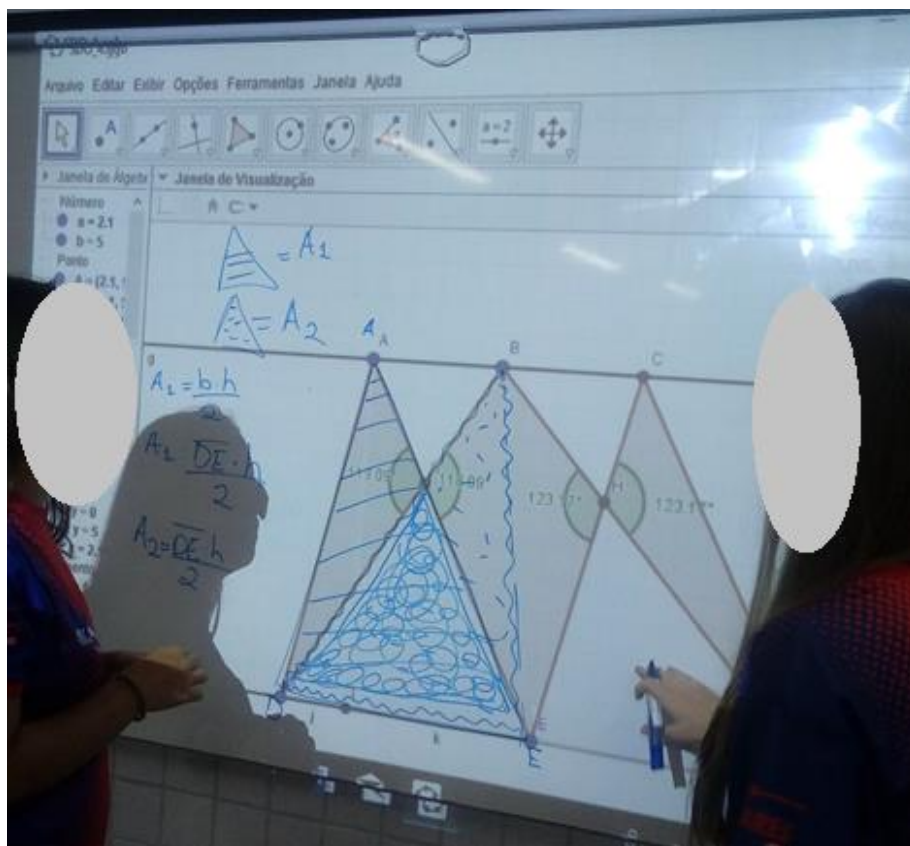
Aluno 2: Então, o mesmo raciocínio podemos usar para descobrir a área do triângulo BHE.

Pesquisadora: O que concluíram?

Aluno 2: Conseguimos assim, comprovar que a área do quadrilátero BHEG é igual a soma das áreas dos triângulos AGD e CHF.

O discurso relatado anteriormente pode ser verificado nas imagens (Figura 80). As imagens (Figura 81 e 82) apresentam a ratificação dos argumentos dos alunos 3 e 4, respectivamente.

Figura 80 – Momento de confrontação entre o modelo visual e o modelo analítico



Fonte: Autora (2018)

Figura 81 – Produção escrita do aluno 3 na fase de validação

$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} A_1 = \frac{DE \cdot H}{1} & A_3 = \frac{EF \cdot H}{1} \\ A_2 = \frac{DE \cdot H}{1} & A_4 = \frac{EF \cdot H}{1} \end{array}$$

Fonte: Autora (2018)

Figura 82 – Produção escrita do aluno 4 na fase de validação

$$\begin{array}{ll} \textcircled{2} A_2 = \frac{DE \cdot H}{2} & A_3 = \frac{EF \cdot H}{2} \\ A_2 = \frac{DE \cdot H}{2} & A_4 = \frac{EF \cdot H}{2} \end{array} \quad \boxed{\frac{J}{K}}$$

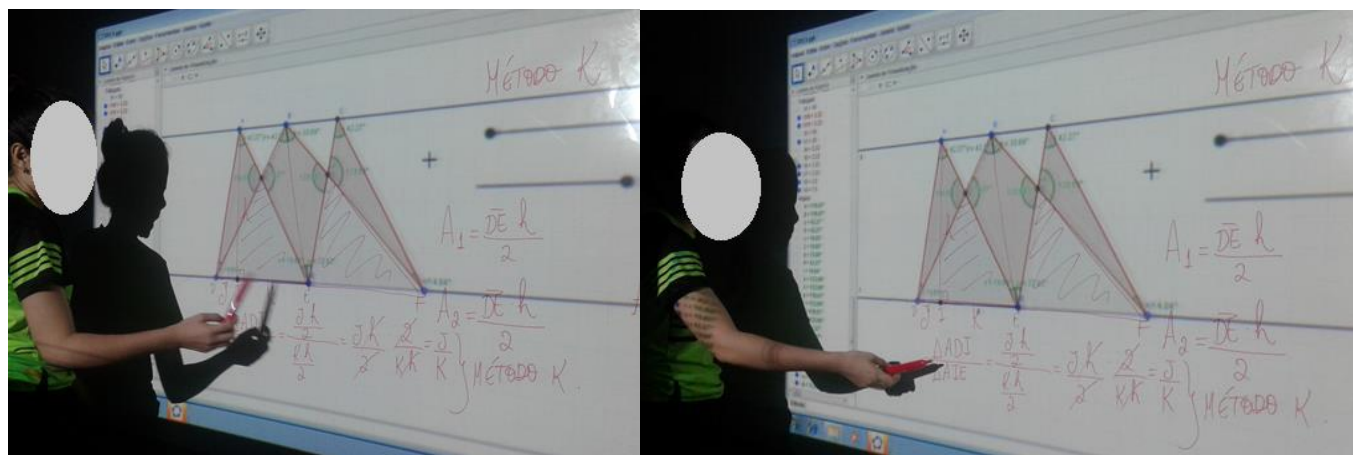
Fonte: Autora (2018)

Realmente é impressionante mesmo, com o Geogebra consigo ver exatamente a conclusão que acabei de obter, claro que com o software fica muito mais interessante, por que fazemos as simulações e conseguimos compreender o teorema que devemos usar no problema. Bem diferente do que estamos habituados de ver, o professor demonstra e pronto (aluno 5).

Para concluir a SDO4, a pesquisadora registra momentos em que o aluno 5 demonstra o teorema do co-lado que é comumente chamado de método K, apresentamos esse momento nas imagens a seguir (figura 83).

Figura 83 – Momentos da demonstração do método K

Fonte:



Fonte: Autora (2018)

Para concluir, a pesquisadora fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto do saber. Nos momentos finais da sua mediação, indica as principais propriedades formais que asseguram a consistência das operações e manipulações executadas nas fases anteriores (ALVES, 2016-b). Na perspectiva da TSD, exploramos a generalização do modelo matemático que depende dos níveis de cognição dos alunos relativa aos níveis de rigor e abstração (ALVES, 2012). A pesquisadora descreve o método K, utilizando os elementos envolvidos na modelização da SDO4.

O Método K (Figura 84) – Sejam D, I e C três pontos colineares distintos. Se A é um ponto que não está na reta $\overline{DI}$, então

$$\frac{S_{AIE}}{S_{ADE}} = \frac{\overline{IE}}{\overline{DI}}$$

Ou, se $t \in \mathbb{R}$ é tal que $\overline{IE} = t \cdot \overline{DI}$, então $S_{AIE} = t \cdot S_{ADE}$.

Vale ressaltar que as fases previstas pela TSD, nos possibilitaram uma mediação que com o apoio da visualização, simulação e estruturação de conjecturas, como componentes determinantes na identificação de *intuições* verificadas através do *software*, foi possível uma abordagem diferenciada aos sujeitos de nossa pesquisa e, por outro lado, os dados interpretados nos auxiliaram na questão de investigação que assumimos no início desta pesquisa.

6. ANÁLISE A *POSTERIORI* E VALIDAÇÃO DA ENGENHARIA

Lembramos que o objetivo de uma análise a posteriori é “relacionar as observações com os objetivos definidos *a priori* e estimar a reprodutibilidade e, também, a regularidade dos fenômenos didáticos identificados” (ALMOULOU, 2007, p. 177). Em nossa pesquisa, assumindo os pressupostos da ED, a reprodutibilidade repousa sobre os elementos identificados na fase da experimentação e tendem a se manifestar em outra sessão de ensino. Vale destacar que em relação a regularidade, temos a preocupação de antever as interações e informações obtidas a partir das variáveis micro-didáticas.

Segundo Robinet (1984) o processo de validação que deve ser discutido em pesquisas que assumem os pressupostos de uma ED é essencialmente fundamentado na reprodução, ou, na mediação do professor durante a fase de institucionalização é essencial e, intervenções diferentes podem suscitar comportamentos diferentes nos alunos. Sendo assim, Robinet (1984) faz referência, ao caráter de previsibilidade/controlado dos fenômenos que discutimos nas últimas seções.

Em contrapartida, enfatizamos que não pretendemos levar em consideração todos os fenômenos decorridos, visto que a nossa pesquisa envolve um esquema experimental, no qual mobilizamos relações entre pessoas e o conhecimento matemático. Desse modo, elegemos tão somente os aspectos intimamente relacionados com nossa investigação, objetivos e hipóteses de pesquisa.

Evidenciamos a afirmação de Almouloud (2007) quando diz que a análise a posteriori de uma sessão é “conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos e que contribui para a melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre as condições da transmissão do saber em jogo”. Sendo assim, assumimos como referência uma análise feita à luz da análise *a priori*, dos fundamentos teóricos, das hipóteses e da problemática da nossa pesquisa.

No que concerne a validação da Engenharia Didática, Artigue (1996) esclarece que a ED permite ao pesquisador mergulhar no seio da complexidade do seu objeto de estudo. Desse fato, apesar de possíveis entraves da construção, tal metodologia permite deixar escapar certos fenômenos observáveis em trabalhos naturalistas de classes. Mas coloca em evidência os fenômenos didáticos que possivelmente escapam de metodologias externas.

Artigue (1995) acrescenta ainda que há uma distinção entre a validação interna de uma ED, de uma validação estatística, que envolvem dados relativos de uma amostra maior de sujeitos. Artigue alerta para possíveis distorções, que podem se evidenciar ao término da validação.

Vale ressaltar que a nossa pesquisa assumiu a perspectiva de Laborde (1997) para a realização de uma validação interna, balizada nos seguintes pressupostos:

- (i) Descrição do aluno, das condutas e os tipos de produções majoritárias da turma, estudo de sua evolução ao decurso da experimentação e adequação tendo em vista os alunos;
- (ii) Seleção de situações-problemas julgadas significativas, relativamente às quais as produções dos estudantes são produzidas;
- (iii) Seguir algum ou alguns alunos durante longo tempo, com o intuito de observar a sua evolução.

Laborde (1997) nos fornece os seguintes elementos para uma validação externa: (i) Comparação de produções dos estudantes obtidas antes e depois da aplicação da sequência, através de entrevistas e/ou questionários; (ii) comparação das produções dos estudantes externos ao tipo de experimento e sequência estruturada.

6.1. Validação Interna

Nessa fase da ED, amparamo-nos na perspectiva de Laborde (1997) e, assumimos os pressupostos dessas duas etapas pouco disseminadas nas pesquisas/estudos da vertente da DM, verificamos que, em relação ao item (i), no decorrer da nossa investigação, do trabalho preliminar, sensibilização e postura dos alunos que estão a se preparar para as olimpíadas de matemática, as condutas gerais dos aprendizes se mostraram evidentes ao elemento fundamentado na visualização através da modelização da SDO, como elemento impulsionador das ações realizadas pelos estudantes e, conseqüentemente, das elaborações de conjecturas e validação das estratégias, nas fases decorrentes da TSD.

Destacamos que em relação ao item (ii), podemos constatar que a seleção, construção no *software* GeoGebra e descrição de cada SDO apresentada neste trabalho, tomamos como referência as características na abordagem do material didático destinado as olimpíadas de matemática. No

que concerne à identificação dos elementos de transição e elementos de ruptura, verificamos que os elementos constituintes das SDO'S mobilizaram as categorias intuitivas de nosso interesse.

Por fim, no que concerne ao pressuposto (iii) ressaltamos que desde o início da investigação, a nossa intenção não foi seguir diacronicamente os estudantes, não designamos preocupações na constatação de uma real aprendizagem que, envolveria também, a necessidade de seguir e acompanhar os participantes, em outros contextos de aprendizagem. Porém, verificamos por parte dos alunos que em determinados momentos em que não foi utilizado o software Geogebra para resolução de problemas, demonstraram interesse a utilizar essa ferramenta, com indagações no decorrer da aula.

6.2. Validação Externa

Em relação aos pressupostos assumidos referentes a validação externa, temos que o item (i) Comparação de produções dos estudantes obtidas antes e depois da aplicação da sequência, através de entrevistas e/ou questionários, não aplicamos questionários ou entrevistas. Contudo, podemos constatar nas análises prévias, como os dados relacionados na fase de experimentação, a evidência das concepções dos alunos submetidos a uma abordagem diferenciada e com exploração de elementos comumente negligenciados em aulas tradicionais.

Analisemos o pressuposto relativo ao item (ii) comparação das produções dos estudantes externos ao tipo de experimento e sequência estruturada, destacamos que não intencionamos desenvolver interesse pelo estudo comparativo envolvendo um grupo submetido ao tipo de abordagem proposta nessa investigação, com outro grupo de alunos. Nesse sentido, verificamos que determinadas concepções modificadas tendo em vista a exploração da SDO através do *software* GeoGebra, se mostram inviáveis de serem exploradas, na medida em que não aplicamos a tecnologia atual e suas possibilidades, e limitamo-nos as resoluções de problemas de forma analítica e procedimental.

Dessa forma, recordamos Brousseau (1986, p.4) ao afirmar que

Esta reprodutibilidade implica uma descrição, não ingênua, de todas as condições observadas, mas seletivas e que repousam sobre uma escolha pertinente às variações possíveis de efeitos reconhecidos. A reprodutibilidade repousa, então, na compreensão dos fenômenos essenciais, isto é, do tecido de relações atestadas, constituindo a teoria e permitindo se escolher as condições de ensino, de explicar seus efeitos e de prevê-los.

Sendo assim, Brousseau busca expressar a importância de realizarmos um experimento científico controlado, estruturado e sistemático, com o objetivo de identificar os elementos invariantes, na condição em que os pressupostos balizados pela ED, possa garantir a replicabilidade, não obsolescência, e a reprodução das situações didáticas.

A seguir, apresentamos os dados mais relevantes dessa investigação, assim como, enfatizaremos nossa questão de investigação, ressaltando os objetivos definidos no início da nossa pesquisa.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino das Olimpíadas de Matemática reflete a ausência de um elemento definidor para o estudo da matemática e que não pode ser desconsiderado, refere-se ao fato da modelização de situações estruturadas destinadas às aulas olímpicas, planejadas de maneira sistemática, a ponto de, mobilizar os raciocínios e os conhecimentos matemáticos ao longo de uma sequência didática, que permita a sua replicação e reprodução para um grupo ampliado de estudantes.

A partir da revisão bibliográfica demarcada por análise dos principais compêndios e dissertações que tratam da Geometria no âmbito das Olimpíadas de Matemática, podemos observar duas características no processo de preparação dos alunos para as competições em matemática: os estudantes apresentam dificuldades de compreensão dos conceitos geométricos, devido as aulas restringiram-se a resolução de fichas de exercícios, e outro fator relevante é a não aplicabilidade de situações didáticas nas aulas de olimpíadas, que relacionam o contexto teórico desse saber com alternativas metodológicas.

Diante dessa revisão bibliográfica, verifica-se uma carência em relação a pesquisas/estudos que abordem de maneira alternativa a geometria olímpica, mas especificadamente a Geometria Plana, que tratam da visualização como meio de compreender esses conceitos geométricos. Dessa forma, essa falta de pesquisas sobre a aplicabilidade de metodologias no ensino das olimpíadas de matemática, motivou a realização desta pesquisa, mais especificadamente, amparada pela incursão do *software* GeoGebra, pois variados estudos/pesquisas destacam sua potencialidade no ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. Todavia, nenhuma investigação ainda havia sido desenvolvida acerca do caráter de complementaridade entre o ensino voltado às olimpíadas de matemática amparado pelo *software* Geogebra.

Nesse sentido, estruturamos situações didáticas (SDO), em que teve como elemento impulsionador o *software* GeoGebra, em que destacamos que os alunos, por meio das situações propostas nessa dissertação, os alunos apoderaram-se dos conceitos geométricos, pois as fases de ação, formulação e validação evidenciaram a mobilização desses conhecimentos, na fase experimental desse estudo.

A modelização realizada pelo *software* GeoGebra fomentou a manifestação das categorias intuitivas no contexto das olimpíadas de Matemática, ou seja, os alunos desenvolveram a

visualização nas construções apresentadas nesse *software*, para compreender, validar e demonstrar os teoremas relativos a cada SDO.

Dessa forma, a presente investigação teve como objetivo principal a identificação e registro das categorias intuitivas no contexto olímpico. Portanto, para que possamos assegurar o leitor de um melhor entendimento acerca da nossa pesquisa, realizaremos nossas considerações finais sobre a fundamentação teórica e metodológica utilizada, sobre a fase experimental e os principais resultados.

Fundamentação teórica e metodológica

Primeiramente, apresentamos o nosso entendimento acerca da metodologia de ensino aplicada na nossa investigação, a Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1986), em que ressaltamos o seu caráter de importância, apesar dos alunos do ensino fundamental e/ou médio não estarem habituados a trabalhar com situações que articulem os conceitos matemáticos, de modo, a mobilizar seus conhecimentos prévios para a tomada de decisão na estruturação e validação de estratégias, ao passo que o conhecimento muitas vezes é transmitido de modo pronto e acabado, podemos verificar que a aplicação dessa teoria na elaboração das situações didáticas olímpicas da nossa investigação, possibilitou um enfoque diferenciado, voltado às olimpíadas de matemática, tendo o intuito de tornar o aluno protagonista do seu próprio conhecimento.

Dessa forma, ao elaborarmos as situações, conforme os pressupostos da TSD, selecionamos problemas oriundos de provas de olimpíadas de matemática, fazendo o caminho inverso da metodologia que é comumente aplica em turmas olímpicas. No que concerne ao conteúdo, as situações didáticas, referem-se ao estudo da geometria plana, em que foi necessário a mobilização de alguns conceitos geométricos trabalhados no contexto olímpico.

As situações foram apresentadas de forma que sua resolução se deu por estratégias estruturadas e realizadas pelos alunos.

Em seguida para que verificássemos/mediássemos a trajetória de elaboração e validação de estratégias dos alunos, assumimos os pressupostos que remete ao caráter da manifestação de categorias intuitivas, ao decurso das situações modelizadas através do software Geogebra, foi necessário à utilização da teoria das categorias intuitivas de Efraim Fischbein (1987), teoria de análise, em que possibilitou-nos maneiras de atenuar os efeitos de uma aprendizagem balizada na

intuição, possibilitando-nos compreender como os estudantes manifestam seus raciocínios ao decurso das resoluções de cada SDO proposta.

Ademais, utilizamos a Engenharia Didática de Artigue (1988) como metodologia de pesquisa, em que abordamos a descrição das suas fases – análises prévias, análises *a priori*, experimentação, análise *a posteriori* e validação. A engenharia didática, vista como metodologia de pesquisa, é caracterizada por um esquema experimental com base em “realizações didáticas” em sala de aula, isto é, na construção, realização, observação e análise de sessões de ensino (ALMOULOUD, 2007). Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e pelos modos de validação que lhe são associados: a comparação entre análise *a priori* e análise *a posteriori*. Esse pormenor é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste.

Com relação a primeira fase dessa metodologia, apresentamos, uma análise dos principais compêndios e pesquisas/estudos no âmbito das olimpíadas de matemática, esse estudo nos possibilitou compreender a maneira como os conceitos geométricos são explorados, assim como os conhecimentos relacionados.

Na análise *a priori* das situações didáticas, segunda fase prevista pela ED, realizamos a transposição didática de cada SDO, representando-as no *software* GeoGebra, identificamos as variáveis microdidáticas, prevemos as possíveis ações dos estudantes, formulações e validações que podem ser apresentadas pelos alunos e, em seguida, as institucionalizações locais e globais. Na análise *a posteriori*, validamos ou não nossas hipóteses determinadas na análise *a priori*, através da coleta de dados no momento da experimentação.

Principais Resultados

Conforme as situações apresentadas, verificamos que os estudantes se envolveram na resolução de cada SDO. Exploramos e abordamos, a sua postura no agir, na observação e na análise de modo pormenorizado, quando interagiram com a situação. Na dialética de ação, os alunos através do *software* GeoGebra mobilizaram os seus conhecimentos prévios e validaram novos conhecimentos. Ressaltamos que a modelização de cada SDO se tornou um elemento impulsionador nas dialéticas de ação, formulação e validação, percebemos que os alunos não ficaram limitados apenas ao trato analítico, já definido, mas, foram capazes de elaborar as suas próprias conjecturas.

Na primeira SDO, os estudantes construíram e validaram o Teorema de Pitot, destacamos que o aluno 3 elaborou e validou uma estratégia diferenciada daquela prevista pela pesquisadora na análise *a priori*.

Na segunda SDO, na qual trabalhamos o conceito de semelhança de triângulos e as relações métricas no triângulo retângulo, os alunos desenvolveram o processo de visualização através da modelização da situação didática no *software* Geogebra, identificaram o caso de semelhança dos triângulos e demonstraram a relação métrica que corresponde ao cálculo da média geométrica entre duas grandezas.

No que concerne a SDO3, os alunos preferiram trabalhar em grupo, identificamos entre os grupos a manifestação de dificuldades semelhantes durante o processo de resolução, os estudantes tentaram solucionar o problema através de fórmulas, e surpreenderam-se quando perceberam que poderiam elaborar estratégias em que utilizariam apenas a decomposição de figuras através da visualização/modelização do problema.

Na quarta situação, o aluno 5 manifestou uma concepção diferente dos demais alunos, ele antecipou as fases previstas na TSD, ou seja, identificamos momentos que marcaram a dialética da validação, em que o aluno confronta a modelização da SDO4 com o analítico, e ao final percebe que a construção criada no *software* GeoGebra representa o modelo analítico e assumindo os registros de intuição, primeiramente manifesta intuições afirmativas que o conduz a manifestação de intuições antecipatórias, pois claramente descobre o elemento solução.

Após a validação das estratégias assumidas pelos alunos na finalização de cada SDO, institucionalizamos de maneira local, ou seja, a partir de suas produções orais e escritas, classificamos, sintetizamos e estabelecemos esses dados através da nossa teoria de análise, de forma, a relacionar os resultados coligidos em momentos distintos do desenvolvimento de cada SDO, com o intuito de estabelecer relações entre as produções dos estudantes e o conhecimento matemático, ou seja, fixamos convencionalmente o novo saber.

Verificamos que o *software* GeoGebra contribuiu para a manifestação e identificação das categorias intuitivas, no estudo da Geometria no contexto das olimpíadas de matemática, uma vez que o aluno, visualiza, simula, conjectura e valida as propriedades geométricas envolvidas no problema, principalmente se essas propriedades não são reconhecidas pelos estudantes. A pesquisadora ao realizar uma transposição didática adequada através da utilização das tecnologias (*software* GeoGebra) suscitou abordagens distintas entre os alunos, evidenciando as categorias

intuitivas de Fischbein. Verificamos que o emprego do *software* GeoGebra permitiu a exploração interativa de representações dos elementos geométricos, possibilitou aos alunos conjecturar, validar e demonstrar conclusões. Ao resolver um problema, há diversas estratégias que podem levar a solução, as quais com a intervenção do professor no momento adequado, os alunos têm a possibilidade de selecionar a melhor estratégia. Ademais, na dialética da validação os próprios alunos construíram a representação geométrica e verificaram o teorema envolvido em cada SDO, relacionando elementos geométricos com os elementos algébricos – visualizados na janela de álgebra.

Constatamos que os alunos não apresentaram entraves em utilizar os comandos necessários do *software* GeoGebra. Em contrapartida, enfatizamos alguns pormenores que são relevantes em relação a adaptação de *softwares* em sala de aula, ou seja, as ferramentas tecnológicas exigem um determinado empenho metodológico do professor, temos a possibilidade de mobilizar conhecimentos produzidos a partir de uma dialética aplicada por um grupo de alunos, as respectivas posturas e interações entre professor e o conhecimento matemático. Dessa forma, adotamos uma postura similar à de Rogalski (1990, p. 8), quando afirma que é relevante para a formação do professor, assumir objetivos de ensino que utilizem técnicas e problemas, com o intuito de promover uma investigação sobre uma situação didática.

Podemos destacar que através da análise praxeológica do material didático, verificamos que muitas dificuldades enfrentadas pelos alunos na compreensão e representação de alguns conceitos geométricos é devido a ausência de alternativas metodológicas durante o estudo da Geometria.

Dessa forma, com uma mediação metodológica amparada pelo uso da tecnologia, verificamos pela análise das situações que levamos os estudantes a percorrer uma trajetória que o permite relacionar as representações geométricas e a compreensão das propriedades formais de cada teorema, sendo assim, possibilitamos a mobilização de um conhecimento implícito e local, de cunho intuitivo para a exploração de situações didáticas.

Perspectivas Futuras

Com o crescente interesse das escolas públicas e privadas em participarem das competições olímpicas em Matemática, exige-se cada vez mais um papel atuante do professor e do aluno durante o processo de ensino e aprendizagem em matemática. Tendo em vista essa perspectiva, debruçamo-

nos nessa investigação, em que apresentamos propostas metodológicas que podem ser replicadas em outros temas relacionados ao contexto olímpico.

Nessa investigação destacamos a descrição de quatro SDO e a análise das condutas gerais dos sujeitos que podem proporcionar maiores conhecimentos metodológicos, sistemáticos e cognitivos relacionados a uma preocupação com o fenômeno de reprodutibilidade dos pressupostos amparados pela ED. Nesse sentido contribuindo positivamente para o ensino e pesquisa na área da Educação Matemática, podendo ser a motivação de pesquisas futuras.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Paraná: Editora da Universidade Federal do Paraná, 2007.

ALVES, José S. W. **O Impacto da Olimpíada de Matemática em Alunos da Escola Pública**. 2010. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática - PROFMAT). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC.

ALVES, Francisco R. V. **Insight: descrição e possibilidades de seu uso no ensino do cálculo**. VIDYA, v. 32, n. 2, p.149-161, jul. /dez., 2012 - Santa Maria, 2012.

ALVES, Francisco R.V. **Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis**. 2011. 353 p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade federal do Ceará, Fortaleza, 2011. Disponível em: < > Acesso em: 15/11/2017.

ALVES, Francisco R. V. **Didática de matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva**. Interfaces da educação, v.7, n.21, p. 131-150, Paranaíba, 2016a.

ALVES, Francisco R. V. **Engenharia Didática para a generalização da sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura**. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.18, n.1, pp. 61-93, 2016b

ALVES, Francisco R. V. **EXPLORING L'Hospital Rule with the Geogebra**. 2013, 21-30. GGIJRO – Geogebra International Journal of Romania, 2013.

ALVES, Francisco R. V. **Engenharia Didática para o Teorema da Função Implícita: análises preliminares e a priori**. Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia. vol 7, núm. 3, set-dez.2014.

ARAÚJO, Renilson R. **Perfil de desempenho dos alunos de ensino médio da unidade integrada Henrique Rocha, Tutóia-MA, frente a primeira fase da OBMEP**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT). Universidade Federal do Piauí (UFPI).

ARTIGUE, Michelle. Ingénierie didactique. In: Brun, J. **Didactiques des Mathématiques**. Paris : Délachaux et Niestle, pp. 243-263, 1995a.

ARTIGUE, Michelle. Ingenieria Didáctica. Artigue, Michelle ; Douady, Régine ; Moreno, Luis & Gomez, Pedro. In: **Ingeniería didáctica en Educación Matemática**. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, pp. 33-61, 1995b. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigue1995Ingenieria.pdf>. Acessado em: 20/02/2017.

BADARÓ, Ronei L. **Do zero às medalhas: orientações aos professores de cursos preparatórios para olimpíadas de matemática**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT). Universidade Federal da Bahia (UFBA).

BROUSSEAU, Guy. Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. In: BROUSSEAU, Guy. **Théorie des situations didactiques** (pp. 115-160). Grenoble La Pensée Sauvage, 1998.

BROUSSEAU, Guy. **Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques**. Mathematics. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 1986.

BONFIM, Adenilson P. **Produção e Aplicação de Material Didático para Estudantes Iniciantes em Olimpíadas de Matemática**. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT). Universidade Federal do Pará.

BRAGANÇA, Bruno. **Olimpíada de Matemática para a Matemática avançar**. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT). Universidade Federal de Viçosa.

BROUSSEAU, Guy. **Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques**. Mathematics. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 1986.

BROUSSEAU, Guy. Introdução ao Estudo das Situações Didáticas. Editora Ática, 2008.

CALAZANS, Marcos Vinicius F. **Proposta de implantação do centro preparatório para olimpíadas de matemática**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT). Universidade Estadual de Santa Cruz.

CARVALHO, Márcio M. **Resolução de problemas matemáticos olímpicos: uma abordagem aritmética modular**. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT). Universidade Federal do Vale do São Francisco

CARVALHO, Miranda de. **Resolução de problemas matemáticos olímpicos: uma abordagem aritmética modular**. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT). Universidade Federal do Vale do São Francisco.

CARVALHO, Valessa Z.F. S. **Funções convexas com aplicações em problemas de olimpíadas de matemática**. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT). Universidade Federal do Piauí.

CARVALHO JÚNIOR, Augusto L. L. **Material Multimídia: Resolução comentada de algumas questões do nível 3 da OBMEP sobre geometria**. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT). Universidade Federal do Pará.

COCCO, Eliane Maria. **Olimpíada de Matemática das Escolas Públicas e avaliação em larga escala: possíveis interlocuções**. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões. COMPETIÇÃO MATEMÁTICA DO RIO GRANDE DO NORTE.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9: Geometria Plana**. 7. Ed. São Paulo: Atual Editora, 2008.

FERREIRA, F.A. **Demonstrações em geometria euclidiana: o uso da sequência didática como recurso metodológico em um curso de licenciatura de matemática**. Dissertação. PUC – Minas. Belo Horizonte – 2008.

FOMIM, Dimitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG Ilia. **Mathematical Circles – Russian Experience**. Mathematical World. vol 7. 1993.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar. Vol.1 Conjuntos e Função**. 3.ed. São Paulo: Atual Editora, 1977.

IGLIORI, S.B.C. **A noção de Obstáculo Epistemológico e a Educação Matemática**. In Educação Matemática Uma Introdução. Org. Silvia Machado. EDUC. São Paulo. 1999.

JACON, L.S.C; KALHIL, J.B. **O professor formador e as competências em tecnologia de informação e comunicação: um estudo sobre quais recursos computacionais estes profissionais utilizam na elaboração do seu material didático.** AMAZÔNIA - Revista de Educação em Ciências e Matemáticas V.8 – nº 15 - jul. 2011/dez. 2011, p.27-44.

LACERDA, Carlos Wilson Pimentel de. **Sequências e séries: conhecendo e construindo estratégias de abordagem.** 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT). Universidade Federal Rural de Pernambuco.

LAGUERRE, Eric. **Une ingenierie didactique pour l'apprentissage du theoreme de Thales au college.** Education. Universite Paris-Diderot - Paris VII, 2005. Français

LITVINENKO, V e MORDKEVICA, A. **Solving Problems in Algebra and Trigonometry.** Mir Publishers Moscow. 1987

LIDSKI, V.; OVSIANIKOV, L.V.; TULAIKOV, A.N.; SHABUNIN, M. I. **Problemas de Matematicas Elementales.** 1978. 3ª Ed. Moscu. Editorial Mir.

LORENZATO, Sérgio. **Por que não ensinar Geometria?** A educação matemática em revista. Geometria. Blumenau, número 04, p.03-13, 1995. Disponível em: <www.sbempaulista.org.br/epem/anais/Comunicacoes_Orais%5Cco0109.doc>. Acesso em 11 de janeiro 2017.

MARGOLINAS, C. **Dévolution et intitutions: deux aspects antagonistes du rôle du maître.** 1995. 342-347. Comiti, C.; Bessot, M.P. Didactiques des disciplines scientifiques et formation des enseignants, 1995.

MARTINS, Ronald Alexandre. **Colinearidade e concorrência em olimpíadas internacionais de matemática: uma reflexão voltada para o ensino da geometria.** 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT). Universidade Federal de Brasília.

NETO, Antônio Caminha Muniz. **Geometria Plana.** Tópicos de matemática elementar, vol.2. Coleção professor de matemática, SBM. 2013

OLIVEIRA, Emilio Celso de; CHIUMMO, Ana. **Análise da aprendizagem de semelhança de triângulos por alunos de graduação em Matemática.** VIDYA, v. 35, n. 2, p. 179-195, jul./dez., 2015 - Santa Maria, 2015.

OMI. Breve histórico 2017. Disponível em: <<https://www.imo2017.org.br/home-portugues.html>>. Acesso em 19 julho 2017.

OBM. Breve histórico 2017. Disponível em: <<http://www.obm.org.br/quem-somos/historico/>>. Acesso em 19 julho 2017.

OBMEP. **Apresentação**. Disponível em: <<http://www.obmep.org.br/apresentacao.htm>>. Acesso em 19 julho 2017.

OBMEP. **Regulamento**. Disponível em: <<http://www.obmep.org.br/regulamento.htm>>. Acesso em 19 julho 2017.

PAVANELLO, R.M. **O abandono da geometria – uma visão histórica**. Campinas: DEMR – FE – UNICAMP. Dissertação de Mestrado, 1989.

ROBINET, J. **De L'ingeniere Didactique sur les suites numériques après le baccalauréat**. 1984. 1 -11. Les Cahiers Blancs, 1984.

ROGALSKI, Marc. **Enseigner des Méthodes des Mathématiques**. 1990. n° 1, 1 – 10. Recherche em Didactiques des Mathématiques, 1984.

SOUZA, M.J.A. **Aplicações da sequência fedathi no ensino e aprendizagem da geometria mediado por tecnologias digitais**. Tese (Doutorado) – UFC. Fortaleza/Ce. Junho 2010. 231p.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães; PASSOS, Claudio Cesar Manso. **Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau**. Artigo. Zetetiké – FE/Unicamp – v. 21, n. 39. 2013.

USISKIN, Z. Resolvendo os dilemas permanentes da geometria escolar. In: **Aprendendo e ensinando Geometria**. Mary Montgomery Lindquist, Alberto P. Shule (Org.). tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994. p.21 – 43.