



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ
IFCE *CAMPUS* FORTALEZA
REDE NORDESTE DE ENSINO (RENOEN)
DOUTORADO ACADÊMICO EM ENSINO

FRANCISCO EVAMAR BARROS

NÚMEROS FIGURADOS: UMA ENGENHARIA DIDÁTICA
SOBRE AS RELAÇÕES, VISUALIZAÇÃO PELO SOFTWARE GEOGEBRA E
REPRESENTAÇÕES MATRICIAIS E PROPRIEDADES VIA LADRILHOS

FORTALEZA

2026

FRANCISCO EVAMAR BARROS

NÚMEROS FIGURADOS: UMA ENGENHARIA DIDÁTICA
SOBRE AS RELAÇÕES, VISUALIZAÇÃO PELO SOFTWARE GEOGEBRA E
REPRESENTAÇÕES MATRICIAIS E PROPRIEDADES VIA LADRILHOS

Tese de Doutorado Acadêmico apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Rede Nordeste de Ensino (RENOEN) pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) – Campus Fortaleza, como exigência parcial para obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.

Coorientador: Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira.

FORTALEZA - CE

2026

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal do Ceará - IFCE
Sistema de Bibliotecas - SIBI

Ficha catalográfica elaborada pelo SIBI/IFCE, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- B277n Barros, Francisco Evamar.
 Números Figurados : uma Engenharia Didática sobre as relações, visualização pelo software GeoGebra e representações matriciais e propriedades via ladrilhos / Francisco Evamar Barros. - 2026.
 347 f. : il. color.
- Tese (doutorado) - Instituto Federal do Ceará, Doutorado Acadêmico em Ensino (Renova), Campus Fortaleza, 2026.
 Orientação: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.
 Coorientação: Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira.
1. Números Figurados. 2. Representações matemáticas. 3. Engenharia Didática. 4. Teoria das Situações Didáticas. 5. GeoGebra. I. Título.
-

FRANCISCO EVAMAR BARROS

NÚMEROS FIGURADOS K -DIMENSIONAIS: UMA ENGENHARIA DIDÁTICA SOBRE
AS RELAÇÕES, VISUALIZAÇÃO PELO SOFTWARE GEOGEBRA E
REPRESENTAÇÕES MATRICIAIS E PROPRIEDADES VIA LADRILHOS

Tese de Doutorado Acadêmico apresentada ao
Programa de Pós-graduação em Ensino de
Ciências e Matemática da Rede Nordeste de
Ensino (RENOEN) pelo Instituto Federal de
Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
(IFCE) – Campus Fortaleza, como exigência
parcial para obtenção do título de Doutor em
Ensino de Ciências e Matemática.

Aprovada em: 23 / 01/ 2026

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves, Presidente (orientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE

Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira (coorientador)
Universidade Regional do Cariri – URCA

Prof. Dr. Élis Gardel da Costa Mesquita
Universidade Federal do Tocantins – UFT

Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa
Universidade Federal do Tocantins – UFT

Profª. Dra. Juscileide Braga de Castro
Universidade Federal do Ceará – UFC

Prof. Dr. Roger Oliveira Sousa
Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central – FECLESC

À minha família

Aos meus professores

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado forças, fé e coragem para me dedicar ao meu trabalho, por nunca ter me abandonado e por ser a fonte de toda a minha força.

Aos meus pais: minha mãe, Fátima, que sempre lutou pela minha educação e acreditou em todos os meus planos, que sempre esteve presente e é a minha maior admiradora, sendo também a minha maior admiração; e ao meu pai, Manoel, sempre batalhador, que me ensinou que tudo se consegue com luta, dedicação e força. A eles agradeço não só por esse trabalho, mas por terem me dado a vida e por serem a minha base.

À minha filha, Valentina que me deu a vida ao nascer, é a razão de tudo o que eu faço, que não só faço, mas tento fazer da melhor maneira possível para ser um exemplo e para sempre mostrar o meu melhor.

À minha esposa Bruna, por ser meu alicerce, meu escudo e a pessoa com quem sei que posso contar para qualquer coisa, pelos planos que fazemos, pelo norte que me dá e pelo carinho e amor a mim dedicado, os quais sempre serão recíprocos.

Ao meu orientador, Professor Doutor Francisco Régis, por ter me ajudado desde o começo desta caminhada, pelos ensinamentos, conselhos, retornos e força para superar os momentos mais difíceis nesta jornada.

Ao meu coorientador, Professor Doutor Paulo César Cavalcante de Oliveira, pelos ensinamentos, dedicação e por estar sempre à disposição quando precisei.

Aos professores do programa RENOEN, pela dedicação e empenho ao ensinar, por serem pessoas acessíveis e serenas, e por fazerem parte da minha formação.

Aos meus colegas de curso e amigos, Renata Vieira, Rosalide, Milena e Renata Teófilo, que sempre estiveram presentes durante este período, compartilhando os momentos prazerosos e os difíceis, que sempre foram mais do que uma equipe, uma verdadeira família.

A todos, o meu mais sincero muito obrigado.

“Todas as coisas são números”

Lema da filosofia pitagórica

RESUMO

Esta tese investiga as representações dos números figurados na formação de professores de Matemática, buscando compreender como diferentes abordagens podem favorecer e ampliar estratégias de ensino. O estudo adota como referencial teórico a Teoria das Situações Didáticas e a metodologia de pesquisa Engenharia Didática, estruturada em suas quatro fases: análises preliminares, análises *a priori*, experimentação e análises *a posteriori*. As representações clássicas de números figurados como fórmulas gerais, equações de recorrência e funções geradoras serviram de base para o desenvolvimento de três formas de representação exploradas na pesquisa: (i) visualização de configurações no GeoGebra, que explora o assunto de forma geométrica e tecnológica, (ii) construções por ladrilhamento envolvendo números poligonais, que aborda os números figurados por meio de uma representação visual alternativa e (iii) abordagem em forma matricial, que estabelece uma relação entre números figurados e a noção de matriz companheira. Na etapa de aplicação prática, foram trabalhadas apenas duas dessas formas: a visualização no GeoGebra, direcionada especificamente para propriedades de números figurados via números triangulares, e a construção por ladrilhamentos dos números triangulares. Para operacionalizar a proposta, elaboraram-se cinco situações didáticas aplicadas a turmas de licenciatura em Matemática, integrando recursos digitais, materiais manipuláveis e contextos históricos. Os resultados apontam que a articulação entre representações clássicas e novas configurações favoreceu a transposição entre formas algébricas, visuais e geométricas, estimulando a formulação de conjecturas e a investigação de propriedades, com potencial para enriquecer a formação docente.

Palavras-chave: Números figurados; Representações matemáticas; Engenharia Didática; Teoria das Situações Didáticas; GeoGebra.

ABSTRACT

This thesis investigates the representations of figurate numbers in the training of mathematics teachers, aiming to understand how different approaches can support and expand teaching strategies. The study adopts the Theory of Didactical Situations as the teaching framework and Didactical Engineering as the research methodology, structured into its four phases: preliminary analysis, a priori analysis, experimentation, and a posteriori analysis. Classical representations of figurate numbers, such as general formulas, recurrence relations, and generating functions, serve as the foundation for the development of three forms of representation explored in this research: (i) the visualization of configurations using GeoGebra, which approaches the topic from a geometric and technological perspective; (ii) tiling constructions involving polygonal numbers, which address figurate numbers through an alternative visual representation; and (iii) a matrix-based approach, establishing a relationship between figurate numbers and the notion of companion matrices. In the practical implementation phase, only two of these forms were applied: GeoGebra-based visualization, specifically focused on the properties of figurate numbers through triangular numbers, and tiling constructions of triangular numbers. To operationalize the proposal, five didactical situations were designed and implemented with undergraduate Mathematics teacher education students, integrating digital resources, manipulatives, and historical contexts. The results indicate that the articulation between classical representations and new configurations facilitated transitions among algebraic, visual, and geometric forms, fostering the formulation of conjectures and the investigation of mathematical properties, with significant potential to enrich teacher education.

Keywords: Figurate numbers; Mathematical representations; Didactical Engineering; Theory of Didactical Situations; GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Esquema de uma situação de ação	45
Figura 2 - Situação de formulação por esquema	46
Figura 3 - Esquema da situação de formulação.....	47
Figura 4 - Pitágoras de Samos	54
Figura 5 - Representação dos números triangulares por Nicômaco de Gerasa	56
Figura 6 - Números lineares	56
Figura 7 - Configuração com bolinhas formando números triangulares	57
Figura 8 - O <i>gnômon</i>	58
Figura 9 - Números pentagonais.....	58
Figura 10 - Representação piramidal de Nicômaco de Gerasa.....	59
Figura 11 - Números octaedrais.....	60
Figura 12 - Números da <i>stella octangula</i>	60
Figura 13 - Números triangulares.....	62
Figura 14 - Número triangular escrito em linhas.....	63
Figura 15 - Número quadrado formado por <i>gnômons</i>	64
Figura 16 - Número pentagonal formado por seus <i>gnômons</i>	64
Figura 17 - Subtração de Números pentagonais.....	65
Figura 18 - Números tetraédricos	67
Figura 19 - Números piramidais quadrados	68
Figura 20 - Números piramidais pentagonais.....	68
Figura 21 - Números cúbicos.....	69
Figura 22 - Números pentatope	71
Figura 23 - Os quatro primeiros números triangulares.....	74
Figura 24 - <i>Gnômons</i> formando o quinto número triangular.....	74
Figura 25 - Os quatro primeiros números quadrados	77
Figura 26 - <i>Gnômons</i> formando o quinto número quadrado	77
Figura 27 - Nono número quadrado como soma de dois números triangulares.....	84
Figura 28 - Quarto número pentagonal triangulado	85
Figura 29 - Esquema do polígono de construção dos números pentagonais	87
Figura 30 - Construção de uma lista de pontos sobre o polígono base para os números pentagonais	87
Figura 31 - Construção de números pentagonais via SG.....	88

Figura 32 - Quinto número pentagonal.....	88
Figura 33 - Relação dos números hexagonais e triangulares.....	89
Figura 34 - Os quatro primeiros números tetraédricos	91
Figura 35 – Sétimo número tetraédrico formado pela adição do sétimo número triangular ao sexto número tetraédrico.....	93
Figura 36 - Números tetraédricos como lista no SG	94
Figura 37 - FG dos números triangulares pelo software wxMáxima	100
Figura 38 - FG dos números poligonais com o auxílio do SM.....	102
Figura 39 - Quinto número triangular.....	105
Figura 40 - Número triangular centralizado	107
Figura 41 - Número triangular centralizado via números triangulares.....	107
Figura 42 - Configuração relativa a propriedade 5.....	108
Figura 43 - Sétimo número tetraédrico	110
Figura 44 - Quarto número piramidal quadrado com destaque na base	111
Figura 45 - Quinto número piramidal pentagonal, e sua relação com números tetraédricos ..	112
Figura 46 - Apresentação dos números piramidais pentagonais no software GeoGebra	113
Figura 47 - Número piramidal pentagonal com ênfase na recorrência.....	113
Figura 48 - Quinto número octaédrico	115
Figura 49 - Quinto número cúbico construído com números tetraédricos	116
Figura 50 - Visão aproximada de um número cúbico	117
Figura 51 - Resolução da relação entre os números dodecaedrais e tetraédricos no SG.....	118
Figura 52 - 5º, 6º e 7º números dodecaedrais	119
Figura 53 - Constatação da relação entre números icosaédrais e tetraédrico no SG	119
Figura 54 - 5º, 6º e 7º números icosaedrais.	120
Figura 55 - Stella octangula construída com dois tetraedros.....	120
Figura 56 - Números octaédricos construídos no núcleo de uma stella octangula.....	121
Figura 57 - Sétimo número da stella octangula	122
Figura 58 - Visão aproximada de um número da stella octangula	123
Figura 59 - Outra construção para os números da stella octangula	124
Figura 60 - Visão aumentada para a segunda construção dos números da stella octangula...	124
Figura 61 - Relação entre números quadrados e triangulares.....	141
Figura 62 - Números poligonais centralizados	142
Figura 63 - Forma alternativa dos números poligonais centralizados no SG	143
Figura 64 - Forma alternativa dos números oblongos no SG	144

Figura 65 - Interpretação da noção no n -tabuleiro	146
Figura 66 - Tela inicial do tabuleiro GeoGebra.....	148
Figura 67 - Seleção de cores no tabuleiro virtual	149
Figura 68 - Seleção do comprimento do tabuleiro virtual	149
Figura 69 - Tabuleiro gerado a partir da escolha do comprimento	150
Figura 70 - Seleção de cores no tabuleiro virtual	150
Figura 71 - Geração da cor cinza no SG.....	151
Figura 72 - Ladrilhamento completo no tabuleiro virtual	151
Figura 73 - Interface da ferramenta "Tabuleiro GeoGebra"	152
Figura 74 - Ladrilhamento da sequência de uns no <i>software</i> GeoGebra.....	154
Figura 75 - Ladrilhamento dos Números Lineares no <i>software</i> GeoGebra.....	155
Figura 76 - Representação do oitavo número Linear como potências de ladrilhos.....	156
Figura 77 - Os 10 ladrilhamentos do quarto número triangular	159
Figura 78 - Os 15 ladrilhamentos do quinto número triangular como potência de ladrilhos ..	159
Figura 79 - Disposição em triângulo dos ladrilhamentos do quinto número triangular	161
Figura 80 - Disposição de ladrilhamentos de números triangulares para apresentar a recorrência com cores destacadas	162
Figura 81 - Representação da recorrência de números triangulares via ladrilhos	163
Figura 82 - Exemplo do corolário 4 no <i>software</i> GeoGebra	164
Figura 83 - Relação entre números quadrados e triangulares via tabuleiro.....	167
Figura 84 - Número pentagonal.....	168
Figura 85 - Organização do ladrilhamento do segundo número pentagonal em pentágono ..	169
Figura 86 - Terceiro número pentagonal via ladrilhos	169
Figura 87 - Quarto número pentagonal via ladrilhos.....	170
Figura 88 - Terceiro número hexagonal via ladrilhos	172
Figura 89 - Três primeiros números lineares.....	174
Figura 90 - Construção dos números triangulares a partir dos lineares.....	174
Figura 91 - Números triangulares a partir dos lineares	175
Figura 92 - Primeira etapa da construção dos números piramidais via ladrilhos	175
Figura 93 - Segunda etapa da construção dos números piramidais	176
Figura 94 - Terceira etapa da construção dos números piramidais	176
Figura 95 - Configuração via ladrilhos de números triangulares	181
Figura 96 - Recorrência dos números triangulares via ladrilhos	182
Figura 97 - Outro exemplo de recorrência dos números triangulares via ladrilhos	182

Figura 98 - Visualização da recorrência homogênea dos números triangulares via ladrilhos	183
Figura 99 - Primeira etapa da recorrência homogênea dos números triangulares.....	184
Figura 100 - Segunda etapa da recorrência homogênea dos números triangulares.....	184
Figura 101 - Terceira etapa da recorrência homogênea dos números triangulares	185
Figura 102 - Primeiros índices dos números (3,4) -gonais.....	187
Figura 103 - Termos dos coeficientes da recorrência dos números (3,4) -gonais	188
Figura 104 - Obtenção dos termos da sequência dos números quadrados pentagonais	190
Figura 105 - Termos dos números quadrados pentagonais via SG	191
Figura 106 - Números quadrados hexagonais via SG	192
Figura 107 - Visualização detalhada dos números triangulares	195
Figura 108 - Visualização detalhada dos números quadrados.....	195
Figura 109 - Visualização detalhada dos números pentagonais	196
Figura 110 - Visualização dos números quadrados via triangulares	198
Figura 111 - Números triangulares via triangulares	198
Figura 112 - Visualização detalhada dos números triangulares centralizados	201
Figura 113 - Visualização detalhada dos números quadrados centralizados.....	202
Figura 114 - Visualização detalhada dos números pentagonais centralizados.....	202
Figura 115 - Relação de números triangulares centralizados e números triangulares.....	203
Figura 116 - Outra relação entre números poligonais centralizados e triangulares comuns ..	204
Figura 117 - Relação entre números poligonais centralizados e números triangulares consecutivos.....	205
Figura 118 - Relação entre números poligonais centralizados e números triangulares iguais	205
Figura 119 - Quinto número tetraédrico	207
Figura 120 - Quinto número piramidal quadrado	208
Figura 121 - Números piramidais pentagonais e hexagonais	208
Figura 122 - Números piramidais quadrados via números tetraédricos	209
Figura 123 - Os dezesseis ladrilhamentos do quarto número quadrado	211
Figura 124 - Exemplo de ladrilhamento construído no tabuleiro virtual	212
Figura 125 - Ladrilhamento da sequência de uns	213
Figura 126 - Possibilidades de ladrilhamento em um 2-tabuleiro com três peças	213
Figura 127 - Recorrência dos triangulares via ladrilhos.....	217
Figura 128 - Visão detalhada da recorrência dos números triangulares via ladrilhos.....	218
Figura 129 - Aluno A1 na fase de ação da situação 1	222
Figura 130 - Situação 1 na fase de ação	223

Figura 131 - Aluno A8 na fase de ação da Situação 1	224
Figura 132 - Fase de validação da Situação 1	225
Figura 133 - Fase de validação da Situação 1 no material impresso	226
Figura 134 - Fase de ação da situação 2 por A7	227
Figura 135 - Validação da Situação 2 no material impresso	228
Figura 136 - Fase de formulação de S3	229
Figura 137 - Validação de S3	229
Figura 138 - Introdução de S4	230
Figura 139 - Material concreto com a sequência de uns	231
Figura 140 - Material concreto com a sequência dos números lineares	231
Figura 141 - Construção de números triangulares pelo tabuleiro físico	233
Figura 142 - Fase de Validação de S4	234
Figura 143 - Fase de ação de S5	235
Figura 144 - Recorrência apresentada por A3	235
Figura 145 - Fase de Validação de S5 na turma A	236
Figura 146 - A3 apresentando a resolução de S5	237
Figura 147 - Apresentação do assunto ladrilhos na turma B	238
Figura 148 - Construção de números lineares por B3	239
Figura 149 - Fase de formulação de S4 por B3	240
Figura 150 - Proposta de B3 construída no GeoGebra	240
Figura 151 - Primeiras construções com o tabuleiro físico e os números triangulares	241
Figura 152 - Registros de construções e reformulações dos ladrilhamentos triangulares	242
Figura 153 - Regras de S4 apresentada por B5	243
Figura 154 - Registro da recorrência realizado pelos estudantes	244
Figura 155 - Proposta de B6 para S1	245
Figura 156 - Linhas de S1 sendo traçadas por B6	246
Figura 157 - Quarto número triangular centralizado por B7	247
Figura 158 - Número triangular centralizado por B2	247
Figura 159 - Validação de S2 por B2	248
Figura 160 - Validação de S3 por B8	249
Figura 161 - apresentação de S1 na turma C	251
Figura 162 - Formulação de S3	252
Figura 163 - Apresentação da sequência de uns no tabuleiro virtual na turma C	253
Figura 164 - Interação dos alunos da turma D com o tabuleiro físico e virtual	255

Figura 165 - Fase de formulação das situações 4 e 5	256
Figura 166 - Oito alunos participando da fase de formulação de S4 e S5.....	256
Figura 167 - D7 e D9 construindo números pentagonais via triangulares	257
Figura 168 - D3 na fase de formulação de S1	258
Figura 169 - Momento de ação da situação 4 , turma E	260
Figura 170 - Registro da construção de números lineares, turma E	261
Figura 171 - Formulação de S4, turma E.....	261
Figura 172 - Registro da validação de S4, turma E	262
Figura 173 - Aluno manuseando o tabuleiro virtual durante a aplicação de S5.....	262
Figura 174 - Validação de S5, turma E	263
Figura 175 - Formulação de S1, turma E.....	264
Figura 176 - Registro da validação de S1, turma E	264
Figura 177 - Formulação de S2, turma E.....	265
Figura 178 - Formulação de S3, turma E.....	265
Figura 179 - Fase de ação de S1, turma A.....	269
Figura 180 - Momento de formulação de S1, turma A.....	269
Figura 181 - Fase de formulação de S1, turma A.....	270
Figura 182 - Fase de validação de S2, turma A.....	272
Figura 183 - Fase de ação de S3, turma A.....	273
Figura 184 - Formulação de S3, turma A	273
Figura 185 - Fase de ação de S3, turma A.....	274
Figura 186 - Construção dos números piramidais, fase de formulação, turma A	274
Figura 187 - Fase de Validação de S3, turma A.....	275
Figura 188 - Validação de S3, turma A	275
Figura 189 - Fase de ação de S4, turma A.....	276
Figura 190 - Fase de formulação de S4, turma A	277
Figura 191 - Aluno A3 formando as somas parciais em S4	278
Figura 192 - Primeiros termos formados com o tabuleiro físico.....	279
Figura 193 - Fase de Validação de S4, turma A	280
Figura 194 - Validação de S4, turma A	280
Figura 195 - Institucionalização de S4, turma A	281
Figura 196 - Fase de ação de S5, turma A.....	282
Figura 197 - Fase de ação de S4, turma B	284
Figura 198 - Fase de ação de S4, turma B	284

Figura 199 - Formulação de S4 pelo aluno B6.....	285
Figura 200 - Registro da discussão dos alunos na fase de formulação de S4, turma B.....	285
Figura 201 - Registros da fase de formulação de S4, turma B	286
Figura 202 - Validação de S4 na turma B	287
Figura 203 - Organização de S5 na turma B	288
Figura 204 - Validação de S5 na turma B	288
Figura 205 - Fase de ação de S1 feita por B3	289
Figura 206 - Fase de formulação de S1 na turma B	290
Figura 207 - Fase de validação de S1 proposta por B8	290
Figura 208 - Momentos da fase de ação em S2 da turma B	291
Figura 209 - Momento de Validação de S2, turma B.....	292
Figura 210 - Validação de S3 na turma B	293
Figura 211 - Fase de ação de S1 na turma C	295
Figura 212 - Configurações produzidas por C11 e C9	296
Figura 213 - Relato de C9 sobre não usar a figura para auxiliar na construção.....	296
Figura 214 - Transição entre fases pelo aluno C13	297
Figura 215 - Configuração feita pelo aluno C3	298
Figura 216 - Validação de S1 pelo aluno C6.....	299
Figura 217 - Validação realizada por C2, C3 e C5.....	299
Figura 218 - Fase de ação da S2 por C7	300
Figura 219 - Uma formulação para S2 pelo aluno C13	301
Figura 220 - Validação de S2 feita pelo aluno C3.....	301
Figura 221 - Relato de C12 sobre S2.....	302
Figura 222 - Validação de S2 feita por C2	302
Figura 223 - Fase de ação de S4 feita por C1	304
Figura 224 - Fase de ação das situações 4 e 5, turma D	307
Figura 225 - Validação de S4 pelos alunos D6 e D7.....	307
Figura 226 - Validação de S4 e S5 por D10.....	308
Figura 227 - Validação de S5 realizada por D9 no tabuleiro virtual	309
Figura 228 - Formulação de S1 pelos alunos D7 e D9.....	310
Figura 229 - Validação de S1 realizada por D3, D4 e D9	310
Figura 230 - Fase de ação de S4 pelo aluno E7.....	312
Figura 231 - Construção de números lineares pelo aluno E8	313
Figura 232 - Validação de S4 pela aluna E5	314

Figura 233 - Validação de S4 no tabuleiro virtual por E2.....	314
Figura 234 - Validação de S5 pelo aluno E1	315
Figura 235 - Aluno E1 na fase de formulação de S1	316
Figura 236 - Aluna E5 na fase de validação de S1	316
Figura 237 - E1 na fase de ação de S2.....	317
Figura 238 - E6 na fase de formulação de S2.....	318
Figura 239 - E4 e E2 na fase de validação de S2	318
Figura 240 - E2 e E5 na fase de Validação de S3.....	319

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Catálogo dos números poligonais.....	66
Tabela 2 - Classificação de números figurados em famílias e classes	72
Tabela 3 - Sequência, recorrência e termo geral dos números triangulares	76
Tabela 4 - Sequência, recorrência e termo geral dos números triangulares	79
Tabela 5 - Número poligonais, fórmulas e catálogo na OEIS	82
Tabela 6 - Resumo das propriedades de números triangulares via ladrilho	165
Tabela 7 - Regra de ladrilhamento dos números quadrados.....	167
Tabela 8 - Regra de ladrilhamento dos números pentagonais	168
Tabela 9 - Peças de ladrilhos dos números poligonais	172

LISTA DE SIGLAS

CEP	Comitê de Ética e Pesquisa
CP	Cinza e Pretos
CVP	Cinza, Vermelho e Preto
DM	Didática da Matemática
ED	Engenharia Didática
FG	Função Geradora
IREM	Institutos de Pesquisa sobre o Ensino da Matemática (sigla em português)
NF	Números figurados
S1	Situação Didática 1
S2	Situação Didática 2
S3	Situação Didática 3
S4	Situação Didática 4
S5	Situação Didática 5
SG	Software GeoGebra
SD	Situação Didática
TSD	Teoria das situações didáticas

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	23
2. REFERENCIAL TEÓRICO	32
2.1 A Engenharia Didática	33
2.1.1 <i>Análises preliminares</i>	<i>35</i>
2.1.2 <i>Concepção e análise a priori</i>	<i>38</i>
2.1.3 <i>Experimentação</i>	<i>40</i>
2.1.4 <i>Análise a posteriori e validação</i>	<i>41</i>
2.2 Teoria das Situações Didáticas (TSD).....	43
3. NÚMEROS FIGURADOS E SUAS REPRESENTAÇÕES	49
3.1 Fundamentação Teórica	49
3.2 Ferramentas de apoio ao estudo das sequências.....	51
3.3 Números figurados na História da Matemática	54
3.4 Classificação dos Números Figurados	61
3.4.1 <i>Números figurados espaciais</i>	<i>67</i>
3.4.2 <i>Números figurados multidimensionais.....</i>	<i>70</i>
3.5 Recorrência e forma geral dos números figurados.....	73
3.5.1 <i>Recorrência e forma geral dos números triangulares</i>	<i>74</i>
3.5.2 <i>Recorrência e forma geral dos números quadrados</i>	<i>76</i>
3.5.3 <i>Recorrência e forma geral para números poligonais.....</i>	<i>79</i>
3.5.4 <i>Recorrência e forma geral dos números simplexos</i>	<i>82</i>
3.5.5 <i>A construção de números poligonais por meio de números triangulares.....</i>	<i>83</i>
3.5.6 <i>Recorrência e termo geral para números piramidais.....</i>	<i>90</i>
3.6 Função geradora	95
3.6.1 <i>Função geradora de números poligonais.....</i>	<i>97</i>
3.6.2 <i>Função geradora dos números piramidais.....</i>	<i>102</i>
3.6.3 <i>Função geradora dos números simplexos</i>	<i>103</i>
3.7 Configuração pelo GeoGebra	105
3.7.1 <i>Relação entre números figurados planos com o uso do software GeoGebra.....</i>	<i>105</i>
3.7.2 <i>Construção de números piramidais com números tetraédricos.....</i>	<i>109</i>

3.8 Forma matricial de um número figurado	125
<i>3.8.1 Matriz companheira de uma sequência recorrente.....</i>	<i>126</i>
<i>3.8.2 Matriz companheira dos números poligonais e piramidais.....</i>	<i>128</i>
<i>3.8.3 Propriedades da matriz companheira dos números poligonais.....</i>	<i>131</i>
<i>3.8.4 Forma dos números figurados planos via matriz companheira.....</i>	<i>140</i>
3.9 Ladrilhamento dos números figurados	145
<i>3.9.1 A ideia de tabuleiro.....</i>	<i>146</i>
<i>3.9.2 Ferramenta: Tabuleiro GeoGebra.....</i>	<i>147</i>
3.9.2.1 Propósito da Ferramenta:.....	147
3.9.2.2 Interface da Ferramenta:.....	147
3.9.2.3 Funcionalidades Principais:.....	147
3.9.2.4 Exemplo prático de uso	148
<i>3.9.3 Regra de ladrilhamento de números triangulares.....</i>	<i>152</i>
<i>3.9.4 Ladrilhamento dos números poligonais via números triangulares.....</i>	<i>166</i>
<i>3.9.5 Ladrilhamento dos números piramidais.....</i>	<i>173</i>
<i>3.9.6 Ladrilhamento dos números simplexos</i>	<i>178</i>
<i>3.9.7 Propriedades de ladrilhos dos números figurados a partir do software GeoGebra...</i>	<i>180</i>
3.10 GeoGebra e os Números (p,q)-gonais.....	185
<i>3.10.1 Números triangulares quadrados</i>	<i>187</i>
<i>3.10.2 Números quadrados pentagonais.....</i>	<i>189</i>
<i>3.10.3 Números quadrados hexagonais.....</i>	<i>192</i>
4. CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI	194
4.1 Situação 1: Encontrar a fórmula para números poligonais a partir de números triangulares.....	197
4.2 Situação 2: Encontrar a relação entre números triangulares iguais e um número poligonal centralizado	200
4.3 Situação 3: Encontrar a forma geral dos números piramidais	206
4.5 Situação 5: Encontrar a relação de recorrência de números triangulares via ladrilho	216
5. A EXPERIMENTAÇÃO	220
5.1 Experimentação Interna (IFCE – 2024.2).....	221
5.2 Experimentação Interna (IFCE 2025.1)	237

5.3 Experimentação Externa 1 (URCA)	250
6. ANÁLISE <i>A POSTERIORI</i> E VALIDAÇÃO (INTERNA E EXTERNA)	267
6.1 Análise <i>a posteriori</i> e validação interna - IFCE 2024.2	267
6.2 Análise <i>a posteriori</i> e validação interna – IFCE turma 2025.1	283
6.3 Análise <i>a posteriori</i> e validação externa (URCA).....	294
6.4 Análise <i>a posteriori</i> e validação externa (FECLESC – Quixadá)	305
6.5 Análise <i>a posteriori</i> e validação interna (IFCE – 2025.2)	311
7. CONSIDERAÇÕES FINAIS E PESQUISA FUTURA	321
REFERÊNCIAS	325
APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	332
APÊNDICE B – QUESTIONÁRIOS.....	336
ANEXO A – PARECER DO COMITÊ DE ÉTICA E PESQUISA	343

1. INTRODUÇÃO

Diversos estudos têm se dedicado a investigar os elementos que impactam significativamente o ensino da Matemática. Entre as abordagens mais influentes, destaca-se a Didática da Matemática (DM) de origem francesa, cujos primeiros estudos foram desenvolvidos na década de 1970, no contexto da reforma da Matemática Moderna e da criação dos IREM (Institutos de Pesquisa sobre o Ensino da Matemática), conforme apontado por Almouloud (2018). Nesse cenário, havia a forte convicção de que o sistema educacional francês necessitava de mudanças substanciais, o que mobilizou pesquisadores no âmbito das universidades francesas (Alves, 2016).

Essa corrente teórica enfatizava a importância de métodos de ensino alinhados aos avanços das teorias de aprendizagem, conferindo à Matemática o estatuto de um conhecimento específico, dotado de lógica própria. Tal perspectiva gerou a necessidade de um debate contínuo sobre as práticas pedagógicas, abrangendo aspectos que transcendem a sala de aula, tais como a formação de professores, a estrutura curricular, os materiais didáticos e o papel da pesquisa acadêmica no desenvolvimento da Educação Matemática (Almouloud, 2018).

Nessa mesma linha de pensamento, voltada ao aprimoramento constante do ensino, torna-se fundamental desenvolver estratégias didáticas que articulem conteúdos matemáticos relevantes aos princípios dessa abordagem. Uma dessas estratégias consiste em utilizar temas matemáticos como ferramentas para investigar e enriquecer o processo de ensino-aprendizagem. Entre esses temas, destaca-se a História da Matemática (HM) que, integrada a assuntos como álgebra, teoria dos números, geometria e ao uso de tecnologias digitais, pode oferecer suporte conceitual, epistêmico e visual ao trabalho do professor de Matemática.

No âmbito da HM, o estudo das sequências numéricas tem se consolidado como um campo fértil para análises interdisciplinares, possibilitando a construção de situações didáticas com fundamentação tanto histórica quanto matemática. Dentre os objetos de estudo mais expressivos nesse campo estão os *números figurados*, cuja origem remonta aos pitagóricos e sua evolução perpassa por séculos de investigação matemática. Essa trajetória é documentada por autores como Burton (1976), Boyer (1991), Conway e Guy (1996) e Stillwell (2010), que exploram os vínculos entre pensamento matemático e elementos culturais e filosóficos da antiguidade. Complementarmente, há contribuições mais recentes da matemática pura, como os trabalhos de Deza e Deza (2012), Sun (2015), Ge e Sun (2009), e Gopalan, Somanath e Geetha (2008), bem como estudos voltados ao ensino da matemática, como os de Alves (2012) e Alves e Barros (2019), que evidenciam o potencial didático desse tema.

Os números figurados constituem sequências numéricas que se destacam por uma característica peculiar: quando representados graficamente, como pontos ou padrões discretos, formam figuras no plano ou sólidos no espaço. Essa dualidade entre o algébrico e o geométrico amplia as possibilidades de abordagem do tema, tornando-o especialmente rico para fins educacionais. Assim, além de serem interpretados por meio de expressões formais, esses números podem ser visualizados, manipulados e investigados por meio de representações especiais.

Uma das abordagens mais promissoras para o estudo dessas sequências consiste na análise de suas múltiplas representações, das quais algumas já foram amplamente exploradas em escritos que tratam desse tema, como é o caso da recorrência, da expressão do termo geral e da função geradora. Essas representações de cunho mais algébrico são amplamente descritas por Deza e Deza (2012), que não apenas as descrevem, como também abordam seu crescimento dimensional e as classificam no âmbito da geometria.

Diferentes formas de representação de sequências numéricas podem ser construídas a partir do estudo de sequências já consolidadas na literatura matemática, como é o caso da sequência de Fibonacci, cujo fascínio resultou em uma vasta comunidade científica e de entusiastas que exploram suas ocorrências em praticamente todos os ramos da Matemática, como representações polinomiais (Hoggat; Bicknell, 1973), representações binárias e ladrilhamentos (Benjamin; Quinn, 2003). Usando essa sequência clássica como exemplo, o uso de representações alternativas pode constituir um caminho promissor para ampliar e integrar a compreensão dos padrões envolvidos em outras sequências numéricas. No nosso trabalho, essas representações são usadas para ampliar a ideia das representações de números figurados.

O ladrilhamento constitui uma forma de representação que articula aspectos geométricos e combinatórios, sendo amplamente utilizado para modelar padrões, regularidades e processos de contagem. No contexto das sequências numéricas, o ladrilhamento permite interpretar termos da sequência, como arranjos de peças que cobrem uma região segundo determinadas regras, favorecendo uma leitura visual e estrutural do crescimento sequencial. Essa abordagem tem se mostrado particularmente relevante em sequências recorrentes, pois possibilita associar relações algébricas a configurações geométricas, tornando evidentes propriedades como recorrência, decomposição e generalização (Benjamin; Quinn, 2003; Benjamin; Erickson, 2011).

Além de seu valor matemático, o ladrilhamento de sequências numéricas apresenta um forte potencial didático, pois promove a articulação entre diferentes registros de representação, conforme discutido por Duval (2003), ao permitir a conversão entre o registro geométrico-

visual e o algébrico. Em particular, estudos envolvendo números figurados e sequências clássicas, como a de Fibonacci, mostram que os ladrilhamentos funcionam como um meio privilegiado para a construção de significados e para a formulação de conjecturas, ao evidenciar regularidades que nem sempre são imediatamente perceptíveis na forma simbólica (Koshy, 2011). Dessa forma, o uso de ladrilhamentos se apresenta como uma ferramenta conceitual relevante tanto para a investigação matemática quanto para propostas de ensino que valorizam a visualização e a experimentação.

Além das representações de caráter geométrico e visual, existem também representações que possuem um cunho estritamente algébrico. Nesse contexto, destacam-se as representações matriciais, amplamente utilizadas no estudo de sequências numéricas, como em Koshy (2011), que aborda a sequência de Fibonacci e Lucas, e Koshy (2016), que aborda a sequência de Pell também em um contexto matricial. Essa representação pode ser dada por meio da chamada *matriz companheira*, a qual permite descrever relações de recorrência e analisar propriedades estruturais das sequências de forma sistemática. Tal abordagem é consolidada na literatura matemática no contexto da Álgebra Linear como forma canônica (Horn; Johnson, 2013).

No entanto, quando se trata especificamente dos números figurados, não se encontram, até o momento, registros na literatura matemática que explorem representações matriciais construídas a partir de suas particularidades estruturais e combinatórias. Essa lacuna evidencia um campo ainda pouco investigado, no qual as representações algébricas não dialogam diretamente com os aspectos figurais que caracterizam esses números. Dessa forma, a presente pesquisa se configura como inovadora ao propor a exploração desse espaço teórico, abrindo possibilidades para novas interpretações, generalizações e articulações entre representações algébricas e figurais no estudo dos números figurados.

Partindo para abordagens mais acessíveis ao ensino, pode-se constatar que o emprego de tecnologias digitais interativas possibilita ao estudante visualizar transformações, reconhecer padrões, formular hipóteses e avaliar conjecturas a partir de manipulações dinâmicas, favorecendo processos ativos de construção do conhecimento matemático, ou seja, podem ser utilizadas nos processos formativos como atribuição de sentido ao processo educativo e à produção de significados (Oliveira; Amâncio, 2022). Diante disso, o uso de recursos digitais como o GeoGebra, pode facilitar o elo entre as representações e visualização dessa classe de sequências ao representar algumas propriedades antes vistas apenas como puramente algébricas.

Dento de um olhar visuoespacial, a representação geométrica é relevante, como mencionado anteriormente. Como essas sequências representam configurações k -dimensionais,

é possível trabalhar com a visualização, especialmente ao utilizar softwares de Geometria dinâmica como o GeoGebra. Além de permitir a visualização do comportamento das figuras, o GeoGebra oferece recursos que facilitam a compreensão das outras representações mencionadas. É o recurso mais empregado para fazer a transição entre os conceitos da matemática pura para o ensino.

A presença das representações de números figurados em diferentes contextos matemáticos é amplamente observada, evidenciando sua estreita relação com as regularidades e estruturas fundamentais que caracterizam sequências numéricas. Esses números estão diretamente associados a relações internas entre termos sucessivos, permitindo a construção de formas gerais, descrições simbólicas e expressões que capturam seu comportamento de crescimento e organização.

Além disso, a possibilidade de transitar entre diferentes tipos de representação confere aos números figurados um papel articulador, uma vez que objetos descritos visualmente ou configurados a partir de arranjos espaciais podem ser reinterpretados como sequências, preservando suas propriedades estruturais. Essa característica favorece a conversão entre registros de representação distintos, contribuindo tanto para a análise teórica quanto para a compreensão dos padrões que emergem dessas configurações.

Dessa maneira, este estudo dedica-se, entre outras peculiaridades, a explorar representações das sequências dos números figurados no contexto do ensino de Matemática. Isso visa proporcionar uma visão mais orientada para o ensino e para a História da Matemática, destacando a importância desse tema que, além de ter passado por várias descobertas ao longo dos anos desde os pitagóricos, representa uma ampla linha de estudo.

Esta pesquisa possui um fio condutor conectado à dissertação de Mestrado do mesmo autor, que aborda os aspectos históricos e matemáticos que impulsionaram a evolução das representações dos números figurados, desde sua representação plana até suas representações em pirâmides e, atualmente, na generalização das figuras e números figurados no espaço k -dimensional. Utilizou-se a Engenharia Didática (ED) na perspectiva de Artigue (1995) como metodologia de pesquisa e a Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau (1976) como teoria de ensino, o que permitiu a estruturação do documento. Essa abordagem foi novamente adotada, ampliando o alcance em relação ao trabalho anterior e mantendo a tríade ED, TSD e Números Figurados como pilares da pesquisa.

Para concluir, apresentam-se algumas análises que serão guias desta pesquisa, incluindo a revisão da literatura, uma breve contextualização histórica dos números figurados e a

definição dos problemas e objetivos da pesquisa. Essas análises prévias serviram como base para o desenvolvimento do estudo e auxiliaram na compreensão e evolução do tema.

Dentro da ED, é crucial organizar o estudo em etapas para garantir uma sequência lógica e eficaz. Nesse sentido, uma parte inicial da pesquisa foi dedicada à revisão bibliográfica. Essa etapa envolveu a busca por autores que abordassem a ED, a TSD e os números figurados.

Por outro lado, outra parte fundamental do estudo consistiu em investigar uma abordagem que conectasse a história dos números figurados à sua evolução ao longo dos anos, considerando o contexto da História da Matemática e da Didática da Matemática. Essa abordagem histórica permitiu uma compreensão mais profunda das origens e desenvolvimento dos números figurados, o que por sua vez foi fundamental para criar e modificar situações de ensino. Tais situações de ensino foram essenciais para o progresso e aprimoramento da pesquisa em questão, uma vez que contribuíram diretamente para a evolução do estudo.

Para realizar o estudo em questão, foi essencial conduzir um levantamento detalhado para cada um dos temas abordados. Para isso, foram consultados documentos como dissertações, livros, teses e artigos relacionados à ED, à TSD e aos Números Figurados gregos, que são uma classe especial de sequência numéricas que se diferenciam das demais por possuírem uma representação geométrica. Ou seja, esses números, quando representados por pontos, formam figuras geométricas específicas. Como exemplo, tem-se os números triangulares, os números quadrados, os pentagonais, entre outros.

Embora esses temas sejam muitas vezes tratados de forma independente, o intuito objetivo deste trabalho é unir esses conhecimentos de modo a contribuir para o ensino de Matemática em nível superior, conforme proposto pela pesquisa.

No âmbito da ED, destacam-se diversas fontes, incluindo o livro de Artigue (1995) como principal referência sobre o assunto. Além disso, foram explorados artigos como Alves e Dias (2018), que discutem as duas primeiras etapas da ED, a dissertação de Oliveira (2018) que abrange todas as fases da ED aplicadas ao ensino da sequência de Fibonacci, e o artigo de Almouloud e Silva (2012), que define as etapas da ED e discutem seu uso e evolução. Também foram revisados os trabalhos de Alves (2014; 2016) e Pommer (2013).

Para compreender como elaborar a fase experimental da ED, foi necessário estudar a Teoria das Situações Didáticas (TSD). Foram consultadas obras como as de Brousseau (1986) e Brousseau (1997), que definem e detalham as fases da TSD. Além disso, consideramos as dissertações de Oliveira (2018), Teixeira e Passos (2013) e Fonseca (2011), que contribuem com perspectivas brasileiras sobre a elaboração de situações didáticas. Com essas bases, foi iniciada a exploração do campo matemático.

Em relação aos números figurados, buscou-se compreender sua generalização, suas formas gerais, recorrências e funções geradoras. Para isso, tomou-se por base a dissertação de Silva (2015), que aborda recorrências lineares. Já para entender a geometria presente nas sequências dos números figurados, foi realizado um estudo exaustivo acerca do crescimento dimensional dos polítopos, utilizando os livros de Coxeter (1969) e Coxeter (1973).

Continuando com o estudo específico dos números figurados, também foi estudado o livro de Deza e Deza (2012), que trata da generalização de diversas classes de números figurados, e o trabalho de Alves (2012), que aborda a evolução histórica e algumas propriedades desses números. Também foram consultados livros que apresentam as primeiras definições de alguns números figurados, como Conway e Guy (1996), Burton (1986) e a dissertação de mestrado de Chipatala (2016), que foi um suporte na estruturação dos primeiros capítulos.

Posteriormente, foram elaboradas as situações de ensino previstas na ED com aporte da TSD. Foram estudadas as mesmas obras da fase inicial da pesquisa, em especial as dissertações de Oliveira (2018) e Santos (2017), para compreender o percurso metodológico a ser seguido. Esses trabalhos também descrevem situações didáticas, porém com aplicações da sequência de Fibonacci, proporcionando diferentes enfoques e abordagens.

Dessa forma, a revisão bibliográfica foi conduzida alinhada às etapas da Engenharia Didática, analisando separadamente as metodologias de pesquisa, as metodologias de ensino e o conteúdo matemático. Essa abordagem mostrou-se necessária para que cada aspecto fosse compreendido em profundidade, permitindo, posteriormente, a integração dos conhecimentos e o prosseguimento da pesquisa.

Para esse estudo, é necessário detalhar como os números figurados podem ser abordados em sala de aula e determinar o contexto de aplicação. Para isso, foi realizado um estudo da Matriz Curricular do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE *campus* Fortaleza). O objetivo foi identificar a disciplina que melhor se adequasse ao conteúdo dos números figurados, considerando que seu desenvolvimento envolve teoria dos números, conceitos de geometria, história da matemática, entre outros temas que poderiam ser integrados em diversas disciplinas desta grade curricular.

Após uma análise cuidadosa, estabeleceu-se que a disciplina de História da Matemática seria a mais adequada para abordar o tema. Essa escolha baseou-se no fato de que a História da Matemática não apenas aborda conteúdos históricos sobre diversos matemáticos, mas também explora a evolução histórica da aritmética, que é fundamental para o desenvolvimento das noções relacionadas aos números figurados. Além disso, a geometria é essencial para compreender os crescimentos dimensionais e a nomenclatura de polítopos, enquanto a análise

algébrica é crucial para as generalizações previstas em muitas explicações sobre números figurados.

Ao aprofundar-se na disciplina de História da Matemática, observa-se que os números figurados são estudados no contexto da história pitagórica. Além disso, como a disciplina também aborda a evolução da sequência de Fibonacci, identificou-se a oportunidade de desenvolver tanto a vertente histórica quanto a matemática dos números figurados, utilizando recursos como livros de História da Matemática para a parte histórica e artigos que discutem esses números de forma algébrica e analítica para a abordagem matemática. Essa descrição minuciosa permitiu apresentar toda a problemática e justificativa da pesquisa, as quais serão detalhadas no próximo tópico.

A problemática e a justificativa desta pesquisa baseiam-se no fato de que os livros de História da Matemática, em sua maioria, oferecem uma abordagem bastante detalhada sobre os primeiros números figurados, especialmente aqueles estudados pelos pitagóricos. Essas obras se concentram sobretudo nas primeiras sequências de números figurados planos, que representam polígonos, e em algumas configurações que representam poliedros. Embora Pitágoras seja reconhecido como o descobridor das triplas pitagóricas e da relação entre catetos e hipotenusa, os livros de história da matemática dedicam espaço aos números figurados de forma introdutória, servindo como um ponto de partida para que outras áreas da matemática possam apresentar resultados mais abstratos.

Por se tratar de uma classe infinita de sequências numéricas, esses livros não oferecem uma evolução histórica abrangente, desde a descoberta inicial até os desenvolvimentos posteriores ao longo do tempo, quando o número de sequências aumentou consideravelmente. Como resultado, não há uma compreensão clara de quais autores contribuíram para discutir outras sequências que também representam figuras geométricas. Embora muitos autores tenham abordado esses temas, por estarem muitas vezes voltados para áreas como Álgebra e Teoria dos Números, esse debate não é amplamente explorado na disciplina de História da Matemática, que se concentra principalmente nas descobertas de Pitágoras e seus seguidores, deixando um hiato histórico relacionado a essa classe de números especiais.

No entanto, durante a revisão bibliográfica dos números figurados, identificaram-se relações que têm implicações tanto cognitivas quanto didáticas. Essas sequências podem oferecer uma variedade de opções didáticas para o ensino e a compreensão de temas históricos e matemáticos dentro da disciplina de História da Matemática, aspecto de grande importância para estudantes e futuros professores.

No aspecto cognitivo, destaca-se a relação entre as sequências que seguem padrões semelhantes aos encontrados na geometria com as figuras geométricas. No aspecto didático, enfatiza-se que essas sequências são aplicáveis em diferentes níveis de ensino, proporcionando várias opções para futuros professores. Desde o ensino fundamental, onde podem ser exploradas as representações por pontos, até o ensino superior, onde se pode abordar o crescimento dimensional das sequências e seus equivalentes multidimensionais.

Diante dessas considerações, a justificativa desta pesquisa busca responder à seguinte questão: *como desenvolver uma engenharia didática para os números figurados que permita a transposição da evolução matemática desse conteúdo por meio de situações de ensino em sala de aula?*

Para abordar essa questão, estabelecem-se objetivos que orientam o desenvolvimento da pesquisa e a elaboração das situações de ensino. Esses objetivos visam promover uma melhor compreensão do assunto, abordando aspectos cognitivos e didáticos. No aspecto cognitivo, busca-se explorar a evolução dos conceitos matemáticos para estimular o raciocínio dedutivo-matemático dos estudantes durante a aplicação das fases da TSD. Quanto ao aspecto didático, planeja-se trabalhar a transposição didática das relações matemáticas presentes nos números figurados, também seguindo as fases da TSD.

Para os objetivos da pesquisa, observou-se que Almouloud e Coutinho (2008) destacaram que, na Engenharia Didática (ED), era fundamental que os objetivos estivessem alinhados às fases de análise a priori e a posteriori, implicando relacionar as observações do processo de ensino com os objetivos predefinidos para avaliar a reprodutibilidade e a regularidade dos fenômenos didáticos. Nesse contexto, os objetivos deste trabalho foram descritos de acordo com as fases da ED, visando comparar resultados e analisar as etapas anteriores e posteriores à aplicação da pesquisa. Definidos em níveis geral e específico, o objetivo geral consistiu em compreender a articulação entre a metodologia de ensino e a metodologia de pesquisa; os objetivos específicos envolveram a análise das fases a priori e a posteriori, a relação entre objetivos e observações, a estimativa da reprodutibilidade e regularidade dos fenômenos, e a comparação dos resultados obtidos com os objetivos estabelecidos, estruturação que visou garantir uma análise abrangente do processo de ensino-aprendizagem no contexto da ED.

Diante do contexto apresentado, o objetivo geral deste trabalho foi **realizar uma investigação, fundamentada na Engenharia Didática, envolvendo o objeto matemático números figurados k -dimensionais, suas múltiplas representações e aplicações**. A pesquisa priorizou o uso da visualização como elemento estruturante na construção do conhecimento

matemático, articulando essas representações ao ensino por meio da Teoria das Situações Didáticas, de modo a analisar tanto os aspectos matemáticos quanto didáticos envolvidos.

Para alcançar esse objetivo geral, definiram-se os seguintes objetivos específicos:

1) apresentaram-se as relações algébricas e geométricas existentes entre os números figurados e suas múltiplas representações, tomando-se os números triangulares como ponto de partida para a construção e generalização dessas relações;

2) construíram-se as propriedades matemáticas e as inter-relações entre os números figurados a partir dos números triangulares, utilizando-se o software GeoGebra para descrever o itinerário dessas relações por meio da visualização;

3) associaram-se representações clássicas e inéditas e as relações entre os números figurados, descrevendo-se suas propriedades matemáticas sob as formas algébrica e geométrica, com foco no ensino mediado pela visualização; e

4) exploraram-se, em situações didáticas, as relações entre os números figurados e suas representações visuais no software GeoGebra, evidenciando-se seu potencial para a compreensão das propriedades matemáticas construídas.

Diante dos objetivos expostos, a pesquisa foi desenvolvida de modo a permitir a comparação entre os resultados obtidos e a avaliação de seu efetivo alcance. Para que o estudo estivesse alinhado às propostas da Engenharia Didática (ED) e da Teoria das Situações Didáticas (TSD), o referencial teórico referente a essas abordagens será apresentado nos capítulos seguintes, juntamente com uma introdução inicial aos números figurados.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Este capítulo explora a evolução das teorias de ensino e pesquisa conhecidas como Teoria das Situações Didáticas (TSD) e Engenharia Didática (ED). Essas teorias têm origem no campo da Didática da Matemática (DM), que emergiu no final da década de 1960 e início da década de 1970. A DM, neste contexto, é apresentada como um campo de estudo que visa compreender e aprimorar os métodos de ensino da Matemática, levando em consideração aspectos cognitivos, didáticos e epistemológicos relacionados à sua aprendizagem.

Ao longo do capítulo, discute-se a intersecção entre a TSD e a ED, destacando como essas teorias se complementam na busca por estratégias eficazes de ensino-aprendizagem. A TSD concentra-se na análise das situações de ensino em termos de sua eficácia didática, considerando as interações entre o professor, os alunos e o conteúdo matemático. Por outro lado, a ED está voltada para o planejamento e desenvolvimento de atividades e materiais didáticos que possam potencializar o processo de ensino, levando em conta as especificidades do contexto educacional e as necessidades dos alunos. Juntas, essas teorias fornecem um arcabouço conceitual robusto para a reflexão e ação na prática educacional, especialmente no campo específico do ensino da Matemática. Sobre esse processo, D'Amore (2007) coloca que

A arte de conceber e conduzir condições que podem determinar a aprendizagem de um conhecimento matemático por parte de um sujeito (que pode ser qualquer organismo envolvido nessa atividade: uma pessoa, uma instituição, um sistema, até mesmo um animal). Aqui é preciso entender que a aprendizagem como um conjunto de modificações de comportamentos (portanto de realizações de tarefas solicitadas) que assinalam, para um observador pré-determinado, segundo sujeito em jogo, que o primeiro sujeito dispõe de um conhecimento (ou de uma competência) ou de um conjunto de conhecimentos (ou de competências), o que impõe a gestão de diversas representações, a criação de convicções específicas, o uso de diferentes linguagens, o domínio de um conjunto de repertórios de referências idôneos, de experiências, de justificações ou de obrigações. Essas condições têm que poder ser colocadas em ação e reproduzidas intencionalmente. Nesse caso fala-se de práticas didáticas (D'Amore, 2007, p.183)

Considerou-se, neste caso, que se tratava de como esse conhecimento poderia ser transmitido. Essa definição voltou-se tanto para a arte de ensinar quanto para a preocupação com o aprender. Para Brousseau (1986), se, por um lado, o professor esperava algo do aluno, o aluno também esperava algo do professor. Para D'Amore (2007), as práticas didáticas eram formadas por um tipo de condição e acabavam por se tornar o próprio objeto de estudo. Sendo assim, a didática mostrou-se como o estudo dessas condições, bem como das propostas e realizações que buscavam a efetividade do que se desejava ensinar. O autor complementa que:

Os estudos científicos – de tipo experimental – nesse campo necessitam da explicitação de conceitos e métodos que têm que ser submetidos a exigências de verificação de coerência e de adequação à contingência específica. Certas teorias, como por exemplo, a teoria das situações didáticas, têm como objeto dizer o que estuda a didática (D'Amore, 2007, p. 184).

Nas subseções seguintes, exploram-se aspectos da ED e da TSD como recursos fundamentais para o ensino de conceitos no âmbito da DM. Examina-se brevemente a história e a relevância dessas teorias no contexto educacional, com o objetivo de compreender como esses processos poderiam impactar e transformar as práticas adotadas pelos professores em sala de aula. Ao mergulhar nesses aspectos, buscou-se uma compreensão mais profunda de como a ED e a TSD influenciaram o ambiente de ensino e contribuíram para a melhoria do processo de aprendizagem dos alunos.

2.1 A Engenharia Didática

Para estruturar a pesquisa, adotou-se a metodologia da Engenharia Didática (ED) ou seus elementos, pois considerou-se que, ao identificar um problema, o primeiro passo para a investigação era iniciar uma ED. No entanto, antes de adentrar no estudo da ED, foi essencial fornecer um relato histórico sobre seu surgimento. De acordo com Douady (1995), durante as décadas de 1960 e 1970, a comunidade científica e educacional enfrentou uma forte crise matemática em diversos países europeus, incluindo a França. Nesse período, o currículo matemático era moldado por estudiosos e intelectuais renomados, com o objetivo de simplificar as ferramentas matemáticas poderosas, mantendo o rigor matemático. A ideia era que, ao reduzir o número de ferramentas complexas, os alunos pudessem aplicá-las em diversas situações.

Para enfrentar essa crise, surgiram na França os Institutos de Pesquisa sobre Ensino de Matemática (IREM), fortemente influenciados por Bourbaki. Segundo Douady (1995), esses institutos reuniam professores de todos os níveis interessados em investigações no campo do ensino de Matemática. A partir dessa sinergia, emergiram novas abordagens e problemáticas, com foco no significado dos conteúdos e nas dificuldades de aprendizagem dos alunos. Artigue (1995) relatou que a Engenharia Didática surgiu com o propósito de abordar questões fundamentais dentro da didática da matemática, buscando compreender e melhorar o processo de ensino-aprendizagem nessa área. Segundo a autora,

A noção de engenharia didática surgiu na didática da matemática no início dos anos oitenta. Foi nomeado com este termo uma forma de trabalho didático comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto específico, é baseado no conhecimento científico de seu domínio e concordar em submeter a um tipo científico. No entanto, ao mesmo tempo, ele é obrigado a trabalhar com objetos muito mais complexos que objetos refinados da ciência e, portanto, tem que abordar praticamente, com todos os meios disponíveis, problemas que a ciência não quer ou não pode assumir (Artigue, 1995, p. 197).

A Engenharia Didática (ED), conforme delineada por Santos (2017), é uma metodologia que valoriza a experiência e a prática do professor dentro da sala de aula. Ao reconhecer o professor como um pesquisador em potencial, a ED permite que suas experiências sejam utilizadas como base para investigar os processos de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos específicos. Isso significa que as estratégias e abordagens desenvolvidas pelo professor podem ser analisadas e adaptadas para promover uma melhor compreensão e assimilação dos conteúdos pelos alunos.

A ideia central por trás da ED é promover uma integração entre a prática docente e a pesquisa educacional. Ao articular suas práticas de ensino com processos investigativos, o professor pode enriquecer sua abordagem pedagógica, incorporando novas metodologias e estratégias didáticas. Dessa forma, a ED não apenas valoriza a expertise do professor, mas também incentiva a constante busca por aprimoramento e inovação no processo de ensino.

Essa metodologia, ao permitir que o professor se aproprie de novas práticas a partir de suas experiências, contribui para a construção de um ambiente de aprendizagem mais eficaz para os alunos. Ao refletir sobre suas práticas, identificar desafios e buscar soluções baseadas em evidências, o professor cria um ambiente educacional mais dinâmico e estimulante, favorecendo o desenvolvimento cognitivo e o sucesso acadêmico dos estudantes.

A Engenharia Didática foi criada para atender a duas questões: a) das relações entre pesquisa e ação no sistema de ensino; b) do lugar reservado para as realizações didáticas entre as metodologias de pesquisa. É uma expressão com duplo sentido. Designa produções para o ensino, derivadas de resultados de pesquisa, e também designa uma específica metodologia de pesquisa baseada em experiências de sala de aula. Nessa linha, prática de ensino é articulada com prática de investigação. A teoria da Engenharia Didática pode ser vista como referencial para o desenvolvimento de produtos para o ensino, gerados na junção do conhecimento prático com o conhecimento teórico (Carneiro, 2005, p. 3).

A Engenharia Didática é dividida, segundo Artigue (1996), em quatro fases entre sua elaboração e execução. Essas fases são conhecidas como: 1) análise preliminar; 2) concepção e análise a priori; 3) implementação da experiência; 4) análise a posteriori e validação da experiência. A seguir, descrevem-se cada fase com suas características específicas.

2.1.1 *Análises preliminares*

Nesta etapa inicial da pesquisa, o foco está em realizar um estudo minucioso para analisar a forma como o conteúdo é transmitido, já que essa análise é fundamental para obter os meios necessários para propor intervenções eficazes posteriormente. De acordo com Santos (2017), esse trabalho deve ser subdividido em três dimensões cruciais: a dimensão epistemológica, que aborda o conhecimento em estudo e inclui a observação de sua evolução histórica, bem como a identificação de obstáculos relacionados à sua natureza e outros aspectos relevantes; a dimensão didática, que se concentra na maneira como o conteúdo é apresentado nos livros didáticos e proposto para o ensino pelos professores; e a dimensão cognitiva, que envolve a análise das questões relacionadas ao conhecimento dos alunos sobre o tema estudado. Artigue (1995) define essa fase da seguinte maneira:

Dans la recherche en ingénierie didactique, la phase de conception repose non seulement sur un cadre théorique didactique général et sur les connaissances didactiques acquises précédemment dans le domaine d'étude, mais aussi sur un certain nombre d'analyses préliminaires. Les plus fréquentes sont: • L'analyse épistémologique des contenus envisagés dans l'enseignement • L'analyse de l'enseignement traditionnel et de ses effets • L'analyse des conceptions des étudiants, des difficultés et des obstacles qui déterminent leur évolution • L'analyse du champ des contraintes où va se situer la réalisation didactique effective • Et, Bien sûr, tout ce qui précède est fait en gardant à l'esprit les objectifs spécifiques de la recherche. En général, malgré le fait que cette série d'analyses ne soit pas mise en évidence dans les publications, le travail que le chercheur a réalisé en tant que piliers de son ingénierie est repris et approfondi au cours des différentes phases de celle-ci, en fonction des besoins ressentis. Par conséquent, les études préliminaires ne conservent leur statut « préliminaire » qu'au premier niveau d'élaboration (Artigue, 1995, p. 27).¹

Segundo Almouloud (2017), essas etapas são descritas de maneira mais detalhada como:

- 1) o estudo da organização matemática, que compreende a análise da origem do conteúdo, alguns aspectos históricos relevantes e como isso pode servir como subsídio para novas práticas; e 2) a análise didática do objeto, em que se realiza um estudo sobre como o conteúdo é abordado nos livros e as diferenças entre as abordagens didáticas. Na etapa 1, ocorre uma

¹ Na pesquisa em Engenharia Didática, a fase de concepção baseia-se não apenas em um referencial teórico didático geral e nos conhecimentos didáticos previamente adquiridos no campo de estudo, mas também em um certo número de análises preliminares. Os mais frequentes são: • A análise epistemológica dos conteúdos contemplados no ensino • A análise do ensino tradicional e seus efeitos • A análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que determinam sua evolução • A análise do campo de restrições onde se situará a efetiva realização didática • E, é claro que tudo isso é feito com os objetivos específicos da pesquisa em mente. Em geral, apesar de essa série de análises não ser evidenciada nas publicações, o trabalho que o pesquisador tem realizado como pilares de sua engenharia é retomado e aprofundado no decorrer das diferentes fases da mesma, dependendo das necessidades sentidas. Portanto, os estudos preliminares só mantêm seu status "preliminar" no primeiro nível de elaboração (Artigue, 1995, p. 197, em tradução livre).

revisão documental para buscar argumentos históricos que fundamentam as fases posteriores da pesquisa, servindo como base para as práticas adotadas. Já na etapa 2, é necessário compreender a relação do conteúdo como objeto de ensino, a importância atribuída pelos materiais didáticos e se o tema está sendo explorado em sua plenitude, considerando aspectos didáticos, cognitivos e epistemológicos.

No estudo da dimensão epistemológica, é fundamental considerar a origem do objeto de ensino e buscar entender aspectos específicos para validar esse conteúdo, destacando-se a importância de analisar os elementos históricos e priorizar os conceitos matemáticos. Dessa forma, a análise epistemológica pode proporcionar uma investigação aprofundada dos conceitos matemáticos, permitindo questionamentos e contribuindo para a compreensão das relações entre esses conceitos e as variáveis didáticas relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem.

Almouloud (2007) ressalta a importância de compreender profundamente as relações entre os objetos matemáticos durante uma análise epistemológica, pois isso permite compreender as variáveis didáticas que afetam o processo de ensino e aprendizagem desses objetos. Essa compreensão é essencial para que o professor estruture uma abordagem pedagógica eficaz, visando atingir a compreensão dos conteúdos matemáticos pelos alunos.

Oliveira (2018) enfatiza que essa análise não busca apenas o conhecimento científico em si, mas sim a diferença entre esse conhecimento e o que se deseja ensinar, o que pode resultar na identificação de *obstáculos epistemológicos*. Estes são descritos por Bachelard (1934) como:

Une connaissance acquise par un effort scientifique peut elle-même décliner. La question abstraite et franche s'use: la réponse concrète reste. Dès lors, l'activité spirituelle s'invertit et se bloque. Un obstacle épistémologique s'incruste sur la connaissance non questionnée. Des habitudes intellectuelles qui furent utiles et saines peuvent, à la longue, entraver la recherche. L'idée gagne ainsi une clarté intrinsèque abusive. À l'usage, les idées se valorisent indûment. Une valeur en soi s'oppose à la circulation des valeurs. C'est un facteur d'inertie pour l'esprit² (Bachelard, 1934, p. 18).

Bachelard introduziu o conceito de *obstáculo epistemológico*, que se refere às barreiras mentais e conceituais que impedem a compreensão e o avanço do conhecimento científico. Esses obstáculos podem surgir de várias fontes, como preconceitos, crenças arraigadas, ideias

² O próprio conhecimento adquirido através do esforço científico pode declinar. A pergunta abstrata e franca se desgasta: A resposta concreta permanece. A partir daí, a atividade espiritual é invertida e bloqueada. Um obstáculo epistemológico está enraizado em um conhecimento inquestionável. Hábitos intelectuais úteis e saudáveis podem, a longo prazo, dificultar a pesquisa. A ideia ganha, assim, uma clareza intrínseca que é indevidamente clara. No uso, as ideias são indevidamente valorizadas. Um valor em si se opõe à circulação de valores. Este é um fator de inércia para o espírito (Bachelard, 1934, p.18, em tradução livre)

preconcebidas, tradições científicas estabelecidas e até mesmo linguagem inadequada. O autor argumentava que superar esses obstáculos era crucial para o progresso da ciência, pois permitia questionar e reformular conceitos, teorias e métodos, levando a descobertas e avanços significativos. Em resumo, um obstáculo epistemológico, na visão de Bachelard (1934), é algo que impede a mente de um cientista de perceber, entender ou aceitar novas ideias ou interpretações que poderiam enriquecer e transformar seu campo de estudo.

Ao abordar a questão dos obstáculos epistemológicos, é fundamental considerar dois processos distintos no desenvolvimento dos conceitos matemáticos. O primeiro processo está relacionado à fase inicial da descoberta desses conceitos, enquanto o segundo processo diz respeito à forma como esses conceitos são representados e redigidos. No contexto da Matemática, é notável que os obstáculos que surgem durante a produção e aprendizagem do conhecimento nem sempre são registrados historicamente, o que destaca a complexidade e a importância de identificar e superar esses obstáculos para garantir uma efetiva compreensão e aprendizado dos conteúdos matemáticos.

Em outras palavras, um obstáculo epistemológico é uma ideia que pode parecer eficiente e útil em determinado contexto, mas ao tentar aplicá-la em outro cenário, pode resultar em fracasso. O pesquisador muitas vezes tenta preservar essa ideia na esperança de usá-la futuramente, porém, isso pode prejudicar a aprendizagem posterior, uma vez que não é adaptável a diferentes situações ou problemas (D'Amore, 2007, p.211).

Um obstáculo epistemológico na didática da matemática pode ser exemplificado pela dificuldade dos alunos em compreender conceitos abstratos, como números irracionais. Isso ocorre porque os alunos, com frequência, apresentam uma visão limitada do número como algo inteiro ou fracionário, não conseguindo conceber números que não podem ser expressos por uma fração simples. Tal obstáculo surge devido à forma como os números irracionais são introduzidos e explicados, muitas vezes sem uma contextualização adequada que permita aos alunos compreenderem sua natureza e importância.

Outro exemplo de obstáculo epistemológico é a compreensão equivocada de certas operações matemáticas, como a divisão por zero. Observa-se que os alunos podem ter dificuldade em entender por que a divisão por zero não é definida ou resulta em um valor indeterminado. Essa dificuldade pode advir de uma abordagem superficial ou inadequada desses conceitos durante o ensino, sem que se explorem as razões matemáticas subjacentes às regras e definições.

Esses obstáculos epistemológicos na didática da matemática reforçam a importância de uma abordagem pedagógica cuidadosa e contextualizada, que considere não apenas a formalidade dos conceitos matemáticos, mas também sua aplicação prática e significado para os alunos.

Sobre a análise de um objetivo de ensino quanto ao aspecto didático, este engloba a observação das condições de funcionamento do ensino, incluindo o material didático, as abordagens pedagógicas e as condições de aprendizagem. Almouloud (2014) aponta que esses elementos são cruciais, pois influenciam diretamente as informações transmitidas pelo professor aos alunos, impactando no processo de ensino e aprendizagem.

Na dimensão cognitiva, é essencial considerar o conhecimento prévio dos alunos e como isso influencia sua relação e interesse pelo conteúdo. Esses conhecimentos prévios delimitam o estilo de aprendizado dos estudantes e são importantes para a delimitação adequada do tema em estudo. É válido ressaltar que as dificuldades identificadas nas etapas anteriores também devem ser consideradas nesse aspecto cognitivo.

Em resumo, essa fase da Engenharia Didática consiste em investigar as potencialidades do conteúdo estudado, sua natureza intrínseca e busca de domínio sobre o assunto para subsidiar as próximas etapas da pesquisa. A análise *a priori*, baseada na Teoria das Situações Didáticas, é abordada na etapa seguinte.

2.1.2 *Concepção e análise a priori*

Nessa fase específica, o pesquisador concentra-se no desenvolvimento de um plano de ação baseado no conteúdo que foi estudado na etapa anterior. A elaboração do plano considera duas categorias de variáveis que podem ser manipuladas pelo pesquisador. Conforme delineado por Artigue (1988), essa fase caracteriza-se:

Dans cette deuxième phase, le chercheur prend la décision d'agir sur un certain nombre de variables système non fixées par les contraintes : des variables de contrôle qu'il suppose être des variables pertinentes par rapport au problème étudié. Afin de faciliter l'analyse de l'ingénierie, il est utile de distinguer deux types de variables de contrôle: les variables macrodidactiques ou globales qui se rapportent à l'organisation générale de l'ingénierie, et les variables microdidactiques ou locales qui concernent l'organisation locale de l'ingénierie, c'est-à-dire l'organisation d'une session ou d'une phase, qui peuvent toutes deux être des variables générales ou des variables dépendantes du contenu didactique auquel l'enseignement est destiné³ (Artigue, 1988, p. 291).

³ Nessa segunda fase, o pesquisador toma a decisão de agir sobre um determinado número de variáveis do sistema não fixadas por restrições: variáveis de controle que ele assume como variáveis relevantes em relação ao problema

Variáveis Macrodidáticas ou Globais: Essas variáveis estão intrinsecamente ligadas à estrutura geral da Engenharia Didática (ED). Elas abrangem os elementos que têm um impacto direto e significativo no processo de ensino e aprendizagem em um contexto mais abrangente. Estas variáveis podem incluir o planejamento curricular, a seleção de estratégias de ensino e avaliação, o ambiente educacional (como a disposição física da sala de aula, recursos tecnológicos disponíveis, entre outros) e os recursos didáticos disponíveis, como livros, materiais de laboratório, softwares educacionais e outras ferramentas de apoio ao ensino. Juntas, essas variáveis formam a base para o desenvolvimento de um ambiente educacional eficaz e bem-sucedido, onde os alunos podem adquirir conhecimentos, habilidades e competências de forma significativa e engajada.

Variáveis Microdidáticas ou Locais: Ao contrário das variáveis macrodidáticas, essas estão mais relacionadas à organização de fases específicas ou momentos particulares dentro da engenharia. Elas abrangem aspectos mais detalhados e específicos do processo de ensino-aprendizagem, como a sequência de atividades de aprendizagem, a interação entre os alunos e o professor, o uso de materiais didáticos específicos e a adaptação do ensino às necessidades individuais dos alunos. “Esta segunda distinção é clássica, pois distinguimos as chamadas variáveis de problema das chamadas variáveis de situação ligadas à organização e gestão do ambiente (Brousseau 1986), sendo as variáveis didáticas, entre elas, aqueles cujo efeito didático tenha sido atestado”⁴ (Artigue, 1988, p. 291).

Essas duas categorias de variáveis podem ser influenciadas pelo conteúdo matemático em estudo e são analisadas em três dimensões distintas durante a fase de análise *a priori*. A dimensão epistemológica foca nas características intrínsecas do conhecimento matemático em questão, buscando compreender como ele é estruturado e suas relações conceituais. A dimensão cognitiva concentra-se nas características cognitivas dos alunos envolvidos no processo de aprendizagem, considerando seus conhecimentos prévios, habilidades e estratégias cognitivas. Por fim, a dimensão didática aborda as características do ambiente de ensino, incluindo a metodologia utilizada, a interação professor-aluno, os recursos didáticos disponíveis e as estratégias de avaliação utilizadas para monitorar o progresso dos alunos.

estudado. Para facilitar a análise de engenharia, é útil distinguir entre dois tipos de variáveis de controle: variáveis macrodidáticas ou globais que se relacionam com a organização geral da engenharia, e variáveis microdidáticas ou locais que se relacionam com a organização local da engenharia, ou seja, a organização de uma sessão ou fase, ambas podem ser variáveis gerais ou dependentes do conteúdo didático a que se destina o ensino (Artigue, 1988, p. 291, em tradução livre).

⁴ Cette seconde distinction est classique, puisque l'on distingue les variables dites problèmes des variables dites de situation liées à l'organisation et à la gestion de l'environnement (Brousseau 1986), et les variables didactiques sont celles dont l'effet didactique a été attesté (Artigue, 1988, p. 291, em tradução livre).

Nesse contexto, o objetivo da análise *a priori* consiste em conceber as situações didáticas com base em hipóteses acerca dos possíveis comportamentos e estratégias dos alunos. Para tanto, devem ser identificadas as variáveis didáticas cuja manipulação permite controlar e antecipar os resultados esperados, bem como explicá-los *a posteriori*. Conforme Almouloud e Coutinho (2008), a análise *a priori* deve:

1) Descrever as escolhas das variáveis locais e as características da situação didática desenvolvida. 2) Analisar a importância dessa situação para o aluno e, em particular, em função das possibilidades de ações e escolhas para construção de estratégias, tomadas de decisões, controle e validação que o aluno terá. As ações do aluno são vistas no funcionamento quase isolado do professor, que, sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagem; 3) Prever comportamentos possíveis e tentar mostrar como a análise feita permite controlar seu sentido, assegurando que os comportamentos esperados, se e quando eles intervêm, resultam do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem (Almouloud; Coutinho, 2008, p. 67).

Para garantir um controle eficaz das escolhas feitas durante a análise *a priori*, é fundamental seguir as diretrizes estabelecidas por Artigue (1988), que enfatiza a importância de basear as suposições que serão posteriormente validadas. Isso significa que as hipóteses levantadas durante essa fase serão confrontadas e verificadas na etapa seguinte, conhecida como análise *a posteriori*. Essa análise, conforme Artigue (1988), tradicionalmente inclui uma abordagem descritiva e preditiva, focada nas características de uma situação a-didática, ou seja, uma situação que leva o estudante a perceber padrões que serão aplicados na resolução de uma situação didática específica.

Assim, a análise *a priori* desempenha um papel crucial como uma fase de controle dentro do processo da ED. Ela possibilita a definição das necessidades dos estudantes por meio de situações previamente planejadas de acordo com o público-alvo da pesquisa. Esse planejamento é fundamental para orientar a etapa subsequente, que é a experimentação.

2.1.3 Experimentação

Na experimentação, terceira fase da Engenharia Didática, as situações previamente concebidas na análise *a priori* são aplicadas em um ambiente real de aprendizagem, permitindo testar as hipóteses e estratégias delineadas, bem como verificar sua eficácia e adequação ao público-alvo. Nessa fase, coletam-se os dados necessários à pesquisa por meio de diversos instrumentos, tais como vídeos, relatórios de aula, registros fotográficos, gravações em áudio, produções dos alunos, entrevistas e outros recursos, os quais constituem o *corpus* da pesquisa

– isto é, o conjunto de dados que será analisado posteriormente. Dessa forma, a experimentação mostra-se como um momento crucial tanto para validar e aprimorar as abordagens didáticas propostas quanto para formar a base empírica das análises *a posteriori*.

De acordo com Almouloud e Coutinho (2008), durante a experimentação, há a aplicação efetiva das situações didáticas, e caso necessário, são realizadas correções com base nas análises locais do desenvolvimento experimental. Essas análises podem identificar a necessidade de ajustes, o que implica em um retorno à fase de análise *a priori*. Esse retorno é necessário quando o pesquisador identifica possíveis obstáculos ou quando os conhecimentos prévios dos estudantes não estão alinhados com o que foi desenvolvido na fase anterior.

Além disso, os autores ressaltam a importância de trabalhar uma metodologia de ensino estruturada para aplicar eficazmente esta fase da ED. No contexto da presente pesquisa, será utilizada a TSD e seus mecanismos de coleta de dados. É fundamental garantir a qualidade desta coleta, pois ela influenciará diretamente na análise *a posteriori*, que confrontará os dados obtidos com os objetivos pretendidos.

2.1.4 Análise *a posteriori* e validação

Na análise *a posteriori* da ED, o *corpus* da pesquisa é organizado de maneira sistemática a partir dos dados coletados durante a experimentação. Nessa etapa, as hipóteses e as análises formuladas na análise *a priori* são confrontadas com os resultados obtidos, com o objetivo de verificar a eficácia da metodologia empregada. Essa confrontação permite avaliar se as intervenções propostas alcançaram os objetivos estabelecidos e promoveram a aprendizagem de forma significativa para os alunos.

Além disso, essa etapa possibilita o levantamento de questionamentos relevantes, que podem orientar investigações futuras sobre o tema abordado. Os questionamentos levantados durante essa etapa podem direcionar novos estudos e contribuir para o aprimoramento das práticas educacionais, especialmente no que diz respeito ao ensino de conteúdos matemáticos. Dessa forma, a análise *a posteriori* desempenha um papel fundamental para a validação da engenharia desenvolvida, a continuidade dos estudos e aprimoramento do conhecimento educacional. Ademais, Carneiro (2005) coloca que:

As investigações que recorrem à experimentação em sala de aula, muitas vezes, incluem uma avaliação externa de grupos experimentais ou grupos de testemunho diferentes, para verificar sua validade. Na Engenharia Didática, a validação é essencialmente interna, fundada no confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori* (Carneiro, 2005, p. 105).

Segundo Carneiro (2005), todo o material coletado na fase de experimentação deve ser analisado e confrontado com as hipóteses da análise *a priori*, a fim de que se identifiquem as ideias que sofreram distorções durante essa fase e que, portanto, não puderam ser validadas naquele momento. Embora a análise cuidadosa do material coletado, confrontado com as hipóteses *a priori*, seja um passo essencial para identificar e corrigir tais distorções, esse processo não esgota a validação exigida pela ED. Nesse sentido, as validações interna e externa são de suma importância para garantir a qualidade e a relevância dos resultados obtidos.

As validações *interna* e *externa* na ED são etapas que visam garantir a confiabilidade e a validade dos resultados obtidos durante o processo de pesquisa. A *validação interna* refere-se à análise rigorosa do material coletado durante a fase de experimentação, confrontando-o com as hipóteses estabelecidas na análise *a priori*. Isso permite identificar e corrigir distorções nas ideias apresentadas, garantindo que os resultados reflitam de forma precisa e fiel as conclusões derivadas do processo de investigação. Além disso,

[...] o processo de validação interna que aqui está em causa não cai certamente na armadilha habitual das validações estatísticas associadas a experiências de sala de aula que consiste em basear-se implicitamente no princípio de que as diferenças mensuráveis observadas estão ligadas às variáveis de controlo sobre as quais jogámos para diferenciar aulas experimentais e aulas de controle. No entanto, não está isento de problemas (Artigue, 1988, p. 292).

Por outro lado, a *validação externa* envolve a comparação dos resultados obtidos na experimentação com o conhecimento existente na área de estudo, sendo

Uma comparação das produções dos estudantes antes ou ao longo da sequência, ou ainda após experimentação em sala, o que pode ocorrer por meio de entrevistas individuais ou em grupo, bem como por meio de questionários. E, também, por meio da comparação de produções externas, envolvendo outros alunos não submetidos à mesma sequência estruturada de ensino (Laborde, 1995, p. 105 apud Alves, 2016, p. 697).

Isso significa verificar se as conclusões e as propostas de melhoria derivadas da ED estão alinhadas com teorias, pesquisas e práticas reconhecidas no campo da Educação Matemática. A validação externa é essencial para garantir que as descobertas e as recomendações geradas pela ED sejam válidas e relevantes dentro de um contexto mais amplo da área de estudo.

Diante das definições de cada fase da ED, e, percebendo que durante o processo de experimentação da pesquisa, deveremos nos basear em alguma teoria de ensino e coleta de dados, no próximo tópico descreveremos a teoria de ensino utilizada nesta pesquisa.

2.2 Teoria das Situações Didáticas (TSD)

A Teoria das Situações Didáticas (TSD), desenvolvida por Guy Brousseau, enfatiza a importância dos elementos essenciais no processo de ensino, incluindo tanto o professor quanto o aluno, e o ambiente em que ocorre essa interação, denominado por *milieu* (meio). Esse meio é fundamental para compreender como os indivíduos interagem e aprendem, Brousseau (1998) define uma situação como:

Une situation est l'ensemble des circonstances dans lesquelles une personne se trouve, et des relations qui l'unissent à son milieu. Prendre comme objet d'études les circonstances qui président à la diffusion et à l'acquisition des connaissances conduit donc à s'intéresser aux situations. Les situations didactiques sont, dans la langue française, des situations qui servent à enseigner. Deux points de vue s'opposent alors : Selon le premier, la situation est l'environnement de l'élève mis en œuvre et manipulé par l'enseignant ou l'éducateur qui la considère comme un outil. Selon le second, qui sera étudié dans la partie B de ce texte, la situation didactique est l'environnement tout entier de l'élève, l'enseignant et le système éducatif lui-même y compris (Brousseau, 1998, p. 2.)⁵.

A parte B na qual Brousseau se refere, diz respeito ao conceito de *milieu*. Segundo o Brousseau (1998), enquanto Skinner, Rosemblatt, Chomski, Suppes, e outros estavam concentrados em criar modelos para entender o comportamento humano e a aquisição do conhecimento por meio de diferentes abordagens, como modelos estímulo-resposta e modelos estocásticos, surgiu a ideia de que também seria possível aplicar esses mesmos princípios para modelar situações, especialmente o ambiente adverso em que o sujeito está inserido. A partir dessa ideia, ele descreve o *milieu*:

Considérons un dispositif mis en oeuvre par une personne qui veut enseigner une connaissance ou contrôler son acquisition. Ce dispositif comprend un milieu matériel : les pièces d'un jeu, une épreuve, un problème, voire un exercice, une fiche etc. et les règles d'interactions de l'apprenant avec ce dispositif : le jeu proprement dit. Mais seuls le fonctionnement et le déroulement effectif du dispositif, les parties effectivement jouées, la résolution du problème etc., peuvent produire un effet d'enseignement (Brousseau, 1998, p. 3)⁶.

⁵ Uma situação é o conjunto de circunstâncias em que uma pessoa se encontra e as relações que a unem ao seu ambiente. Tomar como objeto de estudo as circunstâncias que presidem a disseminação e aquisição do conhecimento leva, portanto, ao interesse pelas situações. Situações didáticas são, na língua francesa, situações que são usadas para ensinar. Dois pontos de vista opostos são então opostos: segundo o primeiro, a situação é o ambiente do aluno implementado e manipulado pelo professor ou educador que o considera como ferramenta. De acordo com a segunda, que será estudada na Parte B deste texto, a situação didática é todo o ambiente do aluno, incluindo o professor e o próprio sistema educacional (Brousseau, 1998, p. 2., em tradução livre).

⁶ Consideremos um dispositivo implementado por uma pessoa que quer ensinar conhecimento ou controlar sua aquisição. Este dispositivo inclui um ambiente material: as peças de um jogo, um teste, um problema, ou mesmo um exercício, uma folha etc. e as regras de interação do aprendiz com esse dispositivo: o jogo em si. Mas somente o funcionamento e o desenvolvimento efetivo do dispositivo, os jogos realmente jogados, a resolução do problema etc., podem produzir um efeito didático (Brousseau, 1998, p. 3, em tradução livre).

Oliveira (2018) esclarece que se trata de um conjunto de elementos externos ao aluno, que exercem influência sobre o sujeito no sentido oposto, ou seja, enquanto o aluno busca construir conhecimento e significados, o *milieu* representa os elementos que moldam e influenciam essa construção. Tais elementos podem ser variados e incluem fatores como o contexto cultural, social, material e histórico em que a aprendizagem ocorre. Ainda segundo a autora:

O *milieu* atua como um conjunto adidático, que não possui propósitos didáticos, no entanto, por meio de um efeito retroativo à ação do indivíduo, possibilita-o a participar ativamente do processo de ensino e aprendizagem. Nesse sentido, “segundo a teoria piagetiana, a criança aprende adaptando-se a um *milieu* numa situação não didática” (Oliveira, 2018, p. 30).

Teixeira e Passos (2013) relata que Brousseau seguiu o sentido inverso de Comenius que sugeria que “o estudo do ensino começava, de modo direto, pelo inventário dos princípios gerais da educação e das condições que decorriam racionalmente desses princípios. A consideração do conhecimento ensinado, objeto principal do ensino, só intervinha depois” (Teixeira; Passos, 2013, p. 2).

[...] Partiu de traços/vestígios da atividade cultural que produz precisamente tal conhecimento matemático a ser ensinado (um texto) e buscou estabelecer condições para que essa atividade possa ir ao encontro de um modo de aculturação para um jovem iniciante. Dos textos aos problemas, depois às situações matemáticas... e, enfim, às condições didáticas que permitem sustentar essas situações e fazê-las produzir a aculturação visada. [...] a Didática da Matemática estuda atividades didáticas que têm como objetivo o ensino da parte específica dos saberes matemáticos, propiciando explicações, conceitos e teorias, assim como meios de previsão e análise; incorporando resultados relativos aos comportamentos cognitivos dos alunos, além dos tipos de situações utilizadas e os fenômenos de comunicação do saber (Teixeira; Passos, 2013, p. 3).

Nesse sentido, apresenta-se a seguir o que Brousseau (1998) denomina como as dialéticas (ou situações) da TSD: ação, formulação, validação e a institucionalização.

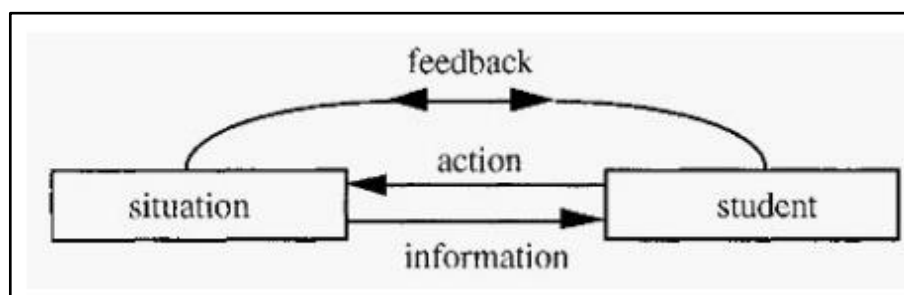
Situação de Ação: a primeira etapa da sequência, com a finalidade de envolver o aluno no processo de aprendizagem. Nesta fase, as respostas são puramente experimentais, ou seja, não possuem grande influência do ponto de vista teórico. Todas as ações são estabelecidas conforme o estudo pré-estabelecido, mas que não permitem a compreensão sistemática do objeto em estudo. Segundo Brousseau (1998):

Plus généralement nous pouvons considérer de la même manière les interactions d’une institution avec d’autres institutions. “Agir” consiste pour un sujet à choisir directement les états du milieu antagoniste en fonction de ses propres motivations. Si

le milieu réagit avec une certaine régularité, le sujet peut être conduit à anticiper ces réactions et à en tenir compte dans ses propres actions. Les connaissances sont ce qui permet de produire et de changer ces “anticipations”. L’apprentissage est le processus par lequel les connaissances se modifient. Nous pouvons représenter ces connaissances par des descriptions de tactiques (ou procédures) que le sujet semble suivre ou par des déclarations dont le sujet semble tenir compte, mais il ne s’agit que de projections. La manifestation observable est un patron de réponse expliqué par un “modèle implicite d’action” (Brousseau, 1998, p. 6)⁷.

A organização da sequência deve “possibilitar ao aluno (individualmente ou em grupo) enfrentar o problema sem intervenção direta do professor” (Nunes; Nunes, 2019, p. 164). Neste momento, o estudante, já de posse do problema, deve buscar métodos para a resolução, interagindo com o *milieu*, buscando refletir a partir de suas tentativas para encontrar um método que alcance uma solução para o problema. Brousseau (2008) apresenta uma representação para mostrar esta situação:

Figura 1 - Esquema de uma situação de ação



Fonte: Brousseau (1998, p.2)

A figura apresenta como o aluno lida com a informação e a transmite ao meio sob forma de ação. Essa ação retorna ao aluno, configurando-se, assim, como a situação de ação (Nunes; Nunes, 2019).

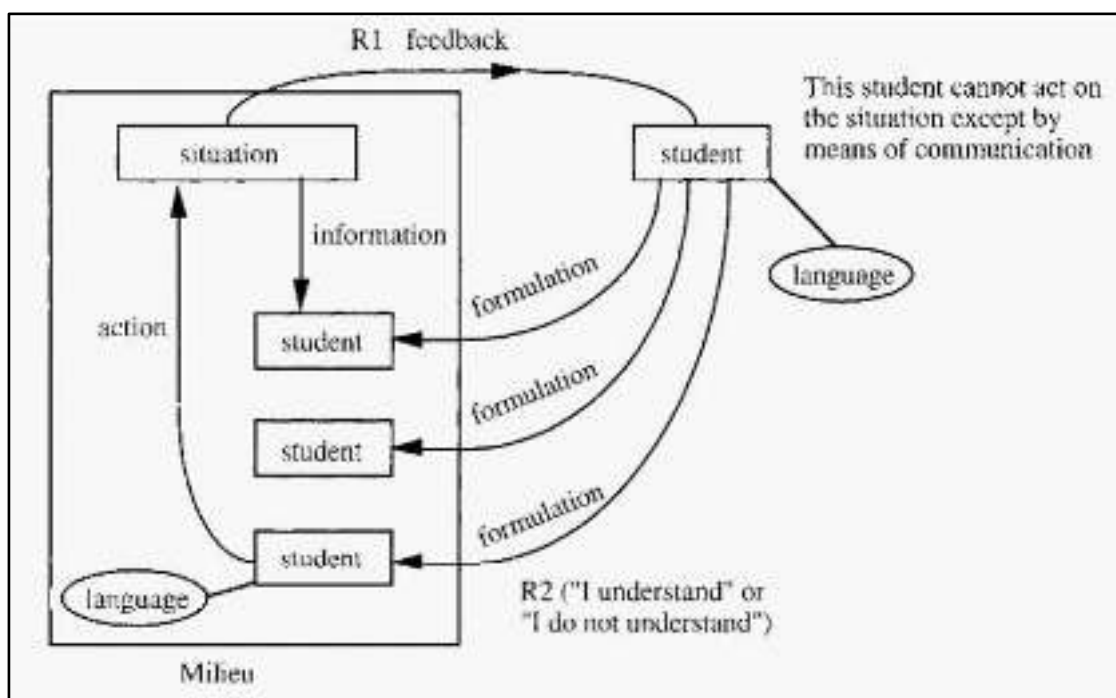
Situação de Formulação

Devido ao processo de ação desenvolvido na etapa anterior, o aluno possivelmente poderá elaborar uma situação que se aproxime do rigor matemático exigido, para tanto, este se utiliza de alguma teoria ou elementos de uma, mesmo que não intencionalmente, esta resposta ainda não pode ser validada pois o aluno não tem a obrigatoriedade de a justificar.

⁷ De maneira mais geral, podemos considerar da mesma forma as interações de uma instituição com outras instituições. “Agir” para um sujeito envolve escolher diretamente os estados do ambiente adverso com base em suas próprias motivações. Se o ambiente reage de forma regular, o sujeito pode ser levado a antecipar essas reações e a levá-las em conta em suas próprias ações. O conhecimento é o que permite produzir e alterar essas “antecipações”. A aprendizagem é o processo pelo qual o conhecimento se modifica. Podemos representar esse conhecimento por meio de descrições de táticas (ou procedimentos) que o sujeito parece seguir ou por declarações às quais o sujeito parece prestar atenção, mas essas são apenas projeções. A manifestação observável é um padrão de resposta explicado por um “modelo implícito de ação” (Brousseau, 1998, p. 6, em tradução livre).

Segundo Nunes e Nunes (2019), para que o processo ocorra de forma satisfatória, é necessária uma intensa comunicação entre ideias, assim como no processo de investigação. Ocorre, então, a interação do aluno com o milieu; para tanto, é importante que a linguagem utilizada seja a mais próxima possível do estudante, não exigindo uma linguagem matemática formal. Nesse processo, podem aparecer termos que não condizem com a situação, e o aluno procurará a melhor maneira de se expressar, cabendo, então, “o uso de metáforas, criação de termos semiológicos novos, falta de pertinência e de eficácia na mensagem, dentro de retroações contínuas” (Teixeira; Passos, 2013, p. 166). A Figura 2 representa o que Brousseau utilizou para demonstrar essa situação.

Figura 2 - Situação de formulação por esquema



Fonte: Brousseau (1998, p. 29).

Na Figura 2, Brousseau (1998), explica que nesta fase o sujeito é capaz de reconhecer, identificar, decompor e reconstruir um conhecimento e, assim, transformá-lo em uma descrição por palavras. Neste caso, o meio deve oferecer a esse sujeito, um outro sujeito para que este possa informar sobre suas descobertas.

Situação de Validação

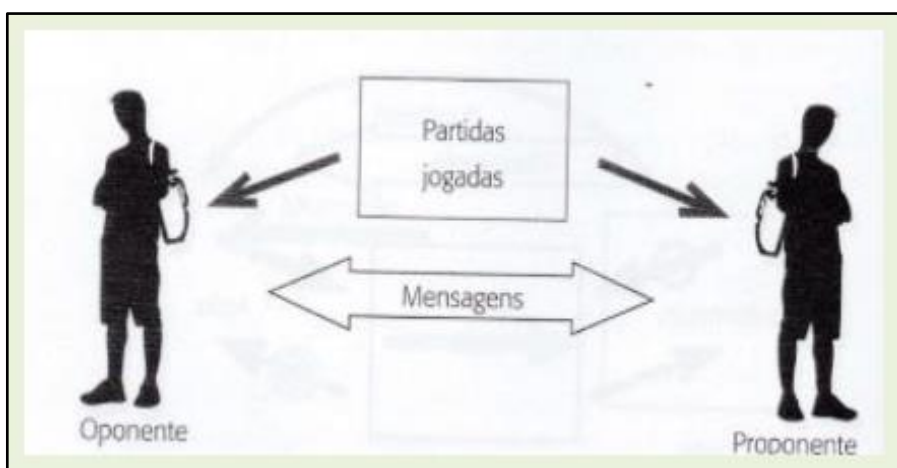
Diferentemente da etapa anterior, na qual o aluno podia expressar suas ideias sem a exigência de justificativa formal, na situação de validação o professor conduz o discurso de modo que o estudante seja levado a formular suas ideias considerando, agora, o rigor

matemático necessário. Isso implica, por exemplo, a produção de provas, demonstrações ou argumentações logicamente estruturadas, que validem as conjecturas apresentadas.

Dans ce nouveau type de situation, les élèves organisent des énoncés en démonstrations, construisent des théories - des ensembles d'énoncés de référence -, et apprennent comment convaincre les autres ou se laisser convaincre sans céder aux arguments rhétoriques comme l'autorité, la séduction, l'amour propre, l'intimidation etc. (Brousseau, 1998, p. 8)⁸.

Nessa situação, os estudantes tentam convencer seus interlocutores da resolução do problema, agora utilizando uma linguagem matemática apropriada, com o apoio de demonstrações. Cabe lembrar que, nas etapas anteriores, o professor deve permitir que os alunos sigam seus próprios caminhos na busca pela resolução; essas fases são denominadas *adidáticas*. A seguir, apresenta-se a Figura 3, que representa essa situação.

Figura 3 - Esquema da situação de formulação



Fonte: Nunes e Nunes (2019, p. 166).

A Figura 3 representa a troca de ideias de maneira mais coletiva, agora orientada pelo rigor matemático. A comunicação leva à escolha de respostas; essas respostas formam um conceito, e este pode ser validado.

Situação de Institucionalização

Na TSD, a situação de institucionalização trata-se da etapa em que o professor intervém na aprendizagem para revelar a resolução esperada, apresentando o caminho matematicamente correto. Nesse momento, o professor retoma para si a responsabilidade antes atribuída ao aluno,

⁸ Nesse novo tipo de situação, os alunos organizam depoimentos em demonstrações, constroem teorias - conjuntos de enunciados de referência - e aprendem a convencer os outros ou se deixam convencer sem ceder a argumentos retóricos como autoridade, sedução, autoestima, bullying etc. (Brousseau, 1998, p. 8, em tradução livre).

podendo desfazer percursos que não se mostraram necessários à constituição do objeto de estudo, visando à sua devida generalização. Conforme Teixeira e Passos (2013, p. 12): “É na institucionalização que o papel explícito do professor é manifestado: o objeto é claramente oferecido ao aluno.”

Após a exposição das quatro dialéticas da TSD – ação, formulação, validação e institucionalização –, evidencia-se a articulação dessa teoria com a Engenharia Didática (ED). Conforme Artigue (1988; 1995), a ED fornece um quadro metodológico que organiza o trabalho do pesquisador desde as análises preliminares até a validação dos resultados, passando pela concepção, experimentação e análise *a posteriori*. Para que a experimentação pudesse ser conduzida e os dados coletados fossem interpretados à luz das hipóteses didáticas, adotou-se a TSD como referencial teórico subjacente, conforme recomendado por Almouloud e Coutinho (2008) e Almouloud (2014). Dessa forma, a ED e a TSD não se sobrepõem, mas complementam-se: enquanto a primeira estrutura a pesquisa em suas fases, a segunda oferece os conceitos e as situações que orientam a análise das interações didáticas. No que tange ao objeto matemático – os números figurados –, sua apresentação e desenvolvimento seguem os pressupostos da ED, partindo da gênese histórica e conceitual até a concepção das situações de ensino, posteriormente validadas conforme as fases da ED. Tal conteúdo será tratado no capítulo seguinte.

3. NÚMEROS FIGURADOS E SUAS REPRESENTAÇÕES

Neste capítulo, explora-se a fase da Engenharia Didática conhecida como análise preliminar, com foco específico no contexto dos números figurados. A análise preliminar constitui uma etapa fundamental que antecede a experimentação, na qual são identificadas hipóteses e questões a serem investigadas ao longo da fase prática. No caso dos números figurados, essa fase envolve a compreensão aprofundada dos conceitos envolvidos – notadamente números triangulares, quadrados, pentagonais e outras formas geométricas –, além da exploração de suas propriedades matemáticas e das relações estabelecidas entre si. Ao fundamentar uma base sólida na análise preliminar, é possível direcionar efetivamente as investigações durante a experimentação, com vistas a desenvolver estratégias de ensino mais eficazes e promover uma compreensão mais sólida dos números figurados pelos alunos.

Antes de abordar os números figurados em um contexto educacional, mostra-se importante considerar os conhecimentos prévios necessários aos alunos. Tal consideração inclui a compreensão das definições de sequências numéricas, recorrências e fórmulas do termo geral associadas aos números figurados. Além disso, a contextualização histórica dos números figurados, incluindo a exploração de sua origem e de sua relevância ao longo do tempo, pode enriquecer a compreensão desses conceitos matemáticos. No ensino dos números figurados, há múltiplas possibilidades de abordagem, tais como o uso de materiais manipuláveis físicos, atividades práticas que explorem as propriedades e relações entre os números figurados, investigações matemáticas para a descoberta de padrões nas sequências, e o emprego de recursos tecnológicos, como softwares interativos, para a visualização e exploração dos números figurados em diferentes contextos. Essas estratégias podem criar um ambiente de aprendizagem dinâmico, favorecendo a compreensão e o domínio dessa classe de números.

Para iniciar o estudo dos números figurados, é necessário que se explique que estes podem ser indicados por sequências numéricas recorrentes e que se pretende aqui apresentar a recorrência de algumas classes específicas, fórmula geral e função geradora. Para isso, é necessária uma breve explicação do que cada uma dessas fórmulas significa. Por isso, antes de mostrar os números propriamente ditos, apresentar-se-á a Matemática que existe nestas representações, ou seja, nas sequências lineares recursivas.

3.1 Fundamentação Teórica

Neste tópico, apresentam-se as compreensões e definições fundamentais para a análise de conceitos mais avançados. Entre essas definições, destacam-se as sequências, que representam padrões ordenados de números ou objetos, podendo ou não apresentar uma determinada regra de formação. Além disso, exploram-se as equações de recorrência, que descrevem uma relação entre termos sucessivos de uma sequência, sendo fundamentais para modelar e resolver problemas que envolvem progressões numéricas e fenômenos de repetição.

De modo geral, abordam-se também outras propriedades matemáticas essenciais, como relações de ordem e operações básicas, que constituem a base para o entendimento mais aprofundado de temas relacionados aos números figurados. Ao estabelecer uma sólida compreensão dessas definições matemáticas, fica-se preparado para explorar de forma mais abrangente e aprofundada as aplicações e implicações desses conceitos.

Definição 1 (Sequência numérica). Os números naturais $0, 1, 2, 3, \dots$, ordenados de acordo com sua magnitude, formam uma sequência: a sequência dos números naturais. Se a cada um desses números n , estiver associado um único número definido (complexo) a_n , então esses números $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ formam uma sequência infinita de números, resumidamente, uma sequência (Knopp, 1956).

Claro que esta é uma definição geral em que o conjunto de números associados é o conjunto dos números complexos. Contudo, as sequências tratadas nesta tese estão limitadas ao conjunto dos números inteiros. Dessa forma, uma sequência pode ser escrita de forma ordenada, em que cada termo é denominado *termo da sequência*, e apresentado da seguinte maneira:

$$A = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Em que a_n é o n -ésimo número associado a sequência. Em alguns casos, ao longo deste trabalho, será necessário trabalhar com índice zero; ou seja, por vezes a sequência apresentada terá a configuração $A = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Algumas sequências possuem uma associação entre seus termos anteriores: estas são chamadas de *sequências recorrentes*, a qual define-se a seguir:

Definição 2 (Sequência Recorrente). Uma sequência recorrente é uma sequência matemática na qual cada termo posterior é definido em função dos termos que o antecedem. Essa relação é expressa por uma equação de recorrência, a qual descreve a dependência entre os termos sucessivos. Tal sequência pode ser representada pela seguinte equação:

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k})$$

Sendo a_n é o n -ésimo termo da sequência, $(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k})$ os termos anteriores necessários para se calcular a_n e f é uma função que estabelece uma relação entre os termos.

Como exemplo, tem-se a sequência de Fibonacci $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$, que pode ser representada pela equação de recorrência $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, com termos iniciais $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$.

As equações de recorrência, podem ser classificadas quanto à sua ordem, quanto à sua linearidade e quanto à homogeneidade.

Definição 3. Quando a relação de recorrência toma a forma:

$$a_n = f(n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}),$$

dizemos que se trata de uma recorrência de ordem k (Cardoso; Szymański; Rostami, 2009).

Por exemplo, a equação de recorrência $T_{n+3} = 3T_{n-2} - 3T_{n-1} + T_n$ é uma equação de recorrência de 3ª ordem, pois para encontrarmos um certo termo a partir dos termos iniciais, é necessária uma combinação de seus três termos imediatamente anteriores.

Definição 4 (Equação de Recorrência Linear). Designa-se por equação de recorrência linear homogênea toda equação da forma:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_r a_{n-r},$$

onde $c_i, i = 1, 2, \dots, r$ são constantes não nulas e não dependem de n (Cardoso, Szymański e Rostami, 2009).

Definição 5. As equações de recorrência lineares não homogêneas são da forma:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_r a_{n-r} + f(n),$$

onde $f(n) \neq 0$ para pelo menos um n natural. A recorrência $Q_{n+1} = Q_n + 2n + 1$ é linear de ordem 1 e não homogênea, pois $2n + 1$ é uma função não nula para qualquer número natural.

Os números figurados são definidos por recorrências lineares, por isso não serão definidas aqui as recorrências não lineares.

3.2 Ferramentas de apoio ao estudo das sequências

Essa seção tem como foco principal discorrer sobre os principais meios de apoio desta pesquisa. Em um primeiro momento, apresenta-se o site *The Online Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS), que se caracteriza como um amplo catálogo de sequências inteiras e terá participação essencial quando as sequências forem analisadas quanto às suas representações e propriedades. Em seguida, discute-se a segunda ferramenta de apoio, a plataforma e o *software* GeoGebra, cujo papel é crucial para o desenvolvimento das representações e, principalmente, para a exploração das relações entre números triangulares e números simplexos, quando considerados em dimensão k .

Dessa forma, essas ferramentas atuarão como suporte metodológico e conceitual para a construção e validação das conjecturas formuladas ao longo das fases da ED. Ambas serão utilizadas tanto para verificar padrões numéricos identificados pelo autor e pelos estudantes, quanto para fornecer a validação de representações algébricas e geométricas que possibilitem aprofundar a análise dos resultados. Assim, elas não apenas contribuem para o rigor matemático da investigação, mas também ampliam as possibilidades de visualização e interpretação das estruturas dos números figurados.

Nas próximas seções, abordam-se os números figurados e, por vezes, será necessária de uma catalogação e assim o faremos por meio da enciclopédia *on-line* OEIS. Para tanto, dedica-se este tópico para uma melhor familiarização com esta importante ferramenta.

A OEIS é uma vasta e abrangente base de dados que cataloga sequências de números inteiros. Fundada por Neil J. A. Sloane, em 1964, a enciclopédia tem como objetivo principal ser uma ferramenta útil para matemáticos, cientistas e entusiastas da Matemática em geral (Sloane, 2018). Cada entrada na OEIS inclui a sequência numérica, descrições detalhadas, referências a trabalhos acadêmicos, gráficos e programas de computador relacionados. A acessibilidade e a colaboração aberta são marcas registradas da OEIS, permitindo que qualquer pessoa submeta novas sequências ou edite entradas existentes, desde que sigam critérios rigorosos de verificação e relevância.

Segundo a *OEIS Foundation Inc.* (2025), ao longo dos anos a OEIS tornou-se uma fonte inestimável para a pesquisa matemática, ao facilitar a descoberta de novas propriedades e conexões entre diferentes sequências. A base de dados reúne mais de 350.000 sequências, abrangendo uma ampla variedade de tópicos, que vão desde problemas clássicos da Teoria dos Números até aplicações em Ciência da Computação e Engenharia. O impacto da OEIS é evidenciado pela frequência com que é citada em publicações acadêmicas, bem como pelo papel fundamental que desempenha na resolução de problemas matemáticos complexos. Ademais, a comunidade ativa de colaboradores e usuários assegura que a enciclopédia continue em

constante expansão e aprimoramento, consolidando sua posição como um recurso essencial no campo da Matemática. A popularidade e a utilidade da OEIS vão além do âmbito acadêmico: entusiastas da matemática e programadores frequentemente recorrem à OEIS para inspiração em desafios de programação. A interface da plataforma, combinada com a riqueza de informações e a possibilidade de visualizações gráficas, torna a experiência de uso bastante intuitiva.

A comunidade OEIS é outro aspecto que destaca a plataforma. Com contribuições de usuários ao redor do mundo, a enciclopédia é um exemplo de colaboração global em ciência. Os fóruns de discussão e as possibilidades de *feedback* permitem um diálogo contínuo entre os usuários, facilitando a troca de conhecimentos e a correção de possíveis erros nas entradas. Essa abordagem colaborativa não apenas enriquece a base de dados, mas também fortalece a comunidade matemática, promovendo um ambiente de aprendizado mútuo e inovação contínua.

Desse modo, essa ferramenta desempenhará um papel importante nesse trabalho pois guiará a identificação da sequência dos números figurados. Contudo, ela não será usada para apresentar fórmulas e definições – que também estão disponíveis no site –, mas apenas para a identificação e a validade das sequências aqui discutidas.

Sobre a segunda ferramenta – o GeoGebra –, este é um software interativo de acesso aberto que possui aplicações em várias áreas da Matemática. Foi criado por Markus Hohenwarter em 2001/2002 como parte de sua tese de mestrado (Hohenwarter, 2002) em Educação Matemática e Ciência da Computação na Universidade de Salzburgo, na Áustria. Com o apoio de uma bolsa DOC da Academia Austríaca de Ciências, ele conseguiu continuar o desenvolvimento do software como parte de seu projeto de doutorado em Educação Matemática (Hohenwarter, 2006). Durante esse período, o GeoGebra ganhou diversos prêmios internacionais, incluindo os prêmios europeus e alemães de recurso tecnológico educacional, e foi traduzido por instrutores e professores de matemática em todo o mundo para mais de 25 idiomas. O GeoGebra sempre esteve disponível gratuitamente, inicialmente graças ao apoio do Ministério da Educação da Áustria e, posteriormente, graças ao projeto americano da NSF: *Standard Mapped Graduate Education and Mentoring* (Roanes-Lozano; Solano-Macías, 2023). A interface gráfica do GeoGebra é semelhante a de outros softwares matemáticos.

Nesse trabalho, o GeoGebra constitui o principal recurso tecnológico educacional e um dos eixos centrais da pesquisa, em articulação com as teorias adotadas e o estudo dos números figurados. O uso desse software possibilita a transposição das propriedades matemáticas para representações visuais dinâmicas, favorecendo a interação dos estudantes com o objeto matemático investigado. Dessa forma, o GeoGebra assume papel fundamental no

desenvolvimento do trabalho em todas as fases metodológicas, destacando-se, sobretudo, na análise *a priori*, na concepção das situações didáticas e na fase de experimentação.

3.3 Números figurados na História da Matemática

Nesse tópico analisa-se o desenvolvimento histórico dos números figurados ao longo do tempo, começando com os pitagóricos, conforme descrito em livros de História da Matemática, e seguindo até os dias atuais, com o progresso dos números figurados desde suas formas planas e sua origem até as configurações de várias dimensões e sua aplicação em diferentes áreas da Matemática.

Os registros históricos atribuem a classificação dos Números Figurados aos pitagóricos, conforme mencionam vários autores de História da Matemática (Roque, 2012; Eves, 1995; Conway; Guy, 1998). No entanto, é importante ressaltar que a existência real de Pitágoras é colocada em dúvida devido à falta de fontes diretas e à interpretação seletiva dos textos disponíveis, como destaca Roque (2012), ao questionar a existência de um matemático chamado Pitágoras.

Figura 4 - Pitágoras de Samos



Fonte: Kenny (2004)

Não há registros de tratados sistemáticos de aritmética entre Euclides, que viveu em torno de 300 a.C., e Nicômaco de Gerasa, que possivelmente viveu por volta de 100 d.C. e era

membro do grupo neopitagórico. Nicômaco foi mais conhecido por ser um divulgador e compilador de manuais do que por contribuições matemáticas originais. Suas obras incluem uma “Introdução à Harmonia”, um livro sobre a doutrina mística dos números denominado *Theologoumena Arithmeticae* e uma “Introdução à Aritmética”.

Segundo Almeida (2003, p. 86), o livro “Introdução à Aritmética”, de Nicômaco, foi amplamente utilizado como manual, tanto na antiguidade quanto na Idade Média. Segundo o autor, nessa obra pode-se encontrar exposições da teoria pitagórica dos Números Figurados que sobreviveram até os dias atuais.

Para Roque (2012), os pitagóricos enxergavam a matemática de um modo diferente do que se tem hoje. Os números eram entes físicos, e não abstratos como passaram a ser compreendidos ao longo do tempo; eram bem diferentes da predominantemente compreensão quantitativa de hoje. Para o Pitagórico, *o número é vivo* (Kenny, 2004), e pode ser representado por pedrinhas e outros objetos. Estes tinham um sentido não apenas matemático, mas sobretudo sagrado, divino.

O uso pitagórico não é, em certo sentido, mesmo um uso em tudo: Número não é algo para ser usado; em vez disso, sua natureza deve ser descoberta. Em outras palavras, usamos números como tokens para representar as coisas, mas para Pitagóricos Número é um princípio universal, como real como luz ou som. Como a ciência pitagórica possuía uma dimensão sagrada, o número não é visto apenas como um princípio universal, mas também como um princípio divino. O objetivo de Pitagórico e ciência platônica posterior é diferente da ciência moderna "aristotélica": não é tanto envolvido com a investigação das coisas, como a investigação de princípios. Ele deve ser muito firmemente enfatizado, no entanto, que para Pitágoras o científico e dimensões religiosas de número nunca estavam em desacordo uns com os outros. Além disso, a Abordagem pitagórica para o Número, pela primeira vez na Grécia, matemática elevada para um estudo que vale a pena perseguir acima de qualquer extremidade puramente utilitário para o qual tinha anteriormente foi empregado (Kenny, 2004, p. vi).

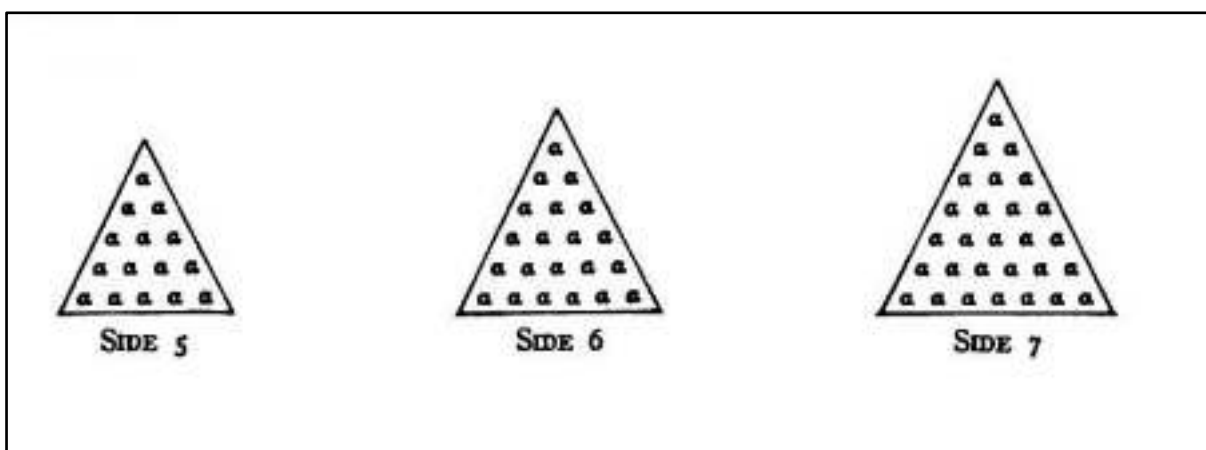
De acordo com Almeida (2003, p. 87), os pitagóricos “não tinham um conceito de número abstrato”, o que é corroborado pelos escritos de Nicômaco. No entanto, Nicômaco introduziu uma forma diferente de representar pontos e estruturas aritméticas, utilizando uma abordagem semigeométrica em seu livro “Introdução à Aritmética”. No Capítulo VI de sua obra, Nicômaco descreve uma maneira semigeométrica de representar números por meio de alfas (α). Embora ele não mencione diretamente a representação por meio de pontos, afirma que a unidade que ocupa o lugar de um ponto $[\bullet]$, será o começo de intervalos e de números. Isso sugere que a representação dos números figurados também pode ser feita por meio de pontos, o que justifica a representação tradicional dos números figurados por meio de pontos

no plano ou no espaço, uma prática possivelmente derivada do uso de seixos nas colunas do ábaco.

Essas observações indicam que o sistema de representação dos números figurados, incluindo a representação geométrica, pode ter suas raízes em práticas mais antigas, como o emprego de seixos no ábaco, e que o sistema ático, se existente na época de Pitágoras, era provavelmente rudimentar.

A descrição de Nicômaco era feita por meio de símbolos como o α , diferentemente dos representados pelos pitagóricos, conforme a Figura 5, retirada do livro de Nicômaco de Gerasa. A referida obra foi traduzida em 1926, em que o autor descreve alguns números triangulares e os representa por meio da letra grega α . Este também apresenta algumas relações aritméticas que serviriam de base para os estudos futuros acerca deste tema:

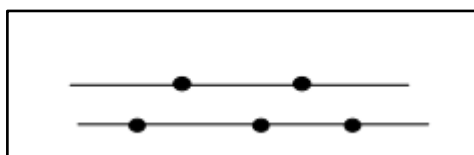
Figura 5 - Representação dos números triangulares por Nicômaco de Gerasa



Fonte: D'ooge, Robbins e karpinski (1926).

Os pontos representavam a estrutura dos números e, assim, poderiam escrever qualquer número por meio de arranjos geométricos. Para representar os números planos, por exemplo, deveria ser construído antes nos números lineares, como ilustra a Figura 6:

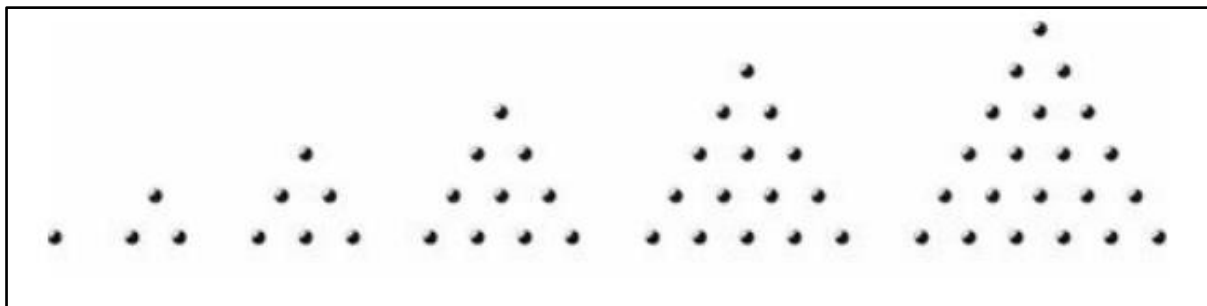
Figura 6 - Números lineares



Fonte: (Almeida, 2003)

Estes, por sua vez, davam origem a outros números, agora com configurações que remetem a polígonos – é o caso dos números triangulares, representados na Figura 7, formando filas de pontos usados na representação da figura anterior.

Figura 7 - Configuração com bolinhas formando números triangulares

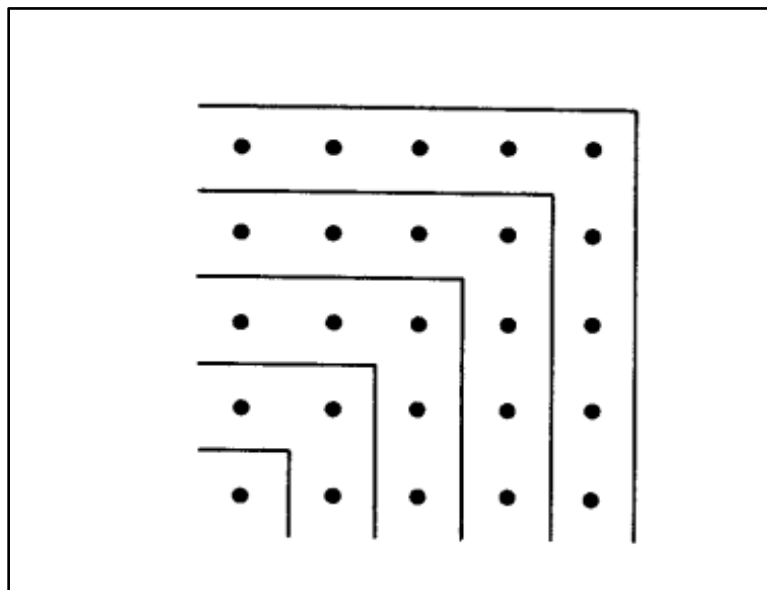


Fonte: Roque (2012).

Estes números provavelmente foram os primeiros números planos descritos pelos pitagóricos, pois são obtidos a partir da adição dos primeiros números lineares (apresentados na Figura 3), e passaram a conter o símbolo da seita pitagórica, o chamado *Tetraktys* (Mol, 2013). Este símbolo é representado pelo número 10, ou seja, o quarto número triangular, apresentado na Figura 5.

Os pitagóricos atribuíam grande importância ao conceito de *Tetraktys*, que representava a perfeição do Número, como descrito por Kenny (2004). Para eles, o *Tetraktys* era uma imagem emblemática da unidade, refletida através de quatro níveis, que começavam com o número 1 e progrediam até 4, representados pela linha, o plano e o espaço. Esses quatro níveis também correspondiam, geometricamente, aos pontos mínimos necessários para formar essa estrutura.

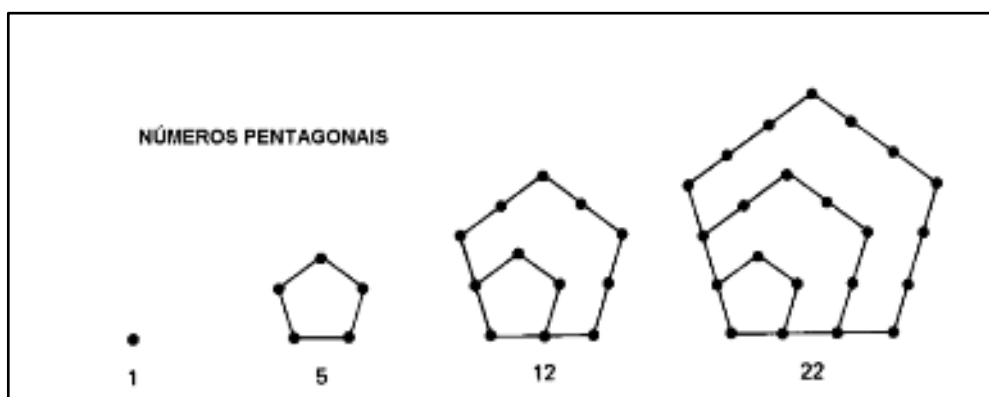
Além do *Tetraktys*, os pitagóricos também exploraram outras configurações que levaram ao conceito de *gnômon*, como observado por Almeida (2003, p. 68). Enquanto os números triangulares eram formados pela adição dos n primeiros números naturais a partir de 1, os números quadrados dos pitagóricos eram obtidos pela adição dos n primeiros números ímpares. Essa abordagem levou ao estudo das triplas pitagóricas, que exploravam a relação entre números quadrados e como adicionar um número quadrado a um número ímpar para obter outro número quadrado. Essa relação é visualizada na Figura 8, que apresenta o quadrado separado por *gnômons*, o que pode ser entendido como uma peça que, ao completar um número quadrado, formaria outro maior e pertencente a mesma sequência. Isto destaca a complexidade e a profundidade dos conceitos matemáticos desenvolvidos pelos pitagóricos.

Figura 8 - O *gnômon*

Fonte: Almeida (2003).

Na Figura 9, os números quadrados são alocados a uma peça em forma de L e, assim, formam outro número quadrado. Almeida (2003) afirma que esse termo era usado apenas para os números quadrados, porém o conceito pode ser estendido aos demais números figurados, os quais foram desenvolvidos pela escola pitagórica por meio da manipulação de pedras e objetos diversos. Esses números possuíam três características fundamentais: começavam sempre pela unidade; o segundo número assumia uma forma poligonal qualquer; e, a partir do segundo número, utilizava-se um *gnômon* para construir o próximo número. É importante destacar que se opta por referir-se ao *gnômon* sem aspas quando se refere ao mecanismo utilizado para encontrar os próximos números quadrados, e com aspas quando se mencionam outros números figurados, como os pentagonais, hexagonais, e assim por diante.

Figura 9 - Números pentagonais

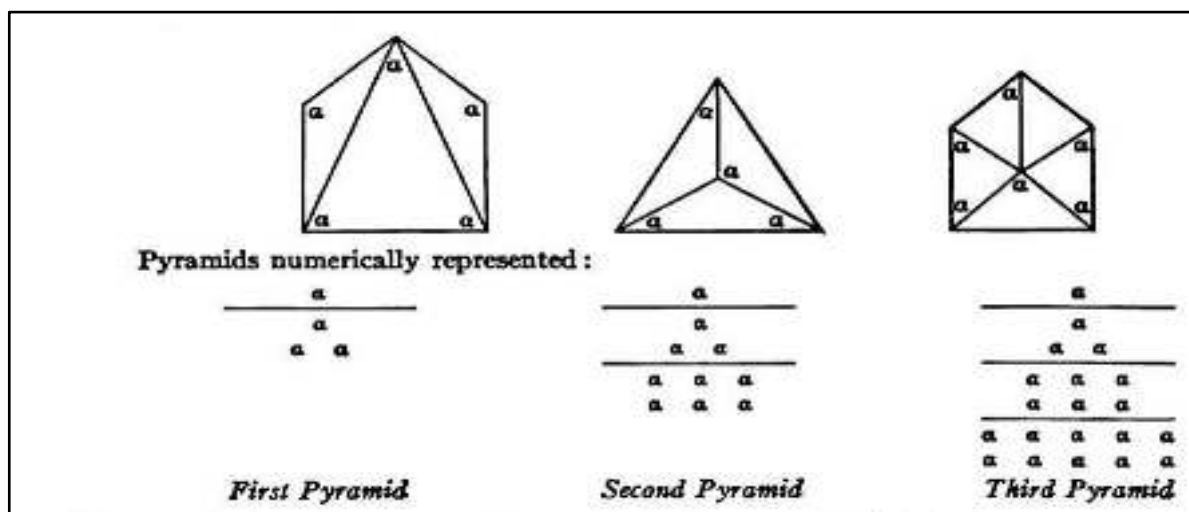


Fonte: Almeida (2003, p. 69).

Não há consenso quanto ao alcance dos estudos pitagóricos, os quais são frequentemente associados apenas aos números triangulares e quadrados. No entanto, Alves (2012) apresenta uma perspectiva distinta ao afirmar que as ideias pitagóricas contribuíram para a ampliação do estudo dos números figurados, estendendo configurações inicialmente restritas ao plano para o campo das figuras tridimensionais. Tal ampliação teve como objetivo a generalização das formas geométricas e dos padrões numéricos a elas associados.

É interessante notar que tampouco há um consenso claro sobre quando e onde surgiu a ideia de estender a concepção de números figurados a representações tridimensionais com vistas à generalização. Nicômaco de Gerasa descreve essa concepção como um empilhamento de configurações planas, sem demonstrar preocupação explícita com a generalização para dimensões superiores. Esse enfoque mais prático e geométrico pode ter sido uma etapa inicial no desenvolvimento dessa perspectiva, anterior à sua formalização em um contexto mais abstrato e matemático.

Figura 10 - Representação piramidal de Nicômaco de Gerasa



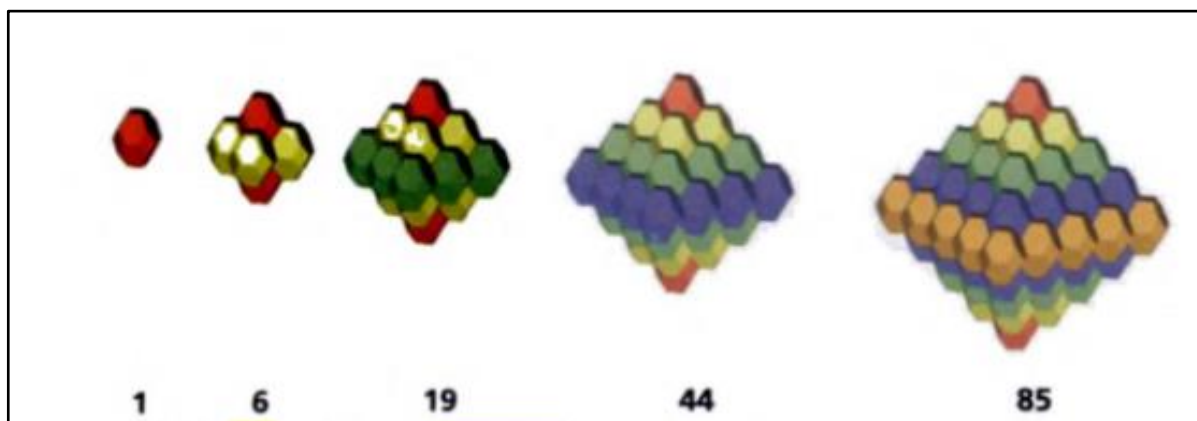
Fonte: D'Ooge, Robbins e Karpinski (1926, p. 250).

Acredita-se que o estudo dos números figurados mais antigos esteja limitado aos poligonais, conforme realizado pelos pitagóricos, tendo sido estendido para o campo tridimensional por Nicômaco, com a finalidade de representar pirâmides de pontos. Essa ampliação para as três dimensões foi uma das primeiras incursões nos números figurados em 3D, tendo como base configurações de pontos.

No entanto, a obra “O livro dos números”, de Conway e Guy (1996), parece deixar de lado o contexto histórico ao utilizar pontos para representar os números figurados em 3D. Os autores concentram-se na utilização dessas estruturas para relacioná-las à álgebra, descrevendo

suas fórmulas e propriedades. Nesse contexto, o sentido pitagórico é tratado apenas como uma referência histórica, enquanto o livro se dedica a explorar as propriedades e a apresentar a fórmula do termo geral dos números piramidais triangulares, bem como outras configurações, como as que formam o tetraedro truncado, a *stella octangula*, o octaedro, entre outras.

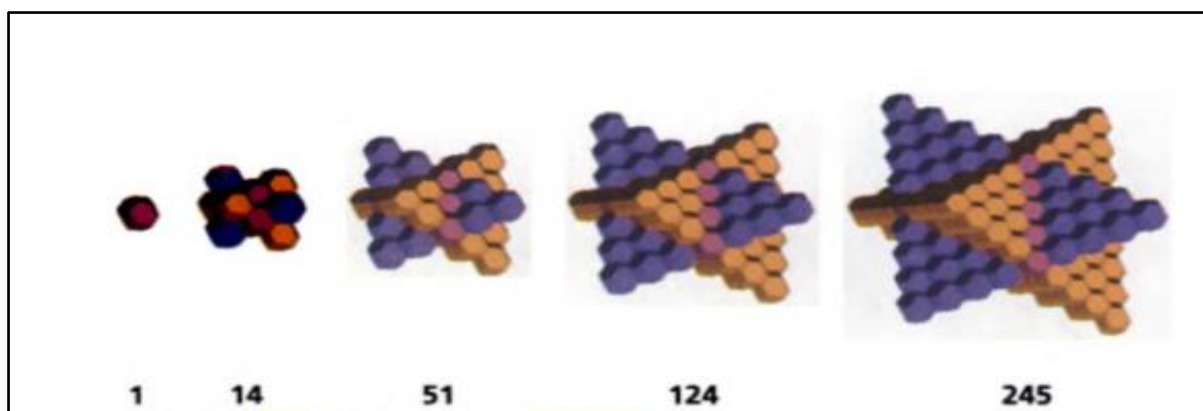
Figura 11 - Números octaedrais



Fonte Conway e Guy (1995, p. 50).

Estes números já sugerem a ideia de empilhamento de duas pirâmides e, a partir deles surgem outras sequências de números, como os da *Stella octangula*, que é formada por um núcleo octaédrico com tetraedros aderidos a cada uma de suas faces.

Figura 12 - Números da *stella octangula*



Fonte Conway e Guy (1995, p. 51).

Os números figurados evoluíram ao longo do tempo, transitando de uma representação visual para um caráter mais abstrato à medida que sua visualização se tornava progressivamente mais complexa. Deza e Deza (2012) generalizaram esses números para a k -ésima dimensão em

sua obra *Figurate Numbers*, relacionando-os às classes de polítopos apresentadas por Coxeter (1973), tais como simplexos, hipercubos e ortoplexos.

Com o avanço da matemática, a representação dos números figurados no plano e no espaço foi gradualmente relegada a um papel secundário, dando lugar a abordagens mais abstratas no âmbito da matemática pura – em contraste com o caráter representativo valorizado pelos pitagóricos. Nesse sentido, torna-se relevante retomar a relação entre esses números e suas representações geométricas no plano e no espaço, uma vez que tal retomada favorece uma compreensão mais significativa e facilita sua aplicação em diferentes contextos, inclusive com o auxílio de softwares matemáticos.

Nesse contexto, o presente trabalho busca apresentar a evolução histórica dos números figurados, desde suas representações iniciais até as generalizações para dimensões superiores, explorando conceitos como recorrência, termo geral, função geradora e visualização, conforme será detalhado na seção seguinte.

3.4 Classificação dos Números Figurados

Nesta seção, definiremos os números figurados de forma geral e, em seguida, especificaremos alguns deles, como os números triangulares, poligonais, piramidais, simplexos, dentre outros. Como se trata de uma fonte inesgotável de sequências numéricas, apresentaremos posteriormente uma classificação própria para identificar esses números no âmbito da geometria.

Tomaremos como referência a obra de Deza e Deza (2012), que realiza um estudo sistemático dessa categoria de números especiais. Em seguida, apresentaremos a classificação de Barros (2021) para famílias e classes de sequências, e utilizaremos a OEIS para classificar alguns números figurados dentro de suas classes, objetivando, assim, uma melhor compreensão por parte do leitor. Desse modo, iniciaremos definindo um número figurado de acordo com Deza e Deza (2012).

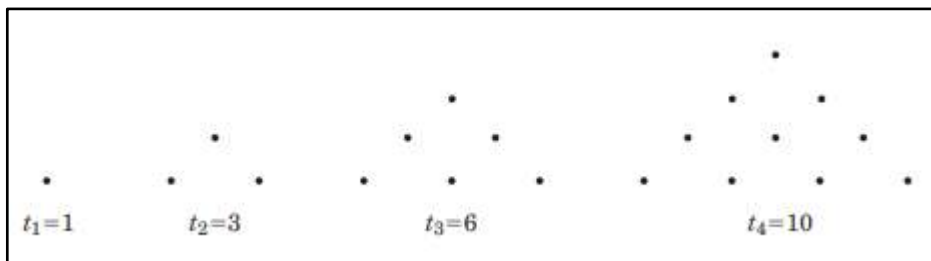
Definição 6 (Número Figurado). Um número figurado é um número que pode ser representado por um padrão geométrico regular e discreto de pontos igualmente espaçados (Deza; Deza, 2012, p. xv).

Dessa forma, pode-se definir a sequência de números poligonais, como por exemplo os números triangulares, que formam a sequência $(1, 3, 6, 10, \dots)$, pois seus termos, quando

representados por pontos, formam triângulos equiláteros com pontos equidistantes e usam o triângulo anterior como base para formar o próximo triângulo.

A representação visual de números triangulares pode ser percebida na Figura 13:

Figura 13 - Números triangulares



Fonte: (Koshy, 2004).

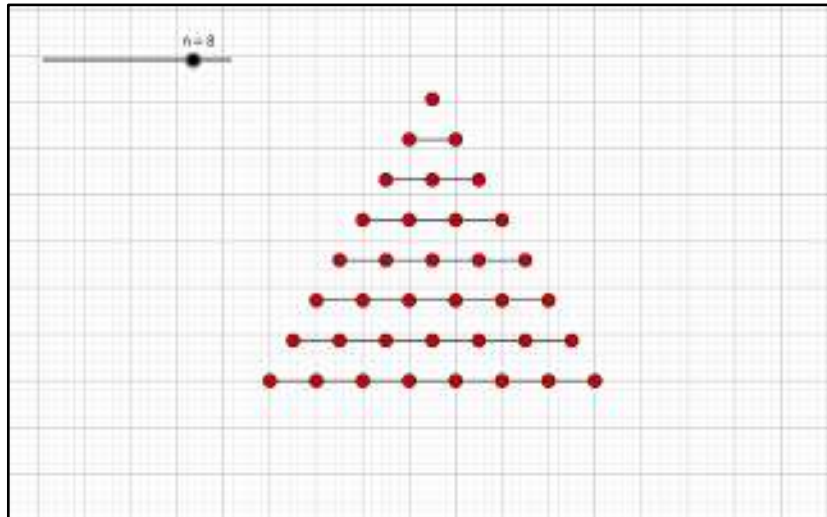
Um número poligonal, ou m -gonal, é qualquer número que, quando representado por pontos ou qualquer padrão discreto, configura um polígono regular no plano. Dessa forma, os números triangulares mencionados anteriormente são números poligonais, assim como os números quadrados, pentagonais, hexagonais e assim sucessivamente. Esse padrão insere-se no contexto bidimensional, uma vez que os números figurados considerados apresentam configurações que formam polígonos no plano. No entanto, essa mesma ideia pode ser estendida a outras dimensões. Em particular, é possível construir sequências cujas configurações geram poliedros no espaço tridimensional. Tais sequências foram classificadas por Barros (2021) como uma família denominada números poliédricos, a qual se subdivide em categorias como: números piramidais, quando a configuração representa pirâmides; números prismáticos, para as representações de prismas; e números platônicos, que representam os poliedros de Platão.

Os números figurados podem representar qualquer tipo de objeto geométrico (figura ou sólido); assim, é coerente que a linha poligonal linear também seja tratada como número figurado. Neste trabalho, denominam-se tais números de lineares, conforme Deza e Deza (2012) o fazem ao assumir que:

Colocando os pontos em uma linha, pode-se falar sobre números lineares. De fato, qualquer número inteiro positivo é um número linear. De maneira semelhante à construção acima, os números lineares têm, como gnômon, o número 1, e são obtidos como somas consecutivas dos elementos da sequência 1, 1, 1, 1, ..., 1, ...: $1=1$, $2=1+1$, $3=2+1$, $4=3+1$, ... De fato, os números lineares são análogos unidimensionais dos números poligonais bidimensionais (Deza; Deza, 2012).

Assim, fica claro que números lineares são os números que forma a sequência dos *gnômons* dos números triangulares, ou seja, a adição iterativa de números lineares sucessivos iniciando em 1 gera números triangulares, conforme a ilustrado na Figura 14:

Figura 14 - Número triangular escrito em linhas



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

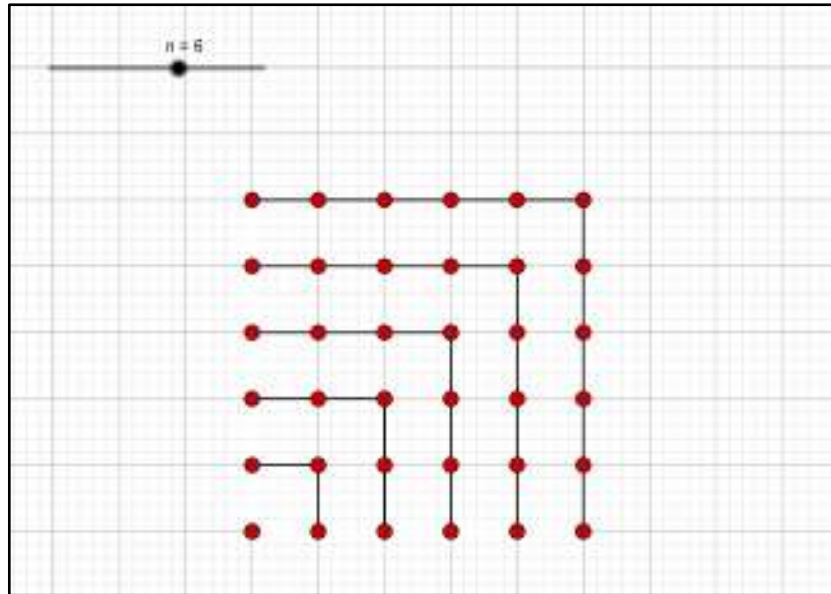
Na Figura 14 tem-se a construção de um número triangular formado por linhas de pontos. Esses pontos formam números lineares em cada linha, que também são os *gnômons* dos números triangulares. Esses números, como Deza e Deza (2012) esclarecem, formam a sequência (1,2,3,4,...).

Outra sequência importante, ainda segundo Deza e Deza (2012), é a sequência de números gnômicos, descrita como uma sequência “intimamente ligada aos números quadrados” Dessa forma, os autores descrevem como:

Os números gnômicos estão intimamente associados aos números quadrados. Um número gnômico é um número figurado em forma de L, representando a área do gnômon quadrado obtido ao remover um quadrado de lado $n - 1$ do quadrado de lado n . Como $n^2 - (n - 1)^2 = 2n - 1$, os números gnômicos são equivalentes aos números ímpares $2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$, e os primeiros são 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, ... (A005408 de Sloane) (Deza; Deza, 2012).

A ilustração da Figura 15 mostra esses números como decomposição de números quadrados, o que pode esclarecer essa relação:

Figura 15 - Número quadrado formado por *gnômons*

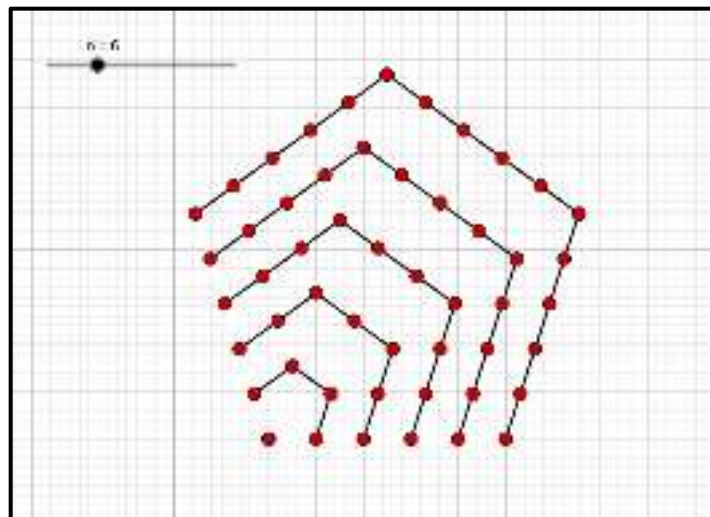


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Na Figura 15 observa-se o sexto número quadrado como uma adição de *gnômons*. Cada *L* representa um número da sequência dos números gnômicos, que também são *gnômons* dos números quadrados.

Os *gnômons* dos demais números poligonais não recebem nomes especiais, como ocorre com os números lineares ou números gnômicos. No entanto, essas sequências constituem progressões aritméticas e serão tratadas aqui apenas como sequências dos *gnômons* dos números figurados. Como exemplo, tem-se o caso dos números cuja soma sucessiva forma a sequência dos números pentagonais, os quais são apresentados na Figura 16.

Figura 16 - Número pentagonal formado por seus *gnômons*

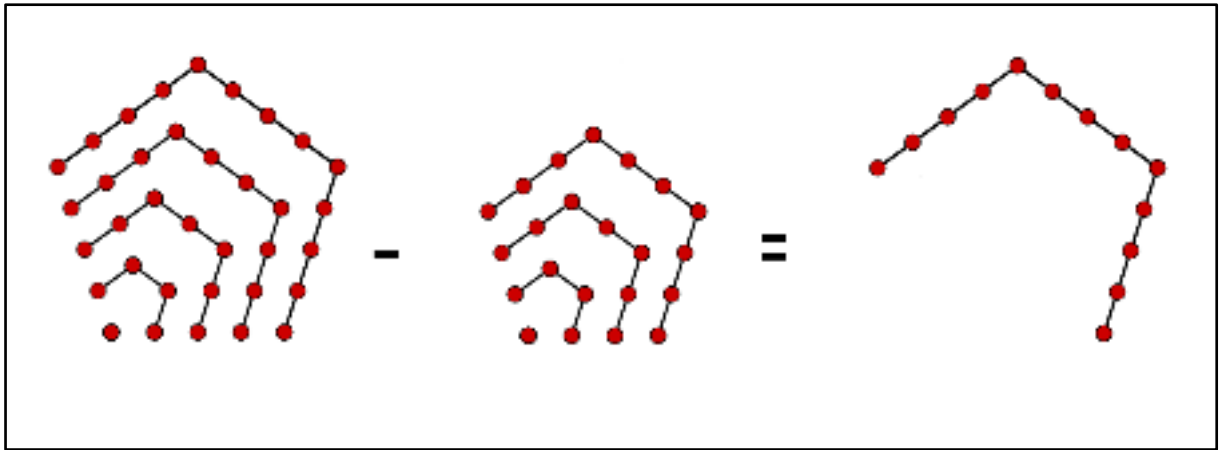


Fonte: Elaboração do autor (2024).

Na Figura 16, temos um número pentagonal formado por linhas que percorrem 3 das 5 bordas de um pentágono; unidos ao primeiro ponto, formam a sequência dos números de *gnômons* pentagonais (1,4,7, 10,...) A016777 na OEIS.

Ademais, convém ressaltar a relação algébrica entre um número poligonal e seus gnômons, uma vez que o gnômon nada mais é do que uma camada adicionada a um número poligonal para construir o seu sucessor. Assim, fica evidente que um número que representa um gnômon é obtido pela diferença entre números poligonais consecutivos, conforme se observa na Figura 17.

Figura 17 - Subtração de Números pentagonais



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Na figura, um número que representa um gnômon de um número pentagonal é mostrado pela diferença entre dois números pentagonais consecutivos. Essa ilustração revela-se importante para que se definam essas sequências.

Para uma melhor sistematização, definem-se essas famílias de sequências associadas aos números poligonais, adotando-se uma notação unificada que permita evidenciar a correspondência entre cada número poligonal e a sequência de gnômons a ele relacionada. Essa convenção facilita a observação das regularidades estruturais e das relações de crescimento presentes em cada sequência poligonal.

Definição 7 (Sequências dos gnômons dos números poligonais). Seja $(S_m^2(n))_{n \in \mathbb{N}}$. A sequência dos números poligonais de m lados, em que $S_m^2(n)$ denota o n -ésimo termo dessa sequência, correspondente a uma representação no plano.

Define-se a sequência dos *gnômons*, denotada por $(S_m^1(n))_{n \in \mathbb{N}}$, cujos termos são dados por:

$$S_m^1(n) = S_m^2(n) - S_m^2(n-1) \text{ para } n \geq 2 \text{ e } S_m^1(1) = 1$$

Nesse contexto, $S_m^1(n)$ representa o *gnômon* associado ao n -ésimo número poligonal, isto é, a quantidade de pontos adicionados à figura ao passar da posição $n-1$ para n , preservando sua forma.

De modo intuitivo, cada termo de $(S_m^1(n))_{n \in \mathbb{N}}$ indica o contorno que se adiciona ao número poligonal anterior, caracterizando a camada que dá continuidade à progressão aritmética.

Vale ressaltar que também é possível relacionar essas sequências de *gnômons* com as sequências que as geram a partir de adições sucessivas. Essas sequências podem ser vistas como números figurados da dimensão zero, que geralmente é representado pelo ponto. A Tabela 1 mostra os primeiros termos de alguns números poligonais e seus análogos 1 e zero dimensionais.

Tabela 1 - Catálogo dos números poligonais

Sequência	Termos	OEIS	Análogo unidimensional	OEIS	Análogo na dimensão zero	OEIS
Triangulares	1,3,6,10,...	A000217	1,2,3,4,...	A000027	1,1,1,1,...	A000012
Quadrados	1,4,9,16,...	A000290	1,3,5,7,...	A005408	1,2,2,2,...	A040000
Pentagonais	1,5,12,22,...	A000326	1,4,7,10,...	A016777	1,3,3,3,...	A122553
Hexagonais	1,6,15,28,...	A000384	1,5,9,13,...	A016813	1,4,4,4,...	A123932
Decagonais	1,10,27,52,...	A001107	1,9,17,25,...	A017077	1,8,8,8,...	
Icosagonais	1,20,57,112,...	A051872	1,19,37,55,...	A161705	1,18,18,18,...	

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Dessa maneira, estabelecemos uma relação dimensional com as sequências de números poligonais e seus análogos de dimensões anteriores, o que nos permite compreender melhor a estrutura de crescimento e a lógica de formação dessas figuras. O próximo passo é avançar para a classificação dos principais números figurados de dimensões superiores, analisando como suas propriedades se estendem e se transformam à medida que passamos do plano para o espaço e, posteriormente, para dimensões ainda mais elevadas.

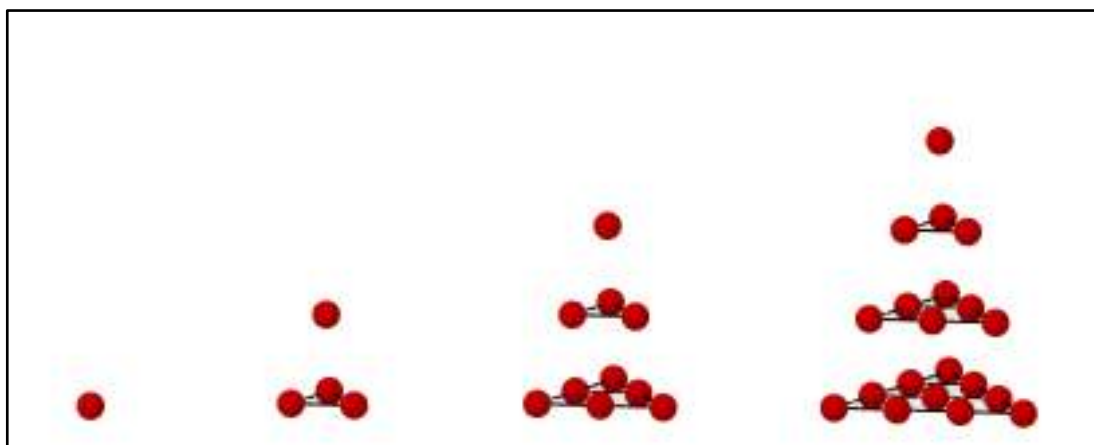
3.4.1 Números figurados espaciais

Nesta seção, trata-se da classificação de algumas famílias de números figurados cuja configuração discreta revela padrões geométricos de determinados sólidos. A seção não pretende informar formas ou construções, mas apenas a classificação dentro da dimensão considerada, utilizando uma estrutura semelhante à que Barros (2021) empregou para abordar três classes importantes: as pirâmides, cuja sequência de números figurados associada é denominada números piramidais, incluindo, entre outras, a sequência dos números tetraédricos.

Outra sequência bem desenvolvida por Deza e Deza (2012) e por Barros (2021) é a dos números cúbicos, que se classificam em uma família de sequências aqui denominada números prismáticos. A última sequência a ser descrita é a dos números octaédricos, classificada na família dos números figurados bipiramidais. Dessa forma, iniciar-se-á pelos números figurados piramidais e sua representação geométrica.

Na geometria, os poliedros, assim como os polítopos convexos em geral, são classificados em algumas classes, das quais se destacam três: simplexos, hipercubos e polítopos cruzados, conforme Grünbaum e Shephard (2003). Nesse sentido, faz sentido estender o entendimento de pirâmides não apenas ao simplexo da dimensão, mas também a outros números figurados piramidais. Inicialmente, apresenta-se a sequência dos números tetraédricos, seus primeiros termos e sua classificação na OEIS, conforme a figura a seguir.

Figura 18 - Números tetraédricos

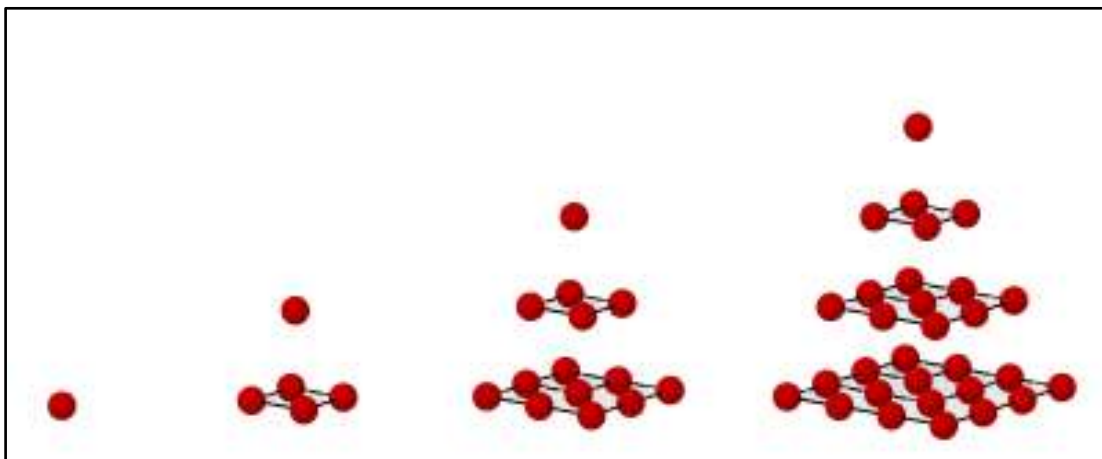


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

A Figura 18 apresenta uma sequência de configurações que forma um tetraedro, e os pontos estão crescendo conforme são adicionados números triangulares em sua base. Em números a sequência que surge é (1, 4, 10, 20, ...); essa é a sequência dos números figurados

tetraédricos A000292 na OEIS. Usando o mesmo argumento, pode-se construir números piramidais quadrados, pentagonais, e assim por diante. Na Figura 19 tem-se a configuração para os números piramidais quadrados.

Figura 19 - Números piramidais quadrados

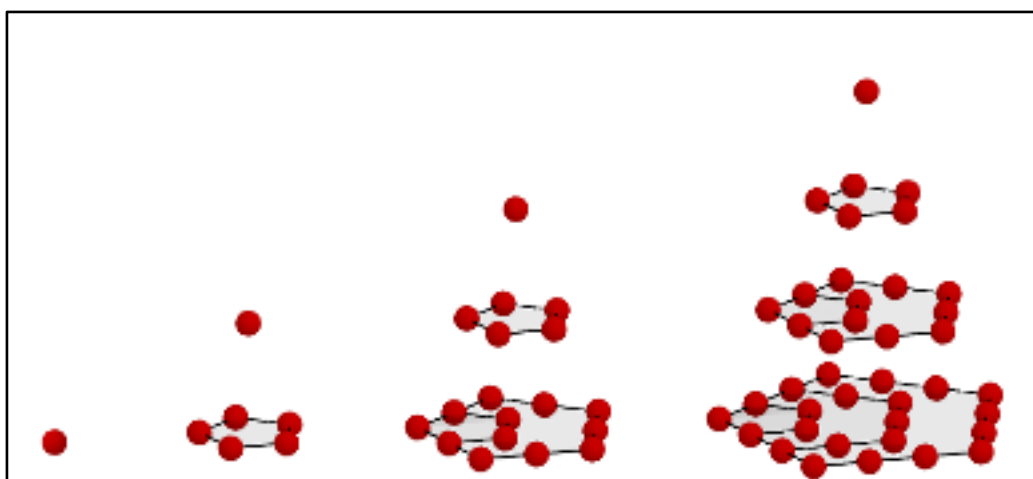


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

A Figura 19 apresenta a configuração da sequência (1, 5, 14, 30, ...) A000330 na OEIS, que são os números formados pela adição sucessiva de números quadrados consecutivos. Obviamente, ao mencionar *gnômons de números piramidais*, isto quer dizer que se refere aos números poligonais de uma forma geral.

Seguindo a apresentação, tem-se os números piramidais pentagonais, descritos pela sequência (1, 6, 18, 40, ...), que possui código A002411 na OEIS referente às sequências inteiras. Sua configuração está presente na próxima figura.

Figura 20 - Números piramidais pentagonais



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Diante dessa breve apresentação, pode-se estabelecer uma relação entre um número piramidal e o número poligonal que constitui sua base. A partir do estudo dos números tetraédricos, é possível definir uma notação que generalize essa relação, de modo que os números piramidais sejam compreendidos como uma sequência construída sobre os números poligonais, tendo estes como seus *gnômons*, isto é, como as camadas que se somam sucessivamente para formar a pirâmide figurada.

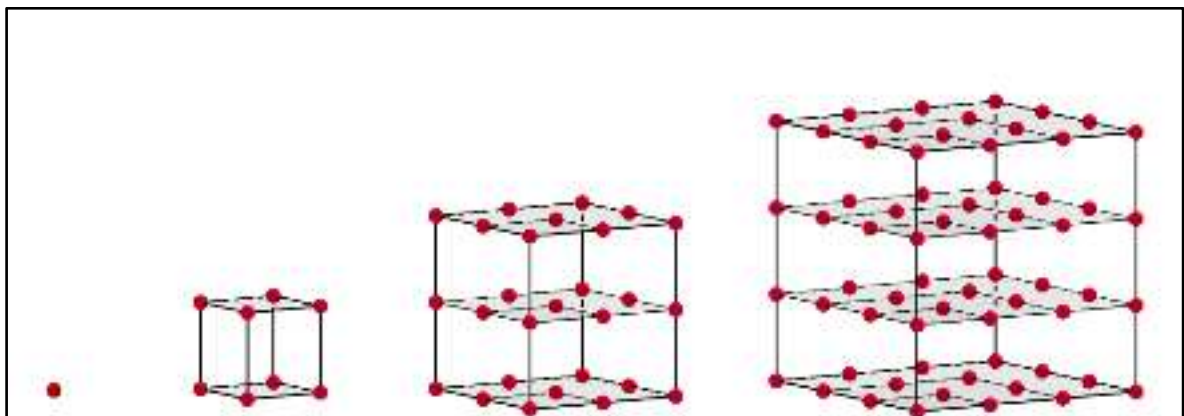
Definição 8 (Números piramidais). São números figurados tridimensionais cuja disposição de pontos forma uma pirâmide.

Seja $S_m^3(n)$ o n -ésimo número de base m -gonal, em que cada camada da pirâmide corresponde a um número poligonal de base fixa, e a soma dessas camadas sucessivas dá origem aos números piramidais. Assim, os números tetraédricos correspondem aos números piramidais triangulares, os números piramidais quadrados possuem base quadrada, os piramidais pentagonais possuem base pentagonal, e assim sucessivamente. Fica claro que a diferença entre dois números piramidais sucessivos resulta no n -ésimo número poligonal que compõe sua base, de modo que:

$$S_m^3(n) - S_m^3(n-1) = S_m^2(n)$$

Outra sequência de números figurados tridimensionais de bastante relevância são os números cúbicos. Estes números formam a sequência $(1, 8, 27, 64, \dots)$, com o código A000578 no site OEIS, sendo denotados por $C(1)=1, C(2)=8, C(3)=27$, e assim por diante. Esses números pertencem a uma segunda classe de polítopos regulares, chamados por Coxeter (1973) de *hipercubos*. Sua configuração em padrões discretos está representada na Figura 21:

Figura 21 - Números cúbicos



Fonte: Elaboração do autor (2024).

Essa sequência é formada somando cópias do mesmo número poligonal, diferente dos números piramidais, onde são adicionados termos sucessivos de números poligonais. Com essa ideia, é possível também construir sequências que sigam o mesmo tipo de construção para outros números poligonais. A título de apresentação, a figura a seguir mostra o que seria um número prisma pentagonal, formado pela soma de números pentagonais iguais.

3.4.2 Números figurados multidimensionais

Este tópico tem como objetivo classificar os números figurados quanto à sua família e à sua classe. Para isso, não se pretende realizar uma descrição minuciosa de todas as classes figuradas. Em vez disso, adota-se a classificação proposta por Barros (2021), já consolidada na literatura. No entanto, será dada atenção especial a uma classe de particular relevância para este trabalho, a saber, a classe dos simplexes. Desse modo, como já foram apresentadas características gerais para $k=1$, $k=2$ e $k=3$, classificam-se, a partir disto, os simplexes da quarta dimensão e, logo a seguir, a classe como um todo.

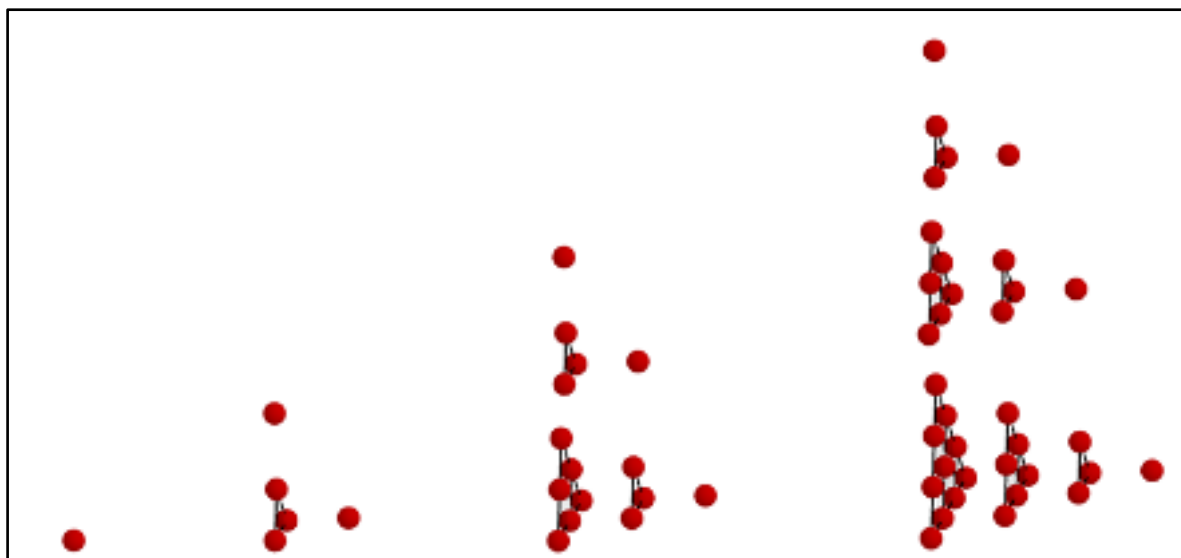
Para os números figurados que compõem a quarta dimensão, toma-se por apoio as construções de Barros (2021), que criou uma forma de visualização dos números na janela 3D do GeoGebra. O objetivo é fornecer uma visualização de alguns números figurados dessa dimensão, bem como alguns de seus termos e catalogação na OEIS.

Iniciaremos pelos números de pentatópicos descritos por Deza e Deza (2012) como:

um número figurado que representa um hipertetraedro de quatro dimensões. É o análogo em quatro dimensões dos números tetraédricos tridimensionais e dos números triangulares bidimensionais. O n -ésimo número pentatópico $S_3^4(n)$ é dado como a soma dos primeiros n números tetraédricos (Deza; Deza, 2012, p. 162).

Essa sequência possui código A000332 e seus primeiros termos são (1, 5, 15, 35, 70, 126, ...). Sua representação discreta pode ser pensada como uma adição de números tetraédricos sucessivos como mostra a Figura 22.

Figura 22 - Números pentatópicos



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

A Figura 22 representa os quatro primeiros números de pentatope como somas de números tetraédricos consecutivos. A figura usada para essa construção são os próprios números tetraédricos.

Assim como o n -ésimo número triangular é formado por camadas do n primeiros números lineares, o n -ésimo número tetraédrico é formado por camadas de n números triangulares, e os números de pentatope seguem o processo, sendo formados por camadas de números tetraédricos consecutivos. Pode-se definir, com base em Deza e Deza (2012) e Barros (2021), os números simplexos da seguinte maneira.

Definição 9 (Número *simplexo*). É um número cuja representação por pontos configura o polítopo mais simples em uma dada dimensão. São exemplos de números simplexos, os números triangulares (triângulos são os polígonos que possuem a quantidade mínima de arestas e vértices em duas dimensões) e números tetraédricos pois o tetraedro é o poliedro mais simples em três dimensões.

Neste escrito, optou-se por chamar um conjunto de sequências que representam polítopos de mesma dimensão de *família* e, quando a relação existir conforme o crescimento dimensional, esta será chamada de *classe*. Dessa forma, os números poligonais são uma família de sequências que representam polígonos regulares, enquanto os simplexos são uma classe de sequências que representam os análogos multidimensionais de um triângulo. A Tabela 2 mostra

a classificação de algumas sequências, famílias e classes, conforme descrito na OEIS e adaptado pelo autor.

Tabela 2 - Classificação de números figurados em famílias e classes

NÚMEROS FIGURADOS						
	<i>1-d</i>	<i>2-d</i>	<i>3-d</i>	<i>4-d</i>	<i>k-d</i>	<i>classes</i>
Sequências	Números naturais	Números triangulares	Números tetraédricos	Números pentatope	Números simplexos	Simplexo
	Números ímpares	Números quadrados	Números cúbicos	Números tesseráticos	Números hipecúbicos	Hipercubo
			Números octaédricos	Números 24-celulas	Números ortoplexos	Ortoplexo
		Números pentagonais				
Famílias		Números poligonais	Números piramidais		Números hiperpiramidais	
			Números prismas		Números de hiperprismas	
Outras sequências		Números estrela	Números da estrela octangular			

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Esta seção teve por objetivo classificar os números figurados em diferentes classes e famílias de sequências, buscando não apenas organizá-los de forma sistemática, mas também familiarizar o leitor com as notações a serem utilizadas ao longo deste trabalho. Foram apresentados os principais modos de representação desses números, com ênfase nas configurações obtidas a partir de padrões discretos, os quais permitem visualizar de maneira

intuitiva as estruturas formadas por pontos que dão origem às figuras geométricas correspondentes.

Além disso, foram indicadas as convenções simbólicas adotadas e as referências às catalogações existentes no banco de dados da OEIS, que constitui uma ferramenta fundamental para a identificação e comparação das sequências numéricas relacionadas aos números figurados. Essa etapa introdutória teve, portanto, um caráter essencialmente descritivo e classificatório, sem recorrer, por ora, à formulação algébrica detalhada, uma vez que o foco esteve na compreensão estrutural e visual dessas representações.

Nas seções subsequentes, abordam-se as propriedades analíticas dos números figurados, incluindo o estudo de recorrências, expressões do termo geral e funções geradoras. Tais elementos permitirão compreender como as relações entre os termos das sequências se estabelecem e de que maneira as estruturas figuradas podem ser formalizadas por meio de expressões algébricas.

Por fim, apresenta-se a construção dos números figurados a partir dos simplexes de cada dimensão, destacando-se, inicialmente, os números triangulares e sua generalização para dimensões superiores. Essa abordagem serve de base para a introdução de novas representações e extensões dos números figurados, ampliando o campo de estudo e oferecendo novas perspectivas de investigação dentro dessa temática.

3.5 Recorrência e forma geral dos números figurados

Números figurados poligonais são os números formados por pontos que, se arranjados, formam figuras geométricas planas. Esses números foram objeto de estudo da escola pitagórica, com a finalidade de buscar padrões numéricos que pudessem relacionar a geometria com a aritmética. Assim, um número poligonal distribuído em arranjos pode formar triângulos, quadrados, pentágonos etc., gerando assim as sequências de números listadas neste tópico, que são as sequências de números triangulares, quadrados, pentagonais, hexagonais e assim por diante.

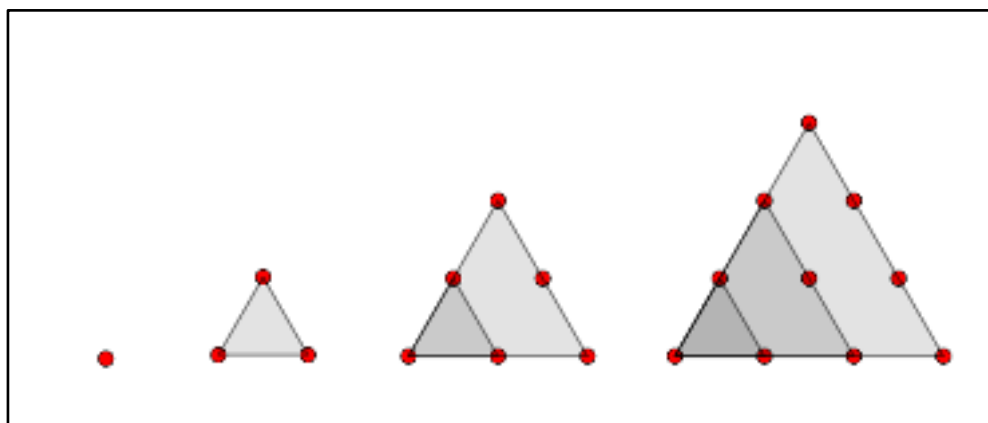
Embora este trabalho contemple números figurados em diferentes dimensões, a ênfase recai sobre aqueles construídos no plano; por isso, chamaremos de $(S_m(n))_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência dos números m -gonais e ocultaremos o valor da dimensão por esses números, que aparecerem como centro do estudo pitagórico acerca de números figurados. Para isso, inicia-se com uma apresentação da recorrência e forma geral de números triangulares, quadrados e poligonais de

uma forma ampla. Adiante, estender-se-á a relação para números piramidais, cotando primeiro os números tetraédricos e por fim os piramidais de uma forma geral.

3.5.1 Recorrência e forma geral dos números triangulares

Números triangulares, são os números de pontos que formam triângulos equiláteros, tal conjunto gera a sequência numérica $(0, 1, 3, 6, 10, \dots)$, A000217 na OEIS, conforme a Figura 23:

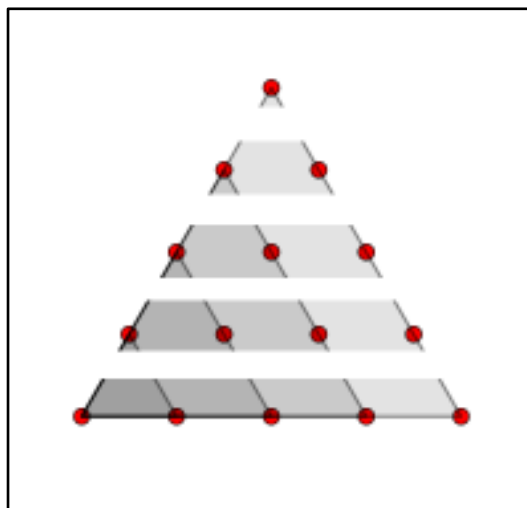
Figura 23 - Os quatro primeiros números triangulares



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

A Figura 23 apresenta os quatro primeiros números triangulares a partir de uma disposição de pontos. Deve-se relacionar tais pontos com os *gnômons* estudados na seção anterior, para que consigamos encontrar sua recorrência e forma fechada. Pode-se observar, ainda, a Figura 24, que apresenta um número triangular como soma de *gnômons*.

Figura 24 - *Gnômons* formando o quinto número triangular



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

A Figura 24 apresenta a disposição dos números triangulares como uma soma de números naturais, os *gnômons*, que são “uma forma que, quando adicionada a uma figura, produz outra figura semelhante à original” (Deza; Deza, 2012). Essa forma para números triangulares é a sequência numérica $(1, 2, 3, 4, \dots)$. Assim, podemos descrever a sequência dos *gnômons* dos números triangulares como uma progressão aritmética em que o primeiro termo e a razão são iguais a 1. Tal sequência pode ser observada de forma mais simples, como a sequência dos números naturais positivos. Logo, pode-se apresentar as somas que formam os números triangulares como $S_3(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Tal observação permite encontrar uma fórmula recorrente e termo geral para os números triangulares. A recorrência para essa sequência é apresentada como:

Definição 10 (Recorrência dos números triangulares). A sequência dos números triangulares $(S_3(n))_{n \in \mathbb{N}}$ pode ser definida recursivamente pela fórmula:

$$S_3(n+1) = S_3(n) + n + 1, \quad n \geq 0, S_3(0) = 0.$$

De fato, reescrevendo os termos da sequência dos números triangulares, e associando cada número ao seu anterior, tem-se que $S_3(1) = 1 = 0 + 1 = S_3(0) + 1$. No segundo termo, de modo análogo ao primeiro, tem-se $S_3(2) = 3 = 1 + 2 = S_3(1) + 2$ e ainda $S_3(3) = 6 = 3 + 3 = S_3(2) + 3$, e assim por diante, de tal forma que para um certo $S_3(n+1)$ com $n \geq 1$ a relação é estabelecida por $S_3(n+1) = S_3(n) + (n+1)$.

Em posse da recorrência e da soma parcial apresentada anteriormente, pode-se enunciar um teorema de acordo com Alves e Borges Neto (2012), que trata de números triangulares. Assim, tem-se:

Teorema 1 (Forma geral dos números triangulares). Dada a sequência dos números triangulares $(1, 3, 6, 10, \dots)$, a fórmula que permite encontrar o n -ésimo termo é dada por:

$$S_3(n) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \geq 0, S_3(0) = 0$$

Demonstração. Considerando um certo número triangular como a soma dos n primeiros naturais consecutivos, temos:

$$S_3(n) = 0 + 1 + 2 + \dots + (n-2) + (n-1) + n.$$

Agora consideremos a soma,

$2S_3(n) = (0+1+2+\dots+(n-2)+(n-1)+n) + (0+1+2+\dots+(n-2)+(n-1)+n)$. Isso significa que $2S_3(n) = \underbrace{(0+n) + (1+n-1) + \dots + (n-1+1) + (n+0)}_{(n+1)\text{ vezes}}$ e, então $S_3(n) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Agora provaremos que essa fórmula é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, usando o princípio de indução e a recorrência. Então, para $n=1$ tem-se $S_3(1) = \frac{1(1+1)}{2} = 1$, para $n=2$ tem-se

$S_3(2) = \frac{2(2+1)}{2} = 3$ e, assumindo que seja válido para um certo $n=k$, tem-se que a recorrência

de $S_3(k+1)$ é dada por $S_3(k+1) = S_3(k) + k + 1$. Como $S_3(k) = \frac{k(k+1)}{2}$ segue que:

$S_3(k+1) = S_3(k) + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$. Logo,

$$S_3(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

■

Com isso, é possível construir uma tabela de números triangulares com sua representação por sequência, recorrência e forma fechada, como a Tabela 3 que segue.

Tabela 3 - Sequência, recorrência e termo geral dos números triangulares

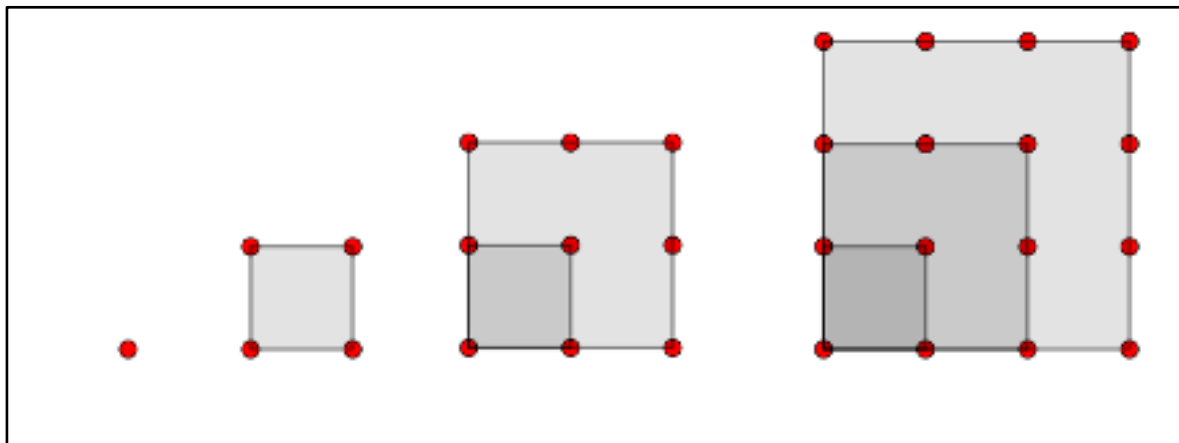
Números triangulares	
Sequência	(0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, ...)
Recorrência	$S_3(n+1) = S_3(n) + n + 1$
Forma fechada	$S_3(n) = \frac{n(n+1)}{2}$
Registro na OEIS	A000217

Fonte: Elaboração do autor (2025).

3.5.2 Recorrência e forma geral dos números quadrados

Números quadrados são os números de pontos que formam quadriláteros equiláteros. Esse conjunto gera a sequência numérica $(0, 1, 4, 9, 16, \dots)$, conforme as figuras a seguir:

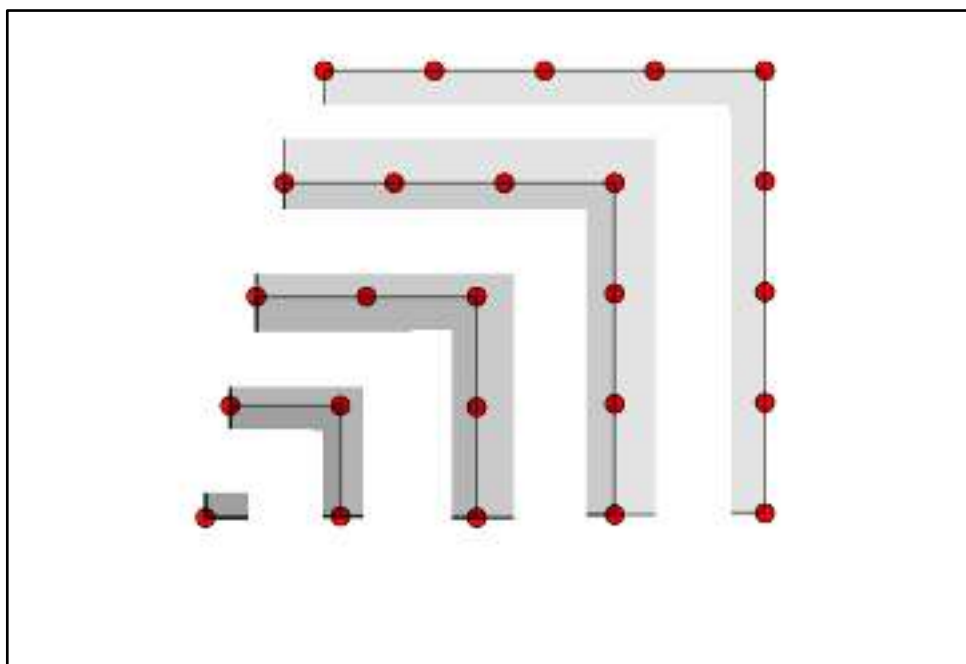
Figura 25 - Os quatro primeiros números quadrados



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

A Figura 25 apresenta os quatro primeiros números quadrados. Usando raciocínio análogo ao empregado no caso dos números triangulares, deve-se relacionar tais pontos com os *gnômons* e, dessa forma, encontrar sua recorrência e fórmula geral. Observa-se a Figura 26, que apresenta um número quadrado separado em *gnômons*.

Figura 26 - *Gnômons* formando o quinto número quadrado



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Seguindo o modelo da proposta apresentada para números triangulares, deve-se definir também a relação de recorrência e a sequência que forma *gnômons* dos números quadrados. Assim, tem-se:

Definição 11 (Recorrência dos números quadrados). A sequência dos números quadrados pode ser definida recursivamente pela fórmula:

$$S_4(n+1) = S_4(n) + 2n + 1, n \geq 0, S_4(0) = 0$$

De fato, observamos que:

$$\begin{aligned} S_4(0) &= 0 \\ S_4(1) &= 1 = 0 + 1 = S_4(0) + 2 \cdot 0 + 1 \\ S_4(2) &= 4 = 1 + 3 = S_4(1) + 2 \cdot 1 + 1 \\ S_4(3) &= 9 = 4 + 5 = S_4(2) + 2 \cdot 2 + 1 \\ S_4(4) &= 16 = 9 + 7 = S_4(3) + 2 \cdot 3 + 1 \\ &\dots \\ S_4(n+1) &= S_4(n) + 2n + 1. \end{aligned}$$

Deve-se lembrar que *gnômon* de um número quadrado é a diferença entre dois números quadrados consecutivos, ou seja $S_4^1(n) = S_4(n+1) - S_4(n)$. Essa sequência é definida por $S_4^1(n) = 2n - 1$ e forma a sequência dos números ímpares $(1, 3, 5, 7, \dots)$.

De fato, pode-se perceber que essa fórmula é obtida pela própria lei de recorrência, e que as somas parciais dos números quadrados são dadas por $S_4(n) = 0 + 1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1$. Dessa forma, e em posse da recorrência e das somas parciais apresentadas anteriormente, pode-se enunciar, de acordo com Deza e Deza (2012), um teorema acerca de números quadrados.

Teorema 2 (Forma geral dos números quadrados). Dada a sequência dos números quadrados $(0, 1, 4, 9, 16, \dots)$, a forma que permite encontrar o n -ésimo termo sem a necessidade do anterior, ou seja, sua forma fechada, é dada por:

$$S_4(n) = n^2, n > 0, S_4(0) = 0$$

Demonstração. Tem-se que, $S_3(n) = 0 + 1 + 2 \dots + (2n - 3) + (2n - 1)$. Então,

$$\begin{aligned} 2S_4(n) &= 0 + (1 + 3 + \dots + (2n - 3) + (2n - 1)) + (1 + 3 + \dots + (2n - 3) + (2n - 1)) \\ &= \underbrace{(1 + 2n - 1) + (3 + 2n - 3) + \dots + (2n - 1 + 1) + (2n - 3 + 3)}_{(n)\text{vezes}} + 0 \end{aligned}$$

$$2S_4(n) = n(2n)$$

$$S_4(n) = n^2$$

Por indução, e usando a recorrência, tomemos um certo $n = k$, $S_4(1) = 1^2 = 1, S_4(2) = 2^2 = 4, S_4(3) = 3^2 = 9, \dots$ Pela hipótese de indução, tem-se que $S_k(k) = k^2$. Dessa forma, pela recorrência, tem-se $S_4(k+1) = S_4(k) + 2k + 1, S_4(k+1) = k^2 + k + 1$, ou seja, $S_4(k+1) = (k+1)^2$ ■

Com isso, pode-se construir uma tabela de números quadrados com sua representação por sequência, recorrência e forma fechada (Tabela 4).

Tabela 4 - Sequência, recorrência e termo geral dos números triangulares

Números quadrados	
Sequência	(0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ...)
Recorrência	$S_4(n+1) = S_4(n) + 2n + 1$
Forma fechada	$S_4(n) = n^2$
Registro na OEIS	A000290

Fonte: Elaboração do autor (2025).

A Tabela 4 apresenta a sequência dos números quadrados, bem como sua recorrência, termo geral e registro na OEIS, como forma de resumir as principais características – algébrica, sequencial, recursiva e documental – dessa sequência. Esse conceito de uma forma mais geral será explorado na próxima seção com os números poligonais.

3.5.3 Recorrência e forma geral para números poligonais.

Tem-se, para os números m -gonais ou números poligonais, como $m \geq 3$, que os três primeiros termos, incluído $S_m(0)$ dos números poligonais são $S_m^2(0) = 0, S_m^2(1) = 1$ e $S_m^2(2) = m$.

A fórmula para os *gnômons* dos números poligonais pode ser extraída de uma progressão aritmética $a_n = a_1 + (n-1)r$, pois como os números figurados possuem uma

padronização que o termo da posição 1 é também 1, então $a_1 = 1$ e a razão é $r = m - 2$, pois ao acrescentar qualquer *gnômon* ao redor de um conjunto de pontos, estes formam uma configuração poligonal. Entretanto, esse crescimento não acontece de maneira independente em todos os m lados. Há uma espécie de sobreposição natural das extremidades das camadas nos vértices, o que faz com que dois desses lados não contribuam com acréscimos independentes de novos pontos, ou seja, a progressão aritmética $a_n = 1 + (n - 1)(m - 2)$. Assim, os primeiros números dos *gnômons* m -gonais formam a sequência.

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + (1 - 1)(m - 2) = 1 = 0(m - 2) + 1 \\ a_2 &= 1 + (2 - 1)(m - 2) = 1(m - 2) + 1 \\ a_3 &= 1 + (3 - 1)(m - 2) = 2(m - 2) + 1 \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= 1 + (n - 1 - 1)(m - 2) = (n - 2)(m - 2) + 1 \\ a_n &= (n - 1)(m - 2) + 1 \end{aligned}$$

Usando o raciocínio dos números triangulares e quadrados, apresenta-se a recorrência dos números poligonais.

Proposição 1 (*Recorrência dos números poligonais*). Seja $S_m(n)$ o n -ésimo número poligonal de m lados. Então $S_m(n)$ satisfaz à recorrência não homogênea de primeira ordem:

$$S_m(n + 1) = S_m(n) + (m - 2)n + 1$$

Demonstração. De fato, para $m = 3$, tem-se: $S_3(n + 1) = S_3(n) + n + 1$. Para $m = 4$, aplicando o mesmo procedimento, resulta em $S_4(n + 1) = S_4(n) + 2n + 1$, e segue que, para todo $m \geq 3$:

$$\begin{aligned} S_m(0) &= 0 \\ S_m(1) &= 0 + 1 = S_m(0) + (m - 2)(1 - 1) + 1 \\ S_m(2) &= m = 1 + m - 1 = S_m(1) + (m - 2)(2 - 1) + 1 \\ &\vdots \\ S_m(n + 1) &= S_m(n) + (m - 2)n + 1 \end{aligned}$$

■

Com isso, o teorema pode ser enunciado da forma geral dessa família de sequências de acordo com Deza e Deza (2012).

Teorema 3. Seja $S_m(n)$ um número poligonal com n e m naturais e $m \geq 3$. Sua forma geral é dada por:

$$S_m(n) = \frac{n((m-2)n - m + 4)}{2}$$

Demonstração. Para encontrar a fórmula que representa os números poligonais de forma geral, deve-se considerar que esses números são resultantes da soma de termos da progressão aritmética que tem forma geral dada por $a_n = 1 + (n-1) \cdot (m-2)$. Assim, segue que:

$$S_m(n) = \frac{(1 + 1 + (n-1)(m-2)) \cdot n}{2}$$

$$S_m(n) = \frac{(2 + 2 - m - 2n + mn) \cdot n}{2}$$

$$S_m(n) = \frac{n((m-2)n - m + 4)}{2}$$

o que fornece o resultado desejado. Outra maneira de obter a mesma fórmula é usando a recorrência, onde tem-se:

$$\begin{aligned} S_m(n+1) &= S_m(n) + (m-2) \cdot n + 1, \quad S_m(1) = 1 \\ &= \frac{n((m-2)n - m + 4)}{2} + (m-2) \cdot n + 1 \\ &= \frac{n((m-2)n - m + 4)}{2} + \frac{2n(m-2) + 2}{2} \\ &= \frac{(n((m-2)n - m + 4) + 2n(m-2) + 2)}{2} \\ &= \frac{n^2(m-2) - nm + 4n + 2n(m-2) + 2 + (m-2) - (m-2)}{2} \\ &= \frac{(n+1)^2(m-2) - nm + 4n - m + 4}{2} \\ &= \frac{(n+1)^2 \cdot (m-2) + (-m+4)(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)((m-2)(n+1) - m + 4)}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Por fim, tem-se } S_m(n+1) = \frac{(n+1)((m-2)(n+1) - m + 4)}{2}.$$

■

Apresenta-se a seguir a tabela de Deza e Deza (2012) para apresentar alguns números poligonais.

Tabela 5 - Número poligonais, fórmulas e catálogo na OEIS

Name	Formula												Sloane
Triangular	$\frac{1}{2}(n^2 + n)$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	A000217
Square	$\frac{1}{2}(n^2 + 0 \cdot n)$	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	A000290
Pentagonal	$\frac{1}{2}(3n^2 - 1 \cdot n)$	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	176	A000326
Hexagonal	$\frac{1}{2}(4n^2 - 2n)$	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190	231	A000384
Heptagonal	$\frac{1}{2}(5n^2 - 3n)$	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235	286	A000566
Octagonal	$\frac{1}{2}(6n^2 - 4n)$	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280	341	A000567
Nonagonal	$\frac{1}{2}(7n^2 - 5n)$	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325	396	A001106
Decagonal	$\frac{1}{2}(8n^2 - 6n)$	1	10	27	52	85	126	175	232	297	370	451	A001107
Endecagonal	$\frac{1}{2}(9n^2 - 7n)$	1	11	30	58	95	141	196	260	333	415	506	A051682
Dodecagonal	$\frac{1}{2}(10n^2 - 8n)$	1	12	33	64	105	156	217	288	369	460	561	A051624
Tridecagonal	$\frac{1}{2}(11n^2 - 9n)$	1	13	36	70	115	171	238	316	405	505	616	A051665
Tetradecagonal	$\frac{1}{2}(12n^2 - 10n)$	1	14	39	76	125	186	259	344	441	550	671	A051666
Pentadecagonal	$\frac{1}{2}(13n^2 - 11n)$	1	15	42	82	135	201	280	372	477	595	726	A051667
Hexadecagonal	$\frac{1}{2}(14n^2 - 12n)$	1	16	45	88	145	216	301	400	513	640	781	A051668
Heptadecagonal	$\frac{1}{2}(15n^2 - 13n)$	1	17	48	94	155	231	322	428	549	685	836	A051669
Octadecagonal	$\frac{1}{2}(16n^2 - 14n)$	1	18	51	100	165	246	343	456	585	730	891	A051670
Nonadecagonal	$\frac{1}{2}(17n^2 - 15n)$	1	19	54	106	175	261	364	484	621	775	946	A051671
Icosagonal	$\frac{1}{2}(18n^2 - 16n)$	1	20	57	112	185	276	385	512	657	820	1001	A015872
Icosihenagonal	$\frac{1}{2}(19n^2 - 17n)$	1	21	60	118	195	291	406	540	693	865	1056	A015873
Icosidigonal	$\frac{1}{2}(20n^2 - 18n)$	1	22	63	124	205	306	427	568	729	910	1111	A015874
Icositrigonal	$\frac{1}{2}(21n^2 - 19n)$	1	23	66	130	215	321	448	596	765	955	1166	A015875
Icositetragonal	$\frac{1}{2}(22n^2 - 20n)$	1	24	69	136	225	336	469	624	801	1000	1221	A015876
Icosipentagonal	$\frac{1}{2}(23n^2 - 21n)$	1	25	72	142	235	351	490	652	837	1045	1276	
Icosihexagonal	$\frac{1}{2}(24n^2 - 22n)$	1	26	75	148	245	366	511	680	873	1090	1331	
Icosiheptagonal	$\frac{1}{2}(25n^2 - 23n)$	1	27	78	154	255	381	532	708	909	1135	1386	
Icosioctagonal	$\frac{1}{2}(26n^2 - 24n)$	1	28	81	160	265	396	553	736	945	1180	1441	
Icosinonagonal	$\frac{1}{2}(27n^2 - 25n)$	1	29	84	166	275	411	574	764	981	1225	1496	
Triacantagonal	$\frac{1}{2}(28n^2 - 26n)$	1	30	87	172	285	426	595	792	1017	1270	1551	

Fonte: Deza e Deza (2012).

A Tabela 5 exhibe alguns números poligonais, suas formas gerais e seu registro na OEIS. Contudo, propõe-se agora outra maneira de obter essas fórmulas, usando um recurso simples e uma propriedade que relaciona qualquer número figurado plano com números triangulares. Essa relação será tratada na próxima seção e servirá de base para o desenvolvimento de todo esse estudo.

3.5.4 Recorrência e forma geral dos números simplexos

De acordo com Deza e Deza (2012), pode-se extrair um resultado que apresente a forma geral dos números simplexos.

Teorema 4 (Forma geral dos números simplexos). Dado um número simplexo k -dimensional, denotado por $S_3^k(n)$, sua forma geral é dada por:

$$S_3^k(n) = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+1+k-1)}{k!}, n \in \mathbb{N}, n > 0$$

Demonstração. Observe que os números lineares da sequência $(1, 2, 3, \dots, n)$, ou seja, os simplexos de dimensão 1, possuem o termo geral dado por $S_3^1 = n$. Reescrevendo essa forma,

vemos que estes também podem ser escritos como $S_3^1 = \frac{n}{1!}$. Já os triangulares são obtidos

somando-se os termos sucessivos dos números lineares, ou seja $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Assim, o termo geral dos números triangulares é dado por $S_3^2(n) = \frac{n(n+1)}{2}$, ou

$S_3^2(n) = \frac{n(n+1)}{2!}$. Seguindo o mesmo raciocínio para os números tetraédricos, temos

$$S_3^3(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}.$$

Assim, podemos propor uma hipótese de que, para um certo $k \in \mathbb{N}$, tem-se que

$S_3^k(n) = \frac{n(n+1) \cdots (n+k-1)}{k!}$ e, para provar tal fato para $n+1$, tem-se que

$$S_3^k(n+1) = S_3^k(n) + S_3^{k-1}(n+1) = \frac{n(n+1) \cdots (n+k-1)}{k!} + \frac{(n+1)(n+2) \cdots (n+1+k-2)}{(k-1)!}, \text{ e segue}$$

$$\begin{aligned} S_3^k(n+1) &= S_3^k(n) + S_3^{k-1}(n+1) = \frac{n(n+1) \cdots (n+k-1)}{k!} + \frac{(n+1)(n+2) \cdots (n+k-1)k!}{(k-1)!k!} \\ &= \frac{n(n+1) \cdots (n+k-1)}{k!} + \frac{(n+1)(n+2) \cdots (n+k-1)k(k-1)!}{(k-1)!k!} \\ &= \frac{n(n+1) \cdots (n+k-1)}{k!} + \frac{(n+1)(n+2) \cdots (n+k-1)k}{k!} \\ &= \frac{n(n+1) \cdots (n+k-1)(n+k)}{k!} \end{aligned}$$

ou seja,

$$S_3^k(n+1) = S_3^k(n) + S_3^{k-1}(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2) \cdots (n+1+k-1)}{k!}, n \in \mathbb{N}, n > 0$$

■

3.5.5 A construção de números poligonais por meio de números triangulares

Iniciaremos essas construções pela relação entre números triangulares e números quadrados. Como já apresentado, os números quadrados formam a sequência $(1, 4, 9, 16, \dots)$ e

tem sua forma geral dada por $S_4(n) = n^2$. Os números triangulares, por sua vez, formam a sequência (1, 3, 6, 10, ...). Dessa maneira, percebe-se que, a partir do segundo termo dos números quadrados, pode-se observar uma relação com os números triangulares. De fato, tem-se: $4 = 3 + 1$ ou seja $S_4(2) = S_3(2) + S_3(1)$. Da mesma forma, o próximo termo dos números quadrados pode ser apresentado pela relação $9 = 6 + 3$ ou $S_4(3) = S_3(3) + S_3(2)$, e assim sucessivamente, de modo que é válida a propriedade a seguir, de acordo com Alves e Borges Neto (2012):

Propriedade 1 (Relação entre números triangulares e quadrados). A relação existente entre números triangulares e quadrados pode ser obtida algebricamente pela fórmula

$$S_4(n) = S_3(n) + S_3(n-1) \text{ com } S_4 = S_3 = 0, n \geq 1$$

Demonstração. De fato, utilizando um procedimento algébrico simples, tem-se que $S_4(n) = n^2$

pode ser escrito como $S_4(n) = \frac{2n^2}{2}$. Após uma reorganização de termos tem-se ainda que

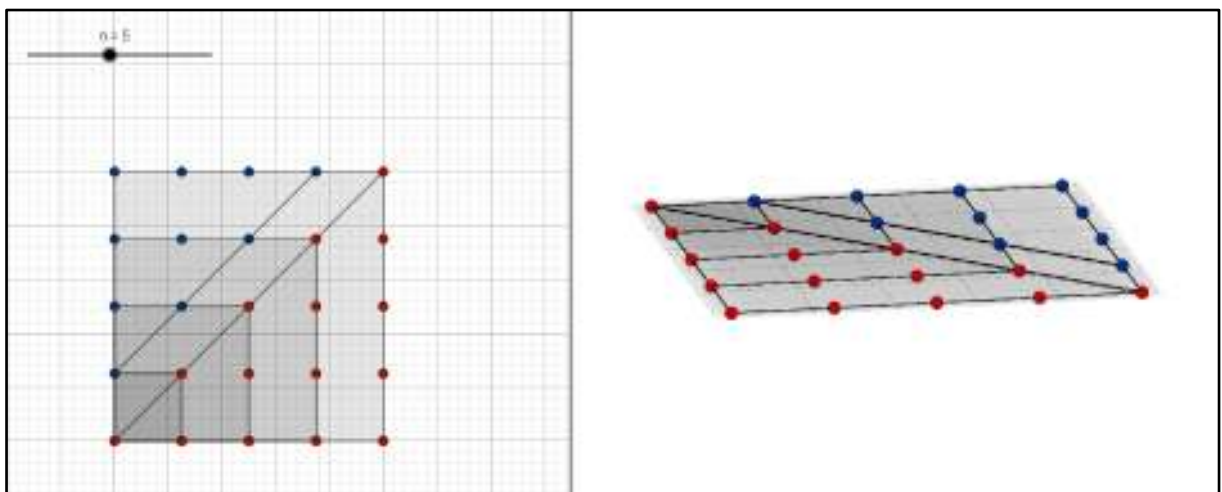
$$S_4(n) = \frac{n^2 + n^2 + n - n}{2} = \frac{n^2 - n + n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1) + (n-1)n}{2}, \text{ o que equivale a afirmar que}$$

$$S_4(n) = S_3(n) + S_3(n-1).$$

■

Usando o recurso da visualização pelo software GeoGebra (SG), fica perceptível a relação estabelecida nesta propriedade, conforme a Figura 27:

Figura 27 - Nono número quadrado como soma de dois números triangulares



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

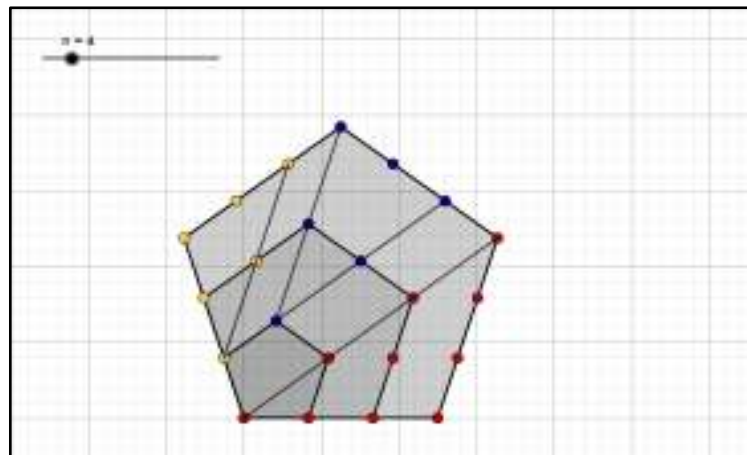
Na Figura 27, observa-se o quinto número quadrado representado a partir de dois números triangulares. As cores diferenciam o maior do menor, assim como as linhas traçadas transversalmente. A figura apresenta duas visualizações – uma na janela 2D e outra na janela 3D – com o intuito de aproximar os pontos e destacar o triângulo formado por eles.

Essa relação é relevante para este trabalho, pois será utilizada na definição de outras relações com representações alternativas, bem como na elaboração das situações didáticas apresentadas posteriormente.

A seguir, aplica-se o mesmo procedimento para apresentar uma relação análoga, agora referente aos números pentagonais. Primeiramente, utiliza-se o recurso visual do SG (software gráfico) para exibir a relação por meio da configuração; em seguida, apresenta-se a propriedade correspondente.

Observam-se dois triângulos retângulos, que correspondem a números triangulares, e uma semirreta, indicando que a propriedade pode ser percebida na figura em questão.

Figura 28 - Quarto número pentagonal triangulado



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Os números pentagonais são os números que formam a sequência $(1, 5, 12, 22, \dots)$, registrada com o código A000326 no catálogo da OEIS. Dessa maneira, define-se como $S_5(1)=1, S_5(2)=5, S_5(3)=12, S_5(4)=22$, de modo que $S_5(n)=\frac{3n^2-n}{2}$ pela forma dos números poligonais. Para essa sequência, é estabelecida a seguinte propriedade.

Propriedade 2 (Relação entre números pentagonais e números triangulares). Seja

$S_5(n) = \frac{n(3n-1)}{2}$ o n -ésimo número pentagonal e $S_3(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ o n -ésimo número

triangular. A relação existente entre essas duas sequências é dada por:

$$S_5(n) = S_3(n) + 2S_3(n-1) \text{ com } S_5(1) = S_3(1) = 1$$

Demonstração. De fato, pode-se perceber pelos primeiros números pentagonais que estes podem ser expressos em termos de números triangulares, em que se observa que $S_5(2) = 5 = 3 + 1 + 1 = S_3(2) + 2S_3(1)$. Da mesma forma, o próximo número pentagonal também apresenta essa característica. Tem-se que $S_5(3) = 12 = 6 + 2 \cdot 3 = S_3(3) + 2S_3(2)$, e por fim, aplicando a relação partindo dos números triangulares, chega-se até a forma fechada dos números pentagonais, ou seja $S_5(n) + 2 \cdot S_3(n-1) = \frac{n(n+1)}{2} + 2 \cdot \left(\frac{(n-1)n}{2} \right)$. Utilizando apenas

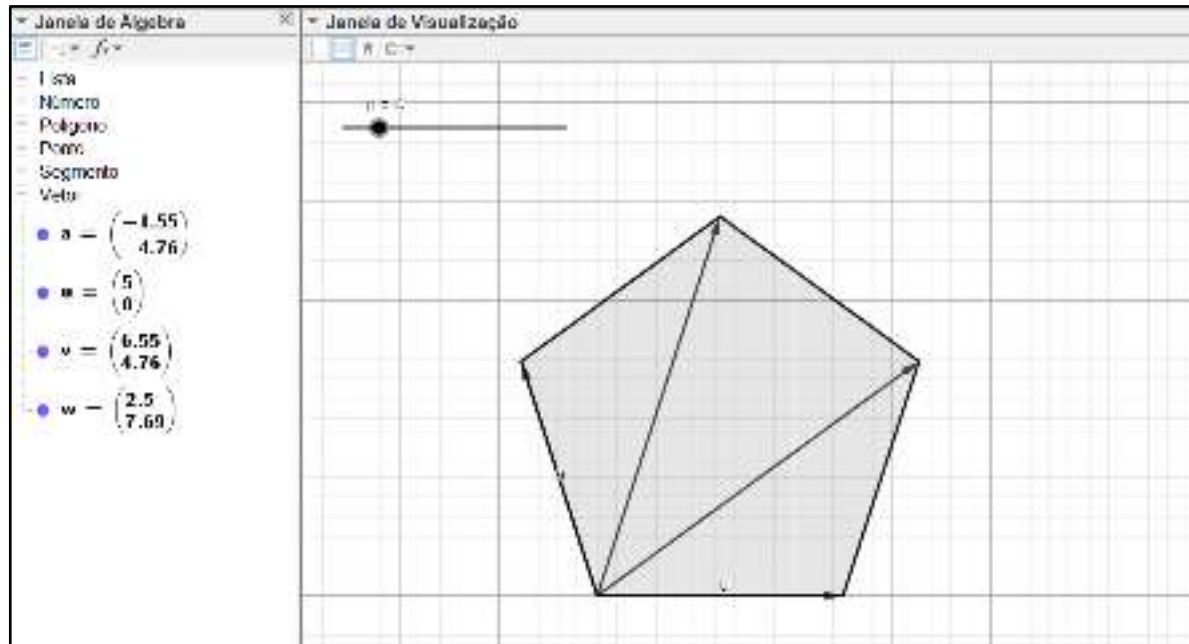
recursos algébricos, tem-se $\frac{n(n+1)}{2} + 2 \cdot \left(\frac{(n-1)n}{2} \right) = \frac{n}{2}(n+1+2n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$

■

Como sugestão para apoiar a construção desse número no software GeoGebra, descreve-se a seguir o protocolo de construção, que servirá também para outras construções posteriores e para a compreensão de como algumas propriedades podem ser obtidas a partir desses protocolos.

Para a construção dos números pentagonais apresentada anteriormente no SG, é necessário criar três listas de números triangulares: uma com o número triangular de ordem igual ao número pentagonal em questão, e as outras duas referentes a $S_3(n-1)$. Para isso, devem-se transladar vetores pelas listas de triângulos. Observe que, na figura seguinte, é feita a construção de um pentágono e, entre seus pontos, formam-se vetores pelos quais as listas de pontos serão transladadas.

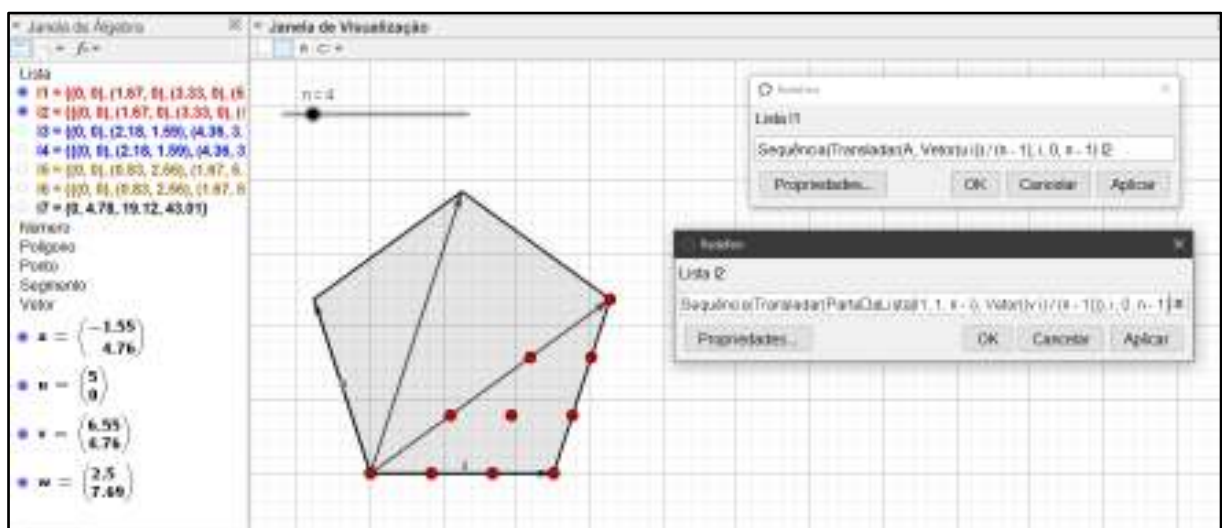
Figura 29 - Esquema do polígono de construção dos números pentagonais



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Na Figura 29 observa-se um pentágono de lado u (uma unidade de medida) e, a partir desses lados, pode-se construir vetores por onde serão transladadas as listas de pontos ou triângulos, usando os mesmos comandos usados para construir números triangulares. A Figura 30 apresenta uma lista de triângulos pelos vetores u e v , em que a imagem gerada forma o primeiro triângulo dentro de um pentágono.

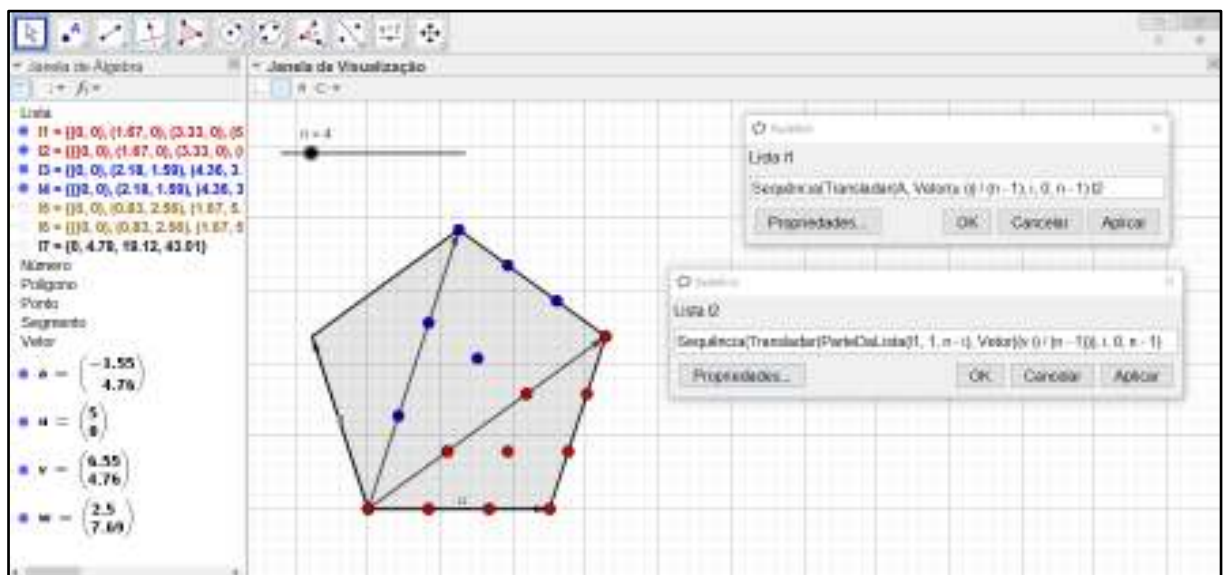
Figura 30 - Construção de uma lista de pontos sobre o polígono base para os números pentagonais



Fonte: Elaboração do autor (2024).

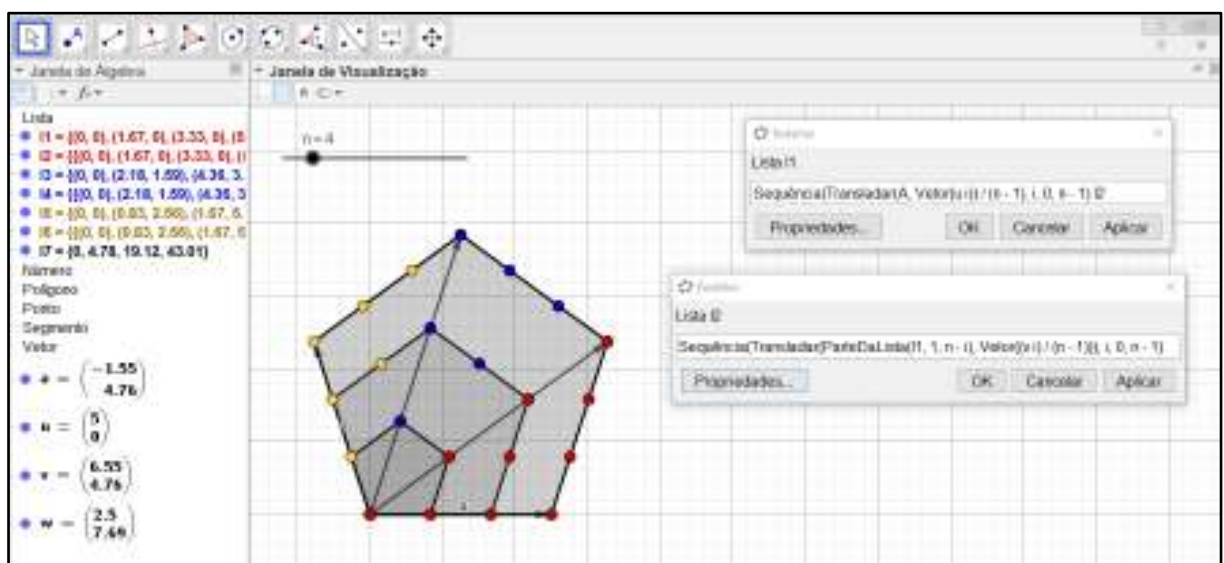
A partir dessa construção e seguindo o mesmo procedimento para as outras listas, aplica-se o protocolo de construção para os outros vetores, de modo que as listas de números triangulares preencham os triângulos desenhados por vetores dentro do pentágono inicial. Assim, tem-se a segunda e terceira listas indicadas nas Figuras 31 e 32, que encerram a construção da sequência desejada.

Figura 31 - Construção de números pentagonais via SG



Fonte: Elaboração do autor (2024).

Figura 32 - Quinto número pentagonal

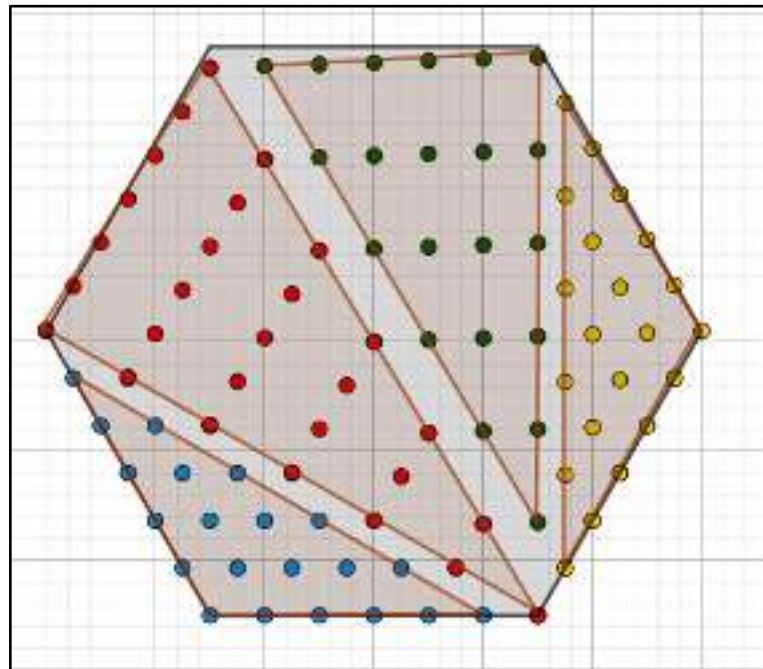


Fonte: Elaboração dos autor (2024).

As duas últimas figuras apresentadas mostram os números triangulares que compõem o número pentagonal, diferenciados por cores. As linhas que percorrem cada lista de pontos definem a sucessão dos números pentagonais, conforme a sequência apresentada anteriormente. Esse esquema, por meio da manipulação de cores, permite identificar outras propriedades – algumas triviais, outras mais elaboradas – evidenciando o potencial do software gráfico (SG) para a investigação de propriedades de números figurados a partir do padrão discreto.

Dessa forma, é possível construir também números hexagonais, heptagonais e assim sucessivamente, bastando definir vetores pelos quais as listas de pontos serão transladadas. A título de ilustração da relação entre números hexagonais e triangulares, apresenta-se a Figura 33.

Figura 33 - Relação dos números hexagonais e triangulares



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Esta configuração de números hexagonais e triangulares é dada por $S_6(n) = S_3(n) + 3S_3(n-1)$, $n > 1$, $S_3(1) = 1$, $S_6(1) = 1$, que resulta de fato na fórmula dos números hexagonais. Com isso, pode-se construir a fórmula dos números m -gonais a partir dos números triangulares.

Propriedade 3. Os números poligonais podem ser escritos em termos de números triangulares da seguinte forma:

$$S_m(n) = S_3(n) + (m-3)S_3(n-1), n > 1, S_3(1) = 1, S_m(1) = 1$$

Demonstração. De fato,

$$S_3(n) = S_3(n) + 0S_3(n-1), n > 1, S_3(1)$$

$$S_4(n) = S_3(n) + 1S_3(n-1), n > 1, S_3(1) = 1, S_4(1) = 1$$

$$S_5(n) = S_3(n) + 2S_3(n-1), n > 1, S_3(1) = 1, S_5(1) = 1$$

$$S_6(n) = S_3(n) + 3S_3(n-1), n > 1, S_3(1) = 1, S_6(1) = 1$$

ou

$$S_m(n) = S_3(n) + (m-3)S_3(n-1)$$

Usando agora apenas argumentos algébricos, parte-se da hipótese e encontra-se a forma geral,

$$\begin{aligned} S_m(n) &= S_3(n) + (m-3)S_3(n-1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (m-3)\frac{(n-1)n}{2} \\ &= \frac{n}{2}(n+1 + mn - m - 3n + 3) \\ &= \frac{n}{2}mn - 2n - m + 4 \\ &= \frac{n((m-2)n - m + 4)}{2} \end{aligned}$$

■

Essa propriedade será amplamente utilizada nas seções seguintes, pois contribui para o cumprimento de um dos objetivos da pesquisa: a construção de propriedades a partir de números poligonais utilizando exclusivamente números triangulares. De modo análogo, a relação entre números triangulares e números quadrados constitui o passo inicial para uma generalização a todos os números poligonais.

Adiante, serão descritas definições e teoremas semelhantes para a classe dos números figurados tridimensionais, mais especificamente os números piramidais, que constituem a família de sequências análogas aos números poligonais na estrutura dos simplexos.

3.5.6 Recorrência e termo geral para números piramidais

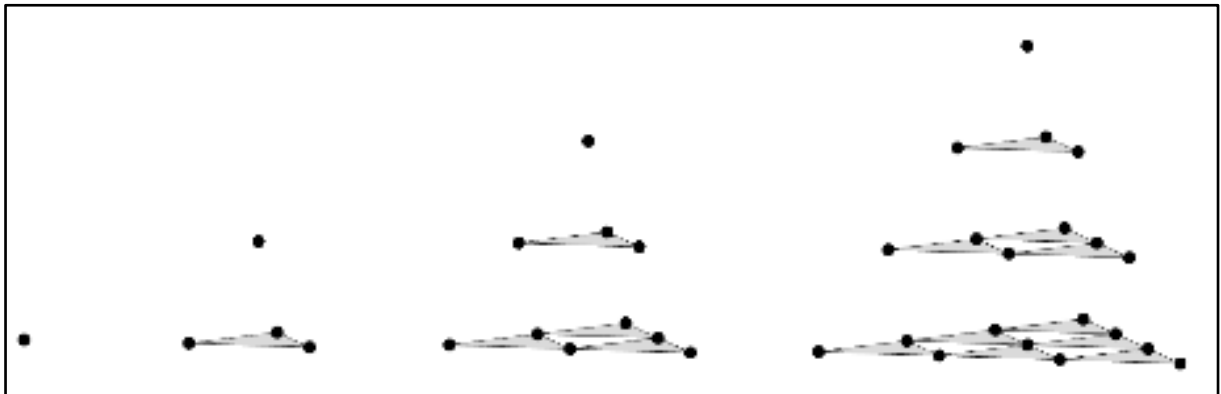
Os números figurados que formam pirâmides constituem a classe mais conhecida de números figurados tridimensionais entre aqueles associados a poliedros. Isso se deve ao fato de serem compostos por camadas de números poligonais, que vão desde o n -ésimo número poligonal, localizado na base da pirâmide, até o primeiro número poligonal, correspondente ao

topo, ou seja, ao vértice que não pertence à base. Tais números são o passo seguinte à definição dos números poligonais e estão entre as poucas famílias de números figurados que não são regulares, com exceção dos números tetraédricos, que pertencem à família dos números piramidais, da família dos números platônicos (associados aos sólidos de Platão) e da classe dos números simplexos, que serão descritos posteriormente.

Assim como os números poligonais podem ser classificados em triangulares, quadrados, pentagonais, entre outros, os números piramidais também podem ser apresentados como piramidais triangulares, piramidais quadrados e assim sucessivamente, conforme a forma da base do poliedro que compõe a pirâmide.

Para iniciar, serão descritos os números piramidais triangulares (números tetraédricos), que podem ser apresentados dada a sequência $(1, 4, 10, 20, \dots)$, A000292, sendo definidos por $S_3^3(1) = 1$, $S_3^3(2) = 4$, $S_3^3(3) = 10$, $S_3^3(4) = 20$.

Figura 34 - Os quatro primeiros números tetraédricos



Fonte: Elaboração do autor (2024).

Definição 12 (Recorrência dos números tetraédricos). Denomina-se número tetraédrico de ordem n e representado por $S_3^3(n)$, o n -ésimo número figurado tridimensional que representa a quantidade de pontos necessários para formar um tetraedro regular composto por camadas triangulares sucessivas.

A sequência dos números tetraédricos pode ser definida recursivamente por:

$$S_3^3(n+1) = S_3^3(n) + \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \quad S_3^3(1) = 1$$

De fato, tomando números tetraédricos como a soma sucessiva dos n primeiros números triangulares tem-se $S_3^3(1) = 1 = S_3(1)$. Da mesma forma, $S_3^3(2) = 4 = 1 + 3 = S_3^3(1) + S_3(2)$.

Perceba que a estrutura na forma expandida pode ser representada também por números lineares. Pode-se observar que $S_3^3(3) = 1 + (1+2) + (1+2+3)$, ou seja, $S_3^3(3) = 1 + 3 + 6$, ou $S_3^3(3) = S_3^3(2) + S_3(3)$, e assim sucessivamente.

Usando essa ideia, pode-se definir a forma recorrente para qualquer número piramidal. A forma que representa o termo geral para números piramidais pode ser analisada a partir da forma geral dos números tetraédricos. Portanto, nessa seção será construída também a forma geral dessa sequência para que possamos relacioná-la à construção de todos os números piramidais, de modo análogo ao que foi feito anteriormente para os números poligonais.

Para encontrar a fórmula dos números tetraédricos, é necessária a definição da soma dos n números quadrados, que pode ser encontrada em Baumann (2019).

Lema 1 (*Soma dos n números quadrados*). Denomina-se soma dos n primeiros quadrados a expressão numérica formada pela adição sucessiva dos quadrados dos n primeiros números naturais, isto é,

$$S_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

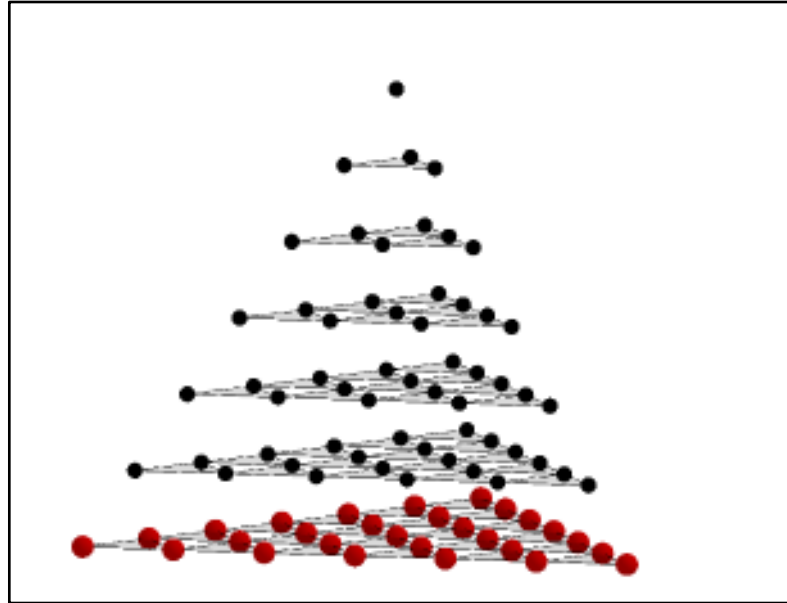
A forma geral resultante dessa expressão, é dada por:

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Com essa fórmula, pode-se enunciar um teorema sobre a fórmula geral dos números tetraédricos, embora este já seja amplamente conhecido nos textos sobre números figurados. A ideia aqui é exibir o teorema por se tratar de uma fórmula que será bastante usada no decorrer do texto, portanto necessita de ter sua estrutura provada de forma separada.

Na Figura 35 apresenta-se novamente os quatro primeiros números tetraédricos com um crescimento triangular, mostrando a última camada de outra cor para que se perceba claramente a lei de recorrência.

Figura 35 – Sétimo número tetraédrico formado pela adição do sétimo número triangular ao sexto número tetraédrico



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Assim, tem-se:

$$S_3^3(1) = 1 = S_3(1)$$

$$S_3^3(2) = 4 = 1 + 3 = S_3(1) + S_3(2)$$

$$S_3^3(3) = 10 = 1 + 3 + 6 = S_3(1) + S_3(2) + S_3(3)$$

$$\vdots$$

$$S_3^3(n) = S_3(1) + S_3(2) + S_3(3) + \cdots + S_3(n) = \sum_{i=1}^n S_3(i)$$

Teorema 5. Seja $S_3^3(n)$ o n -ésimo número tetraédrico, formado pela soma dos n números triangulares, a forma geral que o define é dada por:

$$S_3^3(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Demonstração. Observa-se que $S_3^3(n) = 1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{n(n+1)}{2}$. Porém, cada número triangular

pode ser representado usando a fórmula fechada, ou seja

$S_3^3(n) = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} + \frac{2 \cdot (2+1)}{2} + \frac{3 \cdot (3+1)}{2} + \cdots + \frac{n(n+1)}{2}$. Separando os quadrados, segue que

$$S_3^3(n) = \frac{(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + (1 + 2 + 3 + \cdots + n)}{2}. \quad \text{Pode-se reescrever como}$$

$$2S_3^3(n) = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + (1 + 2 + 3 + \cdots + n). \quad \text{Como já se sabe que}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ e que } \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ então } 2S_3^3(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}, \text{ ou}$$

$$\text{ainda } S_3^3(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{3n(n+1)}{12}. \text{ Colocando o termo } n(n+1) \text{ em evidência, tem-se}$$

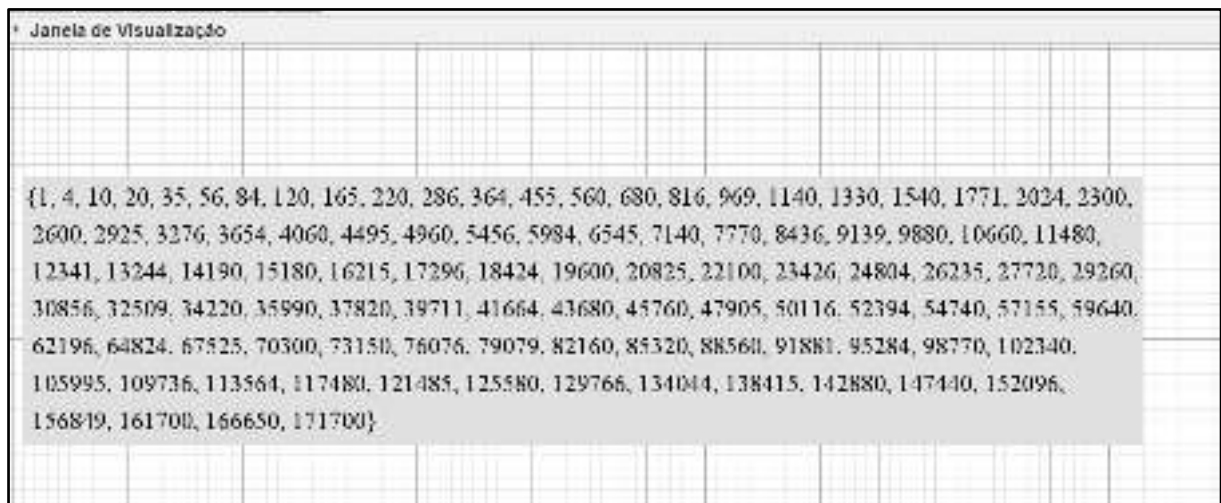
$$S_3^3(n) = \frac{n(n+1)(2n+1+3)}{12} = \frac{n(n+1)(2n+4)}{12} = \frac{2n(n+1)(n+2)}{12}, \text{ ou seja:}$$

$$S_3^3(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

■

Usando ainda o GeoGebra para determinar os 100 primeiros termos dessa sequência, obteve-se a Figura 36 apresentada a seguir. Essa representação mostra mais uma forma de visualizar a sequência por meio do GeoGebra, evidenciando como o *software* pode contribuir significativamente para a compreensão dos padrões não só geométricos, mas também os numéricos envolvidos no estudo.

Figura 36 - Números tetraédricos como lista no SG



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Além disso, o uso do GeoGebra permite explorar dinamicamente a formação e o comportamento da sequência. Isso contribui para a construção de representações diferentes e a percepção das regularidades que surgem a partir dos termos.

Proposição 2. A recorrência dos números piramidais é dada por

$$S_m^3(n+1) = S_m^3(n) + S_m(n+1)$$

Demonstração. Observa-se que um número piramidal $S_3^3(n)$ possui em sua base o número poligonal $S_3(n)$. Portanto, para construir o próximo número piramidal $S_3^3(n+1)$, basta adicionar ao seu anterior o número poligonal $S_3(n+1)$. ■

Teorema 6 (Forma geral dos números piramidais). A fórmula geral para o n -ésimo número piramidal m -gonal tem a forma:

$$S_m^3(n) = \frac{n(n+1)((m-2)n-m+5)}{6}$$

Demonstração. Para os números piramidais, a forma geral é descrita por meio de uma relação de recorrência, conforme observado no caso dos números piramidais triangulares. Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} S_m^3(n+1) &= S_m^3(n) + S_m(n+1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot ((m-2)n-m+5)}{6} + \frac{(n+1) \cdot ((m-2)(n+1)-m+4)}{2} \\ &= \frac{(n+1)}{6} \cdot [n^2(m-2) + n \cdot (5-m)] + \frac{(n+1)}{6} \cdot 3 \cdot [(m-2)(n+1) - m + 4] \\ &= \frac{(n+1)}{6} \cdot [n^2(m-2) + n \cdot (5-m)] + \frac{(n+1)}{6} [3(n+1)(m-2) - 3 \cdot (4-m)] \\ &= \frac{(n+1)}{6} \cdot [(n^2 + 3n + 3)(m-2) + n(5-m) + 3(4-m)] \\ &= \frac{(n+1)}{6} \cdot [(n^2 + 3n + 2)(m-2) + (m-2) + n(5-m) + 3(4-m)] \\ &= \frac{(n+1)}{6} \cdot [(n^2 + 3n + 2)(m-2) + (m-2) + (n+2)(5-m) - 2 \cdot (5-m) + 3 \cdot (4-m)] \\ &= \frac{(n+1)}{6} \cdot [(n+1)(n+2)(m-2) + (n+2)(5-m) + m-2-10+2m+12-3m] \\ &= \frac{(n+1)}{6} \cdot [(n+1)(n+2)(m-2) + (n+2)(5-m)] = \frac{(n+1)(n+2) \cdot [(m-2)(n+1)-m+5]}{6} \\ S_m^3(n) &= \frac{n(n+1)((m-2)n-m+5)}{6} \end{aligned}$$

■

Dessa forma, agora será descrito outro tipo de representação de sequências: as *funções geradoras*, que serão objeto de estudo do próximo tópico.

3.6 Função geradora

A função geradora, ferramenta matemática amplamente utilizada por Leonhard Euler notadamente em sua obra *Introductio in analysin infinitorum*, teve seu conceito reconhecido como central no estudo de séries e no tratamento de problemas envolvendo sequências

numéricas, conforme apontado por Machado (2015). Posteriormente, outros matemáticos de destaque, como N. Bernoulli e P. S. Laplace, também recorreram às funções geradoras como instrumento fundamental para a formalização e resolução de problemas em distintos contextos matemáticos.

As funções geradoras apresentam aplicações em diversos campos do conhecimento matemático e científico, com destaque para a análise matemática, a teoria das probabilidades, a combinatória e a mecânica estatística. Essa versatilidade evidencia o caráter unificador dessas funções, uma vez que permitem descrever, de forma compacta e estruturada, propriedades e relações associadas a sequências e estruturas discretas.

Definição 13 (Função geradora). Chama-se função geradora de uma sequência $(a(n))_{n \geq 0}$ a estrutura matemática dada por:

$$F[a(n), x] = a(1)x + a(2)x^2 + a(3)x^3 + \cdots + a(n)x^n + \cdots$$

em que $a(1), a(2), \dots, a(n)$ são os termos da sequência $(a(n))_{n \in \mathbb{N}}$

Deza e Deza (2012) apresentam a seguinte solução para se encontrar a função geradora para qualquer sequência linear homogênea.

Seja $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$ e $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$, com $m < n$, de modo que o quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$, tenha como resultado a função $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_mx^m + \cdots + c_nx^n + \cdots$. Esta função é chamada de geradora da sequência $c_0, c_1, c_2, \dots, c_m, \dots, c_n, \dots$. Assim, $f(x) = g(x) \cdot (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_mx^m + \cdots + c_nx^n + \cdots)$, que pode ser reescrito como $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n) \cdot (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_mx^m + \cdots + c_nx^n + \cdots)$. Então, pode-se determinar o valor para cada a_i , com $i \geq \mathbb{N}$. Com base na igualdade, tem-se que:

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0c_0 \\ a_1 &= b_0c_1 + b_1c_0 \\ a_2 &= b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0 \\ a_3 &= b_0c_3 + b_1c_2 + b_2c_1 + b_3c_0 \\ &\dots \\ a_m &= b_0c_m + b_1c_{m-1} + b_2c_{m-2} + \cdots + b_mc_0 \end{aligned}$$

Ainda se tem que os valores de b e c maiores que m são todos nulos, ou seja:

$$\begin{aligned}
0 &= b_0 c_{m+1} + b_1 c_m + b_2 c_{m-1} + \cdots + b_{m+1} c_0 \\
0 &= b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + b_2 c_{n-2} + \cdots + b_n c_0 \\
0 &= b_0 c_{n+1} + b_1 c_n + b_2 c_{n-2} + \cdots + b_{n+1} c_0 \\
0 &= b_0 c_{n+k} + b_1 c_{n+k-1} + b_2 c_{n+k-2} + \cdots + b_{n+k} c_0
\end{aligned}$$

Agora vejamos que dada uma sequência qualquer, podemos determinar uma recorrência linear de modo que essa sequência seja a solução da recorrência. Então tomando como base a sequência $c_0, c_1, c_2, \dots, c_m, \dots, c_n, \dots$, e a recorrência linear

$b_0 c_{n+k} + b_1 c_{n+k-1} + b_2 c_{n+k-2} + \cdots + b_{n+k} c_0 = 0$, sendo $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ os coeficientes dessa recorrência, assim, pode-se determinar os valores de a para o maior índice m possível em relação a n , ou seja, $n - 1$, usando os valores iniciais da recorrência linear. Então, é possível reescrever

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m = (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n) \cdot (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_m x^m + \cdots + c_n x^n + \cdots), \text{ com índices } n. \text{ Desse modo, tem-se que: } a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} = (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n)(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots), \text{ ou ainda,}$$

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots. \text{ Definindo os valores para } a \text{ com}$$

base no índice n :

$$\begin{aligned}
a_0 &= b_0 c_0 \\
a_1 &= b_0 c_1 + b_1 c_0 \\
a_2 &= b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 \\
a_3 &= b_0 c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 c_0 \\
&\dots \\
a_{n-1} &= b_0 c_{n-1} + b_1 c_{n-2} + b_2 c_{n-3} + \cdots + b_{n-1} c_0
\end{aligned}$$

Sempre que se deseja descobrir uma função geradora para sequências subsequentes, é crucial ter conhecimento dos seus primeiros termos e garantir que a equação de recorrência seja homogênea. Agora, será abordada a descrição das primeiras sequências dos números figurados que compõem os *gnômons* dos números poligonais. No entanto, antes disso, será feita uma introdução breve sobre os números figurados à luz da matemática que os envolve.

3.6.1 Função geradora de números poligonais

Para determinar a função geradora das sequências dos números poligonais, ao já possuir a forma canônica, deve-se ter somente a recorrência linear e homogênea e os primeiros termos das sequências desejadas.

Assim, tudo que é preciso agora é de uma sequência, sua recorrência e seus valores iniciais e, empregando elementos aritméticos de acordo com Deza e Deza (2012), é possível encontrar sua função geradora. Vamos tomar como exemplo a sequência dos números triangulares $(1, 3, 6, 10, 15, \dots)$.

Lema 2. A relação de recorrência homogênea para os números triangulares é descrita como:

$$S_3(n+3) = 3S_3(n+2) - 3S_3(n+1) + S_3(n)$$

Demonstração. A fórmula para se encontrar o próximo número triangular a partir do anterior como visto anteriormente é: $S_3(n+1) = S_3(n) + (n+1)$, que é uma recorrência linear não homogênea; e, para encontrar a recorrência linear homogênea relacionada a essa sequência, é preciso usar alguns processos algébricos. Veja que: $S_3(n+2) = S_3(n+1) + (n+2)$, e ao subtrair a primeira da segunda fórmula, observa-se que:

$$S_3(n+2) - S_3(n+1) = S_3(n+1) - S_3(n) + (n+2) - (n+1)$$

$$S_3(n+2) - S_3(n+1) = S_3(n+1) - S_3(n) + 1$$

$$S_3(n+2) = 2S_3(n+1) - S_3(n) + 1$$

Agora adota-se

$$S_3(n+3) = S_3(n+2) + (n+3)$$

e subtrai-se

$$S_3(n+2) = 2S_3(n+1) - S_3(n) + 1$$

com isso,

$$S_3(n+3) - S_3(n+2) = S_3(n+2) - 2S_3(n+1) + S_3(n) + (n+3) - 1$$

$$S_3(n+3) = 2S_3(n+2) - 2S_3(n+1) + S_3(n) + (n+2)$$

Usando o mesmo procedimento, pode-se subtrair:

$$S_3(n+2) = S_3(n+1) + (n+2)$$

de

$$S_3(n+3) = 2S_3(n+2) - 2S_3(n+1) + S_3(n) + (n+2)$$

Visando eliminar o termo $(n+2)$, portanto:

$$S_3(n+3) - S_3(n+2) = 2S_3(n+2) - 2S_3(n+1) - S_3(n+1) + S_3(n) + (n+2) - (n+2),$$

ou seja,

$$S_3(n+3) = 3S_3(n+2) - 3S_3(n+1) + S_3(n)$$

■

Perceba que a recorrência encontrada é linear homogênea de 3ª ordem. Reescrevendo essa recorrência igualando a zero, tem-se que $S_3(n+3) - 3S_3(n+2) + 3S_3(n+1) - S_3(n) = 0$. A partir disto, pode-se enunciar um teorema.

Teorema 7. Seja $F(S_3, x)$ a função geradora dos números triangulares, sua fórmula é dada por:

$$F(S_3, x) = \frac{1}{(1-x)^3}, |x| \leq 1$$

Demonstração. Veja que comparando com a função genérica,

$$\frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + \dots$$

como temos $n = 3$, ao reescrever com os valores, tem-se

$$\frac{a_0 + a_1x + a_2x^2}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots,$$

Também se sabe que os números $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ são coeficientes da recorrência. Então determina-se:

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$$

com os valores de

$$S_3(n+3) - 3S_3(n+2) + 3S_3(n+1) - S_3(n) = 0,$$

que agora podemos escrever

$$c_{n+3} - 3c_{n+2} + 3c_{n+1} - c_n = 0.$$

assim sendo, temos que:

$$b_0 = 1, b_1 = -3, b_2 = 3 \text{ e } b_3 = -1,$$

com isso $g(x) = 1 - 3x + 3x^2 - x^3$ ou seja $g(x) = (1-x)^3$.

Como se trata de uma recorrência linear de 3ª ordem, é preciso ter os três primeiros valores na sequência. Assim, tem-se

$$S_3(1) = 1, S_3(2) = 3 \text{ e } S_3(3) = 6$$

que agora pode-se escrever

$$c_0 = 1, c_1 = 3 \text{ e } c_2 = 6.$$

Por fim, são encontrados os valores dos coeficientes do polinômio a_0, a_1 e a_2 conforme as igualdades

$$a_0 = b_0 c_0, a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0, a_2 = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0$$

Então, segue que:

$$a_0 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$a_1 = 1 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 0$$

$$a_2 = 1 \cdot 6 - 3 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 0$$

Então, tem-se que

$f(x) = 1$, logo a função geradora para os números triangulares é:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + \dots + S_3(n)x^{n-1} + \dots$$

Multiplicando a igualdade por x ;

$$\frac{x \cdot f(x)}{g(x)} = \frac{x}{(1-x)^3} = 1x + 3x^2 + 6x^3 + \dots + S_3(n)x^n + \dots$$

■

Usando um recurso computacional para verificar a função geradora obtida, tem-se:

Figura 37 - FG dos números triangulares pelo software Máxima

```
(%i21) rectform(%);
(%o21)  $\frac{x}{(1-x)^3}$ 

(%i22) trigrat(%);
(%o22)  $-\frac{x}{x^3-3x^2+3x-1}$ 

(%i25) taylor(rectform(%), x, 0, 100);
(%o25)  $\frac{1}{x^3-3x^2+3x-1}$ 
 $x + 3x^2 + 6x^3 + 10x^4 + 15x^5 + 21x^6 + 28x^7 + 36x^8 + 45x^9 + 55x^{10} + 66x^{11} + 78x^{12} + 91x^{13} + 105x^{14} + 120x^{15} + 136x^{16} + 153x^{17} + 171x^{18} + 190x^{19} + 210x^{20} + 231x^{21} + 253x^{22} + 276x^{23} + 300x^{24} + 325x^{25} + 351x^{26} + 378x^{27} + 406x^{28} + 435x^{29} + 465x^{30} + 496x^{31} + 528x^{32} + 561x^{33} + 595x^{34} + 630x^{35} + 666x^{36} + 703x^{37} + 741x^{38} + 780x^{39} + 820x^{40} + 861x^{41} + 903x^{42} + 946x^{43} + 990x^{44} + 1035x^{45} + 1081x^{46} + 1128x^{47} + 1176x^{48} + 1225x^{49} + 1275x^{50} + 1326x^{51} + 1378x^{52} + 1431x^{53} + 1485x^{54} + 1540x^{55} + 1596x^{56} + 1653x^{57} + 1711x^{58} + 1770x^{59} + 1830x^{60} + 1891x^{61} + 1953x^{62} + 2016x^{63} + 2080x^{64} + 2145x^{65} + 2211x^{66} + 2278x^{67} + 2346x^{68} + 2415x^{69} + 2485x^{70} + 2556x^{71} + 2628x^{72} + 2701x^{73} + 2775x^{74} + 2850x^{75} + 2926x^{76} + 3003x^{77} + 3081x^{78} + 3160x^{79} + 3240x^{80} + 3321x^{81} + 3403x^{82} + 3486x^{83} + 3570x^{84} + 3655x^{85} + 3741x^{86} + 3828x^{87} + 3916x^{88} + 4005x^{89} + 4095x^{90} + 4186x^{91} + 4278x^{92} + 4371x^{93} + 4465x^{94} + 4560x^{95} + 4656x^{96} + 4753x^{97} + 4851x^{98} + 4950x^{99} + 5050x^{100} + \dots$ 
```

Fonte: Elaboração do autor (2024).

De modo geral, sabe-se que:

$$\begin{aligned}
S_3(n+1) &= S_3(n) + n + 1 \\
S_4(n+1) &= S_4(n) + 2n + 1 \\
S_5(n+1) &= S_5(n) + 3n + 1 \\
&\dots \\
S_m(n+1) &= S_m(n) + (m-2)n + 1
\end{aligned}$$

Com os primeiros termos da sequência dos números m -gonais, a partir de $n=1$, são:

$$S_m(1) = 1, S_m(2) = m$$

e

$$S_m(3) = m + (m-2) \cdot 2 + 1 = m + 2m - 4 + 1 = 3m - 3$$

Teorema 8. A função geradora dos números m -gonais é dada por:

$$G[S_m, x] = \frac{x(1+(m-3)x)}{(1-x)^3}$$

Demonstração. A função geradora para o n -ésimo número m -gonal pode ser encontrada usando:

$$\begin{aligned}
S_m(n+1) &= S_m(n) + (m-2)n + 1, S_m(n+2) = S_m(n+1) + (m-2)(n+1) + 1 \\
S_m(n+2) - S_m(n+1) &= S_4(n+1) - S_4(n) + m - 2 \\
S_m(n+2) &= 2S_m(n+1) - S_m(n) + m - 2. \\
S_m(n+3) &= S_m(n+2) + (m-2)(n+2) + 1 \\
S_m(n+3) - S_m(n+2) &= S_m(n+2) - 2S_m(n+1) + S_4(n) + (m-2)(n+2-1) + 1 \\
S_m(n+3) &= 2S_m(n+2) - 2S_m(n+1) + S_4(n) + (m-2)(n+1) + 1. \\
S_m(n+3) - S_m(n+2) &= 2S_m(n+2) - 3S_m(n+1) + S_m(n) \\
S_m(n+3) &= 3S_m(n+2) - 3S_m(n+1) + S_m(n). \\
S_m(n+3) - 3S_m(n+2) + 3S_m(n+1) - S_m(n) &= 0
\end{aligned}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
a_0 &= b_0 c_0 = 1 \cdot 1 = 1 \\
a_1 &= b_0 c_1 + b_1 c_0 = 1 \cdot m - 3 \cdot 1 = m - 3 \\
a_2 &= b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 = 1 \cdot (3m - 3) - 3m + 3 = 0.
\end{aligned}$$

$$f(x) = 1 + (m-3)x, g(x) = (1-x)^3$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1+(m-3)x}{(1-x)^3} = S_m(1) + S_m(2)x + S_m(3)x^2 + \dots + S_m(n)x^{n-1} + \dots$$

$$G[S_m(n), x] = \frac{x(1+(m-3)x)}{(1-x)^3} = S_m(1)x + S_m(2)x^2 + S_m(3)x^3 + \dots + S_m(n)x^n + \dots$$

■

Pode-se comprovar esta fórmula com a ajuda do Máxima, como nos mostra a Figura 38:

Figura 38 - FG dos números poligonais com o auxílio do Máxima

```

--> x*((m-3)*x+1)/(1-x)^3
(%i6) taylor(x*((m-3)*x+1)/(1-x)^3, x, 0, 100);
(%o6) T/ x + m x^2 + (3 m - 3) x^3 + (6 m - 8) x^4 + (10 m - 15) x^5 + (15 m - 24) x^6 + (21 m - 35) x^7 + (28 m - 48) x^8 + (36 m - 63) x^9 + (45 m - 80) x^10 + (55 m - 99) x^11 +
(66 m - 120) x^12 + (78 m - 143) x^13 + (91 m - 168) x^14 + (105 m - 195) x^15 + (120 m - 224) x^16 + (136 m - 255) x^17 + (153 m - 288) x^18 + (171 m - 323) x^19 + (190 m - 360)
x^20 + (210 m - 399) x^21 + (231 m - 440) x^22 + (253 m - 483) x^23 + (276 m - 528) x^24 + (300 m - 575) x^25 + (325 m - 624) x^26 + (351 m - 675) x^27 + (378 m - 728) x^28 +
(406 m - 783) x^29 + (435 m - 840) x^30 + (465 m - 899) x^31 + (496 m - 960) x^32 + (528 m - 1023) x^33 + (561 m - 1088) x^34 + (595 m - 1155) x^35 + (630 m - 1224) x^36 +
(666 m - 1295) x^37 + (703 m - 1368) x^38 + (741 m - 1443) x^39 + (780 m - 1520) x^40 + (820 m - 1599) x^41 + (861 m - 1680) x^42 + (903 m - 1763) x^43 + (946 m - 1848) x^44 +
(990 m - 1935) x^45 + (1035 m - 2024) x^46 + (1081 m - 2115) x^47 + (1128 m - 2208) x^48 + (1176 m - 2303) x^49 + (1225 m - 2400) x^50 + (1275 m - 2499) x^51 +
(1326 m - 2600) x^52 + (1378 m - 2703) x^53 + (1431 m - 2808) x^54 + (1485 m - 2915) x^55 + (1540 m - 3024) x^56 + (1596 m - 3135) x^57 + (1653 m - 3248) x^58 +
(1711 m - 3363) x^59 + (1770 m - 3480) x^60 + (1830 m - 3599) x^61 + (1891 m - 3720) x^62 + (1953 m - 3843) x^63 + (2016 m - 3968) x^64 + (2080 m - 4095) x^65 +
(2145 m - 4224) x^66 + (2211 m - 4355) x^67 + (2278 m - 4488) x^68 + (2346 m - 4623) x^69 + (2415 m - 4760) x^70 + (2485 m - 4899) x^71 + (2556 m - 5040) x^72 +
(2628 m - 5183) x^73 + (2701 m - 5328) x^74 + (2775 m - 5475) x^75 + (2850 m - 5624) x^76 + (2926 m - 5775) x^77 + (3003 m - 5928) x^78 + (3081 m - 6083) x^79 +
(3160 m - 6240) x^80 + (3240 m - 6399) x^81 + (3321 m - 6560) x^82 + (3403 m - 6723) x^83 + (3486 m - 6888) x^84 + (3570 m - 7055) x^85 + (3655 m - 7224) x^86 +
(3741 m - 7395) x^87 + (3828 m - 7568) x^88 + (3916 m - 7743) x^89 + (4005 m - 7920) x^90 + (4095 m - 8099) x^91 + (4186 m - 8280) x^92 + (4278 m - 8463) x^93 +
(4371 m - 8648) x^94 + (4465 m - 8835) x^95 + (4560 m - 9024) x^96 + (4656 m - 9215) x^97 + (4753 m - 9408) x^98 + (4851 m - 9603) x^99 + (4950 m - 9800) x^100 + ...

```

Fonte: Elaboração do autor (2024).

Desta forma, descrevemos as principais maneiras de apresentar números poligonais com o auxílio dos softwares GeoGebra e wxMáxima. Ademais trataremos da função geradora dos números piramidais.

3.6.2 Função geradora dos números piramidais

Descrevemos agora a função geradora desta família de sequências. Temos que os números piramidais são formados pela soma dos n primeiros números poligonais. Assim, manipularemos a função geradora dos números poligonais para que esta nos apresente a FG dos números piramidais:

Corolário 1. A função geradora dos números piramidais pode ser obtida através da função geradora dos números poligonais e é dada por

$$G[S_m^3, x] = \frac{x(1 + (m-3)x)}{(1-x)^4}$$

Demonstração. Usando a função geradora dos números poligonais, tem-se:

$$G[S_m(n), x] = \frac{x(1+(m-3)x)}{(1-x)^3} = S_m(1)x + S_m(2)x^2 + \cdots + S_m(n)x^n + \cdots$$

Multiplicando a função geradora dada por $\frac{1}{1-x}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{x(1+(m-3)x)}{(1-x)^3} \cdot \frac{1}{1-x} &= (S_m(1)x + S_m(2)x^2 + \cdots + S_m(n)x^n + \cdots) \cdot (1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}) \\ \frac{x(1+(m-3)x)}{(1-x)^4} &= S_m(1)x + (S_m(1)+S_m(2))x^2 + \cdots + (S_m(1)+S_m(2)+\cdots+S_m(n))x^n + \cdots \\ G[S_m^3(n), x] &= \frac{x(1+(m-3)x)}{(1-x)^4}, |x| < 1 \end{aligned}$$

■

Assim, apresentam-se as representações por função geradora de duas famílias importantes de números figurados: os números poligonais e os números tetraédricos. Na próxima seção são apresentadas outras formas de representação de números figurados. Desta vez será apresentada uma representação por meio de matrizes, com a noção de *matriz companheira* para essa classe de números.

3.6.3 Função geradora dos números simplexos

Para essa forma de representação da sequência dos números da classe dos simplexos, adota-se a ideia de que, para encontrarmos o n -ésimo número simplexo de uma dimensão k , é necessário somar os n primeiros termos dos seus análogos da dimensão $k-1$.

Assim, para generalizar as funções geradoras dos números simplexos, observa-se que $\frac{x}{(1-x)^5} = \frac{x}{(1-x)^4} \cdot \frac{1}{(1-x)}$, sendo $\frac{x}{(1-x)^4}$ a função geradora dos números tetraédricos, e $\frac{1}{(1-x)}$ a função geradora da sequência $(1, 1, 1, 1, \dots, 1)$, considerada a zero-dimensional da família dos análogos dos números triangulares. Sendo assim, observa-se a obtenção da função geradora dos números pentatopes, segundo Deza e Deza (2012), que são os simplexos 4D. Desse modo:

$$\begin{aligned} \frac{x}{(1-x)^5} &= \left[(S_3^3(1))x + (S_3^3(2))x^2 + (S_3^3(3))x^3 + \cdots + (S_3^3(n))x^n \right] \cdot (1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}) \\ &= (S_3^3(1))x + (S_3^3(1)+S_3^3(2))x^2 + (S_3^3(1)+S_3^3(2)+S_3^3(3))x^3 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^n S_3^3(i) \right) x^n \\ &= (S_3^4(1))x + (S_3^4(2))x^2 + (S_3^4(3))x^3 + \cdots + (S_3^4(n))x^n \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (S_3^4(i))x^i \end{aligned}$$

Partindo dessa observação, e com as fórmulas dos termos gerais de cada um dos números lineares, triangulares, tetraédricos e pentatopes, de acordo com Deza e Deza (2012), pode-se encontrar a função geradora dos números simplexos k -dimensionais para $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 9. Dada a função geradora dos números simplexos descrita por $G[S_3^k(n), x]$ sua forma pode ser construída a partir dos números triangulares e dada por:

$$G[S_3^k(n), x] = \frac{x}{(1-x)^{k+1}}$$

Demonstração. A função geradora correspondente a cada dimensão dos simplexos é dada por

$\frac{x}{(1-x)^2}$ para os números lineares, ou seja, para $k=1$; com $k=2$, ou números triangulares, é dada por $\frac{x}{(1-x)^3}$; para os tetraédricos e 4D com $k=3$ e $k=4$, respectivamente, $\frac{x}{(1-x)^4}$ e $\frac{x}{(1-x)^5}$. Então para um certo $k, k \in \mathbb{N}$ e $k > 0$, temos a função geradora $G[S_3^k(n), x] = \frac{x}{(1-x)^{k+1}}$.

De fato, isso pode ser demonstrado usando o produto das funções $\frac{x}{(1-x)^k} \cdot \frac{1}{(1-x)}$, onde:

$$\begin{aligned} \frac{x}{(1-x)^{k+1}} &= \frac{x}{(1-x)^k} \cdot \frac{1}{(1-x)} = (S_3^{k-1}(1)x + S_3^{k-1}(2)x^2 + \dots + S_3^{k-1}(n)x^n) (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) \\ &= S_3^{k-1}(1)x + (S_3^{k-1}(1) + S_3^{k-1}(2))x^2 + (S_3^{k-1}(1) + S_3^{k-1}(2) + S_3^{k-1}(3))x^3 + \dots \\ &+ (S_3^{k-1}(1) + S_3^{k-1}(2) + S_3^{k-1}(3) + \dots + S_3^{k-1}(n))x^n = S_3^k(1)x + S_3^k(2)x^2 + S_3^k(3)x^3 + \dots \\ &+ S_3^k(n-1)x^{n-1} + S_3^k(n)x^n, |x| < 1 \end{aligned}$$

■

Assim, apresentamos as representações por meio de funções geradoras de duas importantes famílias de números figurados, os números poligonais e os números tetraédricos, além da classe dos números simplexos. Na próxima seção, serão exploradas outras formas de representação desses números, desta vez utilizando o conceito de matriz companheira, cuja estrutura incorpora relações de recorrência que permitem descrever algumas propriedades dessas classes numéricas.

3.7 Configuração pelo GeoGebra

Nesta seção, apresentamos a construção de alguns números figurados a partir da construção de números triangulares, e seus análogos 3D – os números tetraédricos –, o que propõe uma relação aritmética entre os números apresentados e números triangulares, base de todas as construções que serão mostradas nesta etapa.

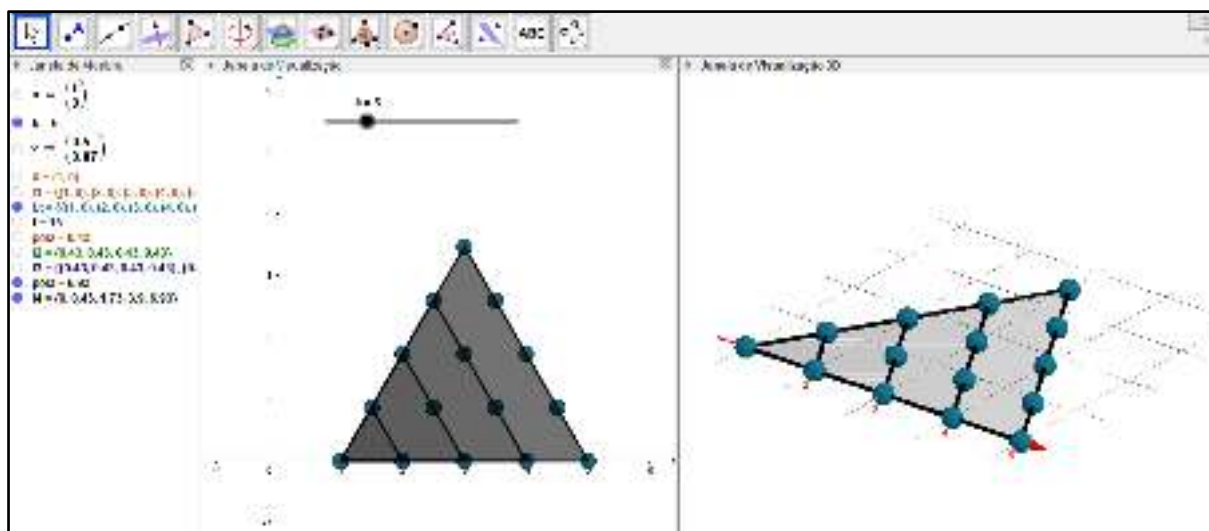
Para isso, as figuras serão apresentadas com uma interface diferente, mostrando passos no GeoGebra para que o leitor observe que de fato a construção fora elaborada no *software*. Isso permitirá uma maior aproximação dessa classe de sequências com a sua visualização manipulável e a expansão das relações observadas na seção 3.5.5 para as outras famílias de números figurados.

3.7.1 Relação entre números figurados planos com o uso do software GeoGebra

Essa seção tem como objetivo apresentar algumas propriedades construídas a partir de manipulações feitas no software GeoGebra. Essas manipulações, que por sua vez resultam em propriedades, fazem parte da transposição didática dos números figurados e de suas representações a partir de números triangulares, visando o ensino.

Para início, serão apresentados os números triangulares com o uso do *software* GeoGebra, com sua relação de recorrência e termo geral. A Figura 39 representa a sequência mencionada já construída no GeoGebra.

Figura 39 - Quinto número triangular



Fonte: Elaboração do autor (2024).

A Figura 39 ilustra a recorrência da sequência, na qual pode-se notar que, para formar o próximo número triangular, é necessário adicionar o número triangular anterior a um número natural que representa a ordem do próximo número, ou seja:

$$S_3(n+1) = S_3(n) + (n+1), S_3(1) = 1$$

Esta fórmula, que já fora apresentada nas seções anteriores, pode ser vista agora de acordo com a visualização, bem como a forma de termo geral, que remete à soma dos números naturais sucessivos e resulta em $S_3(n) = \frac{n(n+1)}{2}$, fórmula esta, também já apresentada e que representa uma das bases de todo o estudo de números figurados.

A partir dessa observação, pode-se expandir o conceito abordado na seção 3.5.5 para outras classes de números figurados planos. Iniciaremos pelos números poligonais centralizados que, segundo Deza e Deza (2012), são números que:

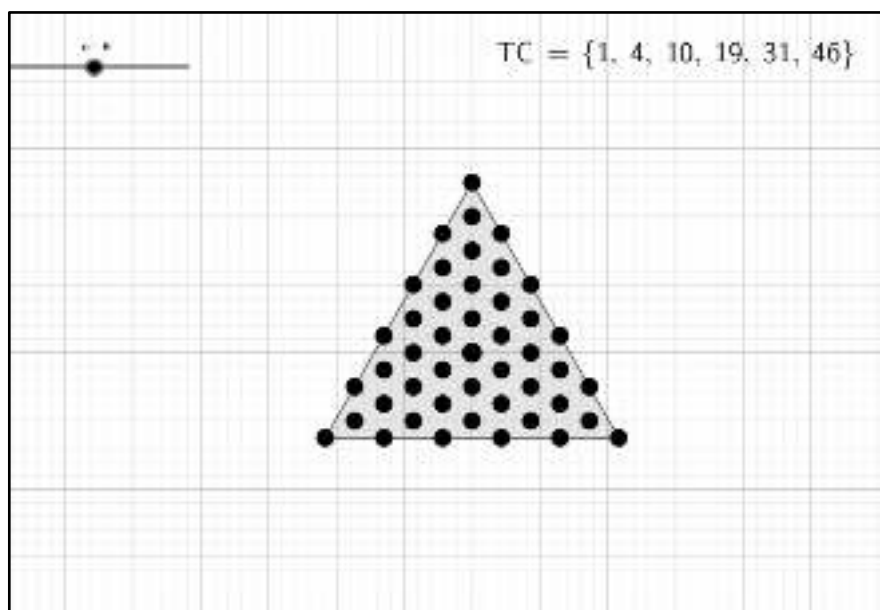
formam uma classe de números figurativos, nos quais camadas de polígonos são desenhadas centradas em um ponto. Cada número poligonal centrado é formado por um ponto central, cercado por camadas poligonais com um número constante de lados. Cada lado de uma camada poligonal contém um ponto a mais do que qualquer lado da camada anterior, de modo que, a partir da segunda camada poligonal, cada camada de um número m -gonal centrado contém m pontos a mais que a camada anterior (Deza; Deza, 2012)

Definição 14 (Forma geral dos números poligonais centralizados). Segundo Deza e Deza (2012), o n -ésimo termo do número m -gonal centralizado $CS_m(n)$ pode ser dado pela fórmula

$$CS_m(n) = 1 + m \frac{n(n-1)}{2}$$

Em particular, os números triangulares centralizados podem ser obtidos quando preenchemos com triângulos ao redor de um ponto, formando camadas em que cada triângulo formado tenha um ponto a mais em cada lado se comparado ao seu anterior. Os primeiros termos dessa sequência são (1, 4, 10, 19, 31, ...) catalogados como A005448 na OEIS.

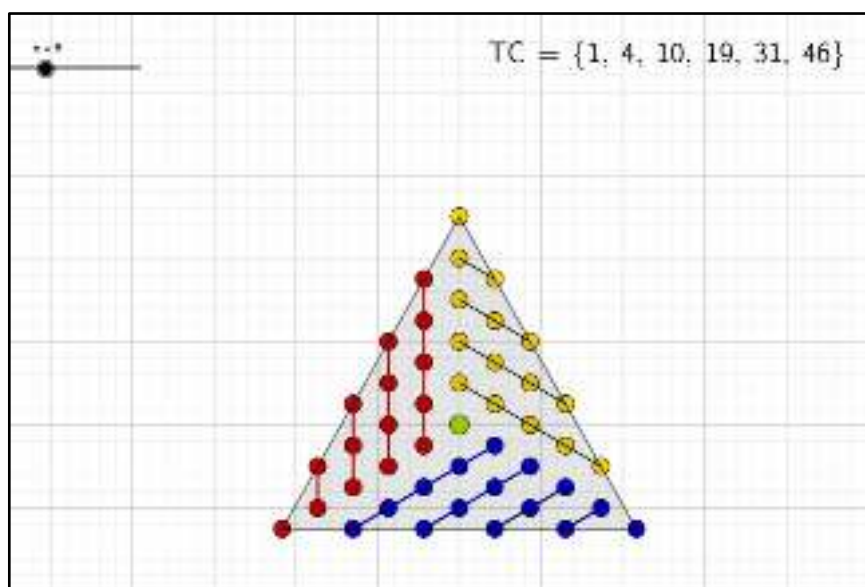
Figura 40 - Número triangular centralizado



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Algumas propriedades podem ser obtidas a partir da manipulação dessa configuração dentro do software GeoGebra. Para isso, a mesma imagem será rerepresentada na Figura 41, agora utilizando cores organizadas em grupos de números triangulares.

Figura 41 - Número triangular centralizado via números triangulares



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

A Figura 41 apresenta uma propriedade que relaciona números triangulares centralizados e números triangulares de configuração comum. Dessa forma, pode-se estabelecer a seguinte relação:

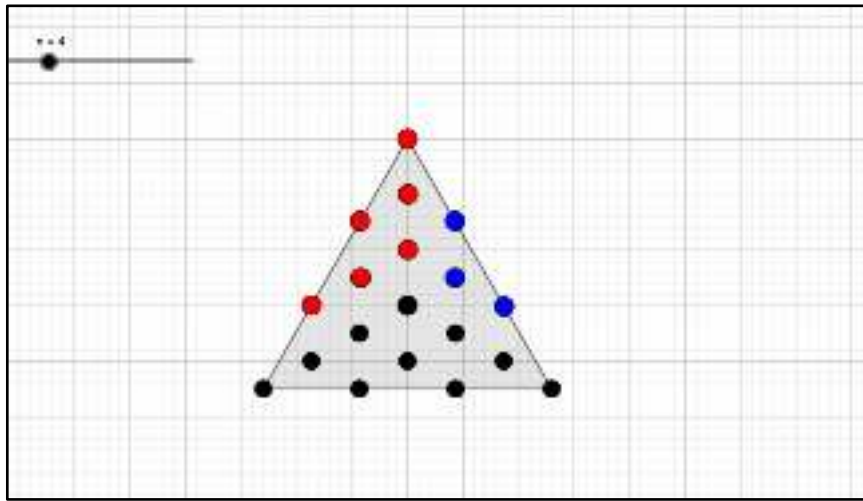
Propriedade 4. A relação entre números triangulares centralizados e números triangulares iguais é dada por.

$$CS_3(n) = 1 + 3S_3(n-1)$$

Demonstração. Desenvolvendo a relação, de modo imediato, pode-se concluir que a propriedade é verdadeira, pois $S_3(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$, logo $CS_3(n) = 1 + 3\frac{n(n-1)}{2}$. ■

Essa propriedade, embora trivial, é apresentada de forma simples pelo SG quando separamos os números triangulares para formar o número triangular centralizado. Esse conceito se estende para qualquer número poligonal centralizado também a partir das configurações. Outra propriedade pode ser obtida pela Figura, reorganizando os números triangulares, como na Figura 42:

Figura 42 - Configuração relativa a propriedade 5



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Propriedade 5. A relação entre números triangulares centralizados e números triangulares consecutivos é dada por.

$$CS_3(n) = S_3(n) + S_3(n-1) + S_3(n-2), \text{ com } CS_3(1) = 1$$

Demonstração. De modo análogo à propriedade anterior, pode-se desenvolver a relação encontrada. Dessa forma, tem-se que:

$$CS_3(n) = S_3(n) + S_3(n-1) + S_3(n-2) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

colocando n em evidência nos dois primeiros termos e desenvolvendo o terceiro termo, tem-se:

$$\frac{n(n+1+n-1)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{2n^2}{2} + \frac{n^2-3n+2}{2}, \text{ que é igual a } \frac{3n^2-3n+2}{2} \text{ e, por fim,}$$

$$CS_3(n) = 1 + 3S_3(n-1)$$

■

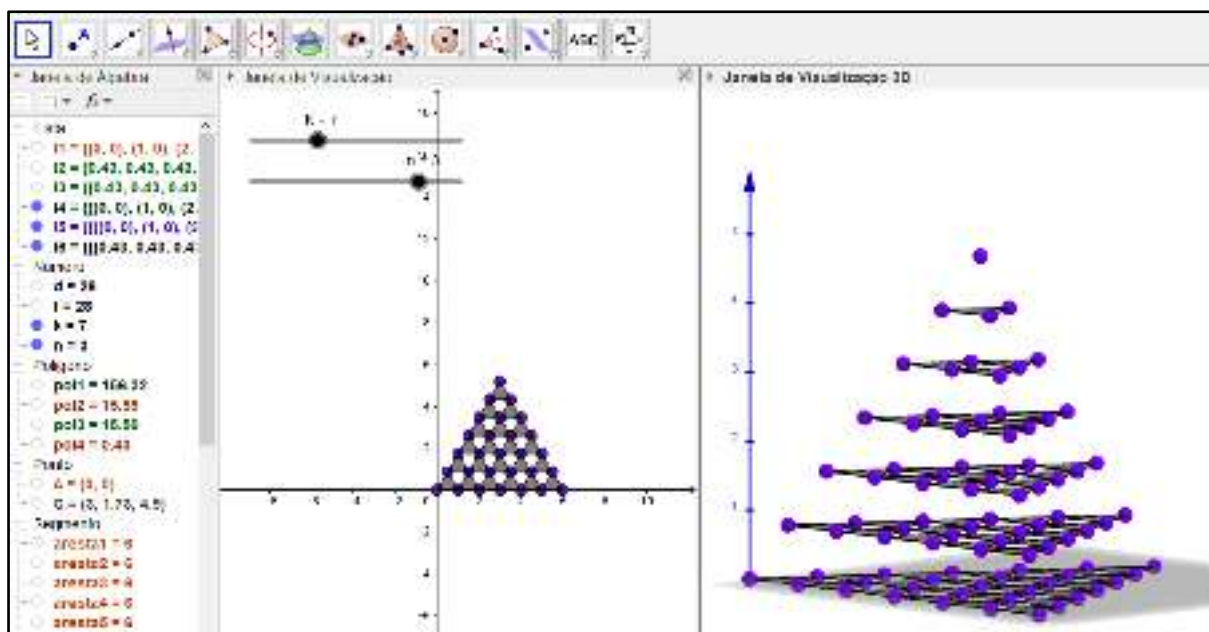
Nesse caso, essa propriedade pode se estender para os números poligonais. Contudo, como o objetivo desta tese é apenas apresentar propriedades a partir de configurações no GeoGebra, então será utilizada a relação com números triangulares centralizados como exemplo para esta classe de números.

Trata-se, portanto, de casos de números figurados bidimensionais que se relacionam aos números triangulares, nos quais a visualização desempenha papel fundamental na identificação e compreensão de determinadas propriedades. Essa análise evidencia o potencial do software GeoGebra como recurso de visualização, ao possibilitar a apresentação dessas propriedades de maneira mais acessível e intuitiva. Ademais, o conceito aqui explorado pode ser estendido ao estudo de números figurados tridimensionais e de sua relação com os números tetraédricos, abordagem que será desenvolvida na próxima seção.

3.7.2 Construção de números piramidais com números tetraédricos

Os números figurados tridimensionais, espaciais ou poliédricos podem ser representados usando a janela 3D do GeoGebra. Aqui, discutiremos as relações desses números com os números triangulares. Dentre eles, os primeiros a serem apresentados são os números tetraédricos, que são formados por somas de números triangulares sucessivos, ou seja, o n -ésimo número tetraédrico $S_3^3(n)$, é formado pela soma dos n primeiros números triangulares S_3 . Assim, a fórmula do termo geral para os números tetraédricos é dada por $S_3^3(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ com $S_3^3(1)=1$ e $n \in \mathbb{N}$ (Alves, 2012). Ao utilizar os comandos de soma sucessiva dos números triangulares, por meio do “transladar parte da lista”, usando como lista os números triangulares, foi possível construir a Figura 43:

Figura 43 - Sétimo número tetraédrico



Fonte: Elaboração do autor (2024).

Perceba que na Figura 43 temos uma soma de n números triangulares visualizados na janela 3D. O resultado é uma pirâmide de pontos que representam os números tetraédricos.

A partir da montagem destes números e, usando os mesmos argumentos, pode-se construir outros números piramidais, e encontrar suas fórmulas de termo geral. É o caso dos números piramidais quadrados pentagonais, os primeiros são os números piramidais quadrados que formam a sequência (1,5,14,30,...) e chamaremos de $S_4^3(1)=1, S_4^3(2), S_4^3(3)=14$, e assim por diante. A fórmula para estes números é dada por $S_4^3(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ com $S_4^3(n)=1$ (Conway; Guy, 1996, p. 57).

Usando números tetraédricos com o apoio do software GeoGebra, pode-se observar a seguinte relação:

Propriedade 6. O número piramidal quadrado $S_4^3(n)$ possui a seguinte relação com números tetraédricos $S_3^3(n)$

$$S_4^3(n) = S_3^3(n) + S_3^3(n-1)$$

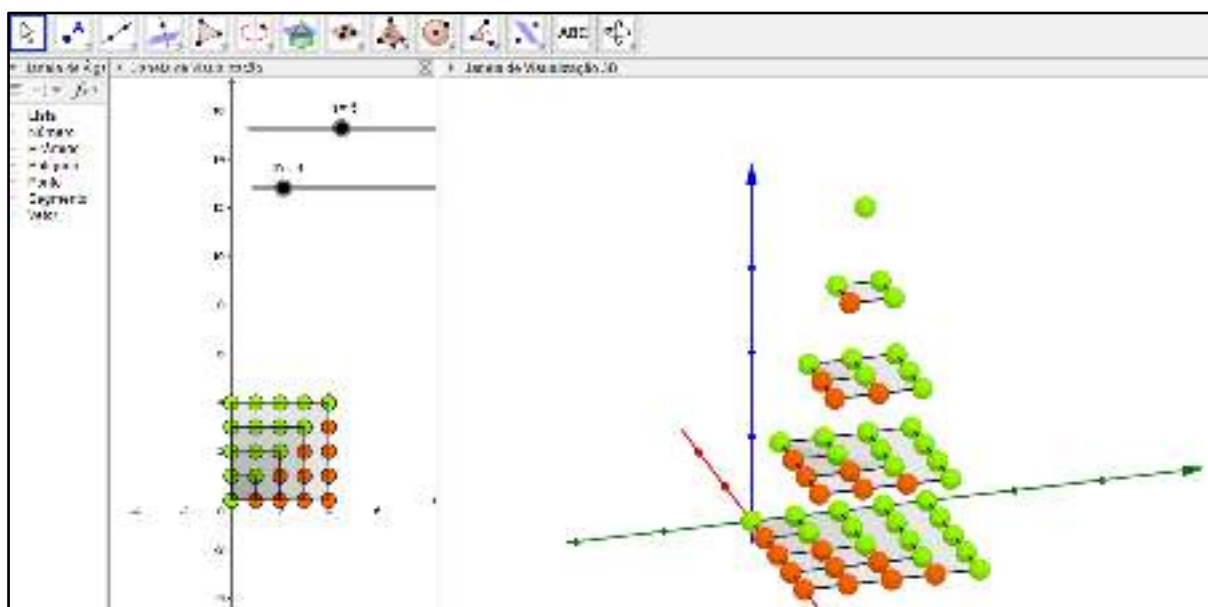
Demonstração. Usaremos dois números tetraédricos seguidos para construir os números piramidais quadrados. Temos, então:

$$\begin{aligned}
 S_4^3(n) &= S_3^3(n) + S_3^3(n-1) \\
 &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n-1)n(n+1)}{6} \\
 &= \frac{(n(n+1))(n+2+n-1)}{6} \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
 \end{aligned}$$

■

A Figura 44 mostra como a construção apresenta, de fato, números piramidais quadrados.

Figura 44 - Quarto número piramidal quadrado com destaque na base



Fonte: Elaboração do autor (2024).

Na Figura 44 é possível observar as duas listas de números tetraédricos, com cores destacadas, unidas, formando uma pirâmide de pontos com uma base quadrada; ou seja, de fato, pela figura e pela fórmula usada, esses números são mesmos os números piramidais quadrados. Esta relação também pode ser obtida usando-se a relação de números quadrados com números triangulares.

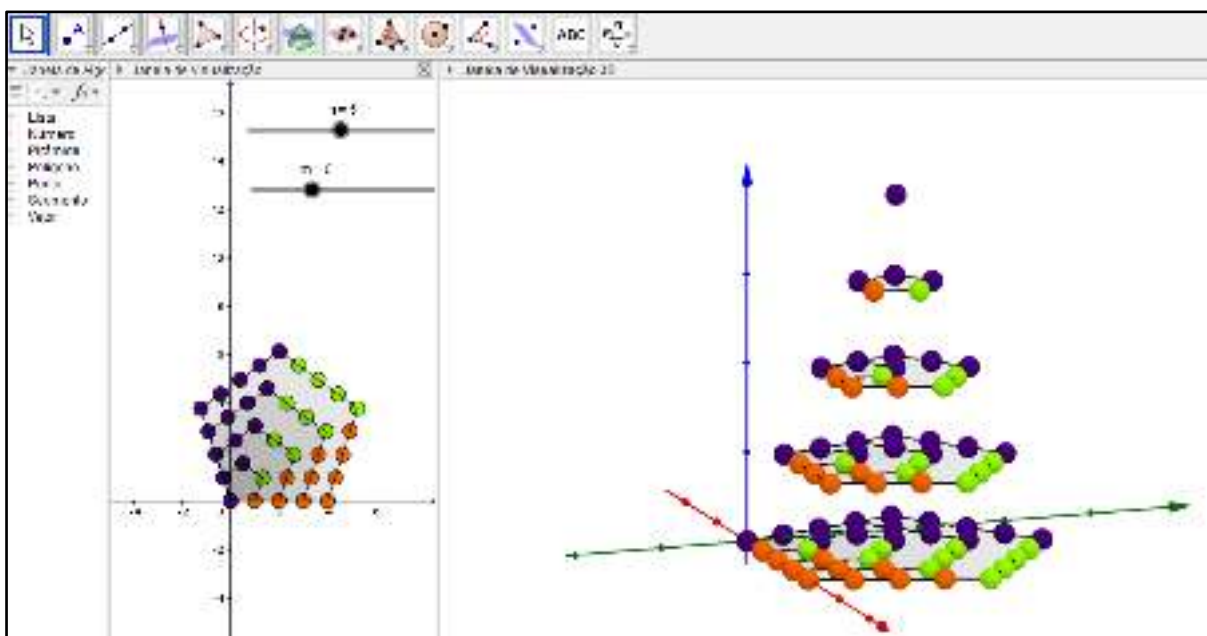
De modo similar, usaremos três listas para formar os números piramidais pentagonais. Como temos a base sendo formada por números pentagonais, estes já apresentados, podemos encontrar sua fórmula da mesma forma dos piramidais quadrados.

De acordo com o que já foi apresentado anteriormente, um número piramidal pode ser escrito segundo a fórmula $S_m^3(n) = \frac{n(n+1)((m-2)n-m+5)}{6}$ ou seja, um número piramidal pentagonal tem como fórmula para um termo qualquer $S_5^3(n) = \frac{n(n+1)(3n)}{6}$ usando números tetraédrico de modo que $S_5^3(n) = S_3^3(n) + 2S_3^3(n-1)$. De fato, tem-se que:

$$\begin{aligned} S_5^3(n) &= S_3^3(n) + 2S_3^3(n-1) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{2(n-1)(n)(n+1)}{6} \\ &= \frac{(n(n+1))(n+2+2n-2)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(3n)}{6} \end{aligned}$$

As figuras a seguir apresentam a união das listas de números tetraédricos dentro de uma base pentagonal. Os números formados, de acordo com as fórmulas usadas, são números piramidais pentagonais.

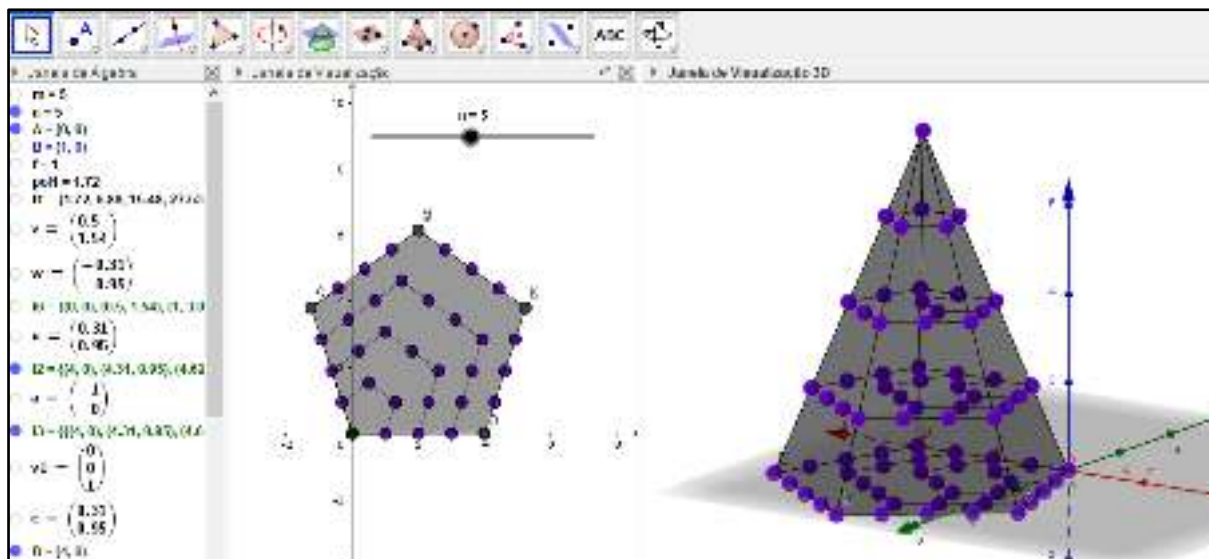
Figura 45 - Quinto número piramidal pentagonal, e sua relação com números tetraédricos



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

A seguir, a Figura 46 apresenta a mesma pirâmide de pontos, porém com os pentágonos desenhados para dar a ideia de que esses números são formados a partir do somatório dos números pentagonais.

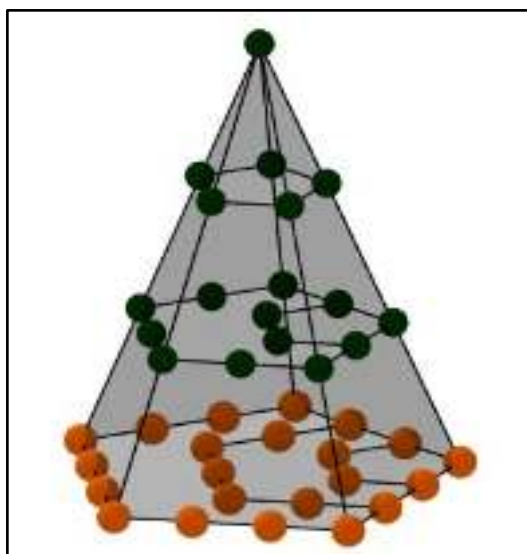
Figura 46 - Outra apresentação dos números piramidais pentagonais no software GeoGebra



Fonte: Elaboração do autor (2024).

Nas Figuras 45 e 46, as pirâmides de números pentagonais que formam os números piramidais pentagonais podem ser observadas de duas maneiras: na primeira, é possível observar que as listas de números tetraédricos são vistos com cores diferentes; na segunda figura as listas estão da mesma cor, pois apresenta a pirâmide como um somatório de n -ésimos números pentagonais. Ainda é possível observar a recorrência de números piramidais, como mostra a Figura 47:

Figura 47 - Número piramidal pentagonal com ênfase na recorrência



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Desta forma é possível encontrar a forma de relaciona os números piramidais e os números tetraédricos da seguinte maneira:

Propriedade 7. A relação entre qualquer sequência de números piramidais e os números tetraédricos é dada por:

$$S_m^3(n) = S_3^3(n) + (m-3)S_3^3(n-1)$$

Demonstração. Segue que:

$$\begin{aligned} S_m^3(n) &= S_3^3(n) + (m-3)S_3^3(n-1) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + (m-3)\frac{(n-1)n(n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2+mn-3n-m+3)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(mn-2n-m+5)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)((m-2)n-m+5)}{6} \end{aligned}$$

■

Outros números da classe 3D também podem ser explorados a partir dos números tetraédricos, pois seguem o padrão estabelecido até aqui para números piramidais. É o caso dos números chamados platônicos, ou seja, números cúbicos, octaédricos, dodecaédricos e icosaédricos. Essas sequências já foram apresentadas por Deza e Deza (2012), como suas formas gerais, e por Barros (2021), com sua visualização. Assim, apresentam-se essas sequências como uma abordagem voltada à sua relação com os números tetraédricos.

Para iniciar, apresentam-se os *números octaédricos*, cuja forma geral é dada por $O(n) = \frac{n(2n^2+1)}{3}$, $O(1)=1$ (Deza; Deza, 2012). Eles podem ser construídos utilizando o software GeoGebra, partindo da construção de duas pirâmides de base quadrada; como já temos estes números, é possível formar os seguintes usando a seguinte propriedade:

Propriedade 8. O n -ésimo número octaédrico, é formado pela soma do n -ésimo número piramidal quadrado com o $(n-1)$ -ésimo número piramidal quadrado.

Demonstração. Aplicando as fórmulas dos números piramidais quadrado, tem-se:

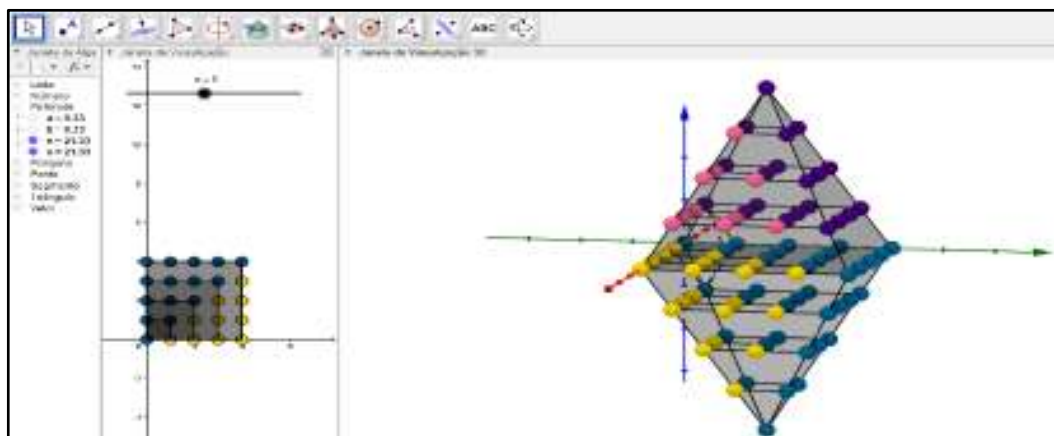
$$O(n) = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} + \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = \frac{n(2n^2-3n+1+2n^2+3n+1)}{6} = \frac{n(4n^2+2)}{6}$$

$$O(n) = \frac{n(2n^2 + 1)}{3}$$

■

Usando os comandos das pirâmides de base quadradas usadas anteriormente para construir números piramidais, podemos construir números octaédrico no GeoGebra como mostra a figura.

Figura 48 - Quinto número octaédrico



Fonte: Elaboração do autor (2024).

A Figura 48 representa a projeção tridimensional dos números octaédricos como duas construções de números piramidais invertidos e unidos pela base, de modo que esta seja comum a ambas as pirâmides. Dessa forma, é possível obter as duas pirâmides constituídas por números piramidais quadrados justapostos.

Para a construção dos números cúbicos a partir dos números tetraédricos, pode-se realizar o preenchimento de um cubo com tetraedros de forma que nenhuma face de um tetraedro se sobreponha à face de um tetraedro vizinho. Com base nisso, é possível montar os números cúbicos e formular uma proposição. Para tanto, apresentam-se os números cúbicos que compõem a sequência (1, 8, 27, 64, ...) e chamaremos de $C_1 = 1, C_2 = 8, C_3 = 27, \dots, C_n = n^3$. Assim, tem-se que:

Propriedade 9. O n -ésimo número cúbico é formado pela soma do n -ésimo, mais quatro vezes o $(n-1)$ -ésimo, mais o $(n-2)$ -ésimo número tetraédrico.

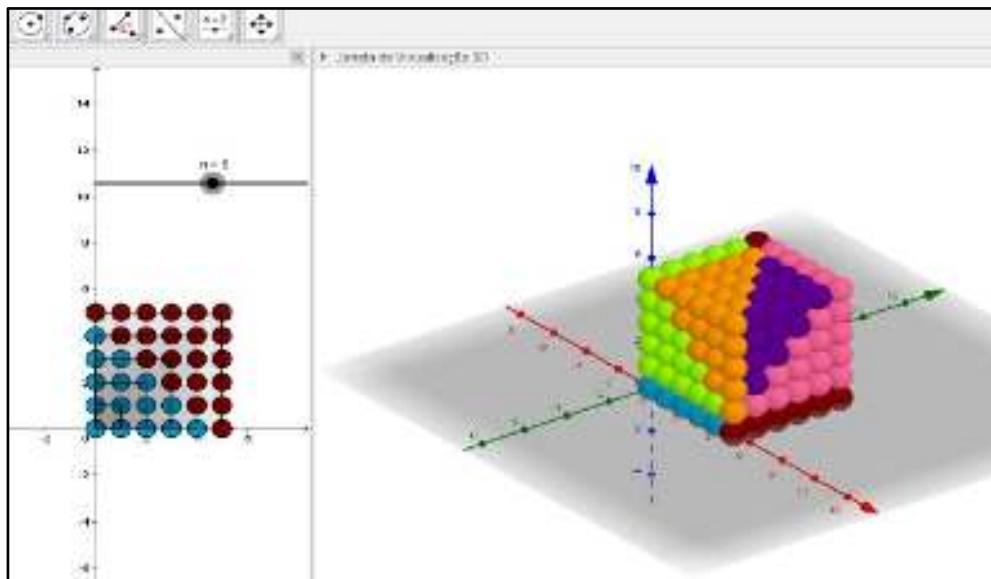
Demonstração. Aplicando a relação sugerida, tem-se:

$$\begin{aligned}
S_3^3(n) + 4S_3^3(n-1) + S_3^3(n-2) &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{4(n-1)(n)(n+1)}{6} + \frac{(n-2)(n-1)(n)}{6} \\
&= \frac{n}{6}((n+1)(n+2) + 4(n-1)(n+1) + (n-2)(n-1)) \\
&= \frac{n}{6}(n^2 + 3n + 2 + 4n^2 - 4 + n^2 - 3n + 2) \\
&= \frac{n}{6}(6n^2) = n^3 = C(n)
\end{aligned}$$

■

As Figuras 49 e 50 representam um cubo formado por números tetraédricos. É possível, com a separação das cores de cada ponto, perceber pirâmides de pontos em diferentes direções, completando cada parte do cubo.

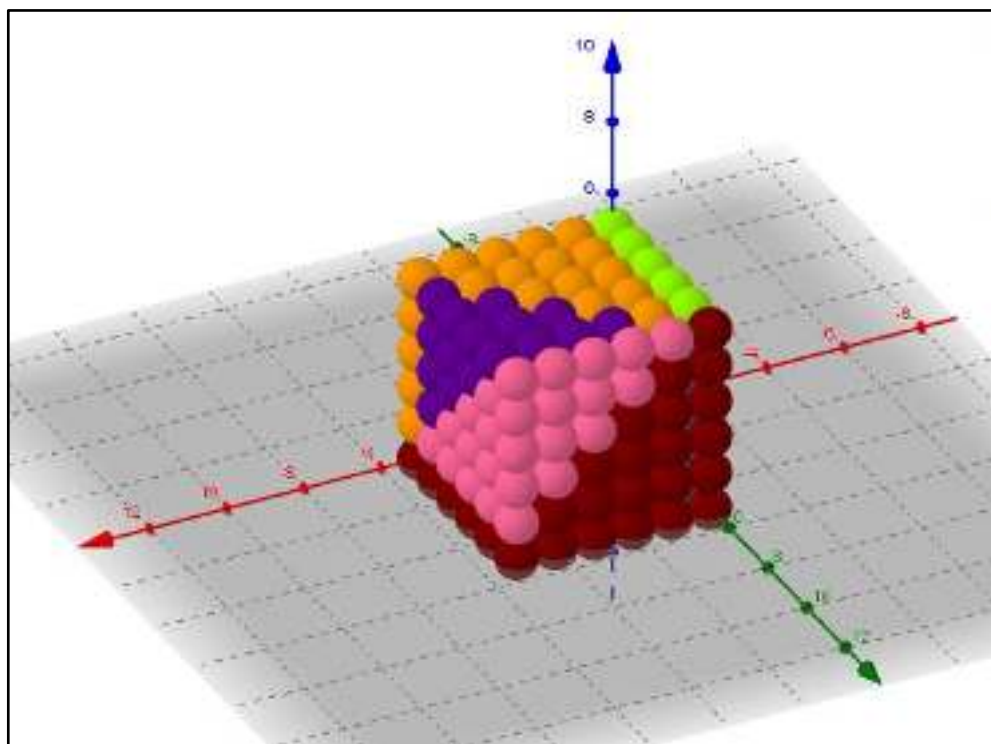
Figura 49 - Quinto número cúbico construído com números tetraédricos



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Uma visão mais aproximada desse número cúbico ajuda a identificar os conjuntos de números tetraédricos presentes com o auxílio do GeoGebra.

Figura 50 - Visão aproximada de um número cúbico



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

É possível estabelecer uma relação entre os números platônicos e os números tetraédricos desde que se observe como o preenchimento com números tetraédricos é realizado para construir o poliedro desejado. Por exemplo, para construir os números cúbicos, primeiramente divide-se o poliedro em pirâmides; em seguida, constroem-se as listas de números piramidais triangulares no interior dessas pirâmides. Observa-se, então, que:

1. O primeiro ponto pertence ao primeiro tetraedro; por isso, existe sempre apenas um número tetraédrico n para um número platônico n . Os demais serão construídos a partir do segundo número platônico.
2. No segundo número platônico, devem-se retirar aqueles pontos que pertencem ao segundo número tetraédrico, construído anteriormente. No restante dos pontos, constroem-se outros números tetraédricos.
3. O procedimento deve ser repetido até que a quantidade de números tetraédricos seja igual ao número de faces do poliedro que foram separadas em triângulos. Lembrando que, como se trata de construções de pirâmides a partir de um ponto, essa pirâmide não poderá ser construída sobre as faces que possuem esse ponto como um de seus vértices. Assim, o mesmo procedimento aplicado aos números cúbicos seria o seguinte:
 1. Um n -ésimo número tetraédrico.

2. Como o segundo número cúbico é 8, e 4 desses já pertencem ao agora segundo número tetraédrico, então outros 4 números tetraédricos serão formados aqui.
3. Visto que o cubo possui seis faces quadradas, e três delas contêm o ponto inicial, as outras três são divididas em triângulos, formando assim seis triângulos. Ainda é necessário um número tetraédrico, que será construído no próximo número cúbico; por isso, ele é um número do tipo $n - 2$, estabelecendo-se, dessa forma, a relação vista anteriormente.

Perceba, ainda, que o terceiro número dodecaedral é 84, sendo 10 do terceiro número tetraédrico, 64 referentes a $16 \cdot S_3^3(2) = 16 \cdot 4$ e os 10 pontos restantes. A relação então será:

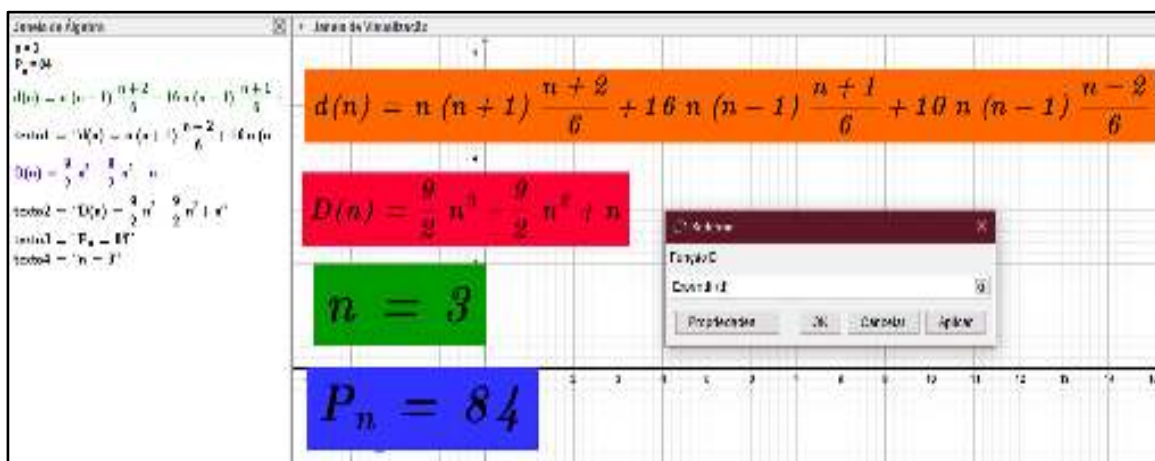
$$D(n) = S_3^3(n) + 16S_3^3(n-1) + 10S_3^3(n-2), n > 2, D(1) = 1, D(2) = 20$$

Assim, os números platônicos dodecaedrais que possuem os primeiros termos (1, 20, 84, 220, 455,...) podem ser escritos segundo a fórmula:

1. Um número tetraédrico $S_3^3(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$
2. Dezesesseis números tetraédricos $S_3^3(n-1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$
3. Retirando-se as três faces do dodecaedro que contém o ponto inicial, as outras nove serão multiplicadas por três, visto que suas faces são pentagonais e, assim, formadas por três triângulos, resultando em 27 “faces”. Como já temos dezessete, nos restam dez listas do tipo $S_3^3(n-2) = \frac{(n-2)(n-1)n}{6}$.

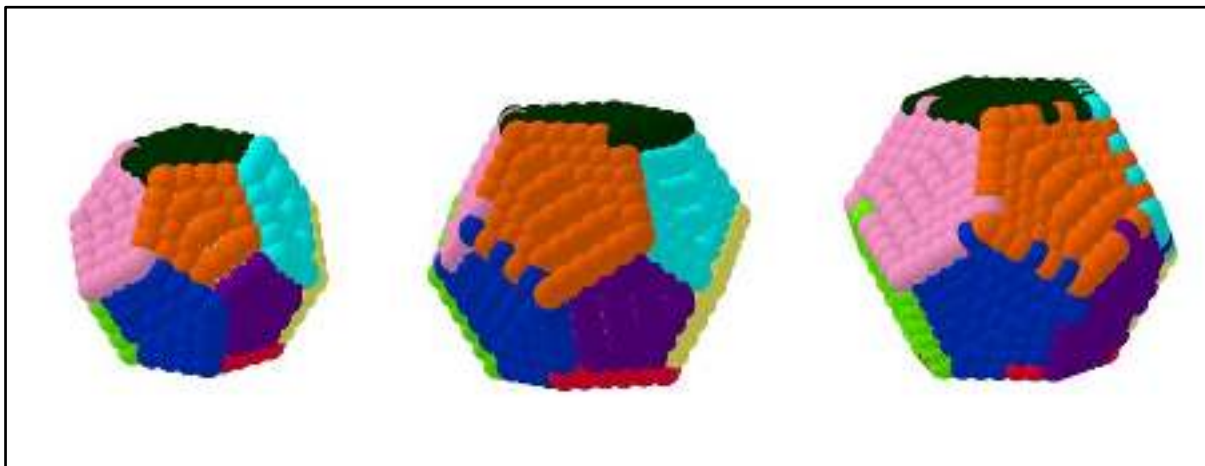
Usando o GeoGebra para desenvolver esta expressão, chegamos à Figura 51:

Figura 51 - resolução da relação entre os números dodecaedrais e tetraédricos no SG



A representação destes números no GeoGebra segue na Figura 52:

Figura 52 - 5º, 6º e 7º números dodecaedrais



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

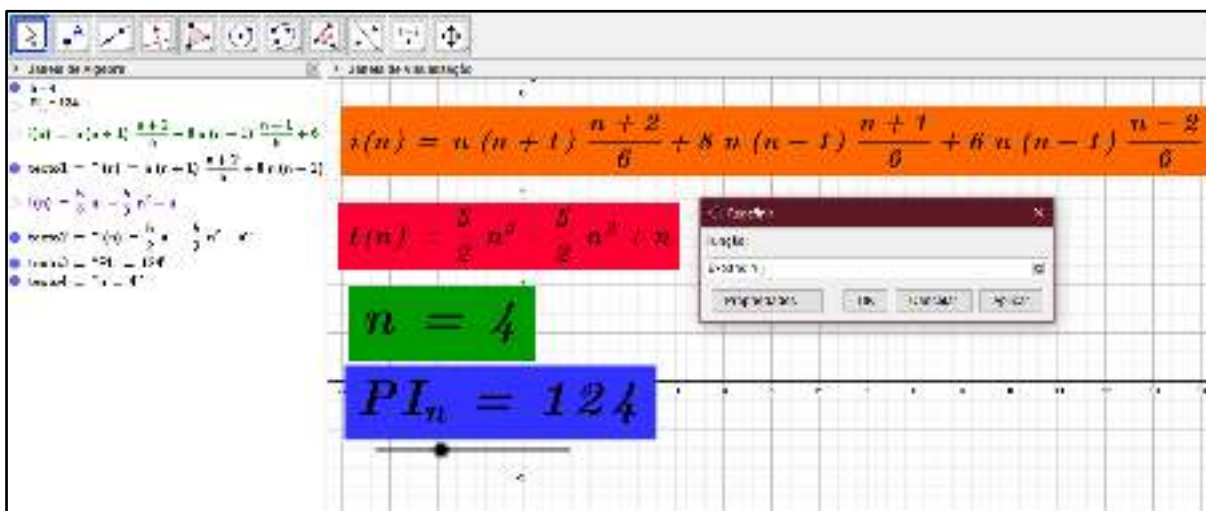
A Figura 52 apresenta alguns números dodecaedrais em que, à medida que os valores aumentam, o software apresenta um certo erro nas cores. Porém, pode-se perceber que a construção foi feita a partir de pirâmides de números.

Seguindo os mesmos passos para os números icosaedrais, temos a relação:

$$I(n) = S_3^3(n) + 8S_3^3(n-1) + 6S_3^3(n-2), n > 2, I(1) = 1, I(2) = 12$$

Usando os mesmos recursos no SG, constata-se que a forma é válida, como mostra a Figura 53:

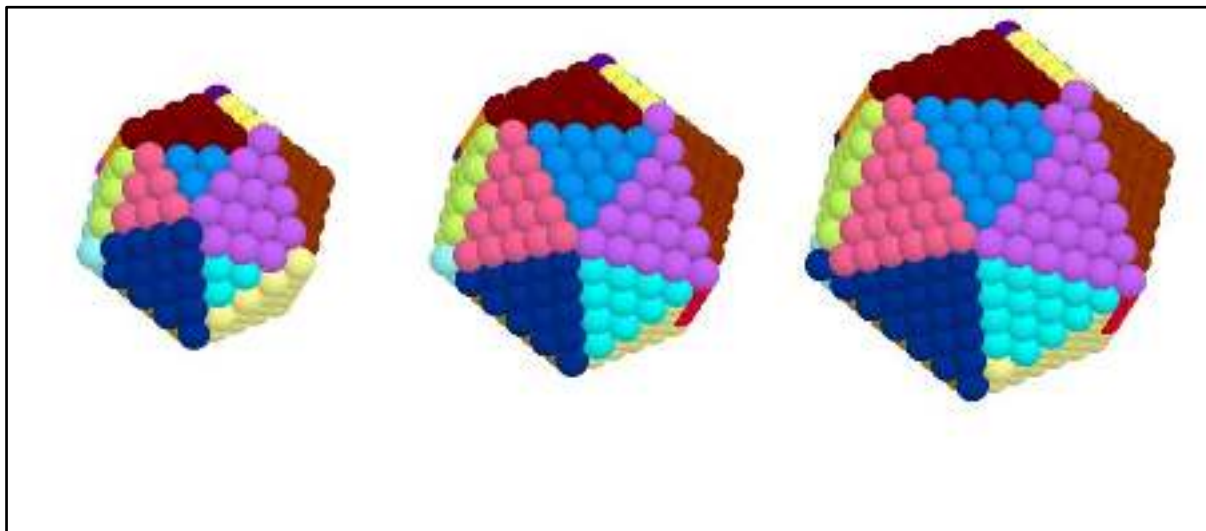
Figura 53 - Constatação da relação entre números icosaedrais e tetraédrico no SG



Fonte: elaboração do autor

A representação no SG usando esta propriedade se encontra na Figura 54:

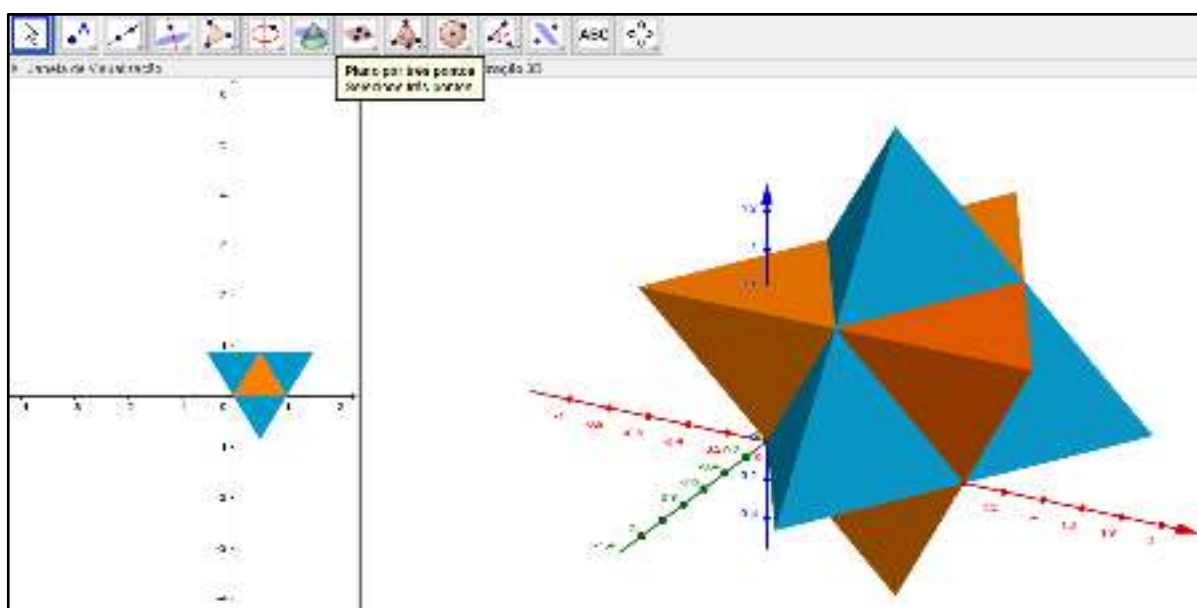
Figura 54 - 5º, 6º e 7º números icosaedrais



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

O próximo número figurado representa uma estrela 3D. Essa figura pode ser construída de duas formas: pela interseção entre dois tetraedros ou a partir de um octaedro no qual cada face triangular serve de base para um tetraedro com vértice oposto externo a esse octaedro. Dessa forma, a Figura 55 ilustra o poliedro no qual se baseiam os números da *Stella octangula*.

Figura 55 - *Stella octangula* construída com dois tetraedros

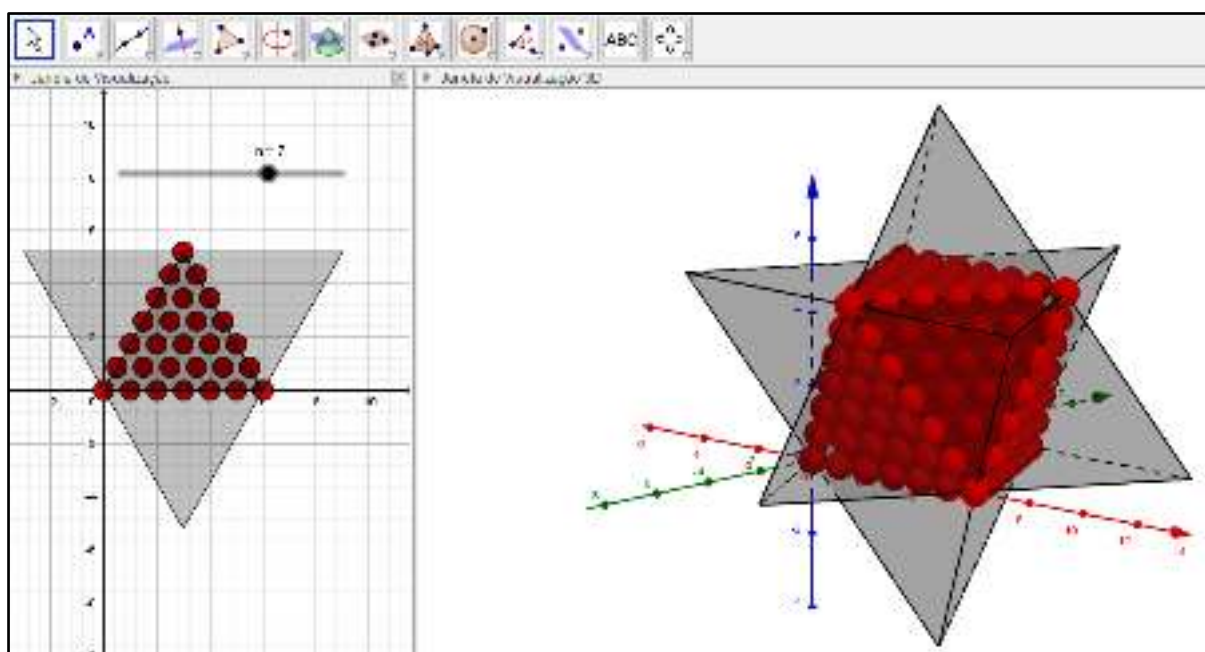


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Na Figura 55, observam-se dois tetraedros invertidos. O octaedro que constitui o núcleo dessa figura pode ser preenchido com os números octaédricos. De cada face do octaedro partem outros tetraedros menores, que geram a *Stella octangula*. Neste caso, como se trata de números figurados, os números da *Stella octangula* – também chamados de números da estrela de oito pontas – possuem uma fórmula de termo geral, conforme Deza e Deza (2012), que é dada por:

$$SO(n) = n(2n^2 - 1)$$

Figura 56 - Números octaédricos construídos no núcleo de uma *Stella octangula*



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

A Figura 56 destaca o octaedro que se encontra no centro da estrutura. Essa observação é necessária porque, após a construção completa da figura, torna-se difícil perceber esse poliedro. A partir da construção realizada no GeoGebra, apresentam-se duas proposições sobre os números da *Stella octangula*:

Propriedade 10. O n -ésimo número da *Stella octangula* é constituído da soma do n -ésimo número octaédrico adicionado a oito vezes o $(n-1)$ -ésimo número tetraédrico.

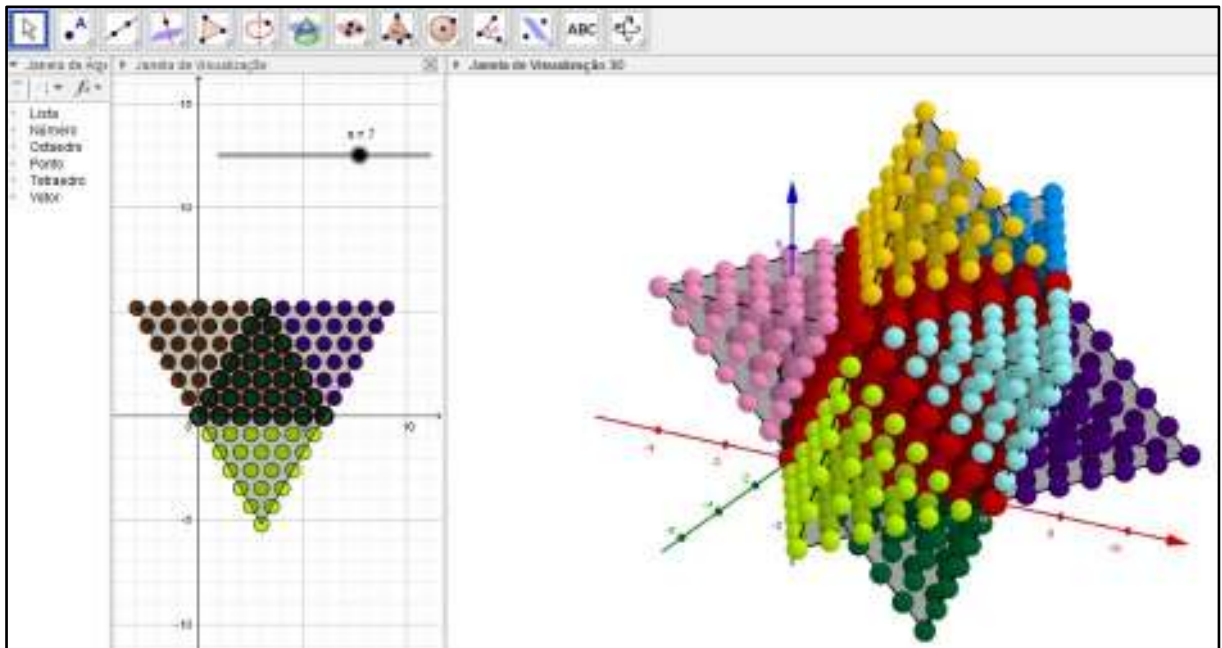
Demonstração. Novamente, aplicando a relação proposta, tem-se que:

$$\begin{aligned}
SO(n) &= O(n) + 8S_3^3(n-1) \\
&= \frac{n(2n^2+1)}{3} + \frac{8(n-1)n(n+1)}{6} \\
&= \frac{2n(2n^2+1)}{6} + \frac{8(n-1)n(n+1)}{6} \\
&= \frac{2n(2n^2+1+4(n-1)(n+1))}{6} \\
&= \frac{2n(2n^2+1+4n^2-4)}{6} \\
&= \frac{2n(6n^2-3)}{6} \\
&= n(2n^2-1)
\end{aligned}$$

■

A construção dos números da *Stella octangula* estão representados nas Figuras 57 e 58.

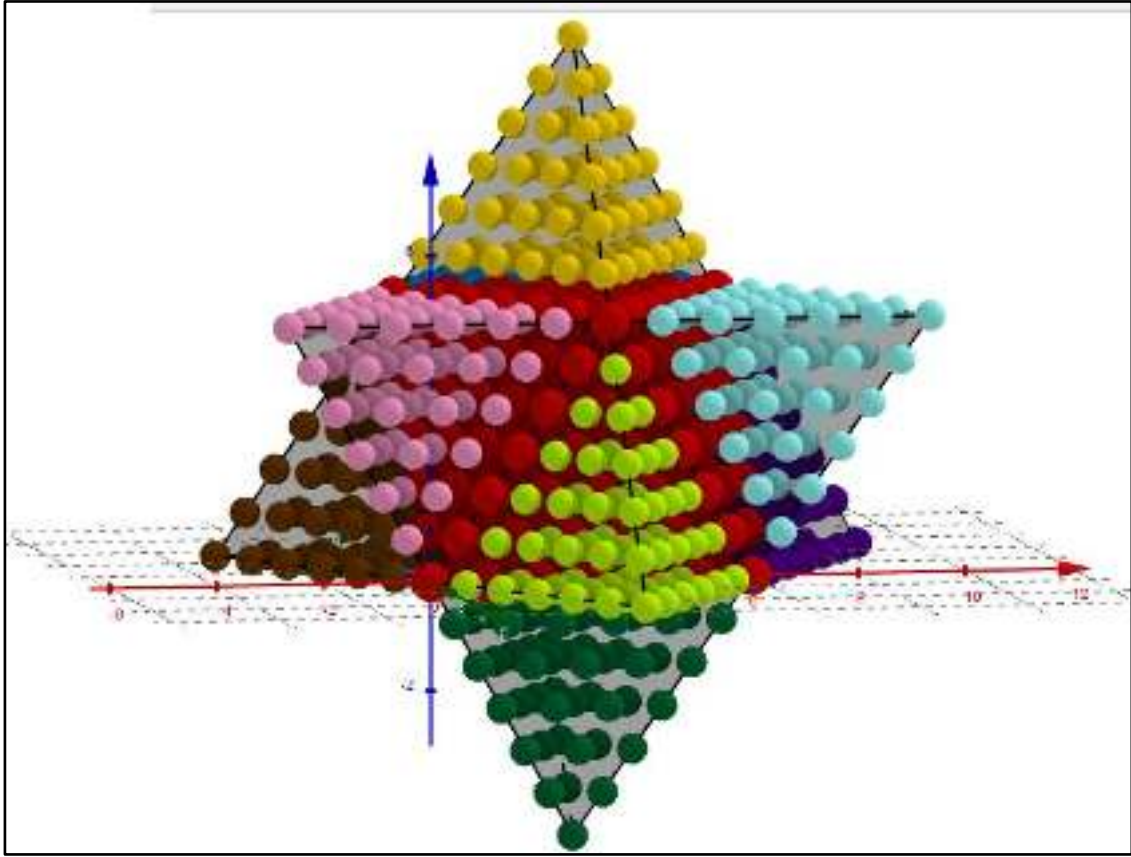
Figura 57 - Sétimo número da *Stella octangula*



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Números figurados como os cúbicos, os dodecaedrais e os da *Stella octangula* necessitam de mais de uma visualização, pois trazem, em suas listas de construção, elementos que não são totalmente visíveis em uma única imagem. Uma visão mais aproximada desses números ajuda a identificar tais elementos.

Figura 58 - Visão aproximada de um número da *Stella octangula*



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

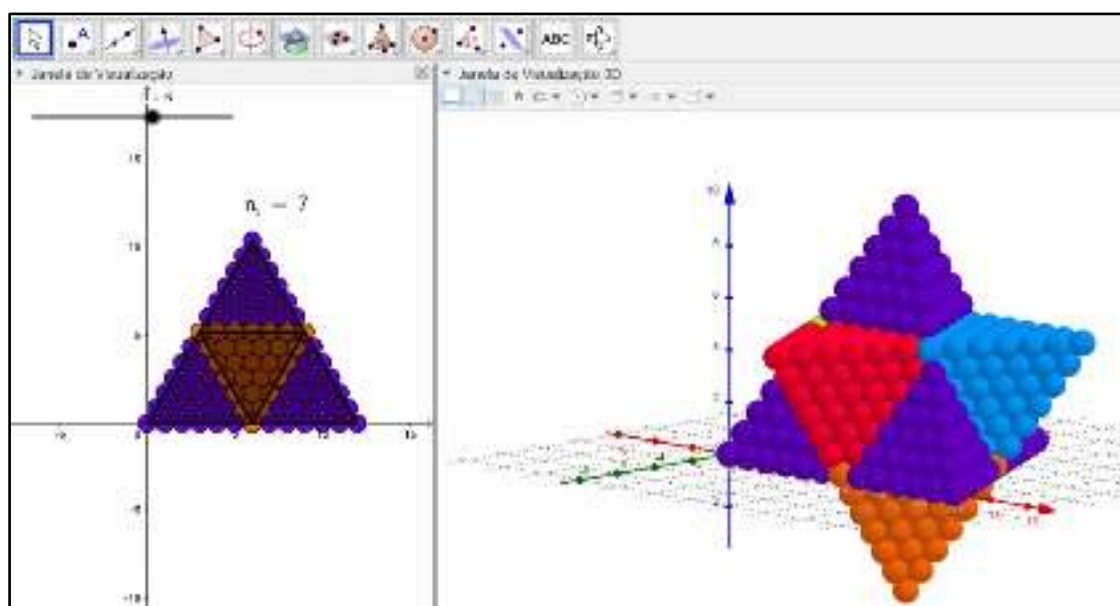
As duas figuras apresentam os números da *Stella octangula* sob dois ângulos diferentes, de modo a evidenciar seus oito “braços”, cada um destacado por uma cor distinta. Em uma das figuras, é possível observar a janela 2D do GeoGebra e perceber que também se podem formar os números da *Stella octangula* utilizando apenas números tetraédricos. O primeiro desses números é uma unidade menor que o dobro dos demais, devido ao ponto central – conforme indicado na figura – que servirá de vértice para um número tetraédrico, enquanto os $n-1$ pontos que o dividem constituirão as bases para os outros números tetraédricos. Desse modo, tem-se que $SO(n) = S_3^3(2n+1) + 4S_3^3(n+1)$. De fato,

$$\begin{aligned}
 SO(n) &= S_3^3(2n-1) + 4S_3^3(n-1) \\
 &= \frac{(2n-1)(2n-1+1)(2n-1+2)}{6} + \frac{4(n-1)n(n+1)}{6} \\
 &= \frac{(2n-1)(2n)(2n+1) + 4(n-1)n(n+1)}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2n(4n^2 - 1 + 2(n^2 - 1))}{6} \\
 &= \frac{2n(6n^2 - 3)}{6} \\
 &= n(2n^2 - 1)
 \end{aligned}$$

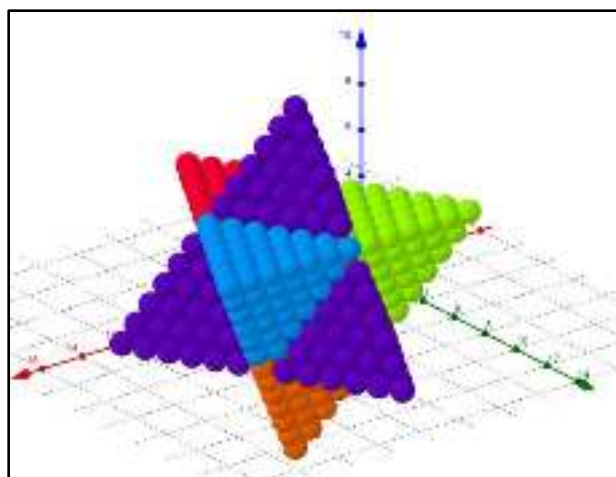
As Figuras 59 e 60 apresentam esta construção com ênfase nas cores, para diferenciar o tetraedro maior dos demais. Assim, é possível observar com maior facilidade a propriedade empregada.

Figura 59 - Outra construção para os números da *Stella octangula*



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Figura 60 - Visão aumentada para a segunda construção dos números da stella octangula



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

As figuras apresentadas nesta seção foram obtidas com base exclusivamente em números tetraédricos, o que permitiu evidenciar propriedades que os relacionam. Dessa forma, é possível construir todos os números figurados tridimensionais. Observa-se, ainda, que esses números tetraédricos são formados a partir dos números triangulares, sendo estes últimos necessários para todas as estruturas mencionadas.

Esta seção demonstrou a possibilidade de utilizar o software GeoGebra como recurso para a descoberta de propriedades de diversos números figurados, sejam bidimensionais ou tridimensionais. O texto seguiu o percurso de apresentar relações entre os números triangulares e outros números figurados, evidenciando que essa sequência é fundamental para a construção das demais. Outras possibilidades podem ser exploradas, desde que se disponha da estrutura do polítopo sobre o qual as listas serão construídas e transladadas. Ademais, existe a possibilidade de representar formas em quatro dimensões ou qualquer sequência pertencente aos números figurados.

3.8 Forma matricial de um número figurado

Nesta seção discutiremos as formas matriciais de representação dos números figurados poligonais e piramidais, com a primeira sendo desenvolvida com o objetivo de observar relações e propriedades importantes, e a segunda apenas como apresentação para estudos futuros. Trata-se de um estudo inédito que busca relacionar a matriz companheira presente nos livros de Álgebra Linear, com os números figurados geralmente estudados nos livros de História da Matemática.

A pesquisa objetiva encontrar relações entre matrizes companheiras específicas dos números poligonais que representem as sequências por meio da recorrência linear e da forma geral, oferecendo, assim, uma nova maneira de apresentar tais sequências, bem como uma generalização para índices inteiros a partir do estudo da matriz companheira inversa. Por fim, a pesquisa demonstra uma forma de obter o termo geral de um número poligonal utilizando exclusivamente a matriz, os números triangulares e os números 0-gonais, além da possibilidade de expansão para quaisquer outras sequências de números figurados.

As representações matriciais por meio da matriz companheira, conforme expressas por Hallack e Feitosa (2013), constituem o objeto deste tópico, no qual serão descritas, por meio da definição, as matrizes companheiras dos números poligonais. Para tanto, é necessário apresentar uma representação para as famílias de sequências das dimensões vizinhas, isto é, as matrizes dos números gnômicos e as matrizes dos números piramidais. No que se refere aos

números poligonais, serão descritas algumas observações acerca do comportamento das matrizes quando elevadas a um índice n , observações essas que podem servir para descrever o comportamento das matrizes de outros números figurados.

3.8.1 Matriz companheira de uma sequência recorrente

De acordo com Lancaster e Tismenetsky (1985) e Chen e Louck (1996), a seguir temos algumas definições acerca de matriz companheira. São elas:

Definição 15 (Matriz companheira associada a uma equação de recorrência). Dada uma sequência numérica $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ com uma relação de recorrência linear e homogênea de ordem k dada por $a_{k+1} = c_1 a_k + c_2 a_{k-1} + \dots + c_k a_1$. Existe uma matriz

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ c_k & c_{k-1} & c_{k-2} & \dots & c_1 \end{pmatrix} \text{ que é associada a essa recorrência e, conseqüentemente, está}$$

ligada à sequência que ela representa, de modo que:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ c_k & c_{k-1} & c_{k-2} & \dots & c_1 \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \\ \vdots \\ a_{n+k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+3} \\ a_{n+4} \\ \vdots \\ a_{n+k+1} \end{pmatrix}$$

A matriz C também pode ser chamada de *matriz companheira*.

Lema 3. Seja C^n a n -ésima potência da matriz companheira C e uma matriz coluna $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$, com

os termos iniciais de uma sequência, cuja recorrência é dada por $a_{k+1} = c_1 a_k + c_2 a_{k-1} + \dots + c_k a_1$.

Então:

$$C^n \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \\ \vdots \\ a_{n+k} \end{pmatrix}$$

Demonstração.

Tem-se, para $n = 1$, que

$$C \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \vdots \\ a_{k+1} \end{pmatrix}$$

de forma que

$$C^2 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ \vdots \\ a_{k+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{2+1} \\ a_{2+2} \\ a_{2+3} \\ \vdots \\ a_{2+k} \end{pmatrix}, C^3 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ \vdots \\ a_{k+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{3+1} \\ a_{3+2} \\ a_{3+3} \\ \vdots \\ a_{3+k} \end{pmatrix}$$

de modo que:

$$C^n \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \\ \vdots \\ a_{n+k} \end{pmatrix}$$

■

Assim, se encontrada a matriz C^n , é possível utilizar sua forma matricial como método para encontrar os termos de uma dada sequência numérica.

Lema 4. Seja C^n a n -ésima potência da matriz companheira

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ c_k & c_{k-1} & c_{k-2} & \cdots & c_1 \end{pmatrix}, \text{ uma matriz } A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kj} \end{pmatrix} \text{ com } j \geq 1$$

e $(a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, \dots, a_{kj})$ termos consecutivos de uma sequência que possui recorrência linear, homogênea e de ordem k igual a $a_{kj+1} = c_1 a_{kj} + c_2 a_{kj-1} + \dots + c_k a_{k1}$. Então:

$$C^n \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{(1+n)1} & a_{(1+n)2} & a_{(1+n)3} & \cdots & a_{(1+n)j} \\ a_{(2+n)1} & a_{(2+n)2} & a_{(2+n)3} & \cdots & a_{(2+n)j} \\ a_{(3+n)1} & a_{(3+n)2} & a_{(3+n)3} & \cdots & a_{(3+n)j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(k+n)1} & a_{(k+n)2} & a_{(k+n)3} & \cdots & a_{(k+n)j} \end{pmatrix}$$

Demonstração. De modo análogo ao lema anterior, pode-se repetir o cálculo feito para a primeira coluna com as demais, pelo produto de matrizes. Isso significa que a matriz A pode conter várias colunas, porém apenas k linhas. ■

A seguir apresentam-se algumas matrizes específicas de números figurados, inicialmente estabelecendo a dos números triangulares e, em seguida, expandindo a ideia para números poligonais e piramidais.

3.8.2 Matriz companheira dos números poligonais e piramidais

Pela definição de matriz geradora e, dada a recorrência dos números poligonais e piramidais, pode-se escrever a matriz companheira para essas duas famílias de sequências. Assim, as matrizes são dadas por:

Proposição 11 (Matriz companheira dos números poligonais). A matriz companheira dos números poligonais M é dada por:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Demonstração. Dada a definição de matriz companheira e a recorrência para um número

poligonal descrita por $S_m(n+3) = 3S_m(n+2) - 3S_m(n+1) + S_m(n)$ então $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

■

Proposição 12 (Matriz companheira dos números piramidais). Sendo MS^3 a matriz companheira dos números piramidais, sua forma é dada por:

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Demonstração. Para isso devemos apresentar uma recorrência homogênea para os números piramidais, que na definição de matriz companheira é dada por:

$$S_m^3(n+1) = S_m^3(n) + S_m(n+1), \quad (1)$$

e da forma geral dos poligonais,

$$S_m(n) = \frac{n((m-2)n - m + 4)}{2}, \quad (2)$$

Segue que:

$$\begin{aligned} S_m^3(n+2) - S_m^3(n+1) &= S_m^3(n+1) + S_m(n+2) - (S_m^3(n) + S_m(n+1)) \\ S_m^3(n+2) &= 2S_m^3(n+1) - S_m^3(n) + S_m(n+2) + (m-2)(n+2) - (m-3) \end{aligned}$$

como

$$S_m^3(n+3) = 2S_m^3(n+2) - S_m^3(n+1) + S_m(n+3) + (m-2)(n+3) - (m-3)$$

Então,

$$\begin{aligned} S_m^3(n+3) - S_m^3(n+2) &= 2S_m^3(n+2) - S_m^3(n+1) + S_m(n+3) + (m-2)(n+3) - (m-3) \\ &\quad - (2S_m^3(n+1) - S_m^3(n) + S_m(n+2) + (m-2)(n+2) - (m-3)) \\ S_m^3(n+3) &= 3S_m^3(n+2) - 3S_m^3(n+1) + S_m^3(n) + (m-2) \end{aligned}$$

como

$$S_m^3(n+4) = 3S_m^3(n+3) - 3S_m^3(n+2) + S_m^3(n+1) + (m-2)$$

E segue que:

$$\begin{aligned} S_m^3(n+4) - S_m^3(n+3) &= 3S_m^3(n+3) - 3S_m^3(n+2) + S_m^3(n+1) + (m-2) - \\ &\quad - (3S_m^3(n+2) - 3S_m^3(n+1) + S_m^3(n) + (m-2)) \\ S_m^3(n+4) &= 4S_m^3(n+3) - 6S_m^3(n+2) + 4S_m^3(n+1) - S_m^3(n) \end{aligned}$$

■

Dessa forma, para encontrar os termos de qualquer número figurado, são necessários a matriz companheira e um vetor (ou matriz coluna) contendo termos sucessivos do número figurado desejado. Serão utilizados o número poligonal hexagonal e o número piramidal quadrado para analisar a matriz companheira em duas e três dimensões, respectivamente.

Exemplo 1. Dados os números hexagonais descritos pela sequência $S_6 = (1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, \dots)$ catalogada como A000384 em OEIS. Devemos encontrar os próximos números hexagonais e, para isso, usaremos a matriz companheira e uma matriz coluna com os três primeiros números hexagonais:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 1 \cdot 1 - 3 \cdot 6 + 3 \cdot 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 28 \end{pmatrix}$$

Assim, necessitamos sempre dos termos imediatamente anteriores para que a matriz companheira nos forneça os próximos.

Exemplo 2. Operando a matriz companheira nos números piramidais com os primeiros termos dos números piramidais quadrados $S_4^3 = (1, 5, 14, 39, 75, 124, \dots)$, sequência A111715 na OEIS, temos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 14 \\ 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 39 \\ -1 \cdot 1 + 4 \cdot 5 - 6 \cdot 14 + 4 \cdot 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 39 \\ 75 \end{pmatrix}$$

Dessa forma, é necessário ainda que essas matrizes forneçam uma forma em que, a partir da sua companheira e dos primeiros termos, seja possível encontrar qualquer outro termo da sequência sem a necessidade de seu termo anterior.

Exemplo 3. Pelo lema 3, pode-se calcular o produto de M por uma matriz quadrada contendo apenas números triangulares T . De fato:

$$\begin{aligned}
 M \cdot T &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 10 & 28 \\ 3 & 15 & 36 \\ 6 & 21 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 36 \\ 6 & 21 & 45 \\ 1 \cdot 1 - 3 \cdot 3 + 3 \cdot 6 & 1 \cdot 10 - 3 \cdot 15 + 3 \cdot 21 & 1 \cdot 28 - 3 \cdot 36 + 3 \cdot 45 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 3 & 15 & 36 \\ 6 & 21 & 45 \\ 10 & 28 & 55 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Com base nessas definições e exemplos, inicia-se o estudo das matrizes companheiras de números poligonais e piramidais, tema do próximo tópico, no qual serão apresentadas algumas propriedades extraídas das potências da matriz companheira dos números figurados estudados até o momento.

3.8.3 Propriedades da matriz companheira dos números poligonais

Nesta seção apresentam-se alguns teoremas das matrizes geradoras dos números poligonais, tais como sua matriz n -ésima, extensão para os índices negativos e relação com outras sequências de números figurados. Para iniciar, apresenta-se a lei de formação da matriz

companheira dos números poligonais, descrita como $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, e a fórmula para o n -

ésimo número triangular, dada por $S_3(n) = \frac{n(n+1)}{2}$, e ainda a fórmula para o n -ésimo número

m -gonal $S_m(n) = \frac{n((m-2)n-m+4)}{2}$. Observando o comportamento de M^2 , ou seja

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}, \text{ as colunas } j=1 \text{ e } j=3 \text{ contêm alguns termos iniciais}$$

dos números triangulares em ordem, a saber, os primeiros termos dos números triangulares são $S_3 = (1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, \dots)$ A000217 na OEIS.

Obviamente, se os termos das colunas são números triangulares e a matriz é companheira dos números poligonais, então qualquer potência de M_2 apresentará em suas colunas $j=1$ e $j=3$ termos da sequência dos números triangulares. Para os dois primeiros termos de $j=1$ compostos de zeros são os termos de índice -1 e zero, respectivamente, ou

seja, M_2 pode ser reescrita como $M_2 = \begin{pmatrix} S_3^2(-1) & 1 & S_3^2(0) \\ S_3^2(0) & 0 & S_3^2(1) \\ S_3^2(1) & -3 & S_3^2(2) \end{pmatrix}$. Tal fato pode ser generalizado

para n , desde que seja provado a partir do princípio de indução finita.

Observando agora os termos da coluna $j=2$, são os primeiros termos dos números 0-gonais $S_0 = (1, 0, -3, -8, -15, -24, -35, \dots)$ A067998 na OEIS, com seu termo geral dado por $S_0^2(n) = -n(n-2)$. Como esta sequência também é dos números figurados bidimensionais, mesmo que não possa ser apresentada como polígono – pois seria a representação de um polígono com zero lados –, possui sua forma geral a partir da forma geral dos m -gonais, o que permite apresentar o seguinte teorema:

Teorema 10. Seja a matriz companheira dos números poligonais descrita como

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix},$$

então sua n -ésima potência $(M_2)^n$ é dada por:

$$(M_2)^n = \begin{pmatrix} S_3^2(n-2) & S_0^2(n) & S_3^2(n-1) \\ S_3^2(n-1) & S_0^2(n+1) & S_3^2(n) \\ S_3^2(n) & S_0^2(n+2) & S_3^2(n+1) \end{pmatrix}$$

Demonstração. Como já foi mostrado, esse fato é válido para $n=1$ e $n=2$ e, supondo que seja válido para $n=l$, pelo princípio da indução finita, devemos então verificar se também é válido para $n=l+1$. Logo,

$$(M_2)^l = \begin{pmatrix} S_3^2(l-2) & S_0^2(l) & S_3^2(l-1) \\ S_3^2(l-1) & S_0^2(l+1) & S_3^2(l) \\ S_3^2(l) & S_0^2(l+2) & S_3^2(l+1) \end{pmatrix}; M_2 = \begin{pmatrix} S_3^2(-1) & S_0^2(1) & S_3^2(0) \\ S_3^2(0) & S_0^2(2) & S_3^2(1) \\ S_3^2(1) & S_0^2(3) & S_3^2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Assim, segue que:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} S_3^2(l-2) & S_0^2(l) & S_3^2(l-1) \\ S_3^2(l-1) & S_0^2(l+1) & S_3^2(l) \\ S_3^2(l) & S_0^2(l+2) & S_3^2(l+1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} S_3^2(l-1) & S_3^2(l-2) - 3S_3^2(l-1) & -S_0^2(l) + 3S_3^2(l-1) \\ S_3^2(l) & S_3^2(l-1) - 3S_3^2(l) & -S_0^2(l+1) + 3S_3^2(l) \\ S_3^2(l+1) & S_3^2(l) - 3S_3^2(l+1) & -S_0^2(l+2) + 3S_3^2(l+1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para $j=1$ de $(M_2)^{l+1}$ temos: $S_3^2(l-1)=S_3^2(l-2+1)$, $S_3^2(l)=S_3^2(l-1+1)$ e $S_3^2(l+1)$ que já apresenta a o termo seguinte de l .

Para $i=1, j=2$ de $(M_2)^{l+1}$, tem-se:

$$\begin{aligned} S_3^2(l-2)-3S_3^2(l-1) &= \frac{(l-2)(l-1)}{2} - 3\frac{(l-1)l}{2} = \frac{(l-1)(l-2-3l)}{2} = \frac{(l-1)(-2l-2)}{2} \\ &= -(l+1)(l-1) = S_0^2(l+1) \end{aligned}$$

Para $i=2, j=2$:

$$S_3^2(l-1)-3S_3^2(l) = \frac{(l-1)l}{2} - 3\frac{(l+1)l}{2} = \frac{l(l-1-3l-3)}{2} = \frac{l(-2l-4)}{2} = -(l+2)l = S_0^2(l+2)$$

Para $i=3, j=2$:

$$\begin{aligned} S_3^2(l)-3S_3^2(l+1) &= \frac{l(l+1)}{2} - 3\frac{(l+1)(l+2)}{2} = \frac{(l+1)(l-3l-6)}{2} = \frac{(l+1)(-2l-6)}{2} \\ &= -(l+3)(l+1) = S_0^2(l+3) \end{aligned}$$

Temos agora para $i=1, j=3$:

$$\begin{aligned} -S_0^2(l)+3S_3^2(l-1) &= -l(l-2) + \frac{3(l-1)l}{2} = \frac{-2l(l-2)}{2} + \frac{3(l-1)l}{2} = \frac{l(-2l+4+3l-3)}{2} = \\ &= \frac{l(l+1)}{2} = S_3^2(l) = S_3^2(l-1+1) \end{aligned}$$

Em $i=2, j=3$:

$$\begin{aligned} -S_0^2(l+1)+3S_3^2(l) &= -(l+1)(l-1) + \frac{3l(l+1)}{2} = \frac{-2(l+1)(l-1)}{2} + \frac{3l(l+1)}{2} = \frac{(l+1)(-2l+2+3l)}{2} = \\ &= \frac{(l+1)(l+2)}{2} = S_3^2(l+1) \end{aligned}$$

Por fim, temos para $i=j=3$:

$$\begin{aligned} -S_0^2(l+2)+3S_3^2(l+1) &= -(l+2)l + 3\frac{(l+1)(l+2)}{2} = \frac{-2(l+2)l}{2} + \frac{3(l+1)(l+2)}{2} = \\ &= \frac{(l+2)(-2l+3l+3)}{2} = \frac{(l+2)(l+3)}{2} = S_3^2(l+2) = S_3^2(l+1+1) \end{aligned}$$

A matriz resultante é dada por:

$$(M_2)^{l+1} \begin{pmatrix} S_3^2(l-2+1) & S_0^2(l+1) & S_3^2(l-1+1) \\ S_3^2(l-1+1) & S_0^2(l+1+1) & S_3^2(l+1) \\ S_3^2(l+1) & S_0^2(l+2+1) & S_3^2(l+1+1) \end{pmatrix}$$

■

Desse modo, a hipótese de indução foi comprovada: uma potência da matriz companheira pode ser obtida por meio das fórmulas dos números triangulares e 0-gonais, conforme descrito.

Outra possibilidade oferecida pela matriz companheira dos números poligonais consiste em investigar se sua inversa permite determinar os números poligonais de índices negativos. Para isso, calcula-se a matriz inversa da MS , obtendo-se:

Lema 5. Dada a matriz dos números poligonais

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

sua inversa $(M_2)^{-1}$ é possui a seguinte configuração

$$(M_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Demonstração. Sabe-se que $M_2 \cdot (M_2)^{-1} = I^3$, ou seja, a matriz identidade $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Então,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot (M_2)^{-1} = I_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b_{21} = 1, b_{22} = 0, b_{23} = 0; b_{31} = 0, b_{32} = 1, b_{33} = 0$$

$$b_{11} - 3b_{21} + 3b_{31} = 0 \Rightarrow b_{11} - 3 = 0 \Rightarrow b_{11} = 3$$

$$b_{12} - 3b_{22} + 3b_{32} = 0 \Rightarrow b_{12} + 3 = 0 \Rightarrow b_{12} = -3$$

$$b_{13} - 3b_{23} + 3b_{33} = 1 \Rightarrow b_{13} = 1$$

Logo,

$$(M_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

■

Percebemos que a matriz inversa possui os mesmos valores que a matriz companheira, porém com as posições dos números invertidas. Isto conduz ao segundo teorema sobre matrizes companheiras dos números poligonais.

Teorema 11. Considere a matriz companheira inversa dos números poligonais

$$(M_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Então a } n\text{-ésima potência de } (M_2)^{-1}, \text{ ou seja } (M_2)^{-n}, \text{ é dada por:}$$

$$(M_2)^{-n} = \begin{pmatrix} S_3^2(n+1) & S_0^2(n+2) & S_3^2(n) \\ S_3^2(n) & S_0^2(n+1) & S_3^2(n-1) \\ S_3^2(n-1) & S_0^2(n) & S_3^2(n-2) \end{pmatrix}$$

Demonstração. Para esta demonstração, será utilizado o princípio da indução finita, a exemplo da demonstração anterior. Como visto anteriormente, a hipótese é válida para $n=1$. Então, calculando $((M_2)^{-1})^2$, obtém-se:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 6 & -8 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que apresenta a mesma relação com $(M_2)^2$ ou seja, os mesmos termos em posições invertidas.

Supondo que seja válido para $n=l$, vamos verificar se também é válido para $n=l+1$. Segue que:

$$((M_2)^{-1})^l = \begin{pmatrix} S_3^2(l+1) & -S_0^2(l+2) & S_3^2(l) \\ S_3^2(l) & -S_0^2(l+1) & S_3^2(l-1) \\ S_3^2(l-1) & -S_0^2(l) & S_3^2(l-2) \end{pmatrix}$$

e $((M_2)^{-1})^l = (M_2)^{-l}$ logo $(M_2)^{-l-1} = ((M_2)^{-1})^{l+1}$. Deste modo, deveremos multiplicar $(M_2)^{-l}$ por $(M_2)^{-1}$. Ao fazer isto, perceba que:

$$\begin{pmatrix} S_3^2(l+1) & -S_0^2(l+2) & S_3^2(l) \\ S_3^2(l) & -S_0^2(l+1) & S_3^2(l-1) \\ S_3^2(l-1) & -S_0^2(l) & S_3^2(l-2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

resulta nos mesmos produtos das matrizes anteriores, mantendo-se a ordem invertida dos valores; ou seja, a matriz deste produto é:

$$\left((M_2)^{-1}\right)^{l+1} = \begin{pmatrix} S_3^2(l+1+1) & -S_0^2(l+2+1) & S_3^2(l+1) \\ S_3^2(l+1) & -S_0^2(l+1+1) & S_3^2(l-1+1) \\ S_3^2(l-1+1) & -S_0^2(l+1) & S_3^2(l-2+1) \end{pmatrix}$$

■

Exemplo 4. Como um exemplo da aplicação desta matriz nos números figurados de índices negativos, podemos usar os números pentagonais. Assim, temos:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

que nos fornece, o vetor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ e, seguindo as multiplicações, os números seguintes que surgem

na primeira entrada são da sequência $(0, 2, 7, 15, 26, 40, 57, 77...)$ dos números pentagonais negativos, A005449 na OEIS. De uma maneira geral, podemos encontrar o termo geral dos

números poligonais de índices positivos e negativos, pois $M_2^n \begin{pmatrix} S_m^2(0) \\ S_m^2(1) \\ S_m^2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_m^2(n) \\ S_m^2(n+1) \\ S_m^2(n+2) \end{pmatrix}$ e

$$M_2^{-n} \begin{pmatrix} S_m^2(0) \\ S_m^2(1) \\ S_m^2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_m^2(-n) \\ S_m^2(-n+1) \\ S_m^2(-n+2) \end{pmatrix}, \text{ ou seja, se usarmos um vetor com o termo de índice zero, podemos}$$

encontrar a forma geral dos números poligonais a partir da matriz companheira e da matriz

$$\text{coluna } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}. \text{ Para os índices negativos temos então } \begin{pmatrix} S_3^2(n+1) & -S_0^2(n+2) & S_3^2(n) \\ S_3^2(n) & -S_0^2(n+1) & S_3^2(n-1) \\ S_3^2(n-1) & -S_0^2(n) & S_3^2(n-2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}, \text{ que}$$

na primeira entrada nos fornece a fórmula dos números m -gonais de índices negativos, então temos que:

$$S_m^2(-n) = -S_0^2(n+2) + mS_3^2(n) = \frac{-2n(n+2)}{2} + \frac{mn(n+1)}{2} = \frac{-2n^2 - 4n + mn^2 + mn}{2}$$

$$S_m^2(-n) = \frac{n(m-2) + m - 4}{2}$$

que é a fórmula apresentada por Deza e Deza (2012). E para os índices positivos, seguindo o

mesmo procedimento, encontramos $S_m^2(n) = \frac{n(m-2) - m + 4}{2}$, também desenvolvida pelos

mesmos autores. Assim, é possível utilizar as potências da matriz companheira dos números poligonais para definir também os termos gerais desses números.

Diante das relações apresentadas nas potências e estrutura da matriz companheira dos números poligonais, é possível encontrar algumas identidades entre os números triangulares e θ -gonais presentes na matriz.

Corolário 2. O determinante da n -ésima potência da matriz companheira dos números poligonais é igual a 1.

Demonstração. Sendo a n -ésima potência da matriz companheira dos números poligonais dada por:

$$\begin{pmatrix} S_3^2(n-2) & S_0^2(n) & S_3^2(n-1) \\ S_3^2(n-1) & S_0^2(n+1) & S_3^2(n) \\ S_3^2(n) & S_0^2(n+2) & S_3^2(n+1) \end{pmatrix}$$

Calculando as diagonais com termos θ -gonais iguais:

$$\begin{aligned} & S_3^2(n-2)S_0^2(n+1)S_3^2(n+1) - S_3^2(n)S_0^2(n+1)S_3^2(n-1) \\ &= S_3^2(n-2)S_3^2(n+1) - S_3^2(n)S_3^2(n-1) \\ &+ \\ & S_0^2(n)S_3^2(n)S_3^2(n) - S_3^2(n+1)S_3^2(n-1)S_0^2(n) \\ &= S_3^2(n)S_3^2(n) - S_3^2(n+1)S_3^2(n-1) \\ &+ \\ & S_3^2(n-1)S_3^2(n-1)S_0^2(n+2) - S_0^2(n+2)S_3^2(n)S_3^2(n-2) \\ &= S_3^2(n-1)S_3^2(n-1) - S_3^2(n)S_3^2(n-2) \\ &= S_3^2(n-2)S_3^2(n+1) - S_3^2(n)S_3^2(n-1) + S_3^2(n)S_3^2(n) - S_3^2(n+1)S_3^2(n-1) \\ &+ S_3^2(n-1)S_3^2(n-1) - S_3^2(n)S_3^2(n-2) \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & S_3^2(n)(S_3^2(n) - S_3^2(n-1) - S_3^2(n-2)) + S_3^2(n-1)(-S_3^2(n+1) + S_3^2(n-1)) \\ &+ S_3^2(n-2)S_3^2(n+1) \end{aligned}$$

Agora pode-se escrever todos os termos em função de $S_3(n)$. Pela recorrência, tem-se:

$$S_3^2(n+1) = S_3^2(n) + n + 1,$$

$$S_3^2(n) = S_3^2(n-1) + n$$

$$S_3^2(n-1) = S_3^2(n) - n,$$

$$S_3^2(n-1) = S_3^2(n-2) + n - 1$$

$$S_3^2(n) - n = S_3^2(n-2) + n - 1$$

$$S_3^2(n-2) = S_3^2(n) - 2n + 1$$

Assim,

$$\begin{aligned} & S_3^2(n) \left(S_3^2(n) - (S_3^2(n) - n) - (S_3^2(n) - 2n + 1) \right) \\ & + (S_3^2(n) - n) \left(- (S_3^2(n) + n + 1) + S_3^2(n) - n \right) + (S_3^2(n) - 2n + 1) (S_3^2(n) + n + 1) \\ & = S_3^2(n) (-S_3^2(n) + 3n - 1) + (S_3^2(n) - n) (-2n - 1) + S_3^2(n) (S_3^2(n) - n + 2) \\ & \quad - 2n^2 - n + 1 \\ & = S_3^2(n) (-S_3^2(n) + 3n - 1) + S_3^2(n) (-2n - 1) + 2n^2 + n + S_3^2(n) (S_3^2(n) - n + 2) \\ & \quad - 2n^2 - n + 1 \end{aligned}$$

Logo,

$$S_3^2(n) (-S_3^2(n) + 3n - 1 - 2n - 1 + S_3^2(n) - n + 2) + 2n^2 + n - 2n^2 - n$$

$$S_3^2(n) \cdot 0 + 1 = 1$$

■

Corolário 3. Um número poligonal pode ser apresentado como combinações de números triangulares e θ -gonais da seguinte maneira:

$$S_m(n) = S_0(n) + mS_3(n)$$

Demonstração. Dado o produto da n -ésima potência da matriz companheira dos números

poligonais $\begin{pmatrix} S_3^2(n-2) & S_0^2(n) & S_3^2(n-1) \\ S_3^2(n-1) & S_0^2(n+1) & S_3^2(n) \\ S_3^2(n) & S_0^2(n+2) & S_3^2(n+1) \end{pmatrix}$ e a matriz coluna $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}$ com os números

poligonais $S_m(0), S_m(1), S_m(2)$, que resulta em:

$$\begin{pmatrix} S_3^2(n-2) & S_0^2(n) & S_3^2(n-1) \\ S_3^2(n-1) & S_0^2(n+1) & S_3^2(n) \\ S_3^2(n) & S_0^2(n+2) & S_3^2(n+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_m(n) \\ S_m(n+1) \\ S_m(n+2) \end{pmatrix}$$

$$S_3^2(n-2) \cdot 0 + S_0^2(n) \cdot 1 + S_3^2(n-1) \cdot m = S_m(n)$$

$$S_0^2(n) + mS_3^2(n-1) = S_m(n)$$

■

Corolário 4. O número poligonal $S_m(2n)$ pode ser apresentado como uma combinação de números triangulares e θ -gonais na forma:

$$S_m(2n) = S_3(n-2)S_m(n) + S_0(n)S_m(n+1) + S_3(n-1)S_m(n+2)$$

Demonstração. Da relação

$$M_2^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_m(n) \\ S_m(n+1) \\ S_m(n+2) \end{pmatrix}$$

Segue,

$$M_2^n \left(MS^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ m \end{pmatrix} \right) = M_2^n \begin{pmatrix} S_m(n) \\ S_m(n+1) \\ S_m(n+2) \end{pmatrix}$$

$$M_2^{2n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ m \end{pmatrix} = M_2^n \begin{pmatrix} S_m(n) \\ S_m(n+1) \\ S_m(n+2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} S_m(2n) \\ S_m(2n+1) \\ S_m(2n+2) \end{pmatrix} = M_2^n \begin{pmatrix} S_m(n) \\ S_m(n+1) \\ S_m(n+2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} S_3^2(n-2) & S_0^2(n) & S_3^2(n-1) \\ S_3^2(n-1) & S_0^2(n+1) & S_3^2(n) \\ S_3^2(n) & S_0^2(n+2) & S_3^2(n+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_m(n) \\ S_m(n+1) \\ S_m(n+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_m(2n) \\ S_m(2n+1) \\ S_m(2n+2) \end{pmatrix}$$

e do produto da primeira linha pela matriz coluna, tem-se:

$$S_m(2n) = S_3(n-2)S_m(n) + S_0(n)S_m(n+1) + S_3(n-1)S_m(n+2)$$

■

Por fim, a partir dessas relações encontradas é possível extrair uma maneira de obter fórmulas gerais de alguns números planos, não só poligonais, mas qualquer outro que possa ser representado como uma combinação de números triangulares. Essa forma alternativa será tratada no tópico a seguir.

3.8.4 Forma dos números figurados planos via matriz companheira

Dada a matriz companheira dos números poligonais, pode-se tratar apenas do produto da primeira linha com o vetor coluna que determina os primeiros números poligonais. Para exemplificar, trataremos dos casos dos números triangulares e quadrados, cujas formas gerais já foram amplamente divulgadas nessa pesquisa.

No caso dos números triangulares, temos:

$$\begin{pmatrix} S_3^2(n-2) & S_0^2(n) & S_3^2(n-1) \\ S_3^2(n-1) & S_0^2(n+1) & S_3^2(n) \\ S_3^2(n) & S_0^2(n+2) & S_3^2(n+1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Destacando o produto da primeira linha da matriz pelo vetor coluna com os primeiros triangulares, temos $S_3^2(n-2) \cdot 0 + S_0^2(n) \cdot 1 + S_3^2(n-1) \cdot 3$. Substituindo esses termos pelas suas formas gerais, e retirando o primeiro termo, pois está multiplicado por zero, obtém-se, então, $-n(n-2) + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3$. Quando resolvemos essa expressão, temos:

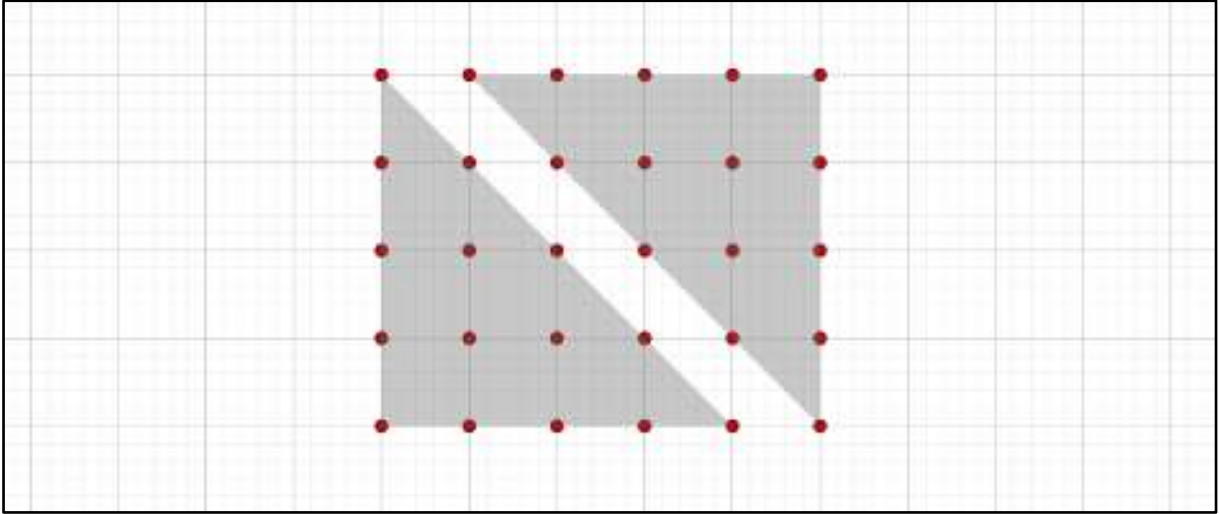
$$-n(n-2) + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3 = \frac{-2n(n-2)}{2} + \frac{3n(n-1)}{2} = \frac{-2n(n-2) + 3n(n-1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = S_3(n)$$

O mesmo fato vale para os números quadrados. Como já visto no corolário 3, podemos substituir a mesma base que já sabemos ser $-n(n-2) + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 4$ dados os primeiros termos serem 0, 1 e 4. Da mesma forma, tem-se que $\frac{-2n(n-2)}{2} + \frac{4n(n-1)}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2 = S_4(n)$.

Agora encontraremos a forma geral para outros números figurados planos a partir desse dispositivo, analisando sua veracidade por meio do site das sequências inteiras. Ou seja, é possível encontrar formas de números planos a partir dessa combinação, bastando, assim, ter os primeiros termos de um certo número figurado e verificarmos se ele pode ser formado por números triangulares.

Primeiro analisemos o caso dos números oblongos, definidos pelo site OEIS como números figurados formados por produtos de dois inteiros consecutivos, com a seguinte forma geral: $O(n) = n(n+1)$. Obviamente, pode-se perceber que estes números são formados por dois números triangulares de mesma ordem, ou ainda $O(n) = 2S_3(n)$ para $n \in \mathbb{N}$. Sua visualização pode ser descrita como uma retângulo de pontos em que a base possui $n+1$ pontos e altura n .

Figura 61 - Relação entre números quadrados e triangulares



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Corolário 5. Seja um número oblongo $O(n)$ cujo primeiros termos 0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, ... com o registro A002378 na OEIS. Então, sua fórmula alternativa é dada por.

$$O(n) = -n(n-2) \cdot 2 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 6$$

Demonstração. Desenvolvendo a expressão, temos

$$O(n) = \frac{-n(n-2) \cdot 4}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 6$$

$$O(n) = \frac{-4n^2 + 8n + 6n^2 - 6n}{2}$$

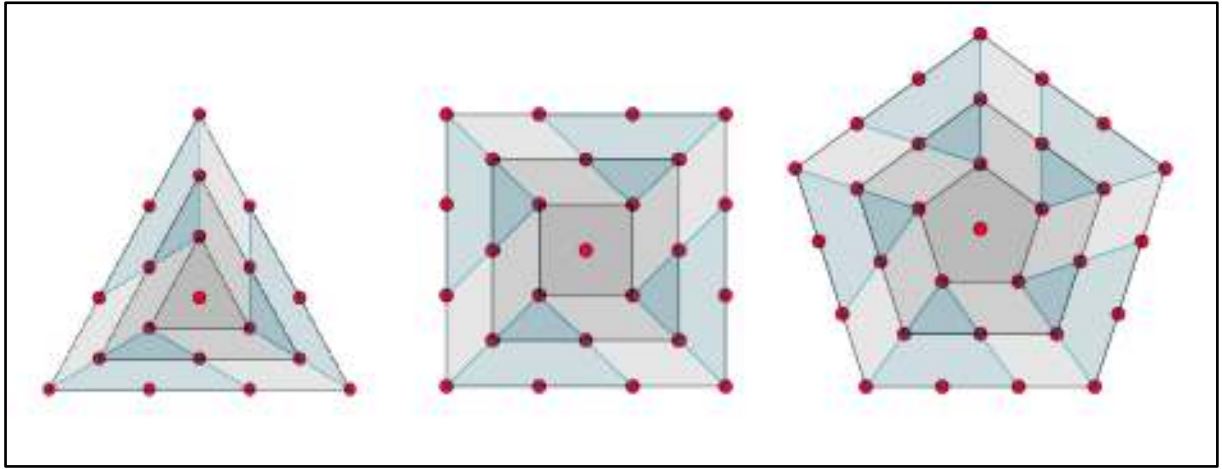
$$O(n) = n^2 + 4n - 3n$$

$$O(n) = n(n+1)$$

que, de fato, se trata da forma geral dos números oblongos. ■

Outra configuração que podemos atribuir essa fórmula alternativa é as famílias dos poligonais centralizados, pois também apresentam relações com números triangulares. Essa família de sequências, que possui forma geral dada por Deza e Deza (2012) como $SC_m(n) = 1 + m \left(\frac{n(n-1)}{2} \right)$, claramente pode ser vista como $SC_m(n) = 1 + mS_3(n-1)$, com as configurações triangularizadas na Figura 62.

Figura 62 - Números poligonais centralizados



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

A figura apresenta números figurados centralizados que formam triângulos, quadrados e pentágonos, já com triângulos apresentados, de modo que podemos enunciar um corolário para essa família de sequências com base nessa figura.

Corolário 6. Seja $SC_m(n)$ o n -ésimo número m -gonal centralizado, com sua forma geral dada por $SC_m(n) = 1 + m(S_3(n-1))$, com $S_3(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ sendo o $(n-1)$ -ésimo número triangular.

Sua forma geral alternativa, com base na matriz companheira dos números poligonais é dada por:

$$S_3^2(n-2) \cdot 1 + S_0^2(n) \cdot 1 + S_3^2(n-1) \cdot (1+m)$$

Demonstração. É possível encontrar os três primeiro termos dos números centralizados poligonais da seguinte forma: como o ponto inicial sempre está presente, então $SC_m(0) = 1$; o ponto inicial permanece na primeira figura formada, logo, $SC_m(1) = 1$ e, por fim, quando camada é formada em torno do ponto central, são adicionados m pontos, ou seja $SC_m(2) = 1 + m$.

Dessa forma, devemos apenas desenvolver a fórmula dada para concluir que se trata, de fato, de uma forma alternativa de números poligonais centralizados. Assim, temos que:

$$S_3^2(n-2) \cdot 1 + S_0^2(n) \cdot 1 + S_3^2(n-1) \cdot (1+m) = \frac{(n-2)(n-1)}{2} - n(n-2) + \frac{n(n-1)}{2}(1+m)$$

Expandindo e simplificando cada fator

$$\frac{1}{2}(n^2 - 3n + 2) - n^2 + 2n + \frac{1}{2}((m+1)n^2 + (m+1)n)$$

$$\frac{1}{2}(n^2 - 3n) + 1 - n^2 + 2n + \frac{1}{2}((m+1)n^2 + (m+1)n)$$

organizando os termos quanto ao grau de n

$$\left(\frac{1-2+m+1}{2}\right)n^2 + \left(\frac{-3+4-(m+1)}{2}\right)n + 1$$

$$\frac{m}{2}n^2 - \frac{m}{2}n + 1$$

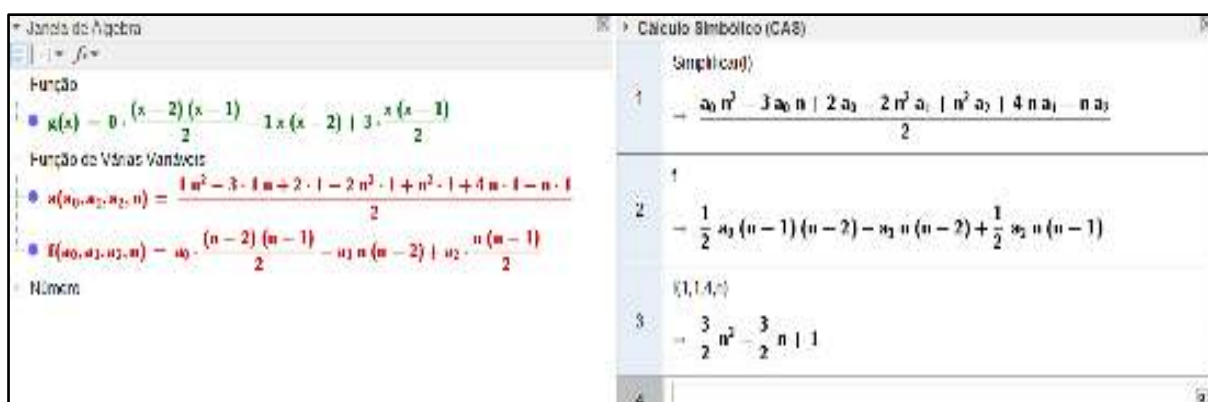
ou seja,

$$1 + mS_3(n-1) = SC_m(n)$$

■

É possível também interpretar essa fórmula com uso do GeoGebra, apresentando uma forma resumida e possíveis apenas mudando os termos iniciais de cada sequência. Na Figura 63 temos a forma para os números triangulares centralizados.

Figura 63 - Forma alternativa dos números poligonais centralizados no SG



Fonte: do autor

Na Figura 63 é possível observar que a função f descreve a fórmula alternativa com os valores iniciais a_0, a_1 e a_2 . No lado direito da figura, no passo 3 da janela cálculo, podemos perceber que os valores iniciais são 1, 1 e 4, sugerindo números triangulares centralizados. A fórmula gerada é justamente a dessa sequência, segundo a OEIS com o número A005448. A mesma fórmula sendo usada para os números oblongos também resulta na fórmula dele, como é o esperado.

Figura 64 - Forma alternativa dos números oblongos no SG

The screenshot shows a CAS window titled "Cálculo Simbólico (CAS)". It contains three numbered steps of simplification:

- Step 1: Simplification of the expression $a_0 n^2 - 3 a_0 n + 2 a_0 - 2 n^2 a_1 + n^2 a_2 + 4 n a_1 - n a_2$ by 2.
- Step 2: Simplification of the expression $\frac{1}{2} a_2 (n-1)(n-2) - a_1 n(n-2) + \frac{1}{2} a_2 n(n-1)$.
- Step 3: Simplification of the expression $n^2 + n$.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Com isso temos uma fórmula que pode ser usada nas classes de números planos de forma unificada, bastando que tenhamos os primeiros termos e que esses números possam ser expressos em forma de números triangulares, como foi o caso dos oblongos e dos poligonais centralizados.

Por fim, essa seção teve como objetivo apresentar uma forma inédita de apresentação dos números figurados poligonais a partir da matriz companheira, ou matriz associada a uma recorrência linear, para números figurados 2D e 3D, sendo este segundo apenas uma apresentação para estudos futuros.

Com o intuito de verificar se tal matriz pode fornecer dados generalizados sobre as sequências citadas, o estudo foi direcionado para os números figurados citados, pois fazem parte da família dos números bidimensionais e, em um primeiro momento, foi definida uma fórmula para a n -ésima potência da matriz M .

Em um segundo momento, o estudo foi direcionado às propriedades inerentes à matriz dos números poligonais. Verificou-se, então, que a matriz companheira desses números possui uma relação com os números triangulares e 0 -gonais, fato provado por meio do princípio da indução finita com o auxílio das fórmulas gerais dos números triangulares e 0 -gonais já conhecidos. Dessa forma, pode-se obter uma maneira de encontrar uma potência qualquer de M apenas com o auxílio das fórmulas citadas acima.

Outra possibilidade das matrizes companheiras é a expansão para índices negativos a partir do cálculo da matriz inversa, que possui em sua estrutura os mesmos termos de MS com a diferença apenas na posição dos termos, ou seja, também pode ser definida usando apenas os números triangulares e 0 -gonais. Assim, foi mostrado que a matriz companheira nos fornece a fórmula dos números m -gonais generalizados, ou seja, de índices inteiros, a partir do produto

da n -ésima potência de M por uma matriz coluna contendo os termos $S_m^2(0), S_m^2(1), S_m^2(2)$, pois a primeira entrada deste produto fornece exatamente a fórmula desejada.

Em seguida, demonstrou-se que a fórmula referente à primeira entrada constitui uma forma alternativa de apresentar o termo geral de outras classes de números figurados, como os números centralizados e os números oblongos, o que expande sua aplicação e unifica essas três classes de sequências em torno de uma única fórmula.

A presente seção possibilitou a apresentação, de forma inédita, de uma representação matricial para os números figurados poligonais. Essa representação traz características essenciais, como a expressão do termo geral e a extensão para índices inteiros – características já presentes em outras formas conhecidas (recorrência e termo geral) –, revelando-se uma importante ferramenta para a identificação de propriedades e relações significativas dessa classe de números, uma vez que existe a possibilidade de estender tal estudo para quaisquer famílias de sequências de números figurados.

3.9 Ladrilhamento dos números figurados

Nesta seção, apresenta-se a ideia do tabuleiro discutida por Spreafico (2014), Neto (2017) e Vieira e Alves (2023), explorando sua relação com os números figurados. Antes, porém, é fundamental estabelecer a base teórica necessária ao desenvolvimento da abordagem proposta. Para tanto, parte-se da definição dos principais objetos combinatórios que serão utilizados, bem como das ferramentas matemáticas que possibilitam sua manipulação.

Primeiramente, descrevem-se os elementos que compõem essa estrutura: o tabuleiro e as peças. Explicam-se suas características, sua disposição no espaço e a forma como interagem entre si. Além disso, introduzem-se algumas regras básicas para a manipulação dessas peças no tabuleiro, destacando como tais regras podem ser aplicadas na construção de argumentos matemáticos e na demonstração de identidades numéricas.

Em seguida, aborda-se o conceito de peso ou hierarquia das peças, noção fundamental para compreender a organização dos ladrilhamentos e a maneira como diferentes configurações do tabuleiro podem representar relações matemáticas. Essa estrutura permite visualizar padrões e explorar a conexão entre os números figurados e suas propriedades combinatórias.

Uma vez estabelecidas as sequências de números figurados e suas respectivas relações de recorrência, o próximo passo consiste em representá-los graficamente no tabuleiro. Utilizando o software GeoGebra por meio de uma ferramenta desenvolvida, ilustram-se essas

representações e extraem-se propriedades fundamentais, aproveitando os recursos visuais para reforçar conceitos matemáticos.

Dessa forma, desenvolvem-se inicialmente as regras de ladrilhamento para os números triangulares. A partir da relação dessa sequência com as demais da classe dos figurados, estabelecem-se as regras gerais para números poligonais, piramidais e simplexos, fornecendo a base para a definição de regras de ladrilhamento de qualquer número figurado.

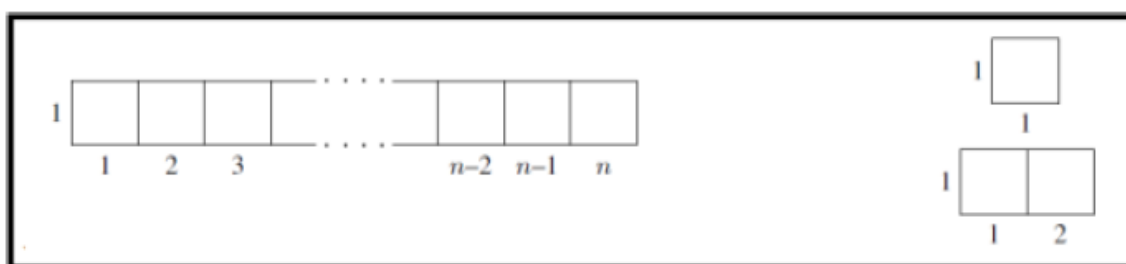
O objetivo principal desta seção é propor uma nova abordagem para o estudo dos números figurados, integrando elementos combinatórios e representações visuais a fim de enriquecer sua compreensão. A utilização do GeoGebra desempenha papel essencial nesse processo, pois permite visualizar e manipular os números figurados de maneira intuitiva, ao mesmo tempo que insere elementos da análise combinatória no estudo dessas sequências numéricas.

3.9.1 A ideia de tabuleiro

A ideia de tabuleiro é definida por Spreafico (2014) da seguinte forma:

De acordo com Spreafico (2014), os tabuleiros (coberturas, pisos) são formados por quadrados 1×1 que são chamados de suas casas ou células. Essas casas podem ser numeradas e essa numeração determina uma posição. Uma possível representação foi elaborada por Benjamin & Quinn (2003) interpretar a ideia do n -tabuleiro.

Figura 65 - Interpretação da noção no n -tabuleiro



Fonte: Benjamin e Quinn (2003).

Com a noção de tabuleiro apresentada nesta seção, seguimos para a representação de ladrilhamentos dos números triangulares e a exploração de suas propriedades por meio de uma ferramenta desenvolvida no GeoGebra.

3.9.2 Ferramenta: *Tabuleiro GeoGebra*

A ferramenta “Tabuleiro GeoGebra” permite preencher ladrilhos retangulares de quaisquer dimensões usando peças individuais de tamanho 1×1 . A ferramenta foi desenvolvida pelo autor com recursos do software GeoGebra com o objetivo de apresentar ladrilhamentos virtuais como alternativa para sala de aula, uma vez que tabuleiros físicos, embora úteis, podem não ser suficientes para uma turma numerosa. Dessa forma, se a instituição de ensino contar com um laboratório de informática, é possível trabalhar de forma mais dinâmica com esses tabuleiros virtuais.

Esta ferramenta é útil para compreender conceitos matemáticos como padrões, recorrência e interpretação combinatória de sequências de números figurados poligonais, além de permitir a manipulação virtual de objetos, de modo que o estudante, à medida que interage com o objeto, aprenda também conceitos sobre o software. Assim, descrever-se-á a ferramenta passo a passo, desde sua concepção até sua aplicação, de modo a possibilitar sua reprodução, manipulação e adaptação para outras sequências.

3.9.2.1 Propósito da Ferramenta:

A ferramenta foi projetada para ajudar na representação visual de preenchimento de ladrilhos de forma eficiente, onde os ladrilhos têm dimensões n e são preenchidos por peças individuais de tamanho $1 \times n$ e 1×1 .

3.9.2.2 Interface da Ferramenta:

Área de Visualização: A tela principal mostra a área de trabalho, situada na janela 2D onde os ladrilhos são representados.

Barra de Ferramentas: Existe uma ferramenta dedicada ao preenchimento de ladrilhos, na qual é possível escolher a grade, ou seja, o tamanho do tabuleiro que se pretende preencher, e as peças por cores.

3.9.2.3 Funcionalidades Principais:

Na seleção de dimensões, antes de começar a preencher os ladrilhos, o usuário pode selecionar as dimensões desejadas dos ladrilhos ($1 \times n$), permitindo criar a “grade” que será construído o ladrilhamento desejado.

Na aba “Tabuleiro” das ferramentas, selecione o botão “Ladrilho”. Em seguida, clique em dois pontos na janela de visualização 2D (certifique-se de clicar nos pontos sobre a malha

para uma organização precisa). Uma janela será exibida para inserir o número desejado de ladrilhos. Após inserir esse número, uma grade correspondente com uma lista de pontos em sua base, será gerada na janela 2D.

Há uma opção para inserir peças de tamanho 1×1 na grade para preencher os ladrilhos. Na ferramenta, selecione a cor desejada para preencher o tabuleiro. Em seguida, na grade criada na janela 2D, clique em dois pontos consecutivos onde deseja posicionar o ladrilho. Caso precise colocar o mesmo ladrilho novamente, repita a operação clicando novamente em pontos consecutivos. Repita o processo até que sua grade esteja completa com as cores desejadas.

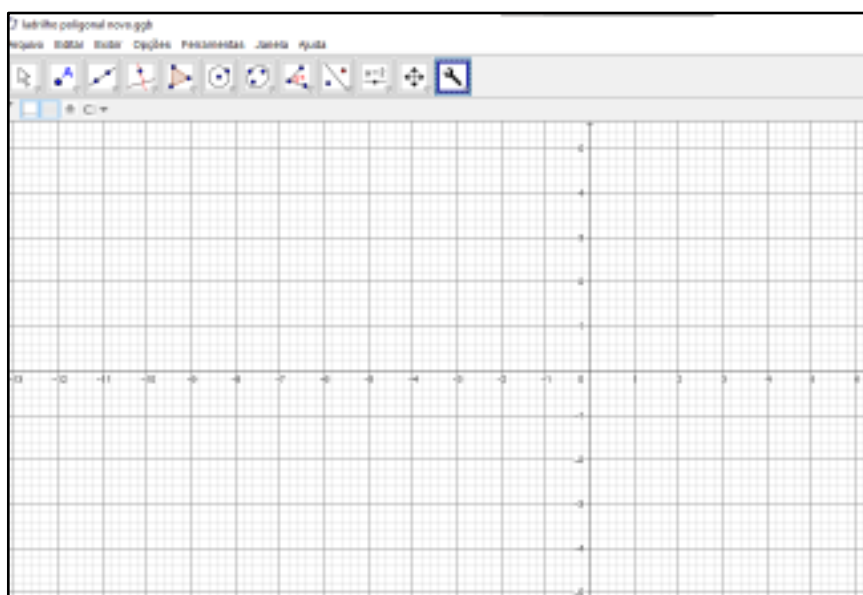
Essa ferramenta pode ser útil no ensino de conceitos matemáticos, como padrões, recorrência e interpretação combinatória. Os alunos podem usar a ferramenta para resolver situações com conceitos de preenchimento de ladrilhos, explorando diferentes combinações e buscando propriedades das sequências estudadas.

3.9.2.4 Exemplo prático de uso

Para exemplificar, traremos um conjunto de informações ilustradas que apresentam o passo a passo no uso da ferramenta

I - Tela inicial:

Figura 66 - Tela inicial do tabuleiro GeoGebra



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

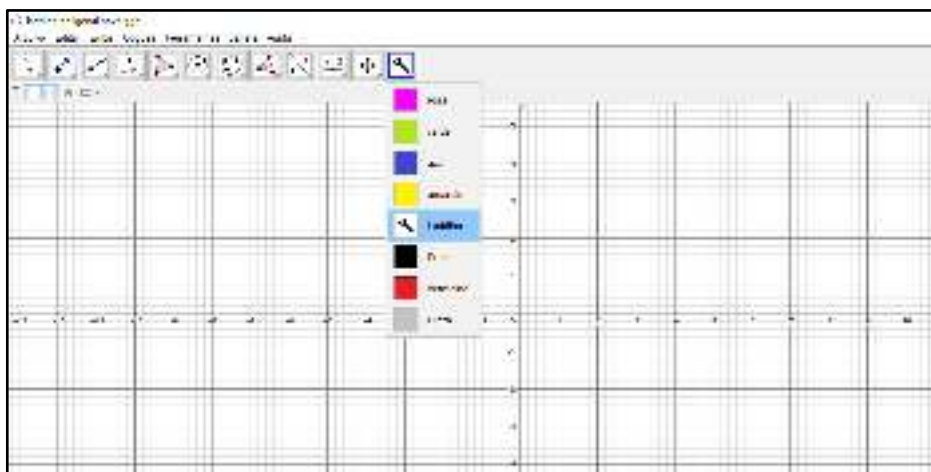
Esta é a tela de início com o ícone “ferramenta” selecionado

Configuração Inicial - Selecione dimensões de $1 \times n$ para os ladrilhos.

Usaremos como exemplo o tabuleiro com 4 peças

II – Escolhendo o botão ladrilho

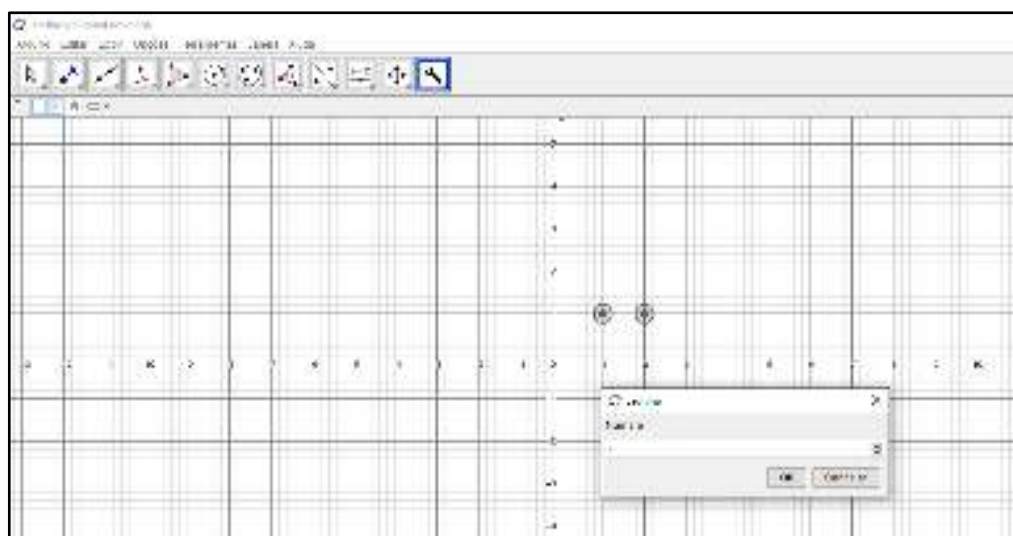
Figura 67 - Seleção de cores no tabuleiro virtual



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Na aba superior do software é possível observar um botão com um símbolo de “chave de boca”. Esse botão é a ferramenta que utilizaremos, pois todos os ladrilhos e a grade aparecem quando clicamos nele. Dessa forma, para escolher o ladrilho, escolheremos este no rol de opções e, em seguida, deve-se clicar na tela em dois pontos. Após isso, uma tela se abrirá para que seja escolhida a quantidade de ladrilhos a ser usada, conforme a Figura 68.

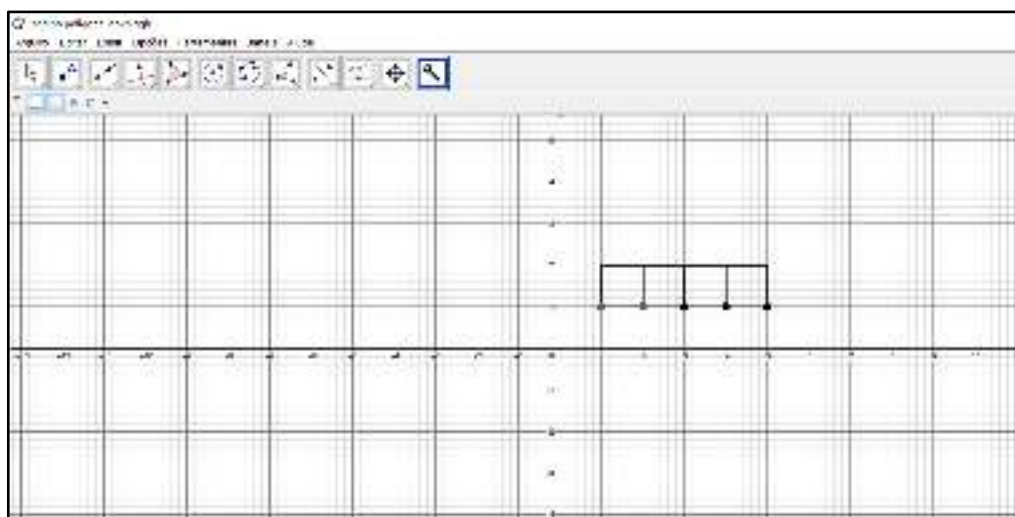
Figura 68 – Seleção do comprimento do tabuleiro virtual



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Escolhendo um número qualquer, surgirá na tela a grade para o ladrilhamento desejado. Nesse exemplo, ao abrir a tela para preencher o número, foi escolhido o número 4, a grade que surge aparece na Figura 69.

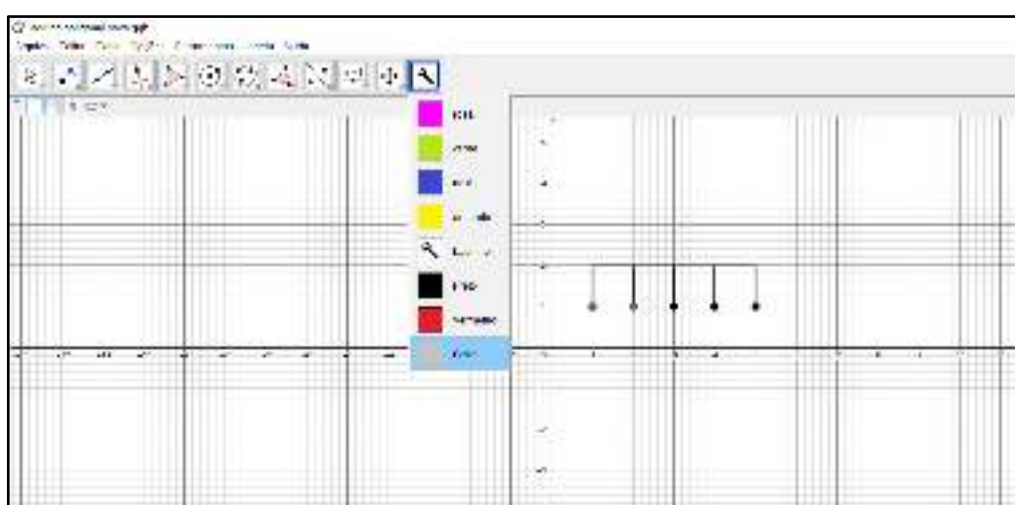
Figura 69 - Tabuleiro gerado a partir da escolha do comprimento



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Uma vez escolhida a quantidade de ladrilhamentos, retornamos ao botão de escolha para as opções de cores de ladrilhos para preencher o ladrilhamento desejado.

Figura 70 - Seleção de cores no tabuleiro virtual

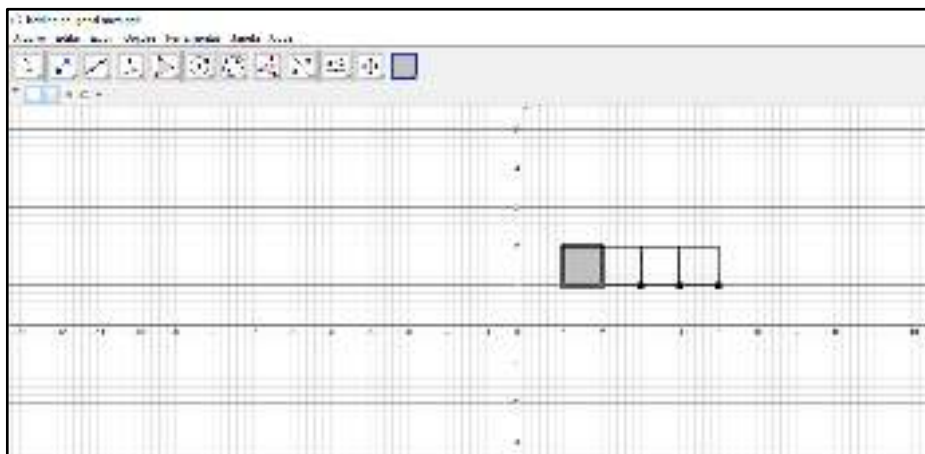


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Para o exemplo, escolhemos a cor cinza para iniciar o ladrilhamento. Dessa forma, procuramos no rol de opções e a selecionamos, retornando à tela para o preenchimento. No

exemplo, escolhemos a primeira posição para essa cor, então devemos clicar e selecionar dois pontos da base do quadrado onde a ladrilha deve ficar e então a cor preenche o local desejado, conforme a Figura 71.

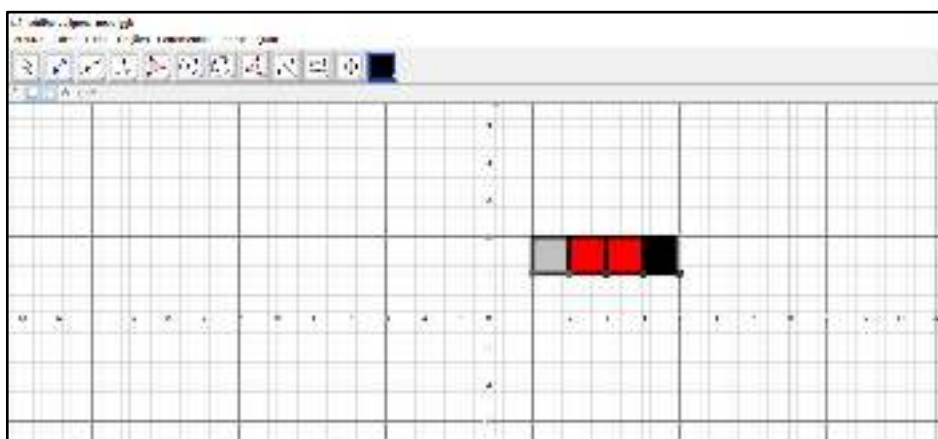
Figura 71 - Geração da cor cinza no GeoGebra



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Em seguida, o procedimento deve ser repetido até que o ladrilhamento seja concluído, na próxima figura, após o preenchimento do ladrilha cinza, o procedimento foi repetido três vezes, sendo dois para o vermelho e um para o preto. O resultado aparece na Figura 72.

Figura 72 - Ladrilhamento completo no tabuleiro virtual



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Essa é uma descrição básica da ferramenta no GeoGebra para preencher ladrilhos $1 \times n$ usando peças 1×1 . Essas funcionalidades específicas do GeoGebra podem ser aprimoradas para que atendam outras sequências, inclusive com peças de tamanhos diferentes.

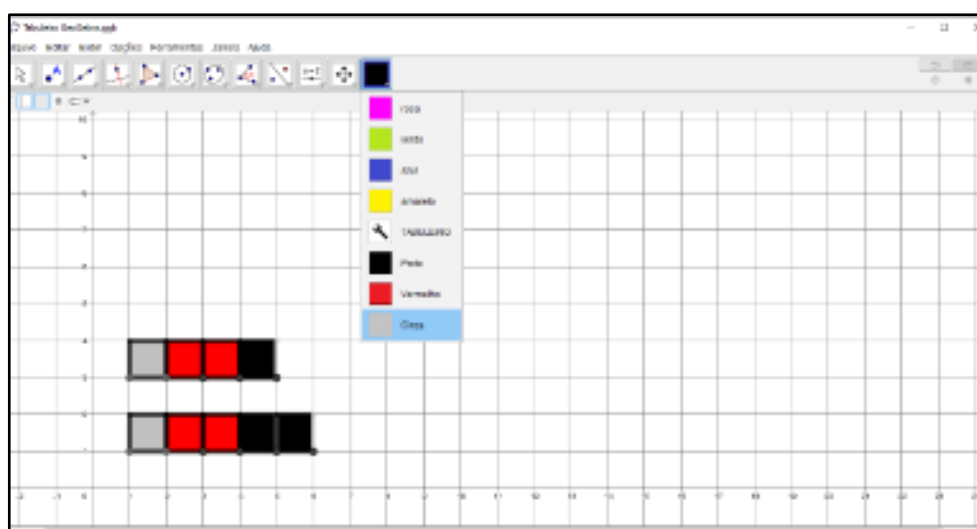
Essa ferramenta contribuiu de forma significativa nas fases da TSD durante a experimentação, o que era esperado, uma vez que na concepção e análise *a priori* das situações didáticas ela foi bastante útil e eficaz, tanto do ponto de vista da facilidade quanto da acessibilidade. Será necessário apenas um laboratório de informática para a implementação dessa ferramenta. Ademais, deve-se enfatizar que também será utilizado um material concreto, feito de E.V.A., em caso de possíveis problemas de conexão ou falta de computadores.

Desse modo, com a ajuda do tabuleiro virtual e as propriedades dos números triangulares, serão construídas as regras de ladrilhamento desses números a fim de estabelecer uma relação entre as regras e as formas gerais e de recorrência. Uma vez estabelecidas essas regras, pode-se discutir formas de apresentação dessa relação em situações didáticas conforme o objetivo desse estudo.

3.9.3 Regra de ladrilhamento de números triangulares

Nesta seção será abordado o ladrilhamento de números triangulares utilizando a noção de tabuleiro e uma ferramenta desenvolvida pelo autor no software GeoGebra, cujo objetivo é explorar esses ladrilhamentos por meio de um tabuleiro virtual. Esse recurso busca facilitar a compreensão das propriedades dos números triangulares a partir da visualização, além de possibilitar a identificação de outras relações relevantes para a continuidade do estudo sobre o tema.

Figura 73 - Interface da ferramenta “Tabuleiro GeoGebra”



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Na Figura 73 apresenta-se a interface da ferramenta, chamada de Tabuleiro GeoGebra, que foi introduzido por Alves (2024) e permite a criação de tabuleiros e ladrilhos. De modo resumido, essa ferramenta é útil para compreender conceitos matemáticos como padrões, recorrência, termo geral e interpretação combinatória de sequências de números figurados.

Após descrito o Tabuleiro GeoGebra e um pouco da sua funcionalidade, descrevemos uma interpretação para números figurados triangulares. Antes, porém, consideremos a sequência simples e constante, formada só por números 1, objetivando formar uma base de raciocínio para a construção de números triangulares via tabuleiro. Essa é a sequência mais simples dos números naturais positivos, catalogada como A000012 na OEIS

Com o objetivo de apresentar um ladrilhamento que represente essa sequência, será enunciado um lema sobre preenchimento de tabuleiro $1 \times n$ com quadrados 1×1 de uma única cor e, posteriormente, um corolário:

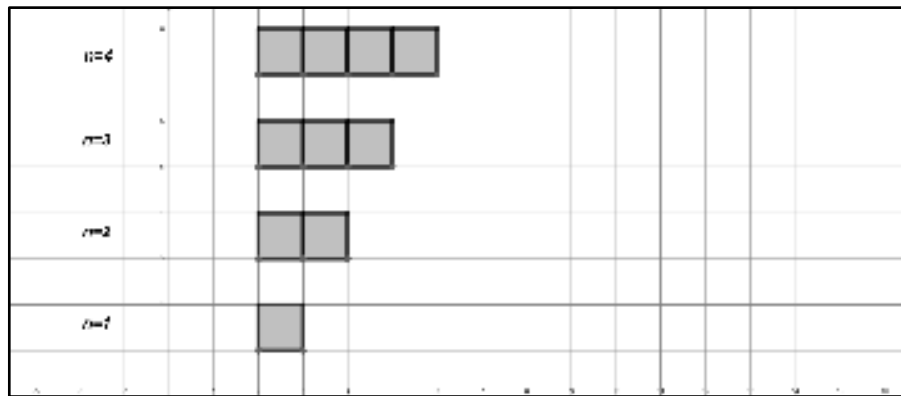
Lema 6. Dado um tabuleiro retangular de dimensões $1 \times n$, onde n é um inteiro positivo, e peças quadradas de dimensões 1×1 de uma única cor, o número de maneiras de preencher o tabuleiro completamente com as peças quadradas é sempre 1, independentemente do valor de n .

Demonstração. Para $n = 1$, o tabuleiro tem apenas uma célula. Claramente, existe apenas uma maneira de preencher essa célula com um quadrado 1×1 . Para o passo indutivo, assumimos que o teorema é verdadeiro para algum inteiro positivo k . Ou seja, existe apenas uma maneira de preencher um tabuleiro $1 \times k$ com quadrados 1×1 . Consideremos um tabuleiro $1 \times (k + 1)$. Podemos pensar nesse tabuleiro como um tabuleiro $1 \times k$, seguido por uma célula adjacente. Pela hipótese indutiva, existe apenas uma maneira de preencher o tabuleiro $1 \times k$. Para preencher o tabuleiro $1 \times (k + 1)$, devemos necessariamente colocar um quadrado 1×1 na célula restante. Portanto, existe apenas uma maneira de preencher o tabuleiro $1 \times (k + 1)$. Pelo princípio da indução matemática, o teorema é verdadeiro para todos os inteiros positivos n . ■

Corolário 7. A sequência que representa o número Z_n de maneiras de preencher um tabuleiro $1 \times n$ com quadrados 1×1 de uma única cor, para $n = 1, 2, 3, \dots$, é a sequência constante (Z_n) , ou seja $z_n = Z_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Seja z_n o número de maneiras de preencher um tabuleiro $1 \times n$ com quadrados 1×1 de uma única cor. Pelo lema 1, sabemos que para qualquer inteiro positivo n , existe apenas uma maneira de preencher o tabuleiro $1 \times n$ com quadrados 1×1 . Portanto, $z_n = 1$ para todo $n = 1, 2, 3, \dots$. Isso significa que a sequência (z_n) é igual a sequência constante $1, 1, 1, \dots$, ou seja, $z_n = Z_n$. ■

Figura 74 - Ladrilhamento da sequência de uns no *software* GeoGebra



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

A Figura 74 apresenta uma representação no software GeoGebra da sequência (Z_n) usando a noção de tabuleiro e adotando a cor cinza para o ladrilho. Usando argumentos semelhantes, descreveremos o ladrilhamento para outra sequência simples: os números lineares, que são uma classe de números figurados que representam configurações de pontos dispostos em linhas (Deza; Deza, 2012).

Diferente dos números figurados poligonais, que formam figuras fechadas (como triângulos ou quadrados), os números figurados lineares são simplesmente sequências de pontos alinhados em uma única dimensão. Dessa forma podemos definir os números lineares da seguinte maneira: como já observado, temos que uma sequência de números figurados lineares S_m^l pode ser definida como $S_r^l(n) = a + (n-1)r$, em que $S_r^l(n)$ é o n -ésimo número linear, a é o termo inicial, r é a razão entre os termos sucessivos e n é a posição do termo, com $n \in \mathbb{N}$.

Para o caso de $r = 1$, a sequência gera justamente a dos números inteiros positivos.

Lema 7. Seja $n \in \mathbb{Z}^+$ então vale a relação $S_1^l(n) = n$.

Demonstração. Deza e Deza (2012) pontuam que essa sequência é formada a partir de somas sucessivas da sequência 1,1,1, 1, ... Dessa forma, tem-se para $n = 1$: $S_1^1(1) = 1$, $S_1^1(2) = 1 + 1$, $S_1^1(3) = 3 = 1 + 1 + 1$. Supondo que a fórmula seja válida para um certo k , então $S_1^1(k) = k$. Assim, queremos provar que vale para $S_1^1(k+1)$. Pela recorrência, temos que $S_1^1(k+1) = S_1^1(k) + 1$ e, pela hipótese temos que $S_1^1(k+1) = k + 1$. ■

Consideraremos o caso dos ladrilhamentos que podem representar a sequência S_1^1 . Assim, devemos apresentar a quantidade de ladrilhos, suas respectivas dimensões e cores, bem como as regras que descrevem esse ladrilhamento.

Para estabelecer uma interpretação combinatória via ladrilhos para essa sequência, vamos considerar 2 quadrados 1×1 , um de cor Cinza ■ e outro de cor Vermelha ■ e chamaremos de conjunto CV e três regras de ladrilhamentos $\mathfrak{R}_1(L)$, $\mathfrak{R}_2(L)$ e $\mathfrak{R}_3(L)$

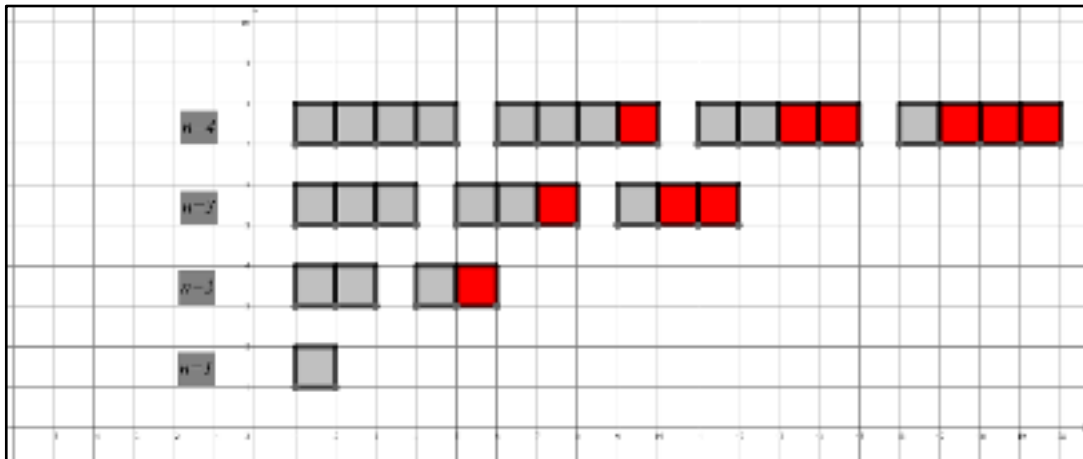
$\mathfrak{R}_1(L)$ - Todo ladrilhamento deve ser iniciado pelo ladrilho Cinza ■.

$\mathfrak{R}_2(L)$ - Em todo ladrilhamento, a ocorrência de ladrilhos deve respeitar a ordem Cinza-vermelho ■■, isto é, um ladrilhamento nunca deve ter peças vermelhas antes de peças cinzas.

$\mathfrak{R}_3(L)$ - O único ladrilho obrigatório em todo ladrilhamento é o cinza ■.

Usando as regras e peças descritas iremos analisar os casos para $n = 1, n = 2$ e $n = 3$ conforme a construção no GeoGebra a seguir:

Figura 75 - Ladrilhamento dos números lineares no software GeoGebra



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

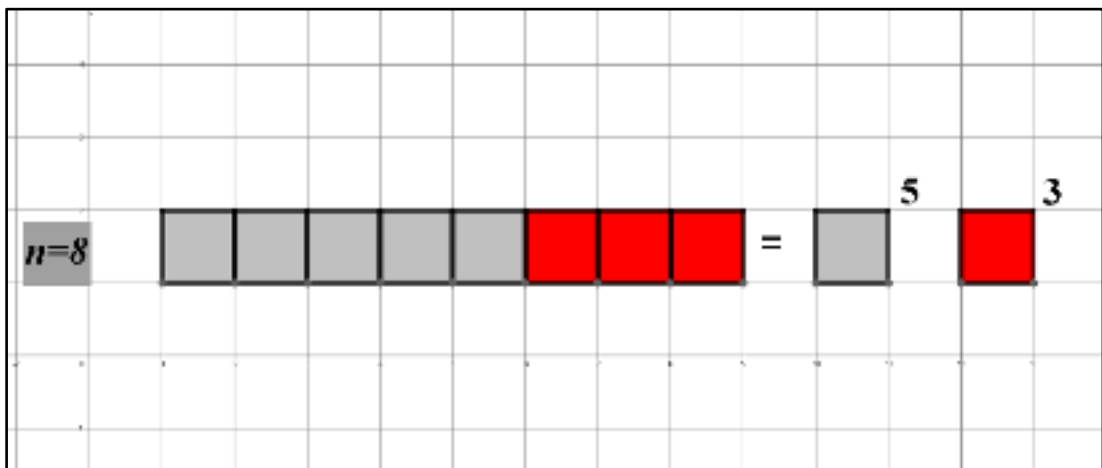
Podemos usar uma outra representação, pois os ladrilhamentos são apresentados sempre na sequência  , conforme a regra 2. Dessa maneira, pode-se apresentar uma definição que mostra um n -tabuleiro como potência de cores:

Definição 16. Dado um ladrilho de dimensões 1×1  chamamos de potência n -ésima do ladrilho a representação  que possui a propriedade:

$$\text{■}^n = \text{■} \text{■} \text{■} \text{■} \dots \text{■} \text{ (} n \text{ vezes)}.$$

Com essa definição, podemos representar um ladrilhamento qualquer usando apenas a base CV com suas respectivas potências. Observe a Figura 76:

Figura 76 - Representação do oitavo número Linear como potências de ladrilhos



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Na Figura 76 pode-se observar o exemplo de uma configuração CV para $n = 8$, que pode ser representada por apenas dois ladrilhos com suas respectivas potências. Essa representação visa facilitar o ladrilhamento para um certo n de valor muito alto. Ademais, a partir das regras $\mathfrak{R}_1(L)$ e $\mathfrak{R}_2(L)$, tem-se que qualquer configuração do tipo   tem $a + b = n$ e $a \geq 1$.

Ainda da Figura 76, podemos propor um lema que relacione os números lineares e a quantidade de ladrilhamentos no conjunto CV, de acordo com as regras estabelecidas.

Lema 8 (Ladrilhamento dos números inteiros positivos). Dado um conjunto de n ladrilhos quadrados 1×1 , e o conjunto de regras $\mathfrak{R}_1(L)$, $\mathfrak{R}_2(L)$ e $\mathfrak{R}_3(L)$, onde o primeiro ladrilho deve ser sempre cinza e os ladrilhos restantes podem ser cinzas ou vermelhos, o número total de

maneiras L_n de dispor esses ladrilhos em um n -tabuleiro, de modo que nenhum ladrilho vermelho apareça antes de um ladrilho cinza, é igual a $L_n = S_1^1 = n$.

Demonstração. Inicialmente, para o caso $n = 1$, temos, por $\mathfrak{R}_1(L)$ apenas uma possibilidade . Logo, $L_1 = S_1^1(1) = 1$. Considerando o caso $n = 2$, temos apenas duas possibilidades ( , ) e, de fato $L_2 = S_1^1(2) = 2$. Agora assumiremos, por hipótese, que o teorema é válido para um conjunto de k ladrilhos, onde k é um inteiro positivo qualquer. Ou seja, existem k maneiras de dispor k ladrilhos satisfazendo as regras. Agora, vamos considerar um conjunto de $k + 1$ ladrilhos. O primeiro ladrilho deve ser cinza. Os k ladrilhos restantes podem ser cinzas ou vermelhos, porém os vermelhos não podem preceder os cinzas. De acordo com a hipótese indutiva, existem k maneiras de dispor os k ladrilhos restantes. Para cada uma dessas k disposições, podemos adicionar o ladrilho vermelho no final do $(k + 1)$ - tabuleiro, obtendo k novas disposições de $k + 1$ ladrilhos, que satisfazem as regras. Adicionalmente, de acordo com $\mathfrak{R}_3(S_1^1)$ e com o corolário 1, temos ainda mais uma disposição formada apenas por ladrilhos cinza  $k+1$ resultando $k + 1$ disposições distintas em um $(k + 1)$ - tabuleiro. Ou seja, $L_{k+1} = S_1^1(k + 1) = k + 1$ ■

Visando obter uma relação que apresente a quantidade de ladrilhos de finais específicos, podemos perceber, pelo lema, que a quantidade de ladrilhamentos de finais vermelhos também pode ser contada de forma simples.

Corolário 8 (*Ladrilhamento dos números inteiros positivos com final vermelho*). Dado um conjunto de n ladrilhos quadrados, onde o primeiro ladrilho deve ser cinza e os ladrilhos restantes podem ser cinzas ou vermelhos, o número total $L_n(v)$ de maneiras de dispor esses ladrilhos em uma linha, de modo que nenhum ladrilho preto apareça antes de um ladrilho cinza e o último ladrilho seja necessariamente vermelho, é igual a $L_n(v) = n - 1$.

Demonstração. Se o último ladrilho deve ser vermelho, então o número de ladrilhos cinzas na disposição pode variar de 1 (apenas o primeiro ladrilho) até $n - 1$. Se tivermos 1 ladrilho cinza (o primeiro), então teremos $n - 1$ ladrilhos vermelhos; se tivermos 2 ladrilhos cinzas, então teremos $n - 2$ ladrilhos vermelhos, e assim sucessivamente, de modo que se tivermos $n - 1$ ladrilhos cinzas, então teremos 1 ladrilho vermelho (o último).

Para cada quantidade de ladrilhos cinzas, temos apenas uma maneira de ordenar os ladrilhos (devido à restrição de que nenhum vermelho precede um cinza). Portanto, o número

total de disposições possíveis é igual ao número de possibilidades para a quantidade de ladrilhos cinzas, que varia de 1 a $n - 1$, logo, o número total de disposições é $n - 1$. ■

Finalmente, para obtermos ladrilhamentos de números triangulares, recorremos ao fato de que, assim como os números inteiros são formados pela soma sucessiva de números uns, os números triangulares são formados pela soma sucessiva de números inteiros. De fato, pela definição 2, os números triangulares são obtidos a partir da fórmula explícita $S_3(n) = \frac{n(n+1)}{2}$,

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$, que por sua vez pode ser provada a partir das somas dos números inteiros positivos, ou seja $1 + 2 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Assim, seu ladrilhamento pode ser obtido usando ideias

semelhantes às usadas nos ladrilhamentos anteriores. Para o ladrilhamento relacionado a sequência dos números triangulares, inicialmente, consideremos um tabuleiro de dimensões $1 \times n$ e três peças pré-estabelecidas, todos quadrados de dimensões 1×1 nas cores cinza (C) , vermelho (V)  e preto (P) , que chamaremos aqui de conjunto CVP e, por fim, três regras específicas que chamaremos de $\mathfrak{R}_1(T)$, $\mathfrak{R}_2(T)$ e $\mathfrak{R}_3(T)$. A saber:

$\mathfrak{R}_1(T)$ – Todo ladrilhamento deve iniciar pelo ladrilho cinza.

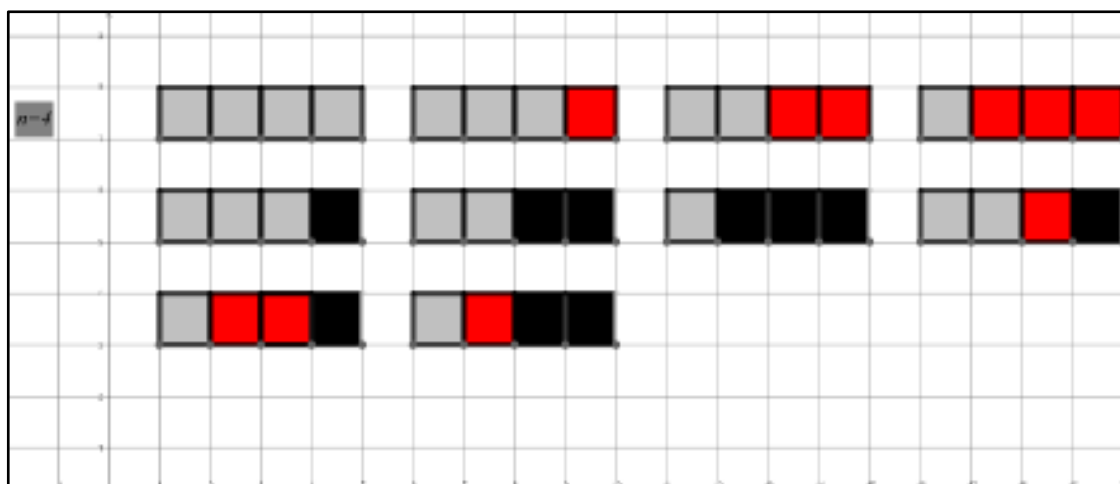
$\mathfrak{R}_2(T)$ – A posição das cores no ladrilhamento deve respeitar a sequência CVP, ou seja, um ladrilho cinza não deve ocorrer antes de um ladrilho cinza assim como um ladrilho preto não deve ser colocado antes de um vermelho.

$\mathfrak{R}_3(T)$ – O único ladrilho obrigatório em todo ladrilhamento, é o de cor cinza.

Pela regra $\mathfrak{R}_1(T)$, o ladrilhamento composto por um ladrilho deve ser apenas , ou seja, para preencher um ladrilhamento da mesma forma, correspondente a um 2-tabuleiro, devemos ter as seguintes disposições $\{\begin{smallmatrix} \text{gray} & \text{gray} \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \text{gray} & \text{red} \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \text{gray} & \text{black} \end{smallmatrix}\}$.

Usando a Figura 77 para apresentar outro caso, tem-se:

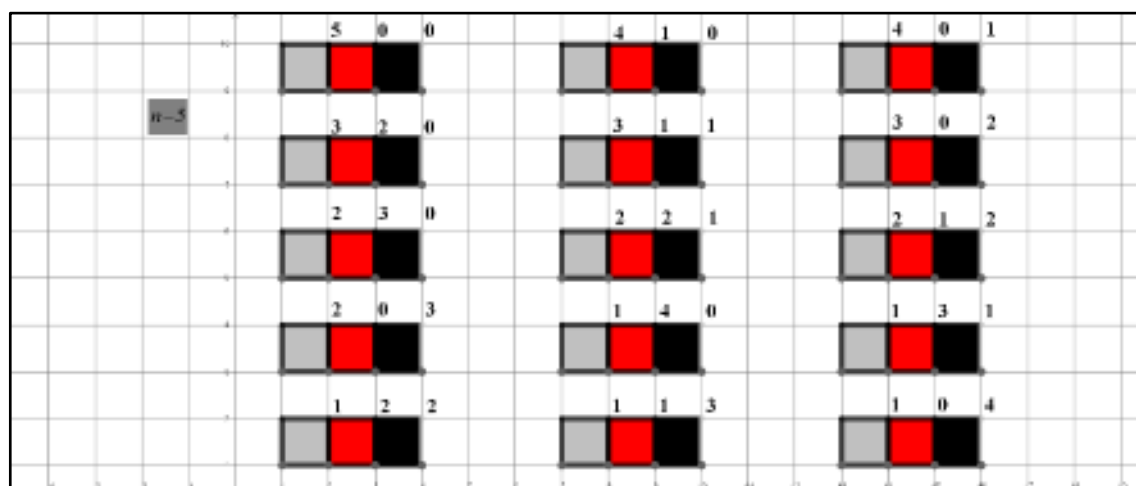
Figura 77 - Os 10 ladrilhamentos do quarto número triangular



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Observamos a partir da Figura 77 que no caso $n = 4$ temos 10 disposições distintas do conjunto CVP e, de acordo com as regras estabelecidas, também podemos aplicar a definição 7 ou seja, o conjunto CVP pode ser descrito como $\{a, b, c\}$, de modo que $a+b+c=n$ e $a \geq 1$. Desse modo, para o caso $n = 5$, temos a seguinte configuração, usando as potências de ladrilhos.

Figura 78 - Os 15 ladrilhamentos do quinto número triangular como potência de ladrilhos



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Dessa forma, podemos supor que esse conjunto de ladrilhos dispostos seguindo as regras estabelecidas formam os números triangulares. Portanto, apresentamos dois teoremas que podem comprovar essa conjectura.

Teorema 12 (Forma explícita para o conjunto CVP). Considere T_n a quantidade de ladrilhamentos possíveis usando n ladrilhos 1×1 de cores distintas (cinza, vermelho e preto) e as regras de ladrilhamento seguintes:

$\mathfrak{R}_1(T)$: O ladrilhamento deve sempre iniciar pelo ladrilho cinza.

$\mathfrak{R}_2(T)$: A ordem das cores deve ser mantida como CVP (Cinza, Vermelho, Preto), de modo que um ladrilhamento nunca tenha um ladrilho vermelho antes do cinza, nem um ladrilho preto antes do vermelho.

$\mathfrak{R}_3(T)$: O ladrilho cinza é o único obrigatório em todo ladrilhamento, então

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \geq 1.$$

Demonstração. Primeiramente usaremos as regras para definir os ladrilhamentos possíveis.

Nesse caso, usando $\mathfrak{R}_2(T)$, sabemos que um n -ladrilhamento deve ser do tipo  em

que $a+b+c=n$. Sabemos também, por $\mathfrak{R}_3(T)$, que apenas o ladrilho cinza deve estar presente

em todo ladrilhamento ou seja $1 \leq a \leq n$, e, no caso de $a=n$, $b=c=0$ com, $0 \leq b \leq n-1$ e

$0 \leq c \leq n-1$. Dessa forma, podemos dividir um conjunto de n -ladrilhamentos em subconjuntos

com a peças cinzas, ou seja, a quantidade de vezes que a peça cinza está presente nesse

ladrilhamento. Assim, vamos considerar o número de elementos de cada subconjunto que

contenha a mesma quantidade de peças cinza como C^a , e o restante do ladrilhamento deve ser

preenchido pelas duas peças restantes $V^b P^c$ ou . Considerando a soma $b+c=m$ temos,

para cada b , $c=m-b$, a quantidade de diferentes pares (b,c) que somam m é equivalente ao

número de inteiros b possíveis de 0 até m . Isso resulta em $m+1$ combinações distintas de b e

c em cada subconjunto C^i . Assim, considerando o intervalo $1 \leq a \leq n$, temos em um conjunto

dos n -ladrilhamento os seguintes subconjuntos com C^a elementos . Como

$a+b+c=n$ e $b+c=m$, então $a=n-m$. Logo, $C^a = C^{n-m}$. Dessa forma, temos $C^n = C^{n-0} = 1$

pois $m=0$ e o número de combinações possíveis é de $m+1$. Da mesma forma, $C^{n-1} = 2$,

$C^{n-2} = 3, C^{n-3} = 4$, e assim por diante, de modo que $C^1 = n$ pois $C^1 = C^{n-(n-1)}$, ou seja, $m=n-1$,

$m+1=n$. Por fim, como T_n é a quantidade de todos os n -ladrilhamentos possíveis, então pode

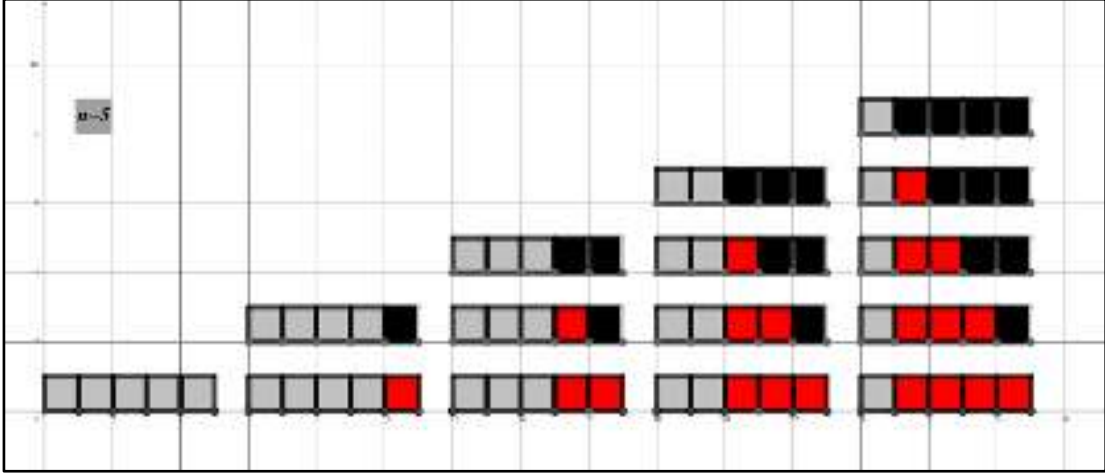
ser representado como a soma $C^n + C^{n-1} + C^{n-3} + \dots + C^1 = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Logo,

$$\text{conclui-se que } T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

■

Com base no Teorema 2, pode-se apresentar como exemplo uma configuração que descreva o ladrilhamento para $n = 5$. Observemos a Figura 79:

Figura 79 - Disposição em triângulo dos ladrilhamentos do quinto número triangular



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Na Figura 79, é possível observar que os ladrilhamentos estão organizados em colunas, as quais compartilham uma quantidade específica de ladrilhos cinzas, correspondendo a uma soma determinada $1+2+3+4+5=15$. Além disso, nota-se que em cada coluna a quantidade de ladrilhos do conjunto VP é sempre igual a $m + 1$. Por fim, a disposição completa dos ladrilhamentos sugere a formação de um triângulo.

Com base na Definição 2, obtemos a forma explícita dos números triangulares. No entanto, também apresentamos um teorema que descreve o ladrilhamento do conjunto CVP por meio da lei de recorrência, seguindo as regras previamente estabelecidas $\mathfrak{R}_1(T)$, $\mathfrak{R}_2(T)$ e $\mathfrak{R}_3(T)$.

Teorema 13 (Recorrência dos números triangulares via ladrilhos). Seja T_n a quantidade de ladrilhamentos formados a partir do conjunto CVP $\{\text{cinza}, \text{vermelho}, \text{preto}\}$ seguindo as regras $\mathfrak{R}_1(T)$, $\mathfrak{R}_2(T)$ e $\mathfrak{R}_3(T)$, necessários para preencher um tabuleiro $1 \times n$. Então, $T_n = S_3(n)$.

Demonstração. Inicialmente consideremos o caso $n=1$. Tendo em vista a regra $\mathfrak{R}_1(T)$ estabelecida, decorre que o 1-tabuleiro é formado pelo ladrilhamento $\{\text{cinza}\}$ então $T_1 = S_3(1) = 1$. Em seguida, considerando o caso $n=2$, como consequência da regra $\mathfrak{R}_1(T)$ e $\mathfrak{R}_2(T)$, determinamos o conjunto de ladrilhamento do 2-tabuleiro como $\{\text{cinza}, \text{cinza}, \text{vermelho}, \text{cinza}, \text{preto}\}$, ou seja, $T_2 = S_3(2) = 3$. Quando consideramos um ladrilhamento T_{n+1} visando cobrir um tabuleiro

$1 \times (n+1)$ temos três possibilidades: final cinza, final vermelho e final preto. Para o final preto, temos todos os ladrilhamentos de T_n pela regra $\mathfrak{R}_2(T)$, pois se temos em T_n um ladrilhamento do tipo $C^a V^b P^c$ com $a+b+c=n$, então em T_{n+1} teremos seu correspondente $C^a V^b P^c P^1$ com $a+b+c+1=n+1$. Analisando os ladrilhamentos de final vermelho em T_{n+1} , temos por $\mathfrak{R}_2(T)$ que é do tipo $C^a V^b$. Como não temos o ladrilho preto, então $c=0$ e $a+b=n+1$. Assim, pelo Lema 2, a quantidade de ladrilhamentos possíveis é igual a n . Por fim, para o caso do final cinza em T_{n+1} , temos, pelo Corolário 1, que só há uma possibilidade. Dessa forma, somando-se as quantidades nas três possibilidades de cores do final, temos $T_{n+1} = T_n + n + 1$, que é a mesma recorrência dos números triangulares e, como $T_1 = S_3(n) = 1$, então, de fato $T_n = S_3(n)$. ■

De modo semelhante ao apresentado no Teorema 2, podemos estabelecer uma configuração que descreva a recorrência dos números triangulares via ladrilho. Basta reorganizar os ladrilhamentos de modo que os termos T_n , n e 1 estejam bem definidos. Observemos o caso $T_5 = T_4 + 4 + 1$.

Figura 80 - Disposição de ladrilhamentos de números triangulares para apresentar a recorrência com cores destacadas



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

A Figura 80 apresenta a recorrência dos números triangulares. Observe que, no quadrilátero azul, estão todos os ladrilhamentos de T_4 e, quando se excluem os últimos ladrilhos na cor preta, o processo pode ser repetido, de modo que se excluirmos a última coluna do quadrilátero azul e considerarmos apenas os três primeiros ladrilhos das três colunas restantes, teremos T_3 . Se considerarmos agora apenas os dois primeiros ladrilhos das duas

primeiras colunas, teremos T_2 e, por fim, observando apenas o primeiro ladrilho da primeira coluna, teremos então T_1 .

A configuração que revela n está dentro do quadrilátero verde, contendo apenas ladrilhamentos formados por peças cinzas e vermelhas, e a última configuração, lida da esquerda para a direita e de baixo para cima, é justamente a que corresponde a 1, ou seja, o ladrilhamento inteiramente cinza.

Ainda observando as figuras apresentadas em cada teorema, aliada à sequência dos números triangulares, podemos observar algumas propriedades.

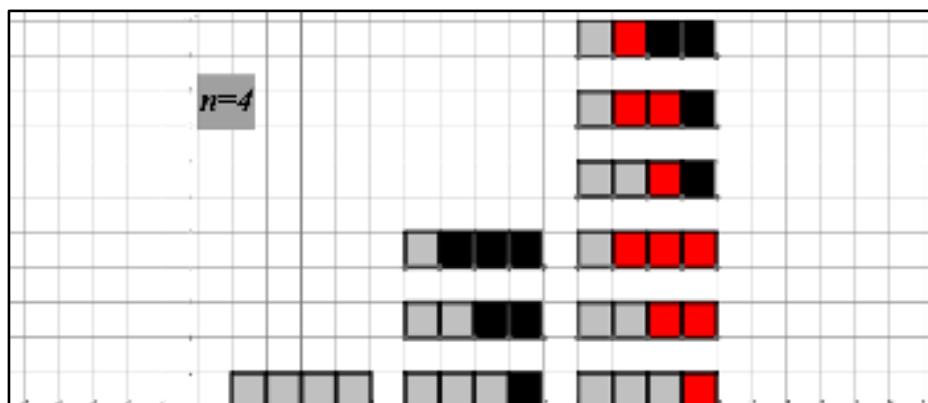
Corolário 9 (Contagem de ladrilhamentos com peças vermelhas no conjunto CVP). Seja o conjunto CVP, construído segundo as regras estabelecidas $\mathfrak{R}_1(T)$, $\mathfrak{R}_2(T)$ e $\mathfrak{R}_3(T)$, com um total de T_n possibilidades de ladrilhamento. A quantidade desses ladrilhamentos que contêm pelo menos uma peça vermelha é dada por $T_{n-1} = S_3(n-1)$ com $n > 1$.

Demonstração. Temos que $T_n = S_3(n)$ e, como os ladrilhamentos que contêm pelo menos uma peça vermelha são dados pela diferença entre todos os ladrilhamentos T_n , e o conjunto de ladrilhamentos com apenas peças cinza e preta e do ladrilhamento totalmente cinza. Usando a mesma ideia do corolário 2, o total de ladrilhamentos que contêm apenas peças cinza e preta é igual a $n-1$, e o ladrilhamento todo cinza corresponde a 1. Assim, temos que:

$$S_3(n) - (n-1+1) \Rightarrow \frac{n(n+1)-2n}{2} \Rightarrow \frac{n^2-n}{2} \Rightarrow \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = S_3(n-1) = T_{n-1} \quad \blacksquare$$

Para um exemplo, temos o caso $n=4$ em que a figura apresenta $S_3(3)=6$ ladrilhamentos com, pelo menos, uma peça vermelha.

Figura 81 - Representação da recorrência de números triangulares via ladrilhos



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Na Figura 81, temos a terceira coluna, da esquerda para a direita, apresentando os seis ladrilhamentos possíveis que contêm pelo menos um ladrilho vermelho, e nas outras colunas temos o ladrilhamento todo cinza (na primeira coluna) e os $n - 1$ ladrilhamentos cinza e preto (segunda coluna).

Dessa forma, tendo um n -tabuleiro para ser preenchido com peças do conjunto CVP e as regras $\mathfrak{R}_1(T)$, $\mathfrak{R}_2(T)$ e $\mathfrak{R}_3(T)$, já apresentamos a quantidade de ladrilhamento de uma cor apenas e duas cores. No entanto, também é possível calcular a quantidade de ladrilhamentos possíveis que possuem as três cores do conjunto. Para isso, enunciaremos mais um corolário.

Corolário 10 (Contagem de ladrilhamentos contendo todas as três cores no conjunto CVP). Seja o conjunto CVP, organizado conforme as regras estabelecidas e com um total de T_n possibilidades de ladrilhamento. A quantidade de ladrilhamentos que contêm pelo menos uma peça cinza, uma peça vermelha e uma peça preta é dada por T_{n-2} para $n > 2$.

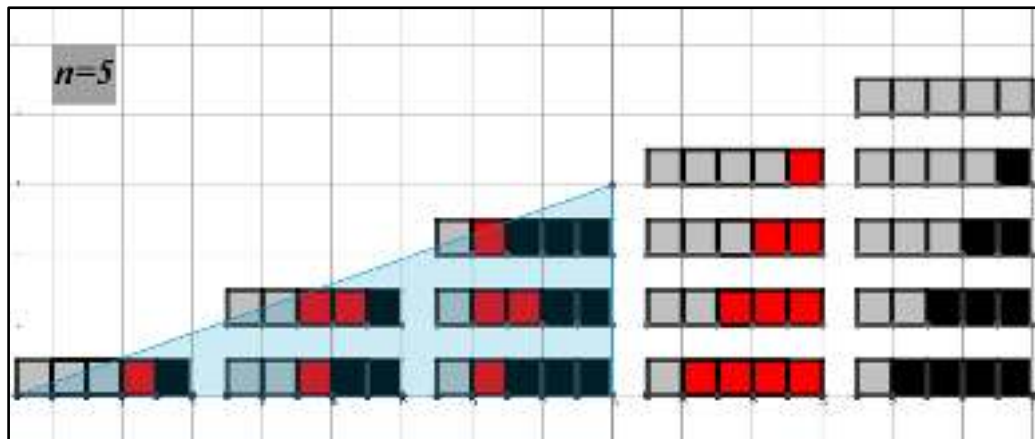
Demonstração. De uma maneira geral, podemos afirmar que o total de ladrilhamentos desejados é dado pela diferença entre o número total de ladrilhamentos T_n e a soma das quantidades de ladrilhamentos que utilizam apenas duas ou uma das cores disponíveis, ou seja, T_n ladrilhamentos totais menos $n-1$ ladrilhamentos que possuem apenas cinza e vermelho na sua composição, menos $n-1$ ladrilhamentos formados apenas por cinza e preto e menos o ladrilhamento todo cinza, dessa forma, temos:

$$\frac{n(n+1)}{2} - (n-1 + n-1 + 1) = \frac{n^2 + n - 4n + 2}{2} = \frac{n^2 - 3n + 2}{2} = \frac{(n-2)(n+1-2)}{2}$$

$$= S_3(n-2) = T_{n-2}, n > 2.$$

■

Figura 82 - Exemplo do corolário 4 no software GeoGebra

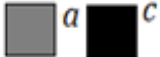


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Na Figura 82 é possível observar o exemplo para $n = 5$ e verificar que as três primeiras colunas (da esquerda para a direita) apresentam os ladrilhamentos que contêm as três cores do conjunto CVP, no total de 6 ladrilhamentos ou $S_3(5-2)=S_3(3)$. As colunas restantes são preenchidas com ladrilhamento de uma ou duas cores apenas.

Por fim, no intuito de organizar todas as ideias dessa pesquisa, apresentamos uma Tabela que expressa todas os subconjuntos de ladrilhamentos e suas respectivas quantidades.

Tabela 6 - Resumo das propriedades de números triangulares via ladrilho

Subconjunto de CVP	Representação	Condição	Contagem	Número figurado correspondente
Todos os ladrilhamentos		$a + b + c = n, a \geq 1$	T_n	$S_3(n)$
Somente uma cor		$a = 1, n \geq 1$	1	Z_n
Somente cinza e vermelho		$a + b = n, n \geq 2$	L_{n-1}	$S_1^1(n)$
Somente cinza e preto		$a + c = n, n \geq 2$	L_{n-1}	$S_1^1(n)$
Contendo pelo menos um ladrilho vermelho		$a + b + c = n, b \neq 0, n \geq 2$	T_{n-1}	$S_3(n-1)$
Ladrilhamentos de finais pretos		$a + b + c = n, c \neq 0, n \geq 2$	T_{n-1}	$S_3(n-1)$
Contendo todas as cores do conjunto CVP		$a + b + c = n, b \neq 0, c \neq 0, n \geq 3$	T_{n-2}	$S_3(n-2)$

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Os resultados apresentados neste capítulo evidenciam as relações entre os subconjuntos do conjunto CVP e suas respectivas quantidades de ladrilhamentos, proporcionando uma visão

mais estruturada das combinações possíveis. A Tabela 6 apresenta essas relações de forma resumida, o que facilita a compreensão das contagens obtidas e destaca os padrões identificados. Esses teoremas e suas representações numéricas constituem a base para as próximas generalizações e para aprofundamentos na análise dos ladrilhamentos de outros números figurados.

Na próxima seção, abordaremos o ladrilhamento de outros números poligonais, enfatizando a relação básica entre os números triangulares e os demais números figurados planos, conforme fizemos nas seções anteriores. Apresenta-se, então, um estudo inédito desses ladrilhamentos, a partir do qual podemos generalizar e formular regras com base nessa relação fundamental.

3.9.4 Ladrilhamento dos números poligonais via números triangulares

Nessa seção, analisamos como a relação básica entre números triangulares e poligonais pode ajudar na criação de regras para o ladrilhamento desses números. Iniciamos a partir do exemplo dos números quadrados, pentagonais e hexagonais, até que possamos analisar de uma forma geral, ou seja, dos números poligonais. Ademais, também podemos analisar um possível ladrilhamento para números poligonais com índices negativos a partir das relações de Deza e Deza (2012) e pela visualização apresentada por Barros (2021), que também mostra a relação desses números com os números triangulares.

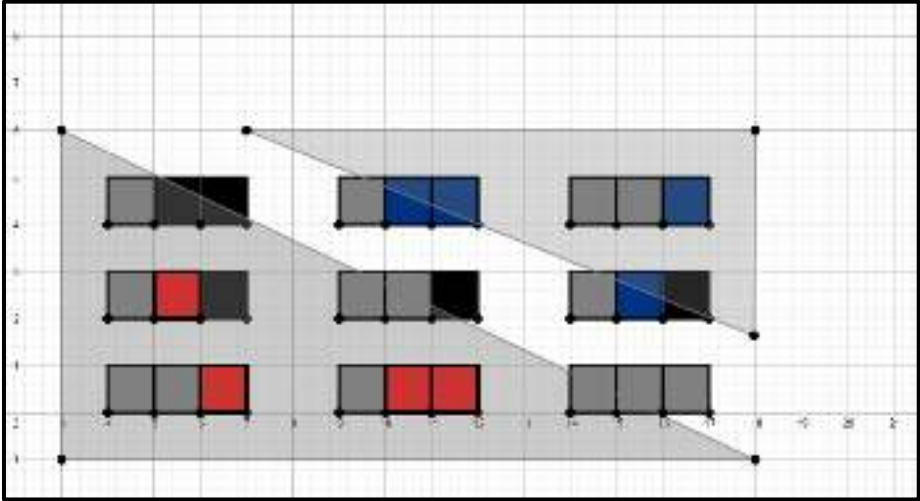
Para o ladrilhamento de números quadrados, temos sua forma geral dada por $S_4(n) = n^2$ e sua relação básica com números triangulares, estabelecida por $S_4(n) = S_3(n) + S_3(n-1), n \geq 1$ com $S_4(0) = S_3(0) = 0$. Pelas regras apresentadas para ladrilhamentos dos números triangulares, podemos estabelecer algumas observações.

A primeira observação é que, para ladrilhamento de números quadrados devemos ter dois ladrilhamentos diferentes de números triangulares, por isso vamos inserir uma cor para representar o segundo conjunto de números triangulares. Utilizaremos um ladrilho na cor azul , formando então o conjunto CAP (Cinza, Azul e Preto). Dessa forma, podemos criar um segundo ladrilhamento de números triangulares em que a cor azul será substituída da cor vermelha do ladrilhamento padrão dos números triangulares.

A segunda observação é que deve ser retirado um valor referente a n e esse valor é justamente todos os ladrilhamentos do tipo CP, pois estes estão presentes nos dois ladrilhamentos, seja CVP ou CAP, e correspondem a n ladrilhamentos, como visto na Tabela 6. Dessa forma, basta que um ladrilho azul seja inserido e uma nova regra criada em que

ladrilhos vermelhos e azuis não ocorram no mesmo ladrilhamento. Podemos visualizar essas observações a partir da Figura 83:

Figura 83 - Relação entre números quadrados e triangulares via tabuleiro



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Na Figura 83 é possível observar o terceiro número quadrado formado por 9 ladrilhamentos organizados em forma de número quadrado. Destaca-se, ainda na figura, dois triângulos, um cobrindo todos os ladrilhamentos dos números triangulares $S_3(n)$ e outro que representa $S_3(n-1)$. Dessa forma, pode-se estabelecer as peças do ladrilhamento como Cinza, Vermelho, Azul e Preto e as regras de ladrilhamentos de números quadrados pela Tabela 7:

Tabela 7 - Regra de ladrilhamento dos números quadrados

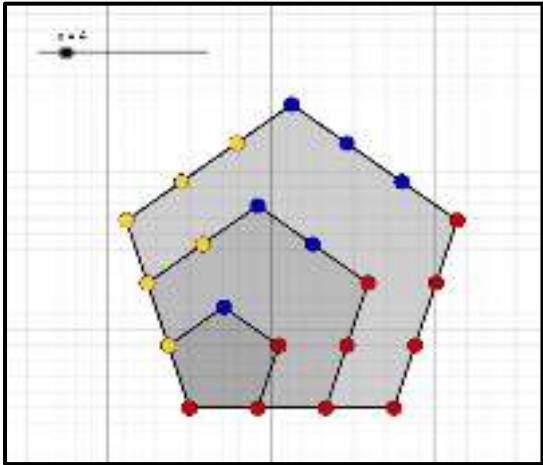
Regra de Ladrilhamento dos números figurados quadrados	
$\Re_1 S_4(n)$	O ladrilho cinza sempre ocupa a primeira posição no ladrilhamento
$\Re_2 S_4(n)$	Os ladrilhos azuis e vermelhos nunca ocorrem no mesmo ladrilhamento
$\Re_3 S_4(n)$	A ordem das cores deve ser mantida como CVP (Cinza, Vermelho, Preto), ou CAP (Cinza, Azul e Preto) de modo que um ladrilhamento nunca tenha um ladrilho vermelho (ou azul) antes do cinza, nem um ladrilho preto antes do vermelho (ou azul).
$\Re_4 S_4(n)$	O ladrilho cinza é o único presente em todos os ladrilhamentos.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Para os ladrilhamentos dos números pentagonais $S_5(n)$, devemos retornar a relação básica entre triangulares e poligonais, dada por: $S_5(n) = S_3(n) + 2S_3(n-1), n \geq 1$, com

$S_5(0) = S_3(0) = 0$, e inserir duas cores em relação aos números triangulares. Utilizaremos um ladrilho na cor azul dos números quadrados e outro na cor amarela , formando três conjuntos de números triangulares, em que o primeiro é CVP e os outros são CAP dos números quadrados e um outro CA'P (Cinza, Amarelo e Preto), de acordo com a configuração dos números poligonais que relacionam números triangulares na sua composição.

Figura 84 - Número pentagonal



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Na configuração clássica apresentada na Figura 84, temos os 22 pontos referentes ao quarto número poligonal pentagonal. Essa configuração está destacada em cores. Isso quer dizer que teremos de conseguir 22 configurações diferentes para um 4-tabuleiro de números pentagonais usando a ideia semelhante à realizada nos números quadrados, ou seja, um conjunto de regras, que são destacadas na Tabela 8.

Tabela 8 - Regra de ladrilhamento dos números pentagonais

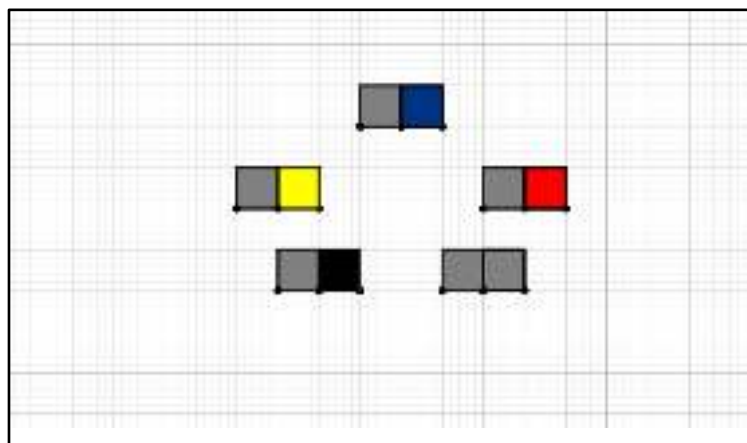
Regra de Ladrilhamento dos números figurados pentagonais	
$\mathfrak{R}_1 S_5(n)$	O ladrilho cinza sempre ocupa a primeira posição no ladrilhamento
$\mathfrak{R}_2 S_5(n)$	Os ladrilhos azuis, amarelos e vermelhos nunca ocorrem no mesmo ladrilhamento
$\mathfrak{R}_3 S_5(n)$	A ordem das cores deve ser mantida como CVP (Cinza, Vermelho, Preto), CAP (Cinza, Azul e Preto) e CA'P (Cinza, Amarelo e Preto), de modo que um ladrilhamento nunca tenha um ladrilho vermelho (amarelo ou azul) antes do cinza, nem um ladrilho preto antes do vermelho (ou azul).
$\mathfrak{R}_4 S_5(n)$	O ladrilho cinza é o único presente em todos os ladrilhamentos.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Dessa maneira, o conjunto de 22 ladrilhamentos do quarto número pentagonal será apresentado nas próximas figuras, destacando a construção pentagonal e o crescimento preenchendo os números anteriores presentes na construção com ladrilhos pretos usando

Para o 1-ladrilhamento, como nos outros casos e para cumprir a regra, temos apenas o ladrilho cinza, ou seja $S_5(1) = 1$ representado por . Para $S_5(2) = 5$ temos:

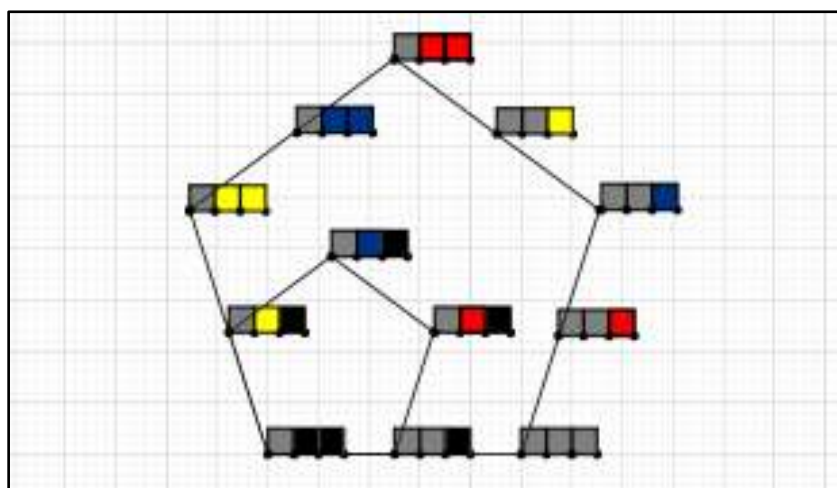
Figura 85 - Organização do ladrilhamento do segundo número pentagonal em pentágono



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Aqui temos a segunda camada de pontos em torno do primeiro ladrilhamento composto pela peça cinza. Perceba que o pentágono crescerá a partir do ladrilhamento CP, que no 1-ladrilhamento era apenas C. A Figura 86 é composta por essa mesma configuração acompanhada do ladrilho P para ter o tamanho 3 e outra camada com as outras configurações possíveis.

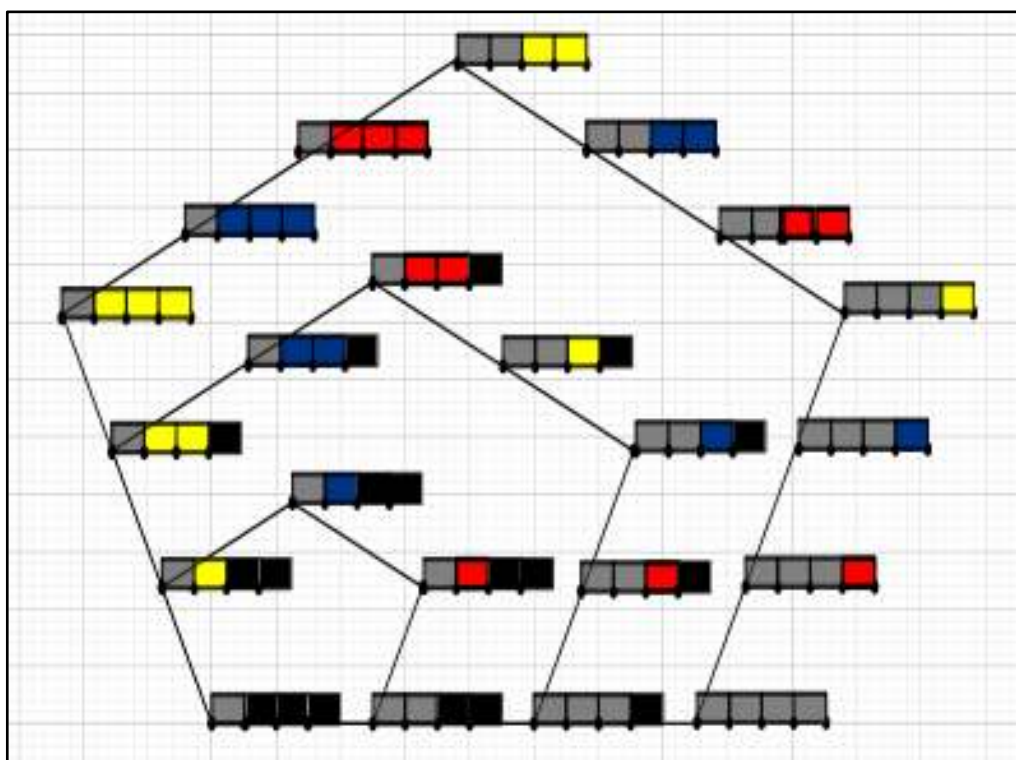
Figura 86 - Terceiro número pentagonal via ladrilhos



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Na Figura 87 pode-se observar que a primeira camada (o menor pentágono) é composta por todos os ladrilhamentos com final preto que correspondem a quantidade de ladrilhamentos anteriores completados com preto para igualar o tamanho 3 do tabuleiro atual. Utilizando a mesma regra, pode-se determinar, de forma indutiva, a próxima camada de tabuleiros.

Figura 87 - Quarto número pentagonal via ladrilhos



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Para finalizar a construção, temos a última camada do pentágono composta por todos os outros ladrilhamentos que não possuem P na sua composição. Percebemos que o primeiro pentágono possui 2 e 3 ladrilhos pretos em cada ladrilhamento; já na segunda camada, apenas 1 ladrilho P; e, na última camada, nenhum ladrilhamento possui P em sua composição. Esses conjuntos somados separadamente compõem a soma sucessiva dos termos 1, 4, 7 e 10 necessários para formar 22. Ou seja, 1 ladrilhamento com 3 peças pretas, 4 com 2 peças pretas, 7 com apenas 1 peça preta e 10 sem nenhum ladrilho preto na sua composição, formando a soma dos *gnômons* $1+4+7+10=22$. Dessa forma, podemos enunciar um corolário a partir do Teorema 1, Teorema 2 e Corolário 3 e das observações feitas nos ladrilhamento dos números quadrados.

Corolário 11 (*Ladrilhamento dos Números Poligonais via Números Triangulares*). Seja CVP o conjunto de cores dos ladrilhamentos dos números triangulares com suas respectivas regras, um segundo conjunto de cores chamadas de Intermediárias (I) e as regras a seguir:

$\mathfrak{R}_1 S_m$ - Iniciar o ladrilhamento sempre pelo ladrilho Cinza.

$\mathfrak{R}_2 S_m$ - Ladrilhos intermediários nunca ocorrem entre si ou com a peça Vermelha no mesmo ladrilhamento.

$\mathfrak{R}_3 S_m$ - A ordem das cores deve ser mantida em CV(I)P de modo que a peça vermelha ou intermediárias nunca estejam antes de uma Cinza e a peça Preta nunca esteja antes de uma Intermediária ou Vermelha no ladrilhamento.

$\mathfrak{R}_4 S_m$ - A peça Cinza é a única obrigatória em todo ladrilhamento.

Seja $m-3$ a quantidade de peças intermediárias inseridas no conjunto de cores com $m > 3$, e m sendo a quantidade de lados do polígono cujo número poligonal referente deve ser ladrilhado. Então, a quantidade de ladrilhamentos possíveis para um n – tabuleiro é:

$$S_m(n) = S_3(n) + (m-3)S_3(n-1)$$

Demonstração. Pelos Teoremas 1 e 2, temos que todas as combinações de cores que usam apenas CVP na sua composição totalizam $S_3(n)$ possibilidades em n -tabuleiro, e pelo corolário 3, temos que todas as combinações que utilizam pelo menos uma peça Vermelha equivalem a $S_3(n-1)$. Se cada ladrilhamento que possui pelo menos uma peça Vermelha tiver essa peça substituída pelas peças Intermediárias, respeitando $\mathfrak{R}_2 S_m$, então cada grupo que possui pelo menos 1 peça Intermediária em sua composição também totaliza $S_3(n-1)$ ladrilhamentos em um n -tabuleiro. Dessa forma, para os números quadrados com $m=4$ inserimos uma cor, ou seja, $4-3=1$; para os números pentagonais com $m=5$ inserimos duas cores, ou seja, $m-3=2$ de maneira que para um certo polígono m -gonal teremos $m-3$ cores inseridas. Ou seja, o n -ésimo número polígono m -gonal é composto pela soma do conjunto da quantidade de ladrilhamentos do conjunto CVP, que é $S_3(n)$ e os $m-3$ conjuntos formados pelas cores inseridas, que equivalem a $S_3(n-1)$ ladrilhamentos cada, de modo que:

$$S_m(n) = S_3(n) + S_3(n-1)$$

■

Dessa maneira, podemos padronizar uma lista de cores a serem inseridas nos números poligonais conforme aumentamos o número de lados. A Tabela 9 apresenta as cores criadas no GeoGebra para cada número poligonal até $m=10$:

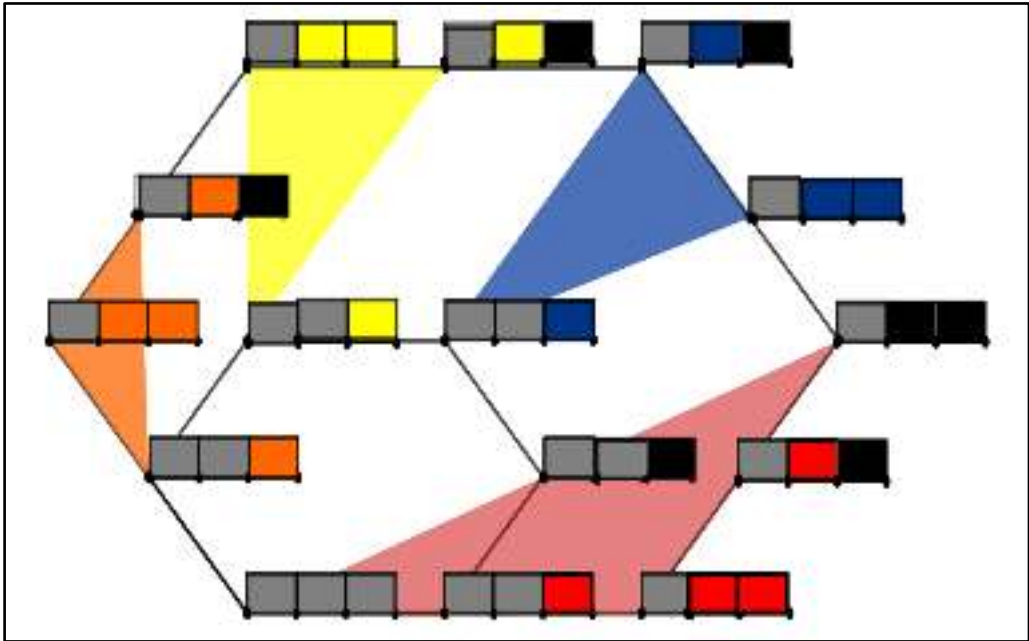
Tabela 9 - Peças de ladrilhos dos números poligonais

Número poligonal	Conjunto de cores/ Intermediárias	Cor intermediária adicionada
Triangulares		
Quadrados	 / 	Azul
Pentagonais	 / 	Amarelo
Hexagonais	 / 	Laranja
Heptagonais	 / 	Roxo
Octogonais	 / 	Verde
Eneagonais	 / 	Vinho
Decagonais	 / 	Rosa

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Com essa tabela, é possível construir qualquer número poligonal com até 10 lados usando esse conjunto de cores e as regras pré-estabelecidas. Apresentaremos um exemplo do terceiro número hexagonal usando a tabela de cores e a relação com os números triangulares dada por $S_6(3) = S_3(3) + 3S_3(2)$, $S_6(3) = 6 + 3 \cdot 3 = 15$.

Figura 88 - Terceiro número hexagonal via ladrilhos



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Na Figura 88 temos dois hexágonos que formam o terceiro número hexagonal, já que o primeiro é apenas o ponto. Esses polígonos foram separados em triângulos e, em cada um desses triângulos, tem-se a construção dos ladrilhos com uma cor intermediária diferente. No triângulo maior, construímos um terceiro número triangular usando o conjunto CVP. Com esse exemplo encerramos a classificação dos números poligonais via ladrilhos, e mais adiante usamos o GeoGebra para encontrar possíveis propriedades sobre essa família de sequências com essa nova configuração.

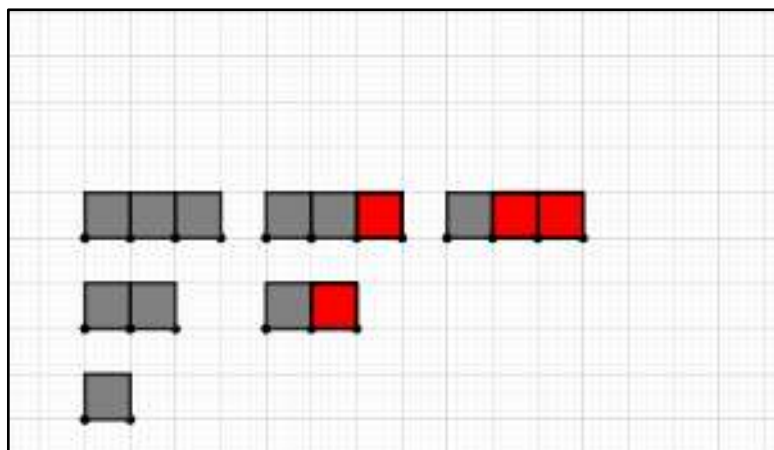
Finalizada essa etapa, é possível fazer uma analogia para os números figurados tridimensionais, mais especificamente os números piramidais. Na próxima seção construiremos números figurados tetraédricos a partir de ladrilhamentos e possíveis relações com os números piramidais de uma forma geral.

3.9.5 Ladrilhamento dos números piramidais

Observando as construções dos números triangulares e de seus análogos, já discutimos amplamente neste trabalho que a sequência formada pelos números 1, pelos números lineares e pelos números triangulares pertence a uma mesma classe de figuras numéricas conhecidas como números simplexos, e esses já tiveram suas formas ladrilhadas e suas regras construídas nas seções anteriores.

Seguindo essa lógica de generalização, o próximo passo natural na classificação dos números figurados é o estudo dos simplexos tridimensionais, conhecidos como números tetraédricos. Esses números podem ser interpretados como a soma acumulada dos números triangulares, que por sua vez pode ter seu ladrilhamento construído a partir das observações feitas com números lineares, que antes já foram construídos a partir da sequência dos números 1. De fato, lembrando como podemos construir o ladrilhamento de números triangulares a partir de números lineares e observando os passos nas próximas ilustrações, temos essa relação explicada passo a passo para apresentar como podemos construir o terceiro número triangular a partir dos números lineares. Primeiramente, faremos a construção dos três primeiros números lineares.

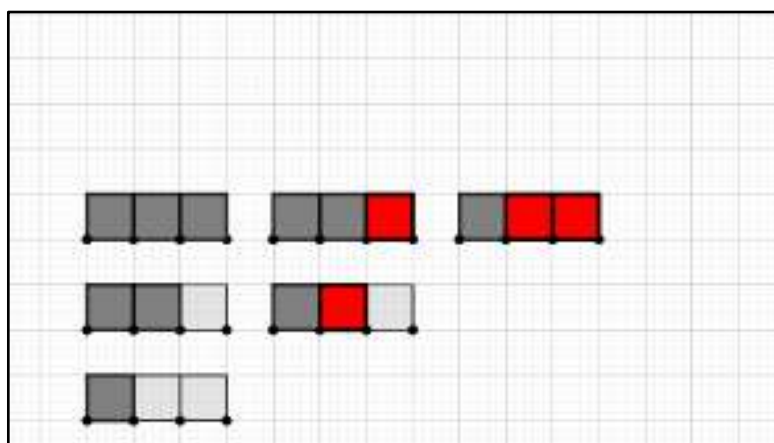
Figura 89 - Três primeiros números lineares



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Aqui construímos os três primeiros números lineares (1,2,3). Agora formaremos 3 grupos com esses números para obtermos a soma $1+2+3=6$, que representa $S_3(3)$, lembrando que esses ladrilhamentos agora devem ter 3 ladrilhos cada; então, é preciso completar aqueles que ainda não possuem a quantidade desejada.

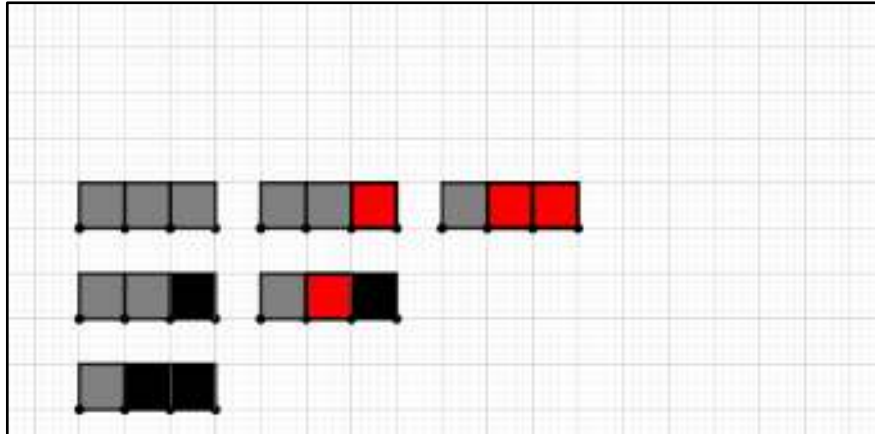
Figura 90 - Construção dos números triangulares a partir dos lineares



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

A partir daqui, pode-se perceber que, ao completar os ladrilhos vazios, teremos 6 ladrilhamentos que seguem as primeiras regras dos números lineares, bastando assim inserir uma nova cor que cumprirá a mesma regra de não ocorrer antes das peças Cinza e Vermelho. Assim, inserimos a peça preta e teremos, então, o terceiro número triangular.

Figura 91 - Números triangulares a partir dos lineares

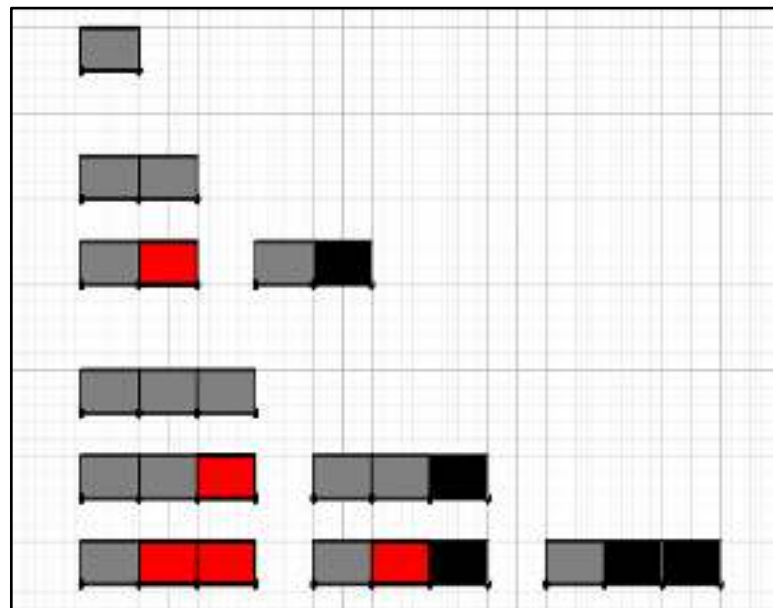


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Com esse conjunto de imagens podemos justificar a construção de números triangulares a partir dos seus *gnômons*, os números lineares. Da mesma forma, apresentaremos uma possível construção de um número tetraédrico a partir de números triangulares.

Os números tetraédricos são a sequência $S_3^3(n) = \sum_{i=1}^n S_3(i)$ ou seja, seus *gnômons* são os números triangulares. Assim, para construir $S_3^3(3)$, temos $S_3^3(3) = S_3(1) + S_3(2) + S_3(3)$, $S_3^3(n) = 10$. Na Figura 92 destacamos os três primeiros números triangulares empilhados para obtermos uma pirâmide com eles.

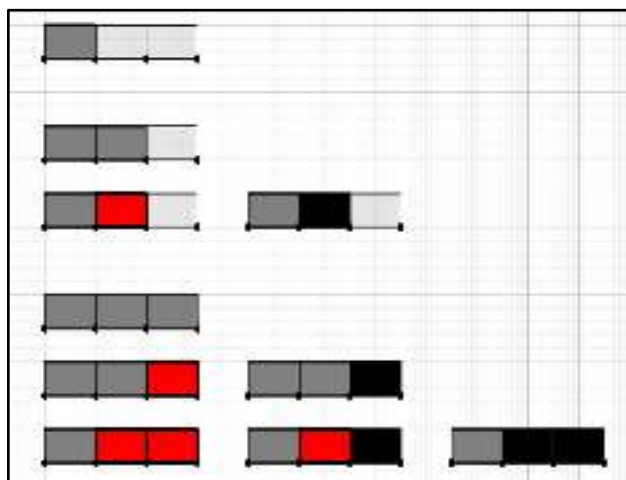
Figura 92 - Primeira etapa da construção dos números piramidais via ladrilhos



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Do exemplo anterior, temos que adicionar células até que todas formem o 3-tabuleiro, necessários para construir $S_3^3(3)$

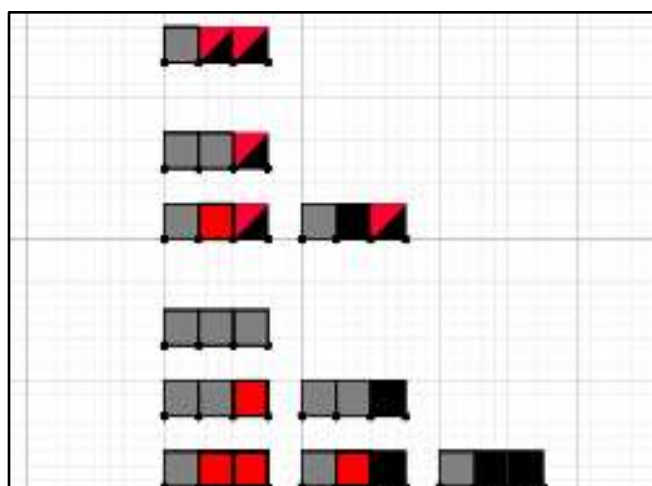
Figura 93 - Segunda etapa da construção dos números piramidais



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Agora vamos inserir uma nova cor e usar a regra dos números triangulares que trata da hierarquia de cores para determinar algumas regras que sirvam para o número tetraédrico em questão. Nesse sentido, devido ao fato de usarmos muitas cores nos números poligonais, definiremos um tipo de ladrilho que possa expressar a que ladrilhamento pertence um número figurado tridimensional. Para isso, vamos inserir um ladrilho com duas cores – preto e vermelho – e chamaremos esse ladrilho pelo conjunto de letras VP sublinhado, para que não seja confundido com as letras VP dos ladrilhos Vermelho e Preto separadamente.

Figura 94 - Terceira etapa da construção dos números piramidais



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Assim, podemos estabelecer que o ladrilhamento da figura pode classificado em quatro tipos de ladrilhos, são eles: Cinza (C), Vermelho (V), Preto (P) e Vermelho-preto (VP), seguindo as regras: 1) iniciar sempre pelo ladrilho Cinza, 2) usar a ordem de construção CVPCP e 3) o único ladrilho obrigatório é o Cinza (C).

Teorema 14 (*Ladrilhamento dos números tetraédricos*). Dado um conjunto de quatro cores ordenadas definidas como Cinza (C), Vermelho (V), Preto (P) e vermelho-preto (VP), usadas de modo a preencher um tabuleiro $1 \times n$ e o conjunto de regras:

$\mathfrak{R}_1 S_3^3(n)$ - Iniciar sempre pelo ladrilho C

$\mathfrak{R}_2 S_3^3(n)$ - A ordem de construção é $C < V < P < VP$ não podendo ocorrer nenhuma cor fora da ordem estabelecida.

$\mathfrak{R}_3 S_3^3(n)$ - A única peça existente em todo ladrilhamento é a C

Então, a quantidade de ladrilhamentos possíveis para esse conjunto de cores e as regras estabelecidas é:

$$S_3^3(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Demonstração. Pelo teorema 1, temos que o conjunto CVP possui $S_3(n)$ possibilidades para preencher um tabuleiro de tamanho $1 \times n$. Dessa maneira, vamos imaginar um conjunto com os todos os ladrilhamento dos números triangulares de 1 a n ou seja

$$T^3 = \{S_3(1), S_3(2), S_3(3), \dots, S_3(n)\}$$

Esse conjunto com todos os ladrilhamento possuem tamanhos diferentes dependendo do número triangular em questão. Agora completamos todos os ladrilhamentos desse conjunto até que todos eles tenham tamanho n e iremos preencher todas as células vazias com o ladrilho VP. Desse modo, temos para $S_3(1)$ que possuía apenas uma célula agora com $n-1$ ladrilhos (VP), ou seja C(VP) (VP) (VP) (VP)... (VP); já para $S_3(2)=3$, temos $n-2$ células (VP) acrescentadas em 3 ladrilhamentos inicialmente de tamanho 2. O conjunto desses três ladrilhamentos é dado por $\{CC(VP)(VP)\dots(VP), CV(VP)(VP)\dots(VP), CP(VP)(VP)\dots(VP)\}$. Dessa forma, usando o mesmo procedimento para todos os elementos de T^3 teremos as três regras obedecidas, pois todos os números triangulares já satisfazem a regra CVP e os ladrilhos restantes usados para completar os tamanhos dos tabuleiros iniciais, serão preenchidos com (VP) satisfazendo $\mathfrak{R}_2 S_3^3(n)$.

Como todos os ladrilhamentos foram preenchidos apenas no final e eles partem dos números triangulares, então $\mathfrak{R}_1 S_3^3(n)$ e $\mathfrak{R}_3 S_3^3(n)$ também já estão valendo. Assim, se estabelecermos a soma de todos os elementos do conjunto T^3 temos todos os ladrilhamentos possíveis com as peças e regras dadas, ou seja

$$S_3(1) + S_3(2) + \cdots + S_3(n) = \sum_{i=1}^n S_3(i) = S_3^3(n)$$

■

Ao analisarmos os ladrilhamentos das sequências dos números simplexos até $k = 3$, isto é, números tetraédricos, percebemos que esses números possuem uma regularidade na regra tal qual as outras representações de simplexos apresentadas até aqui. No caso da representação via tabuleiros, as regras de iniciar com ladrilho Cinza e manter a hierarquia de cores funciona nos quatro casos vistos até agora, nesse caso, podemos estabelecer uma regra geral para os simplexos. Essas observações serão relatadas na próxima seção.

3.9.6 Ladrilhamento dos números simplexos

Nesta seção organizamos de forma detalhada a regra de ladrilhamento para os números simplexos k -dimensionais, observando as regras estabelecidas quanto às cores e suas hierarquias. Trataremos de um modelo combinatório que conduz à fórmula das combinações com repetição, uma fórmula conhecida presente em muitos livros de análise combinatória e probabilidade e que possui uma similaridade com os ladrilhamentos propostos.

Consideremos um tabuleiro de dimensões $1 \times n$ e dispormos de $k + 1$ cores distintas para o seu preenchimento. Seguindo agora regras similares usadas para os números triangulares e números tetraédricos, ou seja, iniciando todo ladrilhamento pela cor cinza, seguida por vermelho e preto. Como estamos falando de um número $k + 1$ de cores, chamaremos essas cores de $c_1, c_2, \dots, c_{k+1}$. Essas cores devem ser preenchidas no tabuleiro de tal modo que as peças de cores c_i devem ocorrer sempre antes de peças c_{i+1} , mantendo uma hierarquia nas cores dispostas no n -tabuleiro.

Agora, vamos classificar como t_i a quantidade de casas preenchidas com a cor c_i de modo que $t_i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, para $i \geq 2$, pois no caso de t_1 , já ocupa a primeira casa com uma das suas peças. Como o tabuleiro possui n células, então o número de combinações possíveis para o seu preenchimento é dado pela equação:

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_{k+1} = n - 1$$

Essa equação, de acordo com livros de análise combinatória como Brualdi (2010), é obtida a partir da fórmula de combinação com repetição, ou combinações de multiconjuntos. Organizando os dados de acordo com as informações dadas, temos a fórmula:

$$\binom{(n-1)+(k+1)-1}{k+1-1}$$

Vejam os que essa ideia vale para os números triangulares. Vamos, por exemplo, analisar nessa fórmula, o caso $S_3(5) = 15$. Como estamos falando de números figurados planos, então $k = 2$, logo, esse ladrilhamento possui 3 cores que já são conhecidas pelo conjunto CVP. Como pretendemos encontrar a quantidade de ladrilhamentos do quinto número triangular, então temos $\binom{(5-1)+(2+1)-1}{2+1-1} = \binom{6}{2}$, ou ainda, $\frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$. Diante desse exemplo, apresentaremos o teorema de Brualdi (2010) sobre a combinação com repetição e relacionaremos posteriormente com o ladrilhamento dos números simplexos.

Teorema 15 (Combinação com repetição). Seja S um multiconjunto com objetos de k tipos, cada um com número infinito de repetições. Então, o número de n -combinações de S é igual a (Brualdi, 2010):

$$\binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

Demonstração. Sejam os k tipos de objetos de S $a_1, a_2, \dots, a_k$ de forma que

$$S = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_k\}$$

Qualquer n -combinação de S é da forma $\{x_1 a_1, x_2 a_2, \dots, x_k a_k\}$, onde $x_1, x_2, \dots, x_k$ são inteiros não negativos com $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$. Por outro lado, toda sequência $x_1, x_2, \dots, x_k$ de inteiros não negativos com $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ corresponde a uma n -combinação de S . Assim, o número de n -combinações de S é igual ao número de soluções da equação:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

Cada solução inteira não negativa dessa equação corresponde exatamente a uma r -combinação de S . Portanto, contar as r -combinações de S é equivalente a contar o número de soluções não negativas da equação acima.

Dessa maneira, devemos imaginar que existem n elementos divididos em k blocos dessa maneira suas divisórias são $k-1$. Assim, o total de símbolos da linha é $n+k-1$. Cada arranjo

distinto desses símbolos define uma distribuição diferente das repetições e, portanto, uma combinação diferente.

Dessa forma, o número de maneiras de escolher as posições das $k-1$ divisórias no $n+k-1$ posições é dado pelo coeficiente binomial

$$\binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

Ou ainda o número de combinações de n elementos de k objetos distintos, cada um disponível em quantidade ilimitada, é igual a

$$\binom{k+n-1}{n}$$

■

Se tomarmos essas divisórias como os subgrupos de cores distintas de $k+1$ cores, temos então k divisórias de cores; e como a primeira posição ocupada pela cor Cinza, temos apenas $n-1$ elementos para ocupar usando a regra. Então, para números simplexos, o ladrilhamento segue a fórmula:

$$\binom{n-1+k}{k}$$

Dessa maneira, finalizamos a regras de ladrilhamentos dos simplexos. No total, temos regras gerais para números poligonais, piramidais e simplexos. Muitas outras regras podem ser obtidas a partir da relação dos simplexos com outras famílias de sequências. Diante disso, agora podemos explorar propriedades de números figurados poligonais, piramidais e outros tipos de modo com uso do GeoGebra, trazendo a relevância do uso do *software* na compreensão e visualização desse tipo de representação.

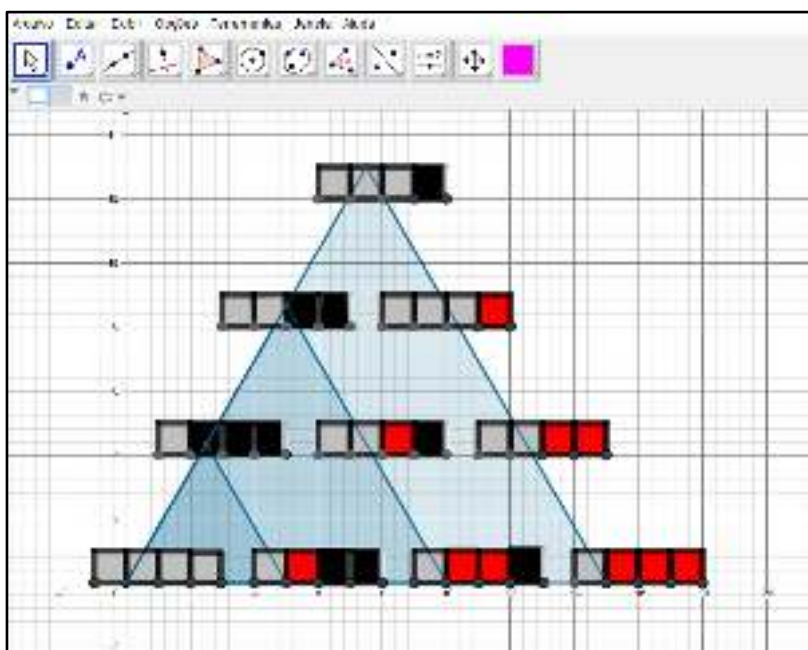
3.9.7 Propriedades de ladrilhos dos números figurados a partir do software GeoGebra

Nessa seção apresentamos algumas construções de ladrilhamentos usando a configuração básica de números figurados e a relação entre números simplexos e seus outros números figurados em uma dada dimensão. O objetivo é extrair algumas propriedades e possíveis situações didáticas que possam unir a representação via ladrilhos e o *software* GeoGebra.

Na Figura 95, por exemplo, apresentamos um número triangular substituindo seu padrão discreto responsável pela visualização do triângulo por ladrilhos. Dessa forma, podemos

redistribuir os ladrilhos e observar padrões que podem ser traduzidos em regras, propriedades ou relações.

Figura 95 - Configuração via ladrilhos de números triangulares



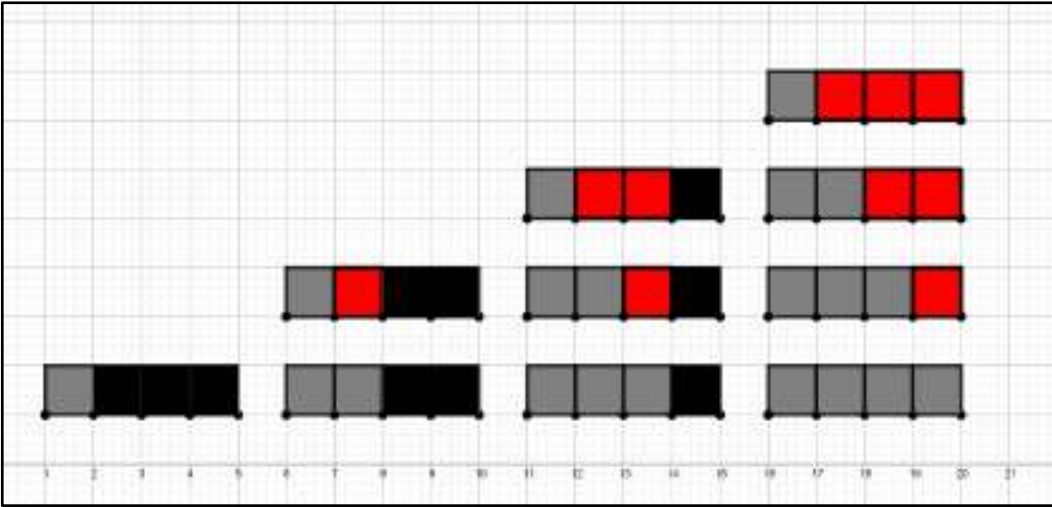
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Observe que na Figura 95 temos a distribuição dos 10 ladrilhamentos do quarto número triangular. Essa distribuição é aleatória, indicada apenas para exemplificar como será utilizada a visualização de ladrilhamentos de números figurados nesta seção.

No entanto, podemos encontrar algumas relações utilizando apenas a redistribuição de ladrilhos, como nos dois casos básicos de forma geral e lei de recorrência. Uma redistribuição de números triangulares pode ser feita de três maneiras.

Na primeira, temos a soma de números naturais sucessivos, ou seja, $S_3(4) = 1 + 2 + 3 + 4$. Aqui a configuração sugere que devemos somar os 4 primeiros ladrilhamentos dos números naturais completando com ladrilhos pretos até que se tenha um 4-tabueiro em todos os casos. A Figura 96 representa essa relação.

Figura 96 - Recorrência dos números triangulares via ladrilhos

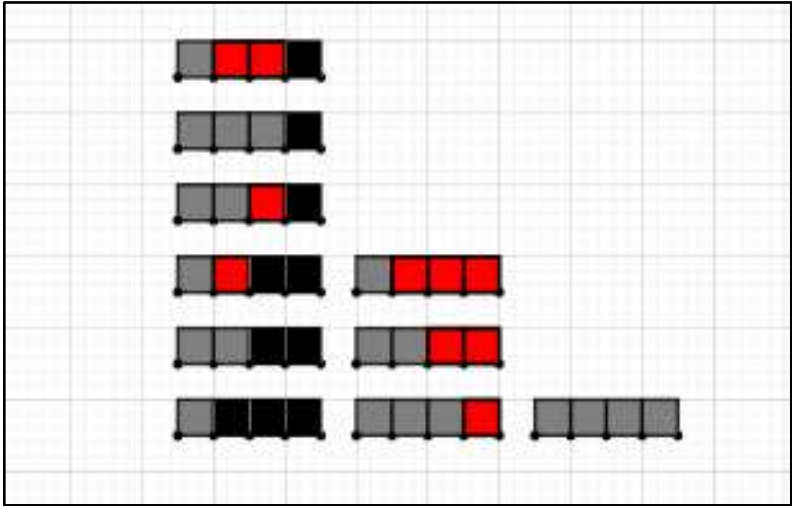


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Aqui podemos observar que seguem uma sequência decrescente de ocorrência de ladrilhos pretos: cada ladrilho preto significa uma representação do ladrilhamento anterior, e a soma $1+2+3+4$ está na quantidade de ladrilhos em cada coluna, que são preenchidos apenas pelo conjunto CV. Dessa forma, essa disposição representa as somas parciais dos números naturais que formam $S_3(4)$.

Na Figura 97 temos a lei de recorrência dos números triangulares $S_3(n+1) = S_3(n) + n + 1$ como uma fórmula que sugere três configurações: uma contendo o termo anterior $S_3(n)$, uma contendo o número linear n , que representa o índice do número triangular anterior, e por último, o ladrilhamento do número 1.

Figura 97 - Outro exemplo de recorrência dos números triangulares via ladrilhos

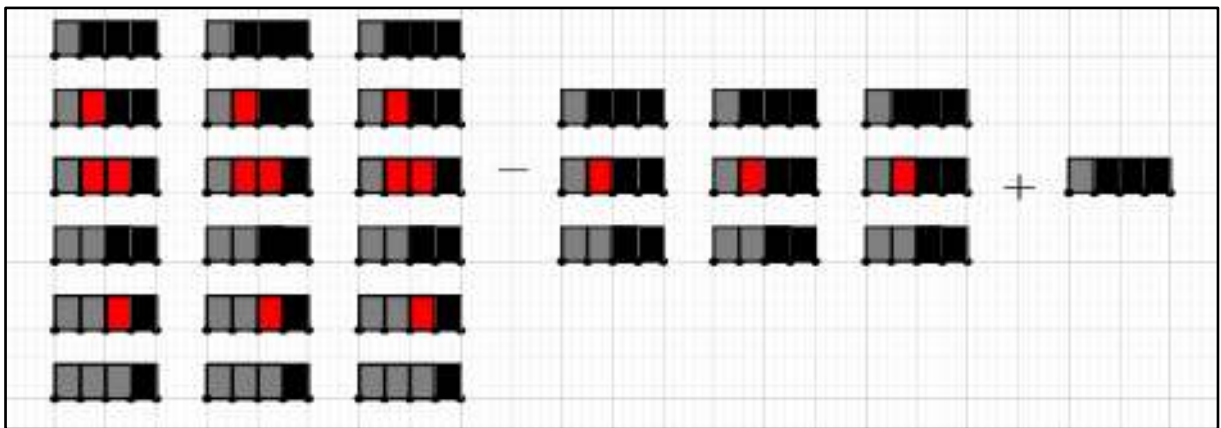


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Na Figura 97 temos a primeira coluna com todos os ladrilhamentos pretos, indicando que esses representam o número triangular anterior; na segunda coluna, todos os ladrilhamentos CV, e por último o único ladrilhamento possível para a sequência de 1 relativa a $n=4$. Essa disposição representa bem a lei de recorrência dos números triangulares.

Para finalizar, vamos construir a relação de recorrência homogênea dos números triangulares $S_3(n+3) = 3S_3(n+2) - 3S_3(n+1) + S_3(n)$. Aqui devemos criar cópias dos ladrilhamentos anteriores e aplicarmos as operações desejadas.

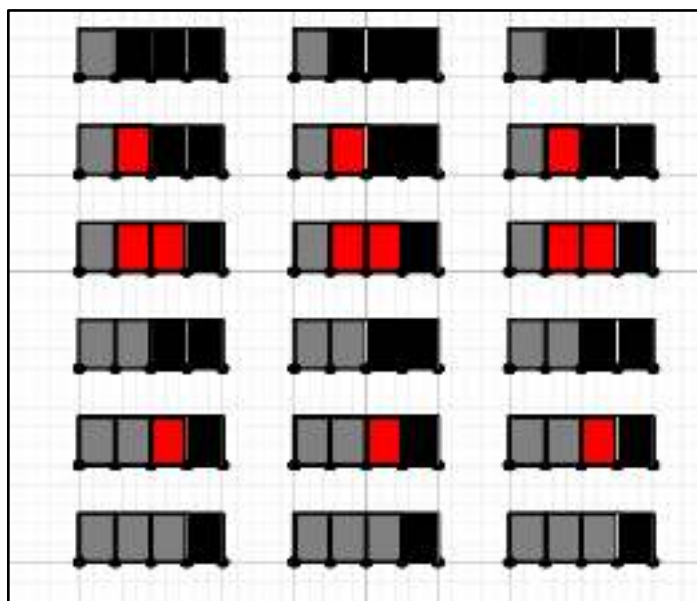
Figura 98 - Visualização da recorrência homogênea dos números triangulares via ladrilhos



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Na Figura 98 podemos observar três cópias de números triangulares que possuem final preto, indicando se tratar do termo anterior dos ladrilhamentos 4; no caso, $3S_3(3)$, totalizando 16 ladrilhamentos que possuem pelo menos 1 ladrilho preto. Como são cópias, os 6 originais foram repetidos como mostra a figura. A seguir, temos a $-3S_3(2)$, que é formada por 3 cópias de ladrilhamentos que possuem 2 ou mais ladrilhos pretos na sua composição e, por fim, temos $S_3(1)$, que é composto pelo ladrilhamento que possui 3 ou mais ladrilhamentos na sua composição. Mostra-se um destaque no primeiro bloco de ladrilhamentos, onde ocorrerá as operações.

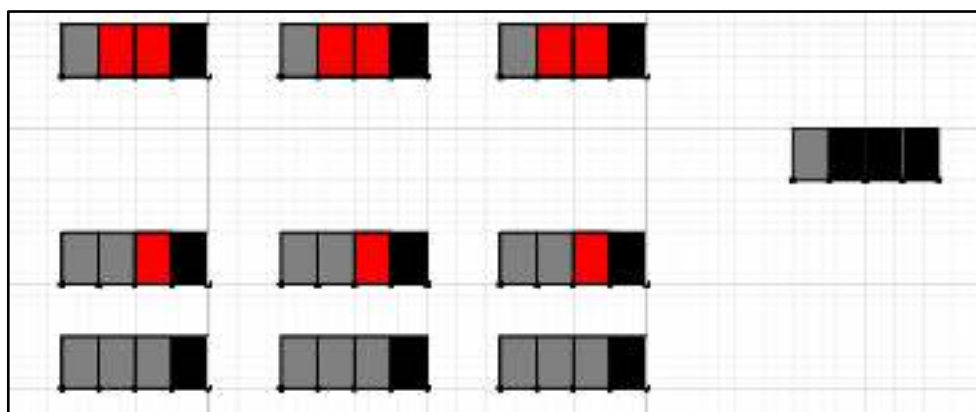
Figura 99 - Primeira etapa da recorrência homogênea dos números triangulares



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Na Figura 99 tem-se o bloco com 18 ladrilhamentos onde ocorrerão as operações apresentadas nas próximas figuras. Agora fazendo as operações indicadas nesse bloco, temos.

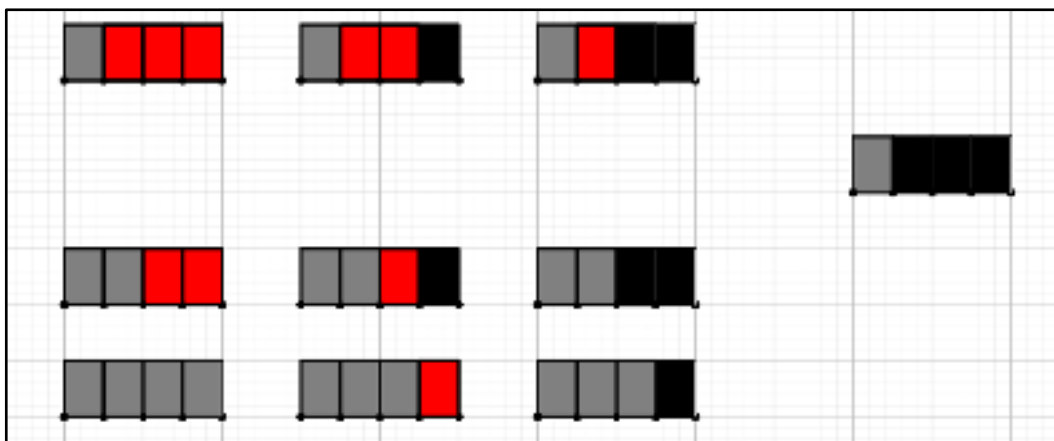
Figura 100 - Segunda etapa da recorrência homogênea dos números triangulares



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Na Figura 100 foram retirados os ladrilhamentos $3S_3(2)$ das de $3S_3(3)$, permanecendo $S_3(1)$. Dessa forma, restaram 10 ladrilhamentos, o que corresponde a $S_3(4)$; como alguns ainda estão repetidos, devemos substituir as peças repetidas por ladrilhos possíveis e não usados. Por exemplo, na linha inferior, temos 3 ladrilhamentos CCCP que devem ser substituídos por outros possíveis para não ficar repetido. A solução, então, é colocar cada final possível para esses ladrilhamentos. A Figura 101 mostra todas as substituições possíveis feitas.

Figura 101 - Terceira etapa da recorrência homogênea dos números triangulares



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Agora a figura mostra todas as substituições sendo feitas e os ladrilhamentos que surgem são todos que compõe de fato $S_3(4)$. Com isso, exploraremos agora outros números figurados e suas possíveis regras partindo apenas da configuração dos números triangulares e do software GeoGebra.

3.10 GeoGebra e os Números (p,q) -gonais

Essa seção é uma forma de expandir o estudo dentro dos números figurados visando a representação por meio do GeoGebra para números figurados de configurações mais complexas. Esses números, chamados de números pq -gonais, são números que possuem duas configurações quando representadas por padrão discreto. A equação geral desses números é apresentada por Wenchang (2007) como:

$$\frac{(p-2)n^2 - (p-4)n}{2} = \frac{(q-2)n^2 - (q-4)n}{2}$$

Existem muitos casos de números que são duplamente poligonais: os casos dos números triangulares quadrados ou (3,4)-gonais, números triangulares pentagonais ((3,5)-gonais) e os números quadrados pentagonais ((4,5)-gonais) serão tratados nesse trabalho

Algumas formas de apresentar esses números incluem o estudo de equações diofantinas mais precisamente, segundo Bezerra *et al* (2025) a equação que representa esses números recai na equação de Pell:

Definição 17 (Equação de Pell). Seja D um número natural não quadrado perfeito, a equação de Pell é definida como uma equação diofantina do tipo:

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

Teorema 16. Admitindo sempre soluções infinitas. Se (u, v) é a solução positiva mínima da equação de Pell $x^2 - Dy^2 = 1$, então todas as soluções não negativas são dadas por (Koshy, 2014):

$$u_n = \frac{1}{2} \left\{ \left(u + v\sqrt{D} \right)^n + \left(u - v\sqrt{D} \right)^n \right\}$$

$$v_n = \frac{1}{2\sqrt{D}} \left\{ \left(u + v\sqrt{D} \right)^n - \left(u - v\sqrt{D} \right)^n \right\}$$

Demonstração. Como (u, v) é a solução mínima para $x^2 - Dy^2 = 1$, logo $u^2 - Dv^2 = 1$, daí temos que:

$$\left(u^2 - Dv^2 \right)^n = 1$$

ou seja,

$$x^2 - Dy^2 = \left(u^2 - Dv^2 \right)^n$$

que pode ser reescrito como:

$$\left(x + \sqrt{D}y \right) \left(x - \sqrt{D}y \right) = \left(u + \sqrt{D}v \right)^n \left(u - \sqrt{D}v \right)^n$$

Podemos assumir então que:

$$\left(x + \sqrt{D}y \right) = \left(u + \sqrt{D}v \right)^n$$

$$\left(x - \sqrt{D}y \right) = \left(u - \sqrt{D}v \right)^n$$

Somando as igualdades e buscando cancelar y na primeira e x na segunda equação, tem-se que:

$$x = \frac{1}{2} \left\{ \left(u + v\sqrt{D} \right)^n + \left(u - v\sqrt{D} \right)^n \right\}$$

$$y = \frac{1}{2\sqrt{D}} \left\{ \left(u + v\sqrt{D} \right)^n - \left(u - v\sqrt{D} \right)^n \right\}$$

■

Dessa forma, iremos inicialmente definir alguns mais conhecidos números de dupla configuração visando apenas apresentar essa classe especial de números figurados e, posteriormente, sua representação pelo GeoGebra.

3.10.1 Números triangulares quadrados

Os números que são, ao mesmo tempo, triangulares e quadrados, formam a sequência (1,36,1225,...) catalogados como A001110 na OEIS. Esses números, pela definição, possuem uma equação do tipo:

$$\frac{p(p+1)}{2} = q^2$$

Dessa forma, temos que:

$$\begin{aligned} p(p+1) &= 2q^2 \\ p^2 + p &= 2q^2 \\ 4p^2 + 4p + 1 &= 8q^2 + 1 \\ (2p+1)^2 - 2(2q)^2 &= 1 \end{aligned}$$

Tomando $x = 2p + 1$ e $y = 2q$, temos a equação de Pell

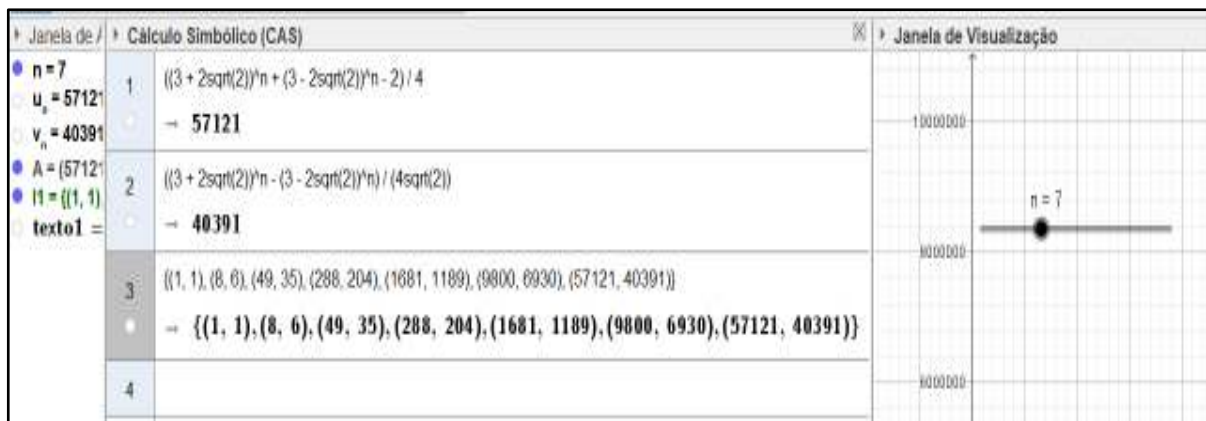
$$x^2 - 2y^2 = 1$$

Usando a solução mínima (3,2), na fórmula provada por Euler, em Dickson (2005), chegamos em:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n - 2}{4} \\ v_n &= \frac{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Assim, de forma computacional com o uso do GeoGebra, podemos encontrar os primeiros valores dos índices (p, q) dos números $S_3(p)$ e $S_4(q)$, respectivamente. Observe a Figura 102, que apresenta a lista desses primeiros índices com o auxílio do GeoGebra.

Figura 102 - Primeiros índices dos números (3,4) -gonais



Fonte: Elaborado pelos autores (2024).

É claro que, se usarmos a fórmula que fornece um dos índices na própria forma geral do número poligonal correspondente, encontraremos os valores correspondentes, e assim podemos escolher. Nesse caso, usaremos v_n na forma dos números quadrados para encontrarmos os valores correspondentes dos números triangulares que também são quadrados, ou seja:

$$S_4(v_n) = v_n^2$$

ou seja

$$S_{3,4}(n) = \left(\frac{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{\left((17+12\sqrt{2})^n + (17-12\sqrt{2})^n - 2 \right)}{32}$$

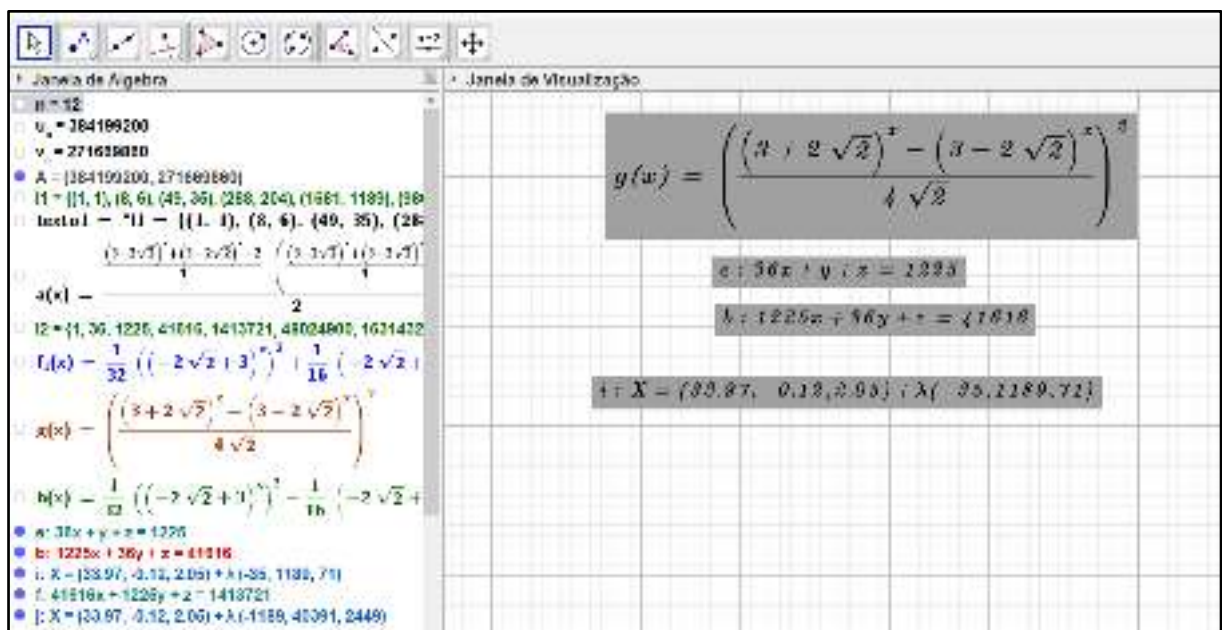
Para encontrarmos a recorrência, podemos apresentar os primeiros valores em termos dos anteriores da seguinte maneira, com $S_{3,4}(1) = 1$ e $S_{3,4}(2) = 36$

$$S_{3,4}(3) = 1225 = a \cdot 36 + b \cdot 1 + c$$

$$S_{3,4}(4) = 41616 = a \cdot 1225 + b \cdot 36 + c$$

No software GeoGebra, os valores de interseção dessas duas equações podem ser observados na Figura 103:

Figura 103 - Termos dos coeficientes da recorrência dos números (3,4)-gonais



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Na Figura 103, identificamos os três coeficientes que se aproximam dos descritos por Deza e Deza (2012) como a recorrência:

$$S_{3,4}(n+2) = 34S_{3,4}(n+1) - S_{3,4}(n) + 2$$

com $S_{3,4}(1) = 1$ e $S_{3,4}(2) = 36$, e ainda:

$$S_{3,4}(n+3) = 34S_{3,4}(n+2) - S_{3,4}(n+1) + 2$$

$$S_{3,4}(n+2) = 34S_{3,4}(n+1) - S_{3,4}(n) + 2$$

calculando $S_{3,4}(n+3) - S_{3,4}(n+2)$

$$S_{3,4}(n+3) - S_{3,4}(n+2) = 34S_{3,4}(n+2) - S_{3,4}(n+1) + 2 - 34S_{3,4}(n+1) + S_{3,4}(n) - 2$$

$$S_{3,4}(n+3) = 35S_{3,4}(n+2) - 35S_{3,4}(n+1) + S_{3,4}(n)$$

Percebemos que o estudo dos números pq -gonais conduz, de forma natural, à investigação de equações diofantinas, do tipo equação de Pell, além de estabelecer relações diretas com o uso de frações contínuas e com a necessidade de manipulações algébricas mais elaboradas. Esse percurso evidencia que a análise dessas classes de números figurados ultrapassa procedimentos elementares, exigindo ferramentas matemáticas de maior sofisticação teórica, típicas da matemática pura.

Entretanto, do ponto de vista da visualização geométrica, os números pq -gonais não apresentam atributos suficientemente evidentes que permitam a identificação direta de suas propriedades por meio do recurso de visualização empregado anteriormente em outras classes de números figurados. Diferentemente dos casos bidimensionais mais simples, nos quais a configuração espacial favorece a compreensão imediata das regularidades envolvidas, aqui a representação geométrica deixa de desempenhar um papel central na análise das propriedades matemáticas.

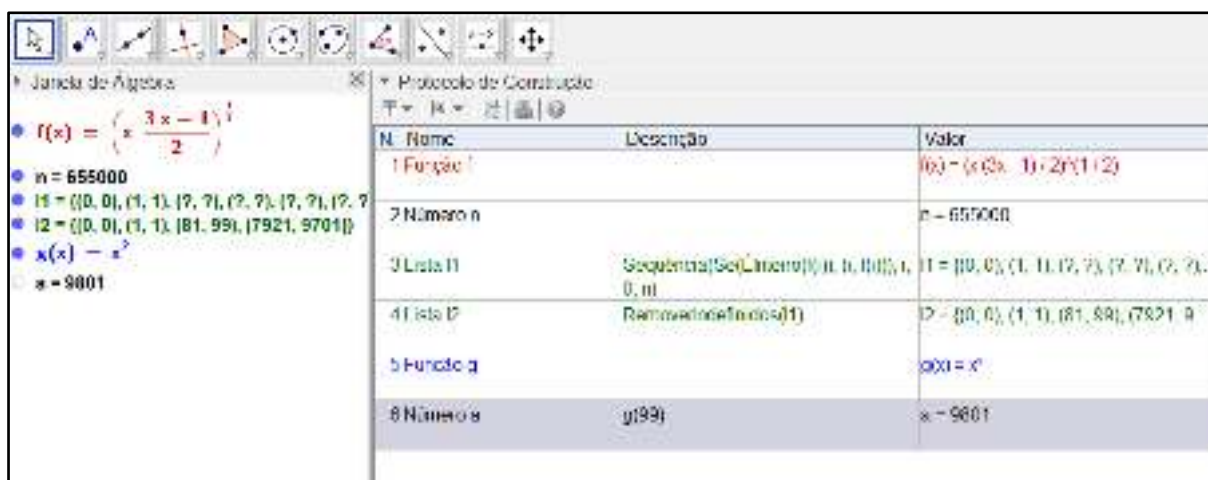
Dessa forma, o estudo dos números de dupla configuração segue, essencialmente, dois caminhos complementares: um primeiro, ancorado na matemática pura, que mobiliza equações diofantinas, frações contínuas e técnicas algébricas avançadas; e um segundo, de natureza tecnológica, que faz uso de softwares de geometria dinâmica, como o GeoGebra, utilizando comandos e construções específicas para a obtenção e verificação dos resultados. No próximo tópico, abordaremos os números quadrados pentagonais exclusivamente por meio de uma abordagem tecnológica, utilizando o software GeoGebra como principal ferramenta de investigação.

3.10.2 Números quadrados pentagonais

Os próximos números de dupla configuração serão abordados nesse tópico apenas via GeoGebra, mostrando uma forma simples de encontrar tais números. No entanto, essa forma só pode ser usada se um desses números for um quadrado, pois permite ao GeoGebra criar uma função e dela extrair todos os inteiros. Para confirmar se os números indicados são realmente válidos recorreremos a OEIS.

Os primeiros números quadrados pentagonais são (1, 9801, 94109401, 903638458801, ...) A036353 na OEIS. Assim, escrevemos uma função em que $S_4(y) = y^2$ é igual a $S_5(x) = \frac{x(3x-1)}{2}$. A função é dada por $y^2 = \frac{x(3x-1)}{2}$, $y = \sqrt{\frac{x(3x-1)}{2}}$, que no GeoGebra escreveremos como $f(x) = \left(\frac{x(3x-1)}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Observe a Figura 104.

Figura 104 - Obtenção dos termos da sequência dos números quadrados pentagonais



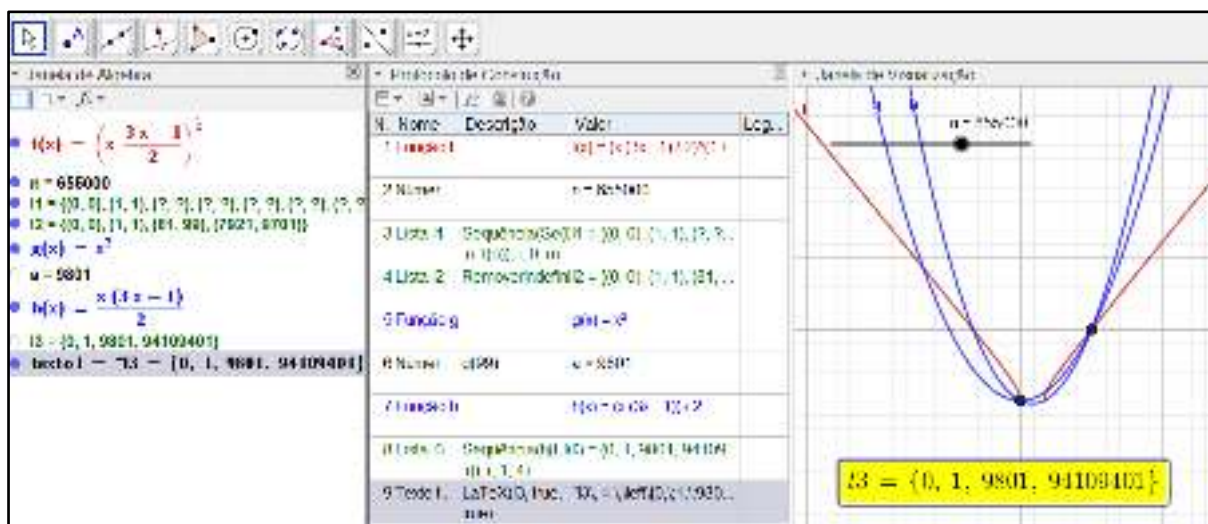
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Na Figura 104, apresentam-se os quatro comandos necessários para gerar alguns números quadrados pentagonais. À direita está toda a descrição, mas, de modo resumido, temos que a lista L1 cria pares ordenados (x, y) inteiros em uma lista com indefinições, que são os pares não inteiros; na lista L2 temos um comando para remover tais indefinições, gerando, assim, apenas os pares inteiros dentro da lista completa.

Seguindo a descrição, no próximo comando trazemos a função g , que representa os números quadrados, que são os y dos pares ordenados. Por fim, aplicando os temos encontrados no número a que corresponde ao número quadrado $S_4(y)$, temos o número desejado. Ou seja, o próximo número quadrado pentagonal é 9801, que pode ser comprovado em OEIS

Na Figura 105, apresentam-se os quatro primeiros números quadrados pentagonais. Para isso, utiliza-se uma terceira lista com as sequências encontradas nos pontos x , o que permite que os valores sejam colocados na forma dos números pentagonais e, com isso, a sequência possa ser gerada.

Figura 105 - Termos dos números quadrados pentagonais via SG



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Na Figura 105, a lista gerada contém os termos iniciais da sequência dos números quadrados pentagonais, evidenciando como o software GeoGebra é capaz de processar esses números por meio da utilização de alguns comandos específicos. Tal procedimento ilustra o potencial da ferramenta no tratamento computacional desse tipo de sequência numérica.

Ressaltamos que, devido ao fato de essas sequências assumirem valores relativamente elevados, o software pode apresentar lentidão ou até mesmo travamentos durante o processamento. Dessa forma, restringimo-nos à obtenção dos cinco primeiros termos, uma vez que o objetivo deste estudo é apenas demonstrar o funcionamento e a viabilidade da ferramenta, e não a geração de índices de grande magnitude.

Para finalizar, apresentamos o próximo caso de números de configuração dupla, no qual é empregado o mesmo mecanismo anteriormente descrito, aplicado diretamente à respectiva fórmula. Os valores obtidos são posteriormente confrontados com aqueles disponíveis na OEIS, a fim de verificar sua veracidade. Dessa maneira, obtemos mais um indício de que a ferramenta utilizada se mostra eficaz para o caso específico dos números de dupla configuração em que uma das configurações é quadrada.

por meio do GeoGebra. As análises realizadas permitiram identificar potencialidades, limites e possibilidades do recurso tecnológico no estudo dessas estruturas matemáticas.

Na sequência da pesquisa, adentraremos a fase de concepção e análise *a priori*, na qual os resultados e reflexões oriundos da análise preliminar serão sistematizados e utilizados como base para a elaboração das situações didáticas.

4. CONCEPÇÃO E ANÁLISE *A PRIORI*

Para esta etapa, foram elaboradas cinco situações didáticas com o intuito de estabelecer conexões entre diferentes formas de representação dos números figurados. Buscou-se integrar representações tradicionais, como fórmulas gerais, equações de recorrência e funções geradoras a novas representações.

Inicialmente, retomou-se uma abordagem já utilizada na dissertação de mestrado do autor, agora aplicada de forma mais específica para representar propriedades de números figurados relacionadas exclusivamente aos números triangulares, explorando a visualização de suas configurações clássicas no software GeoGebra. Em seguida, introduziu-se uma nova perspectiva de representação por meio de construções de ladrilhamentos envolvendo números triangulares, possibilitando a investigação de suas propriedades e ampliando, possivelmente a compreensão do tema.

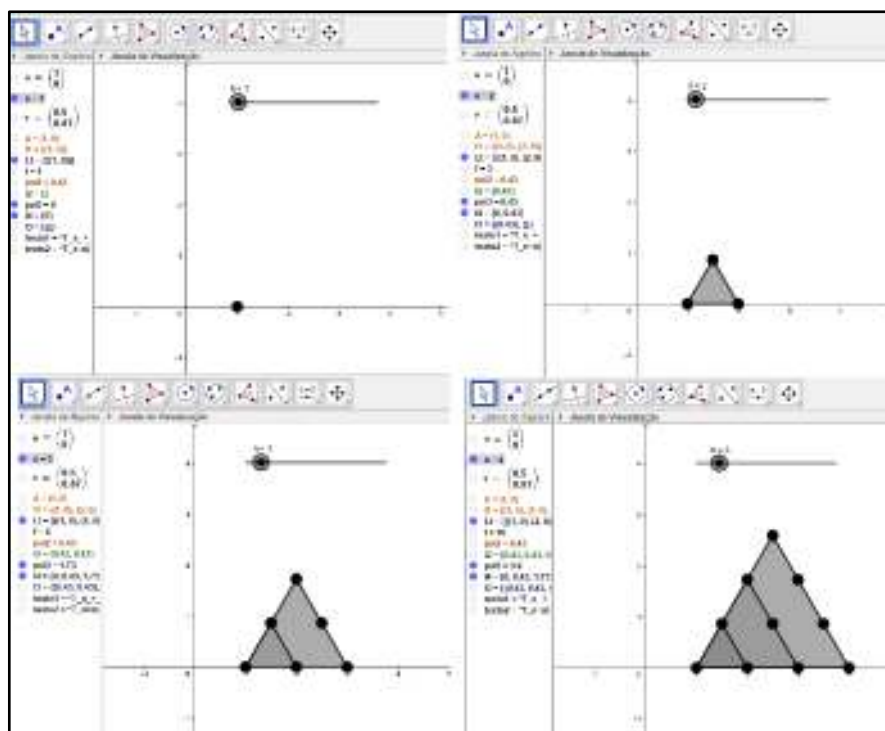
Essas situações foram concebidas para serem aplicadas em turmas de História da Matemática, no âmbito do curso de Licenciatura em Matemática. Os estudantes que participaram assinaram um termo de consentimento referente à pesquisa, estando cientes de que apenas seus escritos serão utilizados, sem sua exposição ou identificação. Os dados coletados serão mantidos pelo autor por um período de cinco anos, seguindo as normas éticas e de pesquisa conforme documentação nos anexos deste trabalho.

As três primeiras situações consistem em propor atividades didáticas que exploram a relação entre números figurados e números triangulares a partir de sua configuração geométrica. Espera-se que a visualização facilite a obtenção de propriedades importantes. Para isso, os estudantes precisam compreender como as figuras são montadas a partir da forma geral e, principalmente, observar padrões que seriam difíceis de identificar sem o apoio visual. Além disso, o software possui funções que permitem que as figuras apresentem os termos desejados da sequência, diferentemente de uma figura estática, que não pode ser editada. Desse modo, faremos uma breve apresentação dos números figurados com suas principais fórmulas e, em seguida, abordaremos as três primeiras situações e o planejamento no âmbito da TDS.

Inicialmente, o pesquisador – doravante chamado de *professor regente* – deverá apresentar alguns conceitos históricos sobre números figurados. Logo depois, serão fornecidas as definições de número figurado, números triangulares e números lineares, bem como a visualização e as fórmulas importantes para as três primeiras situações.

Visualização de números triangulares: esta é a visualização inicial, para que o aluno compreenda a formação da sequência por meio da figura.

Figura 107 - Visualização detalhada dos números triangulares

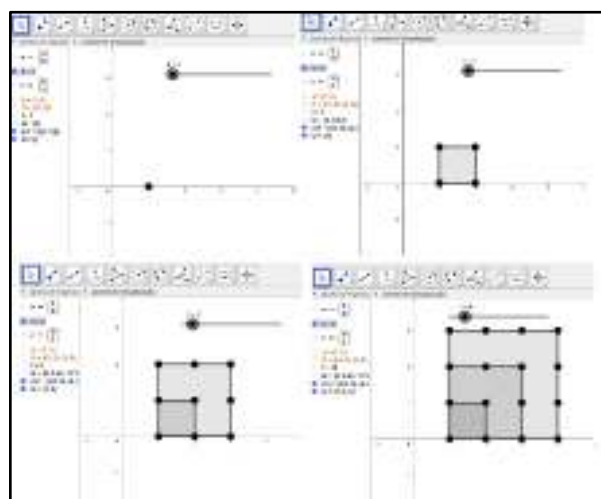


Fonte: Elaboração do autor (2024).

Percebamos que a figura não possui cores diferenciadas para que o aluno não seja induzido a tentar observar alguma propriedade, pois o intuito é apenas a observação do comportamento da sequência a partir da manipulação do botão n . Por meio dessa figura, o professor deve apresentar os números quadrados também de forma monocromática com mesmo intuito que a primeira figura.

Visualização de números quadrados:

Figura 108 - Visualização detalhada dos números quadrados

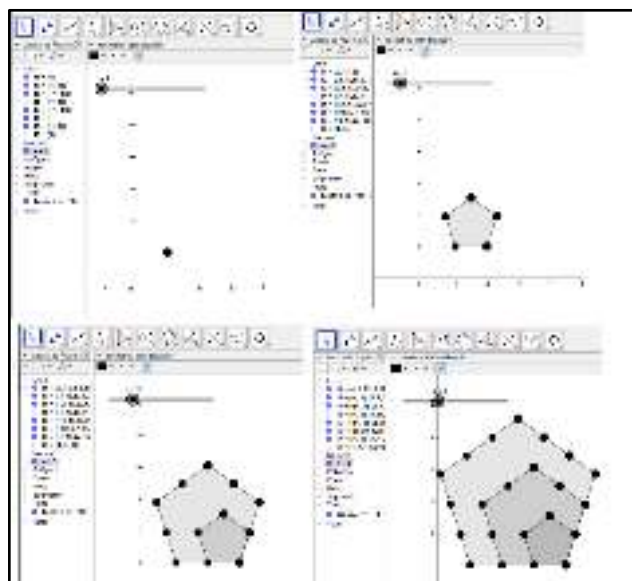


Fonte: Elaboração do autor (2024).

É esperado que essa figura provoque as primeiras interações de fato com a questão, pois os alunos podem tentar criar os outros padrões de números, de todo modo é interessante que o professor apresente também os primeiros números pentagonais, pois deixar os alunos formarem essa figura pode atrasar a resolução e dispersar as ideias acerca do objetivo proposto.

Visualização de números pentagonais:

Figura 109 - Visualização detalhada dos números pentagonais



Fonte: Elaboração do autor (2024).

A partir da apresentação das figuras, também é necessário apresentar algumas fórmulas que serão usadas como base para o desenvolvimento da situação, são elas:

Forma geral dos números triangulares: $S_3(n) = \frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}$

Essa fórmula ajudará os alunos a relacionar formas trianguladas às fórmulas que serão solicitadas. O professor pode apresentar o processo de obtenção dessa fórmula ou apenas apresentar, já que no objetivo da questão só será exigido o uso dela.

Forma geral dos números lineares: $S_3^1(n) = n, n \in \mathbb{N}$

Apesar de simples, essa fórmula ajuda a entender que os números triangulares são formados por uma soma de números naturais. Também relaciona números naturais como números figurados que formam linhas, e pode ajudar a fornecer relações onde não são percebidos números triangulares de ordem inferior, mas sim números triangulares somados a

linhas, como $S_3(n) = S_3(n-1) + n$, que pode ser representada por $S_3(n) = S_3(n-1) + S_3^1(n)$. Muitas vezes, isso pode ser identificados antes mesmo que o estudante perceba que somando um número triangular a um número linear de mesma ordem, obtém-se o número triangular seguinte.

Forma geral dos números poligonais: $S_m(n) = \frac{(m-2)n^2 - (m-4)n}{2}, n \in \mathbb{N}, m \geq 3$

A partir dessas definições e apresentações das formas gerais, é, então, apresentada a primeira situação didática.

4.1 Situação 1: Encontrar a fórmula para números poligonais a partir de números triangulares

Objetivo: Encontrar a fórmula geral dos números poligonais por meio da relação entre números triangulares e poligonais apresentadas na visualização via software GeoGebra.

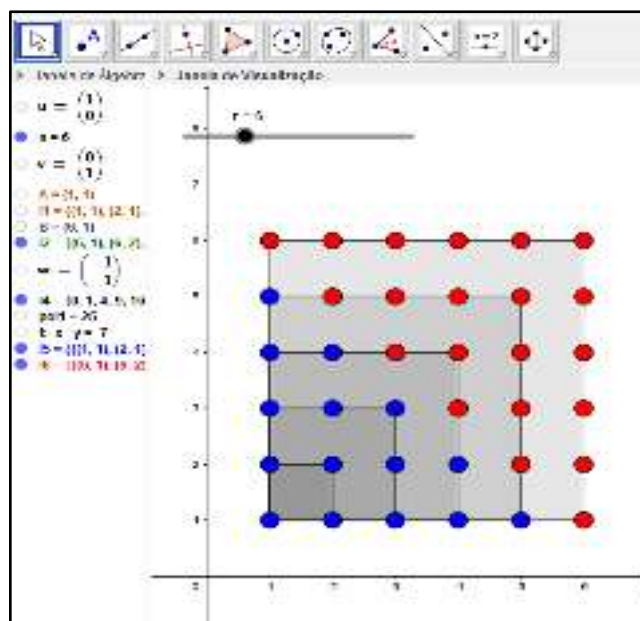
Como o proposto na situação, é necessário relacionar números triangulares a números poligonais. As duas fórmulas devem ser fornecidas e o intuito é que os alunos tenham uma certa dificuldade algébrica e que, a partir da apresentação das figuras trianguladas, essa dificuldade seja superada. A seguir, apresentamos o que é esperado em cada fase da Teoria das Situações Didáticas, conforme a concepção da situação.

Situação de ação: Logo após a apresentação das definições, professor regente deve pedir aos alunos que solucionem o problema. Nesse momento, é esperado que os estudantes interajam com a questão e as informações iniciais. Em uma primeira ação, a não trivialidade da relação pode fazer com que algum aluno questione se ainda não está faltando alguma informação ou figura. O professor deve incentivar a comunicação entre os estudantes e a troca de informações.

No decorrer da fase de ação, espera-se que os alunos, apesar das dificuldades iniciais, consigam encontrar a relação desejada. No entanto, o professor deve registrar qualquer conclusão obtida por um ou mais alunos. Essa dificuldade precisa ser documentada, pois pretende-se apresentar mais figuras justamente quando ela surgir. Acredita-se que, a partir disso, os alunos consigam avançar para outras fases da TSD com mais facilidade. Assim, logo que a dificuldade for identificada, o professor pode apresentar, sem fornecer informações adicionais, as figuras a seguir:

Visualização de números quadrados triangulados:

Figura 110 - Visualização dos números quadrados via triangulares

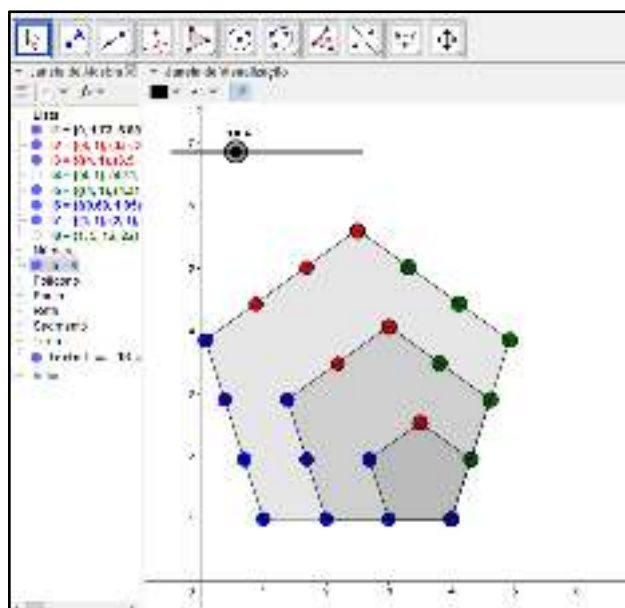


Fonte: Acervo da pesquisa (2024).

A partir dessa visualização é esperado que os alunos percebam a relação existente entre números triangulares e números quadrados, e que essa percepção possa ser apoiada pela apresentação dos números pentagonais apresentados a seguir.

Visualização de números pentagonais triangulados:

Figura 111 - Números pentagonais via triangulares



Como já dito, sem mencionar a relação, o professor pode pedir que os alunos analisem a imagem e avaliem se ela pode ajudar na resolução da questão. Ainda na fase de ação, é provável que os alunos interajam com as novas imagens e consigam visualizar os números triangulares, mesmo que a relação ainda não esteja clara. Espera-se que alguns alunos percebam os triângulos e indiquem uma possível relação, encerrando assim a fase de ação.

Situação de formulação: Nessa fase, os estudantes já visualizam a relação, mas podem ter dificuldades quanto à forma de usar os triângulos da imagem. Algumas abordagens podem ser equivocadas, caso o aluno não perceba que os números triangulares estão em ordens diferentes na figura. Embora alguns deles cheguem à relação – o que é esperado, devido à facilidade proporcionada pelo recurso visual –, pode ocorrer que surjam duas formas distintas: uma que utilize apenas números triangulares e outra que empregue também os números lineares. Caso essa segunda apareça, é importante que o professor lembre que a resolução pede apenas números triangulares.

Para os alunos, espera-se que esse desafio revele que os números lineares são os *gnômons* e formarão o próximo número triangular. A validação dessa informação exigirá a fórmula apresentada no início da situação. Quando o aluno perceber tal validação, a fase atual será finalizada.

Situação de validação: A presente fase consiste apenas de desenvolvimento algébrico para constatar que, partindo da relação existente de fato a questão pode ser validada. Vale ressaltar que os erros cometidos nessa fase que não sejam relacionados à excesso de informações devem ser informados, pois não possuem relação com a situação, portanto não influenciam no resultado.

A *Validação* esperada deve seguir o itinerário:

1- As primeiras conclusões após a interação com a figura é que números quadrados e triangulares possuem a relação $S_4(n) = S_3(n) + S_3(n-1), n > 1$, ou ainda $S_4(n) = 2S_3(n-1) + n$, que apesar de válida, não possui apenas números triangulares, conforme exige a situação. Assim, também é esperado que os alunos atestem que a relação existente entre números triangulares e pentagonais é $S_5(n) = S_3(n) + 2S_3(n-1)$, dando assim um passo crucial para a constatação de que para um número poligonal, a relação existente esperada é:

$$S_m(n) = S_3(n) + (m-3)S_3(n-1)$$

Vale ressaltar que nesta fase o aluno necessita de uma prova formal para validar a sua descoberta e que, com as fórmulas iniciais dadas, basta que a relação seja desenvolvida para obter a fórmula dos números poligonais apresentada no primeiro momento.

Situação de institucionalização: Diante do problema validado pelos alunos, é possível que parte da turma não se convença da resposta ou que surjam questionamentos acerca de alguma etapa da resolução. Nesse ponto, cabe ressaltar que a questão só pôde ser resolvida rapidamente graças ao auxílio da visualização e que, mesmo com as primeiras figuras – nas quais ainda não havia triangulação –, não é tarefa trivial perceber tal relação.

A partir dessa explicação, o professor reapresenta a questão e a respectiva resolução, suprimindo os elementos que não exercem influência ou que se mostram supérfluos. Segue, então, a resolução detalhada pelo professor, fundamentada no teorema apresentado a seguir.

Teorema. Seja o termo geral do n -ésimo número triangular dado por $S_3(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ com $n > 1$ e $S_3(1) = 1$, e o n -ésimo poligonal dado por $S_m(n) = \frac{(m-2)n^2 + (-m+4)n}{n}$ com $n > 1$ e $S_m(1) = 1$, a fórmula que relaciona números triangulares e poligonais é dada por:

$$S_m(n) = S_3(n) + (m-3)S_3(n-1)$$

4.2 Situação 2: Encontrar a relação entre números triangulares iguais e um número poligonal centralizado

Nessa segunda situação, é importante destacar que os números triangulares comuns constituem a base para a formação de qualquer outro número figurado. Dessa forma, os alunos já iniciam a fase tendo em mente a necessidade de organizar uma relação entre essa sequência e a sequência desejada. Trata-se do conhecimento prévio adquirido na Situação 1, que servirá de base para as demais situações.

Inicialmente, o professor deve apresentar a definição de números poligonais centralizados, bem como um esboço de número triangular centralizado, para que os alunos compreendam a configuração e os primeiros termos dessa sequência. Também serão apresentadas a forma geral dos números triangulares centralizados e a forma geral dos números poligonais centralizados. Após essa exposição, solicita-se que os alunos resolvam a questão sem que o professor apresente qualquer outra figura. O objetivo dessa situação é verificar se os alunos são capazes de identificar a fórmula utilizando apenas o esboço e de construir suas próprias figuras, buscando evidenciar os números triangulares. Caso não se observe avanço, o

professor, assim como na fase anterior, deve inserir as figuras. Seguem, então, algumas definições importantes.

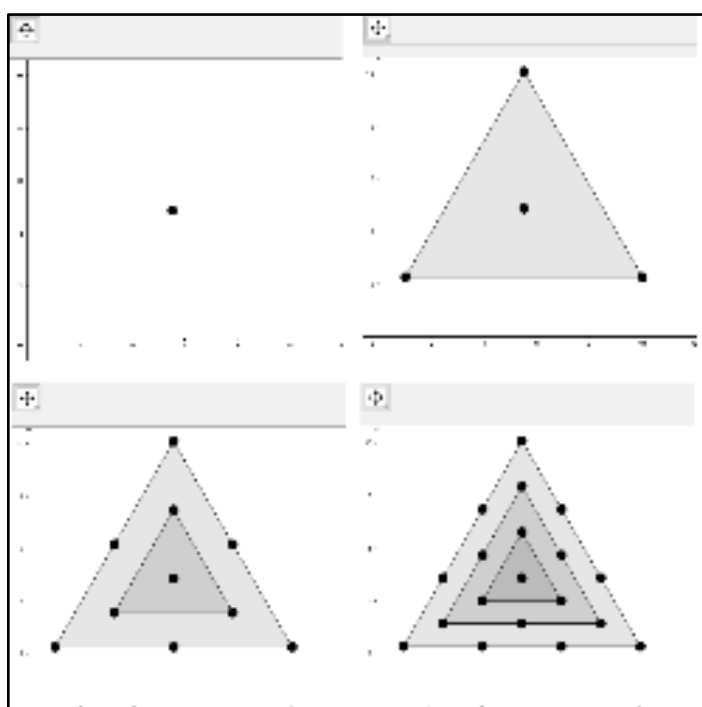
De acordo com Weisstein (2024), trata-se de um número figurado no qual as camadas sucessivas de polígonos são construídas de forma concêntrica, organizadas em torno de um ponto central, em vez de esse ponto estar localizado em um dos vértices. Sendo $SC_m(n)$ o n -ésimo número poligonal centralizado, sua forma geral é dada por (Deza; Deza, 2012):

$$SC_m(n) = 1 + m \frac{(n-1)n}{2}$$

Além da definição, as seguintes figuras também devem ser apresentadas. Isso almeja facilitar a compreensão entre a definição e a forma geral. Os alunos devem iniciar a fase de ação usando as figuras e as propriedades conhecidas da questão anterior como base.

Números triangulares centralizados

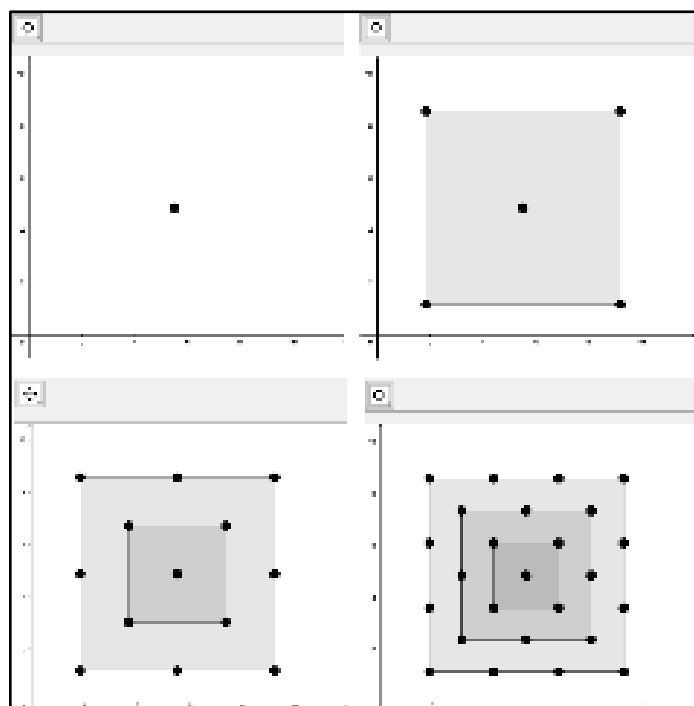
Figura 112 - Visualização dos números triangulares centralizados



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Números quadrangulares centralizados

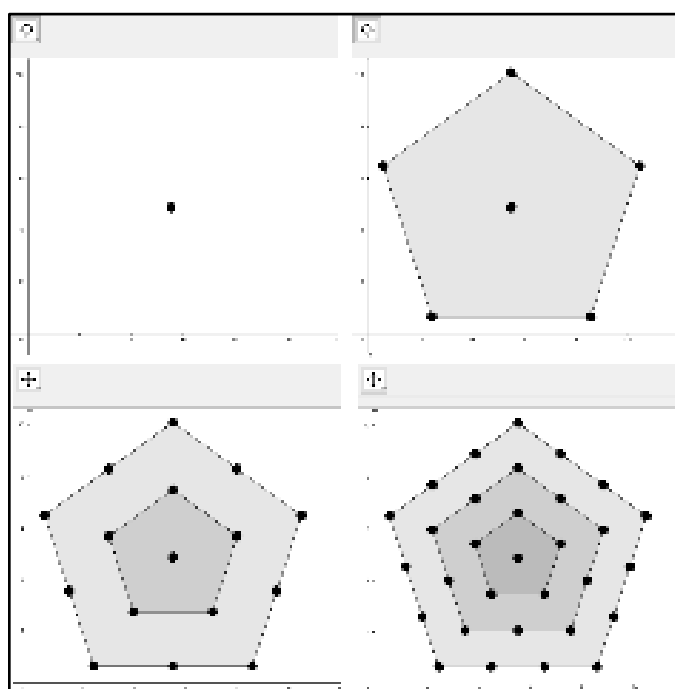
Figura 113 - Visualização dos números quadrados centralizados



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Números pentagonais centralizados

Figura 114 - Visualização dos números pentagonais centralizados

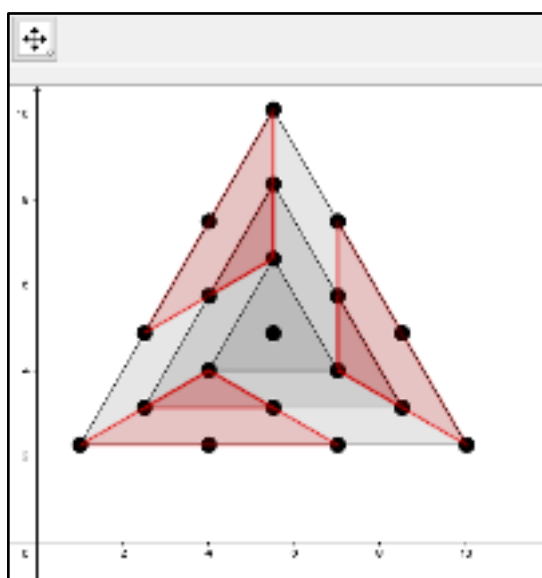


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Essas figuras foram criadas no software GeoGebra, sem triangulação, uma vez que os alunos já conhecem essa relação. Nesse caso, espera-se que eles iniciem a investigação tentando encontrar números triangulares dentro das configurações que lhes foram apresentadas. Assim, descreveremos as quatro fases da TSD, destacando os acontecimentos esperados em cada uma.

Situação de ação: Nessa fase, os alunos já devem possuir o conhecimento prévio da relação entre números triangulares e outros números figurados, bem como o esboço da configuração figurada centralizada – será solicitado que os próprios alunos desenhem a configuração – a ser apresentada pelo professor. Com isso, espera-se que iniciem a resolução criando esboços para números quadrados, mas que, inicialmente, não consigam destacar os números triangulares, pois estes aparecem da borda para o centro das figuras, diferentemente da representação comum descrita na Situação 1. É provável que poucos alunos encontrem a relação e que a maioria da turma sinta dificuldade até que sejam apresentadas as novas figuras no GeoGebra. Espera-se ainda que os alunos percebam a configuração triangulada assim que a nova figura for apresentada, fato que deve ocorrer tão logo os alunos não consigam encontrar a relação, mesmo com a ajuda das figuras anteriores. Nesse caso, o professor deve apresentar a seguinte configuração:

Figura 115 - Relação de números triangulares centralizados e números triangulares

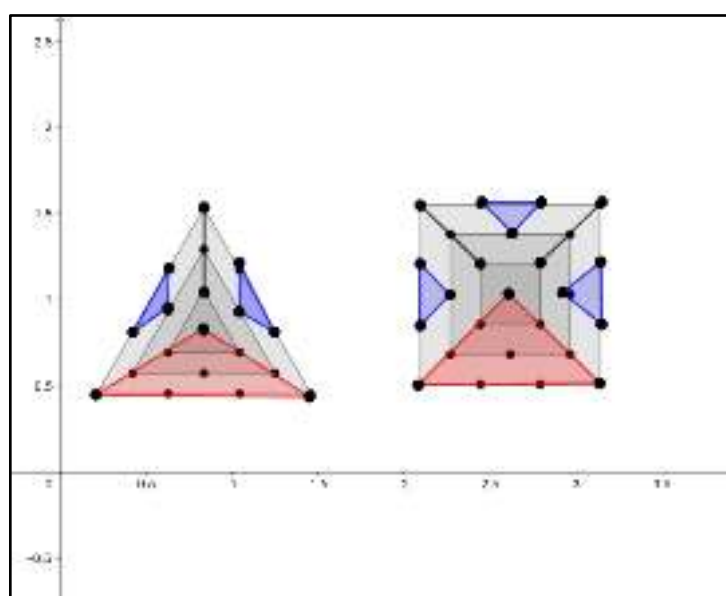


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

É provável agora, que os alunos consigam obter algumas representações ou primeiras constatações, o que dará início a próxima da TSD.

Situação de formulação: De posse da figura com os números triangulares presentes na configuração centralizada, os estudantes podem formular as primeiras descobertas. No entanto, devido a questão anterior, é esperado que os alunos forneçam rápido a fórmula dos números triangulares centralizados com o auxílio das figuras e, posteriormente a fórmula dos números poligonais centralizados. Vale ressaltar que eles podem apresentar algumas soluções, com base na análise das figuras não trianguladas. Uma possível solução é a relação que inclui números triangulares e lineares, que pode ser obtida a partir da Figura 116:

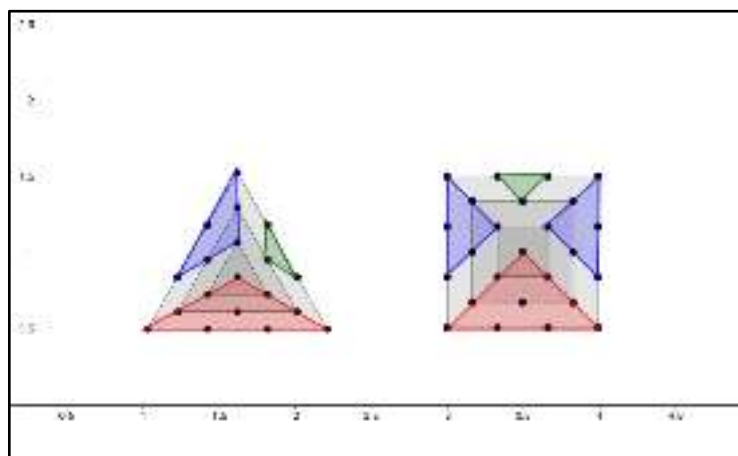
Figura 116 - Outra relação entre números poligonais centralizados e triangulares comuns



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

No esboço, o número triangular centralizado possui a relação com números triangulares comuns e números lineares $SC_3(4) = S_3(4) + 2S_3(2) + S_3^1(3)$; já no número quadrado centralizado, a relação é $SC_4(4) = S_3(4) + 3S_3(2) + 2S_3^1(3)$. Caso o aluno perceba essa relação, pode constatar que para um número poligonal centralizado, a fórmula que o relaciona com números triangulares é dada por $SC_m(n) = S_3(n) + (m-1)S_3(n-2) + (m-2)S_3^1(n-1)$, que é uma identidade válida; porém, deve ser descartada, pois a situação pede números triangulares iguais. Pelo mesmo motivo, a propriedade que relaciona números poligonais centralizados e números triangulares consecutivos deve ser descartada nesse momento. Os alunos podem obter essa propriedade a partir do seguinte esboço:

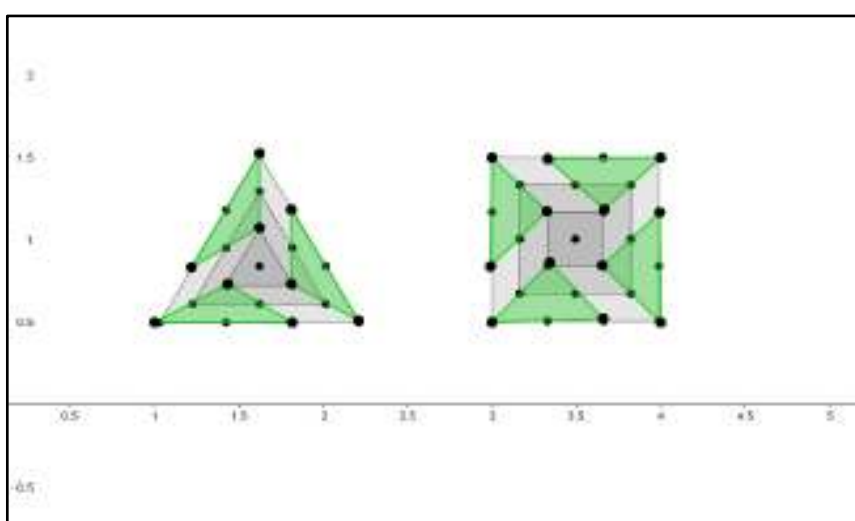
Figura 117 - Relação entre números poligonais centralizados e números triangulares consecutivos



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Aqui temos a relação entre números triangulares centralizados e comuns, dada por $SC_3(n+2) = S_3(n+2) + S_3(n+1) + S_3(n)$ e de números quadrados centralizados com números triangulares dada por $SC_4(n+2) = S_3(n+2) + 2S_3(n+1) + S_3(n)$, tal relação também é válida enquanto identidade, porém não serve para a situação. Essas observações levarão o aluno a obter a relação pedida trazida pelo possível esboço:

Figura 118 - Relação entre números poligonais centralizados e números triangulares iguais



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Esse esboço indica que o aluno encontrou a relação desejada e que entrou na fase de validação.

Situação de validação: De posse do esboço e das condições iniciais o aluno terá condições de formular a seguinte identidade:

$$SC_m(n+1) = 1 + mS_3(n), SC_m(1) = 1$$

A prova dessa identidade pode ser feita usando as definições iniciais da questão, bem como a definição de número triangular. É importante ressaltar que a formulação por meio do esboço indica que essas figuras são válidas para $m=3$ e $m=4$. Nesse caso, espera-se que o aluno descreva um itinerário semelhante ao que será apresentado na fase institucionalização.

Situação de institucionalização: Nessa etapa, o professor deve apresentar a resolução de forma resumida, dando ênfase a facilidade encontrada após a apresentação das figuras, mesmo que estas não tenham a triangulação apresentada nas figuras da questão anterior, indicando o seguinte teorema que descreve a situação:

Teorema. Seja $SC_m(n)$ o n -ésimo número figurado centralizado m -gonal e $S_3(n)$ o n -ésimo número triangular, então $SC_m(n+1) = 1 + mS_3(n)$ com $SC_m(1) = 1$.

4.3 Situação 3: Encontrar a forma geral dos números piramidais

Nessa situação, será solicitado aos alunos que, por meio de visualizações e da forma geral dos números tetraédricos, provem a forma geral para qualquer outro número piramidal. Porém, é necessário que antes o professor escreva algumas informações e apresente imagens.

Conforme Deza e Deza (2012) o n -ésimo número piramidal $S_m^3(n)$ é dado pela adição dos n primeiros números m -gonais.

$$S_m^3(n) = S_m(1) + S_m(2) + S_m(3) + \cdots + S_m(n)$$

dessa forma, ele possui a seguinte equação de recorrência:

$$S_m^3(n) = S_m^3(n-1) + S_m(n), S_m^3(1) = 1$$

e, por fim, Deza e Deza (2012) apresentam sua forma geral como:

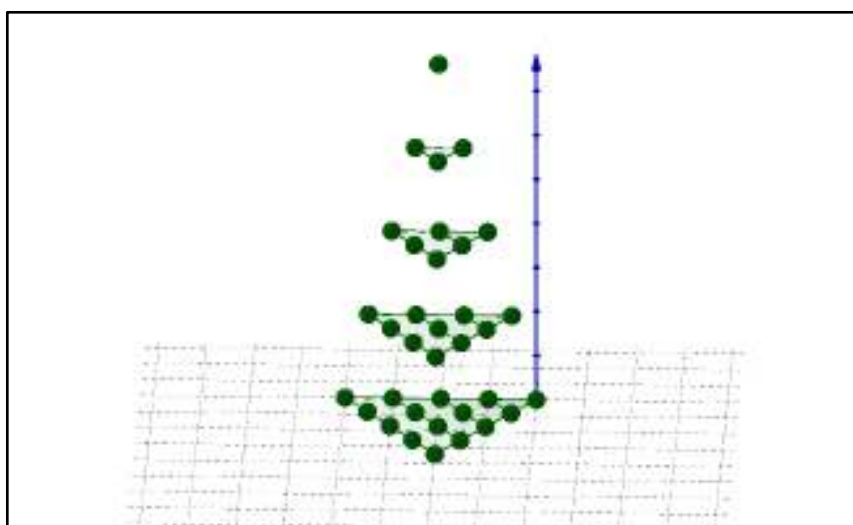
$$S_m^3(n) = \frac{n(n+1)((m-2)n - m + 5)}{6}$$

Para o caso $m=3$ podemos apresentar a forma geral:

$$S_3^3(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Dadas essas informações, é necessário também que o professor regente apresente as imagens: números tetraédricos, números piramidais quadrados e números piramidais pentagonais. Caso seja necessário, o professor pode apresentar os números piramidais hexagonais. Essas figuras são necessárias para que os alunos consigam encontrar a relação entre números tetraédricos e números piramidais e, conseqüentemente, a forma geral dos números piramidais. Seguem as figuras que devem ser apresentadas:

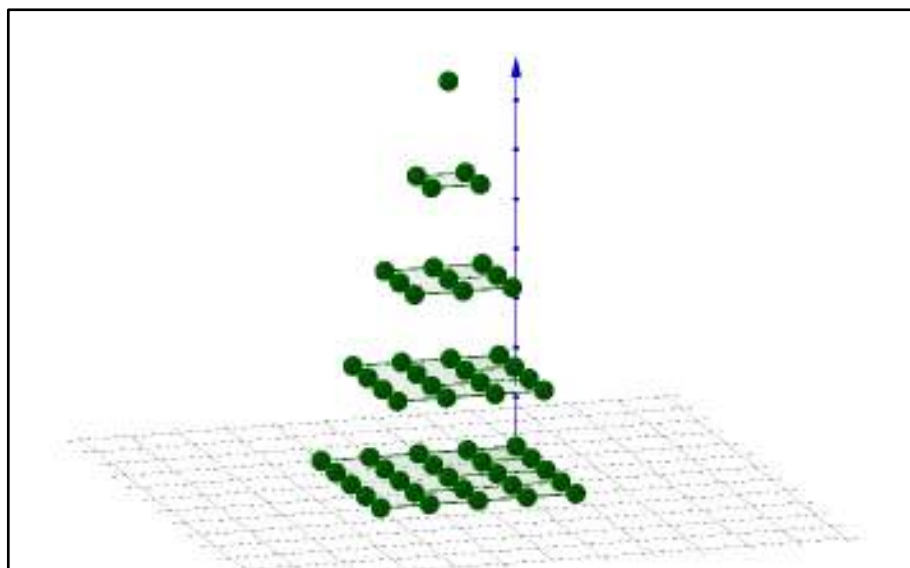
Figura 119 – Quinto número tetraédrico



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Os números tetraédricos serão apresentados primeiro, pois serão a referência para a investigação sobre a forma geral dos números piramidais. Em seguida, deve ser apresentada a representação dos números piramidais quadrados, com uma cor apenas. O objetivo é que os alunos conheçam apenas a estrutura e não que busquem relações de imediato.

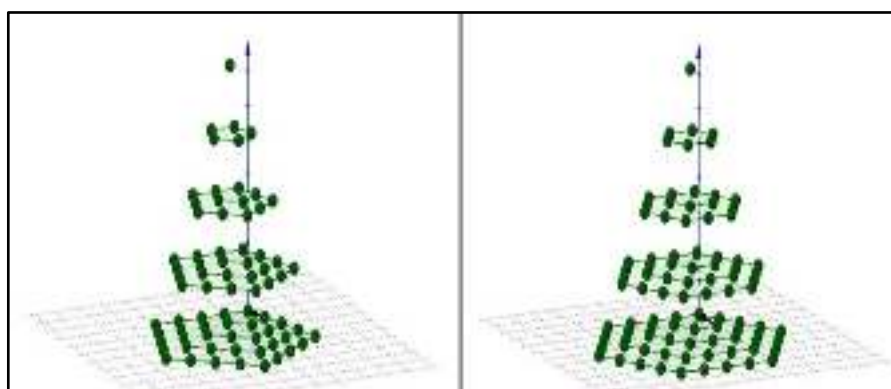
Figura 120 - Quinto número piramidal quadrado



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Os outros números piramidais podem ser apresentados de forma mais rápida, pois se pressupõe que os alunos já estejam familiarizados com sua forma geométrica.

Figura 121 – Números piramidais pentagonais e hexagonais



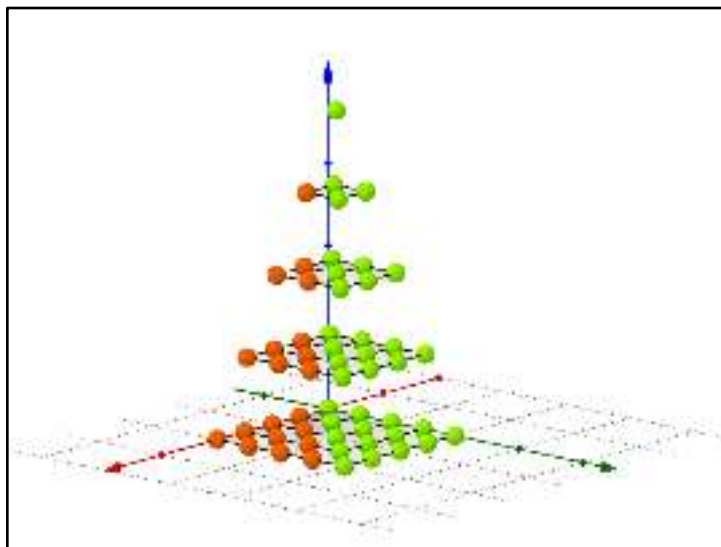
Fonte: acervo da pesquisa

A partir dessas informações iniciais e dado o objetivo da situação, os alunos devem iniciar a primeira fase da TSD.

Situação de ação: Nessa fase, espera-se que os alunos, munidos das figuras e definições, busquem encontrar uma relação entre as pirâmides de pontos. Conforme as situações anteriores, eles devem encaixar as pirâmides para formar outros números piramidais. O esboço deve ser encorajado pelo professor e esse processo deve ser devidamente registrado, pois podem surgir conjecturas que posteriormente podem ser usadas para a resolução da situação.

Espera-se que essa fase seja rápida, pois o objetivo aqui é que os alunos já tragam alguns conceitos das situações anteriores. Assim, logo podem perceber que existe a relação entre números tetraédricos e piramidais quadrados, dada por $S_4^3(n) = S_3^3(n) + S_3^3(n-1)$, que pode ser observada pela Figura 122:

Figura 122 – Números piramidais quadrados via números tetraédricos



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Essa figura não deve ser apresentada aos alunos. Ela ilustra uma situação esperada em que eles podem conseguir construir por meio de esboços. Dessa forma, eles entram na próxima fase da TSD.

Situação de formulação: Já com o esboço, os alunos devem ser encorajados a formar outras pirâmides. Dessa forma, é esperado que eles encontrem a seguinte relação:

$$S_m^3(n) = S_3^3(n) + (m-3)S_3^3(n-1)$$

Essa relação, de fato, expressa a propriedade que relaciona números triangulares e números piramidais; porém, os alunos ainda devem validar essa relação por meio do desenvolvimento dessa propriedade. Substituindo os números tetraédricos por sua forma geral,

temos $S_m^3(n) = S_3^3(n) + (m-1)S_3^3(n-1)$, o mesmo que $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} + (m-3)\frac{(n-1)(n)(n+1)}{6}$.

Como há termos em comum, a expressão pode ser reduzida para

$\left(\frac{n(n+1)}{6}\right)((n+2) + (m-3)(n-1))$, e assim, temos $S_m^3(n) = \frac{n(n+1)((m-2)n - m + 5)}{6}$. Como é

necessário provar tal afirmação, tão logo os alunos a consigam, eles entram na fase de validação.

Situação de validação: Para validar a fórmula encontrada a partir da relação, os alunos podem recorrer ao método de indução, o qual está descrito na próxima fase. Vale ressaltar que tal prova deve estar registrada e contida na fase atual.

Situação de institucionalização: Aqui o professor, já de posse do itinerário construído pelos alunos, pode iniciar a institucionalização pela figura (relação entre números tetraédricos e números piramidais quadrados) e, em seguida, enunciar o teorema da forma dos números piramidais.

Teorema (*Forma geral dos números piramidais*). O número piramidal m -gonal e de ordem n , denotado por $S_m^3(n)$, é dado pela soma dos n primeiros números m -gonais, sendo a fórmula geral expressa como:

$$S_m^3(n) = \frac{n(n+1)((m-2)n - m + 5)}{6}$$

Vale ressaltar que essa demonstração pode ser obtida no Capítulo 3, página 115, por meio da Propriedade 7. Desse modo, é oportuno realizar um resumo do que foi estudado e esclarecer possíveis dúvidas. Essa fase é importante para que o assunto seja tratado de maneira clara e objetiva. Constitui também o momento em que o professor pode avaliar o nível de conhecimento adquirido pelos alunos durante a situação, oferecer leituras complementares e sanar as últimas dúvidas, se necessário.

As próximas duas situações referem-se às representações desenvolvidas exclusivamente nesta pesquisa: a representação via ladrilhamentos, mais precisamente de números triangulares. Como se trata de um tema ainda pouco explorado no universo dos números figurados, ambas as situações visam observar as duas representações mais conhecidas de uma sequência, a saber: sua forma geral e sua forma recorrente.

Na primeira situação, procurou-se estabelecer a relação entre a forma geral de um número figurado e as possíveis regras de ladrilhamento. Já na segunda, com a regra já estabelecida, o objetivo é encontrar a recorrência desses números por meio da manipulação dos ladrilhos, utilizando tabuleiros físicos e virtuais. Assim, descreveremos a seguir as duas últimas situações e a análise do que se espera dos alunos.

4.4 Situação 4: Encontrar a regra de ladrilhamento para números triangulares usando ladrilhos de dimensões 1×1 de cores distintas (cinza, vermelho e preto) chamado de conjunto CVP, necessários para cobrir um tabuleiro $1 \times n$.

A situação didática refere-se à representação por ladrilhamento de números poligonais, especificamente de números triangulares. Assim como nas configurações anteriores, essa representação é utilizada como base para a construção dos números figurados de forma geral. De modo semelhante, para se construir números triangulares por meio de ladrilhamentos, é necessário compreender a regra dos *gnômons* e sua aplicação a essa nova configuração. A introdução do assunto deve ser conduzida de maneira a construir sequências até que a ideia resulte na obtenção de números triangulares, bem como a evidenciar como essa expansão pode auxiliar na compreensão de outras configurações de números figurados a partir dessa.

Para as próximas duas situações, o professor apresentará dois recursos que facilitarão o entendimento acerca da ideia de tabuleiro. O primeiro recurso refere-se a um material concreto, confeccionado em Etileno Vinil Acetato (EVA), no formato de ladrilhos quadrados, de diversas cores, para que os alunos possam manusear e formular suas próprias conclusões. A Figura 123 mostra uma configuração formada com esses ladrilhos.

Figura 123 - Os dezesseis ladrilhamentos do quarto número quadrado



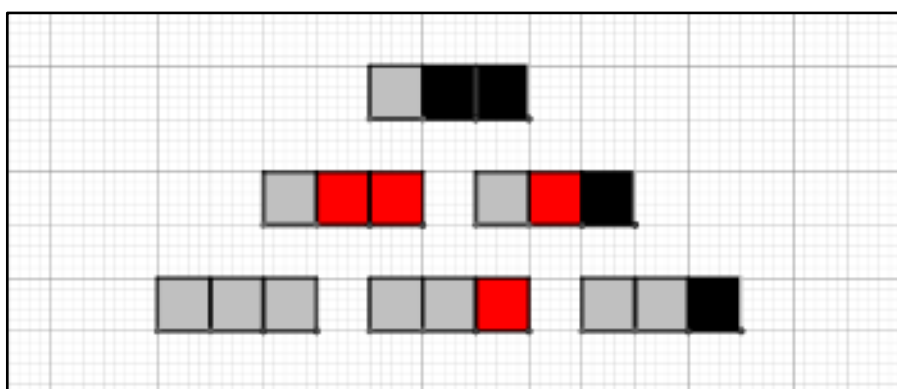
Fonte: Construção do autor (2024).

A figura a seguir mostra uma configuração composta por quatro ladrilhos de cores distintas (cinza, vermelho, azul e preto), os quais formam dez ladrilhamentos diferentes, construídos com base em regras específicas. A partir desse material, os alunos podem: (i) criar

regras para gerar sequências; (ii) construir sequências a partir de regras estabelecidas; e (iii) identificar regras com base em uma sequência dada.

O segundo recurso consiste em um tabuleiro desenvolvido no GeoGebra, que possui as mesmas características do tabuleiro de EVA e pode ser utilizado em computador. Vale ressaltar que ambos os recursos compartilham o mesmo objetivo e serão empregados conforme a escolha dos alunos. Assim, é possível formar grupos que trabalhem com o material concreto e outros com o material digital, sem que isso comprometa a dinâmica da aula. A interface do recurso digital pode ser observada na figura a seguir, e seu detalhamento já foi apresentado em seções anteriores.

Figura 124 - Exemplo de ladrilhamento construído no tabuleiro virtual

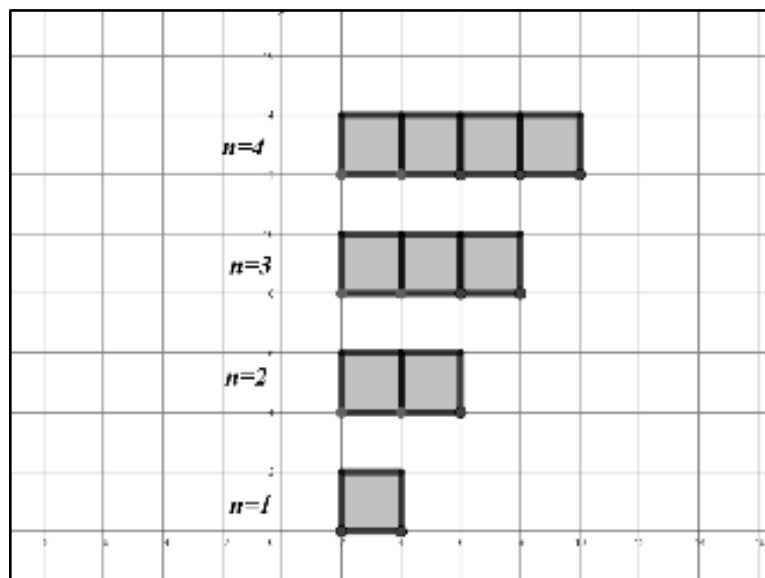


Fonte: elaboração do autor

Na Figura 124, temos as seis possibilidades usando a regra dos números triangulares para $n=3$. O objetivo dessa situação é descobrir quais regras são usadas aqui e o manuseio dos materiais apresentados será importante para essa descoberta.

Para iniciar o assunto, o professor deve apresentar a definição de ladrilhamento e algumas construções usadas no GeoGebra de outras sequências como exemplo. Primeiramente deve-se observar a sequência $S_3^0 = (1, 1, 1, 1, \dots)$ e uma regra de ladrilhamentos usando um ladrilho cinza  e a regra $\mathfrak{R}^1 = (\text{organizar } n \text{ ladrilhos})$. Para detalhar, o professor deve apresentar a Figura 125:

Figura 125 - Ladrilhamento da sequência de uns

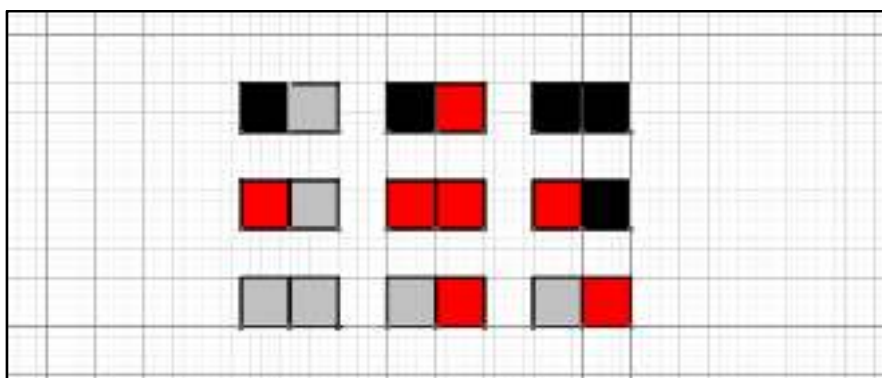


Fonte: Elaboração do autor (2024).

Essa figura mostra que, de fato, só é possível fazer um ladrilhamento usando um ladrilho cinza e a regra $\mathfrak{R}^1$. Assim, a sequência formada é S_3^0 . Nesse momento, o professor pode pedir que os alunos manipulem os materiais usando duas cores, a fim de encontrar alguma sequência, e a escrevam. Essa atividade tem como objetivo familiarizar os alunos com os materiais – depois disso o professor pode iniciar a situação.

Situação de ação: Aqui os alunos terão os dois materiais e já tiveram o primeiro contato com eles. Inicialmente, é esperado que os alunos procurem construir um número triangular que não seja o primeiro, por ser óbvio e, dessa maneira, eles devem tentar usar as três cores para formar, por exemplo, o segundo número triangular. A Figura 126 representa as nove possibilidades que os alunos podem encontrar, caso isso aconteça.

Figura 126 - possibilidades de ladrilhamento em um 2-tabuleiro com três peças



Fonte: Elaboração do autor (2025).

Nesse momento, pode surgir várias conclusões sobre o critério para que se retirem ladrilhamentos até que se obtenha apenas três. No entanto, os alunos devem concluir que precisam construir o próximo número e observar a quantidade de ladrilhamentos formados e se a regra de exclusão serve para que esse número também se torne triangular.

Caso optem por construir todas as possibilidades para $n=3$ usando todas as combinações de 3 cores, os alunos encontrarão 27 ladrilhamentos, pois em cada posição podem conter as 3 cores. Nesse caso precisarão retirar 21 peças usando as regras estabelecidas anteriormente até que restem apenas 6. Com essa dificuldade estabelecida, é esperado que alguns alunos observem que será mais fácil excluir peças se for fixada uma cor de início, pois as possibilidades diminuem significativamente. Caso isso não aconteça, o professor pode sugerir que comecem a partir do primeiro número, mesmo que o resultado seja óbvio, e lembrar que se trata de uma sequência em que cada número depende de seu anterior; assim, os alunos podem estabelecer uma cor de início e seguir completando para encontrar o próximo termo das continuidades às próximas fases da TSD.

Situação de formulação: Nessa fase, é esperado que os alunos já tenham a ideia de como construir os números a partir do primeiro. Essa fase é importante, pois nela podem surgir algumas regras que darão certo no começo, porém não definem a sequência desejada. O professor deve ficar atento ao momento em que os alunos devem fixar uma peça (preferencialmente a peça cinza ) e logo tentarão fixar também a próxima peça (preferencialmente a peça vermelha )

É previsto que, nesse momento, os alunos também busquem pela hierarquia Cinza-Vermelho-Preto que é um momento importante na construção das regras. Caso isso não aconteça, o professor pode relembrar os ladrilhamentos feitos com uma e duas peças. Supõe-se que, com essa atitude, os alunos automaticamente irão organizar as peças de modo hierárquico, como o desejado.

Os momentos que surgem a seguir determinam o fim dessa fase e início da próxima. As regras que os alunos podem propor devem ser minuciosamente anotadas para avaliar posteriormente se valem para alguma regra auxiliar; porém, assim que forem percebidas as três regras do ladrilhamento, a saber: R1- iniciar o ladrilhamento sempre pela peça cinza, R2- organizar os ladrilhos sempre mantendo a hierarquia de cores , é o suficiente para construir números triangulares. Para validar essas informações, os alunos devem construir

a forma geral dos números triangulares usando apenas essas regras. Esse fato deve ser verificado na próxima fase da TSD

Situação de validação: Nessa fase os alunos devem constatar que as regras encontradas podem fornecer a soma dos n primeiros naturais, que resulta em números triangulares. Assim, os seguintes argumentos são esperados:

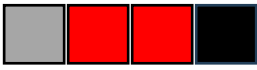
Pela regra R1, o ladrilhamento composto por um ladrilho deve ser apenas , ou seja, um ladrilhamento. Nesse momento, o professor pode propor uma nomenclatura para a quantidade de ladrilhamentos, que pode ser definida como T_n . No caso, espera-se que o aluno conclua que $T_1 = \{ \text{gray square} \} = 1 = S_3(1)$. O professor também pode propor, para facilitar a escrita, que os alunos representem os ladrilhos por letra. Assim, o ladrilho cinza será (C), o ladrilho vermelho será (V) e o ladrilho preto por (P). Com esses artifícios, os alunos podem analisar os outros casos usando a regra das posições. Dessa forma, é provável que os alunos forneçam o seguinte cálculo:

Para o caso $n=1$ pela regra R1, temos $T_1 = \{C\}$, e sendo $n(T_n)$ o número de elementos do conjunto T_n , então $n(T_1) = 1 = S_3(1)$. Seguindo o mesmo passo para $n=2$, temos $T_2 = \{CC, CV, CP\}$. Desse modo, $n(T_2) = 3 = S_3(2)$. Agora analisando o caso $n=3$ e o conjunto $T_3 = \{CCC, CCV, CCP, CVV, CVP, CPP\}$, de fato, $n(T_3) = 6 = S_3(3)$, os alunos podem perceber que no conjunto T_3 existe um ladrilhamento em que C está em todas as posições, dois em que C está nas duas primeiras posições e três em que C está apenas na posição inicial. Isso significa que, se forem separados por ladrilhamentos em que C ocupa o mesmo número de posições, isso resulta na soma $1 + 2 + 3 = 6 = S_3(3)$.

Caso os alunos ainda tenham dificuldades, o professor pode inserir uma outra representação, lembrando que por R2 os ladrilhos só podem ter a configuração $CCC \dots VVV \dots PPP$

i vezes j vezes q vezes e o professor pode sugerir a representação $C^i V^j P^q$ para um certo ladrilhamento, em que $i + j + q = n$. Desse modo, por exemplo, o ladrilhamento para $n=4$

representado por $C^3 V^0 P$ é o mesmo que $CCCP$ ou ainda , enquanto

$C^1 V^2 P^1$ é o mesmo que $CVVP$ ou ainda . Assim, os alunos devem perceber

que para um T_n , como j e q podem ser zero e i vai variar de 1 a n , podendo ser divididos em subconjuntos que podemos chamar de C^i com $1 \leq i \leq n$, o número de elementos de cada

subconjunto será as partições da soma dos naturais $j+q$. Se chamarmos essa soma de m , ou seja, $j+q=m$, temos que j pode variar de 0 a $n-1$ e para cada $j, q=m-j$. Portanto, a quantidade de diferentes pares (j, q) que somam m é equivalente ao número de inteiros j possíveis, o que vai de 0 até j . Isso resulta em $m+1$ combinações distintas de j e q . Assim, o número de elementos de um subconjunto C^{n-m} pode ser representado da seguinte maneira:

$$n(C^n)=1, n(C^{n-1})=2, n(C^{n-2})=3, \dots, n(C^1)=n$$

Então a soma dos elementos de cada subconjunto é dada por $1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}=S_3(n)$. Esse argumento é necessário para que se encerre a fase de validação da situação. Dessa forma, o professor pode iniciar a fase de institucionalização, propondo um teorema.

Fase de institucionalização: Apresentar o seguinte teorema

Teorema. Seja $n(T_n)$ a quantidade de ladrilhamentos possíveis usando n ladrilhos 1×1 de cores distintas (cinza, vermelho e preto) e as regras de ladrilhamento seguinte:

R1: O ladrilhamento deve sempre começar com um ladrilho cinza.

R2: A ordem das cores deve ser mantida como CVP (Cinza, Vermelho, Preto), de modo que um ladrilhamento nunca tenha um ladrilho vermelho antes do cinza, nem um ladrilho preto antes do vermelho.

R3: O ladrilho cinza é o único obrigatório em todo ladrilhamento.

então

$$n(T_n)=\frac{n(n+1)}{2}$$

Assim, podemos apresentar a quinta e última Situação Didática, que pode ser obtida a partir da situação 4.

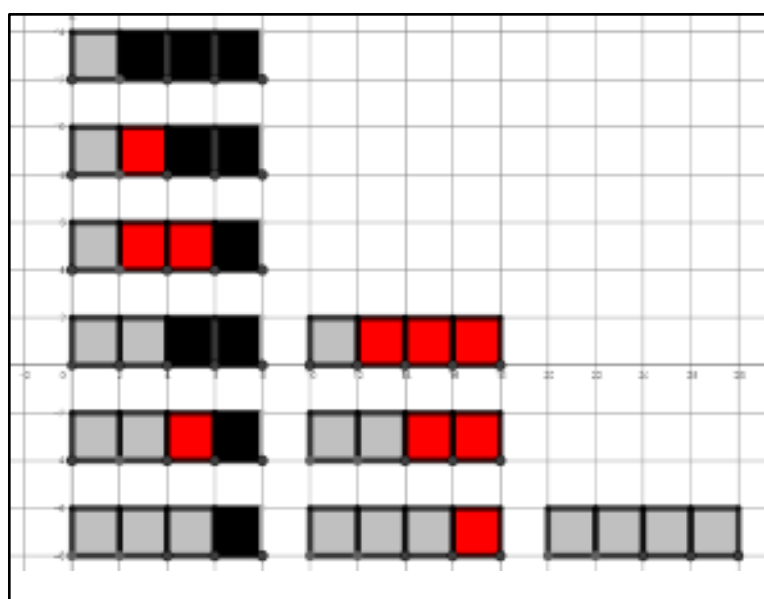
4.5 Situação 5: Encontrar a relação de recorrência de números triangulares via ladrilho

Para esta situação, serão necessários conceitos já abordados em situações anteriores, tais como: a forma geral dos números triangulares e a regra de ladrilhamento desses números. Primeiramente, o professor deve instigar os alunos a construir os primeiros casos, conforme realizado na situação anterior, observando e registrando cada fase conforme o esperado.

Situação de ação: Nessa fase, espera-se que os alunos construam os primeiros casos e observem as relações com os anteriores. Os alunos utilizarão tanto o material concreto quanto o tabuleiro do GeoGebra, podendo, assim, registrar seus ladrilhamentos e relacioná-los aos já obtidos, além de fazer os primeiros registros. Não se espera, nessa fase, que os alunos descubram alguma relação, visto que é necessária uma interação mais aprofundada com o material. No entanto, é importante que todos os registros sejam feitos, pois os alunos podem, nesse momento, ter a ideia de separar os finais em três grupos (final cinza, final vermelho e final preto), o que constitui o primeiro passo para determinar uma relação de recorrência.

Situação de formulação: Nessa fase, espera-se que o aluno já tenha os ladrilhamentos separados em grupos com base nos finais de cores diferentes. A figura a seguir mostra um esboço do que os alunos podem apresentar.

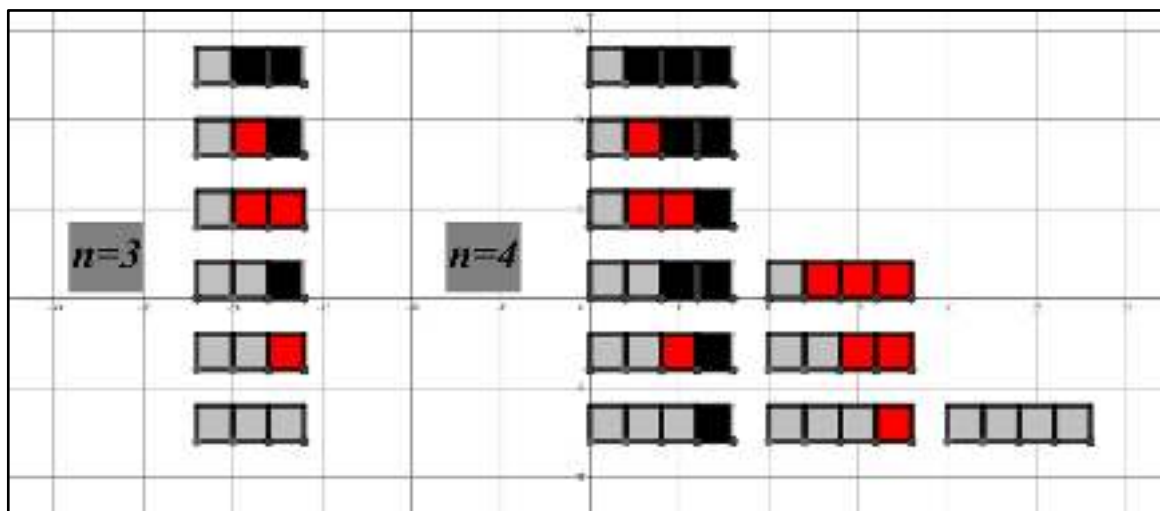
Figura 127 - Recorrência dos triangulares via ladrilhos



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Aqui podem surgir algumas ideias típicas da fase atual. Na figura apresentada, os ladrilhamentos de final preto estão organizados conforme uma organização dos ladrilhamentos anteriores, ou seja, $n=3$. Na Figura 128 a seguir, temos o ladrilhamento anterior que deu origem aos de final preto para $n=4$

Figura 128 - Visão detalhada da recorrência dos números triangulares via ladrilhos



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Percebemos que os 6 tabuleiros de $n=3$ possuem análogos de final preto em $n=4$, o que já pode trazer a ideia de usar o termo anterior da recorrência.

No passo seguinte, os alunos podem analisar as possibilidades dos tabuleiros de final vermelho e, pela figura, é possível perceber que a cor cinza varia sua quantidade em cada ladrilhamento entre 1, 2 e 3; a vermelha, por sua vez, decresce na mesma variação. Isso deve trazer para o aluno a ideia de que a quantidade de tabuleiros de final vermelho é $n-1$, e por fim, o tabuleiro todo cinza, é claro, é sempre igual a 1.

É planejado que, ao passo que o aluno encontre essa relação, ele procure uma forma de validar, seguindo para a próxima fase.

Situação de validação: Nessa etapa, o aluno, de posse da relação encontrada na fase de formulação, deve procurar validar esse argumento usando um certo n . É possível que os alunos verifiquem essa relação por meio de argumentos formulados e obtidos na fase anterior, como:

1 – Os ladrilhos de final preto em um certo T_{n+1} são obtidos acrescentando esse ladrilho final a todo ladrilhamento em T_n

2 – Os ladrilhamentos de final vermelho em T_{n+1} variam sempre de 1 a n , pois o ladrilhamento necessariamente deve ter o final vermelho, restando para o cinza ocupar apenas as n primeiras posições.

3 – O ladrilhamento cinza é único pois só possui uma cor.

Caso os alunos consigam esses argumentos, o professor pode encerrar essa fase e realizar a institucionalização junto aos alunos descrevendo por completo a situação de forma resumida e com a apresentação de um teorema que explique a relação de recorrência.

Fase de institucionalização: Nessa fase, o professor deve começar a apresentação da situação construindo alguns ladrilhamentos e os separando por seus finais. Logo em seguida, é importante enunciar um teorema que demonstre a relação de recorrência.

Teorema. Seja $n(T_n)$ a quantidade de ladrilhamentos formados a partir do conjunto CVP que corresponde a um tabuleiro $1 \times n$. Então vale a seguinte recorrência $n(T_{n+1}) = n(T_n) + n + 1$.

Dessa forma, o professor pode encerrar a situação realizando alguns questionamentos a fim de verificar se os alunos assimilaram o conteúdo e se os materiais utilizados foram efetivamente úteis. O professor também pode propor desafios para avaliar se os alunos seriam capazes de identificar outros números figurados a partir da relação entre estes e os números triangulares. Tais procedimentos podem fornecer subsídios para o desenvolvimento de novas situações didáticas, ampliando as possibilidades de aplicação tanto para o próprio professor quanto para outros docentes que desejem adotar essa abordagem em sala de aula.

5. A EXPERIMENTAÇÃO

A fase de experimentação das situações didáticas elaboradas na etapa anterior foi realizada em três instituições de ensino superior, de modo a possibilitar validações internas e externas posteriormente.

A aplicação interna ocorreu no Instituto Federal do Ceará (IFCE), *campus* Fortaleza, em uma turma da disciplina História da Matemática durante o semestre 2024.2. Participaram dessa experimentação sete estudantes devidamente matriculados e aptos a realizar a pesquisa. As identidades dos participantes não foram divulgadas; na pesquisa, eles são identificados como A1, A2, A3, A4, A5, A6 e A7. Os encontros aconteceram em duas datas, cada uma com duração de duas horas-aula, totalizando quatro horas-aula de aplicação da situação didática.

No momento de apresentação do professor-pesquisador e da atividade a ser desenvolvida, foi exibido um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE). Informou-se também que a pesquisa contava com a aprovação do Comitê de Ética e Pesquisa do Instituto Federal do Ceará, submetida à Plataforma Brasil. O termo foi lido para todos os presentes e, posteriormente, assinado pelos alunos que aceitaram participar.

Vale ressaltar que, embora a pesquisa tenha sido elaborada com base na Teoria das Situações Didáticas (TSD), os estudantes foram informados apenas sobre o conteúdo matemático envolvido. Também se esclareceu que as discussões poderiam ocorrer em grupo ou individualmente, mas que a interação seria importante para o desenvolvimento do conteúdo matemático proposto. Após essas informações adicionais, o professor iniciou a aula com algumas considerações importantes e com o contexto histórico-matemático no qual se inserem os números figurados. Em seguida, a situação elaborada foi apresentada aos estudantes, dando-se início à aplicação.

Durante toda a aplicação, é necessário que o professor tenha em mente o que foi planejado na fase anterior da TSD e faça anotações em tempo real sobre os acontecimentos em sala de aula, visando a possíveis modificações no itinerário descrito previamente ou mesmo a incorporação de ideias adicionais, muitas vezes fornecidas pelos próprios participantes.

A coleta de dados durante a fase de experimentação foi realizada por meio de diversos recursos, tais como fotografias, gravações de áudio e registros escritos produzidos pelos estudantes ao longo da resolução das situações propostas. Esse procedimento permitiu a obtenção de uma quantidade significativa de material a ser analisado na fase posterior, tornando a análise mais fiel ao que foi elaborado durante a fase de análise a priori e de concepção.

É importante destacar que, na fase de análise *a posteriori* e validação das situações (que ocorrerá em seguida), poderá ser observado que o percurso dos alunos ao longo das atividades nem sempre se dá de forma linear, o que é esperado no âmbito da proposta da TSD. Contudo, mesmo anotações consideradas preliminares – como rascunhos, esboços ou tentativas parciais de resolução – constituem elementos valiosos para a análise, pois revelam indícios significativos do pensamento matemático em construção. Esses registros, portanto, são fundamentais para compreender os efeitos da proposta didática no contexto da sala de aula e para avaliar o alcance dos objetivos visados pela pesquisa.

Na aplicação, destaca-se a importância de o professor criar um ambiente que favoreça a interação dos alunos com a proposta didática apresentada. Esse ambiente foi viabilizado por meio dos tabuleiros elaborados na fase de concepção, os quais desempenharam papel essencial ao estimular a exploração, a argumentação e a construção conjunta de significados.

Além disso, reconhecendo que a apropriação dos conceitos depende também de conhecimentos prévios, fez-se necessária uma breve introdução sobre os números figurados, incluindo aspectos históricos e as principais definições, de modo a preparar os alunos para o engajamento nas atividades propostas.

Conforme descrito na fase de concepção, o professor também apresentou dois exemplos de sequências e seus respectivos ladrilhamentos: a primeira é a sequência formada apenas por números uns, e a segunda é a sequência dos números naturais.

Desse modo, a situação pôde ser apresentada, marcando o primeiro contato efetivo dos alunos com a proposta didática. A partir desse momento, cabe ao professor registrar de forma minuciosa cada fase prevista na TSD, bem como as transições entre elas, a fim de realizar as análises necessárias e validar a adequação da situação proposta. Esses registros serão analisados e descritos na próxima seção.

5.1 Experimentação Interna (IFCE – 2024.2)

Nesta seção, apresentamos os registros e as observações iniciais realizados durante a fase de experimentação no Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Ceará (IFCE), na turma de História da Matemática do semestre 2024.2. A pesquisa contou com oito participantes nessa turma, identificados neste estudo como A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7 e A8. Trata-se da primeira experimentação conduzida no âmbito da pesquisa.

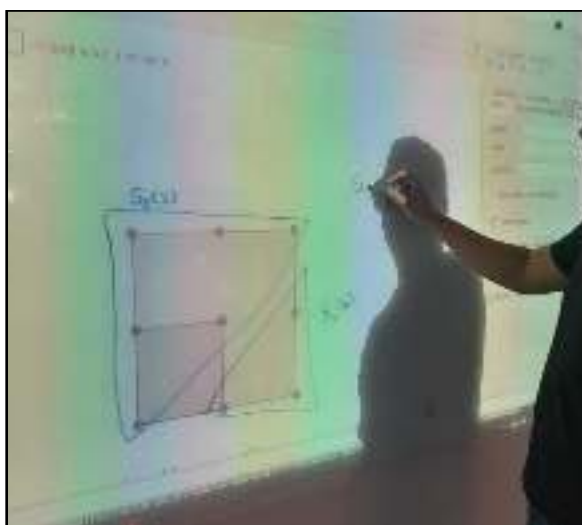
Inicialmente, é necessário registrar as dificuldades dos estudantes em participar da pesquisa, motivadas por dois fatores principais: a falta de conhecimento prévio sobre o tema e

a resistência em se manifestar na lousa ou mesmo oralmente. Essa resistência decorre do tipo de abordagem proposta pela pesquisa, que exige uma participação mais ativa dos alunos nas atividades desenvolvidas. Apesar dessas dificuldades, foi possível realizar alguns registros de cada situação proposta. O primeiro registro correspondeu à apresentação do conteúdo, na qual se abordou brevemente a história dos números figurados, suas conexões com a disciplina e os aspectos matemáticos que seriam desenvolvidos.

Logo após a apresentação, foi necessário abordar o assunto por meio do software GeoGebra (SG), pois alguns alunos ainda demonstravam resistência em relação à matemática empregada. Assim, realizou-se uma apresentação dos números figurados com o auxílio do GeoGebra, visando à primeira situação didática (SD). Após certo período de resistência inicial, os primeiros resultados puderam ser registrados.

Na primeira situação, perguntou-se aos alunos sobre uma possível relação entre números triangulares e números quadrados, com a figura exibida na lousa. A intenção inicial era que eles fossem questionados sobre essa relação sem o auxílio da figura, para que percebessem a diferença de dificuldade entre as duas condições (com e sem imagem). No entanto, os alunos não demonstraram interesse em responder na ausência da figura. O registro desse acontecimento indica que, nesse caso, o GeoGebra contribuiu para despertar o interesse dos alunos pelo conteúdo, mas não para facilitar a resolução propriamente dita, ao contrário do que se pretendia inicialmente.

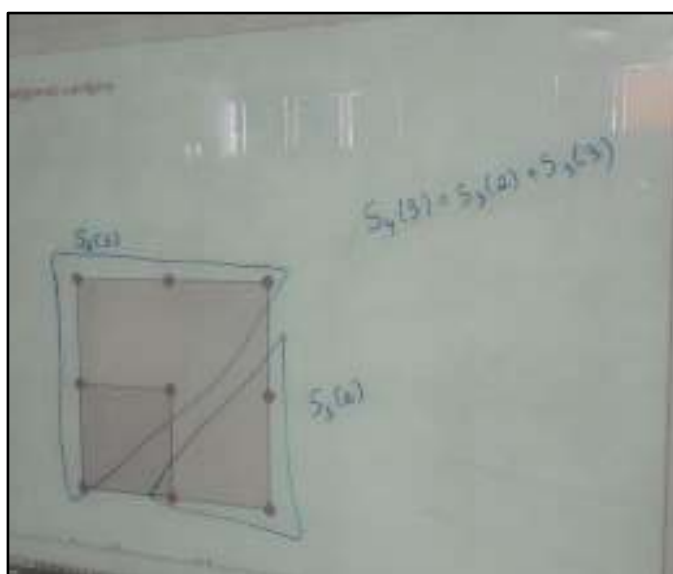
Figura 129 - Aluno A1 na fase de ação da situação 1



Fonte: Acervo da pesquisa (2024).

A imagem mostra um estudante, identificado aqui como A1, construindo dois números triangulares a partir de um número quadrado. Essa é a fase de ação e o início da investigação acerca da resolução da primeira SD proposta. Os registros a seguir mostram a fase de ação se desenvolvendo até a fase de formulação da TSD. Percebemos que na próxima foto, temos um esboço da relação dos números triangulares e quadrados $S_4(n) = S_3(n) + S_3(n-1)$

Figura 130 - Situação 1 na fase de ação



Fonte: Acervo da pesquisa (2024).

Aqui temos também a transcrição da conversa com os alunos A1, A2 e A8. Eles buscavam uma forma de conjecturar a regra da relação entre números triangulares e quadrados logo no primeiro contato, porém não entenderam que a pergunta se tratava de uma relação com números poligonais.

PESQUISADOR: muito bem, vocês estão prontos? Estão encontrando os triângulos?

A1: Menos um...Então seria assim. Número... Como é que eu posso chamar esse? Quadrado. Número quadrado n é igual a Número triangular n , mais número triangular $n-1$.

...

PESQUISADOR: Vamos ver agora o que aconteceria se o número fosse triangular. Ou, se o número fosse pentagonal. No caso esse seria o terceiro também.

A2: você deixar tudo em função de números triangulares?

PESQUISADOR: Isso, mas a ideia é que você encontre esse aqui (terceiro número pentagonal)

A2: ok, eu tô rabiscando aqui.

A8: tem três né? Tem três...

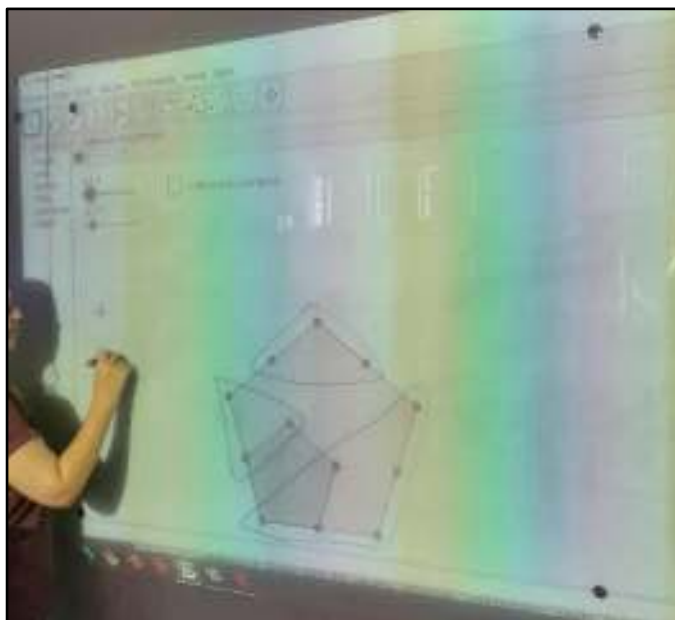
A1: Se você fizer um corte aqui, aí vai ficar um de três aqui...tem outro de três aqui, mas sem a ponta

A8: eu vou mostrar, não sei se está certo...eu vou pegar esse aqui embaixo, aí tem esse aqui...

A2: tem mais que dois?

Nesse momento, a estudante A8 vai a lousa registrar suas descobertas. A gravação é encerrada e o registro fotográfico é feito a seguir:

Figura 131 – Aluno A8 na fase de ação da Situação 1



Fonte: Acervo da pesquisa (2024).

Percebe-se que, ao analisar números quadrados e pentagonais, estes últimos se apresentam de modo mais fluido, o que indica a transição da fase de ação para a fase de formulação. Nesse momento, os estudantes já são conduzidos a tentar deduzir a fórmula.

Nessa fase, os alunos já têm ideia do que demonstrar. No entanto, a resistência em ir à lousa, somada a uma possível insegurança ou receio de cometer erros, faz com que eles não queiram apresentar a resposta encontrada. Diante disso, a pesquisa prevê a apresentação da figura dos números pentagonais triangularizados ou, ainda, de um número hexagonal, conforme a necessidade dos estudantes. Assim que foram apresentadas as figuras dos números pentagonais separados por triângulos, registrou-se o seguinte diálogo, e o pesquisador apresentou o terceiro número hexagonal.

PESQUISADOR: vocês já poderiam conjecturar e posteriormente provar qual seria a relação de números poligonais e triangulares? Caso não a gente pode ver o hexagonal.

A2: quer transformar poligonal em...

A8: a fórmula de triangular para poligonal

A2: $S_3(3)$ mais $3S_3(2)$

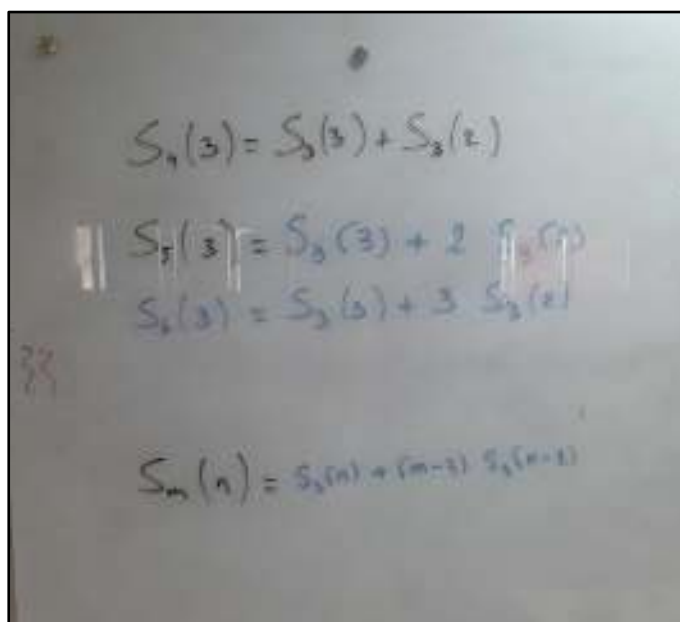
Pesquisador: aqui vocês já fizeram conjecturas acerca de n , já ajuda.

A2: o do m eu só coloquei mesmo... eu generalizei, que era, quando ela colocou aqui o três, eu só coloquei aqui $m-3$

A8: vai ficar assim, $S_m(n) = S_3(n) + (m-3)S_3(n-1)$, né?

Logo após o diálogo, o estudante A1 segue até a lousa e registra sua conjectura, o que encerra a fase de formulação. Daqui em diante os alunos só precisam desenvolver a relação e chegar à fórmula dos números poligonais previamente estabelecidas, que indica a fase de validação da SD1, o registro sobre a conjectura está indicado na figura a seguir.

Figura 132 - Fase de validação da Situação 1



The image shows a chalkboard with several handwritten mathematical formulas in blue ink. The formulas represent conjectures for the relationship between polygonal numbers $S_m(n)$ and triangular numbers $S_3(n)$. The formulas are as follows:

$$S_4(3) = S_3(3) + S_3(2)$$

$$S_5(3) = S_3(3) + 2 S_3(2)$$

$$S_6(3) = S_3(3) + 3 S_3(2)$$

$$S_m(n) = S_3(n) + (m-3) S_3(n-1)$$

Fonte: Acervo da pesquisa (2024).

A validação da conjectura elaborada pelos alunos teve início a partir da forma construída por eles próprios, considerando o percurso seguido durante a resolução da situação proposta. A intenção foi acompanhar o desenvolvimento do raciocínio até que alcançassem a fórmula geral apresentada na folha de apoio entregue no início da aplicação. Os registros utilizados para essa

análise foram obtidos principalmente a partir dos rascunhos e anotações produzidos pelos alunos, os quais permitiram observar as estratégias adotadas, as possíveis dificuldades e as justificativas mobilizadas ao longo do processo de validação.

Figura 133 - Fase de validação da Situação 1 no material impresso

The image shows two pages of handwritten mathematical work. The left page contains the following steps:

$$r_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

hipótese: suponha que

$$(n+1) + (n+2) + \dots + (n+n) = \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \frac{(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + (n+1)(n+1)}{2}$$

$$\frac{n^2 + n + n^2 + 2n + 1}{2} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{2}$$

$$\frac{n^2 + n + n^2 + 2n + 1}{2} = \frac{n^2(1+1) + n(1+2) + 1}{2}$$

$$\frac{n^2 + n + n^2 + 2n + 1}{2} = \frac{n^2(2) + n(3) + 1}{2}$$

$$\frac{n^2 + n + n^2 + 2n + 1}{2} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{2}$$

The right page contains the following steps:

$$Q_1 = 1 + 1$$

$$Q_2 = 1 + 2$$

$$Q_3 = 1 + 3$$

$$\vdots$$

$$Q_n = 1 + n$$

hipótese: $Q_n = 1 + n$

$$P_n = 1 + 2 + \dots + n$$

summa polygonal (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 839, 840, 841, 842, 843, 844, 845, 846, 847, 848, 849, 850, 851, 852, 853, 854, 855, 856, 857, 858, 859, 860, 861, 862, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 877, 878, 879, 880, 881, 882, 883, 884, 885, 886, 887, 888, 889, 890, 891, 892, 893, 894, 895, 896, 897, 898, 899, 900, 901, 902, 903, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 920, 921, 922, 923, 924, 925, 926, 927, 928, 929, 930, 931, 932, 933, 934, 935, 936, 937, 938, 939, 940, 941, 942, 943, 944, 945, 946, 947, 948, 949, 950, 951, 952, 953, 954, 955, 956, 957, 958, 959, 960, 961, 962, 963, 964, 965, 966, 967, 968, 969, 970, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 977, 978, 979, 980, 981, 982, 983, 984, 985, 986, 987, 988, 989, 990, 991, 992, 993, 994, 995, 996, 997, 998, 999, 1000

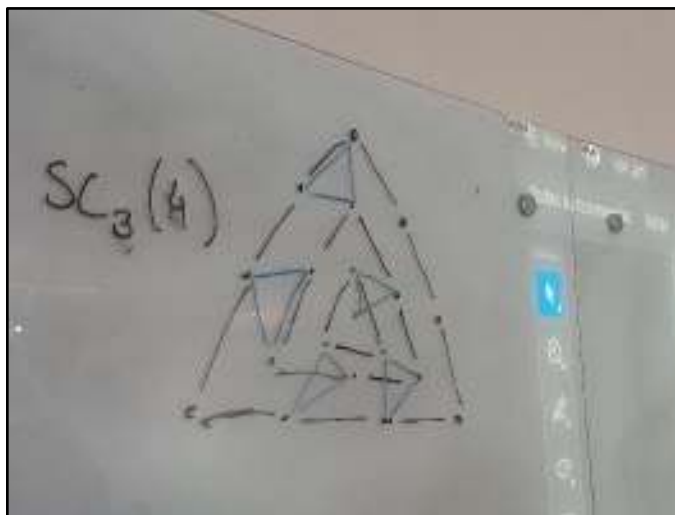
Fonte: Acervo da pesquisa (2024).

Na foto, temos a fase de validação registrada por dois estudantes, que desenvolveram a fórmula encontrada e chegaram ao resultado esperado, finalizando a S1. Para as próximas situações envolvendo a configuração comum via GeoGebra, também foram elaborados recursos no software que possibilitassem avaliar o nível de dificuldade enfrentado pelos alunos diante do conteúdo. No entanto, os registros referentes às duas situações seguintes foram propositalmente reduzidos, uma vez que a ideia central já havia sido introduzida na primeira situação. Assim, esperava-se que os estudantes avançassem de maneira mais autônoma, mobilizando os conhecimentos previamente construídos e seguindo um caminho mais conhecido. Essa diminuição nos registros reflete, portanto, uma intencionalidade pedagógica voltada a observar como os alunos se apropriariam das estratégias anteriormente discutidas, sem depender de tantos direcionamentos.

Para a segunda situação, cujo objetivo é encontrar a forma geral dos números poligonais centralizados, relacionando-os com números triangulares comuns, o pesquisador pediu,

inicialmente, que os estudantes tentassem interpretar o termo “número triangular centralizado”. A figura a seguir mostra o registro feito por um aluno.

Figura 134 - Fase de ação da situação 2 por A7



Fonte: Acervo da pesquisa (2024).

Percebemos aqui que o aluno já conseguiu produzir a ideia de “centralizado” e ainda procurou encontrar números triangulares dentro da configuração centralizada. Essa ideia marca a fase de ação e, embora ele não tenha acertado a relação, a rapidez com que procurou relacionar reflete uma ideia da situação anterior sendo implementada na próxima situação.

Nessa situação, os alunos não participaram ativamente indo a lousa, e de forma rápida deduziram a fórmula e conseguiram provar, os resultados estão presentes no próximo registro fotográfico.

Figura 135 - Validação da Situação 2 no material impresso

$$S_m(n) = 1 + \frac{m(n-1)n}{2}$$

$$S_m(n) = S_m(n-1) + m(n-2)$$

$$S_m(n) = 1 + m S_3(n-1)$$

$$S_m(n) = 1 + m \frac{(n-1)(n-1+1)}{2}$$

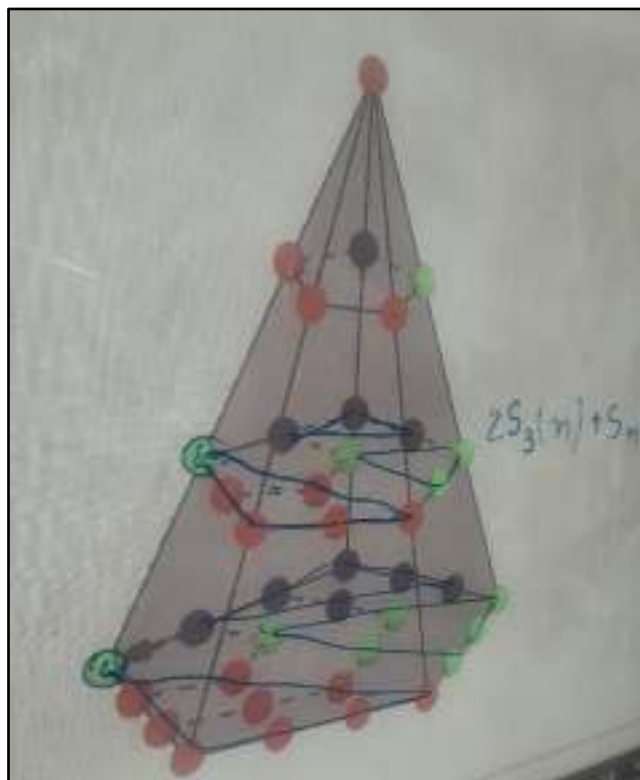
$$S_m(n) = 1 + \frac{m(n-1)n}{2}$$

Fonte: Acervo da pesquisa (2024).

Como o previsto, a situação foi resolvida de maneira rápida e serve como um exercício da situação anterior. Na Figura 135, o aluno A6, diante da explicação na atividade entregue no início da aula, desenvolveu a fórmula e visualizou a fórmula dos números triangulares comuns dentro da fórmula dos números poligonais centralizados.

Já na terceira situação, em que o objetivo é que se resolva de forma similar as outras, porém com mais rapidez, os alunos tiveram uma certa dificuldade inicial esperada, mesmo com a figura separada por cores onde se contam os números tetraédricos dentro de números piramidais. A Figura 136 a seguir mostra a fase de ação em que um estudante consegue enxergar números poligonais dentro da pirâmide de pontos, mas não consegue perceber que se trata de três pirâmides de números tetraédricos.

Figura 136 - Fase de formulação de S3



Fonte: Acervo da pesquisa (2024).

De um modo geral essa situação cumpriu seu objetivo uma vez que pôde ser percebida todas as fases da TSD e os alunos resolveram de forma mais rápida, mesmo diante do problema da passagem de dimensão.

Figura 137 - Validação de S3

$$\begin{aligned}
 S_3(n) &= S_3(n) + (n-2)S_3(n-1) \\
 &= \frac{1}{2}n(n+1)(n+2) + (n-2)\frac{1}{2}(n-1)n(n-2) \\
 &= \frac{1}{2}n(n+1)\left((n+2) + (n-2)(n-2)\right) \\
 &= \frac{1}{2}n(n+1)\left(n+2 + n^2 - 4n + 4\right) \\
 &= \frac{1}{2}n(n+1)\left(n^2 - 3n + 6\right)
 \end{aligned}$$

À direita da equação, há uma pequena diagrama de uma pirâmide e a expressão $S_3(n)$ em um retângulo azul.

Fonte: Acervo da pesquisa (2024).

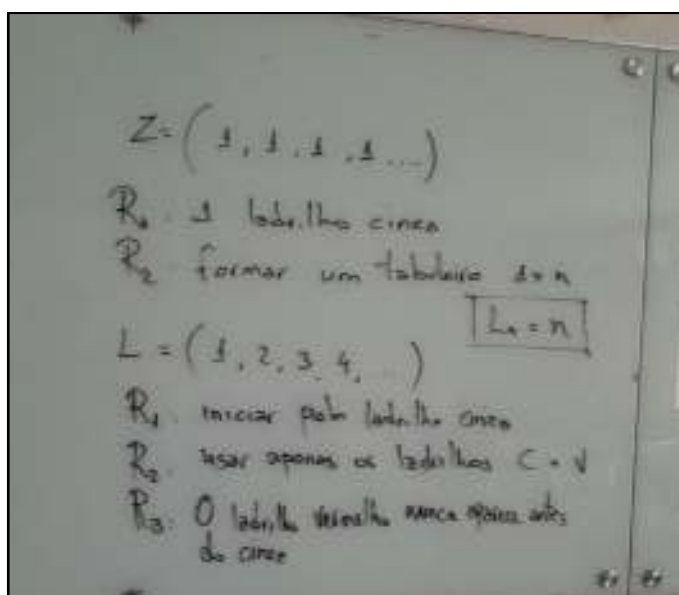
Como se pode observar no registro, os estudantes encontraram a relação solicitada de forma clara e já descartaram alguns dos caminhos anteriormente percorridos. Percebeu-se uma maior interação entre eles e, de certa forma, a facilidade na resolução tornou a aplicação mais mecânica. Diante disso, as aplicações foram encerradas por terem cumprido seu objetivo didático.

Essas três situações compõem a primeira parte da aplicação sobre a configuração dos números figurados, focada na resolução em que uma situação abre caminho para a seguinte. Elas foram concebidas de modo que, à medida que a dificuldade no estudo dos números figurados aumentasse, a resolução se tornasse mais facilitada pelo conhecimento das relações e pelo uso correto das imagens apresentadas.

Diante disso, as duas últimas situações didáticas correspondem à configuração por meio de ladrilhos, como forma de tirar os alunos da zona de conforto deixada pelas situações anteriores, bem como de relacionar conhecimentos prévios adquiridos nessas mesmas situações.

Assim, na aula seguinte, foram apresentadas, por meio do material impresso entregue no início da aula, algumas definições importantes, como tabuleiros e ladrilhos, bem como as sequências-base (a sequência de uns e a sequência linear), desta vez com foco nos ladrilhos.

Figura 138 - Introdução de S4



Fonte: Acervo da pesquisa (2024).

Como a turma apresentou uma dificuldade inicial, principalmente quanto a ir até a lousa, foi necessário perguntar sobre como seria a construção das duas sequências, enquanto o próprio pesquisador anotava as respostas na lousa. Essa negativa inicial é esperada, visto que eles já haviam demonstrado essa resistência no bloco de questões anteriores.

Figura 139 - Material concreto com a sequência de uns



Fonte: Acervo da pesquisa (2024).

O registro mostra a primeira interação em forma de construção de números da sequência dos uns, realizada pelo aluno A6, logo após a breve explicação e interação da turma diante do problema.

Figura 140 - Material concreto com a sequência dos números lineares



Fonte: Acervo da pesquisa (2024).

Nesse momento, previu-se que os alunos poderiam encontrar dificuldade em estabelecer relações entre as regras durante a transição da sequência de uns para a sequência dos números lineares. Diante disso, foi apresentada também a regra geral para os números lineares, descrita por meio do tabuleiro físico, a fim de que os alunos pudessem perceber tanto a conexão entre as duas sequências apresentadas quanto uma relação direta com a sequência dos números triangulares.

Logo após essa breve explanação, os alunos foram questionados sobre como seria uma regra para os números triangulares, sem que fosse retomada a relação dimensional com as outras duas sequências já apresentadas e seus respectivos ladrilhamentos. O registro de áudio transcrito a seguir apresenta as fases de ação e de formulação da resolução da situação didática (SD), elaborada pelos estudantes A1, A2 e A6.

A6 – ou seja, todos aqui tem que ser cinza

A1 – todos cinzas

A2 – só a primeira da primeira

A1 – só o primeiro conjunto, exatamente

PESQUISADOR – você está falando do ladrilhamento todo cinza, vai ter um ladrilhamento todo cinza, essa é sua regra?

A1 – todo primeiro conjunto tem que iniciar com a mesma cor, se colocar outra cor já quebra a regra no início...esse aqui, todo cinza... aqui, cinza, cinza, vermelho... é muita cor, se com duas cores já dá sete...

A6 – sim, mas a gente vai colocar a regra para...

PESQUISADOR – a regra é justamente para tirar essas possibilidades

A2 – mas ele (pesquisador) colocou a situação em que o vermelho nunca aparece antes do cinza (ladrilhamento dos números lineares)

A1- e se a gente colocar para nunca começar com o vermelho...

Aqui percebe-se que os alunos ainda não conseguem ligar as regras atuais com as estabelecidas nos números lineares, ou seja, tomaram as regras estabelecidas apenas como exemplo e não como uma ligação entre as sequências e regras. Continuando o diálogo, os alunos agora buscam passar para a fase de formulação.

A2 – espera aí, utilizando as regras que a gente já tem, nós conseguimos quantos ladrilhamentos?

A3 – a gente vai tentar algumas regras aqui para acrescentar o preto, vamos tentar permanecer com essa regra aqui, olha. (regra dos lineares) e acrescentar o preto nas seguintes condições

PESQUISADOR – utilizar o preto é interessante até porque estamos na terceira camada de somas

A3 vamos usar a regra 3 (regra que o único obrigatório é o cinza) e a regra 1 (iniciar pelo ladrilho cinza)

A2 – os ladrilhos vermelho e preto nunca aparecem antes do cinza, pode esse daqui e esse daqui (os ladrilhamentos dos lineares)

A3 – vai ter um assim também (início cinza e o restante preto)

A1 – isso, com o preto

Aqui os estudantes estão próximos de constatar a regra e o debate segue relacionado às regras atuais com as descritas para os números lineares, e assim, cumprindo o objetivo proposto pela SD.

A1 – aqui o resto é preto, meio que adiciona (completando somas de lineares até formar um tabuleiro de número triangular)

A3 – aqui adiciona o ladrilho preto é?

A2 – não, o ladrilho vermelho não aparece... (antes do cinza)

...

A6 – espera aí, o preto não aparece antes do vermelho

A1 – até o $n = 4$ deu certo

Diante das descobertas e ao longo diálogo entre os alunos, o esquema para $n = 4$ foi construído com o tabuleiro físico. O registro a seguir foi feito no final do diálogo com os alunos A1, A2, A3 e A6, enquanto os demais tentavam esquemas no material impresso.

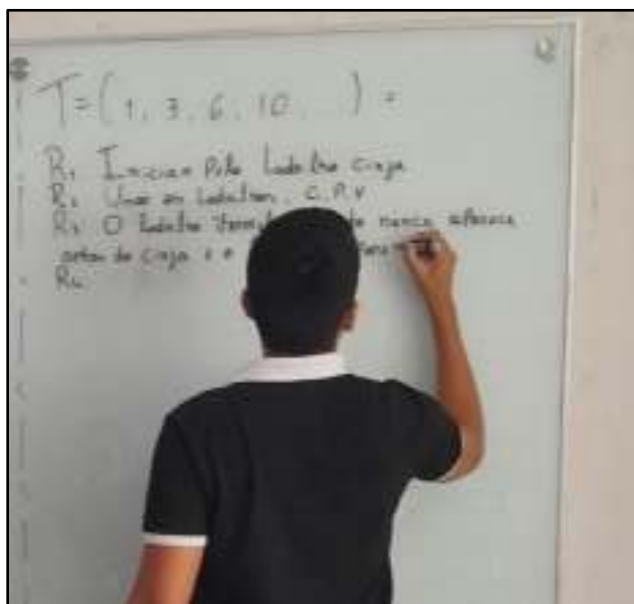
Figura 141 - Construção de números triangulares pelo tabuleiro físico



Fonte: acervo da pesquisa

Aqui os alunos já conseguiam o ladrilhamento e seguem para a regra, passando para a fase de validação da TSD. Os registros que seguem a conclusão dessa SD estão descritos na íntegra na validação, pois apresentamos a evolução da questão e as conclusões tiradas da aplicação. Para finalizar essa situação, mostra-se o registro da regra criada pelos alunos que coincide com a planejada na situação.

Figura 142 - Fase de Validação de S4



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

A seguir, os registros com o tabuleiro virtual visam a resolução da última situação didática que consiste em encontrar a recorrência dos números triangulares a partir dos ladrilhos. Para essa situação, era esperado que os alunos já conseguissem responder mais rapidamente, devido ao fato de eles já representarem a sequência usando como base as situações anteriores.

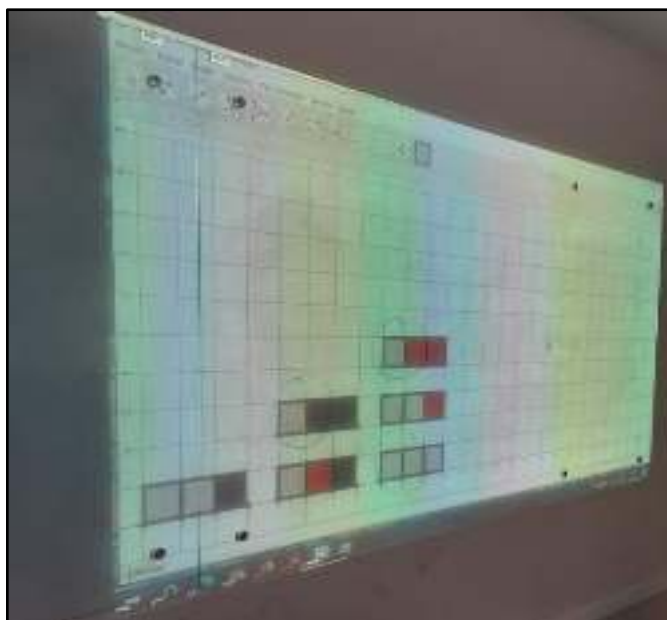
Figura 143 - Fase de ação de S5



Fonte: Acervo da pesquisa (2024).

No registro, percebe-se que os alunos foram reapresentados a recorrência dos números triangulares e, logo após, foi pedido para que eles organizassem os ladrilhamentos de modo que estes apresentassem essa recorrência.

Figura 144 - Recorrência apresentada por A3



Fonte: Acervo da pesquisa (2024).

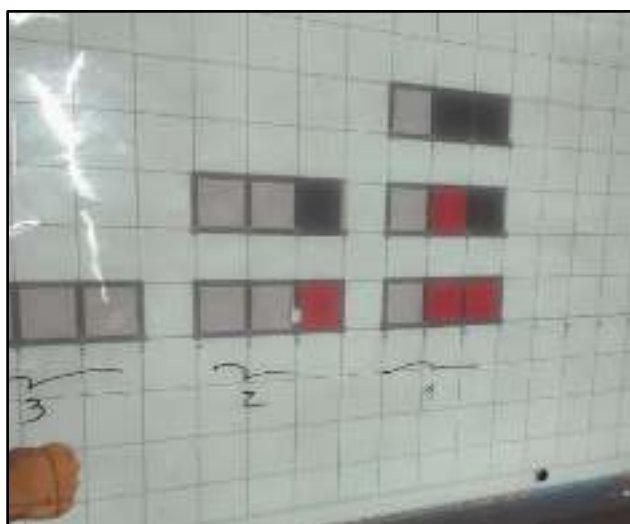
A Figura 144 mostra a recorrência apresentada pelo estudante A3. Vale ressaltar que rapidamente os estudantes se propuseram a resolver a questão, e o registro mostra o estudante

em questão resolvendo o problema na lousa. Diante da rapidez da resolução, esse foi um dos poucos registros feitos e marcou o encerramento da aplicação.

Vale ressaltar também que as fases da TSD não são bem percebidas nessa questão, pois estão embutidas na questão anterior. Ou seja, os alunos passam mais rapidamente pelas fases de ação e formulação e como a questão não exige uma resolução formal, os estudantes validam apenas por meio dos ladrilhos.

Para encerrar, ainda foi proposto o desafio de organizar o terceiro número triangular de modo que apresentasse claramente a soma $1+2+3$. O registro segue na Figura 145.

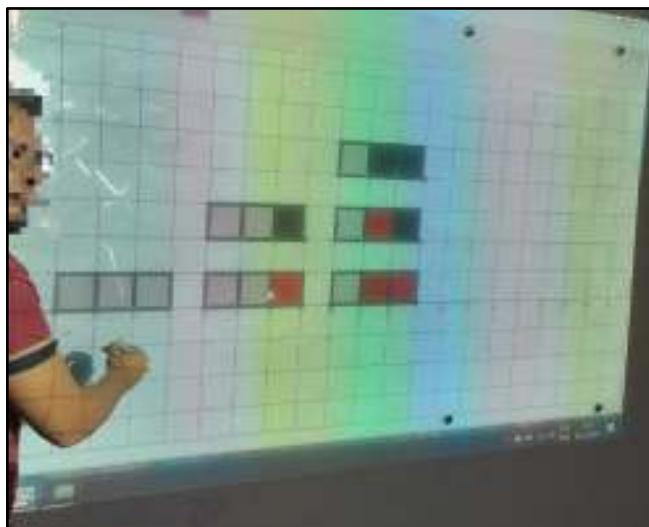
Figura 145 - Fase de Validação de S5 na turma A



Fonte: Acervo da pesquisa (2024).

A imagem mostra o estudante apresentando a soma a partir do número de peças cinza. Observa-se que, diferente da recorrência, onde os ladrilhos são organizados preenchendo-se com a peça preta no início, essas devem ser organizadas pelo conjunto de peças cinza presentes.

Figura 146 - A3 apresentando a resolução de S5



Fonte: Acervo da pesquisa (2024).

Esse registro marca o final da apresentação, no qual o estudante A3 explica para a turma a organização dos conjuntos para se perceber a soma pedida no desafio. Logo após, o professor expôs as resoluções retomando a fala diante da turma, marcando a fase de institucionalização da TSD das questões apresentadas.

5.2 Experimentação Interna (IFCE 2025.1)

A experimentação aqui apresentada corresponde à aplicação interna das Situações Didáticas voltadas para o estudo das configurações comuns e via ladrilhamentos de números figurados, realizada na turma da disciplina História da Matemática, ofertada no semestre 2025.1 do IFCE *campus* Fortaleza. A aplicação foi conduzida pelo próprio professor-pesquisador em um contexto natural de sala de aula, o que significa dizer que não houve qualquer tipo de manipulação ou artificialidade nas situações com o objetivo de se obter um resultado esperado.

A turma era composta por nove estudantes regularmente matriculados, dos quais oito participaram integralmente da aplicação das situações. Eles serão aqui representados pelos códigos B1, B2, ..., B8, de modo a preservar a identidade dos participantes e manter o rigor ético. A turma, por vezes, também pode ser tratada como Turma B, indicando tratar-se da segunda aplicação.

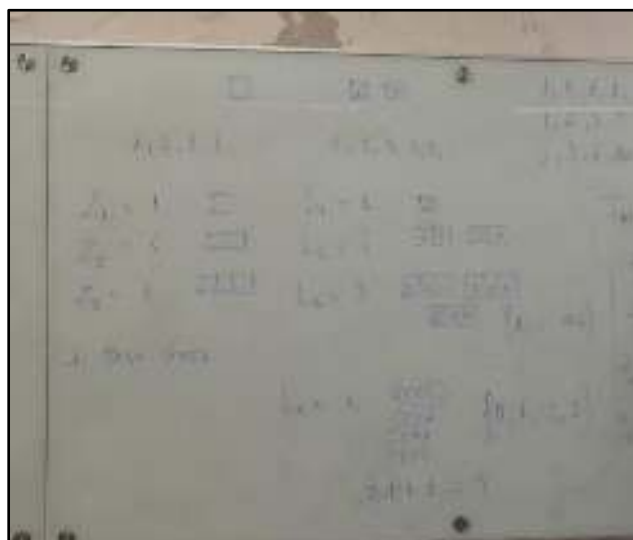
As situações foram desenvolvidas ao longo de quatro encontros presenciais, totalizando oito horas-aula. O primeiro encontro ocorreu em uma sala equipada com projetor, possibilitando

a utilização do GeoGebra na exploração dos ladrilhamentos; os demais encontros ocorreram em uma sala tradicional, com uso de tabuleiro físico.

Essa alternância de ambientes era uma variável prevista no desenho da pesquisa e não trouxe impacto significativo sobre os resultados, visto que o objetivo das tarefas não dependia do meio, mas sim da manipulação e do conceito visual presentes nas configurações apresentadas.

O professor iniciou a primeira sessão apresentando os conceitos fundamentais: ladrilhamento, tabuleiro, peças, regras de utilização e objetivo do jogo matemático. Em seguida, introduziu a noção de números figurados, destacando sua estrutura geral e a ideia de recorrência, de forma a preparar cognitivamente a turma para a atividade investigativa que viria. Nessa mesma aula, foi apresentado um exemplo de ladrilhamento referente à sequência de números lineares, com o intuito de ilustrar visualmente a construção progressiva e o papel das cores na representação das regras. Na primeira aula, o professor optou por iniciar a experimentação pelas situações 4 e 5, referentes ao ladrilhamento dos números triangulares, enquanto as situações 1, 2 e 3, referentes às configurações no GeoGebra, ficariam para as aplicações finais. Essa decisão deveu-se ao fato de que o conceito de tabuleiro virtual, o qual constitui um certo ineditismo na pesquisa, poderia não ser apresentado posteriormente devido à falta de um ambiente com projetor, como é o caso da sala oficial da turma, ainda que a não apresentação desse recurso não implique necessariamente prejuízo para a aplicação. Após essa apresentação inicial, antes mesmo de avançar para os números triangulares, o professor apresentou um exemplo – o da sequência dos uns – em que a regra de ladrilhamento consiste em usar apenas a peça cinza.

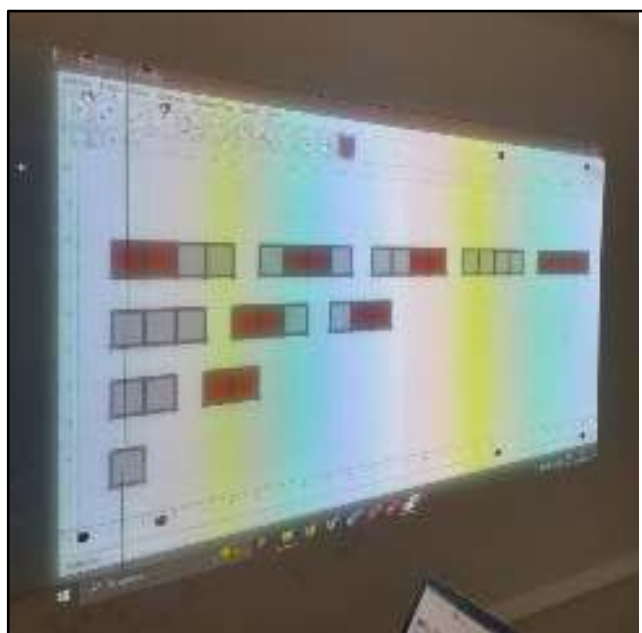
Figura 147 - Apresentação do assunto ladrilhos na turma B



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Logo após solicitou aos estudantes que pensassem autonomamente em maneiras possíveis de criar regras e ladrilhamentos para os números lineares a partir do conjunto de peças CVP (Cinza–Vermelho–Preto). A resolução dessa tarefa não estava originalmente prevista como situação didática formal dentro da Engenharia Didática, mas emergiu como etapa introdutória natural e mostrou-se valiosa para que os estudantes pensassem em possíveis regras para o que viria a seguir.

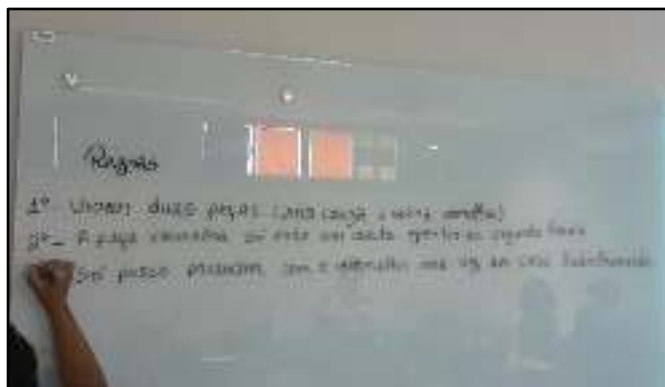
Figura 148 - Construção de números lineares por B3



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

O registro inicial analisado corresponde à construção de ladrilhamentos para números lineares realizada pela estudante B3, durante a fase de ação. Observou-se que os padrões criados pela estudante não respeitavam a regra básica de iniciar a construção com o ladrilho cinza, revelando que a sequência dos “uns” ainda não havia sido compreendida como referência necessária para posterior transição aos números lineares, tampouco triangulares. Após discussão e mediação do professor, B3 elaborou uma regra válida para os ladrilhamentos lineares, porém ainda distinta da que seria utilizada oficialmente durante as situações.

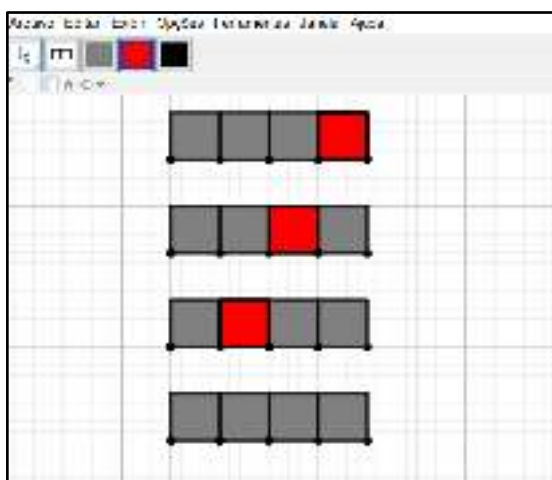
Figura 149 - Fase de formulação de S4 por B3



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Na etapa final da primeira aula, o professor apresentou o ladrilhamento padrão esperado para os números lineares, enfatizando que a regra proposta por B3 era válida, embora outra construção seria adotada para assegurar uniformidade entre os estudantes. A aula foi encerrada nesse momento.

Figura 150 - Proposta de B3 construída no GeoGebra



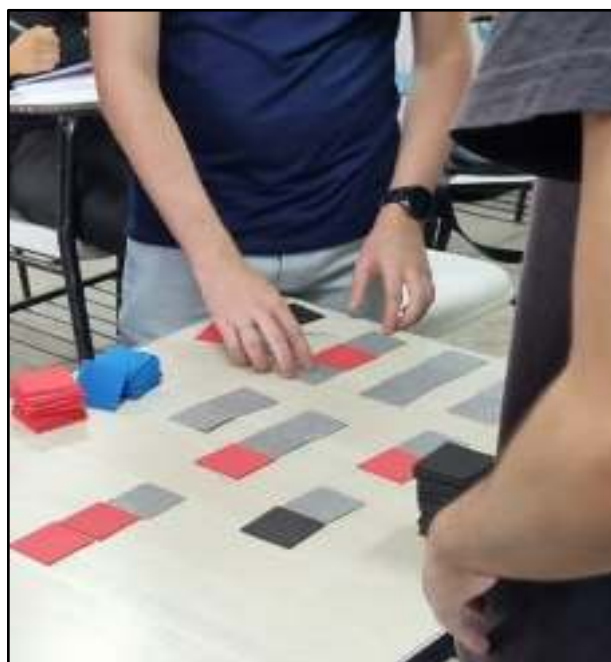
Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

No encontro seguinte, devido a problemas técnicos, a sala com projetor não pôde ser utilizada, e a atividade passou a ocorrer com o tabuleiro físico. Essa mudança, era prevista no planejamento logístico e não prejudicou os objetivos da sessão, configurando-se como uma variável didática. O professor iniciou recapitulando os conceitos discutidos anteriormente e apresentou formalmente a tarefa principal: 4. construir as regras para os ladrilhamentos dos números triangulares e 5. registrar sua recorrência visual utilizando as peças do tabuleiro.

Os estudantes, de maneira espontânea, preferiram não usar o material impresso oferecido e concentraram os registros em fotos e anotações na lousa e no caderno. Poucos minutos

s após o início da atividade, foi possível identificar a fase de ação da Situação Didática, com todos os alunos manipulando as peças e produzindo os primeiros ladrilhamentos triangulares.

Figura 151 - Primeiras construções da turma com o tabuleiro físico e os números triangulares



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Durante essa fase, percebeu-se que todos os ladrilhamentos começaram com a peça cinza, conforme previsto. No entanto, um registro específico chamou atenção: uma das construções manipuladas por B5 apresentava uma peça cinza inserida após uma peça vermelha, rompendo com o padrão esperado. Ainda na fase de ação, B5 e B8 retornaram ao tabuleiro físico e reorganizaram as peças, apresentando primeiro o ladrilhamento todo cinza e, em seguida, os ladrilhamentos com apenas duas cores, indicando um avanço no reconhecimento de estrutura.

Em seguida, B8 verbalizou: *“a mesma regra que vale para uma cor vai valer para a outra”*, referindo-se à simetria entre as combinações com cinza e preto. Essa fala representa um indício do movimento de formulação dentro da TSD e revela a noção de deslocamento das peças a fim de se chegar à regra final.

A interação prosseguiu com revezamento dos alunos entre a mesa (material concreto), a lousa e seus assentos. A transição entre registros indica que os estudantes passaram a testar hipóteses, validar regras e confrontar diferentes construções, características da fase de formulação registrada a seguir.

Figura 152 - Registros de construções e reformulações dos ladrilhamentos triangulares



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

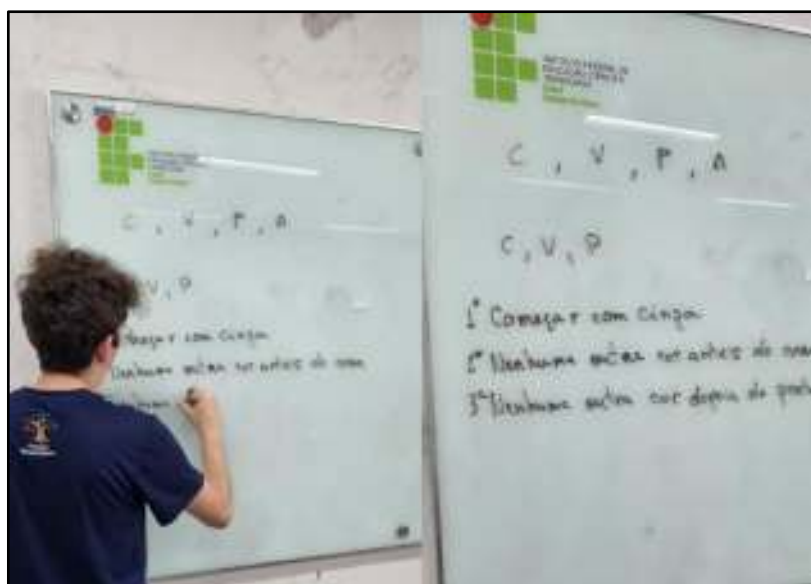
Durante a progressão da aula, os estudantes passaram da manipulação concreta para o registro verbal, demonstrando avanço na compreensão das regularidades dos ladrilhamentos de números triangulares. Essa mudança ficou especialmente evidente quando, após algumas tentativas de arranjos, o grupo passou a discutir a “ordem de aparição” da segunda cor no tabuleiro, concluindo que o ladrilhamento todo cinza correspondia ao primeiro termo da sequência e que a peça vermelha deveria ocupar progressivamente todas as posições do tabuleiro, uma por vez, originando os demais ladrilhamentos. Esse padrão representa uma possível formulação para a situação 4.

À medida que a atividade evoluía, os alunos começaram a identificar possíveis regras e testá-las para tentar construir a regra geral, e de um modo geral, o resgate ao ladrilhamento dos

números lineares e o manuseio do tabuleiro físico ajudaram os alunos a constatarem as regras e escrever na lousa as suas descobertas.

A Situação 4 foi concluída quando a turma conseguiu registrar explicitamente que a regra do ladrilhamento dos números triangulares consistia em iniciar com o ladrilhamento sempre pela peça cinza, as peças vermelhas sempre depois das cinzas e antes das pretas e as peças pretas sempre depois das cinzas e vermelhas, conforme a forma discutida na análise *a priori*. O próximo registro apresenta o estudante B5 escrevendo a regra encontrada em um estudo conjunto, na lousa.

Figura 153 - Regras de S4 apresentada por B5

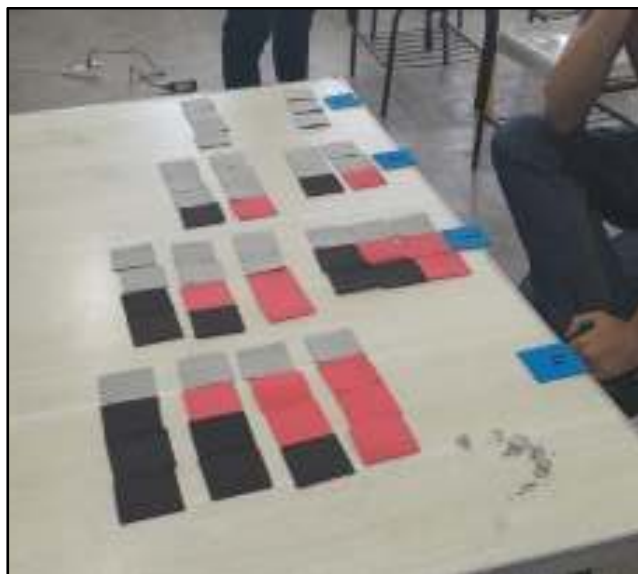


Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Com a Situação 4 consolidada, passou-se à Situação 5, cujo objetivo era que os estudantes identificassem, a partir dos ladrilhamentos, a recorrência dos números triangulares, isto é, a relação entre $S_3(n+1) = S_3(n) + n + 1$. Em poucas aproximações, a turma notou que cada novo ladrilhamento acrescentava um número crescente de ladrilhos à construção anterior. A hipótese verbalizada de forma coletiva foi que em um ladrilhamento poderíamos inserir a peça preta e isso o transformaria no ladrilhamento seguinte.

Esse registro apareceu nas configurações durante a aula por iniciativa dos estudantes, sem intervenção direta do professor o que indica o início da fase de validação entre nesse caso do coletivo.

Figura 154 - Registro da recorrência realizado pelos estudantes



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Como a fórmula de recorrência já havia sido definida previamente e os estudantes já haviam apresentado o esboço solicitado por meio dos ladrilhos, a questão 5 foi encerrada após a institucionalização conduzida pelo professor, com base nos teoremas da forma geral e da recorrência do ladrilhamento triangular. Em seguida, a aula foi concluída para dar início às outras três Situações Didáticas.

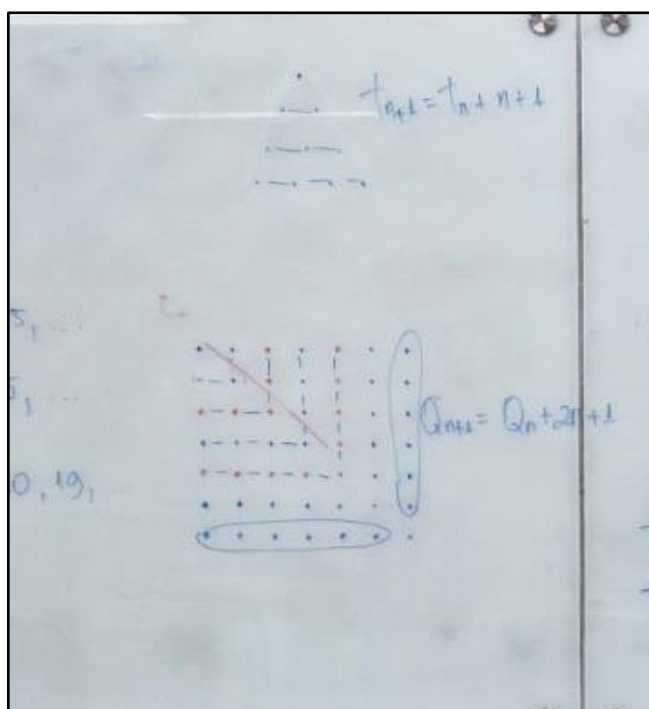
No terceiro encontro, o tema dos ladrilhos já havia sido finalizado, e os estudantes passaram a se concentrar nas demais configurações. Como já mencionado, as próximas três situações foram concebidas para serem resolvidas de modo que a primeira servisse de base para as outras duas, e que a última tivesse como objetivo ser respondida mais rapidamente que as demais, mesmo sendo a única que envolve uma configuração espacial, uma vez que trata dos números tetraédricos e piramidais como um todo.

É importante lembrar que as apresentações ocorreram sem o apoio de uma sala com projetor, o que fez com que os estudantes tivessem de se apoiar apenas no material impresso como recurso de visualização, já que este continha as disposições dos números poligonais, dos poligonais centralizados e dos piramidais. Essa mudança fez com que os estudantes passassem a interagir a partir de seus próprios assentos, o que culminou em uma escassez de registros na lousa e em um aumento dos registros no material impresso, diferentemente do que ocorreu nas situações 4 e 5. Diante desse fato, descreveremos a seguir os procedimentos e apresentaremos alguns dos registros realizados durante as exposições das situações 1, 2 e 3.

Em um primeiro momento, o professor-pesquisador leu as definições contidas no material sobre números figurados e, em particular, sobre números triangulares, e apresentou uma figura representando a configuração comum dessa sequência numérica. Em seguida, pediu que os estudantes encontrassem a forma geral dos números poligonais por meio dos números triangulares, sem mostrar qualquer figura. Nesse ponto, esperava-se que os alunos não conseguissem resolver imediatamente. De fato, durante cerca de 20 minutos, toda a turma tentava resolver o problema, e nesse período não houve comentários, perguntas ou suposições; nenhum registro foi realizado nesse momento, conforme o esperado.

Em seguida, o professor apresentou o material de apoio contendo as disposições criadas no GeoGebra. Diferentemente do que ocorreu na aplicação com a turma anterior, essa questão foi resolvida de forma linear: as fases da TSD puderam ser percebidas, e a transição entre elas foi, de certa forma, bastante rápida. Assim, o estudante B6 expôs sua ideia na lousa e, com esse apoio, os alunos encerraram a questão rapidamente.

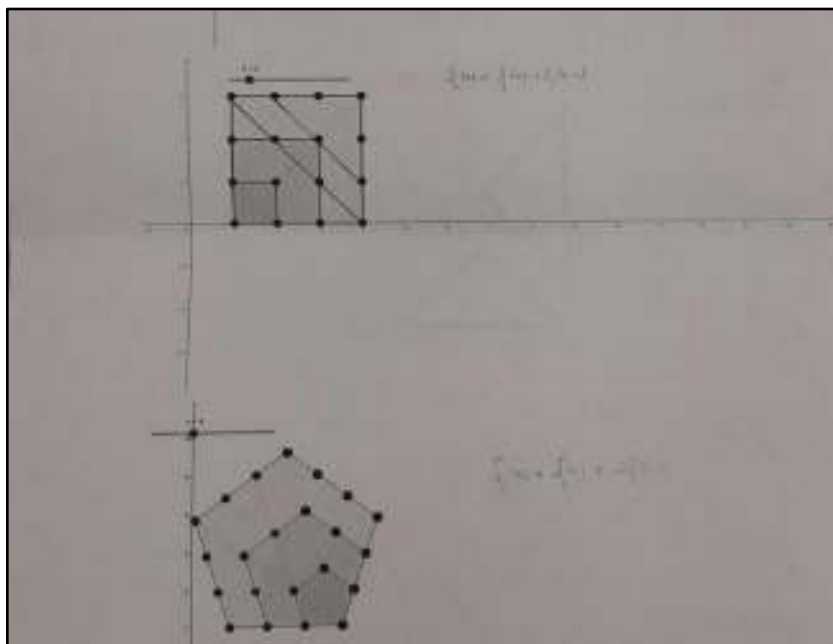
Figura 155 - Proposta de B6 para S1



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Os alunos então apresentaram algumas respostas com base na configuração apresentada por B6, das quais destacamos a título de registro, a resposta de B6 que, até então havia interagido poucas vezes, embora sempre presente.

Figura 156 - Linhas de S1 sendo traçadas por B6



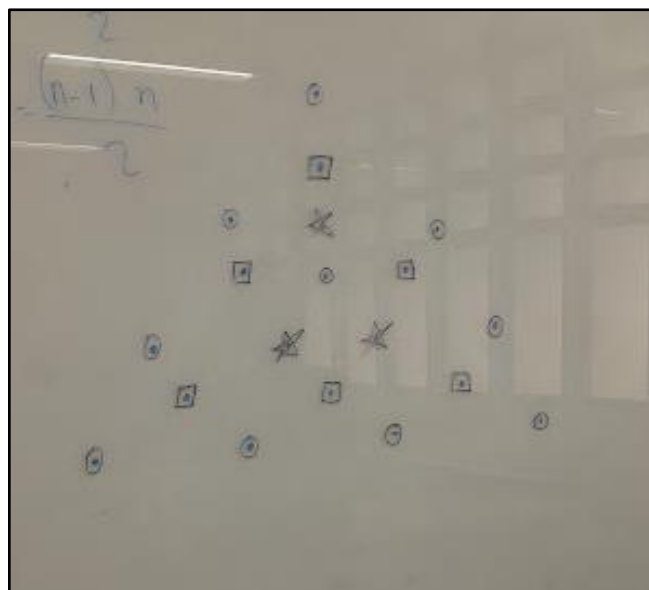
Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Nesse momento, o estudante B6 traça linhas nas configurações dos números quadrados e pentagonais, de modo a separar os números triangulares neles contidos. Ele também escreve uma relação que já corresponde à formulação da situação. Os demais alunos procedem de maneira similar, razão pela qual a situação pôde ser encerrada, uma vez que trouxe os elementos que objetivavam sua resolução. Nessa situação, a resolução baseava-se na facilidade de encontrar a forma geral dos números poligonais com o auxílio da visualização, bem como na dificuldade quando essa visualização não está disponível. Os demais registros poderão ser discutidos na validação da situação, quando serão examinadas com mais detalhe as transições entre as fases da TSD.

Diante da resolução da Situação 1, o professor seguiu para a próxima pergunta, que consistia em encontrar a relação dos números poligonais centralizados a partir dos números triangulares, porém sem utilizar a configuração. Os estudantes teriam de construir o que entendem pelo sentido do termo *centralizado*. Esse exercício inicial serve para que os alunos se apropriem da ideia de dispor padrões discretos e formar configurações figuradas.

Essa questão apresentou uma divisão mais aparente das fases da TSD, de modo que foi possível perceber a fase de ação em destaque, uma vez que os alunos tentaram descrever o que seria uma configuração centralizada. Os registros a seguir mostram a fase de ação, na qual alguns alunos tentam descrever o que seria um número triangular centralizado.

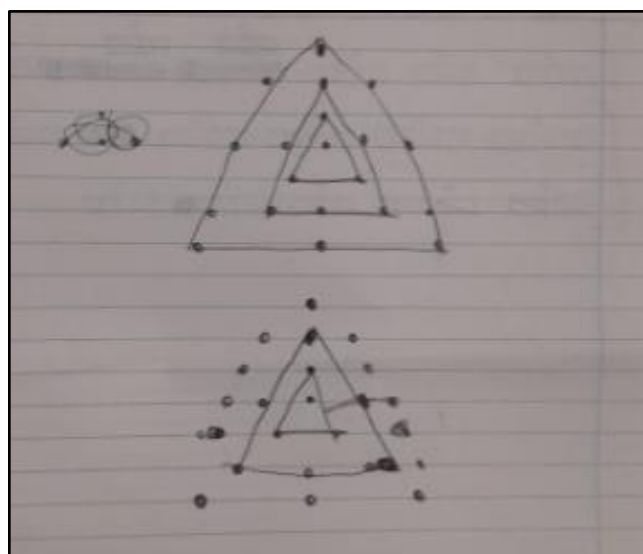
Figura 157 - Quarto número triangular centralizado por B7



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

O registro na Figura 157 foi feito pela estudante B7, que desenhou com padrões discretos o que seria o quarto número triangular centralizado. Percebemos que a estudante usou vários desenhos diferentes para criar as camadas dos números triangulares centralizados e, assim, iniciar o que poderia ser a formulação da situação. Outra configuração também foi apresentada pelo estudante B2 usando apenas pontos, o que mostra uma relação mais direta com o próximo passo que será relacioná-los com os números triangulares.

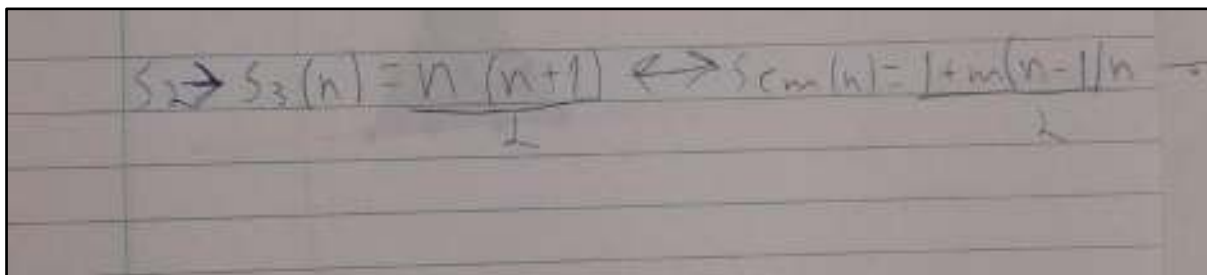
Figura 158 - Número triangular centralizado por B2



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

No registro acima, B2 traça algumas linhas que podem ser vistas na validação como uma relação direta com os números triangulares e uma passagem de fase na TSD. Depois de algumas construções e interações, finalmente a relação entre os números poligonais centralizados e números triangulares pedida pela questão foi descoberta.

Figura 159 - Validação de S2 por B2



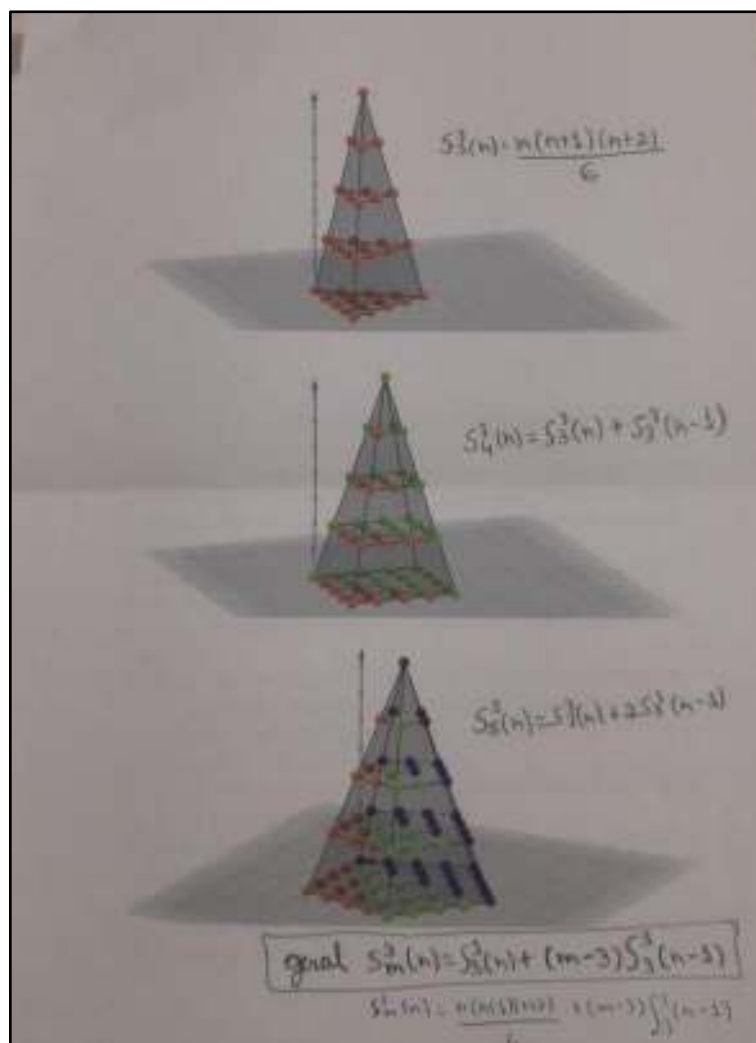
$$S_2 \rightarrow S_3(n) = \frac{n(n+1)}{2} \leftrightarrow S_{cm}(n) = \frac{1+n(n-1)}{n}$$

Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

No registro da Figura 159, o aluno B2 escreve a relação pedida na situação 2. Nesse momento, a situação pode ser encerrada e a institucionalização apresentada pelo professor-pesquisador. O registro de B2, no entanto, não foi o único apresentado, mas é o que foi mais direto desde a construção até a fórmula final.

Para finalizar, na situação 3, onde os alunos precisam encontrar a fórmula dos números piramidais a partir dos números tetraédricos, primeiramente o professor apresentou a família de sequências dos números piramidais e sua construção no GeoGebra. Logo após pediu para que os alunos encontrassem a forma geral a partir dos números tetraédricos, conforme o enunciado da questão 3. Como o esperado para essa situação, os alunos apresentaram rapidamente a resolução conforme mostra o primeiro e único registro dos alunos B8 para essa situação.

Figura 160 - Validação de S3 por B8



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Essa rapidez mostra que as situações anteriores serviram de base e que a ideia da configuração a partir de padrões discretos de fato forneceu os resultados esperados. Ademais, essa ideia será discutida de forma mais aprofundada na validação bem como outros registros e análises dos outros estudantes.

Com isso, encerrou-se o conjunto de aulas destinadas à experimentação na turma de HM do IFCE no semestre 2025.1. A experimentação foi concluída quando os estudantes, de forma autônoma, formularam e validaram tantos as regras dos ladrilhamentos triangulares e a recorrência correspondente via ladrilhos, bem como encontraram as relações pedidas nos padrões discretos mostrando que as representações tanto alternativas quanto as comuns servem de apoio para verificação de propriedades dos números figurados em qualquer dimensão.

5.3 Experimentação Externa 1 (URCA)

A terceira experimentação desta pesquisa, de caráter externo, foi realizada na Universidade Regional do Cariri (URCA) durante o semestre 2025.2. Participaram 14 estudantes regularmente matriculados no curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), na disciplina de Aritmética. Para preservar o anonimato, os participantes serão identificados como C1, C2, C3, ..., C14.

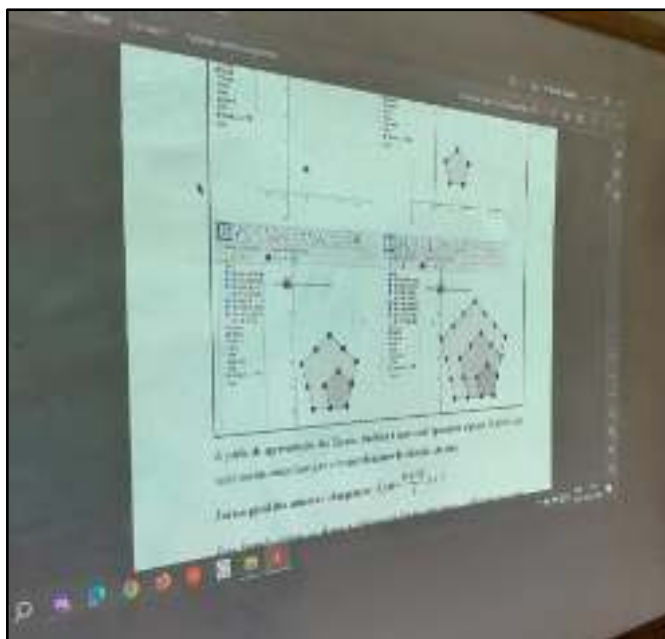
A aplicação ocorreu em um único encontro, com duração de quatro horas-aula. As situações foram adaptadas a esse formato reduzido, de modo a assegurar que o tempo disponível não comprometesse o desenvolvimento das atividades nem a possibilidade de comparação com as experimentações internas realizadas anteriormente.

No início da sessão, foram apresentados os conteúdos centrais da discussão: números figurados, ladrilhamento e o uso do software GeoGebra. Embora os participantes fossem professores atuantes na rede pública de ensino, observou-se desconhecimento generalizado sobre os três temas, exceto por alguns docentes que demonstraram familiaridade básica com o GeoGebra.

Para esta turma, foram selecionadas as situações 1, 2 e 3, relacionadas às configurações iniciais no GeoGebra, justamente por constituírem um conjunto de tarefas acessíveis aos participantes que já possuíam algum contato prévio com o software. Em seguida, foram trabalhadas as situações 4 e 5, que tratam das configurações por meio de ladrilhamento.

No primeiro registro desta experimentação, apresenta-se a atividade referente às configurações usuais via GeoGebra. Considerando que se tratava de um público de pós-graduação, a figura inicial utilizada foi a dos números pentagonais, de modo a incentivar uma análise mais elaborada e um nível de desafio compatível com a formação dos participantes.

Figura 161 - Apresentação de S1 na turma C



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

A Figura 161 mostra a apresentação dos primeiros números pentagonais. As impressões iniciais indicam que os alunos não se empolgaram com as configurações nem com o uso do software GeoGebra. Diferentemente das aplicações anteriores, esses estudantes não quiseram interagir com os recursos computacionais disponíveis nem com a visualização. Ao contrário, depois de receberem a definição formal dos números figurados e, em particular, dos números poligonais, eles começaram a utilizar a folha de rascunho e a fazer anotações.

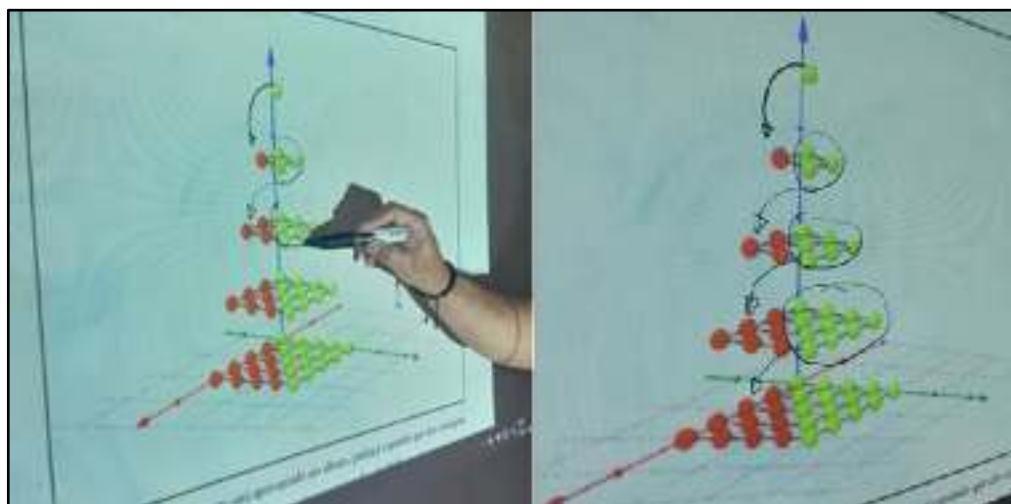
Nas outras duas situações envolvendo as configurações comuns e o uso do GeoGebra, observou-se um comportamento semelhante: os alunos demonstraram pouco entusiasmo pela parte visual e aguardaram as definições formais. Quando estas foram apresentadas, a interação foi consideravelmente maior do que quando se exibiam as imagens.

Nesse momento, os estudantes retomaram o uso do material impresso distribuído no início da experimentação. Na figura apresentada, constava a definição dos números poligonais centralizados e, a partir dela, solicitou-se que alguns participantes se dirigissem à lousa para registrar suas interpretações e construções iniciais. Contudo, observou-se novamente certa resistência: os alunos preferiram permanecer em seus lugares, adotando uma postura mais próxima do modelo tradicional de aula, no qual o professor expõe e os estudantes apenas escutam.

Essa reação evidenciou uma dificuldade inicial em compreender a dinâmica proposta para a experimentação, especialmente no que diz respeito ao caráter interativo e investigativo das situações, que exigia maior participação ativa dos envolvidos.

Na apresentação da Situação Didática 3, os estudantes demonstraram inicialmente a mesma reação das duas anteriores. Porém, diante da dificuldade em compreender a formação dos números piramidais, solicitaram que a figura fosse apresentada. Esse movimento evidenciou a importância da visualização e do GeoGebra. Mais do que isso, pela primeira vez desde o início das aplicações, a Situação 3, que deveria ser a mais complexa, porém de resolução mais curta, apresentou-se como a mais desafiadora para os estudantes e a única em que, de fato, eles utilizaram o recurso de visualização.

Figura 162 - Formulação de S3



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

A Figura 162 marca a primeira interação de um estudante na lousa, chamado aqui de C1. Esse estudante observou que as camadas de números triangulares se repetiam na camada imediatamente inferior em uma pirâmide de números quadrados, e que restava apenas o n -ésimo número triangular em cada pirâmide de pontos que formava o n -ésimo número piramidal quadrado. Embora essa relação seja mais complexa que a desejada e que não utilizaria diretamente a relação com tetraédricos, é uma relação que só pode ser extraída mais rapidamente se o estudante estiver de posse da visualização.

Assim, encerrou-se o registro sobre as situações didáticas 1, 2 e 3 que relacionava números figurados com sua visualização clássica e uso do GeoGebra. As observações iniciais são que, apesar de os estudantes apresentarem uma certa resistência inicial esperada na

interação, era planejado que eles passassem a participar conforme a apresentação das figuras e o manuseio do GeoGebra fossem ocorrendo, o que não aconteceu de forma efetiva em todas as situações.

A análise *a posteriori* e validação desse conjunto de atividades descreve dentro das fases TSD esses acontecimentos. Ademais, diferentemente das outras aplicações, nesse caso em particular os estudantes tiveram mais dificuldades na situação 3 e essa foi a que despertou mais atenção e interação da parte deles. A seguir, apresentamos os registros e percepções iniciais sobre as situações 4 e 5, referentes aos ladrilhamentos e que fazem parte do segundo conjunto de atividades dessa experimentação.

Após o encerramento das situações 1, 2 e 3, o professor-pesquisador iniciou a apresentação das situações 4 e 5, primeiramente com a definição de ladrilhamento, ideia de ladrilhos, regras e peças que compõem um ladrilhamento, e um exemplo clássico do ladrilhamentos da sequência de Fibonacci. Em seguida apresentou o exemplo do ladrilhamento da sequência de uns utilizando o GeoGebra e pediu a interação dos estudantes.

Figura 163 - Apresentação da sequência de uns no tabuleiro virtual na turma C



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Ao apresentar os ladrilhamentos descritos na Figura 163, os alunos foram apresentados ao material concreto e, no geral, a turma pediu para que esse não fosse utilizado. Diante da recusa, o professor apresentou a representação alternativa $C^aV^bP^c$ para que eles pudessem usar o material impresso. Contudo, foi observado que a investigação dessa estrutura por meio de manipulação ou combinação de peças não estava dentro da expectativa dos alunos para esse tipo de assunto. Os relatos iniciais era que deveria ser apresentada a regra geral, peças e ladrilhamentos, e que eles apenas provassem de um modo formal, o que seria esperado apenas na fase de institucionalização. Após a realização das atividades e da breve discussão sobre os ladrilhamentos, o professor-pesquisador encerrou a experimentação.

As conclusões referentes às Situações 4 e 5 revelam que esse dispositivo didático exigiria uma adaptação mais formal quando aplicado a uma turma de pós-graduação, especialmente considerando o perfil dos participantes e suas expectativas quanto ao tipo de abordagem. Ainda assim, a análise *a posteriori* e a validação evidenciam elementos técnicos relevantes, tanto no que diz respeito ao comportamento dos estudantes quanto ao funcionamento das tarefas, que contribuem para compreender de maneira mais aprofundada a dinâmica dessa experimentação externa. Tais elementos permitirão avaliar o grau de adequação das situações propostas, identificar ajustes necessários e compreender como o grupo mobilizou (ou deixou de mobilizar) os elementos esperados dentro das fases da Teoria das Situações Didáticas. Desse modo, a análise subsequente fornecerá uma visão mais precisa sobre o alcance, as limitações e o potencial desse conjunto de atividades no contexto investigado.

5.4 Experimentação Externa 2 (FECLESC – Quixadá)

A quarta experimentação da pesquisa, também de caráter externo, foi realizada na Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central (FECLESC), localizada na cidade de Quixadá-CE, a 168 km da capital Fortaleza, durante o semestre 2025.2. Ao todo, participaram da experimentação 10 estudantes do curso de Licenciatura em Matemática, matriculados na disciplina de História da Matemática. Assim como nas demais aplicações, os participantes serão identificados de modo a preservar o anonimato, sendo designados como D1, D2, D3, ..., D10.

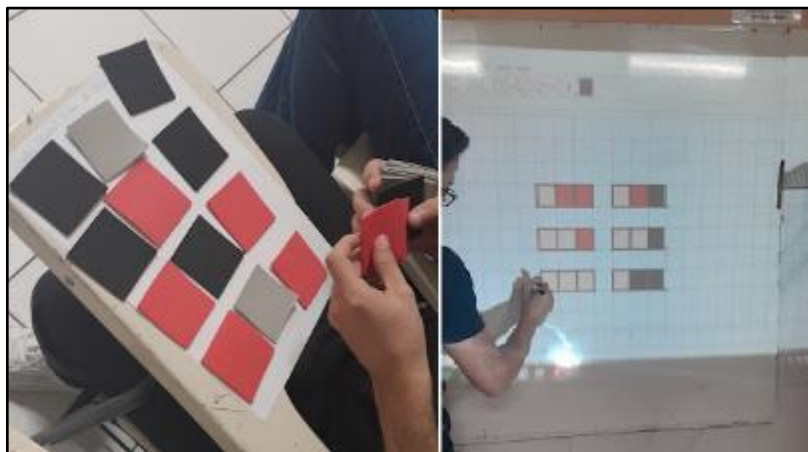
A aplicação ocorreu em um único encontro, com duração de quatro horas-aula. As situações foram distribuídas da seguinte maneira: inicialmente, foram apresentadas as duas situações referentes aos ladrilhos; após alguns minutos, apresentaram-se também as três situações sobre configurações clássicas por meio do software GeoGebra. Dessa forma, foi possível observar quais situações despertavam mais a curiosidade dos alunos. O formato reduzido não interferiu na dinâmica das situações, uma vez que os alunos tiveram acesso a todo o material logo no início e puderam interagir com as figuras projetadas na lousa, que contava com projetor para apresentar o conteúdo de forma dinâmica.

No início dessa experimentação, foram apresentados os conteúdos necessários para a sessão: números figurados, ladrilhamento e o uso do GeoGebra. Como em todas as turmas anteriores, o desconhecimento sobre o assunto foi unânime.

O professor-pesquisador iniciou apresentando exemplos de ladrilhamentos, bem como algumas regras para o ladrilhamento da sequência de Fibonacci. Posteriormente, abordou a

regra de ladrilhamento dos números lineares e suas respectivas peças, assim como o conjunto CVP. As peças foram apresentadas tanto no tabuleiro físico quanto no virtual; os estudantes demonstraram interesse por ambos os recursos, razão pela qual o professor deixou a turma à vontade para interagir com aquele que achassem mais cômodo. Os primeiros registros mostram as fases iniciais da TSD, com os estudantes trabalhando nos tabuleiros apresentados.

Figura 164 - Interação dos alunos da turma D com o tabuleiro físico e virtual



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Na Figura 164 observam-se as interações dos alunos com os materiais físico e virtual, evidenciando que a escolha entre um e outro partiu de cada participante. Nota-se, ainda, que essa escolha não gerou diferenças na compreensão da situação proposta e que, no caso do material virtual, o estudante não precisava possuir conhecimento prévio para operar o *software*, já que o professor poderia realizar esse manuseio quando necessário.

Seguindo as fases das situações propostas e apresentando somente os objetivos dessa experimentação que se baseia nos registros e observações iniciais da turma, após ser apresentada as outras 3 situações referentes as configurações clássicas, notou-se um interesse maior pelas peças do tabuleiro físico, não por receio de usar o GeoGebra, mas porque a aula teria uma mudança didática da qual os estudantes normalmente estão habituados. O próximo registro foi retirado da fase de formulação das situações 4 e 5.

Figura 165 - Fase de formulação das situações 4 e 5



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

No registro, os estudantes aparecem com o material disposto no piso da sala de aula. A aceitação do tabuleiro físico foi imediata e logo a maior parte dos alunos já haviam migrado de do tabuleiro virtual para o físico. Apenas dois estudantes permaneceram interagindo com a projeção do tabuleiro fixada na lousa.

Figura 166 - Oito alunos participando da fase de formulação de S4 e S5



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Nesse outro registro, observa-se a participação de oito alunos na fase de formulação das situações 4 e 5. Parte dessa mudança pode ser explicada pelo caráter mais didático do grupo, que se mostrou especialmente atraído pelo material manipulável, cuja exploração livre favoreceu maior interação entre os participantes. Assim, os estudantes alcançaram a resposta esperada por meio desse dispositivo físico, e não pelo tabuleiro virtual.

Nas situações 1, 2 e 3, os estudantes tiveram de ir à lousa, pois a única configuração disponível era a que havia sido projetada. De modo preliminar, pode-se afirmar que não houve resistência ao uso do software GeoGebra e que os alunos contribuíram de forma efetiva com o que foi solicitado. Ademais, as únicas dificuldades ocorreram em relação à segunda e à terceira situações. Adaptadas para uma apresentação rápida, não foi possível realizar os registros fotográficos necessários para validações posteriores. No entanto, a situação 1, dedicada a desenvolver a forma geral dos números poligonais por meio dos números triangulares, foi satisfatória, conforme mostram alguns registros a seguir.

Inicialmente, o professor apresentou as definições de números triangulares, sua forma geral e sua recorrência. Apresentou também a forma geral dos números poligonais centralizados e dos números tetraédricos, estes dois últimos sem suas configurações clássicas. Em seguida, foi pedida a resolução da situação 1. Após a apresentação da configuração dos números quadrados, os alunos passaram a interagir com o material e a fazer as primeiras análises. O registro a seguir refere-se à fase de formulação da situação 1.

Figura 167 - D7 e D9 construindo números pentagonais via triangulares



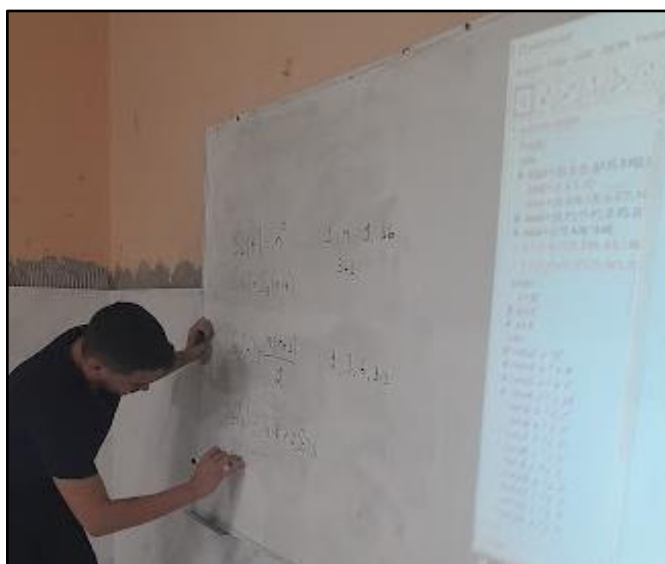
Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Na Figura 167, observam-se dois estudantes na fase de formulação realizando as primeiras investigações. É possível ver na imagem que um dos estudantes, denominado aqui

como D9, traceja as linhas que formam números triangulares no interior de um número pentagonal, enquanto é auxiliado pela estudante D7.

A aplicação das situações transcorreu de forma semelhante à observada nas demais experimentações realizadas em turmas de História da Matemática, com maior adesão à colaboração mútua e à interação, ainda que tenham sido registradas dificuldades análogas às anteriores. Desse modo, mesmo tratando-se de uma experimentação externa, as situações apresentaram padrões comparáveis aos já verificados nas aplicações internas. Para a validação dessa situação, o registro a seguir mostra o estudante D3 no início da validação da Situação 1, apresentando o resultado esperado em seus escritos posteriores.

Figura 168 - D3 na fase de formulação de S1



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

De modo geral, esta experimentação não apresentou elementos novos ou diferentes daqueles já observados nas aplicações anteriores. Em outras palavras, ainda que se tratasse de uma experimentação externa, realizada inclusive em outro município, as situações transcorreram de forma similar, destacando-se uma maior adesão ao uso dos materiais manipuláveis, bem como uma interação mais intensa tanto entre as situações quanto entre os próprios estudantes.

Inicialmente, com a apresentação dos números figurados e de suas configurações, tanto no GeoGebra quanto nos tabuleiros, observou-se grande interesse por parte dos participantes. Houve envolvimento espontâneo nas duas propostas de configuração, especialmente nos ladrilhamentos de números triangulares. Nessa atividade, os presentes optaram pelo uso do

tabuleiro físico e, com a participação de todo o grupo, resolveram coletivamente as situações propostas.

As cinco situações foram apresentadas da mesma forma que nas demais experimentações, organizadas em dois blocos: o primeiro, com três situações referentes às configurações clássicas representadas no GeoGebra; o segundo, com duas situações baseadas no uso de ladrilhos. Para esta turma, as situações foram disponibilizadas simultaneamente, permitindo que os alunos escolhessem livremente por onde começar. Devido a fatores como o horário noturno e a necessidade de alguns participantes retornarem de locais mais distantes, as situações 2 e 3 chegaram a ser aplicadas, mas os registros obtidos não permitem uma análise aprofundada nem validações posteriores.

Ainda assim, a aplicação forneceu elementos relevantes para a pesquisa, uma vez que permitiu verificar que a dinâmica observada permaneceu consistente com as demais aplicações, tanto em termos de condução das atividades e engajamento dos participantes, quanto no que diz respeito ao cumprimento das fases da TSD.

5.5 Experimentação interna 2025.2 (IFCE – 2025.2)

A quinta e última aplicação das Situações Didáticas deste trabalho teve caráter interno e foi realizada em quatro encontros, totalizando oito horas-aula durante o semestre 2025.2, na disciplina de História da Matemática. Contou com um total de nove participantes, aqui identificados como E1, E2, ..., E9. Nessa aplicação, os registros foram organizados seguindo rigorosamente as etapas da TSD em cada uma das situações propostas.

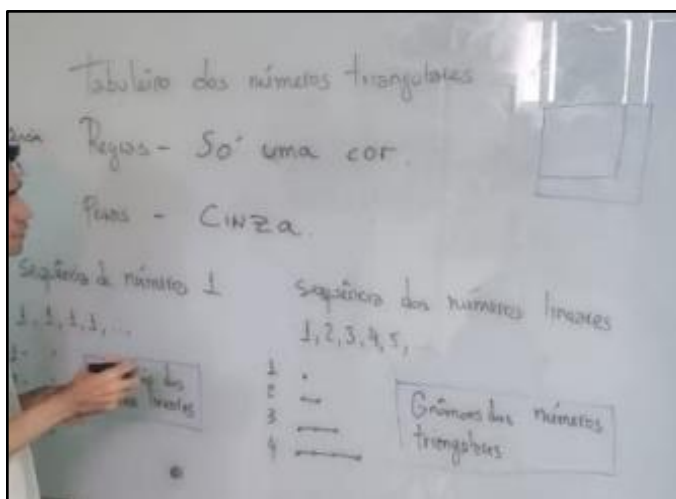
As observações realizadas constituem um estudo comparativo baseado no padrão de repetição identificado nas demais experimentações, internas e externas, conduzidas até este ponto da pesquisa. O objetivo foi verificar se os dispositivos utilizados, ou seja, tanto as configurações no software GeoGebra quanto os tabuleiros (físico e virtual), produzem resultados semelhantes quando empregados sob as mesmas condições iniciais, consolidando, assim, a consistência dos efeitos observados ao longo de todas as aplicações.

Dessa forma, os registros desta aplicação foram realizados apenas para evidenciar que sua condução ocorreu de maneira semelhante às anteriores, deixando o caráter comparativo para a análise a posteriori e para a etapa de validação correspondente. Por esse motivo, não se fará aqui a descrição detalhada do passo a passo apresentado nas aplicações anteriores, especialmente no que se refere às explicações iniciais ou às intervenções do professor, uma vez que tais procedimentos não se mostraram necessários nesta turma.

Por fim, cabe destacar que a aplicação ocorreu de maneira totalmente fluida, sem a presença de variáveis adicionais que exigissem maior atenção analítica. A sala com projetor esteve disponível normalmente, o que fez com que a aplicação via tabuleiros fosse inteiramente realizada por meio do software GeoGebra, mesmo que os demais materiais estivessem organizados e acessíveis. A turma compareceu de forma regular, e a participação foi ampla, garantindo que a experimentação transcorresse sem qualquer problema técnico.

Inicialmente, após serem apresentadas todas as definições necessárias, as questões foram organizadas de modo que o primeiro bloco de situações fosse o dos ladrilhamentos, ou seja, as situações 4 e 5. Posteriormente, foram apresentadas as situações 1, 2 e 3. O primeiro registro mostra o momento de interação entre o aluno e a regra de ladrilhamento dos números uns, destacando a participação da turma logo nas explicações iniciais.

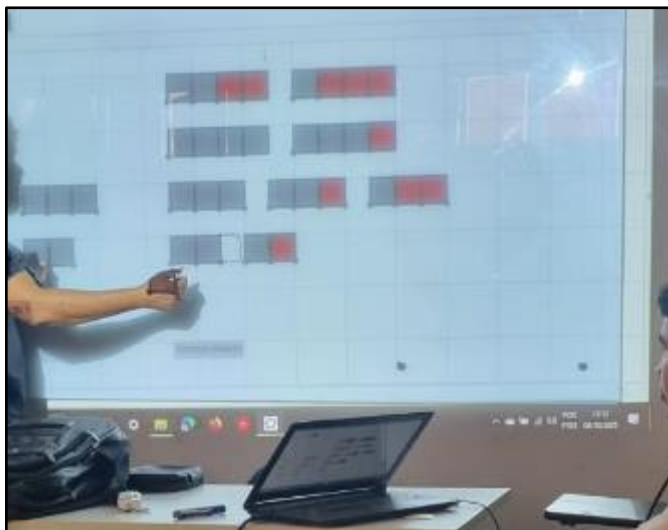
Figura 169 - Momento de ação da situação 4 , turma E



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Em outro registro, apresenta-se a interação do mesmo aluno já organizando no computador as peças para ladrilhar a sequência dos números lineares. Vale ressaltar que os próprios estudantes manusearam as funcionalidades do GeoGebra, de modo que a experimentação pode ser registrada de forma mais dinâmica.

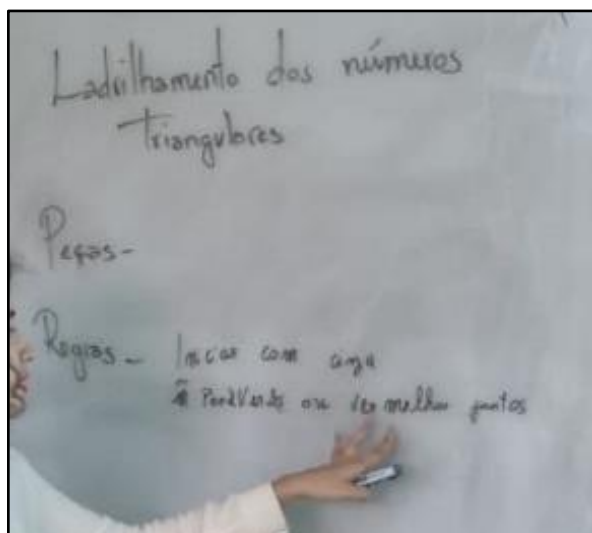
Figura 170 - Registro da construção de números lineares, turma E



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Diante da situação 4, os alunos já se encontravam familiarizados tanto com o tabuleiro virtual quanto com as regras necessárias para ladrilhar a sequência dos números triangulares. Isso possibilitou a realização de registros das etapas da TSD para as situações apresentadas. O próximo registro corresponde à fase de formulação da situação 4.

Figura 171 - Formulação de S4, turma E

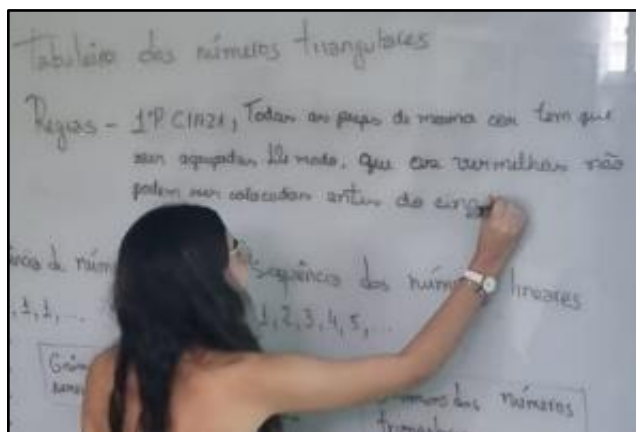


Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

O próximo registro mostra uma aluna na fase de validação da situação didática 4. Observa-se novamente a participação ativa na lousa, evidenciando a interação entre os alunos

e a prontidão em resolver a tarefa proposta. Vale destacar que as situações foram resolvidas rapidamente, resultado da colaboração constante entre os estudantes presentes.

Figura 172 - Registro da validação de S4, turma E



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Para a situação 5, a participação efetiva dos alunos desde a construção da sequência dos uns, passando pelo ladrilhamento dos números lineares e, posteriormente, dos números triangulares, tornou sua resolução mais clara. Dessa forma, não foram identificadas dificuldades nem observações relevantes a serem destacadas. A seguir, o registro da situação 5, destacando o estudante manuseando o GeoGebra.

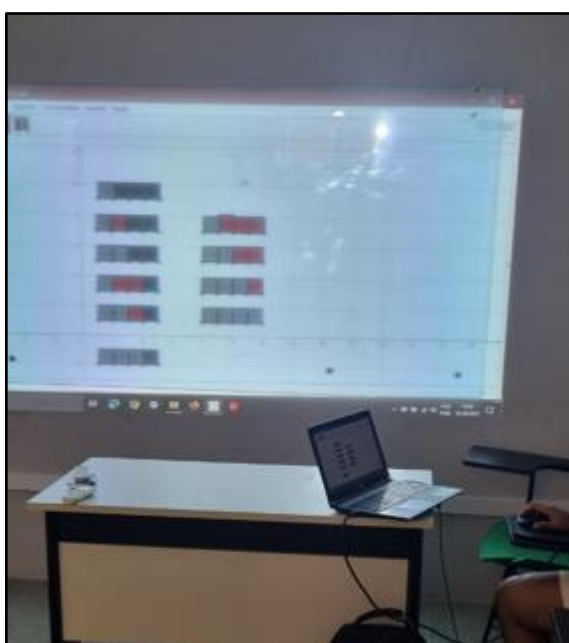
Figura 173 - Aluno manuseando o tabuleiro virtual durante a aplicação de S5



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Finalizando o bloco de situações referentes aos ladrilhos, apresenta-se um registro nítido do momento em que os alunos determinam conjuntamente a resolução da situação 5. Observa-se que, diante das diversas experimentações realizadas até o momento e dos recursos aprimorados utilizados, as situações 4 e 5 foram aplicadas de maneira mais direta pelo professor, o que influenciou positivamente o andamento da aula. A participação ativa dos alunos também foi determinante para que as situações apresentadas fossem executadas de forma simples e eficiente pelo grupo.

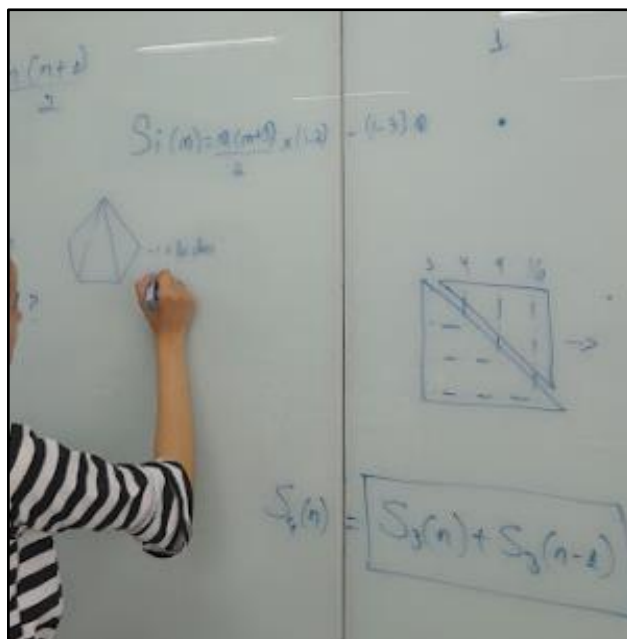
Figura 174 - Validação de S5, turma E



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Diante disso, o professor iniciou as aplicações das situações 1, 2 e 3, a princípio apresentando algumas configurações e fórmulas necessárias para sua resolução. Nesse momento, é importante destacar que se a primeira situação fosse bem desenvolvida, as demais também seriam, o que, de fato, aconteceu. O registro a seguir, mostra uma aluna já na fase de formulação da situação 1, com a ajuda da turma.

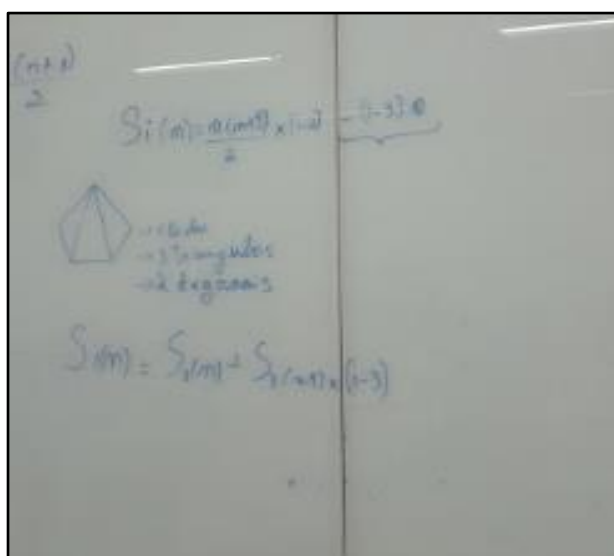
Figura 175 - Formulação de S1, turma E



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

No próximo registro fotográfico referente ao momento de validação da situação 1, foi possível observar a forma como os alunos retomaram os procedimentos realizados anteriormente para confirmar a estrutura geral dos números poligonais via triangulares. Durante essa etapa, eles discutiram entre si, justificaram os cálculos e compararam diferentes caminhos para chegar ao mesmo resultado. Observou-se um envolvimento ativo e coerente com o esperado para essa fase da TSD.

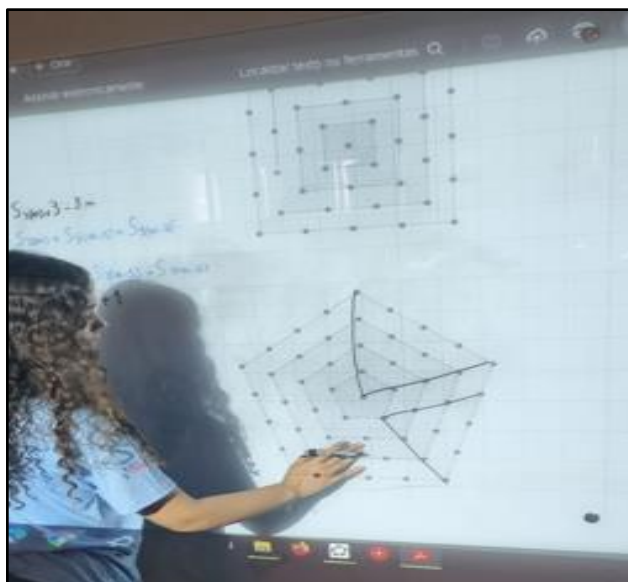
Figura 176 - Registro da validação de S1, turma E



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Diante da validação da situação 1, foi possível observar a rapidez esperada para a resolução das demais situações. Na situação 2, o registro mostra o momento de formulação, com a estudante usando a projeção no GeoGebra e resolvendo a situação, conforme o esperado.

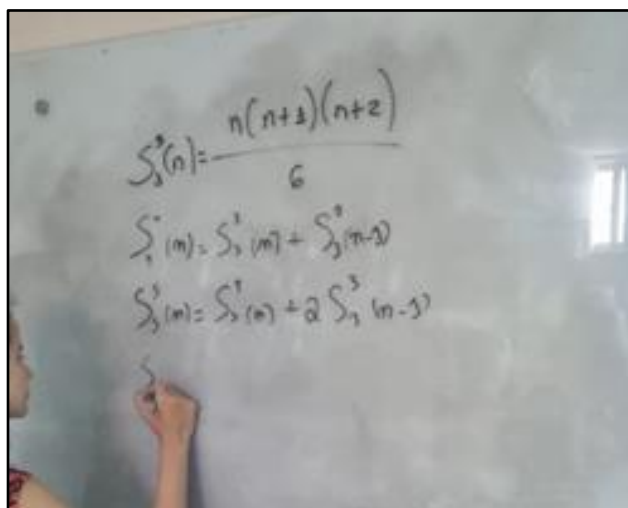
Figura 177 - Formulação de S2, turma E



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Por fim, o último registro apresentado nessa fase refere-se à etapa de validação da situação 3, evidenciando que os alunos resolveram de forma integral, sem entraves ou dificuldades diante das adversidades encontradas, mesmo que não estivessem familiarizados com nenhum dos dispositivos envolvidos nessa pesquisa.

Figura 178 - Formulação de S3, turma E



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Assim, a experimentação foi encerrada e o momento de institucionalização foi realizado de uma só vez para as cinco situações, retomando os principais conceitos abordados e destacando as relações observadas ao longo das atividades. Nesse fechamento, o professor sistematizou as definições, apresentou as formas gerais discutidas e confirmou os resultados alcançados pelos alunos, garantindo a formalização dos conhecimentos construídos durante todas as etapas. A turma participou de maneira atenta, contribuindo com comentários e verificações finais, o que consolidou o encerramento da aplicação de forma clara e satisfatória.

6. ANÁLISE *A POSTERIORI* E VALIDAÇÃO (INTERNA E EXTERNA)

A análise *a posteriori* e a validação das situações didáticas, previstas por Artigue (1995) como etapas cruciais na ED, permitem avaliar a eficácia das atividades propostas e a compreensão dos alunos em relação aos conceitos abordados. Após a implementação das situações didáticas, faz-se necessário analisar detalhadamente os processos de aprendizagem, observando como os alunos interagiram com os materiais, formularam e validaram hipóteses e superaram os obstáculos epistemológicos previstos. Essa análise envolve a coleta de dados qualitativos e quantitativos, incluindo observações diretas, registros escritos dos alunos e discussões em grupo, com o objetivo de identificar pontos fortes e áreas passíveis de melhoria na abordagem didática.

A validação dos resultados é essencial para confirmar se os objetivos gerais e específicos foram alcançados, garantindo que os alunos tenham desenvolvido uma compreensão profunda e significativa dos números figurados. Esse processo de reflexão e ajuste contínuo não apenas justifica a eficácia das situações didáticas, mas também contribui para a evolução do ensino da Matemática.

6.1 Análise *a posteriori* e validação interna - IFCE 2024.2

No contexto da aplicação realizada com essa turma, a análise dos dados coletados durante a aplicação, revelou elementos significativos da formação dos estudantes e dificuldades acerca do conteúdo apresentado logo no primeiro conjunto de três situações. A primeira observação é que mesmo os alunos sendo cercados por aparatos tecnológicos, a distância entre ensino e tecnologia ainda é distante da prática desses futuros professores.

Quanto ao conteúdo matemático, as dificuldades também são aparentes sobre conteúdos de base matemática, fato esse que aumentou o tempo de aplicação devido ao fato de o professor dedicar um tempo maior para a exposição e algumas intervenções durante o desenvolvimento das situações didáticas. Diante desse fato, iremos observar nessa fase, as dificuldades iniciais dos alunos, tempo de resolução das situações propostas e a interação com as questões buscando a resolução.

Logo na Situação 1, em que os alunos precisavam interagir diretamente com as figuras, observou-se que, apesar de uma resistência inicial à participação, houve um aumento gradual na participação. Esse envolvimento foi impulsionado pela possibilidade de visualizar concretamente o objeto de estudo, em um claro contraste à abordagem abstrata à qual estão

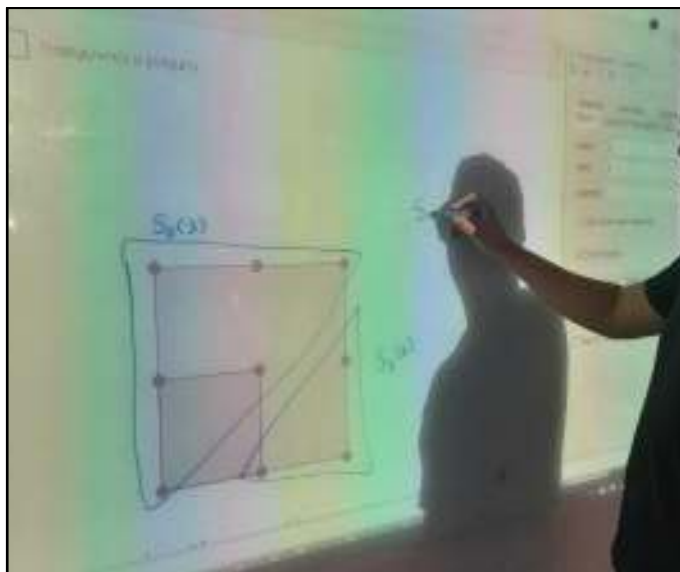
habituaados na disciplina e ao longo de sua formaçaõ. A presença das representaçõs visuais via GeoGebra, pareceu reduzir a insegurança inicial e favorecer a colaboraçã entre os estudantes, que passaram a se apoiar mutuamente durante a exploraçaõ da tarefa.

No contexto da aplicaçaõ realizada com essa turma, a análise dos dados coletados durante a experimentaçã revelou elementos significativos acerca da formaçaõ dos estudantes, bem como dificuldades relacionadas ao conteúdo apresentado logo no primeiro conjunto de três situaçõs. A primeira observaçaõ é que, mesmo os alunos estando imersos em aparatos tecnológicos, a distância entre ensino e tecnologia ainda se mostra distante da prática desses futuros professores.

Quanto ao conteúdo matemático, as dificuldades também se manifestam em relaçaõ a conhecimentos básicos da área. Esse fato aumentou o tempo de aplicaçaõ, uma vez que o professor precisou dedicar mais tempo à exposiçaõ e a algumas intervençõs durante o desenvolvimento das situaçõs didáticas. Diante disso, nesta fase serã observadas as dificuldades iniciais dos alunos, o tempo de resoluçaõ das situaçõs propostas e a interaçã com as questõs na busca pela resoluçaõ.

Logo na Situaçaõ 1, em que os alunos precisavam interagir diretamente com as figuras, observou-se que, apesar de uma resistêcia inicial à participaçaõ, houve um aumento gradual no envolvimento. Esse engajamento foi impulsionado pela possibilidade de visualizar concretamente o objeto de estudo, em claro contraste com a abordagem abstrata à qual os estudantes estã habituados tanto na disciplina quanto ao longo de sua formaçaõ. A presença das representaçõs visuais por meio do GeoGebra pareceu reduzir a insegurança inicial e favorecer a colaboraçã entre os estudantes, que passaram a se apoiar mutuamente durante a exploraçaõ da tarefa.

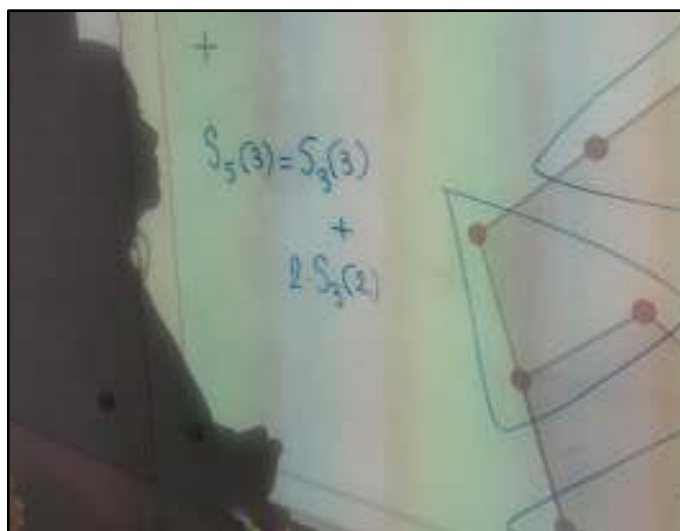
Figura 179 - Fase de ação de S1, turma A



Fonte: acervo da pesquisa

A figura apresentada, mostra que o estudante se propôs a realizar a tarefa na lousa depois de uma resistência inicial, porém, quando apresentada a figura no SG, os alunos se dispuseram a participar e depois de uma interação rápida durante a fase de ação, os alunos passaram para a fase de formulação, expondo os contornos da figura e escrevendo as primeiras relações de números quadrados.

Figura 180 - Momento de formulação de S1, turma A



Fonte: acervo da pesquisa

A foto acima, retrata outra estudante que também se propôs a participar, mostrando que a questão havia atraído a atenção deles logo após a apresentação das figuras, a dificuldade inicial prevista durante a fase de análise *a priori* pôde se validada aqui pois os alunos não interagiram durante a apresentação das fórmulas e mostraram dificuldades de compreensão, porém foram solícitos no primeiro momento em que a figura foi apresentada.

Figura 181 - Fase de formulação de S1, turma A

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Fonte: acervo da pesquisa.

A validação da questão pode ser observada na figura acima, apenas um dos registros dos estudantes que conseguiram a resolução, dos 8 participantes, 5 participaram ativamente dessa resolução e no total de 2 faltas registradas no primeiro encontro.

Diante dessas informações a questão pôde ser validada de três pontos de vistas apontados durante a análise a priori e concepção. A primeira diz respeito mudança de atitude entre a observação das apresentações das fórmulas de números figurados. Enquanto o interesse nas fórmulas foi mínimo e pouco rentável em contribuição, a interação depois da apresentação foi acima do que foi previsto.

A segunda observação é que quando os alunos souberam que não iriam precisar interagir com o SG, eles puderam se dedicar a encontrar as relações, que foram estabelecidas no tempo previsto durante a análise *a priori*. A terceira e última observação é propriamente sobre a resolução da questão que foi realizada e validada pelo professor posteriormente, encerrando a situação didática como o previsto.

Visto que os alunos tiveram dificuldade iniciais previstas no que diz respeito as fórmulas e que essa foram superadas pela apresentação da imagem, e que ficaram receosos sobre a interação com o GeoGebra e ao saber que iriam precisar usá-lo apenas como suporte de visualização, eles também foram mais solícitos, podemos identificar os obstáculos epistemológicos.

Devemos observar, contudo que os obstáculos observados nesta etapa não estão relacionados à falta de interesse dos estudantes, mas à própria natureza do conhecimento matemático envolvido. Segundo Bachelard (1996), um obstáculo epistemológico não aparece por ausência de saber, e sim por formas de compreensão já construídas que, embora ajudem em certos momentos, podem dificultar novos entendimentos. Isso explica por que alguns conceitos não são assimilados de imediato, mesmo quando o aluno está envolvido com a atividade.

No caso desta aplicação, percebeu-se que pedir aos alunos que compreendessem primeiro a fórmula antes de terem contato visual com as figuras gerou dificuldades. A resistência inicial na passagem do desenho para a expressão algébrica é o que Brousseau (2008) chama de obstáculo epistemológico didático, que é quando o problema não está no sujeito, mas na forma histórica como o conceito costuma ser apresentado na escola. Assim, a insegurança diante da fórmula não indicou incapacidade, e sim um limite natural quando o entendimento é solicitado pela simbologia antes de nascer da experiência.

Também houve um obstáculo relacionado ao uso do software GeoGebra. Alguns alunos demonstraram receio porque associavam a ferramenta à necessidade de dominar cálculos ou comandos avançados. Essa reação está alinhada ao que Artigue (2009) discute sobre o uso da tecnologia em educação matemática, quando o estudante enxerga o recurso digital como algo que substitui o raciocínio em vez de apoiá-lo. Quando os alunos perceberam que o GeoGebra seria usado apenas como suporte de visualização, e não como meio de resolver a atividade por eles, o bloqueio diminuiu e as interações se tornaram mais espontâneas.

De forma geral, os obstáculos epistemológicos identificados concentraram-se em dois pontos: a dificuldade de dar sentido à fórmula antes de visualizar e construir o conceito, e a ideia equivocada de que o software exigiria domínio técnico elevado. Esses dois aspectos mostram que as dificuldades apresentadas não estavam ligadas à falta de interesse dos estudantes, e sim ao modo como o conhecimento matemático é tradicionalmente apresentado e compreendido.

Na Situação 2, conforme previsto, os alunos chegaram à resolução com rapidez. Por se tratar de uma tarefa diretamente decorrente dos conceitos construídos na Situação 1, os estudantes conseguiram resolvê-la com o apoio apenas da visualização e da expressão geral já

apresentada anteriormente. Dessa forma, a Situação 2 também pôde ser validada com base nos mesmos critérios aplicados à primeira.

A carência de registros fotográfico apresentada na experimentação retrata bem a quão rápida foi a resolução, os registros em áudio foram pouco significantes e em se tratando das fases da TSD pode-se afirmar que praticamente não pôde ser percebido a fase de ação, algo também esperado, na formulação os estudantes se propuseram a apenas rabiscar enquanto a maioria apenas observava o quadro com as figuras e na fase de validação a fórmula é constatada pela imagem a seguir.

Figura 182 - Fase de validação de S2, turma A

$$S_n(n) = 1 + m \frac{(n-1)(n+1)}{2}$$

Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Contudo, observou-se que essa atividade despertou menor interesse da turma, provavelmente por ser percebida como mais simples. Ainda assim, chamou atenção o fato de que, apesar da aparente facilidade, os alunos não conseguiram resolver a questão sem recorrer à representação visual. Mesmo com a relação entre a fórmula e os números triangulares já implícita, a imagem continuou desempenhando papel essencial para que os estudantes chegassem à solução.

Dando continuidade a aplicação, temos a situação 3, essa situação tem como uma das observações pertinentes, que seja resolvida de forma mais rápida, apesar de ser relativamente mais complexa por ter formas maiores e por envolver configuração não conhecida até o momento

Na fase de ação, quando foi pedido para eles tentarem contribuir um número figurado piramidal, era esperado que a dificuldade fosse na construção, o que, de fato, aconteceu. No entanto a situação mostra um interesse maior dos estudantes, esse interesse vem do fato de os alunos percebem a facilidade da situação 2, e que com a figura, a relação entre qualquer número figurado e o simplexo da dimensão é aparentemente simples. A imagem mostra como é interpretação inicial do que seria um número piramidal.

Figura 183 - Fase de ação de S3, turma A



Fonte: acervo da pesquisa

Na Figura 184, ainda durante a fase de ação quando os estudantes conseguiram construir um esboço de número piramidal de base quadrada, percebe-se que surgem as dificuldades esperadas da situação, ao construir a figura, não é imediato a aparição da relação entre estes e os simplexos, mesmo assim, com o interesse inicial dos alunos pela questão pode-se afirmar que isso não prejudicaria a tentativa de resolução.

Figura 184 - Formulação de S3, turma A



Fonte: acervo da pesquisa

Aqui os estudantes já estão na fase de transição entre ação e formulação, pois conseguem estabelecer desenhar a figura. Porém, ainda não conseguem perceber a relação entre os números

piramidais quadrados e os números tetraédricos, logo após ser apresentada a figura dos números piramidais quadrados, os estudantes conseguem a relação apresentada pela figura abaixo.

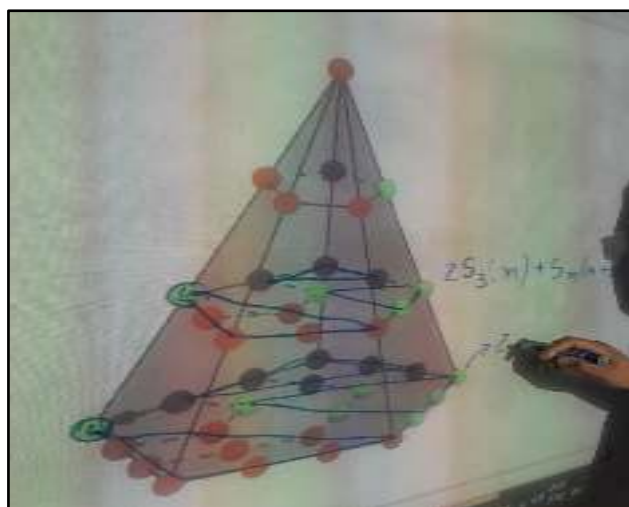
Figura 185 - Fase de ação de S3, turma A

$$\begin{aligned}
 T_n &= \sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} n(n+1) \left(\frac{1}{6} (2n+1) + \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} n(n+1) \cdot \frac{2n+4}{6} = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)
 \end{aligned}$$

Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Logo após, inicia-se a fase de validação com os alunos ainda confundindo um pouco sobre a relação entre os números piramidais poligonais e tetraédricos. Nesse momento a relação entre piramidais e m -gonais parece ser mais clara com a apresentação da figura

Figura 186 - Construção dos números piramidais, fase de formulação, turma A



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Mesmo assim, há confusão quanto à relação solicitada: o aluno tenta resolver o problema da maneira mais complicada e não percebe a conexão com os números tetraédricos. Apesar dessa dificuldade em relacionar os números piramidais gerais e os tetraédricos, observa-se que a turma consegue estabelecer a relação apresentada na figura a seguir. Isso indica que os alunos já se encontram na fase de validação.

Figura 187 - Fase de Validação de S3, turma A

$$S_m^3(n) = S_3^3(n) + (m-3)S_2^3(n-1)$$

$$S_4^3(n) = S_3^3(n) + S_2^3(n-1)$$

$$S_5^3(n) = S_3^3(n) + 2S_2^3(n-1)$$

Fonte: acervo da pesquisa

Na Figura 187, podemos ver que os alunos já conseguiram estabelecer uma relação entre alguns números piramidais. Aqui os alunos já conseguem partir da relação encontrada e basta usar os recursos algébricos já conhecidos por eles e estabelecer e apresentar uma prova do resultado obtido

Figura 188 - Validação de S3, turma A

$$S_m^3(n) = S_3^3(n) + (m-3)S_2^3(n-1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) + (m-3) \cdot \frac{1}{6}(n-1)n(n+1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1) \left((n+2) + (m-3)(n-1) \right)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1) (n+2 + mn - 3n - 3)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1) (mn - 2n + 2)$$

Fonte: acervo da pesquisa

Por fim, os alunos apresentam a forma geral dos números piramidais poligonais com base nos números tetraédricos. Percebe-se que, embora a situação seja mais complexa, tanto do ponto de vista da forma geral quanto da visualização, por estar no campo tridimensional, os alunos a resolveram conforme o previsto na fase de análise *a priori*. Isso evidencia que, nesse caso, a visualização foi fundamental para a resolução rápida da questão.

A seguir, apresentaremos o relato do processo de observação das fases da Teoria das Situações Didáticas (TSD), destacando o comportamento dos alunos diante da situação 4, as interações ocorridas e a comparação entre as análises *a priori* e *a posteriori*.

Nesse contexto, analisaremos a situação-problema dividida pelas fases da TSD. Essa análise nos permitirá revelar as anotações feitas pelo professor em cada fase, bem como verificar como a situação foi construída pelos alunos e se eles seguiram o que foi previsto na análise *a priori*. Essa verificação será possível graças aos registros realizados durante a experimentação.

Para iniciarmos a análise da situação 4, o primeiro registro foi feito por fotografia, logo após a apresentação da questão e dos materiais. O contato dos alunos com o material marca a fase de ação da TSD.

Figura 189 - Fase de ação de S4, turma A

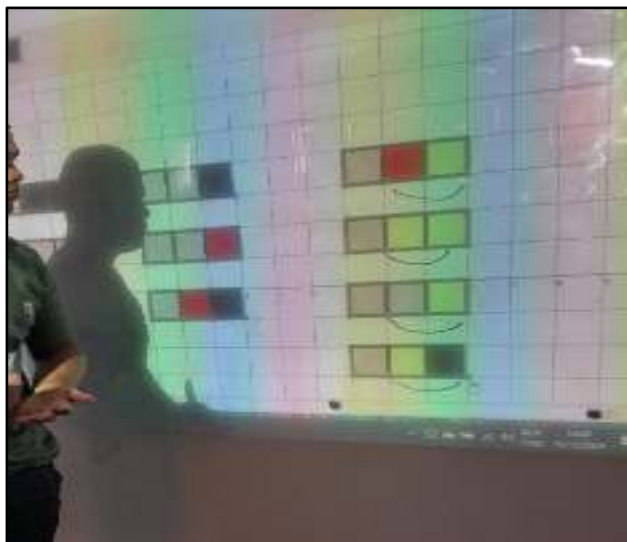


Fonte: acervo da pesquisa

Na situação de ação, os estudantes tiveram o primeiro contato com o material físico e buscaram construir a sequência de números naturais. Pelos registros, é possível perceber as primeiras construções do ladrilhamento para 1, 2 e 3. Alguns alunos preferiram interagir com o material físico. Na fotografia, os alunos A4, A6, A2 e A7 (da esquerda para a direita) buscam

construir o ladrilhamento e encontrar possíveis regras. Logo em seguida, com o material virtual, os alunos tentaram construir um número triangular, conforme mostra a figura a seguir.

Figura 190 - Fase de formulação de S4, turma A

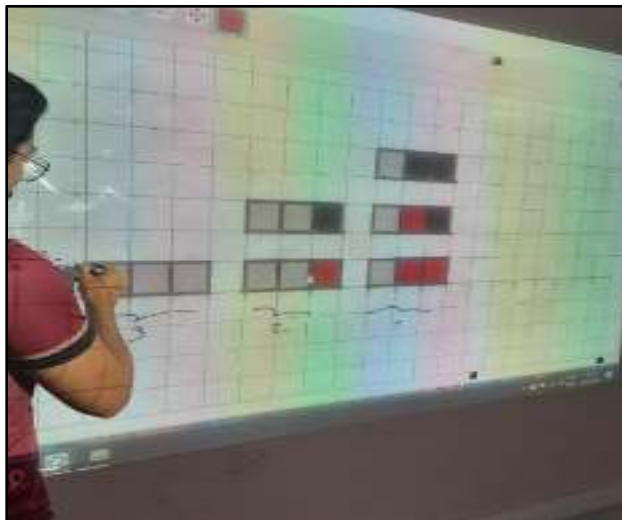


Fonte: acervo da pesquisa

Ainda na fase de ação, observa-se que os alunos organizaram os ladrilhos já iniciando pela cor cinza, de maneira lógica e seguindo o padrão das outras duas sequências apresentadas. No registro fotográfico, é possível identificar sete ladrilhamentos; o aluno A3, embora estivesse buscando uma regra, conseguiu apenas seis.

Nesse momento, os alunos A6 e A3 discutem se é possível organizar os ladrilhamentos em grupos de ladrilhos cinza. Eles também perceberam que uma possível regra seria construir uma ordem em que os ladrilhos cinza estivessem sempre em posições anteriores aos vermelhos e aos pretos, e os vermelhos sempre em posições anteriores aos pretos. Diante disso, o aluno A3 resolveu ir à lousa e solicitou as seguintes construções.

Figura 191 - Aluno A3 formando as somas parciais em S4



Fonte: acervo da pesquisa

No registro, observa-se que o aluno A3 distribui os ladrilhos de forma correta, o que marca o início da fase de formulação. Ele percebe que é possível montar: um único ladrilhamento utilizando apenas o ladrilho cinza; dois ladrilhamentos com os finais constituídos pelas demais cores; e três ladrilhamentos nos quais o ladrilho cinza aparece apenas no início.

Entretanto, esse processo só foi percebido após um intervalo de tempo considerável, considerando-se o tempo de apresentação da situação, a exibição do material e uma fase de ação marcada por intensa interação dos estudantes com os materiais. Diante disso, a aula foi finalizada e retomada, a partir desse ponto, na sessão seguinte.

Na aula subsequente, o professor fez um breve resumo do que os alunos haviam construído na aula anterior. Logo após, os estudantes voltaram a interagir com o material físico, construindo o próximo termo com base nas observações feitas por A3. O registro foi realizado ao final da construção do quarto número triangular.

Figura 192 - Primeiros termos formados com o tabuleiro físico



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Na fotografia, observam-se os quatro primeiros termos da sequência dos números triangulares, construídos com material físico pelos alunos A7, A2, A6, A5, A3 e A1. Nota-se que os alunos não organizaram os termos de acordo com a quantidade de ladrilhos cinza, o que dificultou a visualização de um padrão mais claro. Por essa razão, embora tivessem identificado regras válidas, não conseguiam generalizá-las com facilidade para qualquer valor de n .

Apesar de uma certa dificuldade, as regras já estavam definidas, sendo necessária apenas sua formalização para que a situação fosse resolvida. Desse modo, os alunos A3, A6 e A2 propuseram um conjunto com três regras, eles usaram como base o ladrilhamento dos números naturais, bem como a separação dos ladrilhamentos por ladrilhos cinza, que fornece a ideia da soma $1 + 2 + 3 + \dots + n$ que eles já sabiam se tratar da forma geral dos números triangulares.

No registro a seguir, percebe-se que um aluno (A6) descreve possíveis regras de ladrilhamento que se assemelham as regras descritas durante a fase de análise *a priori*.

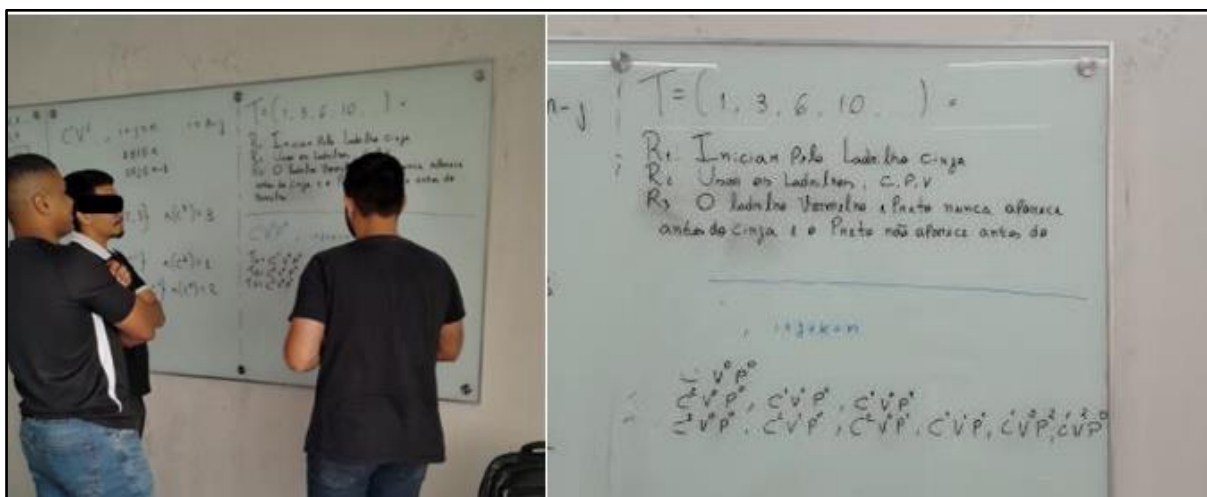
Figura 193 - Fase de Validação de S4, turma A



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Na fotografia, é possível ver que o aluno A6 registra suas regras com a ajuda dos outros alunos da turma, existe ainda uma tentativa de provar essa regra usando uma representação com as letras CVP (cinza, vermelho e preto) que pode ser observado no próximo registro.

Figura 194 - Validação de S4, turma A

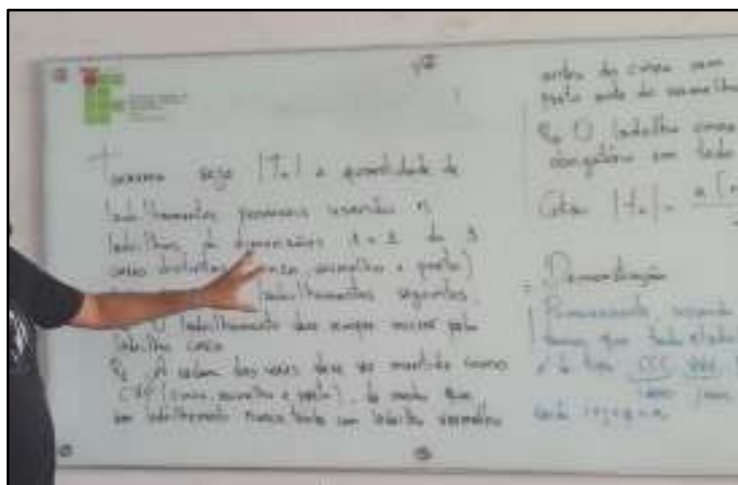


Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Como se trata de uma questão introdutória para o tema ladrilhamento dos números triangulares e as formas já haviam sido apresentadas, tendo como foco apenas a descoberta das regras, o professor pôde encerrar essa fase. Com base na Teoria das Situações Didáticas, nesse momento, o professor volta ao protagonismo e inicia-se a fase de institucionalização, na qual

foi realizada a apresentação do teorema 1 para os alunos e a explicação matemática do fato da regra ser válida para todo n . Dessa forma, os próximos registros são da fase de institucionalização com o professor apresentando o teorema que de forma clara, retirando possíveis dúvidas e partes desnecessárias para a resolução da questão proposta.

Figura 195 - Institucionalização de S4, turma A



Fonte: acervo da pesquisa

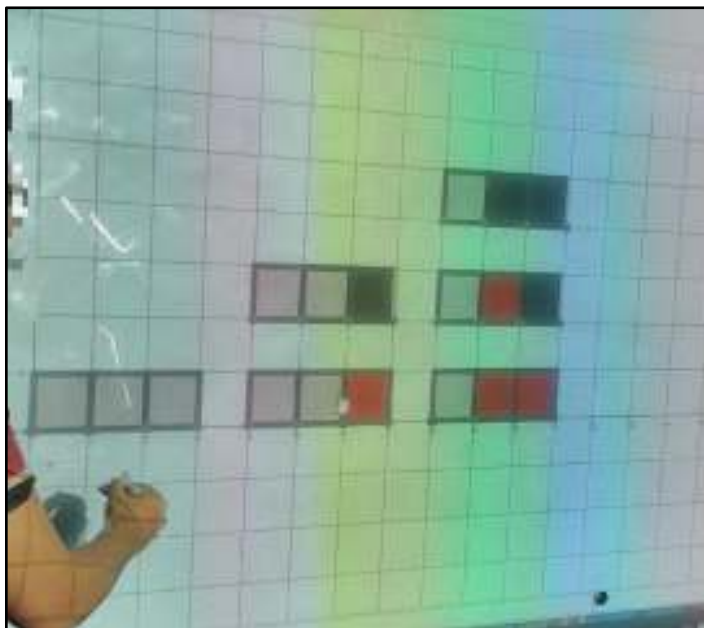
Nessa fase, é necessário que o professor forneça a demonstração de modo que os alunos possam compreender o processo de construção das regras, sempre relacionando-o com as definições apresentadas no início. Embora não fosse o momento previsto, os estudantes contribuíram com a construção dessa etapa, o que indica que a questão transcorreu, novamente, de acordo com a análise *a priori*.

Conclui-se, portanto, que esta seção apresentou todas as fases da TSD aplicadas à situação didática analisada. Verificou-se que a análise *a posteriori* confirmou, em grande parte, as previsões formuladas na análise *a priori*, evidenciando a coerência entre o planejamento e os resultados observados.

Na última situação, na qual se esperava que os estudantes pudessem estabelecer uma ligação com a situação anterior, de fato, para resolvê-la, era necessário apenas que a compreensão sobre ladrilhamento, tabuleiro e todos os conceitos relativos a números figurados já estivesse estabelecida. Assim como na situação 3, os estudantes deveriam resolver essa situação de forma mais intuitiva.

Na fase de ação, os alunos observam a situação sendo apresentada e já formulam algumas hipóteses. Nesse contexto, o estudante A7 desenvolve rapidamente, na lousa, o ladrilhamento desejado, com a ajuda da turma.

Figura 196 - Fase de ação de S5, turma A



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Aqui, observa-se que a recorrência foi apresentada exatamente conforme o planejado na fase de análise *a priori*. A apresentação, a interação com o material e os conceitos estabelecidos fizeram com que os alunos resolvessem essa situação de forma mais rápida do que as demais.

Ao final, o professor conduziu a turma à fase de institucionalização, na qual explicou, no contexto dos ladrilhos, os processos que levam à construção das regras e das peças discutidas na situação 4, bem como a lei de recorrência estabelecida na situação 5, dando o encerramento esperado para esta aplicação.

As observações sobre as aplicações serão discutidas ao final de cada análise *a posteriori* e validação das situações aplicadas, como uma síntese do que foi observado e das peculiaridades de cada turma. A turma em questão apresentou dificuldade inicial na configuração por padrão discreto. De modo geral, os alunos interagiram muito mais com o tabuleiro (tanto físico quanto virtual); participaram pouco na lousa, mas interagiram bastante por meio de áudios. Em termos gerais, a aplicação mostrou que, apesar de um perfil mais contido na expressão oral, os alunos cumpriram os requisitos necessários para que a aplicação seja considerada bem-sucedida.

As dificuldades concentraram-se na segunda situação, quando os alunos não definiram bem um número centralizado. A falta de interação nessa situação tornou os registros escassos, o que não prejudicou a aplicação como um todo, mas deixou uma lacuna quanto ao conhecimento adquirido na situação em questão.

6.2 Análise *a posteriori* e validação interna – IFCE turma 2025.1

Com base nos registros obtidos durante a experimentação, analisaremos os acontecimentos ocorridos na fase anterior, a fim de confrontá-los com o planejamento realizado na análise *a priori*.

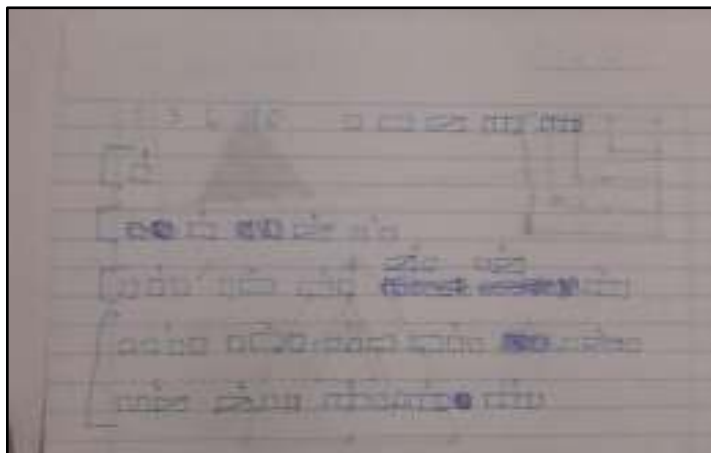
No caso da Turma HM/2025.1, o objetivo do percurso de ensino foi levar os estudantes à construção e à estabilização da regra de ladrilhamento dos números triangulares e, gradualmente, à explicitação da recorrência com base em evidências extraídas do próprio material manipulável. Da mesma forma, nas situações 1, 2 e 3, esperava-se que a construção da relação estabelecida em cada situação fornecesse subsídios para que os alunos conseguissem não apenas responder às outras duas, mas também fazê-lo de forma rápida.

O desenho da experimentação indicou que os estudantes conseguiram encontrar a regra de ladrilhamento dos números triangulares e, mais rapidamente, sua recorrência, mediante a interação com o material. Posteriormente, a turma, de maneira geral, conseguiu reorganizar o material de modo a produzir a recorrência de forma mais autônoma. Isso indica que os objetivos das situações 1 e 2, bem como a interação dos alunos com o material construído para essa finalidade, foram condizentes com o que havia sido planejado.

Observou-se um deslocamento do registro material (no tabuleiro e nos ladrilhos) para o registro verbal e, posteriormente, para o registro da recorrência. Esse deslocamento deveria ocorrer sem antecipação do professor, de forma que o saber emergisse do meio didático e das interações, conforme o papel epistemológico do meio descrito por Brousseau (1998) na Teoria das Situações Didáticas. Ao analisar as produções da turma, percebeu-se que tal deslocamento não apenas ocorreu, mas se desenvolveu de maneira sustentada e coerente com os objetivos da situação. No entanto, em determinado momento, o professor precisou fazer alguma intervenção, não para corrigir ou acelerar o processo, mas porque os estudantes ainda não estavam familiarizados com a didática e necessitavam de direcionamento.

A fase de ação das situações 1 e 2 foi fortemente marcada pela exploração das possibilidades estruturais do tabuleiro físico, com os estudantes testando arranjos, descartando combinações e reconstruindo padrões. Nas duas primeiras situações, é possível perceber que os alunos buscavam testar os ladrilhamentos de diferentes formas.

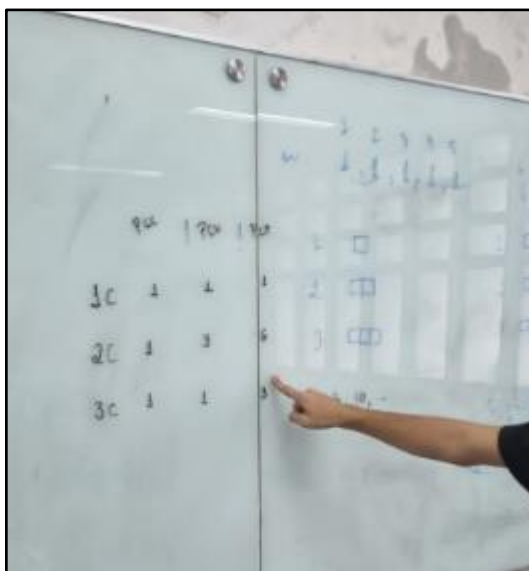
Figura 197 - Fase de ação de S4, turma B



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Aqui o aluno B2 tem o momento de ação construindo seus ladrilhos em um rascunho mesmo com o material a disposição. Em outro caso, quando o professor precisou apresentar a representação alternativa $C^aV^bP^c$ pode ser observado que os outros estudantes também interagem com essa representação, além de outras criadas por eles mesmo, como na figura a seguir.

Figura 198 - Fase de ação de S4, turma B

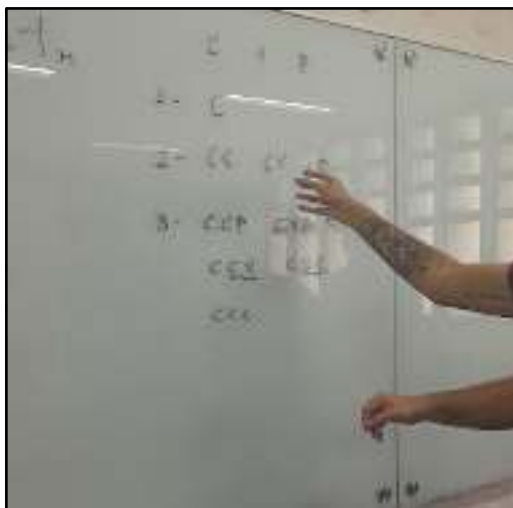


Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Aqui o aluno B1 propõe uma representação por números e letras, que em um primeiro momento foi observada, mas depois o próprio estudante passou a interagir com o material,

deixando essa representação de lado. Outro aluno, B6, apresenta uma organização usando as letras CVP conforme a foto a seguir.

Figura 199 - Formulação de S4 pelo aluno B6



Fonte: acervo da pesquisa

Na fase de formulação, surgiram verbalizações relativas à ordem de aparecimento das peças vermelhas, às relações entre as diferentes construções e às contagens parciais. Nesse momento, foi possível observar que a maioria dos estudantes já se debruçavam sobre o material e a ajuda mútua foi necessária para que a ideia fosse construída de maneira conjunta.

Figura 200 - Registro da discussão dos alunos na fase de formulação de S4, turma B



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Na Figura 200 pode ser percebido que os alunos organizam e debatem sobre as ideias. Aqui já é perceptível que eles constroem as peças iniciando pelo ladrilho cinza, o que indica que a fase de formulação está avançada; em outro momento, é possível perceber a organização das peças e dos tabuleiros, já organizados em cores corretamente, mas ainda sem uma regra construída, esse registro dentre outros, marca o fim da fase de formulação.

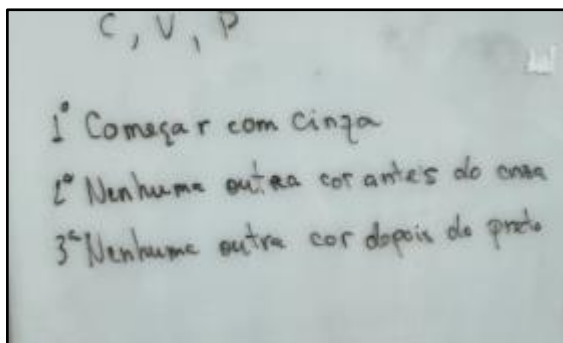
Figura 201 - Registros da fase de formulação de S4, turma B



Fonte: acervo da pesquisa

A fase de validação ocorreu de forma coletiva. Ela emergiu quando as construções e explicações passaram a ser confrontadas pelos próprios estudantes, sem intervenção do professor, gerando consensos sobre a regularidade e, principalmente, sobre o uso das regras nos aspectos lineares – algo que aconteceu espontaneamente. Quanto à formalização, embora não tenha sido rigorosamente igual à planejada, também foi feita de forma coletiva: os estudantes não registraram a informação individualmente em seus rascunhos, mas elegeram um representante, que prontamente a registrou na lousa.

Figura 202 - Validação de S4 na turma B

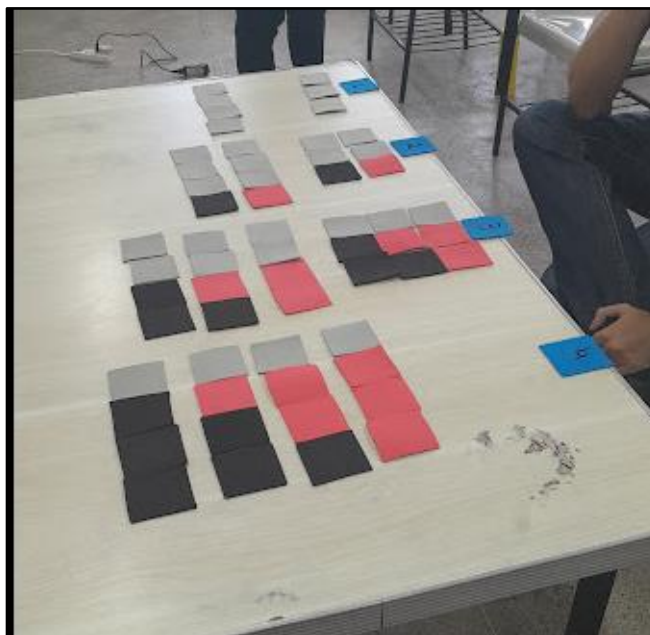


Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

A foto acima marca o fim da resolução da primeira situação. Embora, de modo geral, os estudantes não conseguissem provar formalmente que tais regras gerariam um número triangular por meio dos ladrilhamentos, a questão foi considerada válida. Entende-se que encontrar esse conjunto de regras já requer a compreensão da ordenação das cores, e que uma prova formal demandaria um tempo que poderia comprometer as demais aplicações. Desse modo, o professor encerrou a questão apresentando o teorema do termo geral dos números triangulares via ladrilhos.

No que se refere à situação 5, as fases iniciais de ação e formulação podem ser percebidas já no âmbito da situação 4. Isso indica que os estudantes se apropriaram rapidamente do conhecimento adquirido na questão anterior e, de posse da recorrência, conseguiram também, em conjunto, organizar os ladrilhos de modo que a recorrência pudesse ser visualizada.

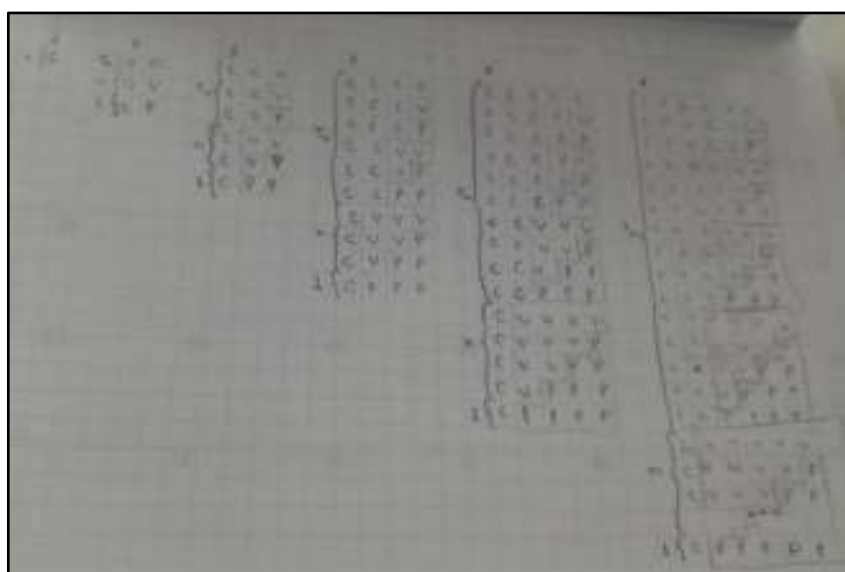
Figura 203 - Organização de S5 na turma B



Fonte: acervo da pesquisa

Na Figura 203, o estudante B6, com ajuda dos outros estudantes presentes, encontra um tipo de recorrência que também é válido, porém ele utiliza o ladrilho cinza a frente, tornando o processo similar, algo que foi reescrito durante a institucionalização. B5 por sua vez, a apresenta de modo sistêmico e formal.

Figura 204 – Validação de S5 na turma B



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Logo após isso, o mesmo estudante, juntamente com a turma, explica o que ocorre para que a forma seja válida para todo n . Esse evento marca o fim da fase de validação da situação 5, que foi concluída após a institucionalização do teorema da recorrência dos números triangulares via ladrilhos.

Assim, as situações 4 e 5 podem ser consideradas válidas, uma vez que houve correspondência entre o previsto e o observado, o que forneceu um forte indicativo de validação das situações didáticas propostas. As situações produziram o objetivo matemático desejado e o institucionalizaram no coletivo da turma, sem necessidade de antecipação por parte do professor, condição essencial da Engenharia Didática.

Quanto às situações 1, 2 e 3, essa análise também será feita de modo conjunto, tanto no que diz respeito à interação dos alunos quanto à própria análise das situações, uma vez que se pretende observar as fases de ação e formulação de forma interligada, mantendo as fases de validação em separado.

Na fase de ação da primeira situação, em que os estudantes precisariam encontrar a forma geral dos números poligonais a partir da forma geral dos números triangulares, esperava-se uma dúvida inicial ou uma fase de ação mais demorada. No entanto, o que os alunos apresentaram foi uma resolução mais direta e sem dificuldades.

A análise dessa situação permite afirmar que essa rapidez na resolução não se deveu a uma possível facilidade da questão, mas sim aos saberes adquiridos com a interação com os ladrilhos. Ou seja, tratar uma sequência como configuração discreta já estava consolidado no conhecimento dos estudantes, o que facilitou a resolução das três situações restantes. Diante disso, o aluno B3 observou a relação e resolveu escrevê-la na lousa, expondo-a para os demais.

Figura 205 – Fase de ação de S1 feita por B3

$$S_3(n) = S_3(n) + S_3(n-1)$$

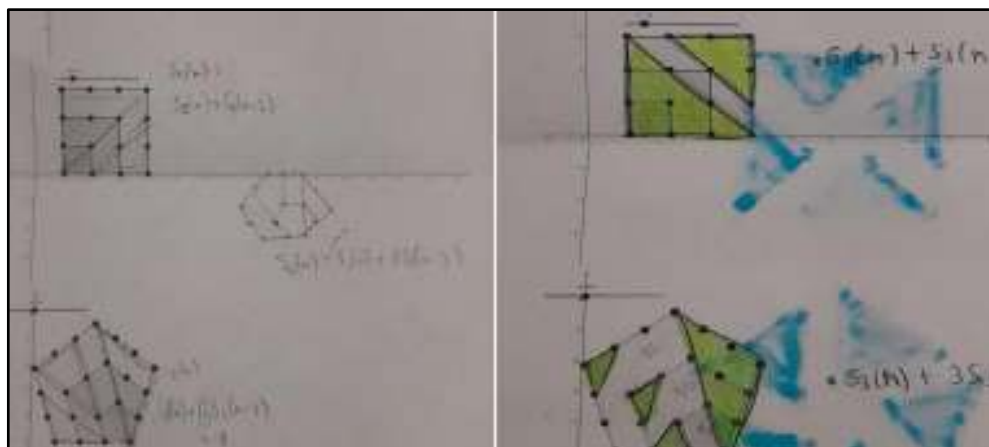
$$S_4(n) = S_3(n) + 2S_3(n-1)$$

$$S_5(n) = S_3(n) + 3S_3(n-1)$$

Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Escrevendo algumas relações entre números poligonais específicos, B3 explicou a relação presente nas figuras e os outros estudantes mesmo não se propondo a ir até a lousa, apresentaram as seguintes relações nas suas listas.

Figura 206 – Fase de formulação de S1 na turma B

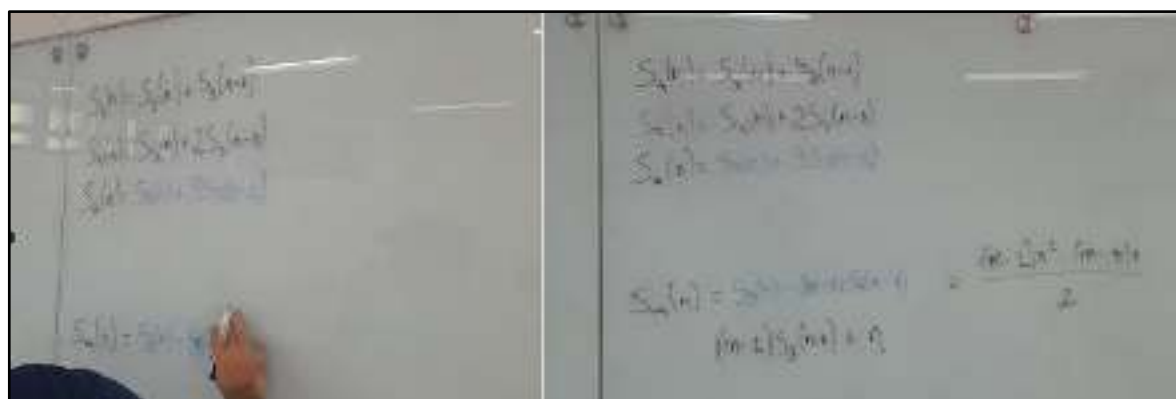


Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Na Figura 206, algumas das produções dos estudantes durante a formulação da situação 1. Apesar de ser considerada válida, essa situação foi de pouco interesse para os alunos, uma vez que o assunto anterior extraiu deles um pouco mais de pensamento discreto. Um ponto a ser observado é que a apresentação das situações 4 e 5 pode ter tornado um certo desinteresse pela situação 1.

Diante disso a situação teve sua resolução proposta pelo estudante B8 de forma explícita e sem a necessidade de uma institucionalização, mesmo que esta fase ainda fosse apresentada a título de encerramento da situação proposta.

Figura 207 – Fase de validação de S1 proposta por B8



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

A foto mostra B8 encerrando a situação, ou seja, já na fase de validação da situação didática 1, que contou com a ajuda dos demais alunos presentes. Essa situação evidenciou que os alunos compreenderam rapidamente a importância da visualização e que as duas situações restantes também poderiam ser resolvidas de forma ágil, à medida que interagissem com o padrão discreto.

Na situação 2, de modo diferente, porém esperado, os alunos passaram a se dedicar mais à sua resolução. Conforme observado na análise a priori, fazer com que eles construíssem a configuração centralizada poderia favorecer o interesse, uma vez que isso dificultaria a interpretação inicial sobre como organizar o padrão das figuras.

Na fase de ação, percebe-se que os estudantes, apesar de não conhecerem os termos “números figurados centralizados”, encontraram sua configuração de forma rápida, assim como ocorreu na primeira situação. As fases de ação e formulação, bem como suas transições, também se manifestam de maneira mais direta, conforme mostra a figura a seguir.

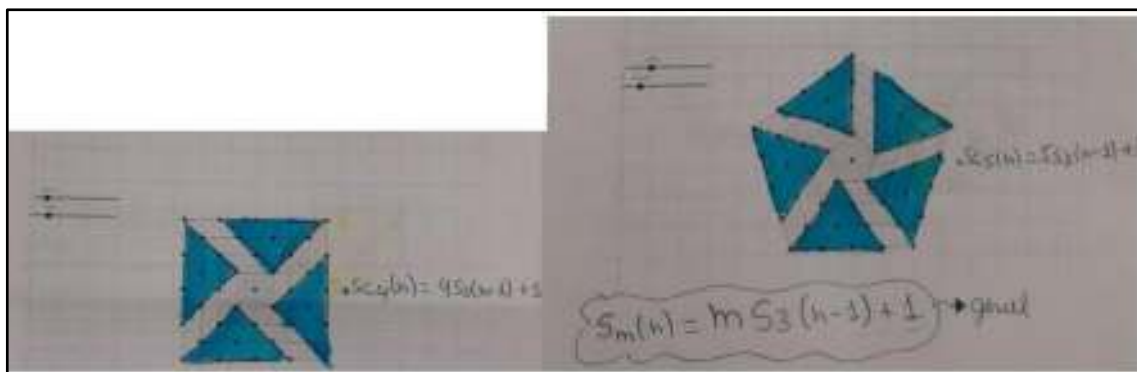
Figura 208 – Momentos da fase de ação em S2 da turma B



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Depois disso, os alunos recorreram aos seus acentos e conseguiram rapidamente concluir a situação apresentando a relação primeiro por meio da figura e depois transcrevendo para uma fórmula válida o que define a fase de validação.

Figura 209 – Momento de Validação de S2, turma B



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Na Figura 209, apresenta-se uma das representações da fórmula dos números poligonais centralizados a partir dos números triangulares, realizada pela estudante B3. De modo geral, a maioria dos alunos fez a mesma representação, finalizando assim a situação.

Quanto à institucionalização dessa questão, o professor apenas observou que a fórmula dada inicialmente já revela a relação em questão. No entanto, os alunos só a perceberam após a apresentação da figura. Isso revela que, por mais simples que uma situação possa ser, a representação discreta consegue ser ainda mais simples.

Por fim, na situação didática 3, na qual os estudantes deveriam apresentar a forma geral dos números piramidais por meio dos números tetraédricos utilizando a visualização, percebeu-se que o exercício das situações anteriores serviu de base para a resolução. Conforme o esperado, os estudantes, num primeiro momento, observaram a figura dos números tetraédricos, mas não identificaram a fórmula. Esse fato é importante, pois indica que, nessa altura da aplicação, eles já estavam cientes do papel relevante da visualização. Na primeira oportunidade, foi apresentada uma figura de número piramidal apenas com pontos pretos, e a interação não avançou.

No passo seguinte, o professor-pesquisador apresentou listas com figuras coloridas. A interação, então, prosseguiu, e o aluno B1 chamou o professor para fazer um questionamento.

B1- aqui eu usei o 3 para chegar no 4... porque é linear é a mesma coisa, e por linearidade é a mesma regra para todas.

Professor – mas aqui você não usa a mesma regra

B1 – mas aqui eu usei n . Eu não entendi essa notação direito.

Professor – eu vou tentar explicar usando essa notação.

Nesse diálogo, B1 já encontra a relação, mas prefere não expor para a turma. O aluno B1 apresenta a relação entre números tetraédricos e piramidais quadrados. Diante disso, o

professor apenas mostra o avanço do aluno na lousa para que os outros saibam se estão no caminho ou não. Assim, B1 chama novamente o professor.

Professor – você chegou na fórmula, mas não estou conseguindo entender

B1 – eu fui somando $n - 1$

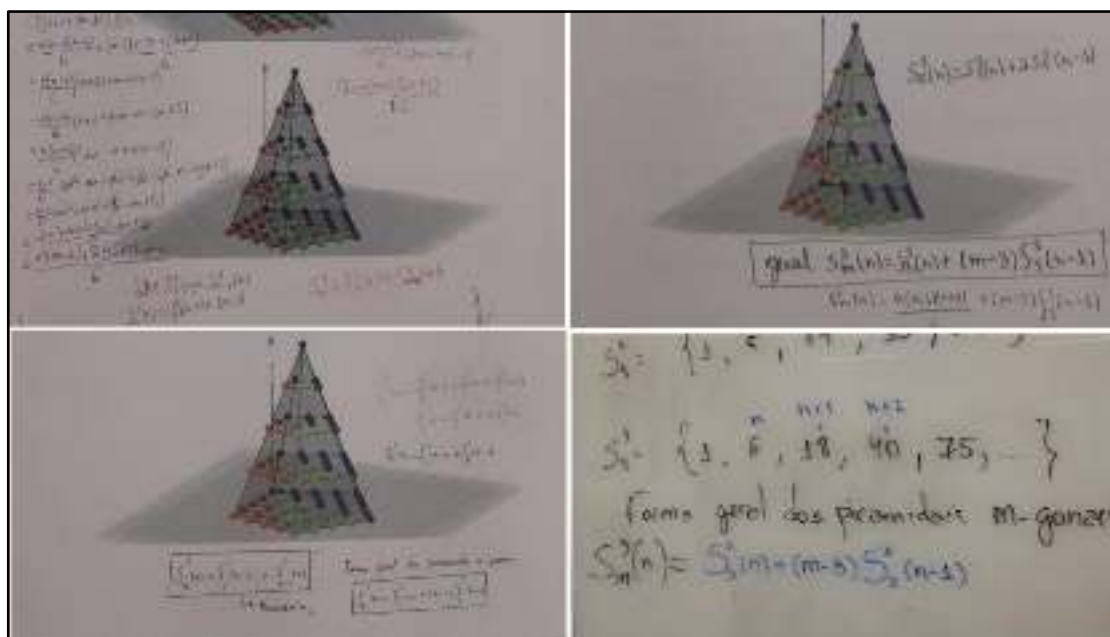
Professor – como assim?

B1 – você vai somando a cada um tetraédrico $n - 1$

Professor – pronto, pronto, isso mesmo.

Diante desse diálogo posteriormente exposto na turma, os estudantes pensaram por mais um período e então apresentaram as expostas sem mais dificuldades. A próxima figura mostra a fase de validação e os resultados dos alunos B2, B3, B6 e B7.

Figura 210 – Validação de S3 na turma B



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Dessa forma, a situação 3 foi encerrada. Em seguida, o professor apresentou a resolução completa na fase de institucionalização da situação didática. Essa etapa foi considerada válida devido à facilidade demonstrada pelos alunos a partir da apresentação da visualização com pontos coloridos e à rapidez na resolução das situações 2 e 3. Isso mostrou que o uso das relações na resolução ocorreu conforme o previsto na fase de análise *a priori*.

Para finalizar, observou-se que a falta de uma sala com projetor, o que impediu a exibição das configurações no GeoGebra e a interação com os ladrilhos, não prejudicou o bom

andamento da aplicação. Isso indica que os dispositivos podem ser utilizados com material impresso, ainda que essa não seja a situação ideal.

Dessa maneira, conclui-se, com base nos elementos analisados, que o dispositivo didático concebido foi válido para a turma HM 2025.1. Ele cumpriu as etapas estabelecidas durante a análise *a priori*, gerou o conhecimento acerca de números figurados, ladrilhamentos e configurações no GeoGebra, conforme o objetivo proposto, e seguiu de forma clara todas as fases da Teoria das Situações Didáticas (TSD).

6.3 Análise *a posteriori* e validação externa (URCA)

A terceira experimentação desta pesquisa oferece um conjunto de elementos particularmente relevantes para a análise *a posteriori* e para a validação no âmbito da ED, uma vez que reúne um público distinto das aplicações anteriores e revela novas dinâmicas no funcionamento das situações didáticas propostas. Diferentemente das turmas das aplicações internas – cuja familiaridade com o milieu foi construída ao longo das etapas anteriores –, este grupo apresentou características próprias que influenciaram diretamente o desenvolvimento das tarefas, especialmente no que se refere ao engajamento e às formas de interação com as representações visuais e os materiais concretos.

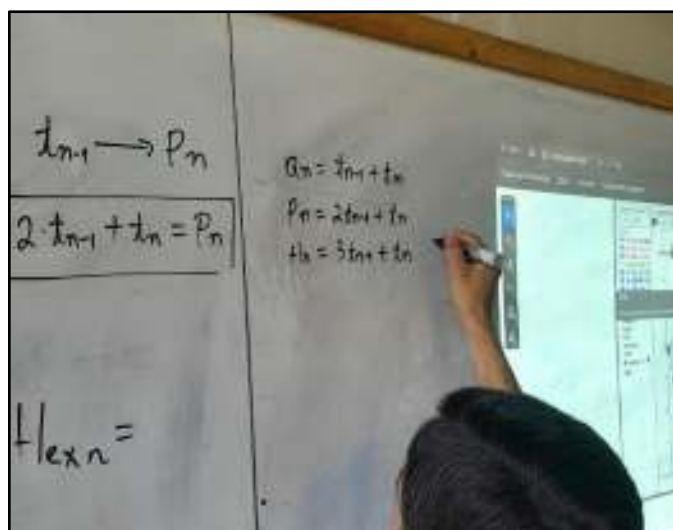
Ao transpor as situações para um público de pós-graduação, observou-se a necessidade de adaptações nas fases anteriores da ED, bem como comportamentos específicos nas fases de ação, formulação, validação e institucionalização, além de variações no comportamento dos estudantes diante das tarefas propostas. Assim, a análise que se segue busca interpretar os resultados observados à luz das expectativas delineadas na análise *a priori*, articulando-os às fases da TSD e identificando, de modo crítico, os elementos que se mantêm estáveis no dispositivo, aqueles que se modificam diante do novo contexto e os que demandam ajustes para aplicações futuras.

Na situação 1, na qual os estudantes são apresentados aos números figurados poligonais e à sua relação com os números triangulares (simplexos de mesma dimensão), alguns dos objetivos são: incentivar os alunos a interagir com o GeoGebra, compreender a relação entre os números figurados e seus simplexos, e relacionar suas fórmulas com a visualização. Para essa situação, esperava-se que os estudantes demonstrassem curiosidade inicial diante do dispositivo visual apresentado. No entanto, eles adotaram uma postura mais tradicional: a lousa foi pouco utilizada em todas as situações, embora o material impresso contenha algumas informações que podem ser empregadas para delimitar cada fase da TSD.

Embora a expectativa inicial fosse de engajamento espontâneo, observou-se resistência dos estudantes às solicitações de participação ativa, especialmente quando foram convidados a se dirigir à lousa para discutir a relação entre os números poligonais e triangulares. Os alunos retomaram o uso do material impresso como apoio principal e optaram por permanecer em seus lugares, evitando a dinâmica interativa prevista pela situação.

Após um período de silêncio, no qual a maioria dos estudantes escrevia no material impresso, o aluno C1 observou a imagem dos números quadrados e, diante da figura, resolveu ir à lousa, onde escreveu as relações descritas na Figura 211.

Figura 211 – Fase de ação de S1 na turma C



$$t_{n-1} \rightarrow P_n$$

$$2t_{n-1} + t_n = P_n$$

$$t_{ex n} =$$

$$Q_n = t_{n-1} + t_n$$

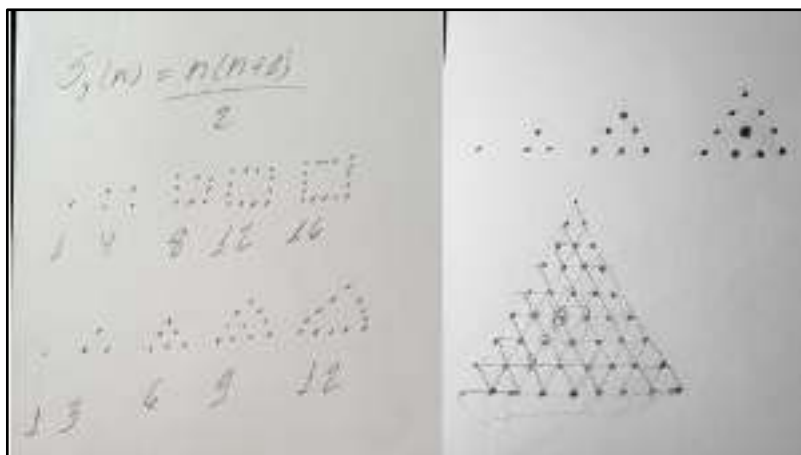
$$P_n = 2t_{n-1} + t_n$$

$$t_k = 3t_{n-1} + t_n$$

Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Essa relação mostra que na fase de ação todos os outros presentes tentavam interagir com a fórmula ou definição, enquanto C1 observava a relação projetada na lousa. A figura acima mostra já a fase de formulação e fica evidente que no caso do estudante em questão apresentou resultado satisfatório já na primeira interação. Ao mesmo tempo outros estudantes ainda discutiam sobre a composição de cada número poligonal separadamente.

Figura 212 – Configurações produzidas por C11 e C9

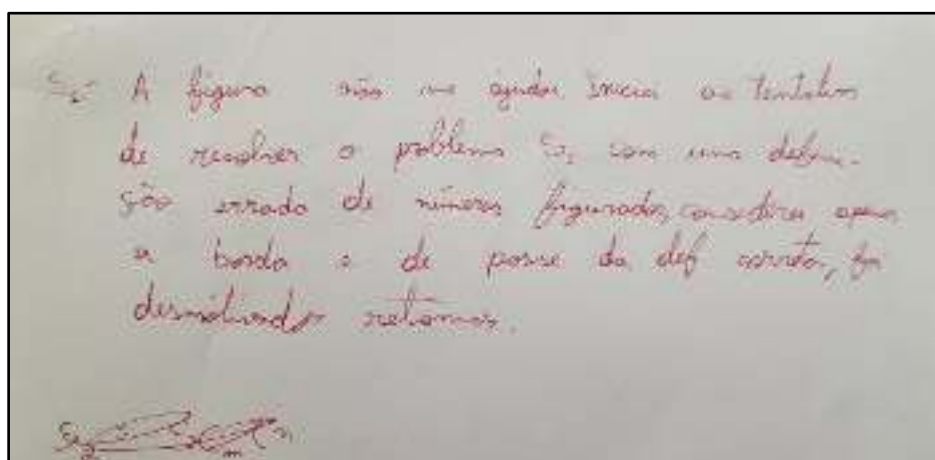


Fonte: acervo da pesquisa

Na Figura 212, observamos que C11 e C9 apresentam as configurações esperadas para a fase de ação, enquanto C1 já registrava na lousa uma propriedade característica da fase de formulação. Esse conjunto de ocorrências reforça a importância da visualização como recurso para favorecer a generalização da fórmula dos números poligonais de maneira menos algébrica e mais imediata, especialmente nas primeiras interações com a situação.

Ainda durante a fase de ação, o estudante C9 tentou resolver a situação sem recorrer à figura, baseando-se em uma definição própria. Ao perceber que sua definição estava incorreta, ele optou por não retomar a figura e, em vez disso, escreveu o relato apresentado na figura a seguir.

Figura 213 – Relato de C9 sobre não usar a figura para auxiliar na construção



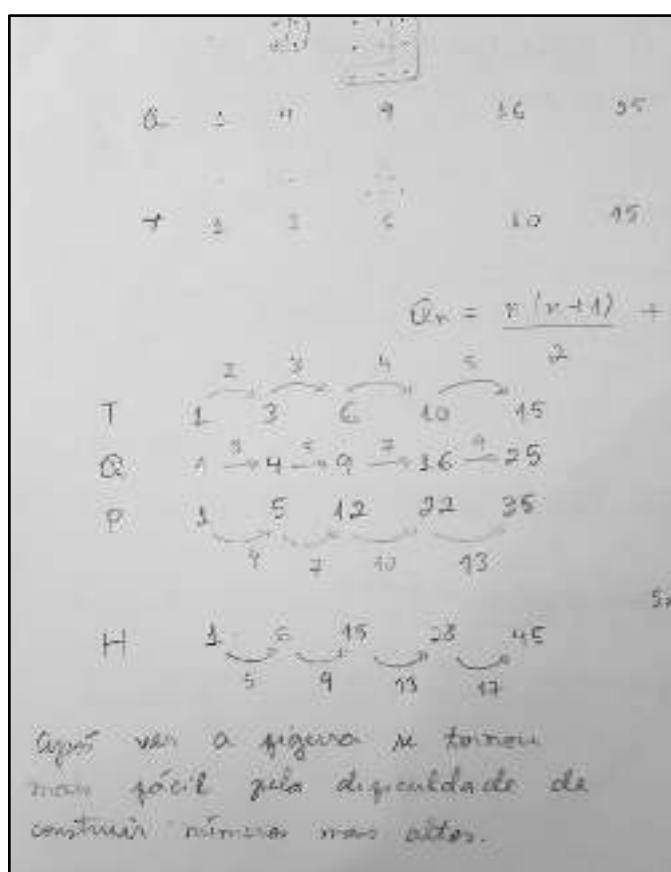
Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Na frase o aluno em questão relata que “a figura não me ajudou, iniciei as tentativas de resolver o problema S1 com uma definição errada de números figurados, considerei apenas a borda e, de posse da definição correta foi desmotivador retomar”

Vale lembrar que a figura dos números pentagonais estava projetada na lousa e o estudante optou por não a usar assim como boa parte da turma no início da situação. Esse relato os ajuda a compreender a dificuldade encontrada quando a representação no GeoGebra não é utilizada ou é feita incorretamente.

Ainda na fase de ação, alguns alunos tentam encontrar a fórmula através de progressões aritméticas, mesmo que a investigação do ponto de vista de generalização funcione, essa tentativa não necessariamente relacionaria com os números triangulares, objetivo da situação 1, observemos todas as informações contidas na próxima figura, um registro da transição entre a fase de ação e formulação, descrita por C13.

Figura 214 – Transição entre fases pelo aluno C13



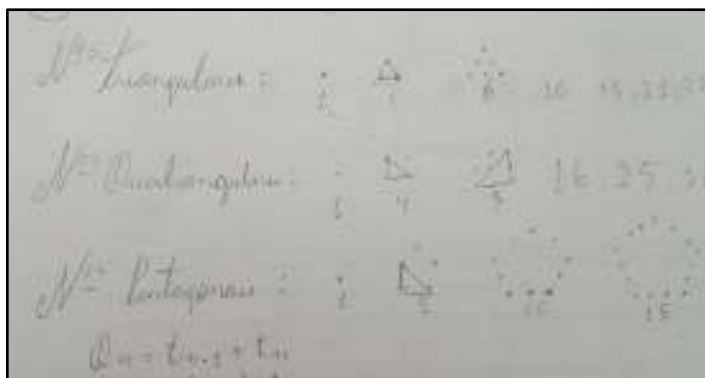
Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

A Figura 214 está dividida em três fases, que ilustram bem a transição entre as fases de ação e formulação no estudante C13. No primeiro momento, o aluno interage com os números

poligonais e esboça a formação dos números quadrados por meio de *gnômons*. Em seguida, tenta escrever as sequências dos números triangulares e dos números quadrados utilizando a soma de progressões aritméticas. Por fim, após retornar à figura, ele afirma: “*Após ver a figura, tornou-se mais fácil devido à dificuldade de construir números mais altos.*”

Na fase de formulação, os alunos já dispõem da relação escrita por C7, o que permite observar movimentos mais característicos dessa fase. O estudante C13 propõe a representação usando gnômons, conforme visto na imagem. Já o estudante C3 tenta encontrar a relação por meio da disposição dos pontos.

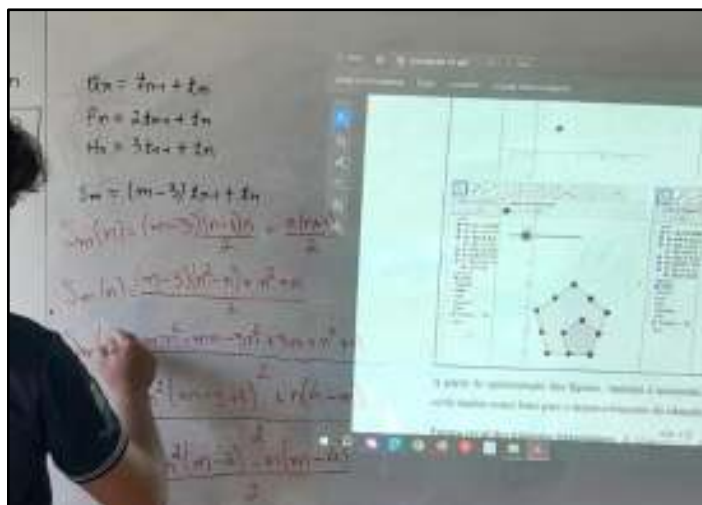
Figura 215 – Configuração feita pelo aluno C3



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

A partir desses exemplos e da interação entre os estudantes, a situação chega à fase de validação, após um debate, troca de ideias e observação da figura exposta na lousa. Nessa situação, a resistência inicial em optar por analisar a figura foi determinante: a parte da turma que não a utilizou não conseguiu concluir a questão. Por outro lado, os alunos que observaram a figura projetada na lousa e tentaram extrair dela a propriedade conseguiram concluir sem grandes dificuldades.

Figura 216 – Validação de S1 pelo aluno C6



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Na Figura 216, registra-se o momento de validação realizado pelo estudante C6, logo após os estudantes que haviam investigado por meio da visualização – utilizando números pentagonais e, posteriormente, hexagonais – terem conseguido validar a Situação Didática 1.

Figura 217 – Validação realizada por C2, C3 e C5



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Na Figura 217, observa-se o momento de validação realizado pelos estudantes C2, C3 e C5. Dessa forma, a situação pode ser considerada válida, ainda que, inicialmente, os alunos não tenham recorrido à visualização como estratégia principal para obter a fórmula. É importante destacar que, diferentemente das aplicações anteriores – nas quais as fases de ação e formulação foram significativamente mais ricas devido à interação direta com as figuras –, nesta turma o momento mais produtivo ocorreu durante a fase de validação. Foi nesse estágio que os estudantes retomaram os elementos formais da situação, evidenciando que, embora a visualização desempenhe um papel relevante, o grupo demonstrou preferência por relações mais algébricas e formais, típicas da matemática pura, para chegar aos resultados.

Quanto às Situações 2 e 3, o professor iniciou solicitando que os estudantes tentassem descrever de forma clara, por meio de uma configuração, o que seria um número triangular centralizado. Assim, a turma iniciou a busca pelas relações diretamente a partir da figura apresentada.

De imediato, o estudante C7 prontificou-se a ir à lousa para tentar representar uma configuração centralizada. Esse movimento inicial mostrou que, para os alunos que já utilizavam a configuração visual como referência na fase de ação, a Situação 2 se apresentava de forma mais acessível e direta. A seguir, registra-se o momento em que C7 constrói os números triangulares centralizados, marcando de maneira clara o início da fase de ação dessa situação.

Figura 218 – Fase de ação da S2 por C7

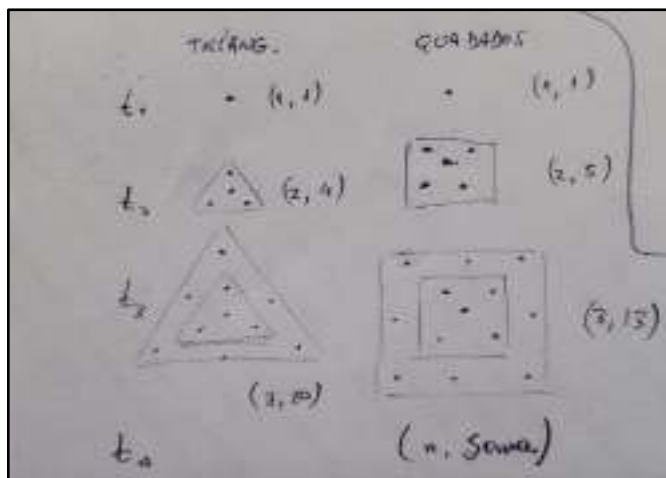


Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

A partir desse momento, os demais estudantes passaram a relacionar a situação atual com a Situação Didática 1, comentando que “*bastava seguir o exemplo*” e que o único desafio seria a construção da configuração centralizada. Observou-se também que alguns alunos iniciaram a resolução diretamente pela configuração, algo que não havia ocorrido na situação anterior. Como a Situação 2 tem por objetivo relacionar números poligonais centralizados com números triangulares, era esperado que a turma a resolvesse com maior rapidez, expectativa que efetivamente se confirmou ao longo da atividade.

Assim como nas aplicações anteriores, não foi possível delimitar com clareza a fase de formulação, dado que os estudantes transitaram entre ação e validação de maneira muito fluida. Mesmo assim, alguns em alguns registros é possível perceber que os alunos tentam encontrar a relação desejada em um esboço claro da fase de formulação.

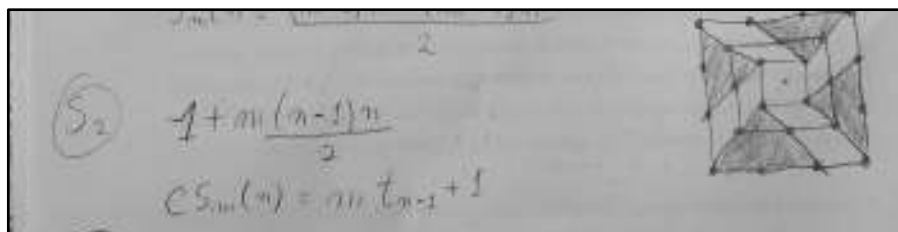
Figura 219 – Uma formulação para S2 pelo aluno C13



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Na Figura 219, C13 formula uma relação entre os triangulares e quadrados, ambos centralizados. Como em geral a fase de formulação não foi bem desenvolvida, o que apresentamos a seguir corresponde especificamente aos registros da fase de validação, que sintetizam a forma como os alunos confirmaram seus resultados e retomaram os elementos essenciais da situação para assegurar a pertinência da solução encontrada.

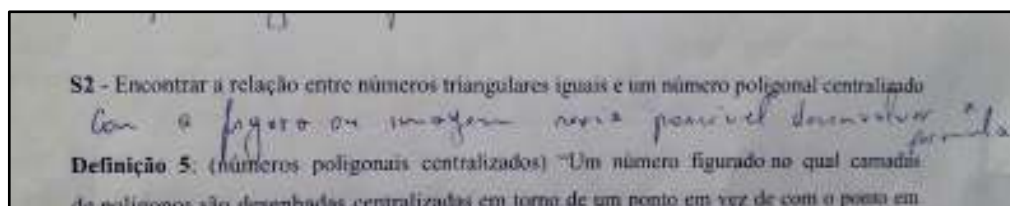
Figura 220 – Validação de S2 feita pelo aluno C3



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Na Figura 220, temos o estudante C3, que apenas com a definição de número poligonal centralizado, constrói a figura e define a relação, encerrando a fase de validação. Por outro lado, o estudante C9, escreve um relato no material impresso, “*basta analisar cada camada Individualmente como fizemos em S1*”. Vale lembrar que nesse momento os alunos ainda não estão de posse da visualização dos números poligonais centralizados, o que gera um desconforto tem alguns estudantes como o caso de C12 quando relata que “*com a figura ou imagem seria possível desenvolver a fórmula*”. Com esse relato podemos afirmar que os alunos já procuram iniciar sua investigação por meio da visualização, diferentemente de S1.

Figura 221 – Relato de C12 sobre S2



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

A partir desse momento a maioria dos alunos pede para que seja mostrada a configuração e em seguida apresentam o resultado, ou seja, apresentam uma fórmula substituindo o termo $\frac{n(n-1)}{2}$ por T_{n-1} que é o bastante para validar essa questão.

Figura 222 – Validação de S2 feita por C2

Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Na Figura 222, temos o momento de validação feito pela estudante C2. Diante dessa afirmação, o professor pediu para que mais alguém discutisse sobre essa relação, mas ao perceber que é uma relação muito simples os alunos optaram por encerrar a questão, cabendo ao professor iniciar a fase de institucionalização. O professor então apresentou a seguinte relação. Temos $CS_m(n) = 1 + m \frac{n(n-1)}{2}$, como $S_3(n) = \frac{n(n+1)}{2}$, então $S_3(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$. Ou seja

$$CS_3(n) = 1 + mS_3(n-1)$$

Na Figura 217, observa-se o momento de validação realizado pelos estudantes C2, C3 e C5. Dessa forma, a situação pode ser considerada válida, ainda que, inicialmente, os alunos não tenham recorrido à visualização como estratégia principal para obter a fórmula. É importante destacar que, diferentemente das aplicações anteriores – nas quais as fases de ação e formulação foram significativamente mais ricas devido à interação direta com as figuras –, nesta turma o momento mais produtivo ocorreu durante a fase de validação. Foi nesse estágio que os

estudantes retomaram os elementos formais da situação, evidenciando que, embora a visualização desempenhe um papel relevante, o grupo demonstrou preferência por relações mais algébricas e formais, típicas da matemática pura, para chegar aos resultados.

Quanto às Situações 2 e 3, o professor iniciou solicitando que os estudantes tentassem descrever de forma clara, por meio de uma configuração, o que seria um número triangular centralizado. Assim, a turma iniciou a busca pelas relações diretamente a partir da figura apresentada.

De imediato, o estudante C7 prontificou-se a ir à lousa para tentar representar uma configuração centralizada. Esse movimento inicial mostrou que, para os alunos que já utilizavam a configuração visual como referência na fase de ação, a Situação 2 se apresentava de forma mais acessível e direta. A seguir, registra-se o momento em que C7 constrói os números triangulares centralizados, marcando de maneira clara o início da fase de ação dessa situação.

C5 – por que no segundo tem que ter 3 ladrilhamentos e você coloca T_2

Professor – porque T_2 é o tamanho 2 e 3 é o número de possibilidades

C5 – a primeira é toda cinza, sempre a primeira é cinza

Professor – e a segunda cor?

C5 – pode preencher com as cores que sobraram?

C7 – pode ser todas as possibilidades de cores?

Professor – não, porque pode fugir o valor, tem que ser só 3

C10 – pode repetir as cores não

Professor – pode

C10 – cinza-cinza no primeiro

Professor – bom já ir anotando a regra

C10 – primeira peça sempre cinza

C8 – esse terceiro pode ser todo cinza?

Professor – pode

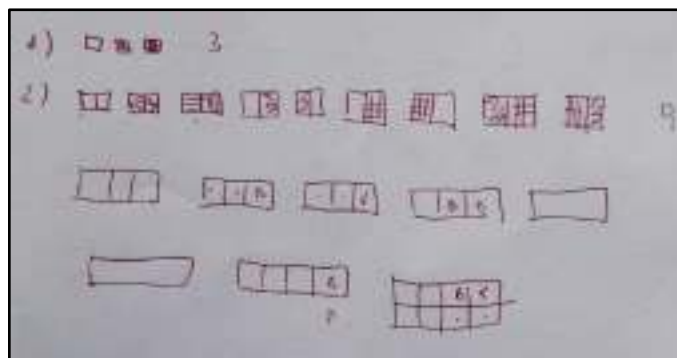
C8- a próxima, cinza-vermelho-preto

C10 – eu estava pensando em colocar cinza-cinza-vermelho e depois cinza-vermelho-preto. Dá para seguir uma sequência.

Após esse diálogo, alguns estudantes sugerem colocar a peça cinza no final, ou mesmo permutar vermelhas e preto, todas as tentativas sem sucesso, porém esse diálogo faz parte da fase de formulação. O professor pergunta se os alunos já possuem uma regra, nesse momento surgem várias ideias, até que C8 diz que “tem que pensar em cinza-vermelho-preto” além disso nesse momento C4 diz que “tem que ter uma regra que sempre que tiver vermelho e preto, o vermelho vem primeiro”

Depois de algum debate os alunos retornam aos seus escritos iniciando tentativas de ladrilhar a sequência desejada. O estudante C1 apresenta um ladrilhamento ainda da fase de ação, que ele percebe estar errado

Figura 223 – Fase de ação de S4 feita por C1



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Na Figura 223, observa-se que o estudante C1 identificou 9 ladrilhamentos, o que indica que a regra ainda não foi apreendida por parte dos alunos. Embora outras contribuições tenham sido registradas, nenhuma delas pôde ser utilizada para validar as Situações 4 e 5. Diante disso, o professor encerrou a experimentação apresentando, durante a fase de institucionalização, as resoluções das duas situações restantes.

Com base no que foi observado, a análise das situações desenvolvidas na experimentação evidencia que o principal obstáculo enfrentado por esta turma foi a resistência ao uso da tecnologia e de materiais manipuláveis. Essa postura pode ser atribuída ao perfil formativo dos estudantes, cuja trajetória acadêmica está centrada na matemática tradicional e formal, sem vivência de dispositivos didáticos típicos de um mestrado profissional ou de abordagens que valorizam a visualização e a experimentação. Essa característica refletiu-se diretamente nas fases previstas pela TSD, sobretudo na fase de ação, que depende de interações mais espontâneas com as representações e ferramentas propostas.

No que se refere às Situações 1, 2 e 3, foi possível realizar a análise e uma validação parcial. Os estudantes demonstraram resistência inicial, mas conseguiram adaptar-se gradualmente, especialmente na Situação 3, na qual a visualização desempenhou um papel mais evidente. A validação não se completou plenamente devido a dois fatores: o tempo reduzido previsto na análise a priori e o próprio objetivo pedagógico da situação, que demandava menor exploração e menos conhecimentos prévios das etapas anteriores. Já as Situações 4 e 5, relacionadas aos ladrilhamentos, revelaram-se pouco eficazes desde o início, sobretudo pela ausência de interação dos estudantes com o material concreto e, posteriormente, com a representação no GeoGebra, o que inviabilizou a constituição adequada das fases de ação e formulação.

Dessa forma, a análise *a posteriori* indica que, para um contexto de pós-graduação com esse perfil de turma, o dispositivo didático precisa ser reconfigurado, privilegiando uma abordagem mais formal. Sugere-se, possivelmente, a substituição do uso de peças e manipulações por argumentos algébricos e demonstrações, que se alinham melhor às expectativas do grupo. Em termos gerais, a experimentação pôde ser concluída e ofereceu elementos importantes para compreender o nível acadêmico da turma e, sobretudo, para indicar como cada situação deve ser apresentada e adaptada em futuras aplicações, preservando a coerência com os objetivos delineados na Engenharia Didática.

6.4 Análise *a posteriori* e validação externa (FECLESC – Quixadá)

A análise *a posteriori* desta experimentação tem como objetivo avaliar, com base nos dados coletados durante a aplicação das situações didáticas, em que medida as hipóteses formuladas na análise *a priori* foram confirmadas sob a ótica de uma experimentação externa, ou seja, quando os resultados são testados em outro contexto, aqui, especificamente, em outra instituição. Serão avaliadas também as mudanças na interação dos estudantes com o dispositivo didático e se este se mostrou adequado às intenções de ensino e às variáveis previstas pela Engenharia Didática. Nesse contexto, esta seção discute o grau de validação atingido por cada situação proposta, considerando as evidências produzidas, as interações observadas e a pertinência das respostas dos estudantes.

Esta quarta experimentação envolveu licenciandos em Matemática do turno noturno, teve duração de quatro horas-aula e contou com dez estudantes participantes (identificados como D1 a D10), organizados para resolver cinco situações fundamentadas na articulação entre números figurados, visualizações geométricas e tabuleiros. As situações foram disponibilizadas em dois blocos e podiam ser resolvidas tanto por meio do software GeoGebra (projetado em tela) quanto com o auxílio do material manipulável físico (tabuleiros e peças geométricas). Essa liberdade metodológica foi proposital, visando observar como diferentes meios de representação influenciariam as estratégias, as justificativas e as validações produzidas pelos estudantes.

Do ponto de vista da TSD, o *milieu* desempenhou papel central no desenvolvimento das ações dos estudantes. A conjunção entre o GeoGebra e o tabuleiro físico permitiu a criação de um ambiente de interação, no qual os estudantes podiam testar hipóteses visualmente, confrontar soluções e comparar resultados entre meios distintos. Uma característica marcante desta aplicação foi a forte adesão ao material manipulável nas fases iniciais de exploração,

sobretudo nas situações relacionadas ao ladrilhamento dos números triangulares, que correspondem às Situações 4 e 5, as quais iniciaram a experimentação nesta turma.

Outra característica observada foi o aumento da autonomia dos alunos à medida que as situações avançavam. A turma mostrou-se solícita desde o início da aplicação, o que facilitou o engajamento com o material e o aumento gradual da participação de todos nas situações propostas. Isso afetou de forma positiva a percepção das situações seguintes e, conseqüentemente, a fluidez das resoluções.

Analisando os registros dos estudantes agora sob a ótica da análise a posteriori, com alguns dados já apresentados na experimentação, percebe-se que existiu uma dificuldade inicial que indicava a não execução das Situações 4 e 5. Na fase de ação, os alunos foram apresentados aos tabuleiros físico e virtual; interagiram primeiro com o tabuleiro virtual a partir de seus próprios assentos e, depois disso, optaram por usar o tabuleiro físico.

Alguns alunos iniciaram a busca pela regra sem levar em consideração o que havia sido mostrado no ladrilhamento dos números lineares. Assim, algumas regras apresentavam inconsistências claras, mostrando que os alunos não estavam atentos ao que havia sido apresentado anteriormente. Observe-se, a seguir, o debate com a turma sobre o ladrilhamento do segundo número triangular, após a apresentação das sequências de números naturais e lineares.

D9 – eu pensei assim, você tá usando um quadrado e um dominó, só duas figuras para fazer os primeiros triangulares ali.

Professor – não, ali é para números de Fibonacci, eles têm uma regra específica.

D3 – então são dois vermelhos e depois dois pretos.

Professor – que regra seria essa? Só posso usar cores iguais? Assim só seria 3,3,3,3, ... vocês entenderam?

D9 – podemos fazer assim, quadrados adjacentes não podem ter a mesma cor?

D6 – daria mais de três combinações.

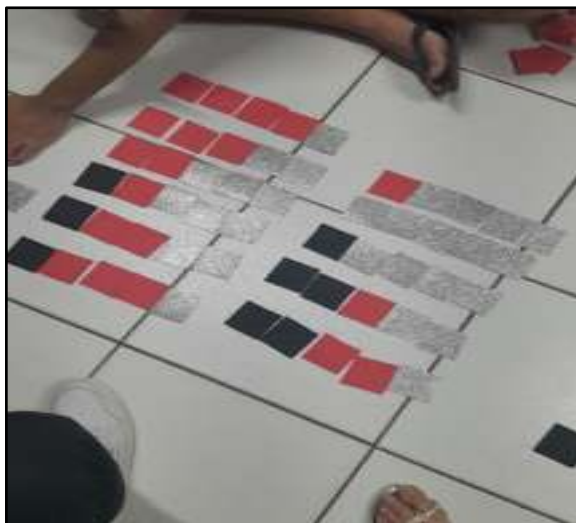
Professor – então nem vamos continuar.

D8 – pode dar peso as cores? cinza vale 1, vermelho vale 2 e preto vale 3?

Professor – só não vale assim porque o que importa é o tamanho dele. Mas pode como se fosse hierarquia.

Esse debate revela que os alunos não compreenderam a ligação entre as sequências apresentadas e a situação proposta. Em seguida, embora tenham concluído que a organização das peças dos números triangulares poderia seguir a mesma regra, eles não registraram essas regras por escrito. Em vez disso, limitaram-se a organizar os ladrilhos de modo que iniciassem com a cor cinza, seguidos pelo vermelho e, por fim, pelo preto ao final de cada ladrilhamento.

Figura 224 – Fase de ação das situações 4 e 5, turma D

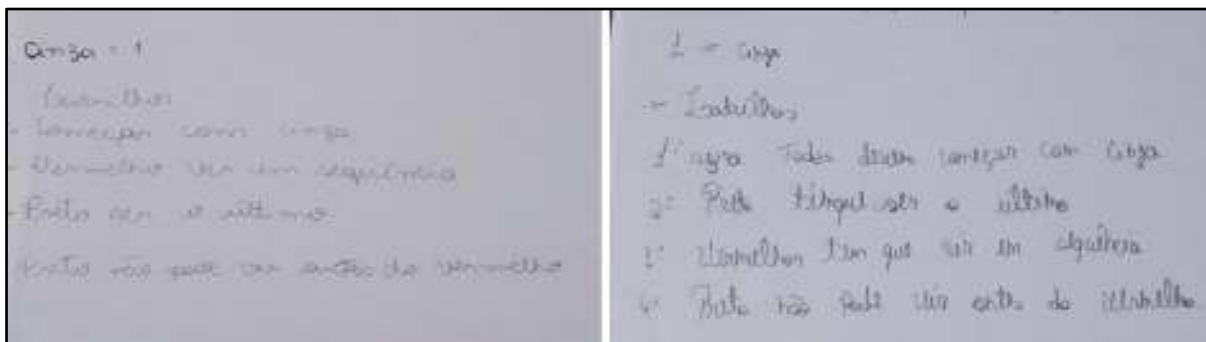


Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

A Figura 224 mostra o momento de ação das Situações 4 e 5, no qual os alunos tentam organizar as peças, porém ainda sem a disposição necessária para que se encontre alguma lei de recorrência. Enquanto isso, a Situação 4 permanecia em aberto, uma vez que os alunos ainda não haviam proposto uma regra, embora já a estivessem utilizando.

A adesão ao material físico foi crescendo, e os alunos chegaram a construir até certo ponto, necessitando de uma breve intervenção do professor para que se atentassem à resolução da situação. Diante do pedido, alguns alunos retornaram aos seus lugares para debater as regras, enquanto outros se dirigiram ao tabuleiro virtual para apresentar a recorrência. Dessa forma, a Situação 4 foi rapidamente validada pela maioria dos alunos, que já estavam usando as regras para manipular o tabuleiro. Analisando as respostas das estudantes D6 e D7, que manipularam o tabuleiro virtual de modo efetivo, temos:

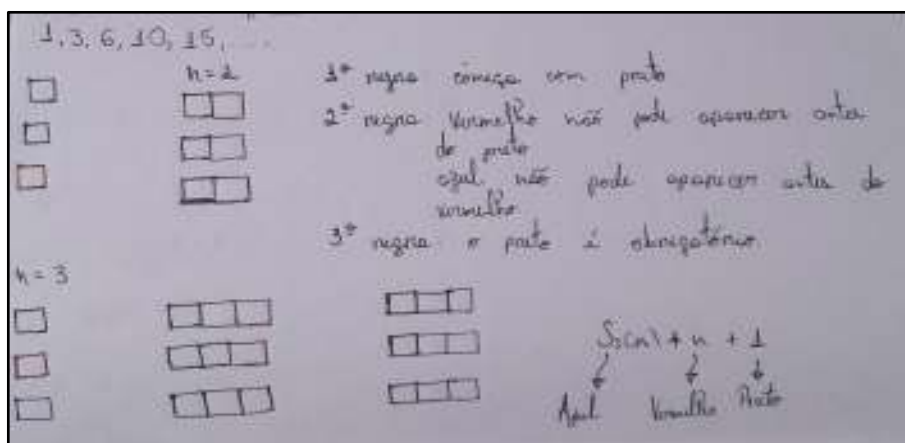
Figura 225 – Validação de S4 pelos alunos D6 e D7



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Observa-se que os alunos criaram as regras de forma coletiva, e tais regras são, em certa medida, condizentes com o que havia sido planejado. Dessa forma, essa questão pode ser validada, pois os alunos trabalharam em conjunto e, mesmo aqueles que não as redigiram, apresentaram-nas verbalmente. Outro registro importante, que possibilitou validar as Situações 4 e 5 simultaneamente, foi o do estudante D10, que observava os materiais físico e virtual, mas executou o processo de seu próprio assento.

Figura 226 – Validação de S4 e S5 por D10

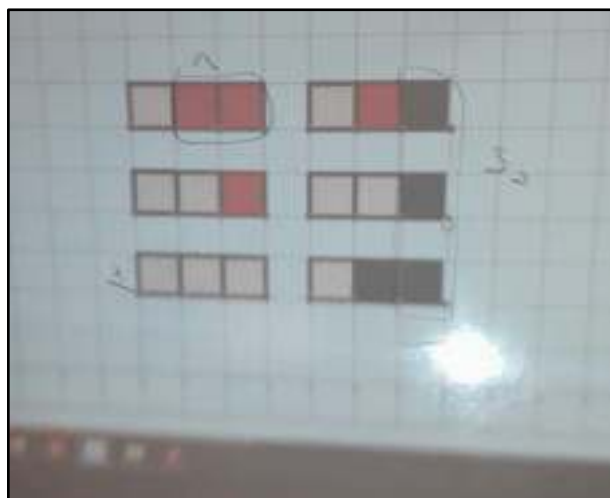


Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

O estudante D10 escreveu os ladrilhamentos usando as cores das suas canetas, sendo preto da caneta relativo ao cinza do tabuleiro, vermelho da caneta com vermelho do ladrilho e o azul da caneta relativo ao preto do ladrilho. Assim, ele descreve tanto as regras de ladrilhamentos como a recorrência (canto inferior direito) apresentando o momento de validação das situações 4 e 5 de uma vez.

Outro estudante, D9, executa essa validação na lousa apresentando o ladrilhamento $T_3 = 3 + 2 + 1$ no registro, embora pouco nítido, é possível perceber que o aluno marca os valores com preto sendo o termo T_2 , vermelho sendo n e o ladrilhamento cinza sendo 1, conforme a análise *a priori*.

Figura 227 – Validação de S5 realizada por D9 no tabuleiro virtual



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Assim, as Situações 4 e 5 são consideradas válidas, embora os estudantes não tenham estabelecido a ligação entre números lineares e números triangulares, conexão essencial para que a regra fosse descoberta rapidamente. Ainda assim, por meio de testes e de algumas observações importantes, foi possível determinar as regras da Situação 4 e a recorrência em forma de ladrilho da Situação 5.

Quanto às Situações 1, 2 e 3, os alunos já estavam motivados a participar. No momento de ação, ao serem apresentadas as configurações clássicas, eles foram à lousa e demonstraram domínio e rapidez na explicação. Quando foram apresentados aos números quadrados e questionados sobre a relação, o estudante D5 prontamente respondeu: “*É a soma de um número triangular com o triangular anterior.*” Diante da resposta rápida, o professor então apresentou os números pentagonais. Os alunos debateram entre si, e os estudantes D7 e D9 foram à lousa, onde traçaram a representação utilizando números triangulares.

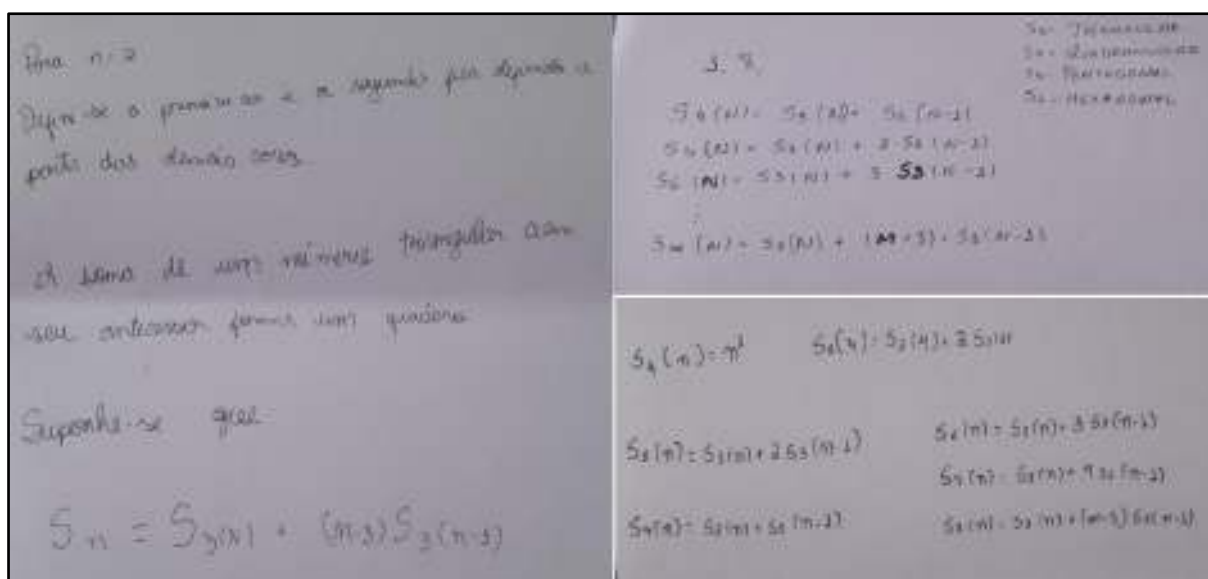
Figura 228 – Formulação de S1 pelos alunos D7 e D9



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

A partir dessa imagem apresentada, solicitou-se que os alunos determinassem a regra geral para os números poligonais com base nos números triangulares. Os registros a seguir correspondem à fase de validação da Situação 1, que, neste caso, consistia apenas em apresentar a relação, pois a experimentação foi ajustada ao tempo previsto para cada atividade. Mesmo assim, a turma conseguiu validar a situação proposta.

Figura 229 – Validação de S1 realizada por D3, D4 e D9



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Na Figura 229, apresentam-se as conclusões dos estudantes D3, D4 e D9, as quais evidenciam a validação da Situação 1. Diante disso, a Situação Didática 1 pode ser considerada válida, uma vez que apresentou elementos que favorecem a relação desejada, bem como o cumprimento das etapas da TSD previamente estabelecidas. As Situações 2 e 3 foram inicialmente propostas para serem resolvidas sem a necessidade de grandes interações. No entanto, devido a fatores como a necessidade de liberação de alguns alunos em razão do horário noturno das aulas, bem como à escassez de material documental na coleta de dados, essas situações não puderam ser validadas nesta experimentação.

Diante dos registros e da análise desta experimentação, conclui-se que os dispositivos utilizados – isto é, o GeoGebra e os ladrilhos (físicos ou virtuais) – são estáveis e replicáveis. A alternância entre o tabuleiro físico e o virtual não altera a percepção dos estudantes quanto ao estudo dos ladrilhos e favorece a obtenção clara das regras. Por fim, as lacunas deixadas pela escassez de documentos relativos às Situações 4 e 5 não afetam de forma significativa a análise dos materiais empregados nem das situações em si, embora comprometam a validação total da experimentação.

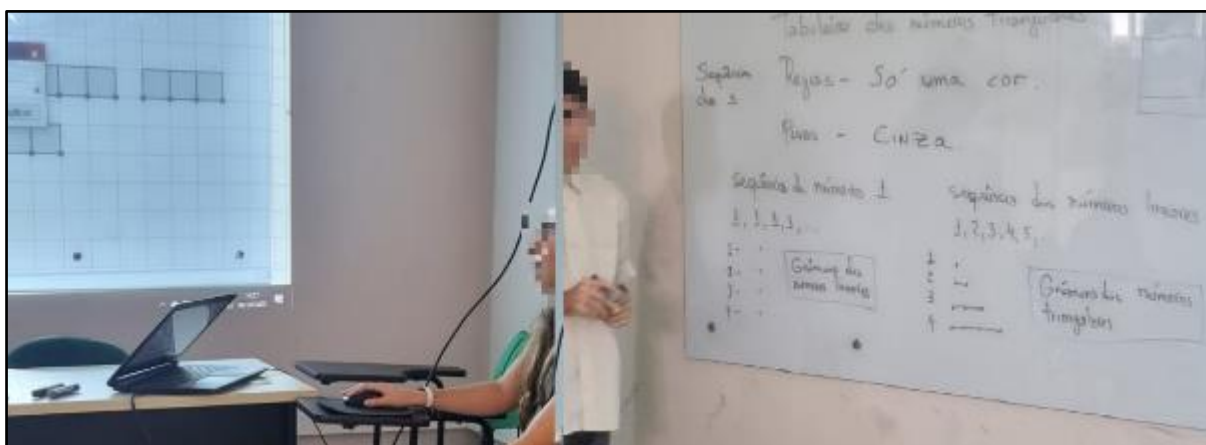
Assim, a análise dos dados mostra que a experimentação atingiu seus principais objetivos: provocou a formulação de conjecturas, possibilitou a validação coletiva, promoveu justificáveis coerentes e reforçou as relações algébricas e geométricas entre números figurados e suas representações. As validações observadas confirmam, em grande parte, as hipóteses da análise *a priori*, ainda que as situações não tenham sido validadas de forma integral. Ademais, o conjunto das evidências produzidas sustenta a conclusão de que a sequência didática proposta é pertinente, funcional e alinhada às finalidades da pesquisa.

6.5 Análise *a posteriori* e validação interna (IFCE – 2025.2)

A análise *a posteriori* da quinta experimentação permite compreender, de forma ampla, como se desenvolveu a dinâmica das cinco Situações Didáticas, revelando padrões consistentes já observados nas aplicações anteriores, mas agora com maior estabilidade, autonomia e clareza nas fases da TSD. Diferentemente das aplicações anteriores, nas quais variáveis didáticas interferiam paralelamente no andamento das tarefas, esta experimentação apresentou um cenário didático mais homogêneo: a turma era reduzida, o espaço físico adequado, os dispositivos estavam plenamente funcionais e o tempo total foi distribuído em múltiplos encontros. Essas condições favoreceram a maturação das discussões e a efetiva participação de todos os nove estudantes envolvidos.

Desde o início da aplicação, foi perceptível que a apresentação das Situações 4 e 5 – relativas aos ladrilhamentos – provocou um imediato engajamento da turma. Esse comportamento já havia sido registrado em outras experimentações, mas, nesta aplicação, apresentou-se com intensidade ainda maior. Logo no primeiro momento, os estudantes demonstraram compreensão clara das regras necessárias para iniciar o ladrilhamento, especialmente devido à participação na dinâmica de ladrilhamento da sequência dos números uns, que funcionou como porta de entrada para o restante das construções. As imagens registradas nesse momento revelam os estudantes E8 e E7 aplicando diretamente a regra prontamente encontrada por eles e seus colegas, compreendendo, assim, a fase de ação da Situação 4, na qual os alunos conseguem revelar as regras e as peças do ladrilhamento dos números uns.

Figura 230 – Fase de ação de S4 pelo aluno E7



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

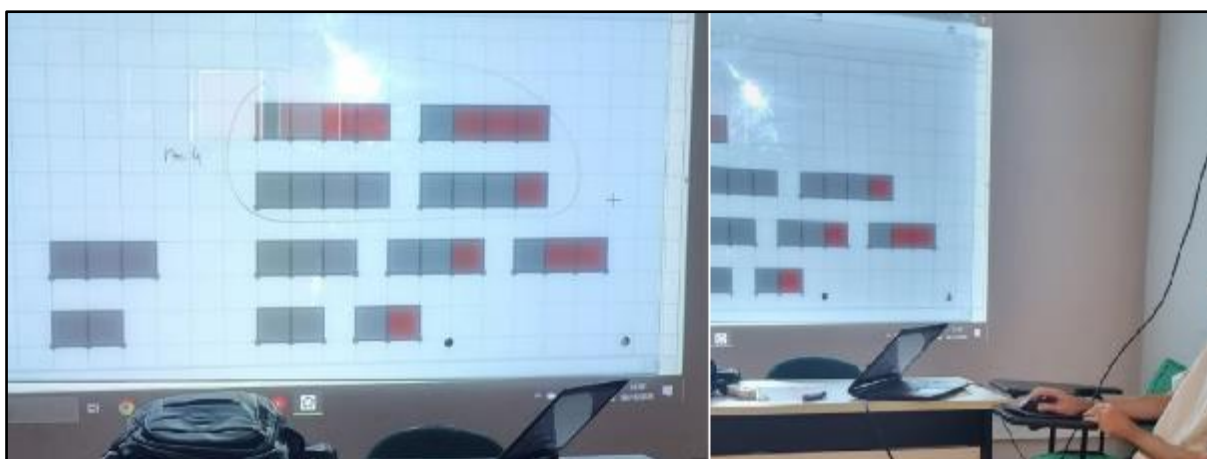
Na Figura 230, é possível notar que, enquanto E7 tenta compor os ladrilhos no tabuleiro, E9 encontra a regra necessária para esse ladrilhamento. Dessa maneira, foi possível avançar para a fase de formulação, na qual os alunos buscam construir as regras de ladrilhamento dos números lineares. Diante disso, e ainda no âmbito da fase de ação, o estudante E8 constrói o ladrilhamento dos números lineares com o auxílio do GeoGebra. Esse momento marca a transição da fase de ação para a fase de formulação da Situação 4, revelando que as regras e as peças do tabuleiro virtual foram compreendidas a ponto de se indicar uma possível validação.

A evolução para a sequência dos números lineares ocorreu naturalmente, sem hesitações perceptíveis. No momento seguinte, o mesmo estudante já se encontra no computador organizando as peças no GeoGebra, o que é particularmente significativo, pois representa não

apenas domínio da tarefa matemática, mas também autonomia tecnológica, fato que não ocorreu nas aplicações anteriores.

Esses primeiros registros já indicam que os alunos haviam ultrapassado rapidamente a fase de ação e, de forma coletiva, adentrado a fase de formulação. O grupo discutia entre si como organizar os elementos, testava diferentes arranjos e fazia pequenos ajustes, demonstrando compreender o funcionamento do dispositivo antes mesmo de chegar à situação pedida. Assim, na fase de formulação, os estudantes conseguiram construir números lineares relacionando-os com a sequência anterior.

Figura 231 – Construção de números lineares pelo aluno E8

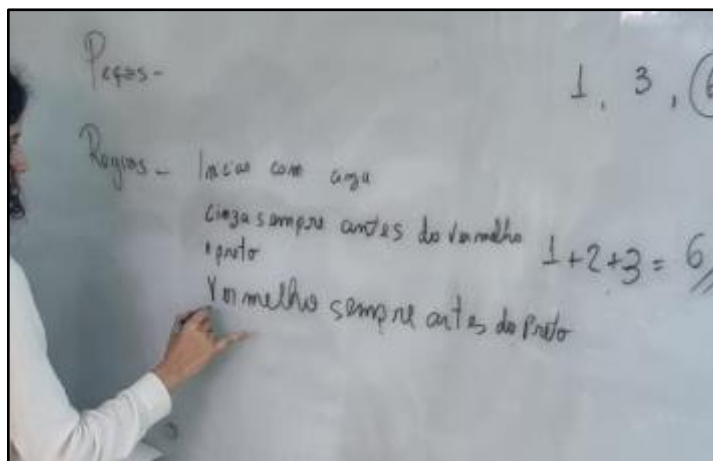


Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Na Figura 231, é possível observar o aluno E8 durante a construção dos números lineares no tabuleiro virtual. Diante disso, os presentes já iniciaram a validação, ou seja, a discussão sobre as regras e as peças necessárias para cobrir um tabuleiro $1 \times n$ dos números triangulares.

Passa-se, então, à análise da Situação 4, na qual os estudantes devem ladrilhar os números triangulares. Os registros mostram que a familiaridade adquirida previamente com o tabuleiro virtual e com o GeoGebra tornou essa situação quase uma extensão natural das anteriores. Isso confirma que a organização das situações em blocos favorece a progressão do conceito na Situação 4. A seguir, apresenta-se o momento de validação das situações em questão, revelado por E5 com a ajuda de alguns colegas.

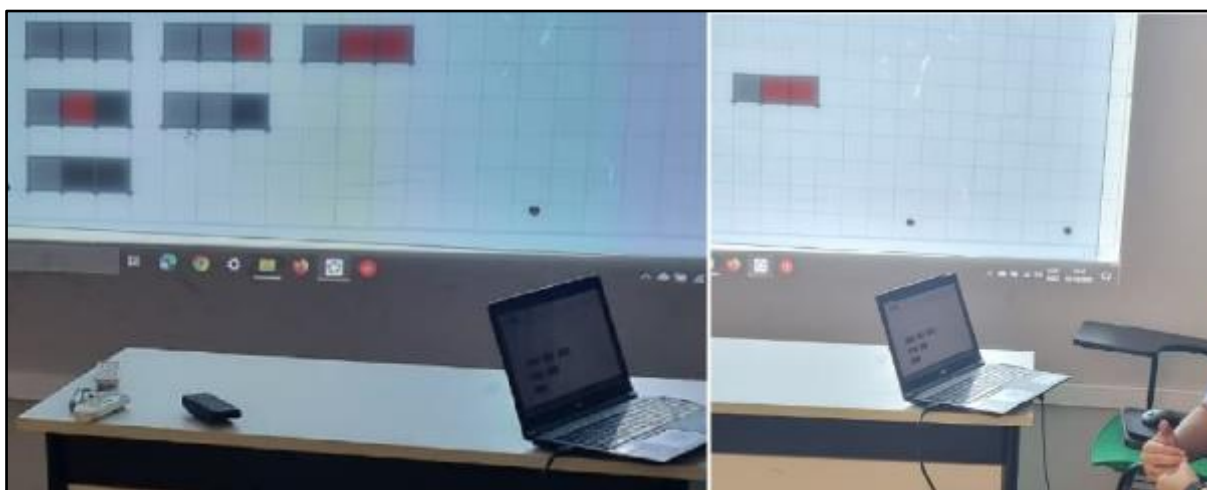
Figura 232 – Validação de S4 pela aluna E5



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Alguns alunos posteriormente conseguiram uma montagem no tabuleiro virtual para mostrar que as peças, quando organizadas conforme a regra, revelam números triangulares. Assim, o aluno E2 apresenta o caso $n = 3$, conforme a Figura 233.

Figura 233 – Validação de S4 no tabuleiro virtual por E2



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

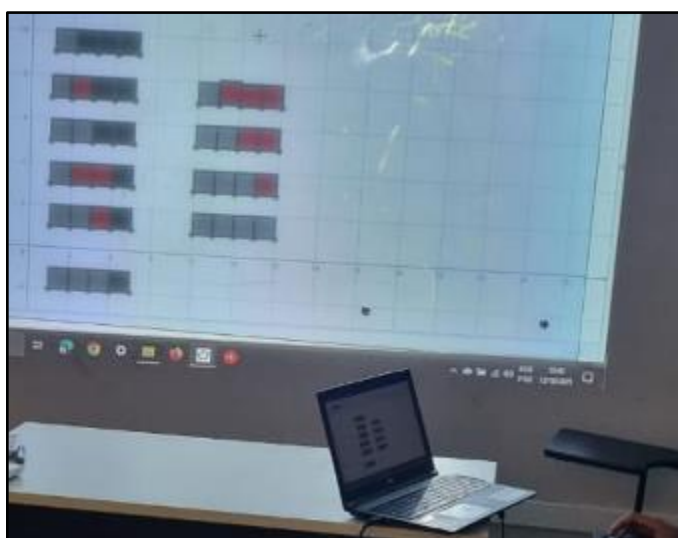
Dessa maneira a situação 4 pode ser validada, pois seguiu os passos previstos na análise *a priori* e ainda revelou o refinamento da aplicação após vários experimentos. Como já descrito em aplicações anteriores, essa situação fornece subsídios para a resolução rápida da situação 5.

Diante disso, a próxima situação foi, como previsto, resolvida de forma rápida, com uma breve discussão entre as formas de ladrilhamento. Era esperado que os alunos encontrassem os termos da recorrência $T_{n+1} = T_n + n + 1$ usando a seguinte lógica, 1) os termos T_n são os ladrilhos

de final preto, 2) as peças n são as de final vermelho e 3) a peça 1 é a de final cinza. No entanto, algumas outras maneiras foram apresentadas, revelando o engajamento dos estudantes diante da situação.

Essa situação usa as fases de ação e formulação da situação anterior, por esse motivo, seu planejamento é que seja resolvida usando uma ligação com ela, sua fase de validação se dá quando o estudante organiza em termos de recorrência, o que é feito pelo aluno E1 conforme a imagem a seguir.

Figura 234 – Validação de S5 pelo aluno E1



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

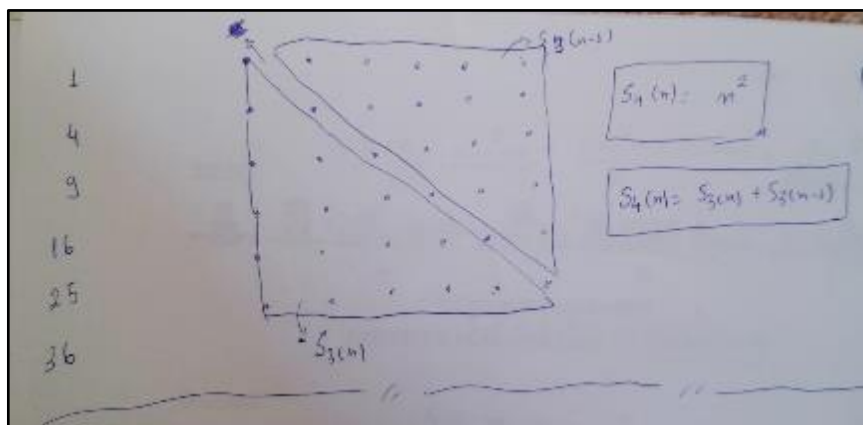
Na Figura 234, é possível ver que o aluno em questão separou o que seria $T_4 = 10$, de modo que as peças de final preto ficassem separadas das demais que estavam em outro bloco onde as de final vermelho ficavam na parte de cima e a última, na parte de baixo a esquerda, é a peça toda cinza. Assim, a situação 5 pode ser validada por ter sido resolvida de forma limpa, conforme o descrito anteriormente e usando como base a situação 4.

Encerrado o bloco dos ladrilhos, iniciou-se o segundo bloco de situações, composto pelas situações 1, 2 e 3. Neste ponto, o professor apresentou rapidamente as configurações gerais dos números triangulares e as expressões formais que sustentariam a construção das sequências seguintes. A análise dos registros mostra que a situação 1 foi especialmente significativa, pois serviu como base estrutural para todo o restante do bloco.

Na fase de ação os alunos observaram a configuração nova, sua forma geral e recorrência. Diante dessa observação, algumas construções foram surgindo e pode ser

registrado que os alunos em geral conseguiram visualizar a relação de números poligonais com triangulares utilizando a visualização clássica, conforme um registro feito por E1.

Figura 235 – Aluno E1 na fase de formulação de S1

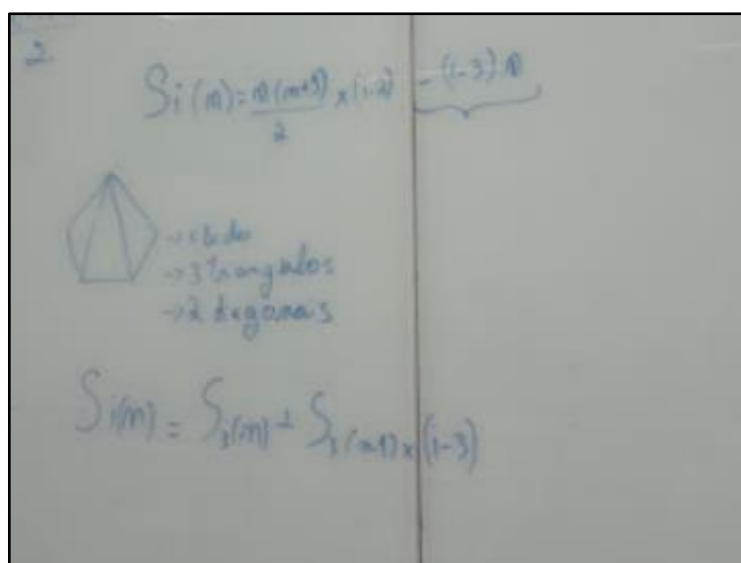


Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Na Figura 235, o estudante já consegue separar os números quadrados em dois triangulares, mesmo que de uma forma diferente do esperado. Mesmo assim, a relação que ele descreve é a que a situação procura em sua forma generalizada.

Na fase de formulação, o próximo registro mostra a aluna E5 na fase de formulação da situação 1, com a colaboração ativa dos colegas. Essa participação conjunta demonstra que o grupo internalizou previamente as ideias necessárias e agora construía, de maneira compartilhada, a forma geral dos números poligonais a partir dos triangulares.

Figura 236 – Aluna E5 na fase de validação de S1



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

A Figura 236 mostra o momento em que os estudantes, em conjunto, determinam a forma geral dos números poligonais a partir dos números triangulares. Sua prova formal, no entanto, foi apresentada apenas na fase de institucionalização. Ainda assim, a Situação 1 pôde ser validada, diante da relação estabelecida por E5 com a ajuda dos demais alunos.

A fase de validação da Situação 1 confirmou plenamente a compreensão das relações entre números poligonais e triangulares. Os estudantes revisitaram os passos anteriores, compararam estratégias e justificaram graficamente os resultados. Essa validação é particularmente relevante, pois indica que o grupo compreendeu o papel dos números triangulares como base para a construção dos números poligonais.

A Situação 2 foi resolvida com grande rapidez, algo não observado de forma tão uniforme nas aplicações anteriores. Inicialmente, quando foi solicitado que os alunos tentassem construir a configuração centralizada, esse passo mostrou-se não representar um desafio. O momento de ação, no qual os alunos deveriam descrever o que seria um número triangular centralizado, não foi suficientemente desafiador a ponto de impedir alguns de obter êxito. Pelo contrário, a ideia dessa nova configuração, construída de forma rápida por E1, revela que as representações visuais são determinantes para que os alunos alcancem as relações desejadas.

Figura 237 – E1 na fase de ação de S2

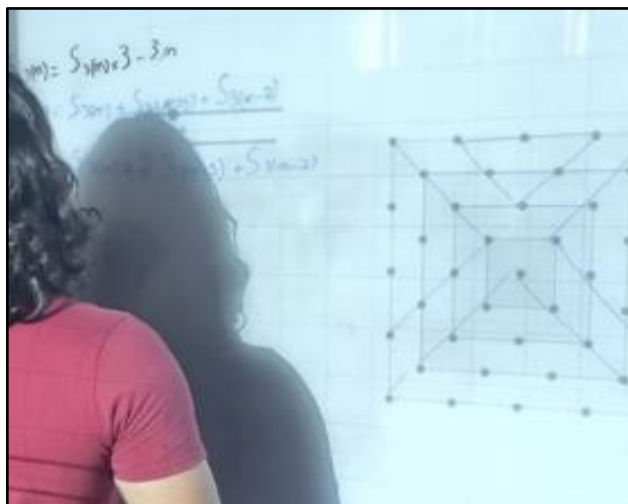


Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

A Figura 237 mostra E1 construindo uma configuração triangular centralizada, não encontrando nenhuma dificuldade para fazê-lo. O próximo registro mostra E6 utilizando diretamente o GeoGebra na fase de formulação, para projetar as representações necessárias,

sem necessidade de instruções complementares. Essa autonomia tecnológica e conceitual deu fluidez ao processo e reforça a maturidade didática atingida pelo grupo nesta etapa da pesquisa.

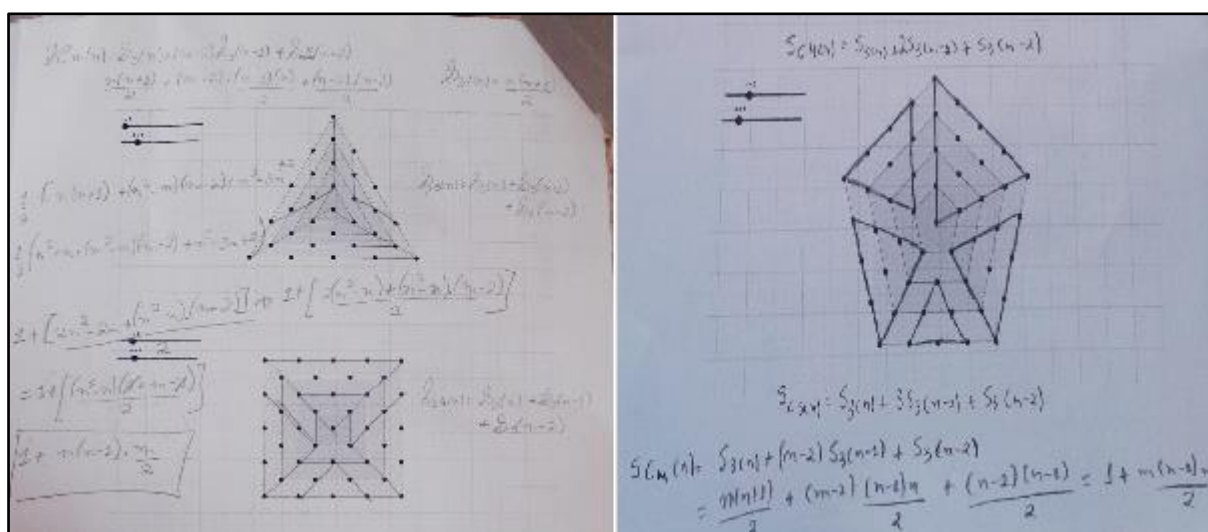
Figura 238 – E6 na fase de formulação de S2



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Na Figura 238, podemos ver que as linhas que representa números triangulares são traçadas em um número quadrangular centralizado, revelando uma propriedade diferente que foi pedida na situação, quando questionados sobre isso, os alunos descreveram de forma limpa qual seria a correta, o próximo registro marca momento de validação feitos por E4 e E2

Figura 239 – E4 e E2 na fase de validação de S2

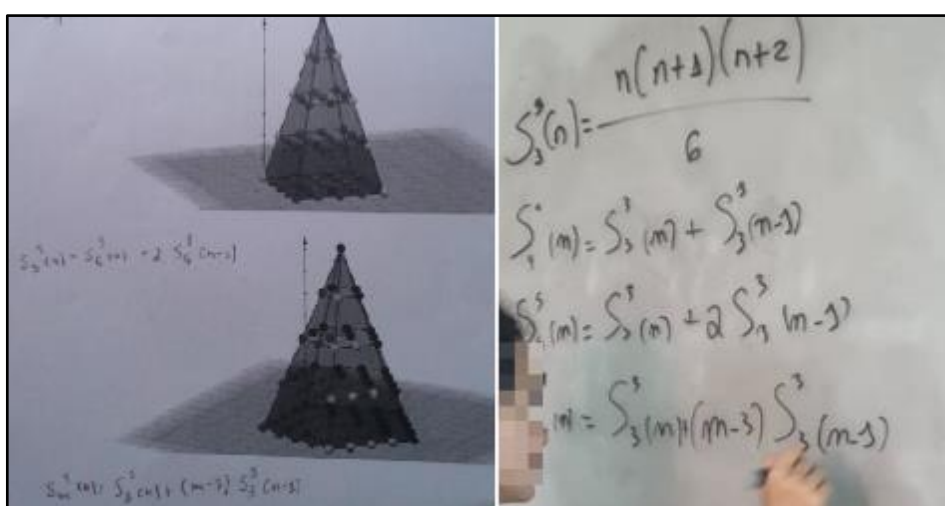


Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

Dessa forma situação 2 também pode ser validada, uma vez que cumpriu as etapas desejadas, a saber; a construção da figura, a relação dentro da configuração e a forma que relaciona aos números triangulares.

Para a situação 3, quando solicitado para que os alunos encontrassem a relação de números piramidais a partir de números tetraédricos, eles revelaram maturidade no conteúdo apresentado até aqui, e usando as outras configurações como base, puderam validar rapidamente a situação, conforme o planejado. Assim, a situação 3 foi validada integralmente, como evidenciado no último registro disponibilizado na experimentação. Os estudantes demonstraram clareza na construção e na confirmação da forma geral, o que mostra que as duas primeiras situações do bloco ofereceram sustentação suficiente para o desfecho da terceira. Na imagem a seguir, o momento de validação da situação 5 feita por E2 e E5, o primeiro registrado no material impresso e o segundo registrado na lousa.

Figura 240 – E2 e E5 na fase de Validação de S3



Fonte: Acervo da pesquisa (2025).

A validação da quinta experimentação confirma que os dispositivos empregados; tabuleiro virtual, ladrilhos, GeoGebra e representações clássicas, são consistentes, replicáveis e eficazes na construção das Situações Didáticas propostas para números figurados. A análise dos registros revela que:

1. Os estudantes alcançaram todas as fases da TSD nas cinco situações, algo que ocorreu de forma mais completa do que em algumas aplicações anteriores.
2. O bloco de ladrilhamentos apresentou forte adesão com os alunos, funcionando como porta de entrada para compreensão das configurações poligonais.

3. O manuseio do GeoGebra foi fluido e, pela primeira vez, ocorreu com autonomia plena dos estudantes, sem depender de intervenções técnicas do professor,
4. As situações 1, 2 e 3 foram resolvidas sem dificuldades, confirmando a capacidade do grupo de generalizar e aplicar padrões.
5. O momento de institucionalização consolidou o conhecimento construído, destacando coerências conceituais e assegurando a formalização da aprendizagem.

Por fim, os resultados se mantiveram consistentes em relação às demais aplicações, validando a metodologia e a eficácia dos dispositivos utilizados na pesquisa. A quinta aplicação, portanto, não apenas confirma os resultados das anteriores, como também evidencia o refinamento do processo experimental, a consolidação dos dispositivos e a crescente autonomia dos estudantes na condução das situações.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS E PESQUISA FUTURA

A pesquisa desenvolvida ao longo desses quatro anos na construção dessa tese, permitiram analisar, os números figurados k -dimensionais e suas múltiplas representações, evidenciando o potencial dessa classe infinita de números tanto no campo da matemática quanto no ensino. Fundamentada na Engenharia Didática e orientada pela Teoria das Situações Didáticas, a pesquisa teve como eixo central o uso da visualização como elemento estruturante da construção do conhecimento matemático, buscando superar abordagens meramente introdutórias ou históricas que tradicionalmente caracterizam o tratamento dos números figurados. Ao priorizar a articulação entre diferentes representações, ou seja, algébricas, geométricas e computacionais, o trabalho possibilitou uma compreensão mais ampla e integrada desse objeto matemático, evidenciando sua amplitude de aplicações e possibilidades didáticas.

Os objetivos estabelecidos no início da pesquisa foram alcançados ao longo das diferentes fases da Engenharia Didática. A escolha dos números triangulares como ponto de partida mostrou-se pertinente, pois permitiu a construção progressiva de propriedades e relações que puderam ser generalizadas para outras famílias de números figurados e para dimensões superiores. A análise das relações algébricas e geométricas, aliada à exploração visual mediada pelo software GeoGebra, favoreceu a identificação de padrões, regularidades e estruturas subjacentes, contribuindo para uma abordagem menos fragmentada e mais conceitual desses números. Dessa forma, foi possível evidenciar que os números figurados não constituem apenas curiosidades matemáticas ou exemplos pontuais, mas sim um campo fértil para investigações que transitam entre diferentes áreas da matemática, como a álgebra, a geometria e a combinatória.

No que se refere à problemática que motivou esta pesquisa, os resultados obtidos permitiram preencher, ao menos parcialmente, o hiato identificado na literatura, especialmente no que diz respeito à evolução histórica e conceitual dos números figurados para além das contribuições atribuídas aos pitagóricos. Embora os livros de História da Matemática frequentemente se restrinjam às primeiras sequências de números figurados planos e a algumas configurações espaciais elementares, este trabalho buscou ampliar esse panorama ao explorar uma diversidade maior de representações e relações, mostrando que essa classe de números possui desdobramentos matemáticos relevantes que ultrapassam o tratamento introdutório tradicional. Nesse sentido, a pesquisa contribuiu para uma visão mais abrangente dos números

figurados, não apenas como objetos históricos, mas como elementos vivos da matemática contemporânea, passíveis de generalizações, conexões e aplicações diversas.

Do ponto de vista matemático, a tese apresentou e articulou três grandes eixos de representação dos números figurados. O primeiro refere-se às representações algébricas clássicas, amplamente discutidas na literatura de teoria dos números e matemática discreta, que fornecem uma base formal sólida para o estudo dessas sequências. O segundo eixo corresponde às representações visuais, com destaque para a utilização do GeoGebra como ambiente de exploração dinâmica. Esse recurso mostrou-se particularmente eficaz na investigação das relações entre números figurados e os simplexos de suas respectivas dimensões, como no caso dos números triangulares e tetraédricos, permitindo uma visualização que favorece a compreensão de propriedades que, muitas vezes, permanecem obscuras em abordagens exclusivamente algébricas. Ainda nesse eixo, o estudo dos ladrilhos configurou-se como uma contribuição inovadora, ao propor uma forma alternativa de visualização que amplia as possibilidades de interpretação geométrica e combinatória desses números.

O terceiro eixo de representação introduzido nesta pesquisa diz respeito a uma abordagem por meio da matriz companheira dos números figurados. Essa perspectiva abre novas possibilidades de investigação no campo da matemática pura, ao permitir tratar essas sequências a partir de estruturas matriciais pela matriz companheira, estabelecendo conexões com outros domínios matemáticos. Embora essa abordagem tenha sido apresentada de forma exploratória, ela aponta para desdobramentos futuros relevantes, reforçando o caráter aberto e expansível do objeto matemático investigado. Assim, a tese não apenas sistematiza conhecimentos já existentes, mas também propõe caminhos que podem ser aprofundados em pesquisas posteriores.

No âmbito didático-pedagógico, os resultados evidenciaram de forma consistente o potencial da visualização como elemento mediador da aprendizagem matemática. O uso do GeoGebra possibilitou uma percepção mais rápida e significativa das propriedades dos números figurados, reduzindo o tempo necessário para que os estudantes formulassem conjecturas, testassem hipóteses e estabelecessem relações entre diferentes representações. A integração entre aspectos algébricos, geométricos e combinatórios, especialmente por meio do estudo dos ladrilhos, ampliou a compreensão dos números figurados e favoreceu uma abordagem menos compartimentalizada do conhecimento matemático. Esses resultados reforçam a importância do uso de tecnologias digitais como ferramentas cognitivas, capazes de transformar a maneira como determinados conteúdos são explorados em sala de aula.

A análise a posteriori confirmou, em grande medida, as previsões estabelecidas na análise a priori, indicando a coerência interna do percurso metodológico adotado. Os dispositivos didáticos concebidos foram aplicados e reaplicados em diferentes situações, produzindo respostas compatíveis com os objetivos pretendidos. Esse resultado evidencia a consistência da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa, uma vez que permitiu não apenas a concepção e experimentação das situações didáticas, mas também sua análise crítica e validação. Ao mesmo tempo, a Teoria das Situações Didáticas forneceu um arcabouço teórico robusto para interpretar as interações entre os estudantes, o saber matemático e o meio, contribuindo para uma compreensão mais aprofundada dos processos didáticos envolvidos.

Entretanto, a pesquisa também revelou limitações importantes que merecem ser consideradas. A principal delas refere-se à aplicação das situações didáticas em contextos de pós-graduação, nos quais o dispositivo se mostrou menos atrativo para parte dos participantes. Essa resistência pode ser compreendida à luz de uma formação matemática predominantemente abstrata e formal, na qual abordagens baseadas na visualização e em métodos não tradicionais nem sempre são valorizadas. Tal constatação não invalida os resultados obtidos, mas indica a necessidade de ajustes nos dispositivos didáticos, seja pela ampliação do estudo para classes maiores de números figurados, seja pela escolha mais restrita de representações, adequando-as às especificidades do público-alvo.

No que diz respeito às limitações gerais da pesquisa, embora o estudo tenha se mostrado sólido quanto ao tempo de aplicação, à escolha das turmas, aos dispositivos utilizados e aos dados obtidos, reconhece-se que uma investigação de maior duração poderia trazer resultados ainda mais consistentes. A inclusão de um terceiro dispositivo didático, por exemplo, permitiria validar o ensino dos números figurados a partir de três abordagens distintas, fortalecendo as conclusões e oferecendo uma visão mais ampla sobre as preferências e adaptações dos estudantes. Observou-se que, em muitas situações, a adaptação ocorreu de forma mais acentuada em relação a uma representação específica, o que reforça a importância de investigar, em maior profundidade, os critérios que orientam essas escolhas.

Apesar dessas limitações, as contribuições desta tese para a área do Ensino de Matemática e para a formação inicial de professores são significativas. Ao articular uma classe infinita de números a múltiplas representações, o trabalho amplia de maneira substancial os caminhos possíveis para o ensino dos números figurados em diferentes níveis de escolaridade. A diversidade de abordagens propostas oferece ao professor um repertório mais amplo de estratégias didáticas, permitindo adequar o ensino às características dos estudantes e aos objetivos pedagógicos pretendidos. Além disso, a estruturação da pesquisa a partir da

Engenharia Didática conferiu rigor metodológico e clareza ao percurso investigativo, enquanto a Teoria das Situações Didáticas garantiu um ambiente conceitual seguro para a articulação entre o aluno, o saber e o meio.

Como perspectivas para pesquisas futuras, recomenda-se a ampliação do estudo das representações visuais e algébricas dos números figurados, em especial no que se refere aos ladrilhos, estendendo essas análises para outras famílias e dimensões. Sugere-se, ainda, aprofundar a abordagem baseada na álgebra linear, investigando de forma mais sistemática as propriedades das matrizes geradoras e suas possíveis conexões com outros campos da matemática. Tais desdobramentos podem contribuir não apenas para o avanço do conhecimento matemático, mas também para o desenvolvimento de novas propostas didáticas, fortalecendo o diálogo entre a matemática teórica e o ensino. Dessa forma, esta tese se encerra não como um ponto final, mas como um ponto de partida para novas investigações sobre os números figurados e suas múltiplas possibilidades de representação e ensino.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, M. C. **Platão Redimido: A Teoria dos Números Figurados na Ciência Antiga & Moderna**. Curitiba: Champagnat, 2002.
- ALMOULOUD, S. A. Diálogos da didática da matemática com outras tendências da educação matemática. **Caminhos da Educação Matemática em Revista (Online)**, Recife, v. 9, n. 1, 2018.
- ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. Engenharia didática: evolução e diversidade. **REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 22–52, 2012.
- ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPED. **REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 3, n. 1, p. 62-77, 2008.
- ALVES, F. R. V. Didática de matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. **Interfaces da Educação**, [s. l.], v. 7, n. 21, p. 131-150, 2016.
- ALVES, F. R. V. Engenharia Didática para a generalização da sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura Didactical Engineering for the generalization of Fibonacci's sequence: an experience in a graduate course. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 18, n. 1, 2016.
- ALVES, F. R. V. Engenharia Didática para o Teorema da Função Implícita: análises preliminares e a priori. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Curitiba, v. 7, n. 3, 2014.
- ALVES, F. R. V. Engenharia didática: implicações para a pesquisa no âmbito do ensino em análise complexa - AC. **Ciência e Natura**, [s. l.], v. 38, n. 2, p. 694–715, 2016.
- ALVES, F. R. V.; DIAS, M. A. Engenharia Didática para o Teorema de Binet, ou Lamé, ou de De Moivre: Análises Preliminares e a Priori. **Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas**, [s. l.], v. 19, n. 2, p. 103, 2018.
- ALVES, F. R. V.; NETO, H. B. Engenharia Didática para a exploração didática da tecnologia no ensino no caso da Regra de L'Hopital. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, [s. l.], v. 14, n. 2, p. 337-367.
- ALVES, F. R. V.; NETO, H. B.; M., J. A. D. História da matemática: os números figurais em 2D e 3D. **Revista Conexões Ciência e Tecnologia**, Fortaleza, v. 6, n. 2, p. 40-56, 2012.
- ALVES, F. R. V.; BARROS, F. E. Plane and Space Figurate Numbers: Visualization with the GeoGebra's Help. **Acta Didactica Napocensia**, Romênia, v. 12, n. 1, p. 57-74, 2019.

ARTIGUE, M. **Enseñar y aprender matemáticas con tecnología: ¿Qué cambios?** In: SEMINARIO VI ESCUELA EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA, 2013, Buenos Aires. [Anais...]. Buenos Aires: Universidad Nacional de San Martín, 2013.

ARTIGUE, M. *et al.* **Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.** Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, 1995.

ARTIGUE, M. *et al.* **A enseñanza dos princípios do cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos e didáticos.** In: ARTIGUE, M. *et al.* **Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.** Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, 1995. v. 1, p.37-57.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 9, n. 3, p. 283-307, 1990.

ARTIGUE, M. L'enseignement des fonctions à la transition lycée – Université. In: GRUGEON, B. (ed.). **Actes du colloque 15eme colloque CORFEM.** Cergy-Pontoise: IUFM de Versailles, 2009. p. 25-44.

ARTIGUE, M. La formation technologique des enseignants: un défi majeur. In: RAMIREZ, A.; MORALES, Y. (eds.). **Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe.** Santo Domingo: REDUMATE, 2013. p. 1-19.

ARTIGUE, M. Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. **International Journal of Computers for Mathematics Learning**, v. 7, p. 245-274, 2002.

BACHELARD, G. **La formation de l'esprit scientifique: contribution à une psychanalyse de la connaissance.** Paris: Vrin, 1993.

BARROS, F. E. *et al.* A construção de números figurados no software GeoGebra usando propriedades algébricas. **The Mathematics Enthusiast**, Montana, v. 21, n. 1, p. 203-224, 2024.

BARROS, F. E. *et al.* Hibridização dos números triangulares: uma análise preliminar e a priori e a visualização por meio do software GeoGebra. **Indagatio Didática**, Aveiro, v. 3, p. 411-436, 2020.

BARROS, F. E.; ALVES, F. R. V. Funções geradoras dos números poligonais e dos números hipertetraédricos k-dimensionais. **CQD: Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 18, p. 49-66, 2020.

BARROS, F. E. **Engenharia Didática sobre os números figurados k-dimensionais: relações recorrentes, termo geral, função geradora e representação por meio de recursos computacionais.** 2021. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2021.

BAUMANN, M. H. Die k-dimensionale Champagnerpyramide. **Mathematische Semesterberichte**, v. 66, n. 1, p. 89-100, 2019.

BEHERA, A.; PANDA, G. K. On the square roots of triangular numbers. **Fibonacci Quarterly**, v. 37, n. 2, p. 98–105, 1999.

BELL, J. **Euler and the pentagonal number theorem**. arXiv preprint math/0510054, 2005.

BENJAMIN, A. T.; ERICKSON, M. **Combinatorial Proofs**. Hoboken: John Wiley & Sons, 2011.

BENJAMIN, A. T.; QUINN, J. J. The Fibonacci Numbers – Exposed More Discretely. **Mathematics Magazine**, v. 76, n. 3, p. 182-192, June 2003.

BENJAMIN, A. T.; QUINN, J. J. **Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof**. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2003.

BEZERRA, F. H. C. *et al.* Uma Nota sobre os Números Multifigurados Quadrados-Nonagonais. **Intermaths**, v. 6, n. 1, p. 93-106, 2025.

BROUSSEAU, G. **Theory of Didactical Situations in Mathematics**: didatique des mathématiques. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.

BROUSSEAU, G. **Théorie des Situations Didactiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1998.

BROUSSEAU, G. **Theorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques**. These d'État, Université de Bordeaux I, 1986.

BRUALDI, R. A. **Introductory Combinatorics**. 5. ed. Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall, 2010.

BURTON, D. M. **The history of mathematics**: an introduction. **Group**, v. 3, n. 3, p. 35, 1985.

CARDOSO, D. M.; SZYMANSKI, J; ROSTAMI, M. **Matemática discreta**. Lisboa: Escolar Editora, 2009. (Série Ensino da Matemática, 41).

CHIPATALA, O. **Polygonal Numbers**. 2016. 64 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Department of Mathematics, Kansas State University, Manhattan, Kansas, 2016.

CONWAY, J. H.; BURGIEL, H.; GOODMAN-STRAUSS, C. **The symmetries of things**. Boca Raton: AK Peters/CRC Press, 2016.

COTA, A. C. da S. **Euler e os números pentagonais**. 2011. 105 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011.

COXETER, H. S. M. **Introduction to Geometry**. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1969.

COXETER, H. S. M. **Regular polytopes**. 3. ed. New York: Dover Publications, 1973.

DEZA, E; DEZA, M. M. **Figurate numbers**. Singapore: World Scientific, 2012.

D'OOGHE, M. L.; ROBBINS, F. E.; KARPINSKI, L. C. **Nicomachus of Gerasa: Introduction to Arithmetic**. New York: Macmillan, 1926.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 1, n. 1, p. 1–34, 2003.

EVES, H. **An introduction to the History of Mathematics**. 3. ed. Chicago: Holt, Reinhardt and Wilson ltd, 1969.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues, Campinas: Editora da Unicamp, 2011

GARCIA, V. C. V. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. **Zetetiké**, Campinas, v. 13, n. 1, p. 87-119, 2005.

GONÇALVES, A. M. L. **Politopos convexos regulares**. 2000. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, Porto, 2000.

GOPALAN *et al.* On pairs of special polygonal numbers with unit difference. **IJMER**, v. 3, n. 3, p. 1520–1522, 2013.

GOPALAN, M. A.; SOMANATH, M.; GEETHA, K. Observations on Icosagonal number. **International Journal of Computational Engineering Research**, v. 3, n. 7, p. 32–37, 2013.

GRAÇA NETO, A. C. **Propriedades aritméticas e combinatórias de uma generalização a quatro parâmetros de sequências de números especiais**. 2017. 136 f. Tese (Doutorado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2017.

GRÜNBAUM, B. **Convex Polytopes**. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 2003. (Graduate Texts in Mathematics, v. 221).

GUPTA, A. K. The General formula to find the sum of first n K th Dimensional S sided polygonal numbers and a simple way to find the n -th term of polynomial sequences. **IOSR Journal of Mathematics**, v. 8, n. 3, p. 01–10, 2013.

HOGGATT JR, V. E.; BICKNELL, Marjorie. Generalized Fibonacci polynomials. **The Fibonacci Quarterly**, v. 11, n. 5, p. 457-465, 1973.

HOHENWARTER, M. **GeoGebra – didaktische Materialien und Anwendungen für den Mathematikunterricht**. 2006. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – University of Salzburg, Salzburg, 2006.

HOHENWARTER, M. **GeoGebra – ein Softwaresystem für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene**. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ciência da Computação) – University of Salzburg, Salzburg, 2002.

HORN, R. A.; JOHNSON, C. R. **Matrix Analysis**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

KENNY, B. P. **Pythagoras, the Tetraktys and the Masonic Compasses and Square**. 2004. Palestra proferida na Oracle Lodge 1003, Dublin, 8 out. 2004.

KIM, H. On regular polytope numbers. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 131, n. 1, p. 65-75, 2003.

KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas numbers with applications**. New York: Wiley Interscience, 2001.

KOSHY, T. **Discrete mathematics with applications**. Amsterdam: Elsevier, 2004.

KOSHY, T. **Elementary number theory with applications**. San Diego: Academic press, 2002.

KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas Numbers with Applications**. 2. ed. New York: Wiley, 2011.

LIMA, M. V. M; ALVES, F. R. V. Engenharia Didática com o tema Integrais Dependentes de Parâmetros–IDP's. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, [s. l.], v. 5, n. 1/2.

MACHADO, C. R. **Teorias de pesquisa em educação matemática: a influência dos franceses**. Porto Alegre: UFRGS, 2016.

MANSOUR, T. A formula for the generating functions of powers of Horadam's sequence. **Australasian J. Combinatorics**, v. 30, p. 207-212, 2004.

MOL, R. S. **Introdução à História da Matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFGM, 2013.

NORMAN, F. A. Figurate numbers in the classroom. **National Council of Teachers of Mathematics**, v. 38, n. 7, p. 42–45, 2019.

NUNES, R. S.; NUNES, J. M. V. Modelos constitutivos de sequências didáticas: enfoque na teoria das situações didáticas. **Revista Exitus**, [s. l.], v. 9, n. 1, p. 148-174, 2019.

OEIS FOUNDATION. **The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences**. Disponível em: <https://oeis.org>. Acesso em: 20 dez. 2025.

OLIVEIRA, R. R. de. **Engenharia Didática sobre o Modelo de Complexificação da Sequência Generalizada de Fibonacci: Relações Recorrentes N-dimensionais e Representações Polinomiais e Matriciais**. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Fortaleza, 2018.

OLIVEIRA, C. A; AMANCIO, J. R. de S. Experiências formativas potencializadas pelas tecnologias digitais nas aulas de matemática. **Revista Docência e Cibercultura**, [s. l.], v. 6, n. 3, p. 165-179, 2022.

PENGELLEY, D. Figurate numbers and sums of numerical powers: Fermat, Pascal, Bernoulli. **Amc** 10, p. 1–29, 2013.

PEREIRA, M. V. **Recorrências – Problemas e Aplicações**. 2014. 83f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT), Universidade de Brasília, Brasília, DF, 2014.

PETERSEN, T. K. **Eulerian numbers**. New York: Birkhäuser, 2015. (Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher).

POMMER, W. M. **A Engenharia Didática em sala de aula: elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares**. São Paulo: Edição do Autor, 2013.

PRASAD, V. S. R; RAO, B. S. Pentagonal Numbers in the Pell Sequence and Diophantine Equations $2x^2 = y^2 (3y-1)^2 \pm 2$. **Fibonacci Quarterly**, v. 40, n. 3, p. 233-241, 2002.

ROANES-LOZANO, E; SOLANO-MACÍAS, C. Some reflections about the success and bibliographic impact of the dynamic geometry system GeoGebra. **Mathematics in Computer Science**, v. 17, art. 11, 2023. DOI: 10.1007/s11786-023-00564-9.

ROQUE, T. **História da matemática**. São Paulo: Schwarcz-Companhia das Letras, 2012.

SANTOS, A. A. dos. **Engenharia Didática sobre o Estudo e Ensino da Fórmula de Binet como modelo de generalização e extensão da Sequência de Fibonacci**. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Fortaleza, 2017.

SANTOS, A. dos; ALVES, F. R. V. A engenharia didática em articulação com a teoria das situações didáticas como percurso metodológico ao estudo e ensino de matemática. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 19, n. 3, p. 447–465, maio/jun. 2017.

SILVA, I. C. da. **Recorrências: uma abordagem sobre sequências recursivas para aplicações no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade de Brasília, Brasília, DF, 2015.

SPREAFICO, E. V. P. **Novas identidades envolvendo os números de Fibonacci, Lucas e Jacobsthal via ladrilhamentos**. 2014. 119 f. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014.

SUN, Z-W. On universal sums of polygonal numbers. **Science China Mathematics**, v. 58, n. 7, p. 1367-1396, 2015.

TATTERSALL, J. J. **Elementary number theory in nine chapters**. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.

TEIXEIRA, P. J. M; PASSOS, C. C. M. Um pouco da Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau. **Zetetiké**, Campinas, v. 21, n. 1, p. 155-168, 2013.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. Propriedades das extensões da Sequência de Padovan. **C.Q.D.: Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 15, p. 24-40, jul. 2019.

VIEIRA, R. P. M; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. O estudo do modelo combinatório de Padovan por meio da Engenharia Didática. **Revista Binacional Brasil-Argentina: Diálogo entre as ciências**, Vitória da Conquista, v. 12, n. 1, p. 397-416, 2023.

WILF, H. S. **Generatingfunctionology**. 2. ed. San Diego: Academic Press, 1994.

ZELATOR, K. On k-oblong numbers. **Mathematical Spectrum**, v. 41, n. 3, 2008/2009.

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

NÚMEROS FIGURADOS K-DIMENSIONAIS: UMA ENGENHARIA DIDÁTICA SOBRE AS RELAÇÕES, VISUALIZAÇÃO PELO SOFTWARE GEOGEBRA E REPRESENTAÇÕES MATRICIAIS E VIA LADRILHOS

**Francisco Evamar Barros
Francisco Régis Vieira Alves**

Você está sendo convidado a participar como voluntário de uma pesquisa. Este documento, chamado Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, visa assegurar seus direitos como participante e é elaborado em duas vias, uma que deverá ficar com você e outra com o pesquisador.

Por favor, leia com atenção e calma, aproveitando para esclarecer suas dúvidas. Se houver perguntas antes ou mesmo depois de assiná-lo, você poderá esclarecê-las com o pesquisador. Se preferir, pode levar este Termo para casa e consultar seus familiares ou outras pessoas antes de decidir participar. Não haverá nenhum tipo de penalização ou prejuízo se você não aceitar participar ou retirar sua autorização em qualquer momento.

Justificativa e objetivos:

Este estudo faz parte do curso de doutorado acadêmico em ensino de ciências e matemática vinculado à Rede Nordeste de Ensino (RENOEN) do polo Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Ceará (IFCE) – campus Fortaleza e tem como justificativa, o fato de que a maioria dos livros de história da matemática, trazerem a abordagem sobre os números figurados superficial do ponto de vista da matemática, ou seja, ficam restritos às filosofias pitagóricas, não trazendo a evolução histórico-matemática que se espera, por se tratar de um assunto relevante tanto na área da história da matemática como na matemática pura, posto isso, o objetivo da pesquisa é descrever as fórmulas de recorrência, termo geral e função geradora dos números figurados, bem como seu percurso histórico por meio de situações didáticas propostas a alunos do curso de licenciatura em matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – campus Fortaleza.

Procedimentos:

Participando do estudo você está sendo convidado a: resolver as situações didáticas propostas e ter os dados dos seus cálculos registrados por meio de: gravações de áudio e vídeo, fotos e coleta de material manuscrito. Estes procedimentos, ocorrerão nas dependências do IFCE – Campus Fortaleza no do horário da aula de História da matemática, por um período de um mês (durante o mês de setembro de 2024), o material coletado ficará em posse apenas dos pesquisadores e ao final da pesquisa, será descartado, ficando sob a posse dos pesquisadores por um período não superior a 12 meses.

Observações:

- Seus dados coletados não serão divulgados com seu nome ou imagem, toda a pesquisa contará com a descrição de sua identidade

Desconfortos e Riscos:

Você **não** deve participar deste estudo caso sentir algum tipo de desconforto dentro das dependências da sala de aula ou não se sentir confortável em seguir as orientações do pesquisador, pois essa pesquisa envolve a participação em aulas que exigem a participação do estudante e que estão inseridas no componente curricular da disciplina em que será desenvolvido o estudo.

Ao estar dentro da sala de aula, para a realização das aulas expositivas dessa pesquisa, o sujeito está exposto aos seguintes riscos:

Riscos de origem psicológica, intelectual ou emocional - ao participar da pesquisa, o estudante estará sujeito a possibilidade de:

- Constrangimento; visto que pode não se sentir confortável em responder algum questionamento do pesquisador, neste caso, haverá a possibilidade do estudante apenas escrever todas as suas conclusões, informando previamente que não se sente confortável em falar para toda a turma ou ir a lousa, seus escritos serão considerados e as anotações feitas com base no texto entregue, este risco é considerado mínimo pois o pesquisador avisará com antecedência que o estudante não deve ir a lousa ou responder caso não se sinta à vontade,
- Desconforto; este risco é considerado médio visto que estudantes em meio a grandes cobranças em outras disciplinas, podem sentir-se desconfortáveis com o pesquisador que não é o professor titular da disciplina, neste caso o estudante deverá avisar que não deseja participar da pesquisa.
- Medo ou Vergonha; este risco é considerado moderado visto que é normal sentir vergonha de falar em público, neste caso o pesquisador deverá ser avisado que o estudante deseja participar da pesquisa apenas com seus dados escritos, o pesquisador não fará perguntas e todos os dados vindo deste estudante serão coletados de seus escritos
- Estresse ou cansaço; este risco é considerado mínimo visto que as aulas serão divididas em um curto período de 10 minutos dedicados a explicação do pesquisador e o estudante terá tempo de 80 minutos para tirar suas conclusões, debater, formular este tempo é suficiente para que o estudante não tenha pressa para responder e consiga desenvolver seu raciocínio com tranquilidade, esse risco pode ser diminuído pelo fato de que nem todos precisam apresentar as respostas ao final da aula, deixando o estudante mais confortável por não ter a obrigatoriedade de resposta ao final da aula
- Quebra de anonimato; este risco é considerado mínimo, posto que o pesquisador irá anexar todos os documentos de cada estudante separadamente, e seus nomes serão retirados para a análise, sendo assim, o pesquisador saberá que os documentos pertencerão a uma mesma pessoa, mas não saberá que é.

Riscos de origem física - o estudante pode sentir problemas físicos como:

- Desconforto físico local: esse risco pode ser causado por esforço repetitivo como escrever muito ou passar um longo tempo falando, para a pesquisa este risco é considerado mínimo já que os escritos são feitos de modo compartilhado e os comentários serão breves. Para diminuir estes riscos, caso o aluno não esteja se

sentindo bem fisicamente poderá retomar a pesquisa na aula seguinte já que a análise de uma aula não sofre interferência

- Lesões: podem acontecer por conta de algum acidente dentro do ambiente em que se desenvolve a pesquisa, este risco é mínimo na referente pesquisa uma vez que a sala de aula usada dispõe apenas de cadeiras e mesas, espaçadas e confortáveis.

Benefícios:

A pesquisa traz um percurso histórico-matemático de muita importância para a disciplina de história da matemática, uma vez que descreve situações didáticas com a base matemática exigidas para um futuro professor de matemática, bem como a inserção do GeoGebra como recurso de visualização. A presente pesquisa traz como possíveis benefícios:

- A contribuição na formação de futuros professores, pois integra história e matemática.
- O fortalecimento do ensino de matemática, visto que aborda um conteúdo matemático através da perspectiva histórica e apresenta sua evolução tanto histórica quanto metodológica.
- O uso do GeoGebra como recurso pedagógico, posto que o software ajuda a compreender conceitos complexos por meio da manipulação. As metodologias utilizadas podem aprimorar estratégias didáticas nos futuros professores.

Acompanhamento e assistência:

Caso o participante necessite de algum acompanhamento ou assistência psicológica ou médica em geral, poderá solicitar aos pesquisadores responsáveis pela pesquisa. Se for de sua vontade, poderá solicitar a interrupção da participação na pesquisa, se esta estiver lhe causando algum desconforto.

Caso aconteça algum acidente na sala de aula, o participante será encaminhado à enfermaria do Campus para receber o atendimento de primeiros socorros, e a depender da avaliação realizada, uma ambulância será acionado caso o acidente possua maior gravidade e um contato de emergência previamente registrado será acionado.

Se o desconforto for psicológico, inicialmente o aluno será encaminhado para apoio emocional inicial através do psicólogo do próprio campus e, posteriormente, se necessário, será orientado a buscar atendimento especializado em unidades de referência.

Sigilo e privacidade:

Você tem a garantia de que sua identidade será mantida em sigilo e nenhuma informação será dada a outras pessoas que não façam parte da equipe de pesquisadores. Na divulgação dos resultados desse estudo, seu nome não será citado.

Ressarcimento e Indenização:

Você terá direito ao ressarcimento das despesas diretamente decorrentes de sua participação na pesquisa e à indenização pelos danos resultantes desta, nos termos da Lei.

Contato:

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, você poderá entrar em contato com os pesquisadores: Francisco Evamar Barros, e-mail: evamar_barros@hotmail.com, fone: (85) 998053395 e Francisco Régis Vieira Alves, e-mail: fregis@gmx.fr

Em caso de denúncias ou reclamações sobre sua participação e sobre questões éticas do estudo, você poderá entrar em contato com a secretaria do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) do IFCE das 08:00hs às 12:00hs e das 13:00hs às 17:00hs no IFCE Reitoria - R. Jorge Dumar, 1703 - Jardim América, Fortaleza - CE, 60410-426; fone (85) 34012332 e-mail: cep@ifce.edu.br

Consentimento livre e esclarecido:

Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais riscos e o incômodo que esta possa acarretar, aceito participar e declaro estar recebendo uma via original deste documento assinada pelo pesquisador e por mim, tendo todas as folhas por nós rubricadas:

Nome do(a) participante:

Contato telefônico (opcional):

e-mail (opcional):

(Assinatura do participante ou nome e assinatura do seu RESPONSÁVEL LEGAL)

Data: / / 202_.

Responsabilidade do Pesquisador:

Asseguro ter cumprido as exigências da resolução 466/2012 CNS/MS e complementares na elaboração do protocolo e na obtenção deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Asseguro, também, ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Informo que o estudo foi aprovado pelo CEP perante o qual o projeto foi apresentado. Comprometo-me a utilizar o material e os dados obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

Nome do pesquisador

Assinatura do pesquisador

Data: ____/____/____.

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIOS

NÚMEROS FIGURADOS – AP-01

Disciplina:

Nome:

“A concepção de Pitágoras sobre a natureza parte da ideia de que há uma explicação global que permite simbolizar a totalidade do cosmos, e esta explicação é dada pelos números. Isto levou os pitagóricos a considerarem que as coisas são números, elas consistem em números.” (Roque e Pitombeira, 2012).

Ainda segundo os autores Roque e Pitombeira (2012), um aspecto fundamental das coisas está em sua capacidade de serem organizadas e diferenciadas. Assim, as propriedades aritméticas das coisas formam a essência de seu ser, e o ser de todas as coisas é o número. Para os pitagóricos, os números figurados eram compostos por uma coleção de pontos que não eram apenas pontos matemáticos, mas representavam elementos distintos, como pequenas pedras dispostas em uma configuração específica.

Definição 1 – (números figurados): Uma sequência de números figurados é uma sequência numérica definida por uma relação de recorrência, em que cada termo, quando representada por pontos ou qualquer padrão discreto igualmente espaçado, forma uma figura geométrica. (Deza e Deza, 2012)

Definição 2 – (números triangulares): É chamada de sequência de números triangulares a sequência numérica definida por uma relação de recorrência, em que cada termo, quando representado por um padrão discreto, representa um triângulo, com a quantidade de pontos em cada lado representando a posição, (Deza e Deza, 2012).

Os primeiros números triangulares são 1, 3, 6, 10... catalogados como A000217 na enciclopédia de sequências inteiras hospedada no site: <https://oeis.org/>

Definição 3 – (números lineares): São os números figurados que representam a quantidade de pontos presentes em uma aresta de outro número figurado.

Definição 4 – (*gnômon*): São dispositivos aditivos que ampliam um objeto, mantendo sua forma, no caso dos números figurados, esses *gnômons* são sequências de pontos que ampliam um número figurado, formando seu sucessor.

Forma geral dos números triangulares: $S_3(n) = \frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}$

Forma geral dos números poligonais: $S_m(n) = \frac{(m-2)n^2 - (m-4)n}{2}$, n e $m \in \mathbb{N}, m \geq 3$

S1- De acordo com informações dadas, encontre a fórmula para números poligonais a partir de números triangulares.

S2 - Encontrar a relação entre números triangulares iguais e um número poligonal centralizado

Definição 5: (números poligonais centralizados) “Um número figurado no qual camadas de polígonos são desenhadas centralizadas em torno de um ponto em vez de com o ponto em um vértice do polígono”. (Weisstein, 2024)

Definição 6: (forma geral dos números poligonais centralizados): sendo SC_m um número poligonal centralizado, sua forma geral é dada por: (Deza e Deza, 2012)

$$SC_m(n) = 1 + m \frac{(n-1)n}{2}$$

S3 - Encontrar a forma geral dos números piramidais usando apenas números tetraédricos

Definição 7: (números piramidais) Deza e Deza (2012) – o n -ésimo número piramidal $S_m^3(n)$ é definido como a soma dos n primeiros números m -gonais.

$$S_m^3(n) = S_m(1) + S_m(2) + S_m(3) + \cdots + S_m(n)$$

Dessa forma, ele possui a seguinte forma recorrente

$$S_m^3(n) = S_m^3(n-1) + S_m(n), \quad S_m^3(1) = 1$$

E, por fim, Deza e Deza (2012) apresenta sua forma geral como:

$$S_m^3(n) = \frac{n(n+1)((m-2)n - m + 5)}{6}$$

NÚMEROS FIGURADOS – AP-02

Disciplina:

Nome:

“A concepção de Pitágoras sobre a natureza parte da ideia de que há uma explicação global que permite simbolizar a totalidade do cosmos, e esta explicação é dada pelos números. Isto levou os pitagóricos a considerarem que as coisas são números, elas consistem em números.” (Roque e Pitombeira, 2012).

Ainda segundo os autores Roque e Carvalho (2012), um aspecto fundamental das coisas está em sua capacidade de serem organizadas e diferenciadas. Assim, as propriedades aritméticas das coisas formam a essência de seu ser, e o ser de todas as coisas é o número. Para os pitagóricos, os números figurados eram compostos por uma coleção de pontos que não eram apenas pontos matemáticos, mas representavam elementos distintos, como pequenas pedras dispostas em uma configuração específica.

Definição 1 – (números figurados): Uma sequência de números figurados é uma sequência numérica definida por uma relação de recorrência, em que cada termo, quando representada por pontos ou qualquer padrão discreto igualmente espaçado, forma uma figura geométrica. Deza e Deza (2012)

Definição 2 – (números triangulares): É chamada de sequência de números triangulares a sequência numérica definida por uma relação de recorrência, em que cada termo, quando representado por um padrão discreto, representa um triângulo, com a quantidade de pontos em cada lado representando a posição, Deza e Deza (2012). Os primeiros números triangulares são 1,3,6,10... catalogados como A000217 na enciclopédia de sequências inteiras hospedada no site: <https://oeis.org/>

Definição 3 – (números lineares): São os números figurados que representam a quantidade de pontos presentes em uma aresta de outro número figurado.

Definição 4 – (*gnômon*): São dispositivos aditivos que ampliam um objeto, mantendo sua forma, no caso dos números figurados, esses *gnômons* são sequências de pontos que ampliam um número figurado, formando seu sucessor.

Definição 5 - (Tabuleiro): O tabuleiro é uma formação de quadrados denominados por casas, células ou posições. Essas posições são enumeradas e essa enumeração descreve a posição. Um tal tabuleiro será chamado apenas de n – tabuleiro (SPREAFICO, 2014).

Forma geral dos números triangulares: $S_3(n) = \frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}$

Forma geral dos números poligonais: $S_m(n) = \frac{(m-2)n^2 - (m-4)n}{2}, n \text{ e } m \in \mathbb{N}, m \geq 3$

Referências

DEZA, Michel; DEZA, Elena. Figurate Numbers. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2012.

ROQUE, T; CARVALHO, J. B. P. Tópicos de História da Matemática. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

SPREAFICO, E. V. P. Novas identidades envolvendo os números de Fibonacci, Lucas e Jacobsthal via ladrilhamentos. 2014. 132f. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014.

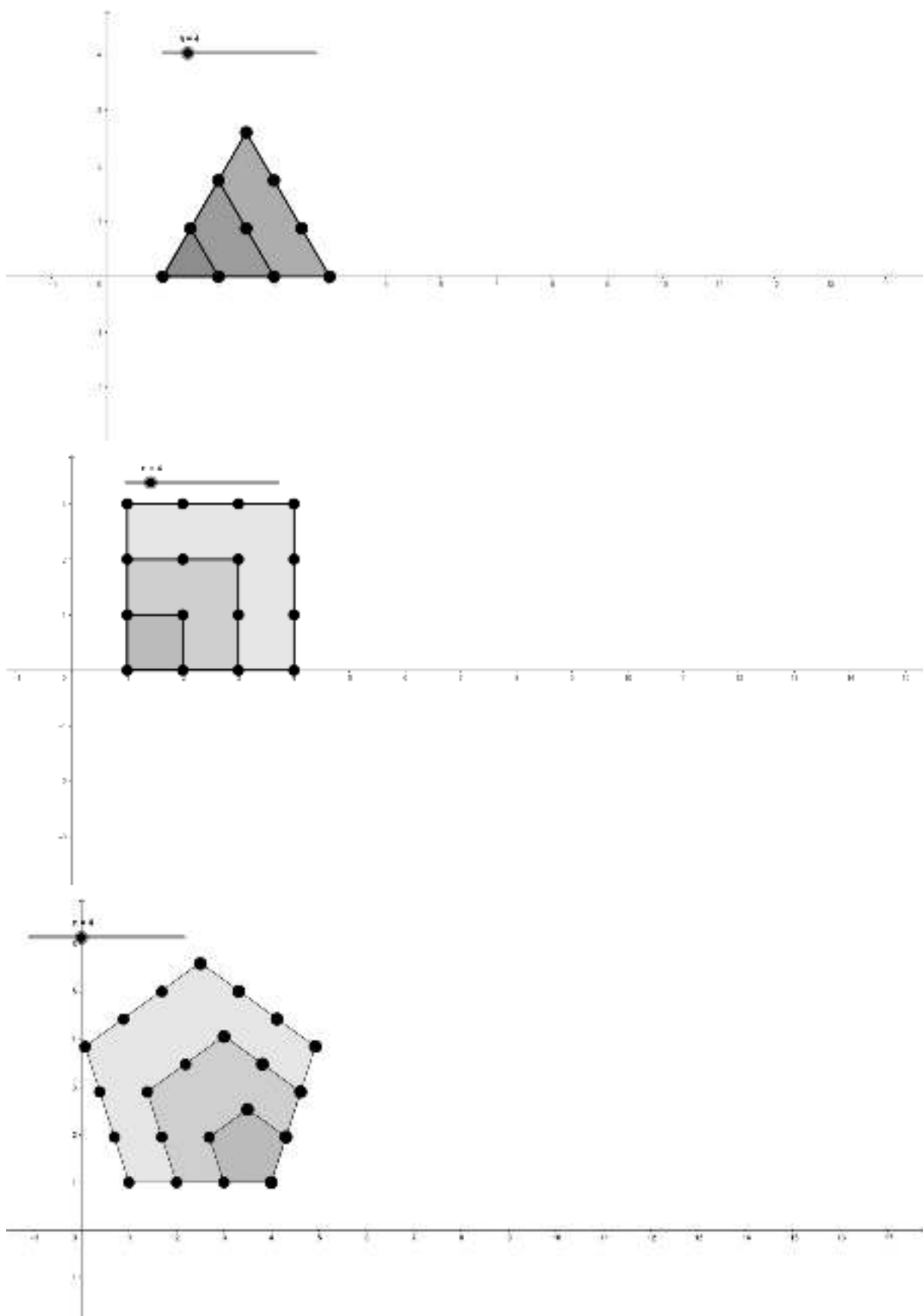
Situações didáticas propostas

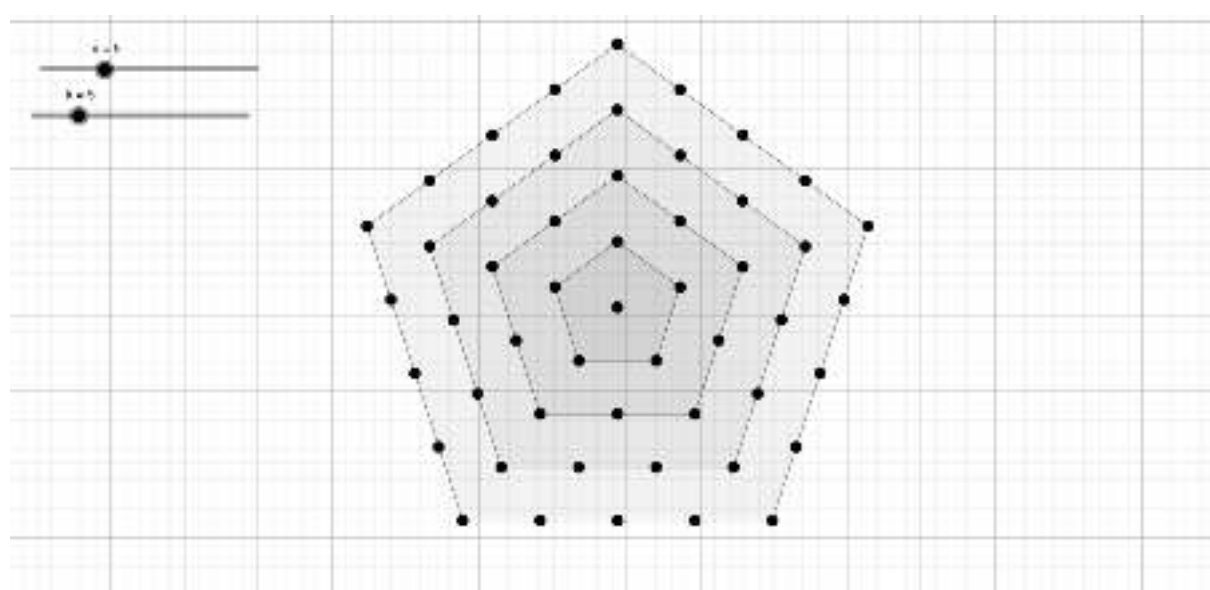
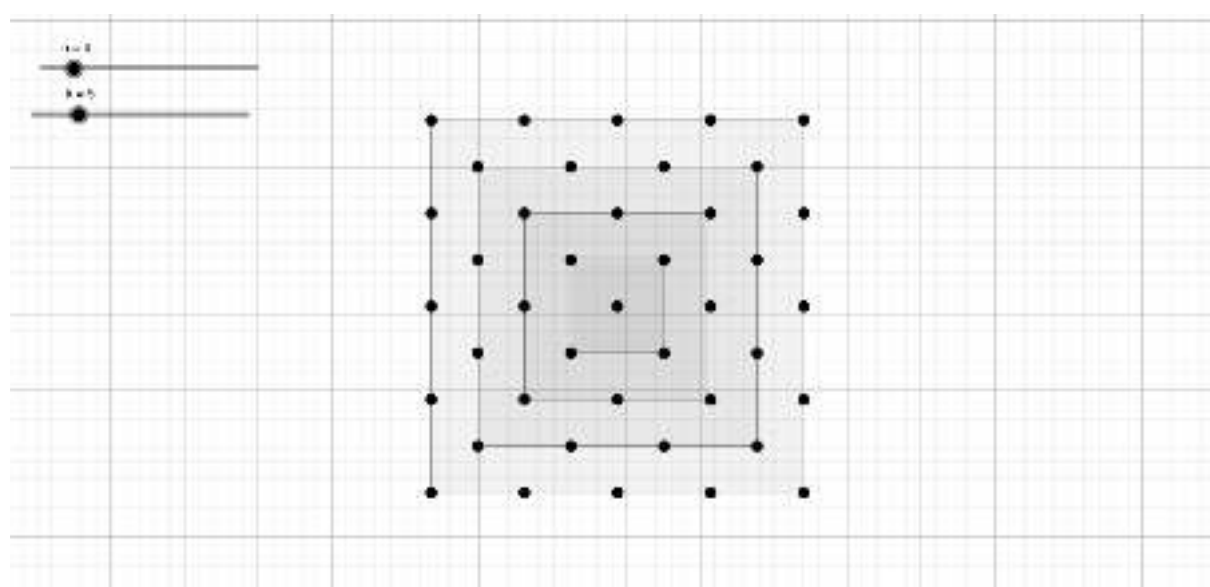
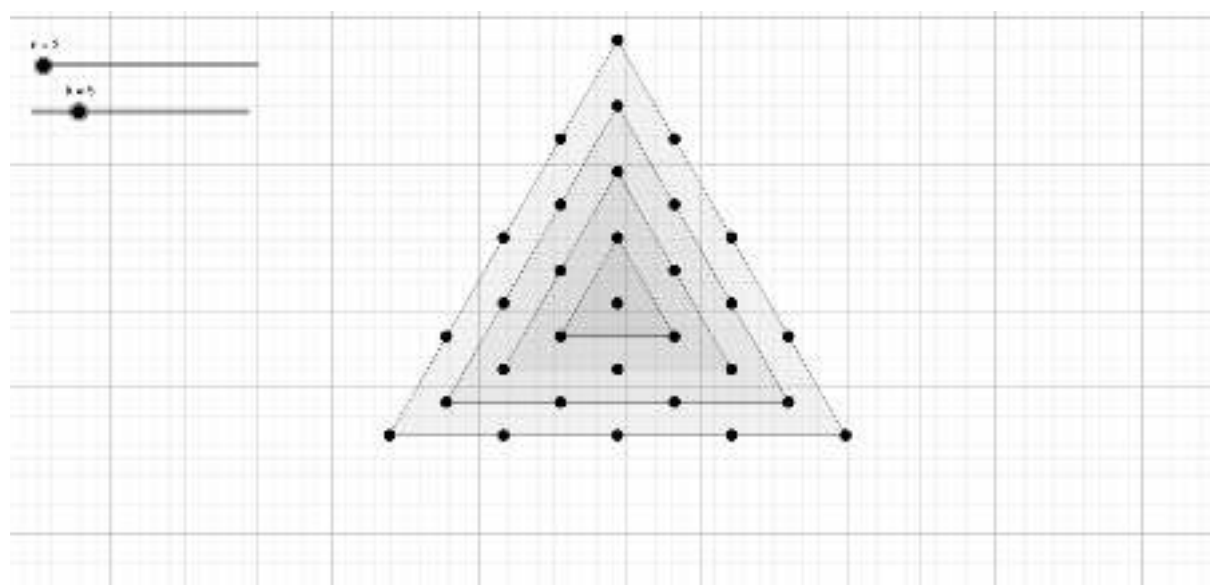
L1 – Encontrar a forma geral e recorrência dos números lineares via ladrilho.

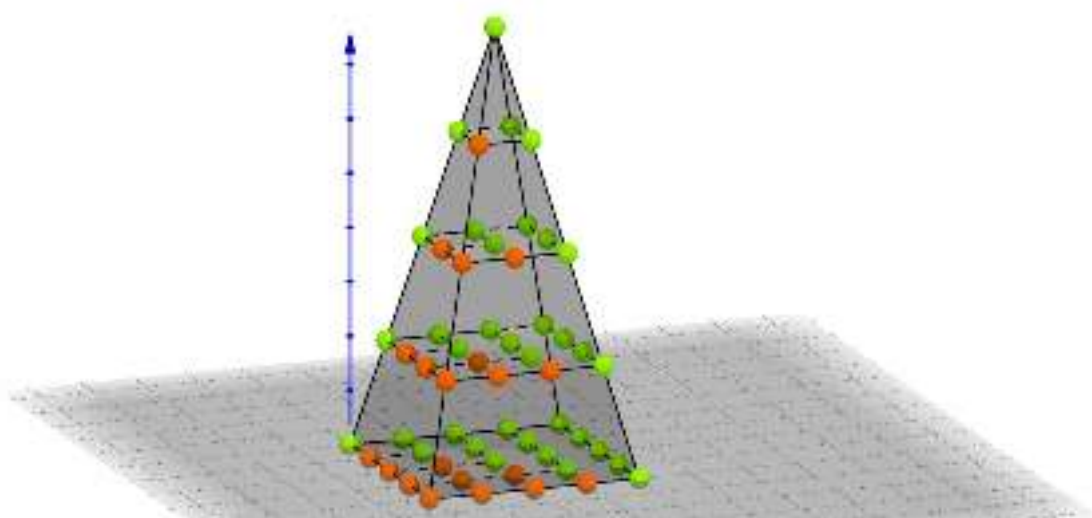
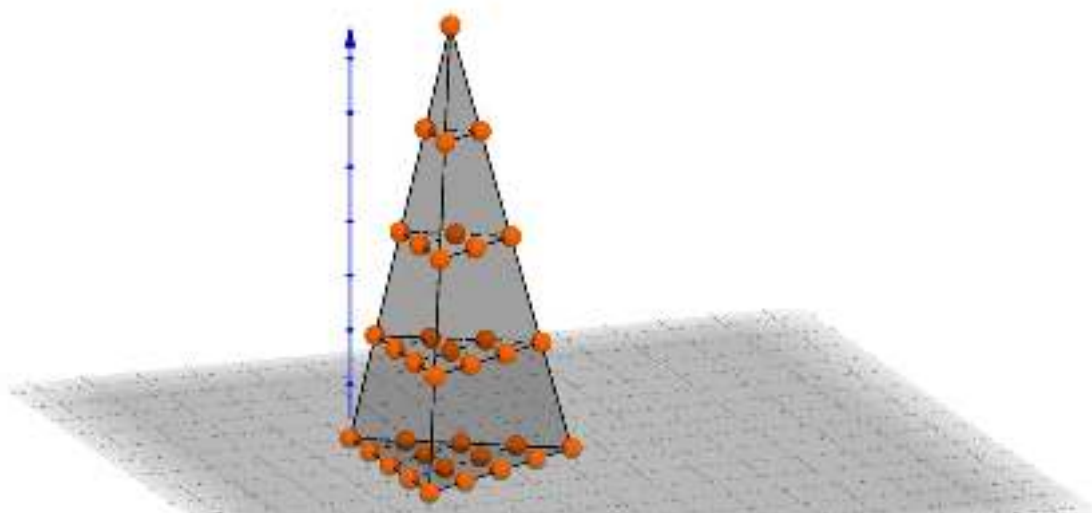
L2 - Encontrar a regra de ladrilhamento para números triangulares usando ladrilhos de dimensões 1 x 1 de cores distintas (cinza, vermelho e preto) chamado de conjunto CVP, necessários para cobrir um tabuleiro 1 x n.

L3 - Encontrar a relação de recorrência de números triangulares via ladrilho

CONSTRUÇÕES DAS APLICAÇÕES







ANEXO A – PARECER DO COMITÊ DE ÉTICA E PESQUISA

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA DO CEARÁ -
IFCE



PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: NÚMEROS FIGURADOS K DIMENSIONAIS: UMA ENGENHARIA DIDÁTICA SOBRE AS RELAÇÕES, VISUALIZAÇÃO PELO SOFTWARE GEOGEBRA E REPRESENTAÇÕES MATRICIAIS E VIA LADRILHOS

Pesquisador: FRANCISCO EVAMAR BARROS

Área Temática:

Versão: 3

CAAE: 83623024.9.0000.5589

Instituição Proponente: INSTITUTO FEDERAL DE EDUCACAO, CIENCIA E TECNOLOGIA DO CEARA

Patrocinador Principal: INSTITUTO FEDERAL DE EDUCACAO, CIENCIA E TECNOLOGIA DO CEARA

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 7.319.676

Apresentação do Projeto:

Resumo: Este trabalho tem como objetivo apresentar os números figurados e suas representações, propriedades e relações nas várias áreas da matemática e sua aplicação no ensino; na história da matemática os números figurados se apresentam como uma descoberta importante da sociedade pitagônica, embora não seja a principal. Na área da Teoria dos Números, esta classe aparece como relações entre outras seqüências numéricas e triângulos numéricos, na Álgebra, os números figurados são representados com as suas funções geradoras, capazes de descrever algumas propriedades importantes desses números, e por meio de matrizes companheiras que descrevem famílias de seqüências. Dentro da Análise Combinatória, estas seqüências apresentam sua relação com o binômio de Newton e o triângulo de Pascal e noção de ladrilho, diante de todas estas abordagens será apresentado um estudo sobre a implementação destes números sob representação geométrica por meio das visualizações descritas dentro do software GeoGebra que fazem um comparativo entre as propriedades descritas dentro do rigor matemático e a linguagem de programação descritas no comandos do software, bem como um estudo de polítopos k-dimensionais. Este estudo é estruturado utilizando como metodologia de pesquisa a Engenharia Didática, onde o conteúdo matemático é apresentado e desenvolvido dentro das análises preliminares, para a fases seguintes será utilizada a metodologia de ensino intitulada Teoria das Situações Didática

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703

Bairro: Jardim América

CEP: 60.410-426

UF: CE **Município:** FORTALEZA

Telefone: (85)3401-2332

E-mail: cep@ifce.edu.br

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA DO CEARÁ -
IFCE



Continuação do Parecer: 7.319.878

buscando transpor o conteúdo matemático descrito em situações de ensino na fase de análise a priori e na fase de experimentação. Ademais, na fase de análise a posteriori, serão comparados se as situações de ensino foram desenvolvidas conforme o previsto nas fases anteriores, cumprindo assim todos os objetivos da pesquisa.

Metodologia Proposta: A metodologia utilizada será a Engenharia Didática seguindo as quatro etapas, a saber: análise preliminar, análise a priori e concepção das situações, a experimentação e a análise a posteriori, a serem aplicadas durante a fase de experimentação em uma turma da disciplina de história da matemática, do curso de licenciatura em matemática do instituto federal de educação, ciência e tecnologia do Ceará (IFCE) por meio de cinco situações didáticas concebidas durante a fase de análise a priori da pesquisa. A metodologia de ensino utilizada durante a aplicação, será a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (1986) que conta com quatro fases: fase de ação, fase de formulação, fase de validação e fase de institucionalização e a coleta de dados será realizada por meio de gravações de áudio, fotos, material escrito e relato dos alunos e posteriormente analisadas durante a fase de análise a posteriori.

Critério de inclusão: Alunos devidamente matriculados na disciplina e que aceitem participar da mesma.

Crêterios de exclusão são: alunos que não estão matriculados na disciplina ou os que, por algum motivo, não se sentirem confortáveis com a realização desta, não trazendo nenhum prejuízo na avaliação final da disciplina.

Objetivo da Pesquisa:

Objetivo Primário: Realizar uma investigação, com base na Engenharia Didática, envolvendo o objeto matemático números figurados k-dimensionais e suas múltiplas representações e aplicações, através da visualização e relacioná-los ao ensino por meio da Teoria das situações didáticas.

Objetivo Secundário: 1. Apresentar as relações algébricas entre números figurados, suas representações e complexificação, bem como suas aplicações em diferentes áreas da matemática 2. Construir as propriedades matemáticas e relações entre números figurados

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703

Bairro: Jardim América

CEP: 60.410-426

UF: CE

Município: FORTALEZA

Telefone: (05)3401-2332

E-mail: cep@ifce.edu.br

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA DO CEARÁ -
IFCE



Continuação do Protocolo: F.319/678

através do software GeoGebra, permitindo descrever o itinerário destas relações através da visualização.3. Associar as representações e relações entre números figurados e outros tópicos matemáticos, descrevendo propriedades matemáticas de forma algébrica e geométrica por meio da visualização.4 Explorar, em situações didáticas fundamentais, as relações entre os números figurados e sua visualização por meio do software GeoGebra.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

Riscos: Ao estar dentro da sala de aula, para a realização das aulas expositivas dessa pesquisa, o sujeito está exposto aos seguintes riscos: Riscos de origem psicológica, intelectual ou emocional - ao participar da pesquisa, o estudante estará sujeito a possibilidade de: 1. Constrangimento; visto que pode não se sentir confortável em responder algum questionamento do pesquisador, neste caso, haverá a possibilidade do estudante apenas escrever todas as suas conclusões, informando previamente que não se sente confortável em falar para toda a turma ou ir a lousa, seus escritos serão considerados e as anotações feitas com base no texto entregue, este risco é considerado mínimo pois o pesquisador avisará com antecedência que o estudante não deve ir a lousa ou responder caso não se sinta à vontade; 2. Desconforto; este risco é considerado médio visto que estudantes em meio a grandes cobranças em outras disciplinas, podem sentir-se desconfortáveis com o pesquisador que não é o professor titular da disciplina, neste caso o estudante deverá avisar que não deseja participar da pesquisa; 3. Medo ou Vergonha; este risco é considerado moderado visto que é normal sentir vergonha de falar em público, neste caso o pesquisador deverá ser avisado que o estudante deseja participar da pesquisa apenas com seus dados escritos, o pesquisador não fará perguntas e todos os dados vindo deste estudante serão coletados de seus escritos; 4. Estresse ou cansaço; este risco é considerado mínimo visto que as aulas serão divididas em um curto período de 10 minutos dedicados a explicação do pesquisador e o estudante terá tempo de 80 minutos para tirar suas conclusões, debater, formular este tempo é suficiente para que o estudante não tenha pressa para responder e consiga desenvolver seu raciocínio com tranquilidade, esse risco pode ser diminuído pelo fato de que nem todos precisam apresentar as respostas ao final da aula, deixando o estudante mais confortável por não ter a obrigatoriedade de resposta ao final da aula; 5. Quebra de anonimato, este risco é considerado mínimo, posto que o pesquisador irá anexar todos os documentos de cada estudante separadamente, e seus nomes serão retirados para a análise, sendo assim, o pesquisador saberá que os documentos pertencerão a uma mesma pessoa, mas não saberá que é.

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703

Bairro: Jardim América

UF: CE

Telefone: (85)3401-2332

Município: FORTALEZA

CEP: 80.410-428

E-mail: ccep@ifce.edu.br

**INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA DO CEARÁ -
IFCE**



Continuação do Parecer: 7.318.676

Benefícios: A pesquisa traz um percurso histórico-matemático de muita importância para a disciplina de história da matemática, uma vez que descreve situações didáticas com a base matemática exigidas para um futuro professor de matemática, bem como a inserção do GeoGebra como recurso de visualização. A presente pesquisa traz como possíveis benefícios A contribuição na formação de futuros professores, pois integra história e matemática. O fortalecimento do ensino de matemática, visto que aborda um conteúdo matemático através da perspectiva histórica e apresenta sua evolução tanto histórica quanto metodológica. O uso do GeoGebra como recurso pedagógico, posto que o software ajuda a compreender conceitos complexos por meio da manipulação. As metodologias utilizadas podem aprimorar estratégias didáticas nos futuros professores.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

Pesquisa de pós-graduação do curso de Doutorado em Ensino (RENOEN), do campus Fortaleza, do Instituto Federal do Ceará

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

Constam os termos obrigatórios: Folha de rosto, Informações básicas do projeto, Orçamento, Cronograma, Declaração de compromisso de apresentação dos resultados, Declaração de garantia do regresso de benefícios da pesquisa, Termo de autorização e de existência de infraestrutura e Termo de consentimento livre e esclarecido.

Recomendações:

Sem recomendações

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

Sem pendências

Considerações Finais a critério do CEP:

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMACOES_BASICAS_DO_PROJETO_2368151.pdf	15/12/2024 19:32:08		Aceito
Projeto Detalhado / Brochura	projeto.pdf	15/12/2024 19:29:42	FRANCISCO EVAMAR BARROS	Aceito

Endereço: Rua Jorge Dantas, nº 1703

Bairro: Jardim América

CEP: 60.410-426

UF: CE

Município: FORTALEZA

Telefone: (05)3401-2332

E-mail: cep@ifce.edu.br

**INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA DO CEARÁ -
IFCE**



Continuação do Parecer: 7.319.676

Investigador	projeto.pdf	15/12/2024 19:29:42	FRANCISCO EVAMAR BARROS	Aceito
Cronograma	cronograma.PDF	15/12/2024 19:28:56	FRANCISCO EVAMAR BARROS	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE.pdf	15/12/2024 19:28:30	FRANCISCO EVAMAR BARROS	Aceito
Folha de Rosto	FolhadeRosto.pdf	02/11/2024 12:52:47	FRANCISCO EVAMAR BARROS	Aceito
Outros	regresso.pdf	24/09/2024 10:44:18	FRANCISCO EVAMAR BARROS	Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	infraestrutura.pdf	24/06/2024 11:25:20	FRANCISCO EVAMAR BARROS	Aceito
Declaração de concordância	compromisso.PDF	24/06/2024 11:23:51	FRANCISCO EVAMAR BARROS	Aceito
Orçamento	orcamento.PDF	24/06/2024 11:22:40	FRANCISCO EVAMAR BARROS	Aceito

Situação do Parecer:

Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:

Não

FORTALEZA, 27 de Dezembro de 2024

Assinado por:
Luiz Torres Raposo Neto
(Coordenador(a))

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703

Bairro: Jardim América

CEP: 60.410-426

UF: CE

Município: FORTALEZA

Telefone: (85)3401-2332

E-mail: cep@ifce.edu.br