

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

MILENA CAROLINA DOS SANTOS MANGUEIRA

**ENGENHARIA DIDÁTICA: UM PROCESSO DE HIBRIDIZAÇÃO E
HIPERCOMPLEXIFICAÇÃO DE SEQUÊNCIAS LINEARES
RECURSIVAS**

Fortaleza – CE

22 de fevereiro de 2022

MILENA CAROLINA DOS SANTOS MANGUEIRA

**ENGENHARIA DIDÁTICA: UM PROCESSO DE
HIBRIDIZAÇÃO E HIPERCOMPLEXIFICAÇÃO DE
SEQUÊNCIAS LINEARES RECURSIVAS**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Linha de Pesquisa: Ensino de Matemática

Orientador: Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Coorientador: Dr.(a) Paula Maria Machado Cruz Catarino

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECM)

Fortaleza – CE

22 de fevereiro de 2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal do Ceará - IFCE
Sistema de Bibliotecas - SIBI
Ficha catalográfica elaborada pelo SIBI/IFCE, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M277e Manguiera, Milena Carolina dos Santos.

Engenharia Didática: Um processo de hibridização e hipercomplexificação de sequências lineares recursivas / Milena Carolina dos Santos Manguiera. - 2022.
273 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado) - Instituto Federal do Ceará, Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Campus Fortaleza, 2022.

Orientação: Prof. Dr. Francisco Regis Vieira Alves.

Coorientação: Profa. Dra. Paula Maria Machado Cruz Catarino.

1. Números Híbridos. 2. Hipercomplexificação. 3. Sequências Lineares Recursivas. 4. Engenharia Didática. 5. Teoria das Situações Didáticas. I. Título.

CDD 510.07



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ
Av. 13 de maio, 2081 , - Bairro Benfica - CEP 60040-531 - Fortaleza - CE - www.ifce.edu.br

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIA MATEMÁTICA (PGECM)

Aos 27 dias do mês de janeiro do ano de 2022, às 8h, através de videoconferência pela plataforma Google Meet, link: <https://meet.google.com/bqp-nwky-hxa>, realizou-se a Defesa de dissertação, intitulada **"ENGENHARIA DIDÁTICA: UM PROCESSO DE HIBRIDIZAÇÃO E HIPERCOMPLEXIFICAÇÃO DE SEQUÊNCIAS LINEARES RECURSIVAS"**, de autoria do(a) candidato(a) **MILENA CAROLINA DOS SANTOS MANGUEIRA**, aluno(a) do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PGCEM/IFCE, em nível de Mestrado. A Comissão Examinadora esteve constituída pelos professores: **Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves**, Presidente (orientador) – (IFCE), **Profa. Dra. Paula Maria Machado Cruz Catarino** (coorientadora) – (UTAD), **Profa. Dra. Anabela Maria Ferreira Borges Varela Rodrigues** (UTAD), **Profa. Dra. Ana Paula Florêncio Aires** (UTAD), **Profa. Dra. Helena Maria Barros de Campos** (UTAD), **Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira** (URCA) e **Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes** (UVA). Concluídos os trabalhos de apresentação e arguição, a(o) candidato(a) foi **APROVADA(O)** pela Comissão Examinadora. Foi concedido um prazo de **90(noventa) dias**, para o(a) candidato(a) efetuar as correções sugeridas pela Comissão Examinadora e apresentar o trabalho em sua redação definitiva, sob pena de não expedição do Diploma. E, para constar, foi lavrada a presente ata, que vai assinada pelos membros da Comissão.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves, Presidente (orientador) – (Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE)

Profa. Dra. Paula Maria Machado Cruz Catarino (coorientadora) – (Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro - UTAD)

Profa. Dra. Anabela Maria Ferreira Borges Varela Rodrigues (Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro - UTAD)

Profa. Dra. Ana Paula Florêncio Aires (Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro - UTAD)

Profa. Dra. Helena Maria Barros de Campos (Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro - UTAD)

Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira (Universidade Regional do Cariri - URCA)

Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes (Universidade Estadual Vale do Acaraú - UVA).

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: ENGENHARIA DIDÁTICA: UM PROCESSO DE HIBRIDIZAÇÃO E HIPERCOMPLEXIFICAÇÃO DE SEQUÊNCIAS LINEARES RECURSIVAS

LOCAL: Google Meet, link: <https://meet.google.com/bqp-nwky-hxa>

HORA DE INÍCIO: 8h

Em sessão pública, após exposição de cerca de 50 minutos, a candidata foi arguida oralmente pelos membros da banca tendo como resultado:

() APROVADA, devendo a candidata entregar a versão final no prazo máximo de 90 dias.

(**X**) APROVADA com louvor.

() APROVAÇÃO CONDICIONAL, devendo o candidato satisfazer, no prazo máximo de 90 dias, às exigências listadas na Folha de Modificações de Dissertação de Mestrado anexa à presente ata.

() REPROVADA.

Na forma regulamentar foi lavrada a presente ata que é abaixo assinada pelos membros da banca, na ordem acima determinada, e pela candidata.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. **Francisco Régis Vieira Alves**, Presidente (orientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE

Profa. Dra. **Paula Maria Machado Cruz** Catarino (coorientadora)
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro - UTAD

Profa. Dra. **Anabela Maria Ferreira Borges Varela Rodrigues**
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro - UTAD

Profa. Dra. **Ana Paula Florêncio Aires**
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro - UTAD

Profa. Dra. **Helena Maria Barros de Campos**
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro - UTAD

Prof. Dr. **Paulo César Cavalcante de Oliveira**
Universidade Regional do Cariri - URCA

Prof. Dr. **Daniel Brandão Menezes**
Universidade Estadual Vale do Acaraú - UVA

Candidata: **MILENA CAROLINA DOS SANTOS MANGUEIRA**



Documento assinado eletronicamente por **Anabela Maria Ferreira Borges Varela Rodrigues, Usuário Externo**, em 28/01/2022, às 12:48, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ana Paula Florêncio Aires, Usuário Externo**, em 28/01/2022, às 12:51, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Paula Maria Machado Cruz Catarino, Usuário Externo**, em 28/01/2022, às 13:44, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Francisco Régis Vieira Alves, Professor(a) do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico**, em 31/01/2022, às 08:24, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Daniel Brandão Menezes, Usuário Externo**, em 31/01/2022, às 09:59, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

Documento assinado eletronicamente por **Helena Maria Barros de Campos, Usuário Externo**, em 31/01/2022, às 15:45, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Paulo César Cavalcante de Oliveira, Usuário Externo**, em 01/02/2022, às 08:38, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Milena Carolina dos Santos Manguiera, Usuário Externo**, em 07/02/2022, às 17:12, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade do documento pode ser conferida no site https://sei.ifce.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0 informando o código verificador **3358984** e o código CRC **778EBA82**.

A todas as pessoas que me ajudaram a me tornar quem eu sou.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por mais uma conquista e pelo dom de vida.

Agradeço aos meus pais, Rivanilso Manguiera e Maria José, e ao meu irmão, Nino, meus maiores exemplos de força de vontade, garra e dedicação, aqueles que são meus maiores incentivadores no estudo e minha base. Obrigado por todos os ensinamentos, amor, cuidado e apoio, vocês são o alicerce que me dão força para seguir em frente.

Ao meu orientador, Dr. Francisco Régis Vieira Alves, por ter me acolhido como ouvinte na turma 2019 e por me orientar a partir da turma 2020. Agradeço pela confiança investida em mim, pelo incentivo à pesquisa e por compartilhar seus conhecimentos que foram de importantes para a realização deste trabalho.

À minha coorientadora. Dra. Paula Maria Machado Cruz Catarino, pela coorientação, pela contribuição significativa que engrandeceu esta pesquisa, por toda disponibilidade e pela conexão Brasil-Portugal.

Ao meu namorado, Pedro Perdigão, por todo amor, cuidado, por acreditar na minha capacidade, por estar sempre disponível para me ajudar e escutar.

À Iara, Alberto e Caio, que nos últimos anos se tornaram minha segunda família, que me acolheram e me proporcionaram muitos momentos de descontração, apoio e suporte.

À minha família da Paraíba, em especial à Neide e Allana, por serem tão presentes, por vibrarem comigo a cada conquista e estarem ao meu lado nas fases ruins.

Aos meus amigos de Mossoró, por sempre apoiarem meus sonhos, pela compreensão quanto a minha ausência e por se mostrarem presentes, apesar da distância. Vocês foram essenciais nessa jornada.

Aos amigos que encontrei em Fortaleza, aqueles que desde o início me apoiaram, em especial à Celina Queiroz, que me acolheu tão bem em Fortaleza e tornou esse período mais leve.

Aos amigos do mestrado, Alison da Silva, Arianny Lira, Cícera Fernandes, Evamar Barros, Gleison da Silva, Hedyleno Bezerra, Rosalide de Sousa, pelos momentos de descontração, apoio e toda torcida. Em especial, agradeço à Renata Vieira, por ter sido minha maior companheira de artigos, por toda ajuda e pelo companheirismo.

Aos professores da minha banca de defesa à Dra. Paula Maria Machado Cruz Catarino, Dra. Anabela Maria Ferreira Borges Varela Rodrigues, Dra. Ana Paula Florêncio Aires, Dra. Helena Maria Barros de Campos, Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira e Dr. Daniel Brandão Menezes, por aceitarem o convite, pela disponibilidade em ler esta

pesquisa e pelas contribuições realizadas para aperfeiçoá-la.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), órgão que financiou a bolsa de estudo para o desenvolvimento deste trabalho.

“Todas as vitórias ocultam uma abdicação.”
(Simone de Beauvoir)

RESUMO

A presente pesquisa apresenta uma investigação referente a situações de ensino sobre o estudo do processo de hibridização e hipercomplexificação de sequências lineares recursivas. A qual são abordadas as sequências de Fibonacci, Lucas, Pell, Leonardo, Jacobsthal, Pado-
van, Perrin, Narayana, Mersenne e Oresme. Com isso, a pesquisa possui o viés de descrever os elementos de um estudo sistemático dos modelos de hibridização e hipercomplexificação das sequências, promovendo a compreensão histórico-evolutivo, descrição e exploração de suas propriedades matemáticas, fundamentado e organizado de acordo com a metodologia da Engenharia Didática em conjunto com a Teoria das Situações Didáticas. Assim, são desenvolvidas situações didáticas com enfoque na hibridização de sequências e no seu processo de hipercomplexificação, realizando uma transposição didática das sequências considerando os aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos. Desse modo, uma análise do campo epistêmico-matemático é elaborada abordando, de modo primordial, o processo de hibridização destas sequências, bem como a sua complexificação inserindo componentes imaginárias e, conseqüentemente, do aumento dimensional da recorrência, sendo exploradas as relações recorrentes bi, tri, e n -dimensionais para algumas sequências. Baseado nisso, o trabalho foi organizado de acordo com o percurso metodológico da Engenharia Didática e as suas etapas, sendo elas: análises preliminares, concepção e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e validação. As situações de ensino são desenvolvidas com enfoque na Teoria das Situações Didáticas e aplicadas através da proposição de situações-problema. As situações didáticas instigam o pensamento intuitivo dos alunos, visando a compreensão de determinadas propriedades e teoremas do processo de hibridização e hipercomplexificação, com ênfase na sua relação de recorrência, fórmula variante de Binet, identidades clássicas e relações recorrentes n -dimensionais. O desenvolvimento de uma concepção epistemológica no ensino de História da Matemática foi oportunizado no curso de Licenciatura em Matemática, em turma de formação inicial de professores do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará. Por fim, promoveu-se o desenvolvimento de uma concepção epistemológica para o ensino de História da Matemática, possibilitando relações epistemológicas matemáticas do processo de hibridização e hipercomplexificação de sequências lineares recursivas, destacando o processo evolutivo perante a concepção matemática e histórica.

Palavras-chave: Números Híbridos. Hipercomplexificação. Sequências Lineares Recursivas. Generalização. Engenharia Didática. Teoria das Situações Didáticas.

ABSTRACT

This research presents an investigation regarding teaching situations on the study of the hybridization and hypercomplexification process of linear recursive sequences. Which are addressed the sequences of Fibonacci, Lucas, Pell, Leonardo, Jacobsthal, Padovan, Perrin, Narayana, Mersenne and Oresme. Thus, the research has the bias of describing the elements of a systematic study of hybridization and hypercomplexification models of sequences, promoting the historical-evolutionary understanding, description and exploration of their mathematical properties, grounded and organized according to the Engineering methodology Didactics together with the Theory of Didactic Situations. Thus, didactic situations are developed with a focus on the hybridization of sequences and their hypercomplexification process, carrying out a didactic transposition of sequences considering epistemological, cognitive and didactic aspects. In this way, an analysis of the epistemic-mathematical field is elaborated, approaching, in a primordial way, the hybridization process of these sequences, as well as its complexification, inserting imaginary components and, consequently, of the dimensional increase of the recurrence, being explored the bi-recurrent relationships, tri, and n -dimensional for some sequences. Based on this, the work was organized according to the methodological path of Didactic Engineering and its stages, namely: preliminary analyses, conception and analysis *a priori*, experimentation and analysis *a posteriori* and validation. Teaching situations are developed with a focus on the Theory of Didactic Situations and applied through the proposition of problem-situations. The didactic situations instigate the students' intuitive thinking, aiming at the understanding of certain properties and theorems of the hybridization and hypercomplexification process, with emphasis on its recurrence relation, Binet's variant formula, classical identities and recurrent n -dimensional relations. The development of an epistemological conception in the teaching of History of Mathematics was made possible in the Licentiate Degree in Mathematics, in an initial teacher training class at the Federal Institute of Education, Science and Technology of the State of Ceará. Finally, the development of an epistemological concept for the teaching of History of Mathematics was promoted, enabling mathematical epistemological relations of the process of hybridization and hypercomplexification of recursive linear sequences, highlighting the evolutionary process before the mathematical and historical conception.

Keywords: Hybrid Numbers. Hypercomplexification. Recursive Linear Sequences. Generalization. Didactic Engineering. Theory of Didactic Situations.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Triângulo Didático.	38
Figura 2 – Diagrama dos conjuntos numéricos.	43
Figura 3 – Plano hibridiano.	48
Figura 4 – Hiperplano hibridiano.	49
Figura 5 – Leonardo Pisano (Fibonacci)	54
Figura 6 – Espiral de Fibonacci.	55
Figura 7 – Árvore de reprodução dos zangões e abelhas.	55
Figura 8 – Rosto de Monalisa e o espiral de Fibonacci.	56
Figura 9 – Édouard Anatole Lucas.	57
Figura 10 – Espiral de Lucas.	58
Figura 11 – John Pell (1611-1685).	59
Figura 12 – Construção do modelo matemático para a sequência de Pell, sob o ponto de vista histórico.	60
Figura 13 – Ernst Erich Jacobsthal.	62
Figura 14 – Igreja reconstruída após a Segunda Guerra Mundial	63
Figura 15 – Espiral de Padovan	64
Figura 16 – Espiral de Perrin	65
Figura 17 – Narayana Pandita (1340-1400)	66
Figura 18 – Marin Mersenne	68
Figura 19 – Nicole Oresme	69
Figura 20 – Processo evolutivo da hibridização das sequências lineares.	217
Figura 21 – Processo evolutivo da hipercomplexificação das sequências lineares. . .	218
Figura 22 – Fase de ação e formulação pelo aluno A.	219
Figura 23 – Fase de validação pelo aluno B.	220
Figura 24 – Fase de ação e formulação pelo aluno B.	221
Figura 25 – Fase de validação pelo aluno B.	221
Figura 26 – Fase de validação pelo aluno C.	222
Figura 27 – Fase de ação e formulação pelo aluno B.	223
Figura 28 – Fase de validação pelo aluno D.	223
Figura 29 – Fase de validação pelo aluno D.	224
Figura 30 – Fase de ação e formulação pelo aluno E.	225
Figura 31 – Fase de validação pelo aluno E.	225
Figura 32 – Fase de ação e formulação pelo aluno F.	226
Figura 33 – Fase de ação e formulação pelo aluno F.	226
Figura 34 – Fase de validação pelo aluno G.	227

Figura 35 – Fase de validação pelo aluno G.	228
Figura 36 – Fase de ação e formulação pelo aluno G.	229
Figura 37 – Fase de ação e formulação pelo aluno G.	229
Figura 38 – Fase de validação pelo aluno G.	230
Figura 39 – Fase de validação pelo aluno G.	230
Figura 40 – Fase de validação pelo aluno G.	231
Figura 41 – Fase de validação pelo aluno G.	231

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Tabela de multiplicação para $\mathbb{K}$	45
Tabela 2	– Categorização das resoluções das situações-problema propostas referentes à hibridização das sequências lineares recursivas.	232
Tabela 5	– Categorização das resoluções das situações-problema propostas referentes à hipercomplexificação das sequências lineares recursivas.	233

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DM	Didática da Matemática
ED	Engenharia Didática
HM	História da Matemática
IFCE	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
NH	Números Híbridos
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
TSD	Teoria das Situações Didáticas

LISTA DE SÍMBOLOS

HF_n	Número Híbrido de Fibonacci
HL_n	Número Híbrido de Lucas
HP_n	Número Híbrido de Pell
HLe_n	Número Híbrido de Leonardo
HJ_n	Número Híbrido de Jacobsthal
HPa_n	Número Híbrido de Padovan
HPe_n	Número Híbrido de Perrin
HN_r	Número Híbrido de Narayana
HM_n	Número Híbrido de Mersenne
HO_n	Número Híbrido de Oresme
$G(n, m)$	Relações Bidimensionais
$P(n, m)$	Números Bidimensionais de Pell
$P(n, m, p)$	Números Tridimensionais de Pell
$P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n)$	Números n -dimensionais de Pell
$Pe(n, m)$	Números Bidimensionais de Perrin
$Pe(n, m, p)$	Números Tridimensionais de Perrin
$Pe(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n)$	Números n -dimensionais de Perrin
$Le(n, m)$	Números Bidimensionais de Leonardo
$Le(n, m, p)$	Números Tridimensionais de Leonardo
$Le(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n)$	Números n -dimensionais de Leonardo
$\in$	Pertence
$\mathbb{R}_1^3$	Espaço Euclidiano 3-dimensional
$\mathbb{N}^*$	Conjunto dos Naturais não nulos

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	29
1.0.1	Objetivo Geral	31
1.0.2	Objetivos Específicos	32
2	REFERENCIAL TEÓRICO	33
2.1	A Engenharia Didática e a Teoria das Situações Didáticas	34
2.1.1	Análises Preliminares	35
2.1.2	Concepção e Análise <i>a Priori</i>	36
2.1.3	A Teoria das Situações Didáticas	37
2.1.4	Experimentação	40
2.1.5	Transposição Didática e Contrato Didático	41
2.1.6	Análise <i>a Posteriori</i> e Validação (Interna e Externa)	42
2.2	Números Híbridos e Hipercomplexos	43
2.3	Sequências Lineares Recursivas	52
2.3.1	Sequência de Fibonacci	53
2.3.2	Sequência de Lucas	56
2.3.3	Sequência de Pell	58
2.3.4	Sequência de Leonardo	60
2.3.5	Sequência de Jacobsthal	61
2.3.6	Sequência de Padovan	63
2.3.7	Sequência de Perrin	64
2.3.8	Sequência de Narayana	66
2.3.9	Sequência de Mersenne	67
2.3.10	Sequência de Oresme	68
3	ESTUDO DO CAMPO EPISTÊMICO-MATEMÁTICO	71
3.1	Hibridização de Sequências	71
3.1.1	Números Híbridos de Fibonacci	71
3.1.2	Números Híbridos de Lucas	78
3.1.3	Números Híbridos de Pell	84
3.1.4	Números Híbridos de Leonardo	89
3.1.5	Números Híbridos de Jacobsthal	96
3.1.6	Números Híbridos de Padovan	101
3.1.7	Números Híbridos de Perrin	106
3.1.8	Números Híbridos de Narayana	111

3.1.9	Números Híbridos de Mersenne	116
3.1.10	Números Híbridos de Oresme	121
3.2	Hipercomplexificação de Sequências	125
3.2.1	Hipercomplexificação da Sequência de Pell	126
3.2.1.1	Relações Recorrentes Bidimensionais de Pell	126
3.2.1.2	Relações Recorrentes Tridimensionais de Pell	130
3.2.1.3	Relações Recorrentes n -Dimensionais de Pell	142
3.2.2	Hipercomplexificação da Sequência de Perrin	154
3.2.2.1	Relações Recorrentes Bidimensionais de Perrin	155
3.2.2.2	Relações Recorrentes Tridimensionais de Perrin	158
3.2.2.3	Relações Recorrentes n -Dimensionais de Perrin	168
3.2.3	Hipercomplexificação da Sequência de Leonardo	179
3.2.3.1	Relações Recorrentes Bidimensionais de Leonardo	179
3.2.3.2	Relações Recorrentes Tridimensionais de Leonardo	182
3.2.3.3	Relações Recorrentes n -Dimensionais de Leonardo	194
4	UMA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA NO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA	209
4.1	Concepções das Situações Didáticas	209
4.2	Análise <i>a Priori</i> das Situações Didáticas	210
4.3	Experimentação	215
5	ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS	217
5.1	Análise <i>a Posteriori</i> e Validação Interna da Pesquisa	218
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	235

REFERÊNCIAS	237
-----------------------	-----

APÊNDICES	245
---------------------	-----

APÊNDICE A – ESTRUTURA DA PESQUISA BASEADA EM ENGE- NHARIA DIDÁTICA EM ASSOCIAÇÃO COM A TE- ORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS	248
--	-----

APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLA- RECIDO	249
--	-----

ANEXOS	257
ANEXO A – MATRIZ CURRICULAR DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DO INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ (IFCE)	259
ANEXO B – EMENTA DA DISCIPLINA DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA	263
ANEXO C – PARECER DO COMITÊ DE ÉTICA DA PESQUISA . .	267

1 INTRODUÇÃO

A Didática da Matemática (DM) emergiu de forma orgânica em diversos grupos de pesquisa espalhados pelo mundo, principalmente Estados Unidos e Europa, por necessidade de compreender os processos particulares de ensino-aprendizagem para ciências e matemática. No Brasil, Alves (2018) aponta dois elementos que merecem destaques, sendo eles em relação: ao movimento da constituição e identidade científica da pesquisa, ao ensino de Ciência e Matemática; e o outro ao campo efetivo de atuação, onde o aluno torna-se um sujeito analisado com bastante clareza pelo professor.

Nesse contexto, neste trabalho, apoiados nos pressupostos da vertente francesa de investigação sobre a DM elaboramos uma proposta de Engenharia Didática (ED) da primeira geração, de Artigue (1995) para o ensino da hibridização e hipercomplexificação de sequências lineares recursivas, que consiste em associar as sequências lineares com o conjunto dos números híbridos e realizar a complexificação de sequências apresentando o aumento da sua dimensionalidade e a inserção de unidades imaginárias. E ainda, será utilizado a Teoria das Situações Didáticas (TSD), de Brousseau (1976), como apoio a análise de seções de ensino.

Com isso, será apresentado o percurso inicial traçado para se realizar esta pesquisa, assim, são feitas análises prévias fundamentadas na ED, em seguida, a problemática e a justificativa da pesquisa são discutidas. E, finalmente, a questão norteadora é apresentada e os objetivos gerais e específicos são definidos.

De acordo com as concepções de Almouloud e Silva (2012), podemos afirmar que as análises prévias desta pesquisa serão realizadas com base na ED. Assim, esse processo foi organizado em duas etapas. Na primeira, foi realizada uma revisão bibliográfica sobre a metodologia de pesquisa, a teoria de ensino e a hibridização e hipercomplexificação das sequências lineares recursivas. Na outra etapa, foi feita uma descrição da abordagem didática e cognitiva da hibridização e hipercomplexificação das sequências lineares recursivas, relacionando ao contexto em que será aplicado e desenvolvido a pesquisa.

Inicialmente foi iniciada a construção do referencial teórico referente ao objeto matemático, ED e TSD, para serem estudados posteriormente, com o objetivo de definir a problemática da pesquisa e assim pautar os seus objetivos. Sendo destacadas as Dissertações de Mestrado de Santos (2017) e Oliveira (2018). Em ambas as dissertações, constata-se a existência da ED em associação com a TSD, evidenciando dois momentos: um momento para a análise matemática, através do campo epistêmico-matemático e outro para a reflexão das metodologias de pesquisa e ensino.

No primeiro momento, foram pesquisadas definições, relações e propriedades matemáticas inerentes à gênese e ao processo histórico-evolutivo com ênfase na hibridização e hipercomplexificação das sequências. Inicialmente, foram estudados os Números Híbridos (NH), que consiste em unir os sistemas numéricos dos complexos, duais e hiperbólicos, presentes nos trabalhos de Özdemir (2018) e Carvalho (2019), e ainda, como foi realizado o processo de hibridização de algumas sequências presentes em Catarino (2019), Cerda-Morales (2018) e Szynal-Liana (2018), Szynal-Liana e Wloch (2019).

Em seguida, foi realizado um estudo sobre a hipercomplexificação das sequências, na qual apresenta as relações recorrentes uni, bi, tri e n -dimensionais presentes nos trabalhos de Harman (1981), Oliveira, Alves e Paiva (2017), Vieira, Alves e Catarino (2019a), Horadam (1993) e Pethe e Horadam (1986).

Por fim, as leituras relacionadas à ED e TSD foram realizadas para que fosse possível investigar as situações de ensino orientadas pela vertente francesa da DM, destacando os autores: Almouloud (2007), Almouloud, Queiroz e Coutinho (2008), Almouloud e Silva (2012), Almouloud (2016), Alves (2016a), Artigue (1988), Artigue et al. (1995), Brousseau (1976), Brousseau (1982), Brousseau (1986), Brousseau (2008), Pais (2011), Silva e Almouloud (2018), Teixeira e Passos (2013) que investigam as situações de ensino se orientando na vertente francesa da DM numa abordagem teórica e metodológica. A seguir, será feita uma descrição do contexto didático cognitivo em que a hibridização e hipercomplexificação das sequências está inserida.

Com o intuito de descrever o contexto didático-cognitivo em que o objeto matemático é abordado, foi analisada a matriz curricular do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), *campus* Fortaleza (ver Anexo A), esse curso foi escolhido por oferecer formação inicial para professores de Matemática e após a análise da grade curricular do curso, na qual, constatou-se que a ementa da disciplina de História da Matemática (ver Anexo B) é obrigatória na matriz curricular e abrange os seguintes assuntos: o conceito de número e os sistemas de numeração; o processo histórico-evolutivo da Aritmética, Álgebra e Geometria; a biografia dos matemáticos que contribuíram significativamente para esse processo e a História da Matemática (HM) no Brasil.

Contudo, foi constatada que o conteúdo de sequências lineares recursivas é trabalhado na seção que discute a HM, uma vez que abordam sobre a Idade Média, em que o matemático Leonardo de Pisa propõe, na sua obra *Liber Abbaci*, o problema que deu origem à sequência de Fibonacci. Porém, existem diversas outras sequências a serem estudadas e exploradas que, por muitas vezes, não são citadas nos livros adotados usualmente disponibilizados na biblioteca da instituição. Com isso, pode-se apresentar a problemática e a justificativa desta pesquisa.

A problemática desta pesquisa parte do fato de que os livros de HM, disponibili-

zados na biblioteca da instituição, apresentam discussões superficiais sobre os conceitos matemáticos e as relações oriundas apenas da Sequência de Fibonacci, uma vez que é a sequência mais conhecida, em consequência disto, é desconsiderado outras sequências existentes e também o processo de complexificação delas. E ainda, não existem muitas discussões sobre o conjunto dos NH, tampouco a hibridização e hipercomplexificação de sequências, sendo discutida *a priori* na literatura da Matemática Pura, não havendo uma preocupação pedagógica, assim não compondo a matriz curricular do curso de Licenciatura em Matemática.

Desse modo, a revisão bibliográfica apresentada anteriormente, direciona uma investigação dos elementos de ordem epistemológica, cognitiva e didática numa perspectiva histórica e evolutiva da hibridização e hipercomplexificação das sequências lineares recursivas. Dessa forma, tem-se como justificativa da pesquisa transformar esse conteúdo em um tópico a ser ensinado no curso de Licenciatura de Matemática. As considerações de Alves (2016a) ressaltam que desde a década de 1980 especialistas, pesquisadores, educadores matemáticos tentam compreender os "fenômenos" relacionados com o ensino e aprendizagem de assuntos matemáticos que através de teorias de ensino relacionadas com a transposição didática, nesse contexto, destacou-se a ED a para fundamentar esta atividade investigativa, buscando a complementaridade na TSD.

À vista disso, esta pesquisa foi norteada pela seguinte questão de investigação: *Como desenvolver um estudo sobre o processo de hibridização e hipercomplexificação de sequências lineares, de modo a realizar situações didáticas que proporcione a investigação de seus teoremas e suas propriedades, explorando sua representação complexa numa perspectiva epistemológica, no que diz respeito a sua origem e evolução histórica?*

Pretende-se com esta pesquisa, apresentar uma abordagem didática matemática aos professores de Matemática em formação inicial, fornecendo-lhes ferramentas necessárias para que haja uma melhoria nas práticas em sala de aula.

Os objetivos gerais e específicos deste trabalho destinam-se a relacionar os elementos de ordem epistemológica, cognitiva e didática com base nos pressupostos da ED. Com isso, na próxima subseção será apresentado o objetivo geral desta pesquisa.

1.0.1 Objetivo Geral

Desenvolver uma ED associada com a TSD através do estudo de hibridização e hipercomplexificação das sequências lineares, com o intuito de explorar, em situações didáticas, as representações híbridas e hipercomplexas através de definições, teoremas, propriedades e identidades. E assim, proporcionar a compreensão do desenvolvimento epistemológico-matemático das hibridizações e hipercomplexificações das sequências.

1.0.2 Objetivos Específicos

1. Investigar os teoremas e propriedades das sequências hibridizadas apresentando a recorrência, fórmula de Binet, função geradora, forma matricial e identidades clássicas, como: Catalan, Cassini e d'Ocagne. E ainda, as relações bi, tri e n -dimensionais, compondo a hipercomplexificação das sequências;
2. Apresentar o desenvolvimento histórico-evolutivo, isto é, epistemológico-matemático, das sequências estudadas inerentes ao seu processo de hibridização e hipercomplexificação, através de situações-problema em sala de aula tendo em vista a formação ou formulação de definições;
3. Explorar, em situações de ensino, extensão para índices naturais e inteiros não positivos, fórmula de Binet, função geradora, propriedades em torno do crescimento dimensional e relações n -dimensionais das sequências.

Doravante, será discutido o aporte teórico desta pesquisa, sendo composto pela hibridização e hipercomplexificação de sequências lineares recursivas, pela ED e TSD, estas duas últimas são, respectivamente, Engenharia Didática e Teoria das Situações Didáticas.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O desenvolvimento de estudos relacionados à *Didactiques de Mathématique* sucedeu na França a partir de 1970 na fundação da Comissão Internacional de Instrução Matemática por Félix Klein, manifestando interesse pelo trinômio clássico: professor-aluno-saber. No Brasil, denomina-se como Educação Matemática, evidencia-se que o principal elemento do trinômio ao realizar uma transposição didática é o professor. E ainda, D'Amore (2007a, p.184) define a DM como "a arte de conceber e conduzir condições que podem determinar a aprendizagem de um conhecimento matemático por parte de um sujeito". Por outro lado, Luiz Carlos Pais apresenta a seguinte definição sobre DM:

A DM é uma das tendências da grande área de educação matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica (PAIS, 2011, p.11).

A DM é constituída pelas relações existentes com outras áreas, como: Sociologia, Psicologia e Pedagogia. Gálvez (1996) relata que o objetivo principal da DM é analisar como funcionam as situações didáticas e quais as características de cada situação são importantes para a evolução do comportamento dos alunos e, conseqüentemente, de seus conhecimentos. Ressaltando que, mesmo no erro, pode explorar o potencial de uma situação didática, pois podemos identificar onde ocorreu a falha e aprimorar o erro para experiências futuras. No Brasil, o foco é que o professor conheça todas as teorias e questões educacionais, ter um bom conhecimento na sua área, além de ter uma formação que prepare para o campo de trabalho, bem como, saber transmitir seus conhecimentos que possibilitará o desenvolvimento cognitivo do aluno porém, nem todos os professores conseguem corresponder a essas atribuições. Assim, tem-se que:

cabe ao professor a responsabilidade de mediar todo processo de solução de problemas a fim de propiciar a seus alunos situações desafiadoras que os motivem à busca de informações, à definição de estratégias, questionamentos quanto as próprias ideias, análise e reestruturação do próprio processo de solução, comunicação e troca de conhecimentos, tarefa coletiva, autoavaliação. (SOUZA, 2010, p.60)

A seguir, será abordado a metodologia da ED em complementariedade com a TSD, apresentando os elementos de ordem epistemológica, cognitiva e didática numa vertente francesa da DM, com o intuito de assimilar como esses aspectos estão inseridos e como interferem no processo de ensino da Matemática.

2.1 A Engenharia Didática e a Teoria das Situações Didáticas

A ED é uma metodologia de pesquisa e teve sua gênese no início dos anos 80 na França, ela surgiu como decorrência conhecida como DM, na qual, segundo Artigue et al. (1995) ela é denominada

como uma forma de trabalho comparado com o trabalho de um engenheiro que, para realizar um determinado projeto, se baseia em conhecimentos científicos de sua área e aceita a submeter-se a um controle do tipo científico. Porém, ao mesmo tempo, se encontra obrigado a trabalhar com objetos muito mais complexos que objetos refinados das Ciências e, por tanto, tem que abordar praticamente, com todos os meios disponíveis, problemas que a ciência não deseja ou não pode assumir. (ARTIGUE et al., 1995, p.33-34)

A ED valoriza as produções do professor permitindo que o mesmo utilize suas produções matemáticas “em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado objeto matemático e, em particular, a elaboração de gênesis artificiais para um dado conceito.” (ALMOULOU, 2007, p.171). E ainda, Oliveira e Alves (2019), segundo o pensamento de Artigue et al. (1995), relatam ainda que:

A ED é um percurso metodológico experimental fundamentado em situações de ensino, com ênfase na sala de aula, onde se podem realizar sequências didáticas, as quais são concebidas, observadas e analisadas considerando duas tipologias: a microengenharia inerente aos fenômenos da sala de aula e a macroengenharia, que abrange os aspectos metodológicos e institucionais para a execução de situações didáticas (OLIVEIRA; ALVES, 2019).

Artigue et al. (1995) estrutura a ED em quatro fases consecutivas, sendo estas: análises preliminares, concepção e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e validação. Vale salientar que, a experimentação desta pesquisa tem suporte na TSD servindo como aparato para a análise dos dados.

Esta metodologia proporciona ao professor, através da investigação, a antecipação dos obstáculos e dificuldades que poderão ocorrer sob determinada situação de ensino. Segundo Pommer (2013) é possível obter essa antecipação, durante a análise preliminar. Na fase de experimentação serão propostas situações-problemas para os alunos. Para isso, é necessário ter variáveis didáticas relevantes que direcionem o processo de aprendizagem dos estudantes e permitam que o professor estimule a criatividade e a independência dos mesmos na formulação das soluções, partindo de seus conhecimentos prévios e intuitivos. Na fase da análise *a posteriori*, é feita uma comparação entre os objetivos definidos inicialmente e o desempenho dos alunos na situação que lhe foi apresentada, com o intuito de validar as hipóteses didáticas estabelecidas.

Por outro lado, a TSD é um modelo teórico, desenvolvida por Brousseau (1976), com o intuito de investigar situações que visam o conhecimento e as relações existentes entre a tríade de ensino (professor-aluno-saber). Segundo Oliveira e Alves (2019) a TSD “tem a

finalidade de estimular o cognitivo do aluno no sentido de desenvolver um conhecimento matemático teórico, através da realização das fases de ação, formulação e validação”.

Com isso, serão discutidas a seguir as fases da ED e os aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos, articulando com as etapas dessa metodologia abordada na pesquisa.

2.1.1 Análises Preliminares

Almouloud (2007) diz que a fase de Análise Preliminares é caracterizada como o primeiro nível de organização da ED, com o intuito de identificar os problemas relacionados ao ensino e aprendizagem do objeto de estudo. Com isso, é realizado um estudo bibliográfico, por meio de: artigos, teses, dissertações, revistas, dentre outras fontes sobre determinado conceito que o professor pretende ensinar, uma “análise epistemológica do ensino atual e seus efeitos, das concepções dos alunos, dificuldades e obstáculos, e análise do campo das restrições e exigências no qual vai se situar a efetiva realização didática” (ALMOULOU, 2007; SILVA, 2012). E ainda, acentua-se:

Nesta análise preliminar é feita uma revisão bibliográfica envolvendo as condições e contextos presentes nos vários níveis de produção didática e no ambiente onde ocorrerá a pesquisa, assim como uma análise geral quanto aos aspectos histórico-epistemológicos dos assuntos do ensino a serem trabalhados e dos efeitos por eles provocados, da concepção, das dificuldades e obstáculos encontrados pelos alunos dentro deste contexto de ensino (POMMER, 2013, p.23).

Segundo Santos e Alves (2017) esta fase parte de uma análise dos conteúdos que serão fragmentados em três dimensões inerentes ao objeto de pesquisa, fundamentando-se em um quadro teórico, são elas: Epistemológica, que está relacionada com o saber em estudo, podendo ser observada sua evolução histórica e os obstáculos relativos à sua natureza; Didática, relativa as características de ensino; Cognitiva, referente à análise de questões concernentes aos conhecimentos dos alunos sobre o objeto de estudo.

No âmbito epistemológico matemático, Bachelard (1996) afirma que "o conhecimento adquirido pelo esforço científico pode declinar. (...) A partir daí, a atividade espiritual se inverte e se bloqueia. Um obstáculo epistemológico se incrusta no conhecimento não questionado". Com isso, evidencia-se a importância do obstáculo epistemológico no que concerne ao processo histórico e evolutivo do conhecimento, porém eles são ignorados explicitamente, quando se discute o saber ensinado e/ou aprendido (ALMOULOU, 2007, p.139). Por outro lado, Oliveira (2018) ressalta que:

quando se busca compreender o conceito de obstáculos epistemológicos, tomando como referência o desenvolvimento dos conceitos matemáticos, se faz necessário levar em consideração a existência de dois processos distintos: o primeiro, que está associado à fase inicial da descoberta das noções e concepções matemáticas, e o segundo, que se refere à forma (redigida), na qual se representa os conceitos construídos. (OLIVEIRA, 2018)

Com isso, ressalta-se que esses obstáculos são importantes para o processo histórico e evolutivo do conhecimento. Além disso, quando se pretende compreender os obstáculos, é necessário que sejam levados em consideração dois processos distintos: descoberta de noções matemáticas e conceitos matemáticos. Visto isso, é importante evidenciar que o professor tenha um domínio sobre o conteúdo, uma vez que ele vai abordar a parte histórica do objeto estudado desde o início, e não apenas as fórmulas que serão utilizadas, isso mostra que o aluno poderá ter um aprendizado bem amplo.

Vale ressaltar que, a sequência adotada de forma generalizada epistemologicamente em torno de conceitos matemáticos, ela deve ser prevista a partir de casos particulares, demonstrada em um processo lento e levantando indagações, reflexões, avanços e retrocessos (PAIS, 2011, p.49). Por outro lado, é necessário realizar um longo processo de investigação em torno do objeto matemático, realizando assim um plano pedagógico. Com isso, Alves (2016c) apresenta que no plano pedagógico:

(...) vale a advertência do caráter epistemológico que reside em imprimir ao raciocínio do estudante, o caráter monossêmico e inferencial, característico das teorias formais. (...) Assim como os teoremas e as teorias fundantes, que conferem seu caráter de certeza, se mostram entrelaçadas com uma “teia epistêmica” de concepções e saberes que não são negligenciados pela DM (ALVES, 2016c, p.140-141).

Por fim, conclui-se que esta etapa permitirá ao professor/pesquisador fundamentar-se, de acordo com diversos fatores, que poderão ocorrer durante a vivência em uma determinada situação didática proposta. Portanto, esse levantamento de diversos obstáculos/dificuldades que impedirá a evolução da aprendizagem pelo estudante, é o que viabiliza a construção de uma boa situação de ensino. Assim, esta poderá proporcionar a superação desses obstáculos sendo determinante para a próxima fase (POMMER, 2013).

2.1.2 Conceção e Análise *a Priori*

Sobre a Conceção e Análise *a Priori* é caracterizada por Almouloud (2007) e Pais (2011) como a escolha de variáveis didáticas, sendo elas: macrodidáticas ou globais; ou microdidáticas ou locais. A primeira refere-se como a organização global da engenharia, já a segunda refere-se à organização de forma local, observando o que ocorre nas situações didáticas em sala de aula. Como relata Almouloud e Silva (2012):

O pesquisador, orientado pelas análises preliminares, delimita certo número de variáveis pertinentes ao sistema sobre os quais o ensino pode atuar, chamadas de variáveis de comando (microdidáticas ou macrodidáticas) (ALMOULOU; SILVA, 2012, p.26).

Para orientar a definição das variáveis Almouloud e Silva (2012) apresentam três pontos de extrema importância, são eles: descrever as escolhas efetuadas no local comparando-as com as situações didáticas; analisar a situação proposta para o aluno, em função das possibilidades de ação, seleção, decisão, controle e validação; prever possíveis comportamentos e tentar demonstrar como esta fase permitirá controlá-los. Com isso, o

professor/pesquisador deve internalizar a possibilidade de transformar o conhecimento científico em conteúdo a ser ensinado e devem ser elaboradas hipóteses didáticas e situações-problema que serão aplicadas aos alunos. Assim:

Essas situações-problema devem permitir ao aluno investigar e distinguir caminhos para resolver problemas, adquirir novos conhecimentos/saberes e estratégias de resolução. Essas situações-problema devem auxiliar o aluno na construção de conhecimentos e saberes, e no desenvolvimento de habilidades, como, por exemplo, saber ler, interpretar e utilizar representação matemática em demonstrações de propriedades e teoremas etc. (ALMOULOU, 2007, p.176)

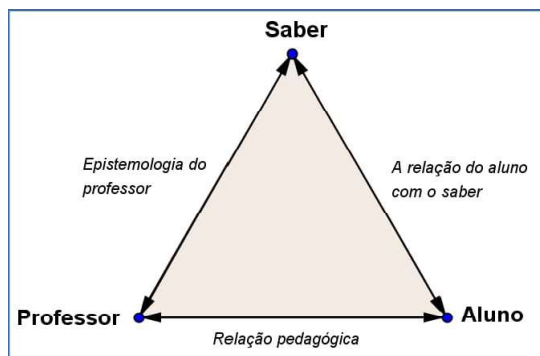
Portanto, o professor/pesquisador deve elaborar uma sequência de situações didáticas, com base nas variáveis tomadas, evidenciando o objeto de estudo que será explorado com o intuito de que o aluno solucione a situação proposta e reflita, discuta e evolua matematicamente. Caso aconteça algum entrave do aluno no momento da resolução do problema, o professor apresentará subsídios, uma vez que tal comportamento poderá ter sido previsto, para a condução e de forma construtiva, o aluno irá superá-los.

2.1.3 A Teoria das Situações Didáticas

A TSD foi iniciada na década de 60 na França, iniciada por Brousseau (1986) com vista em estudos sobre o construtivismo em pedagogia, oriundos da teoria da epistemologia genética de Piaget. Freitas (2015) ressalta que Brousseau ampliou ao trabalho didático da problematização matemática um tratamento científico, além de sugerir que também ocorre aprendizagem adaptando-se a um meio, mesmo cercado de controvérsias e desequilíbrios. Desse modo, verifica-se que essa teoria se contrapõe ao modelo da didática clássica, pautada num ensino que prioriza a exposição de conteúdos sistematizados e de forma axiomática.

A TSD é caracterizada como uma série de situações reprodutíveis, denominada como situações didáticas, que permitem momentos de interação entre: o professor, o aluno e o saber, no meio organizado (*milieu*) (ver Figura 1). Com isso, tem-se que "o objeto central de estudo nessa teoria não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática na qual são identificadas as interações estabelecidas entre professor, aluno e saber" (ALMOULOU, 2007, p.31-32). Assim, Freitas (2015) diz que essa teoria é considerada como uma referência no processo de aprendizagem matemática, pois envolve o aluno, o professor e o conhecimento matemático em torno da valorização dos saberes mobilizados pelo aluno e seu envolvimento na construção desses conhecimentos.

Figura 1 – Triângulo Didático.



Fonte: Brousseau (2008), adaptado.

Ao observar o triângulo, é notório que existem as relações entre saber-professor, professor-aluno e professor-saber. Neste triângulo, o meio (*milieu*) pode ser representado pelo interior do triângulo, na qual, o papel do meio é essencial durante as interações professor-aluno-saber, pois permitirá a evolução do conhecimento do aluno.

Evidencia-se a relação entre professor e aluno, denominada por relação pedagógica pode dar suporte ao aluno para que ele tenha condições de se apropriar da significação do saber matemático, sem esquecer que a metodologia empregada no momento da exposição do conteúdo e a estruturação das atividades que serão apresentadas nas situações didáticas pré-planejadas pelo professor, são fatores essenciais para despertar o interesse e o envolvimento do estudante vislumbrando um saber matemático construído e alicerçado cientificamente. Assim, uma situação didática foi definida por Brousseau (1986, apud Freitas, 2015), como:

[...] um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição [...]. (BROUSSEAU, 1986, p.8)

Outro fator a ser evidenciado é as noções de situações didáticas e adidáticas. Na situação didática Pommer (2013, p.16) salienta que: "as situações didáticas abrem a possibilidade do aluno vivenciar uma mudança do ponto de vista didático, o que favorece a construção de uma nova relação deste com o saber, relação que coloca o aluno numa postura construtiva: o autor do próprio conhecimento", ou seja, o aluno é motivado a participar do processo de aprendizagem, desenvolvendo determinada autonomia. Na situação adidática, a estratégia pedagógica não é revelada. Freitas (2010) explica a relevância dessa situação, assim tem-se:

As situações adidáticas representam os momentos mais importantes da aprendizagem, pois o sucesso dos alunos nelas significa que ele, por seu mérito, conseguiu sintetizar algum conhecimento. Nesse sentido, elas não podem ser confundidas com as chamadas situações não-didáticas, que são aquelas que não foram planejadas visando uma aprendizagem (FREITAS, 2010, p.86).

Relacionando as atividades de ensino com o saber matemático Brousseau (1986) decompôs a TSD em quatro fases distintas, a saber: ação, formulação, validação e institucionalização. As três primeiras fases são caracterizadas como situações adidáticas, uma vez que o aluno é o autor da sua aprendizagem e interage com o meio, já na institucionalização, o professor retoma a função principal. De acordo com Almouloud (2007), tem-se que a dialética de ação é definida como:

Uma boa situação de ação não é somente uma situação de manipulação livre ou que exija uma lista de instruções para seu desenvolvimento. Ela deve permitir ao aluno julgar o resultado de sua ação e ajustá-lo, se necessário, sem a intervenção do mestre, graças à retroação do *milieu*. Assim, o aluno pode melhorar ou abandonar seu modelo para criar um outro: a situação provoca assim uma aprendizagem por adaptação (ALMOULOU, 2007, p.37).

Desse modo, o aluno toma suas decisões por ações sobre o *milieu*. "Nesse momento, o aluno tem a liberdade de interagir sem precisar seguir regras, ou seja, o aluno pode refletir no resultado de sua ação e ajustá-lo"(OLIVEIRA, 2018, p.32).

Posteriormente tem-se a dialética de formulação, nesta fase são apresentadas interações existentes em determinada atividade proposta, resultando em uma estratégia de resolução, seja ela: escrita ou oral, em linguagem natural ou matemática. Essa situação é caracterizada pela troca de saberes entre alunos e outros indivíduos. Teixeira e Passos (2013) diz que nessa fase:

Ocorre troca de informação entre o aluno e o *milieu*, com a utilização de uma linguagem mais adequada, sem a obrigatoriedade do uso explícito de linguagem matemática formal, podendo ocorrer ambiguidade, redundância, uso de metáforas, criação de termos semiológicos novos, falta de pertinência e de eficácia na mensagem, dentro de retroações contínuas; os alunos procuram modificar a linguagem que utilizam habitualmente, adequando-a às informações que devem comunicar (TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p.165).

Durante a dialética da validação, o aluno deve provar a validade do modelo por ele criado, buscando justificativas mais precisas, como explicação, prova ou demonstração, que torne seu modelo pertinente perante ao grupo no qual o aprendiz está inserido. Segundo Teixeira e Passos (2013), tem-se que:

Os alunos tentam convencer os interlocutores da veracidade das afirmações, utilizando uma linguagem matemática apropriada (demonstrações); as situações de devolução, ação, formulação e validação caracterizam a situação didática, em que o professor permite ao aluno trilhar os caminhos da descoberta, sem revelar sua intenção didática, tendo somente o papel de mediador (TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p.165-166).

O docente, caso julgue necessário, pode solicitar mais explicações objetivando aceitar ou refutar a solução apresentada pelo discente. Portanto, é nesse momento que ocorre o debate entre os alunos e entre alunos e professor.

Na última fase, na dialética da institucionalização, segundo Almouloud (2007, p.40), nessa situação "o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber". E ainda, Teixeira e Passos (2013) diz:

Em que a institucionalização do saber é destinada a estabelecer convenções sociais e a intenção do professor é revelada. O professor, aí, retoma a parte da responsabilidade cedida aos alunos, conferindo-lhes o estatuto de saber ou descartando algumas produções dos alunos e definindo, assim, os objetos de estudo por meio da formalização e da generalização. É na institucionalização que o papel explícito do professor é manifestado: o objeto é claramente oferecido ao aluno (TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p.166).

Após a institucionalização, o saber torna-se oficial e os alunos podem adicioná-los a seus esquemas mentais, disponibilizando-os para serem utilizados na resolução de problemas matemáticos.

Portanto, a TSD concederá o estabelecimento de uma modelagem de situação didática que permite ao aluno participar de forma efetiva da elaboração e fixação da cognição, estabelecendo condições para se desenvolver novos conhecimentos embasados nas experiências adquiridas com o meio e com os integrantes das sessões didáticas em que foram participantes.

2.1.4 Experimentação

Na fase de Experimentação são colocadas em prática as situações didáticas, realizando a aplicação das situações-problema de acordo com os objetivos da pesquisa e, baseados na TSD, com o propósito de possibilitar a construção do conhecimento de forma autônoma pelo aluno, com o mínimo de interferência do professor, disponibilizando meios e ferramentas que lhe auxiliem nesta caminhada.

De acordo com Almouloud, Queiroz e Coutinho (2008) a fase da experimentação

"é o momento de se colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o se necessário, quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade, o que implica em um retorno à análise *a priori*, em um processo de complementação. Ela é seguida de uma fase de análise *a posteriori* que se apoia no conjunto de dados recolhidos durante a experimentação: observações realizadas sobre as sessões de ensino e as produções dos alunos em sala de aula ou fora dela. Esses dados são, às vezes, completados por dados obtidos pela utilização de metodologias externas: questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos, realizadas em diversos momentos do ensino"(ALMOULOU; QUEIROZ; COUTINHO, 2008, p.67-68).

E ainda, é nesta fase que deve ser estabelecido um contrato didático (BROUSSEAU, 1982), que consiste em um acordo pedagógico entre alunos e professor durante a interação no ambiente de ensino. Por fim, é realizada uma coleta de dados, "nesta coleta, foi

possível fazer uso de vários instrumentais, tais como relatórios, registros fotográficos, produções dos alunos, entrevistas, dentre outros recursos, a fim de formarmos o corpus da pesquisa"(SANTOS; ALVES, 2017). Vale salientar que, para que seja possível realizar a coleta de dados, foi apresentado o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (ver Apêndice E) para que os alunos voluntários tivessem livre adesão ao processo de pesquisa durante esta fase.

Em relação ao contrato didático este é considerado como uma relação que determina o que cada professor e aluno tem a responsabilidade de administrar. A respeito do contrato didático Brousseau (1986 apud D'AMORE, 2007a, p.71) relata que:

Em uma situação de ensino, preparada e realizada por um professor, o aluno tem, em geral, como tarefa, de resolver um problema (matemático) que lhe é apresentado, mas o acesso a essa tarefa é feito através da interpretação de perguntas colocadas, das informações fornecidas, das obrigações estabelecidas que são constantes da maneira de ensinar do professor. Esses hábitos (específicos) do professor esperados pelo aluno e os comportamentos do aluno esperados pelo professor constituem o contrato didático (BROUSSEAU, 1986 apud D'AMORE, 2007a, p.71).

Vale salientar que nem sempre o contrato didático é efetivado, pois pode ocasionar o desinteresse do aluno pela resolução das situações-problema propostas pelo docente, havendo assim, uma ruptura do contrato. Com isso, é realizada a fase de experimentação, permitindo que a pesquisa seja validada ou refutada na etapa final da ED.

2.1.5 Transposição Didática e Contrato Didático

Com o intuito de complementar a compreensão dos elementos epistemológicos, cognitivos e metodológicos discutidos nas seções anteriores, numa perspectiva da DM, apresentaremos as concepções sobre a transposição didática e o contrato didático. O conceito de Transposição Didática foi definido no ápice da DM, criando por Chevallard (1998) para analisar o sistema didático, em que afirma que:

Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado transposição didática (CHEVALLARD, 1998, p.39).

Podemos ainda expor o ponto de vista de D'Amore (2007b, p.225) em que ele afirma que "o conceito de transposição didática nasce da relatividade do saber no interior do qual se apresenta. Mais especificamente [...] à adaptação do conhecimento matemático para transformá-lo em conhecimento a ser ensinado. "Noronha (2020) relata que no processo de transposição didática ocorre uma transformação de conhecimentos, com o intuito de contribuir para o processo evolutivo e histórico do conhecimento científico.

Numa perspectiva didática, Almouloud (2007, p.113) relata que a transposição didática procura investigar epistemologicamente os "objetos de saber", que podem ser

classificados em: paramatemáticos e matemáticos. Esses objetos são aplicados para o estudo de outros objetos matemáticos, diferindo apenas que os objetos matemáticos "podem estudar também a si mesmo, e os objetos paramatemáticos, que apesar de não terem oficialmente a função de estudar objetos, possuem propriedades para resolver questões matemáticas" (OLIVEIRA, 2018, p.34-35).

2.1.6 Análise *a Posteriori* e Validação (Interna e Externa)

Com o propósito de consolidar a pesquisa, Almouloud e Silva (2012) relatam que na etapa final de análise *a posteriori*, é realizada a análise dos dados recolhidas durante a etapa de experimentação, tais como: relato de observações, registros fotográficos das produções escritas e gravações das entrevistas com os alunos. Segundo Pommer (2013), a análise *a posteriori*:

(...) se caracteriza pelo tratamento dos dados colhidos e a confrontação com a análise *a priori*, permitindo a interpretação dos resultados e em que condições as questões levantadas foram respondidas. Assim, é possível analisar se ocorrem e quais são as contribuições para a superação do problema, caracterizando a generalização local que permitirá a validação interna do objetivo da pesquisa (POMMER, 2013, p.26).

E ainda, é realizada a validação, sendo então concretizada a partir de uma comparação entre o que foi definido na análise *a priori* com o que foi coletado na análise *a posteriori*, para que sejam validadas as hipóteses durante a investigação. Todavia, a ED admite dois tipos de validação: interna e externa. Segundo Laborde (1997, p.105) a validação interna implica em “uma descrição genérica da classe ou das condutas e tipos de produção majoritária na classe, estudo de sua evolução e verificação de sua adequação no que concerne ao esperado dos estudantes”. A validação externa segundo Laborde (1997) assegura-se na comparação dos alunos antes e depois da sequência que foi aplicada, mais especificamente após a fase de experimentação, a sequência aplicada pode ter sido realizada por meio de entrevistas individuais, ou em grupo, ou questionários, bem como na comparação entre as produções dos alunos internos à sequência didática e dos alunos externos a esse contexto didático.

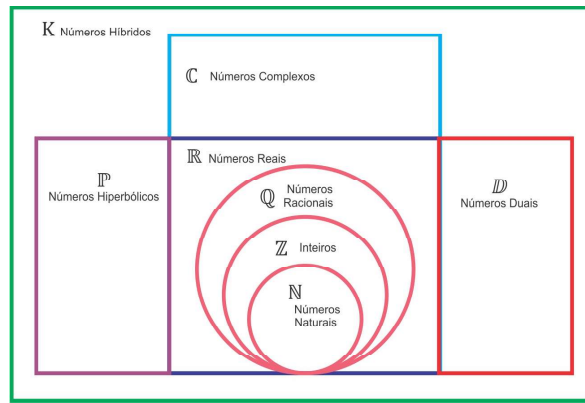
Portanto, para Pommer (2013, p.26) sobre o uso da ED como metodologia de pesquisa tem “a possibilidade de prover a fundamentação teórica para que o professor conheça o significado e amplie o leque de opções, formando elo de ligação entre a teoria e a prática de sala de aula”. Com isso, esta pesquisa abordou uma quantidade pequena de alunos participantes (8 alunos), os quais foram avaliados em um curto período de aplicação e avaliação, e as produções não foram comparadas com outras externas a esta pesquisa, sendo realizada a validação interna. Na seção seguinte é realizado o campo epistêmico-matemático da pesquisa, o qual foi posto para os alunos como forma de aula.

2.2 Números Híbridos e Hipercomplexos

Nesta seção apresentaremos o conjunto dos Números Híbridos, estudos sobre esse novo conjunto numérico foram realizados inicialmente por Özdemir (2018) e logo mais estudado por Carvalho (2019).

A partir de Özdemir (2018) é definida uma generalização dos complexos, hiperbólicos e números duais, nessa generalização ele apresenta um sistema de números que consiste na junção dos três sistemas numéricos já mencionados, como podemos ver na Figura 2, estando esses números combinados ou mistos entre si, onde foi nominado de NH, ao invés de números generalizados.

Figura 2 – Diagrama dos conjuntos numéricos.



Fonte: Elaborado pela autora.

A geometria dos NH, conhecida como geometria híbridiana é uma geometria mais geral, que surge a partir da combinação entre as geometrias dos planos euclidianos, de Minkowski e de Galileu. A geometria híbridiana pode ser classificada em esférica, hiperbólica e euclidiana de acordo com o tipo de número, sendo aqui estudada separadamente, sendo o plano híbridiano um subespaço bidimensional de $\mathbb{R}^4$.

Definição 1. O conjunto dos números híbridos é denotado por $\mathbb{K}$, assim (ÖZDEMİR, 2018):

$$\mathbb{K} = \{z = a + bi + c\varepsilon + dh : a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0, h^2 = 1, ih = -hi = \varepsilon + i\}$$

Este conjunto de números pode ser pensado como um conjunto com quatro elementos, onde "a" é a parte real, "b" é a parte complexa, "c" é a parte dual e a "d" é a parte hiperbólica que são definidos, respectivamente, como:

$$1 \leftrightarrow (1, 0, 0, 0), i \leftrightarrow (0, 1, 0, 0), \varepsilon \leftrightarrow (0, 0, 1, 0), h \leftrightarrow (0, 0, 0, 1)$$

A partir da definição podemos apresentar algumas propriedades e operações com os NH.

Considerando z_1 e z_2 dois NH, definidos como:

$$z_1 = a_1 + b_1i + c_1\varepsilon + d_1h,$$

$$z_2 = a_2 + b_2i + c_2\varepsilon + d_2h,$$

podemos efetuar as seguintes operações:

1. Dois NH são iguais se todos os seus componentes forem iguais, um por um;

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2$$

2. A adição de dois NH é definida somando seus componentes:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)\varepsilon + (d_1 + d_2)h$$

3. A operação de adição nos NH é comutativa e associativa;

4. A subtração de dois NH é definida subtraindo seus componentes:

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i + (c_1 - c_2)\varepsilon + (d_1 - d_2)h$$

5. A multiplicação de um escalar, $s \in \mathbb{R}$ por um NH, é definida multiplicando o escalar com os componentes do NH:

$$sz_1 = sa_1 + sb_1i + sc_1\varepsilon + sd_1h$$

6. Zero é o elemento neutro para a adição dos NH;

7. O elemento simétrico de z é $-z$, que é definido como tendo todos os componentes de z alterando seus sinais;

$$-z = -a - bi - c\varepsilon - dh$$

8. Com isso, tem-se que $(\mathbb{K}, +)$ é um grupo abeliano (comutativo).

O produto híbrido é obtido distribuindo-se os termos à direita, preservando a ordem de multiplicação das unidades e depois escrevendo os valores dos seguintes, substituindo cada produto de unidades pelas igualdades $i^2 = -1$, $\varepsilon^2 = 0$, $h^2 = 1$ e $ih = -hi = \varepsilon + i$. Usando essas igualdades, podemos encontrar as unidades mistas conforme a Tabela 1 e conseguimos realizar o produto de quaisquer duas unidades híbridas.

Tabela 1 – Tabela de multiplicação para $\mathbb{K}$.

$\cdot$	1	i	ε	h
1	1	i	ε	h
i	i	-1	$1 - h$	$\varepsilon + i$
ε	ε	$1 + h$	0	$-\varepsilon$
h	h	$-\varepsilon - i$	ε	1

Fonte: (ÖZDEMİR, 2018)

Özdemir (2018) ressalta que a Tabela 1 mostra que a operação de multiplicação nos NH não é comutativa, mas tem a propriedade de associatividade.

Carvalho (2019) tomou dois NH, $z_1 = a_1 + b_1i + c_1\varepsilon + d_1h$ e $z_2 = a_2 + b_2i + c_2\varepsilon + d_2h$, sendo $i^2 = -1$, $\varepsilon^2 = 0$ e $h^2 = 1$, o autor realizou a multiplicação desses dois NH. Assim pode-se observar que:

$$z_1.z_2 = (a_1 + b_1i + c_1\varepsilon + d_1h).(a_2 + b_2i + c_2\varepsilon + d_2h).$$

$$\begin{aligned}
z_1.z_2 &= a_1a_2 + a_1b_2i + a_1c_2\varepsilon + a_1d_2h + b_1a_2i + b_1b_2i^2 + b_1c_2i\varepsilon + b_1d_2ih + c_1a_2\varepsilon + c_1b_2\varepsilon i + \\
&\quad c_1c_2\varepsilon^2 + c_1d_2\varepsilon h + d_1a_2h + d_1b_2hi + d_1c_2h\varepsilon + d_1d_2h^2 \\
&= a_1a_2 - b_1b_2 + 0 + d_1d_2 + (a_1b_2 + b_1a_2)i + (a_1c_2 + c_1a_2)\varepsilon + (a_1d_2 + d_1a_2)h + \\
&\quad b_1c_2(1 - h) + c_1b_2(h + 1) + c_1d_2(-\varepsilon) + d_1c_2\varepsilon + d_1b_2(-\varepsilon - i) + b_1d_2(\varepsilon + i) \\
&= a_1a_2 - b_1b_2 + 0 + d_1d_2 + (a_1b_2 + b_1a_2)i + (a_1c_2 + c_1a_2)\varepsilon + (a_1d_2 + d_1a_2)h + \\
&\quad b_1c_2 - b_1c_2h + c_1b_2h + c_1b_2 - c_1d_2\varepsilon + d_1c_2\varepsilon - d_1b_2\varepsilon - d_1b_2i + b_1d_2\varepsilon + b_1d_2i \\
&= (a_1a_2 - b_1b_2 + d_1d_2 + b_1c_2 + c_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2 - d_1b_2 + b_1d_2)i + \\
&\quad +(a_1c_2 + c_1a_2 - c_1d_2 + d_1c_2 - d_1b_2 + b_1d_2)\varepsilon + (a_1d_2 + d_1a_2 - b_1c_2 + c_1b_2)h
\end{aligned}$$

Com isso pode-se apresentar um termo geral para o produto $z_1.z_2$, na qual z_1 e z_2 são dois NH, isto é:

$$z_1.z_2 = M + Ni + P\varepsilon + Qh,$$

onde $M = a_1a_2 - b_1b_2 + d_1d_2 + b_1c_2 + c_1b_2$, $N = a_1b_2 + b_1a_2 - d_1b_2 + b_1d_2$, $P = a_1c_2 + c_1a_2 - c_1d_2 + d_1c_2 - d_1b_2 + b_1d_2$ e $Q = a_1d_2 + d_1a_2 - b_1c_2 + c_1b_2$.

Além do mais pode-se definir o conjugado de um número híbrido $z = a + bi + c\varepsilon + dh$.

Definição 2. O conjugado de um número híbrido z , denotado por $\bar{z}$, é definido por:

$$\bar{z} = a - bi - c\varepsilon - dh.$$

Pode-se ainda apresentar as seguintes propriedades para o conjugado:

Propriedade 1. O conjugado da soma de dois NH é igual à soma dos seus conjugados.

Demonstração. Tomando dois NH: $z_1 = a_1 + b_1i + c_1\varepsilon + d_1h$ e $z_2 = a_2 + b_2i + c_2\varepsilon + d_2h$ e efetuando sua soma, temos:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)\varepsilon + (d_1 + d_2)h$$

E ainda, pela definição de conjugado, obtemos:

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i - (c_1 + c_2)\varepsilon - (d_1 + d_2)h \\ &= a_1 + a_2 - b_1i - b_2i - c_1\varepsilon - c_2\varepsilon - d_1h - d_2h \\ &= (a_1 - b_1i - c_1\varepsilon - d_1h) + (a_2 - b_2i - c_2\varepsilon - d_2h) \\ &= \overline{z_1} + \overline{z_2}.\end{aligned}$$

□

Propriedade 2. *O conjugado do conjugado de z é z .*

Demonstração. Dado $z = a + bi + c\varepsilon + dh$ e $\overline{z} = a - bi - c\varepsilon - dh$, tem-se que

$$\begin{aligned}\overline{\overline{z}} &= \overline{(a - bi - c\varepsilon - dh)} \\ &= a + bi + c\varepsilon + dh \\ &= z.\end{aligned}$$

□

Propriedade 3. *Dado um número complexo z , verifica-se a seguinte igualdade $z\overline{z} = \overline{z}z$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}z\overline{z} &= (a + bi + c\varepsilon + dh)(a - bi - c\varepsilon - dh) \\ &= a^2 - abi - ac\varepsilon - adh + bai - b^2i^2 - bci\varepsilon - bdi h + ca\varepsilon - cb\varepsilon i - c^2\varepsilon^2 - cdh\varepsilon + dah - dbhi - dch\varepsilon - d^2h^2 \\ &= a^2 - b^2i^2 - 2bci\varepsilon - 2bdi h - 2cdh\varepsilon - c^2\varepsilon^2 - d^2h^2 \\ &= (a - bi - c\varepsilon - dh)(a + bi + c\varepsilon + dh) \\ &= \overline{z}z\end{aligned}$$

□

Realizando o produto de um número híbrido z pelo seu conjugado $\overline{z}$, obtêm-se o caráter do número híbrido.

Definição 3. *O caráter do número híbrido, denotado por $C(z)$, é definido por (ÖZDEMİR, 2018):*

$$C(z) = a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2 = a^2 + b^2 - 2bc - d^2.$$

O número real $\sqrt{|C(z)|}$ será chamado de norma do número híbrido z .

Definição 4. A norma do número híbrido é definido por (ÖZDEMİR, 2018):

$$\|z\| = \sqrt{|z\bar{z}|} = \sqrt{|C(z)|} = \sqrt{|a^2 + b^2 - 2bc - d^2|}.$$

Esta definição da norma de um número híbrido é uma norma generalizada perfeitamente adequada às normas de um número complexo, hiperbólico ou dual. De fato,

1. Se z é um número complexo ($c = d = 0$), então tem-se:

$$\begin{aligned}\|z\| &= \sqrt{a^2 + (b - 0)^2 - 0 - 0} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2}\end{aligned}$$

2. Se z é um número hiperbólico ($b = c = 0$), então tem-se:

$$\begin{aligned}\|z\| &= \sqrt{|a^2 - 0 - 0 - d^2|} \\ &= \sqrt{|a^2 - d^2|}\end{aligned}$$

3. Se z é um número dual ($b = d = 0$), então

$$\begin{aligned}\|z\| &= \sqrt{|a^2 + (0 - c)^2 - c^2 - 0|} \\ &= \sqrt{|a^2 + c^2 - c^2 - 0|} \\ &= \sqrt{|a^2|} \\ &= |a|\end{aligned}$$

Definição 5. A representação vetorial de um número híbrido z é definido por (ÖZDEMİR, 2018):

$$\nu_z = (a, (b - c), c, d).$$

Por outro lado, um número híbrido tem o seu vetor híbrido no espaço de Minkowski $\mathbb{R}_1^3$, esse espaço é definido como o espaço que é usualmente o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ consistindo de vetores $\{(x_1, x_2, x_3) | x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$, mas munido do produto interno $\langle X, Y \rangle_1 = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

Definição 6. Para um número híbrido z tem-se o seu vetor híbrido, é um vetor do espaço de Minkowski $\mathbb{R}_1^3$, definido por (ÖZDEMİR, 2018):

$$\xi_z = ((b - c), c, d).$$

Pode ser escrito o caráter do vetor híbrido como:

$$C_\xi(z) = -(b - c)^2 + c^2 + d^2 = \langle \xi_z, \xi_z \rangle.$$

Definição 7. A norma do vetor híbrido, denotada por $\eta(z)$, é definida por (ÖZDEMİR, 2018):

$$\eta(z) = \sqrt{|C_{\xi(z)}|} = \sqrt{|-(b-c)^2 + c^2 + d^2|}.$$

Definição 8. O inverso do número híbrido $z = a + bi + c\varepsilon + dh$, com $\|z\| \neq 0$, é definido como:

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{C(z)}.$$

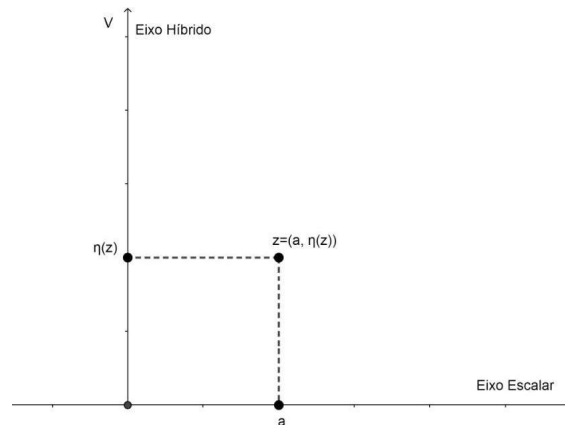
Özdemir (2018) menciona que qualquer número híbrido pode ser mostrado em um sistema de coordenadas bidimensional como o sistema de coordenadas cartesianas. A partir disso, apresentaremos um plano de coordenadas construído com o eixo real e o vetor híbrido. Assim, o valor da parte escalar de um número híbrido z corresponde ao eixo das abscissas e o valor de $\sqrt{|C_{\xi}(z)|} = \eta(z)$ corresponde ao eixo das ordenadas, o eixo V ou eixo híbrido é formado pelo vetor híbrido unitário $V = \frac{bi + c\varepsilon + dh}{\eta(z)}$.

O sistema de coordenadas criado desta forma é chamado de sistema de coordenadas híbridianas, sendo as coordenadas híbridas de um número híbrido dadas por:

$$Z = (x, y) = (a, \eta(z)) = (a, \sqrt{|-(b-c)^2 + c^2 + d^2|}).$$

Com isso, tem-se o sistema de coordenadas híbridianas:

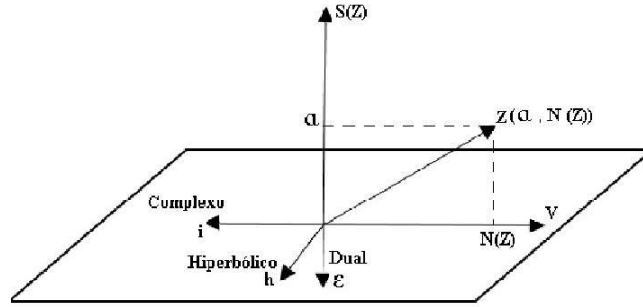
Figura 3 – Plano híbridiano.



Fonte: Elaborado pelo autor com base em Özdemir (2018).

Como os NH são vetores num espaço quadridimensional, a quarta dimensão será vista como uma dimensão auxiliar. E ainda, pode perceber-se que o plano que contém os vetores híbridos é um hiperplano ortogonal à dimensão auxiliar e que este é visto como o espaço tridimensional usual.

Figura 4 – Hiperplano híbridiano.



Fonte: (CARVALHO, 2019).

Quanto à representação matricial para um número híbrido destaca-se a importância dessa representação para facilitar a multiplicação de NH e provar muitas de suas características. Por outro lado, os NH também podem ser definidos considerando a representação matricial.

Com isso, Carvalho (2019) relata que um isomorfismo de matrizes bem particular dos números híbridos foi escolhido para ser o mais apropriado possível para sobrepor com as representações matriciais dos números complexos e hiperbólicos. Portanto, um sistema numérico híbrido se construiu baseando-se nas seguintes representações matriciais, que de forma sutil formam uma base para o conjunto de matrizes 2×2 .

$$1 \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; i \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \varepsilon \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; h \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Definição 9. A matriz $\varphi(z) \in M_{2 \times 2}$ é chamada de matriz híbrida correspondente ao número híbrido z .

De acordo com as matrizes dos números complexos, duais e hiperbólicos, temos as seguintes representações matriciais:

$$\varphi(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \varphi(i) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \varphi(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \varphi(h) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com isso, tem-se:

$$\varphi_z = \begin{bmatrix} a + c & b - c + d \\ c - b + d & a - c \end{bmatrix}$$

Assim, cada matriz 2×2 pode ser escrita como um composto de unidade, dual, complexo e hiperbólica. Observe que para os números duais usaremos a matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ao contrário de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ que é a forma matricial comum encontrada na literatura.

Teorema 1. : *O anel numérico híbrido $\mathbb{K}$ é isomorfo ao anel de matrizes reais $M_{2 \times 2}$.*

Demonstração. Definindo $\varphi : \mathbb{K} \rightarrow M_{2 \times 2}$ onde:

$$\begin{aligned}\varphi_z &= a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \varphi_z &= \begin{bmatrix} a+c & b-c+d \\ c-b+d & a-c \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Vamos mostrar que φ é um isomorfismo de anel. A partir da tabela 1 de adição e multiplicação pode ser visto que as igualdades são satisfeitas:

$$\begin{aligned}\varphi(z_1 z_2) &= \varphi_{z_1} \varphi_{z_2} \\ \varphi(z_1 + z_2) &= \varphi_{z_1} + \varphi_{z_2}\end{aligned}$$

Agora precisa-se verificar se φ é bijetiva.

Se $\varphi_{z_1} = \varphi_{z_2}$ para $z_1 = a_1 + b_1 i + c_1 \varepsilon + d_1 h$ e $z_2 = a_2 + b_2 i + c_2 \varepsilon + d_2 h$, então a igualdade das duas matrizes resulta em que $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$ e $d_1 = d_2$, ou seja, temos que $z_1 = z_2$ e φ é injetivo.

Por outro lado, para qualquer matriz real $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ há um número híbrido $z = \left(\frac{a+d}{2}\right) + \left(\frac{a+b-c+d}{2}\right)i + \left(\frac{a-d}{2}\right)\varepsilon + \left(\frac{b+c}{2}\right)h$, onde $\varphi_z = A$.

Então φ é um isomorfismo de anel. $\square$

Com essas quatro representações matriciais pode-se fazer a multiplicação dos NH. A partir da definição dos NH temos as igualdades $ih = -hi = \varepsilon + i$, que podem ser demonstradas a partir de operações com as suas formas matriciais.

$$\begin{aligned}\varphi(ih) &= \varphi(i)\varphi(h) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Efetuada a segunda operação, temos:

$$\begin{aligned}\varphi(-hi) &= -\varphi(h)\varphi(i) \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \varphi(-hi) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

E ainda,

$$\begin{aligned}
 \varphi(\varepsilon + i) &= \varphi(\varepsilon)\varphi(i) \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Assim, temos que as igualdades são válidas.

Teorema 2. *Seja A uma matriz real 2×2 correspondente ao número híbrido z , então temos que $C(z) = \det A$ e $\|z\| = \sqrt{|\det A|}$ (ÖZDEMİR, 2018).*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 \det A &= \begin{vmatrix} a+c & b-c+d \\ c-b+d & a-c \end{vmatrix} \\
 &= a^2 - ac + ac - c^2 - bc + b^2 - bd + c^2 - bc + cd - cd + bd - d^2 \\
 &= a^2 + b^2 - 2bc - d^2 \\
 &= |C(z)|
 \end{aligned}$$

□

Em Özdemir (2018) e Carvalho (2019) são apresentadas classificações para os NH. Um NH pode ser: elíptico (*complike*), hiperbólico (*hiperbolike*) ou parabólico (*duallike*). Essa classificação está inteiramente relacionada ao tipo do número híbrido C_ξ . E ainda, dependendo do sinal do caráter dos NH, este número pode ser classificado como: *spacelike*, *timelike* ou *lightlike*. Por fim, Özdemir (2018) e Carvalho (2019) apresentam estudos mais aprofundado sobre os NH em torno das representações polares dos NH, sua fórmula De Moivre, raízes desses números, classificação matricial e uma representação geométrica desses números a partir do *software* GeoGebra.

Por outro lado, temos que Harman (1981) apresentou inicialmente a relação recorrente bidimensional e tridimensional e identidades dos números de Fibonacci com o intuito de compreender aspectos relevantes sobre a complexificação do modelo de Fibonacci. Logo mais, em Horadam (1993), Oliveira, Alves e Paiva (2017), Oliveira (2018), Vieira, Alves e Catarino (2019a), são definidas algumas relações recorrentes n -dimensionais de outras sequências, as quais designam uma expressão generalizada para os números hipercomplexos.

Os números hipercomplexos são apresentados na forma $G = (n, n_2, n_3, \dots, n_n)$ com n variáveis. Para apresentar os números hipercomplexos é realizado um processo evolutivo desses números; a partir da sua forma unidimensional, é apresentada sua relação recorrente bidimensional, na qual, é inserida a unidade imaginária i e na relação recorrente

tridimensional, inserindo as unidades imaginárias i e j e assim sucessivamente até sua forma n -dimensional.

Definição 10. *Seja um número hipercomplexo $G = (n, n_2, n_3, \dots, n_n)$ com n variáveis, para $n \geq 2$. Vale, além da componente imaginária i , o seguinte conjunto de unidades imaginárias $(\mu_1 = j, \mu_2 = k, \dots, \mu_{n-2})$ (OLIVEIRA, 2018).*

Quanto às variáveis e sua notação, tem-se que $n = n_1$. Desse modo, são definidos os valores iniciais a seguir:

$$\begin{aligned}
 G(0, 0, 0, \dots, 0) &= 0 \\
 G(1, 0, 0, \dots, 0) &= 1 \\
 G(0, 1, 0, \dots, 0) &= i \\
 G(0, 0, 1, \dots, 0) &= j \\
 G(0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0) &= \mu_2 \\
 G(0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0) &= \mu_3 \\
 &\vdots = \vdots \\
 G(0, 0, 0, \dots, 0, 1) &= \mu_{n-2} \\
 G(1, 1, 1, \dots, 1) &= 1 + i + \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{n-2} \\
 \\
 G(0, 1, 1, \dots, 1) &= i + \mu_1 + \dots + \mu_{n-2} \\
 G(1, 0, 1, \dots, 1) &= 1 + \mu_2 + \dots + \mu_n \\
 G(1, 1, 0, 1 \dots, 1) &= 1 + i + \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_{n-2} \\
 &\vdots = \vdots \\
 G(1, 1, 1, \dots, 1, 0) &= 1 + i + \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{n-3}
 \end{aligned}$$

Com isso, os números da forma $G = (n, n_2, n_3, \dots, n_n)$ devem satisfazer às seguintes condições n -dimensionais de recorrência:

$$\begin{aligned}
 G(n+2, n_2, \dots, n_n) &= G(n+1, n_2, \dots, n_n) + G(n, n_2, \dots, n_n) \\
 G(n, n_2+2, \dots, n_n) &= G(n, n_2+1, \dots, n_n) + G(n, n_2, \dots, n_n) \\
 G(n, n_2, n_3+2, \dots, n_n) &= G(n+1, n_2, n_3+1, \dots, n_n) + G(n, n_2, n_3, \dots, n_n) \\
 &\vdots \\
 G(n, n_2, n_3, \dots, n_n+2) &= G(n, n_2, n_3, \dots, n_n+1) + G(n, n_2, n_3, \dots, n_n)
 \end{aligned}$$

2.3 Sequências Lineares Recursivas

Uma sequência linear recursiva é aquela que apresenta uma quantidade infinita de termos, sendo esses gerados por uma recorrência linear, chamada de fórmula de recorrência

que permite a realização do cálculo dos seus termos usando antecessores imediatos. Porém, essa recorrência não é a única forma de definição de sequências lineares e recursivas, sendo necessário ainda conhecer os seus elementos iniciais.

Em Lima et al. (2000) tem-se que uma sequência de primeira ordem onde possui uma recorrência de primeira ordem onde expressa x_{n+1} em função de x_n . Ela é dita linear se, e somente se, essa função for de primeiro grau. As sequências de segunda ordem, com coeficientes constantes, que tem recorrências da forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ com $q \neq 0$ pois caso $q = 0$ tem-se uma recorrência de primeira ordem. Para cada recorrência linear de segunda ordem homogênea, com coeficientes constantes, expressa como $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ esta será associada a equação do segundo grau, $r^2 + pr + q = 0$, denominada equação característica. De forma análoga tem-se as sequências de terceira ordem com coeficientes constantes que são recorrências da forma: $x_{n+3} + rx_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, em que $r, p, q \in \mathbb{Z}$ e com $p \neq 0$ ou $q \neq 0$. Cada recorrência linear de terceira ordem homogênea, com coeficientes constantes será associada a equação do terceiro grau $x^3 + rx^2 + px + q = 0$, denominada de equação característica.

De fato, para obter os termos de uma sequência desse tipo, faz-se necessário conhecer os seus antecessores, exceto pelo fato de utilizarmos alguns métodos matemáticos, os quais permitem a obtenção desses elementos sem haver a necessidade de aplicar a fórmula de recorrência, ou seja, através da matriz geradora ou outros mecanismos (ERCOLANO, 1979).

Larcombe, Bagdasar e Fennessey (2013) ressaltam a importância das sequências lineares recursivas pois são facilmente encontradas na área de matemática, principalmente na área de teoria dos números e podem ter aplicabilidade em várias áreas, tais como: biologia, física, ciência da computação entre outras. Vale salientar que, todas as sequências apresentadas neste trabalho serão de segunda e terceira ordem. E ainda, baseado no trabalho Alves et al. (2020), posteriormente apresentaremos brevemente a parte histórica de cada sequência que será abordada neste trabalho.

2.3.1 Sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci foi criada pelo matemático Leonardo Pisano (1180-1250) conhecido como Fibonacci ou “filho de Bonaccio” nascido em Pisa na Toscana (Itália) (ver Figura 5) (SANTOS, 2017). Posamentier e Lehmann (2007) relatam que Leonardo acumulou experiência nos campo da Aritmética e da Álgebra devido às suas viagens. Oliveira (2018) menciona que Fibonacci iniciou os seus estudos de matemática com professores islâmicos, ele teve a oportunidade de ter contato com os procedimentos matemáticos orientais, com os métodos algébricos árabes e os numerais indo-arábicos e ainda assimilou numerosas informações aritméticas e algébricas.

Esta sequência foi inserida na época da Idade Média na Europa, destacando o movimento das cruzadas, com o viés de planejar ataques contra os muçulmanos no Egito. Leonardo ainda adquiriu experiências nas áreas de Álgebra e Aritmética, sendo lembrado em razão do problema da reprodução dos coelhos imortais, gerando assim a sequência de Fibonacci (POSAMENTIER; LEHMANN, 2007).

Figura 5 – Leonardo Pisano (Fibonacci)



Fonte: Silva (2017, p.3).

Em 1200 ele voltou a Pisa e passou 25 anos escrevendo trabalhos com todo conhecimento adquirido em suas viagens. Fibonacci escreveu 5 obras, sendo quatro livros e uma carta e, no livro *Líber Abacci*, em 1202, ele escreve um dos problemas proposto: “Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?” (BOYER, 2006).

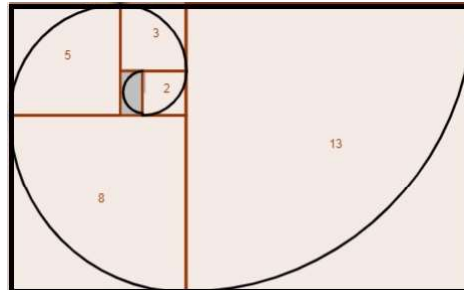
Ao responder essa pergunta encontra-se uma sequência de números, sequência esta que será chamada de sequência de Fibonacci, ela satisfaz a seguinte relação de recorrência: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, com $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$ os seus valores iniciais (ALVES, 2016b). A sua equação característica é dada por $x^2 - x - 1 = 0$, onde a sua solução positiva é dada pelo número de ouro (aproximadamente 1,61) e a outra solução é dada por um número negativo. O número de ouro representa ainda a relação de convergência entre os termos vizinhos desta sequência. Temos então que a situação-problema dos coelhos, a sequência e a recursividade matemática marcam a gênese do Método de Fibonacci.

Por outro lado, Alfred (1965), Hoggatt (1969), Vorobiov (1974) e Koshy (2001) apresentam estudos, essencialmente matemáticos, nos quais são discutidas algumas de suas propriedades elementares. Uma discussão apresentada é a matriz de Fibonacci, na qual a matriz Q elevada a n -ésima potência, obtêm-se os termos de Fibonacci. Assim, tem-se que: para $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se que $Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Existe uma representação geométrica desses números, onde são inseridos dois

quadrados com lados inicialmente iguais a 1, com isso, é inserido um novo quadrado de acordo com o maior lado do polígono formado com a junção dos dois quadrados iniciais, dando o nome de espiral de Fibonacci ou espiral áurea de Fibonacci, como mostrado na Figura 6.

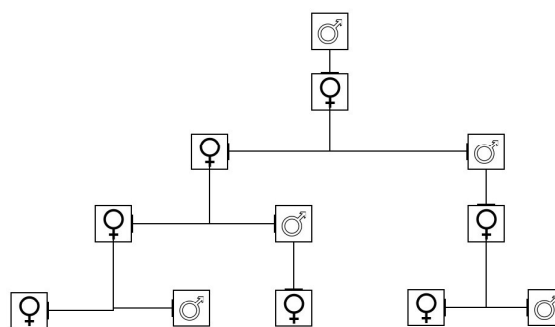
Figura 6 – Espiral de Fibonacci.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Inúmeros são os problemas e as aplicações dessa sequência, existindo ainda além do problema dos coelhos imortais, a questão dos zangões. Segundo Waldschmidt (2009), as abelhas masculinas (zangões) nascem de ovos não fertilizados. Já as abelhas femininas nascem de ovos fertilizados. Assim, os machos têm apenas uma mãe, mas as fêmeas têm mãe e pai. Quando uma fêmea nasce, ela já traz consigo um óvulo masculino. Com isso, pode-se construir o esquema representativo dessa reprodução (ver Figura 7).

Figura 7 – Árvore de reprodução dos zangões e abelhas.

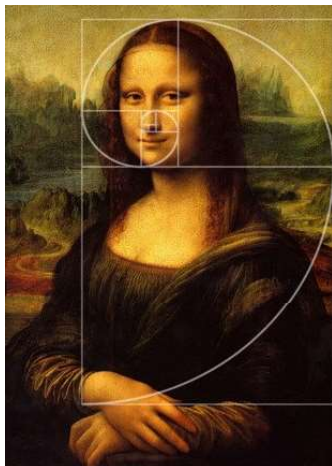


Fonte: Elaborado pelo autor.

Percebe-se assim, que na primeira geração, temos apenas 1 zangão, já na segunda geração, temos uma fêmea e um óvulo do zangão. Na terceira geração, temos uma fêmea e um zangão, mais um óvulo. Com isso, podemos perceber que para os zangões, temos a presença de 1, 1, 2, 3, 5. Para as abelhas fêmeas, temos: 0, 1, 1, 2, 3, representando assim, os números de Fibonacci.

Os números de Fibonacci estão presentes em diversos locais, tais como: nas folhas das árvores, nas pétalas das rosas, nas conchas espiraladas dos caracóis e nas galáxias. Belini (2015) ainda apresenta a presença do espiral de Fibonacci no rosto da Mona Lisa (ver Figura 8). O retângulo perfeito é formado pela criação de retângulos nas dimensões correspondentes de 1,61, a partir de cada número de Fibonacci descendente (8, 5, 3, 2, 1, etc.), este espiral vem tocando cada lado no retângulo perfeito.

Figura 8 – Rosto de Mona Lisa e o espiral de Fibonacci.



Fonte: Google Imagens.

Pode-se perceber que primeiramente o pintor Leonardo da Vinci enquadrou a mulher na pintura, seguindo insere o espiral começando no pulso esquerdo e depois viaja para o fundo da imagem, o que contrasta com a beleza do rosto. Em seguida, desliza sobre a testa e continua girando até ao queixo. Ele sobe, passando pela leve covinha. Por fim, completa uma rotação que termina na ponta do nariz.

Com isso, pode-se perceber a importância desses números e a partir desta sequência foram apresentadas diversas outras, como poderemos ver a seguir na sequência de Lucas.

2.3.2 Sequência de Lucas

A sequência de Lucas foi criada pelo matemático francês Édouard Anatole Lucas (1842-1891) (ver Figura 9), em que realizou algumas contribuições matemáticas como a conhecida torre de Hanoi, proporcionando métodos para o processo de ensino de função exponencial entre outros assuntos matemáticos. Lucas foi professor de matemática das escolas Lycée of Moulins, Lycées Saint-Louis e Lycée Charlemagne. Serviu ainda o exército na artilharia após a França ter sido derrotada durante a Guerra Franco-Prussiana .

Édouard Anatole Lucas provou uma forma recíproca do teorema de Fermat e vários testes para os números primos baseado em sequências lineares e recorrentes, sendo

portanto capaz de estabelecer uma relação do décimo segundo número primo de Mersenne: $2^{127} - 1 = 170141183460460469231687303715884104727$, um número de 39 dígitos que permaneceu como sendo o maior número primo por muitos anos, e sendo o maior número primo encontrado sem o auxílio de recursos computacionais e tecnológicos (SILVA, 2017).

Figura 9 – Édouard Anatole Lucas.



Fonte: Silva (2017, p. 21).

Em 1876, motivado por assuntos de divisibilidade e fatoração, estudou a sequência de Fibonacci e em uma de suas generalizações, criou a sequência de Lucas, onde alterou apenas os dois valores iniciais para 2 e 1, permanecendo com a mesma recorrência. Os números de Lucas formam uma sequência de segunda ordem, linear e recorrente, possuindo a sua fórmula de recorrência $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ com $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$. A sua equação característica é idêntica a de Fibonacci, apresentando a mesma relação com o número de ouro.

Semelhantemente à sequência de Fibonacci, Silva (2017) apresenta uma representação matricial de Lucas, onde a matriz G elevada à n -ésima potência dá origem aos termos dessa sequência, observe: para $G = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, tem-se que $G^n = \begin{bmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{bmatrix}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

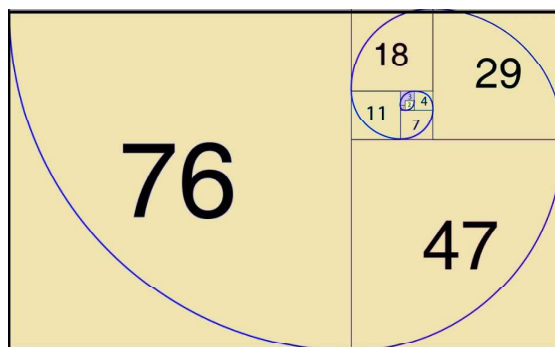
Lucas possui ainda um problema de análise combinatória, dado pela seguinte questão: "de quantas maneiras n casais podem sentar-se em $2n$ cadeiras diferentes em torno de um círculo de modo que pessoas do mesmo sexo não se sentem juntas e que nenhum homem fique ao lado de sua mulher?" (PONTES; GOBBI; SOUSA, 2018). Formulado primordialmente por Peter Guthrie Tait (1831-1901) e alguns anos depois por Lucas, em 1891, porém em 1943, Irving Kaplansky (1917-2006) encontrou uma solução para o problema e publicou seu trabalho (KAPLANSKY, 1943).

A resolução desse problema é dada através da contagem do número de maneiras que existem ao sentar uma certa quantidade de casais em torno de uma mesa redonda, sendo

alternado homens e mulheres para que nenhum casal fique ao lado do seu par. Baseado nos lemas de Kaplansky, Ferraz (2017) realizou um estudo em torno deste problema, explorando as resoluções existentes, fundamentadas em teoremas e propriedades matemáticas.

Uma representação geométrica desses números é dada pelo espiral de Lucas, como mostrado na Figura 10, de modo similar ao espiral de Fibonacci, porém com os quadrados iniciais de lados, respectivamente 2 e 1. Na próxima seção será apresentada uma outra

Figura 10 – Espiral de Lucas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

sequência gerada a partir da sequência de Fibonacci, diferindo o primeiro coeficiente da fórmula de recorrência, esta sequência é denominada por sequência de Pell.

2.3.3 Sequência de Pell

O nome Pell da sequência de Pell veio em função ao matemático inglês John Pell (1611 - 1685) (ver na Figura 11), Malcolm (2000) afirma que Pell é conhecido por ser um dos matemáticos mais enigmáticos do século XVII por ser extremamente reservado. Pell adquiriu crédito pelo desenvolvimento do estudo das equações de Pell ou equações diofantinas, porém Malcolm (2000) afirma que provavelmente Pell não trabalhou com essa equação, pode-se descrever essa equação por $x^2 - Ay^2 = 1$, sendo x, y , números inteiros e A é um inteiro positivo que não seja um quadrado perfeito, as equações diofantinas são equações algébricas com uma ou mais incógnitas, com coeficientes inteiros, cujas soluções procuradas são sempre inteiras (COURANT; ROBBINS, 2000).

John Pell era respeitado como um matemático competente e se tornou conhecido muito por suas correspondências com outros sábios europeus e atividades de diversas áreas. Malcolm (2000) pontua que John Pell vivia em condições difíceis, constantemente sem dinheiro e recursos, sendo preso duas vezes por dívidas não quitadas, isso seria uma possível explicação para tão poucas publicações em seu nome. Mas também, Walker (2011) relata que Pell preferia permanecer no anonimato, assim suas publicações não se evidenciaram tanto quanto os trabalhos de seus contemporâneos. Por fim, Gullberg

(1997) esclarece que "embora a sequência de Pell foi nomeada após sua morte, nós não encontramos nenhuma outra boa publicação que enfatize sua real e extensiva contribuição". São quase inexistentes as publicações e relatos sobre sua competência, por isso torna difícil determinar especificamente quais contribuições foram suas (MALCOLM, 2000).

Figura 11 – John Pell (1611-1685).



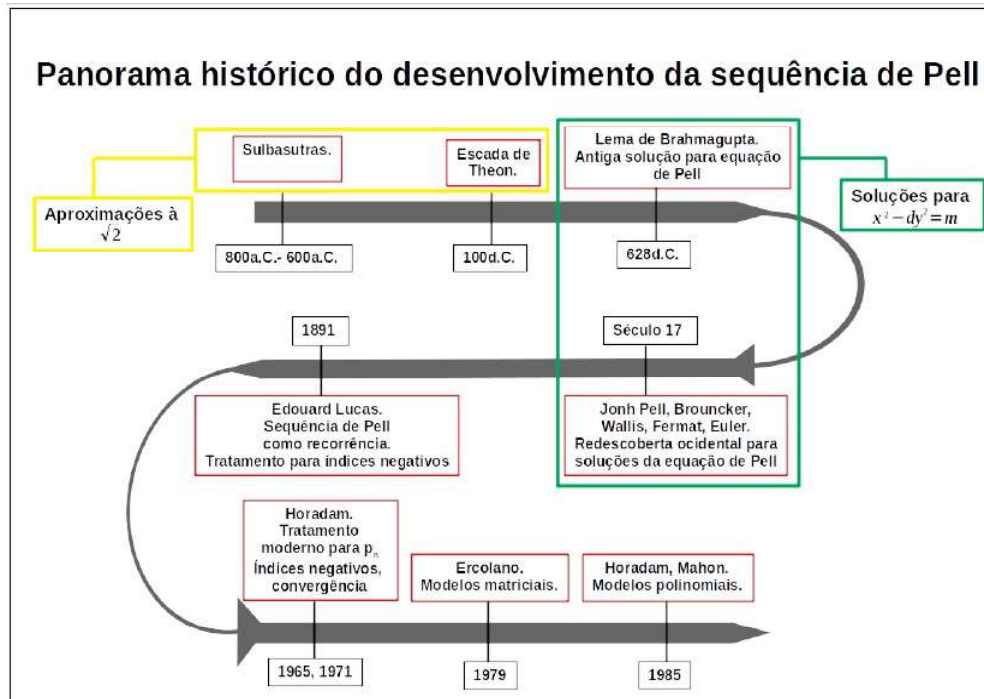
Fonte: Walker (2011, p.150).

Malcolm (2000) diz que “Pell manifestou fidelidade aos métodos didáticos apregoados por Comenius, relativamente ao qual, as crianças devem progredir, em níveis crescentes de gradação, usando em cada etapa, um precognição existente para o ulterior”. Walker (2011) diz que Pell dirigiu uma atenção a mais a certos problemas envolvendo tábuas de quadrados, somas de quadrados, primos e compostos, logaritmos e antilogaritmos, etc. No trabalho mais conhecido de Pell, denominado "*An introduction to Algebra*", ele explica e discrimina regras para o manuseio e simplificação de equações (ALVES, 2016d).

Noronha (2020) relata que sequência de Pell já era conhecida na antiguidade grega por volta de 100 d.C., como parte de um antigo algoritmo para criar sucessivas aproximações à $\sqrt{2}$, conhecido como escada de Theon. Esta sequência possui a sua fórmula de recorrência $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ com $P_0 = 0$ e $P_1 = 1$, e ainda, tem-se que ela pode ser trabalhada tanto na sua versão clássica, quando $n \in \mathbb{N}$, quanto na sua versão estendida $n \in \mathbb{Z}$ (KOSHY, 2014). Esta sequência apresenta uma equação característica definida por $x^2 - 2x - 1 = 0$ onde uma raiz é positiva e conhecida como número de prata (aproximadamente 2,41) e sua outra raiz é um número negativo. Este número de prata representa ainda a relação de convergência entre os termos vizinhos da sequência.

E ainda, Noronha (2020) apresenta um diagrama com a linha do tempo contendo o desenvolvimento da sequência de Pell (ver Figura 12).

Figura 12 – Construção do modelo matemático para a sequência de Pell, sob o ponto de vista histórico.



Fonte: (NORONHA, 2020, p.114).

Por fim, Noronha (2020) relata ao observar os autores Ercolano (1979) e Horadam e Mahon (1985) que se constata que o modelo matricial da sequência de Pell pode indicar um obstáculo profundo na detecção e tratamento das matrizes. Contudo, atualmente tem-se a abordagem matricial da Sequência de Pell, na qual Bicknell (1975) e Ercolano (1979) afirmam que os números de Pell podem ser gerados também através da sua potência. Com isso, tem-se que: $R = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se que $R^n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

2.3.4 Sequência de Leonardo

Poucos são os trabalhos referentes à sequência de Leonardo, conhecida também como os números de Leonardo, destacando portanto os trabalhos de Shannon (2019), Catarino e Borges (2019) e Vieira, Alves e Catarino (2019a) que apresentam esta sequência que possui a recorrência $Le_n = Le_{n-1} + Le_{n-2} + 1$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ com $Le_0 = Le_1 = 1$. Comparando-a com a sequência de Fibonacci, pode-se perceber que foi adicionado o valor 1 no final da recorrência, além dos seus valores iniciais serem iguais a 1, e não mais 0 e 1. As propriedades numéricas desses números são análogas às propriedades de Fibonacci. Alves et al. (2020) acredita que esses números foram estudados por Leonardo de Pisa, conhecido por Leonardo Fibonacci, não sendo, no entanto, comprovado em nenhum trabalho na literatura, devido a escassez de pesquisas referentes a essa sequência.

Catarino e Borges (2019) definem ainda uma outra relação de recorrência com base nos números de Fibonacci, sendo portanto: $Le_n = 2F_{n+1} - 1$, $n \geq 0$, e ainda, no mesmo trabalho foi definida ainda uma nova relação de recorrência, em que: $Le_n = 2Le_{n-1} - Le_{n-3}$, $n \geq 3$, onde é mantido os valores iniciais.

A equação característica dessa sequência pode ser escrita com base na recorrência anterior, transformando-a numa sequência de terceira ordem. Assim temos $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$, em que apresentam três raízes reais, sendo uma igual a 1 e as outras duas iguais as raízes da equação característica de Fibonacci. Vale ressaltar que, esses números de Leonardo possuem a sua relação de convergência entre os termos vizinhos da sequência como sendo o número de ouro (aproximadamente 1,61), assim como o resultado de uma das suas raízes reais.

Na literatura pouco se sabe sobre a sequência de Leonardo, sua forma matricial é apresentada por Vieira et al. (2020, em prelo), sendo definida como:

$$\text{Para } K = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [Le_3 \quad Le_2 \quad Le_1], \text{ tem-se que:}$$

$$K^n = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n = [Le_{n+2} \quad Le_{n+1} \quad Le_n], n \geq 1.$$

Devido a escassez de informações em torno desta sequência, torna-se necessário realizar investigações e apresentar mais informações sobre os números de Leonardo.

2.3.5 Sequência de Jacobsthal

Baseada na recorrência da sequência de Fibonacci, podemos então alterar o segundo coeficiente da fórmula para 2 ($y = 2$), e permanecendo com os mesmos valores iniciais, resultando em: $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ com $J_0 = 0$ e $J_1 = 1$. Essa sequência é conhecida como sequência de Jacobsthal, apresentando diversas aplicações, das quais podemos exemplificar a utilização desses números na área de computação em diretivas para alterar o fluxo de execução de um programa.

Recebendo este nome como referência ao matemático, lembrado na Figura 13, Ernest Erich Jacobsthal (1882-1965), especialista em Teoria dos Números e ex-aluno de Ferdinand G. Frobenius, sendo um dos primeiros a estudar os polinômios de Fibonacci (SIEGMUND-SCHULTZE, 2009). No trabalho de Alves (2017), o autor recorda que Jacobsthal fugiu de Berlim, na Alemanha, para Normandia e Suíça em 1939 e 1943.

Figura 13 – Ernst Erich Jacobsthal.



Fonte: Siegmund-Schultze (2009).

Muitas são as propriedades matemáticas que estão sendo desenvolvidas sobre esta sequência, destacando a sua equação característica para este trabalho como sendo $x^2 - x - 2 = 0$, onde temos duas raízes reais sendo 2 e -1 , em que a raiz igual a 2 representa também a relação de convergência entre os termos vizinhos da sequência.

Esta sequência é considerada como uma particularidade da sequência de Lucas, sendo bastante utilizada para resolver problemas referentes ao conteúdo de análise combinatória. Assim, temos um problema proposto e resolvido por Craveiro et al. (2004) em relação ao ladrilhamento, em que utilizam os números de Jacobsthal: *a quantidade de ladrilhamentos q_n que é possível calcular para um retângulo $(3 \times n)$ usando dois tipos de ladrilhos, sendo um deles de dimensões $(1 \times t)$, na cor branca e o outro (2×2) na cor vermelha, obedece aos números de Jacobsthal. Definindo $q_0 = 0$, para um retângulo (3×1) , temos $q_1 = 1$, para um retângulo (3×2) , $q_2 = 3$, isto é, três tipos de ladrilhamentos possíveis, para um retângulo (3×3) , $q_3 = 5$, seguindo a sequência de Jacobsthal.*

As investigações de Koken e Bozkurt (2008) apresentam uma discussão que relaciona os números de Jacobsthal com matrizes. Com isso, tem-se que: para $J = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se que $J^n = \begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{bmatrix}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Podemos encontrar uma nota histórica em Horadam (1996), na qual, relata que a origem dos números de Jacobsthal 1, 3, 5, 11, 21 precede o artigo de Jacobsthal (1919). De fato, Sloane (1973) apresenta esses números, a lei de recorrência e fórmula de Binet, em um cenário trigonométrico, no *Nouvelle Correspondance Mathématique*, Vol. 6 (1880), página 146, estando associado ao nome Brocad. Tem-se ainda que, "outra referência, mas muito tarde, é a página 12 do vol. 26 (1963) de Eureka, o jornal dos Archimedians (Cambridge University Mathematical Society)" (HORADAM, 1996, p. 53). Sendo o primeiro termo da sequência igual a 1 e os números de Jacobsthal ocorre em um contexto puramente recreativo, por exemplo: dados os seis primeiros termos diferentes de zero, determine os

próximos dois números na sequência.

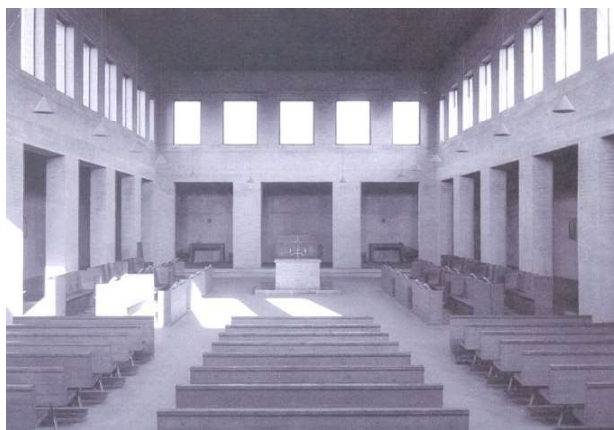
Por fim Horadam (1996) relata que os polinômios de Jacobsthal são extensões algébricas naturais de suas contrapartes numéricas. Sabendo a longa história de muitas idéias matemáticas, possivelmente o primeiro uso dos números de Jacobsthal não precede o ano de 1880.

2.3.6 Sequência de Padovan

Com o fim da Segunda Guerra Mundial, em 1945, houveram grandes perdas, destacando para este trabalho, as destruições das igrejas. À vista disso, o arquiteto Hans Van Der Laan (1904-1991) e seu irmão, iniciaram o processo de reconstrução dessas igrejas, acabando por descobrir novo padrão de medida dado por um número irracional (VOET; SCHOONJANS, 2012). Este número foi estudado primeiramente pelo matemático francês Gérard Cordonnier, denominando-o de número radiante, por isso esta sequência também é conhecida como sequência de Cordonnier. Porém este estudo sofreu uma interrupção devido ao seu falecimento. Assim, com o valor de aproximadamente 1,32, este número é conhecido como número plástico ou número radiante, considerado ideal para realizar trabalhos em escalas geométricas e objetos espaciais. Vale salientar que o arquiteto Richard Padovan, considera esta sequência ainda como sendo uma descoberta de Hans Van Der Laan.

O número plástico e o número de ouro são das únicas duas dos números mórficos (SPINADEL; BUITRAGO, 2009; FERREIRA, 2015), onde a primeira representa a relação de convergência entre os termos vizinhos da sequência de Padovan, e o segundo a mesma relação para a sequência de Fibonacci. Temos então na Figura 14, uma das igrejas reconstruídas com base na propriedade deste número, mostrando assim uma aplicação do número plástico.

Figura 14 – Igreja reconstruída após a Segunda Guerra Mundial

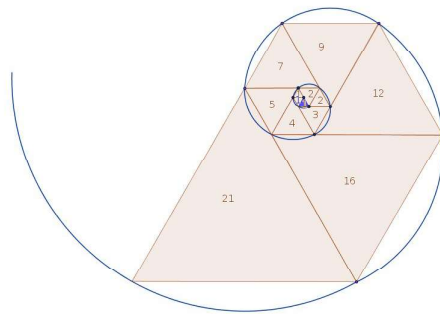


Fonte: (MAROHNIĆ; STRMEČKI, 2013).

A partir de estudos relacionados ao número plástico, o arquiteto italiano Richard Padovan (1935 -) criou a sequência de Padovan. Nascido em Pádua, esta sequência é uma espécie de prima da sequência de Fibonacci, sendo portanto, de terceira ordem e apresentando a sua fórmula de recorrência como: $Pd_n = Pd_{n-2} + Pd_{n-3}$, $n \geq 3$ com $Pd_0 = Pd_1 = Pd_2 = 1$. A sua equação característica é dada por $x^3 - x - 1 = 0$, onde a única solução real é dada pelo número plástico, e as outras duas raízes são números complexos e conjugados.

Existe ainda uma representação geométrica para esses números, dada pelo espiral de Padovan (ver Figura 15). Segundo Vieira e Alves (2019) este espiral é composto pela justaposição de triângulos equiláteros, começando por um triângulo de lado 1, respeitando uma regra de construção característica, adicionando um novo triângulo equilátero ao maior lado do polígono formado.

Figura 15 – Espiral de Padovan



Fonte: Elaborado pela autora.

E ainda, pode-se apresentar a representação matricial da sequência de Padovan que é uma matriz 3×3 que foi definido de acordo por Sokhuma (2013), Seenukul (2015) e Yilmaz e Taskara (2013) onde eles "atrasam" a sequência alterando os valores iniciais para 0,0,1.

Com isso, tem-se: para $L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se que $L^n = \begin{bmatrix} Pd_{n-1} & Pd_{n+1} & Pd_n \\ Pd_n & Pd_{n+2} & Pd_{n+1} \\ Pd_{n+1} & Pd_{n+3} & Pd_{n+2} \end{bmatrix}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

E ainda, Kaygısız e Sahin (2014) apresentam os números polinômiais de Padovan e apresentam algumas representações determinantes e permanentes dos polinômios associados a esses números usando várias matrizes de Hessenberg.

2.3.7 Sequência de Perrin

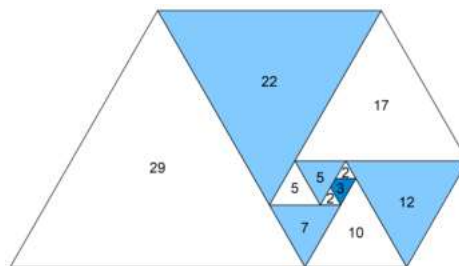
A sequência de Perrin, a qual o nome é atribuído ao francês Olivier Raoul Perrin (1841-1910) um engenheiro que nas horas vagas gostava de produzir trabalhos científicos. Ele tinha uma preferência maior e uma inclinação especial para a área da matemática.

Muitas de suas memórias, que revelam uma grande profundidade de espírito, foram objetos de comunicações muito apreciadas na Academia de Ciências ou em outras sociedades instruídas, rendendo distinções lisonjeiras.

Em 1876 esta sequência foi mencionada implicitamente por Édouard Lucas, conhecido por criar o jogo matemático torre de Hanói, a sequência de Lucas e os números de Lucas (ADAMS; SHANKS, 1982). Porém, em 1899, François Perrin definiu a sequência de Perrin possuindo grande importância, em particular, em teoria dos grafos, sendo portanto utilizada para descobrir as coordenadas de táxis em redes urbanas de forma confidencial (SUGUMARAN; RAJESH, 2017). A sequência é definida pela fórmula de recorrência $Pe_n = Pe_{n-2} + Pe_{n-3}$, $n \geq 3$ com $Pe_0 = 3$, $Pe_1 = 0$ e $Pe_2 = 2$, diferenciando da sequência de Padovan apenas em relação aos seus termos iniciais. A equação característica desses números é idêntica a equação característica de Padovan, visto que a sua fórmula de recorrência é a mesma. Esta sequência possui a relação de convergência entre os termos vizinhos, o número plástico, que tem um valor de aproximadamente 1,324718, ressaltando que essa constante também tem relação com os números de Padovan, uma vez que a sequência de Perrin pode ser obtida pela sequência de Padovan.

Uma representação geométrica para essa sequência é dada através do espiral de Perrin, de modo similar ao espiral de Padovan, possuindo os triângulos equiláteros iniciais de lados 2, 3, 2 e 5, adiantando a sequência de Perrin. Assim, de acordo com o maior lado do novo polígono formado, será inserido um novo triângulo equilátero com esse novo valor, formando assim o espiral de Perrin, com os seus respectivos termos da sequência, como mostrado na Figura 16. Tendo origem no espiral de Padovan, esta representação da sequência de Perrin, sofre uma pequena modificação nos seus valores iniciais (Knuth, 2011).

Figura 16 – Espiral de Perrin



Fonte:(KNUTH, 2011).

A representação matricial desses números é dada por Yilmaz e Taskara (2013) e Mangueira et al. (2020c) realiza uma generalização e encontrou mais seis matrizes relacionadas a essa sequência, sendo utilizado o mesmo princípio realizado para a obtenção da matriz de Leonardo, o qual foi multiplicado um vetor com os valores iniciais de sua

respectiva sequência, temos então a construção da forma matricial da sequência de Perrin.

Para $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Pe_3 & Pe_2 & Pe_1 \end{bmatrix}$, tem-se que:

$$P^n = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} Pe_{n+2} & Pe_{n+1} & Pe_n \end{bmatrix}, n \geq 1.$$

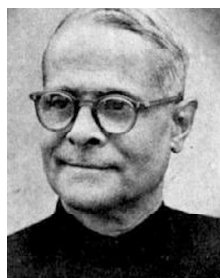
Devido a similiariedade desta sequência com a sequência de Padovan, muitos autores apresentam estudos referentes as duas sequências simultaneamente, mudando apenas os termos iniciais. Como foi realizado em Kaygısız e Sahin (2014), na qual, o autor apresenta os números polinomiais de Perrin e apresenta representações determinantes e permanentes dos polinômios associados a esses números usando várias matrizes de Hessenberg.

2.3.8 Sequência de Narayana

A sequência de Narayana foi introduzida pelo matemático indiano Narayana Pandita (1340 - 1400) (ver Figura 17) autor da obra Ganita Kaumudi e um tratado algébrico chamado Bijaganita Vatamsa (PUTTASWAMY, 2012, p.541). Kim (2009) relata que seus textos foram os tratados de matemática sânscrito mais importante depois dos de Bhaskara II, além da escola de Kerala (SARMA, 1972).

Kim (2009, p.208) comenta que o estudo de permutações e combinações são muito abrangentes. Por outro lado, Kim (2009, p.208-209) ainda relata que "Narayana parece ter sido um dos primeiros autores a introduzir quadrados mágicos como um tópico na aritmética indiana, embora eles certamente fossem conhecidos" e Katz e Imhausen (2007) confirmam que Narayana fez a primeira introdução dos quadrados mágicos em matemática. Katz e Imhausen (2007) relatam que entre os séculos XII e XVI alguns tratados novos sobre matemática foram compostos como: o Ganitakaumudi (Moonlight of Computation) que foi completado por Narayana em 1356. E ainda, relatam que ele também escreveu um trabalho de álgebra parcialmente existente, o Bijaganitavatamsa (Garland of Algebra).

Figura 17 – Narayana Pandita (1340-1400)



Fonte: <https://www.mathsone.com/blog-details/blog/89-Narayana-Pandit>

A sequência de Narayana mais conhecida como as vacas de Narayana é derivada a partir da problemática do rebanho de vacas e bezerros que foi proposto por Narayana no século XIV, em que: “Uma vaca dá à luz um bezerro todos os anos. Por sua vez, o bezerro dá à luz outro bezerro quando tem três anos de idade. Qual é o número de progênes produzido durante vinte anos por uma vaca?” (RAMIREZ; SIRVENT, 2015, p.91). Assim, a sua solução é de forma semelhante ao problema dos pares de coelhos da sequência de Fibonacci. Denominando o ano por r e N_r como um termo da sequência de Narayana, poderemos definir a sua recorrência como $N_r = N_{r-1} + N_{r-3}$, $r \geq 3$ com as condições iniciais $N_0 = N_1 = N_2 = 1$, tem-se que os termos iniciais desta sequência são iguais aos de Fibonacci, inserindo mais um valor inicial por ela ser de terceira ordem.

Ao encontrar os seguintes termos da sequência de Narayana observa-se que a razão entre seus termos consecutivos se aproxima da proporção de super-ouro. A equação característica dessa sequência pode ser escrita como $x^3 - x^2 - 1 = 0$ em que possuem três raízes sendo uma solução real e duas complexas.

Ramirez e Sirvent (2015) apresentam uma matriz generalizada para a sequência de k -Narayana, sendo k qualquer número inteiro diferente de zero. Assim, substituindo $k = 1$, tem-se que: para $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se que $T^n = \begin{bmatrix} N_{n+1} & N_{n-1} & N_n \\ N_n & N_{n-2} & N_{n-1} \\ N_{n-1} & N_{n-3} & N_{n-2} \end{bmatrix}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$.

Esta sequência possui ainda uma melodia em relação às vacas de Narayana de autoria de Tom Johnson, a qual consta no trabalho de Waldschmidt (2009), em que realiza um estudo sobre a construção das notas musicais dessa melodia, apresentando os termos da sequência de Narayana.

2.3.9 Sequência de Mersenne

A sequência de Mersenne é composta pelos números de Mersenne. O seu nome surge em homenagem ao francês, Marin Mersenne (1588 – 1648), apresentado na figura 18, matemático, teórico musical, padre, teólogo, filósofo e autor de "A Verdade das Ciências, Novas Descobertas de Galileu, Novas Observações Físico-Matemáticas e Questões Teológicas, Físicas, Morais e Matemáticas". (ROSA, 2012, p.34). Costa (2015) ressalta a indignação de Mersenne por na época não ter uma organização formal onde os estudiosos da época pudessem se encontrar para trocar e discutir ideias e descobertas. Com isso, ele disponibilizou o seu quarto no convento para que essas reuniões ocorressem lá, dando origem aos primeiros encontros matemáticos que sucederam desde 1635 até sua morte, em 1648.

Dos estudos matemáticos, em especial na teoria dos números, Mersenne ficou conhecido pelas suas contribuições relativas aos chamados primos de Mersenne. Número

de Mersenne é todo número natural da forma $M_n = 2^n - 1$ onde o n é um número natural.

Figura 18 – Marin Mersenne



Fonte: <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Mersenne.html>

Rosa (2012) relata que frequentemente o franciscano Mersenne oferecia sua casa para encontros com cientistas contemporâneos como Descartes, Galileu, Fermat, Pascal e Torricelli com interesse em discutir e estudar Matemática e assuntos científicos.

Alves, Catarino e Mangueira (2019) definiram a relação de recorrência para a sequência de Mersenne como: $M_n = 3M_{n-1} - 2M_{n-2}, n \geq 2$ com as condições iniciais $M_0 = 0$ e $M_1 = 1$. A equação característica dessa sequência é apresentada por uma equação do segundo grau. Assim temos $x^2 - 3x + 2 = 0$, em que apresentam duas raízes reais, sendo uma igual a 2 e a outra igual a 1. Temos que a raiz com valor 2, representa ainda a relação de convergência entre os termos vizinhos da sequência.

A representação matricial de Mersenne foi apresentada por Alves, Catarino e Mangueira (2019), assim tem-se: para $Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, tem-se que $Z^n = \begin{bmatrix} -2M_{n-1} & M_n \\ -2M_n & M_{n+1} \end{bmatrix}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

No trabalho de Catarino, Campos e Vasco (2016) é possível encontrar algumas propriedades desta sequência que foi gerada a partir da fórmula de Binet e, também, matrizes envolvendo esses números, como: a matriz geradora, matrizes diagonais e matrizes do tipo circulante.

2.3.10 Sequência de Oresme

Nicole Oresme (1320 – 1382), como mostrado na Figura 19, é um dos filósofos escolásticos mais eminentes do século XIV. Nasceu em 1323, na pequena vila de Allemagne, a cerca de três quilômetros de Caen, na Normandia (HORADAM, 1974). Segundo Mendonça e Neto (2016) relatam que Oresme estudou Arte com Jean Buridan, um dos mais influentes

filósofos da Idade Média, na Universidade de Paris, onde obteve o título de mestre. E ainda, estudou Teologia na Colégio de Navarra da Universidade de Paris. Em 1377, Oresme assumiu o posto de bispo na cidade de Lisieux. Ele dominava muitas funções, era economista, filósofo, físico, psicólogo, astrônomo, astrólogo e teólogo (CLAGETT, 1964; BABB, 2005). Horadam (1974) relata que enquanto Oresme era reitor da catedral de Rouen ele traduziu várias obras de Aristóteles, a pedido de Charles V. Em 1382, Oresme morreu em Lisieux e foi enterrado em sua igreja catedral.

Figura 19 – Nicole Oresme



Fonte:(MENDONÇA; NETO, 2016).

Segundo Horadam (1974), matematicamente, Oresme é importante por pelo menos três razões. A primeira, ele expôs uma representação gráfica de qualidades e velocidades, embora não haja menção à dependência (funcional) de uma qualidade sobre outra, como encontrado em Descartes. Por isso, Mendonça e Neto (2016) relatam que alguns historiadores acreditam que Oresme é o criador da Geometria Analítica, antes mesmo de Descartes. A segunda, ele foi a primeira pessoa a conceber a noção de poderes fracionários e sugeriu uma notação, descrita como: $1p \cdot \frac{1}{2}$ ou $\frac{p \cdot 1}{1 \cdot 2}$. O terceiro, na metade do século XIV o clérigo Nicole Oresme encontrou a soma dos seguintes números racionais $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \frac{5}{32}, \frac{6}{64}, \dots, \frac{n}{2^n}$. O autor acrescenta que Oresme não publicou nenhum desses resultados. Tais séries infinitas recorrentes geralmente não apareciam novamente até o século XVIII. Ademais, a referida sequência enigmática possui um caráter, também, de interesse na biologia, na medida em que, a partir dos dois primeiros termos, podemos estimar a quantidade de pais, avós e determinar tal proporção em qualquer geração.

Esses números formam uma sequência de segunda ordem e apresentam a sua fórmula de recorrência derivada da sequência de Fibonacci, onde os coeficientes são expressos por 1 e $-\frac{1}{4}$, assim: $O_n = O_{n-1} - \frac{1}{4}O_{n-2}$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ com $O_0 = 0$ e $O_1 = \frac{1}{2}$. A equação característica dessa sequência pode ser escrita como $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ ou $4x^2 - 4x + 1 = 0$ em que apresentam duas raízes reais e iguais em que essa raiz representa a relação de

convergência dessa sequência, entre os seus termos vizinhos. No trabalho de Cerda-Morales (2019) é apresentada a matriz de Oresme representada por: para $L = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se

$$\text{que } L^n = \begin{bmatrix} 2O_{n+1} & -\frac{1}{2}O_n \\ 2O_n & -\frac{1}{2}O_{n-1} \end{bmatrix}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}^*.$$

Por fim, pode-se encontrar outros estudos em torno da sequência de Oresme, Cerda-Morales (2019) estudam a generalização desta sequência apresentando uma nova sequência de números chamada polinômios de Oresme, apresentando a matriz para esses números e sua extensão para os números naturais.

3 ESTUDO DO CAMPO EPISTÊMICO-MATEMÁTICO

3.1 Hibridização de Sequências

Neste capítulo iremos realizar a hibridização de dez sequências lineares, sejam elas: Fibonacci, Lucas, Pell, Leonardo, Jacobsthal, Perrin, Padovan, Narayana, Mersene, Oresme. Vale salientar que, a hibridização de algumas dessas sequências já são apresentadas na literatura matemática. Dando continuidade a este estudo, será realizada a hibridização das outras sequências e desenvolvem-se algumas propriedades envolvendo essas sequências híbridas, tais como: a fórmula de Binet, a matriz, a equação característica, a norma, a função geradora, a extensão para o campo dos números inteiros negativos e algumas identidades clássicas, como as de Identidade de Catalan, Cassini e d'Ocagne.

3.1.1 Números Híbridos de Fibonacci

A hibridização da sequência de Fibonacci foi estudada inicialmente por Cerda-Morales (2018) e posteriormente em Mangueira e Alves (2020a). Assim, nesta seção daremos continuidade a esse estudo. A hibridização desta sequência consiste em associar a sequência de Fibonacci ao conjunto dos números híbridos.

Definição 11. *O número híbrido de Fibonacci, $n \in \mathbb{N}$, é definido por (CERDA-MORALES, 2018):*

$$HF_n = F_n + F_{n+1}i + F_{n+2}\varepsilon + F_{n+3}h.$$

Com os seguintes termos iniciais: $HF_0 = i + \varepsilon + 2h$ e $HF_1 = 1 + i + 2\varepsilon + 3h$.

Proposição 1. *A sequência de números híbridos de Fibonacci, HF_n , $n \in \mathbb{N}$, satisfaz a recorrência $HF_{n+1} = HF_n + HF_{n-1}$ (CERDA-MORALES, 2018).*

Demonstração.

$$\begin{aligned} HF_n + HF_{n-1} &= (F_n + F_{n+1}i + F_{n+2}\varepsilon + F_{n+3}h) + (F_{n-1} + F_n i + F_{n+1}\varepsilon + F_{n+2}h) \\ &= (F_n + F_{n-1}) + (F_{n+1} + F_n)i + (F_{n+2} + F_{n+1})\varepsilon + (F_{n+3} + F_{n+2})h \\ &= F_{n+1} + F_{n+2}i + F_{n+3}\varepsilon + F_{n+4}h \\ &= HF_{n+1}. \end{aligned}$$

□

Teorema 3. *A matriz geradora híbrida de Fibonacci, para $n \geq 1$, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} HF_1 & HF_0 \\ HF_0 & HF_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} HF_{n+1} & HF_n \\ HF_n & HF_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Pelo princípio da indução infinita, tem-se que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} HF_1 & HF_0 \\ HF_0 & HF_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} HF_1 + HF_0 & HF_1 \\ HF_0 + HF_{-1} & HF_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} HF_2 & HF_1 \\ HF_1 & HF_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Supondo que seja válido para $n = k, k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{bmatrix} HF_1 & HF_0 \\ HF_0 & HF_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} HF_{k+1} & HF_k \\ HF_k & HF_{k-1} \end{bmatrix}$$

Dessa forma, demonstra-se que é válido para $n = k + 1, k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} HF_1 & HF_0 \\ HF_0 & HF_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} &= \begin{bmatrix} HF_1 & HF_0 \\ HF_0 & HF_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} HF_{k+1} & HF_k \\ HF_k & HF_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} HF_{k+1} + HF_k & HF_{k+1} \\ HF_k + HF_{k-1} & HF_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} HF_{k+2} & HF_{k+1} \\ HF_{k+1} & HF_k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Teorema 4. *Para os números híbridos de Fibonacci, a equação característica é dada por:*

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

onde é uma equação de segundo grau possuindo duas raízes reais $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Demonstração. Com base no Teorema de Cayley-Hamilton, tem-se que a equação característica de Fibonacci é dado por (GOMES; OLIVEIRA, 2019):

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - Q),$$

com $\lambda \in \mathbb{Z}$ ou $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ e a matriz base da sequência de Fibonacci, dada por:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Assim, } \lambda I - Q = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

E ainda,

$$\det(\lambda I - Q) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Então, $p(\lambda) = 0$, tem-se $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. Logo, $x^2 - x - 1 = 0$. $\square$

Definição 12. O conjugado do número híbrido de Fibonacci, denotado por $\overline{HF_n}$, é definido por:

$$\overline{HF_n} = F_n - F_{n+1}i - F_{n+2}\varepsilon - F_{n+3}h.$$

Baseado no que já foi apresentado anteriormente pode-se apresentar o caráter deste número.

Definição 13. O caráter do número híbrido de Fibonacci, denotado por $C(HF_n)$, com $n \in \mathbb{N}$, é definido como:

$$C(HF_n) = F_n^2 + (F_{n+1} - F_{n+2})^2 - F_{n+2}^2 - F_{n+3}^2.$$

Definição 14. Para os números híbridos de Fibonacci, o vetor representação desses números, para $n \in \mathbb{N}$, definido por:

$$\nu_{HF_n} = (F_n, (F_{n+1} - F_{n+2}), F_{n+2}, F_{n+3}).$$

A norma de um número híbrido de Fibonacci é o número gerado a partir da expressão $\|HF_n\| = \sqrt{|C(HF_n)|}$. Com isso, tem-se:

Proposição 2. A norma de um número híbrido de Fibonacci, denotada por $\|HF_n\|$, com $n \in \mathbb{N}$, é definida como:

$$\|HF_n\|^2 = |F_n^2 - 4F_{n+2}F_{n+1} - F_{n+2}^2|.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \|HF_n\| &= \sqrt{|F_n^2 + (F_{n+1} - F_{n+2})^2 - F_{n+2}^2 - F_{n+3}^2|} \\ \|HF_n\| &= \sqrt{|F_n^2 + F_{n+1}^2 - 2F_{n+1}F_{n+2} + F_{n+2}^2 - F_{n+2}^2 - F_{n+3}^2|} \\ \|HF_n\|^2 &= |F_n^2 + F_{n+1}^2 - 2F_{n+1}F_{n+2} - F_{n+3}^2| \\ &= |F_n^2 + F_{n+1}^2 - 2F_{n+1}F_{n+2} - (F_{n+2} + F_{n+1})^2| \\ &= |F_n^2 + F_{n+1}^2 - 2F_{n+1}F_{n+2} - F_{n+2}^2 - 2F_{n+2}F_{n+1} - F_{n+1}^2| \\ &= |F_n^2 - 4F_{n+1}F_{n+2} - F_{n+2}^2|. \end{aligned}$$

$\square$

Definição 15. O vetor híbrido de Fibonacci é um vetor do espaço de Minkowski R_1^3 , para $n \in \mathbb{N}$, definido por:

$$\xi_{HF_n} = ((F_{n+1} - F_{n+2}), F_{n+2}, F_{n+3}).$$

Definição 16. O inverso dos números híbridos de Fibonacci, com $\|HF_n\| \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, é dado por:

$$HF_n^{-1} = \frac{\overline{HF_n}}{C(HF_n)}.$$

Além disso, o número híbrido de Fibonacci pode ser representado de forma matricial, a partir de uma matriz, onde há uma bijeção entre o conjunto das matrizes dos números complexos, duais e hiperbólicos. Utilizando a forma matricial dos números híbridos que Özdemir (2018) apresenta, definiremos a matriz do número híbrido de Fibonacci.

Proposição 3. A matriz do número híbrido de Fibonacci, com $n \in \mathbb{N}$, é dada por:

$$\varphi_{HF_n} = \begin{bmatrix} F_n + F_{n+2} & 2F_{n+1} \\ 2F_{n+2} & F_n - F_{n+2} \end{bmatrix}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \varphi_{HF_n} &= F_n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + F_{n+1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + F_{n+2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + F_{n+3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_n + F_{n+2} & F_{n+1} - F_{n+2} + F_{n+3} \\ F_{n+2} - F_{n+1} + F_{n+3} & F_n - F_{n+2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_n + F_{n+2} & F_{n+1} - F_{n+2} + F_{n+2} + F_{n+1} \\ F_{n+2} - F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+1} & F_n - F_{n+2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_n + F_{n+2} & 2F_{n+1} \\ 2F_{n+2} & F_n - F_{n+2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

E ainda, tem-se a seguinte proposição que relaciona o determinante de uma matriz com a sua norma.

Proposição 4. Se φ_{HF_n} corresponde a matriz híbrida do número híbrido de Fibonacci, então $C(HF_n) = \det \varphi_{HF_n}$ e $\|HF_n\| = \sqrt{|\det \varphi_{HF_n}|}$.

Demonstração. Seja $HF_n = F_n + F_{n+1}i + F_{n+2}\varepsilon + F_{n+3}h$. Atendendo ao Teorema 2, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \det \varphi_{HF_n} &= \begin{vmatrix} F_n + F_{n+2} & 2F_{n+1} \\ 2F_{n+2} & F_n - F_{n+2} \end{vmatrix} \\
 &= (F_n + F_{n+2})(F_n - F_{n+2}) - (2F_{n+1})(2F_{n+2}) \\
 &= F_n^2 - F_n F_{n+2} + F_n F_{n+2} - F_{n+2}^2 - 4F_{n+1}F_{n+2} \\
 &= F_n^2 - 4F_{n+1}F_{n+2} - F_{n+2}^2 \\
 &= F_n^2 - 2F_{n+1}F_{n+2} - (2F_{n+1}F_{n+2} + F_{n+2}^2) \\
 &= F_n^2 - 2F_{n+1}F_{n+2} - (F_{n+1}^2 + 2F_{n+1}F_{n+2} + F_{n+2}^2) + F_{n+1}^2 \\
 &= F_n^2 - 2F_{n+1}F_{n+2} + F_{n+1}^2 - (F_{n+1} + F_{n+2})^2 \\
 &= F_n^2 - 2F_{n+1}F_{n+2} + F_{n+1}^2 - F_{n+3}^2 \\
 &= C(HF_n).
 \end{aligned}$$

Agora, tendo em conta que $\|HF_n\| = \sqrt{|C(HF_n)|}$, temos que $\|HF_n\| = \sqrt{|\det \varphi_{HF_n}|}$, como pretendíamos provar. $\square$

Cerda-Morales (2018) apresenta a generalização dos números híbridos de Fibonacci e propriedades inerentes a eles. Com isso, a seguir, apresentaremos a função geradora do número híbrido de Fibonacci, sua fórmula de Binet e algumas identidades encontradas que envolvem essa sequência.

Teorema 5. A função geradora do número híbrido de Fibonacci, denotada por G_{HF_n} , é:

$$G_{HF_n}(x) = \frac{HF_0 + (HF_1 - HF_0)x}{1 - x - x^2}.$$

Demonstração. Para definir a função geradora dos híbridos de Fibonacci devemos escrever uma sequência em que cada termo da sequência corresponde aos coeficientes.

$$G_{HF_n}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} HF_n x^n.$$

Fazendo manipulações algébricas devido a relação de recorrência podemos escrever essa sequência como:

$$\begin{aligned}
 G_{HF_n}(x) &= HF_0 + HF_1 x + HF_2 x^2 + \dots + HF_n x^n + \dots \\
 -xG_{HF_n}(x) &= -xHF_0 - x^2 HF_1 - x^3 HF_2 - \dots - x^{n+1} HF_n - \dots \\
 -x^2 G_{HF_n}(x) &= -x^2 HF_0 - x^3 HF_1 - x^4 HF_2 - \dots - x^{n+2} HF_n - \dots
 \end{aligned}$$

Somando membro a membro, temos:

$$\begin{aligned}
 (1 - x - x^2)G_{HF_n}(x) &= HF_0 + (HF_1 - HF_0)x + (HF_2 - HF_1 - HF_0)x^2 + \dots \\
 (1 - x - x^2)G_{HF_n}(x) &= HF_0 + (HF_1 - HF_0)x \\
 G_{HF_n}(x) &= \frac{HF_0 + (HF_1 - HF_0)x}{(1 - x - x^2)}.
 \end{aligned}$$

□

Assim, temos a função geradora para as sequências híbridas de Fibonacci.

Agora iremos explorar a existência de uma fórmula explícita para o cálculo do n -ésimo termo da sequência, sem depender da recorrência utilizando a fórmula de Binet, onde é necessário utilizar as raízes da equação característica desta sequência. A fórmula de Binet foi descoberta por Abraham De Moivre (1667-1764), porém tal investigação matemática homenageou Jacques Phillipe Marie Binet (1786-1856), sendo então chamada de Fórmula de Binet.

Teorema 6. Para $n \geq 0$, tem-se que a fórmula de Binet para os números híbridos de Fibonacci é dada como:

$$HF_n = \frac{(HF_1 - HF_0x_2)x_1^n - (HF_1 - HF_0x_1)x_2^n}{x_1 - x_2},$$

onde x_1 e x_2 são as raízes reais da sua equação característica.

Demonstração. Tem-se que a fórmula de Binet pode ser representada da seguinte maneira:

$$HF_n = Ax_1^n + Bx_2^n$$

Para $n = 0$, tem-se: $A + B = HF_0$ e para $n = 1$, tem-se $Ax_1 + Bx_2 = HF_1$.

Assim, é possível considerar o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} A + B = HF_0 \\ Ax_1 + Bx_2 = HF_1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear, tem-se que os coeficientes encontrados são:

$$\begin{aligned} A &= \frac{HF_1 - HF_0x_2}{x_1 - x_2} \\ B &= \frac{HF_0x_1 - HF_1}{x_1 - x_2} \end{aligned}$$

Fazendo as devidas substituições na fórmula de Binet, obtêm-se:

$$HF_n = \frac{(HF_1 - HF_0x_2)x_1^n - (HF_1 - HF_0x_1)x_2^n}{x_1 - x_2}$$

□

A partir da fórmula de Binet, pode-se apresentar algumas identidades clássicas na sua forma híbrida. Considerando $M = (HF_1 - HF_0x_2)$ e $N = (HF_1 - HF_0x_1)$, tem-se:

$$HF_n = \frac{Mx_1^n - Nx_2^n}{x_1 - x_2}$$

Teorema 7 (Identidade de Catalan). *Para os números naturais n e k , com $n \geq k$, se HF_n é o n -ésimo número híbrido de Fibonacci, então tem-se a seguinte identidade:*

$$HF_{n-k}HF_{n+k} - HF_n^2 = \frac{MN(-1)^n [2 - (x_2^{2k} + x_1^{2k})]}{(x_1 - x_2)^2}.$$

Demonstração. Para demonstrar este Teorema utilizaremos a relação $x_1x_2 = -1$.

$$\begin{aligned} HF_{n-k}HF_{n+k} - HF_n^2 &= \frac{Mx_1^{n-k} - Nx_2^{n-k}}{x_1 - x_2} \cdot \frac{Mx_1^{n+k} - Nx_2^{n+k}}{x_1 - x_2} - \left(\frac{Mx_1^n - Nx_2^n}{x_1 - x_2} \right)^2 \\ &= \frac{M^2x_1^{2n} - MNx_1^{n-k}x_2^{n+k} - NMx_2^{n-k}x_1^{n+k} + N^2x_2^{2n}}{(x_1 - x_2)^2} - \\ &\quad \frac{M^2x_1^{2n} - 2MNx_1^n x_2^n + N^2x_2^{2n}}{(x_1 - x_2)^2} \\ &= \frac{-MNx_1^{n-k}x_2^{n+k} - MNx_2^{n-k}x_1^{n+k} + 2MNx_1^n x_2^n}{(x_1 - x_2)^2} \\ &= \frac{-MN [x_1^n x_2^n (x_1^{-k}x_2^k + x_1^k x_2^{-k})] + 2MNx_1^n x_2^n}{(x_1 - x_2)^2} \\ &= \frac{-MN(-1)^n (x_1^{-k}x_2^k + x_1^k x_2^{-k}) + 2MN(-1)^n}{(x_1 - x_2)^2} \\ &= \frac{MN(-1)^n [2 - (x_1^{-k}x_2^k + x_1^k x_2^{-k})]}{(x_1 - x_2)^2} \\ &= \frac{MN(-1)^n [2 - (x_2^{2k} + x_1^{2k})]}{(x_1 - x_2)^2}. \end{aligned}$$

□

A identidade de Cassini é um caso particular da identidade de Catalan, quando $k = 1$. Assim, tem-se o seguinte resultado.

Corolário 1 (Identidade de Cassini). *Para o número natural n , se HF_n é o n -ésimo número híbrido de Fibonacci, então tem-se a seguinte identidade:*

$$HF_{n-1}HF_{n+1} - HF_n^2 = \frac{MN(-1)^n [2 - (x_2^2 + x_1^2)]}{(x_1 - x_2)^2}.$$

Proposição 5 (Identidade de d'Ocagne). *Se HF_n é o n -ésimo número híbrido de Fibonacci, a expressão da identidade de d'Ocagne é dada por:*

$$HF_m HF_{n+1} - HF_{m+1} HF_n = \frac{MN(-1)^n [2 - (x_2^2 + x_1^2)]}{(x_1 - x_2)^2}.$$

Demonstração. Esta identidade é uma generalização da identidade de Cassini, fazendo $m = n - 1$, sendo m um número inteiro não negativo e n um número inteiro positivo, temos a seguinte identidade: $HF_m HF_{n+1} - HF_{m+1} HF_n = HF_{n-1} HF_{n+1} - HF_n^2$ onde pode encontrar a demonstração no Corolário 1. □

Definição 17. A recorrência para os termos de índices inteiros negativos dos números híbridos de Fibonacci, para $n \geq 1$, é:

$$HF_{-n} = HF_{-n+2} - HF_{-n+1}.$$

Assim, é possível calcular os termos de índices inteiros negativos dos números híbridos de Fibonacci. Com isso, tem-se: $HF_{-1} = 1 + \varepsilon + h$ e $HF_{-2} = -1 + i + h$.

Teorema 8. A matriz geradora híbrida de Fibonacci para índice inteiro negativo, $n > 0$, é dada por:

$$\begin{bmatrix} HF_1 & HF_0 \\ HF_0 & HF_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} HF_{-n+1} & HF_{-n} \\ HF_{-n} & HF_{-n-1} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 3, pode-se validar este teorema. $\square$

Nas seções a seguir será apresentado a hibridização de outras sequências, será realizado de maneira análoga ao que foi proposto aos números híbridos de Fibonacci.

3.1.2 Números Híbridos de Lucas

Os números híbridos de Lucas foram apresentados por Cerda-Morales (2018) e Manguera et al. (2021a) e continuará sendo abordado nesta seção.

Definição 18. O número híbrido de Lucas, $n \in \mathbb{N}$ será definido como:

$$HL_n = L_n + L_{n+1}i + L_{n+2}\varepsilon + L_{n+3}h.$$

Com os seguintes termos iniciais: $HL_0 = 2 + i + 3\varepsilon + 4h$, $HL_1 = 1 + 3i + 4\varepsilon + 7h$.

Proposição 6. A sequência de números híbridos de Lucas, HL_n , com $n \in \mathbb{N}$, satisfaz a recorrência $HL_n = HL_{n-1} + HL_{n-2}$ (CERDA-MORALES, 2018).

Demonstração.

$$\begin{aligned} HL_{n-1} + HL_{n-2} &= (L_{n-1} + L_n i + L_{n+1} \varepsilon + L_{n+2} h) + (L_{n-2} + L_{n-1} i + L_n \varepsilon + L_{n+1} h) \\ &= (L_{n-1} + L_{n-2}) + (L_n + L_{n-1})i + (L_{n+1} + L_n)\varepsilon + (L_{n+2} + L_{n+1})h \\ &= L_n + L_{n+1}i + L_{n+2}\varepsilon + L_{n+3}h \\ &= HL_n \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 9. *A matriz geradora híbrida de Lucas, para $n \geq 1$, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} HL_1 & HL_0 \\ HL_0 & HL_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} HL_{n+1} & HL_n \\ HL_n & HL_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 3, pode-se validar este teorema. $\square$

Teorema 10. *Para os números híbridos de Lucas, a equação característica é dado por:*

$$w^2 - w - 1 = 0,$$

onde é uma equação de segundo grau e possui as mesmas raízes da equação de Fibonacci.

Demonstração. Semelhantemente ao Teorema 4, utilizaremos o Teorema de Cayley-Hamilton, tem-se que a equação característica de Lucas é dada por (GOMES; OLIVEIRA, 2019):

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - Q),$$

com $\lambda \in \mathbb{Z}$ ou $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ e $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Assim, $\lambda I - Q = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}$.

E ainda,

$$\det(\lambda I - Q) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Então, $p(\lambda) = 0$, tem-se $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. Logo, $w^2 - w - 1 = 0$. $\square$

Definição 19. *O conjugado do número híbrido de Lucas, denotado por $\overline{HL_n}$, é definido como:*

$$\overline{HL_n} = L_n - L_{n+1}i - L_{n+2}\varepsilon - L_{n+3}h.$$

Definição 20. *O caráter do número híbrido de Lucas, denotado por $C(HL_n)$, com $n \in \mathbb{N}$, é definido como:*

$$C(HL_n) = L_n^2 + (L_{n+1} - L_{n+2})^2 - L_{n+2}^2 - L_{n+3}^2.$$

Definição 21. *Para os números híbridos de Lucas, tem-se o vetor representação desses números, para $n \in \mathbb{N}$, pode-se definir como:*

$$\nu_{HL_n} = (L_n, (L_{n+1} - L_{n+2}), L_{n+2}, L_{n+3}).$$

Proposição 7. *A norma de um número híbrido de Lucas, denotada por $\|HL_n\|$, com $n \in \mathbb{N}$, é definida como:*

$$\|HL_n\|^2 = |L_n^2 - 4L_{n+2}L_{n+1} - L_{n+2}^2|.$$

Demonstração. Seja a norma de um número híbrido dado por:

$$\begin{aligned}
\|HL_n\| &= \sqrt{|C(HL_n)|} = \sqrt{|L_n^2 + L_{n+1}^2 - 2L_{n+1}L_{n+2} - L_{n+3}^2|} \\
\|HL_n\|^2 &= |L_n^2 + L_{n+1}^2 - 2L_{n+1}L_{n+2} - (L_{n+2} + L_{n+1})^2| \\
&= |L_n^2 + L_{n+1}^2 - 2L_{n+1}L_{n+2} - L_{n+2}^2 - 2L_{n+2}L_{n+1} - L_{n+1}^2| \\
&= |L_n^2 - 4L_{n+1}L_{n+2} - L_{n+2}^2|
\end{aligned}$$

□

Definição 22. O vetor híbrido de Lucas é um vetor do espaço de Minkowski R_1^3 , para $n \in \mathbb{N}$, definido por:

$$\xi_{HL_n} = ((L_{n+1} - L_{n+2}), L_{n+2}, L_{n+3}).$$

Definição 23. O inverso dos números híbridos de Lucas, com $\|HL_n\| \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, é dado por:

$$HL_n^{-1} = \frac{\overline{HL_n}}{C(HL_n)}.$$

Proposição 8. A matriz do número híbrido de Lucas, $n \in \mathbb{N}$, é dada por:

$$\varphi_{HL_n} = \begin{bmatrix} L_n + L_{n+2} & 2L_{n+1} \\ 2L_{n+2} & L_n - L_{n+2} \end{bmatrix}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\varphi_{HL_n} &= L_n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + L_{n+1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + L_{n+2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + L_{n+3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} L_n + L_{n+2} & L_{n+1} - L_{n+2} + L_{n+3} \\ L_{n+2} - L_{n+1} + L_{n+3} & L_n - L_{n+2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} L_n + L_{n+2} & L_{n+1} - L_{n+2} + L_{n+2} + L_{n+1} \\ L_{n+2} - L_{n+1} + L_{n+2} + L_{n+1} & L_n - L_{n+2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} L_n + L_{n+2} & 2L_{n+1} \\ 2L_{n+2} & L_n - L_{n+2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

□

Proposição 9. Se φ_{HL_n} corresponde a matriz híbrida do número híbrido de Lucas, então $C(HL_n) = \det \varphi_{HL_n}$ e $\|HL_n\| = \sqrt{|\det \varphi_{HL_n}|}$.

Demonstração. Seja $HL_n = L_n + L_{n+1}i + L_{n+2}\varepsilon + L_{n+3}h$. Atendendo ao Teorema 2, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \det\varphi_{HL_n} &= \begin{vmatrix} L_n + L_{n+2} & 2L_{n+1} \\ 2L_{n+2} & L_n - L_{n+2} \end{vmatrix} \\
 &= (L_n + L_{n+2})(L_n - L_{n+2}) - (2L_{n+1})(2L_{n+2}) \\
 &= L_n^2 - L_n L_{n+2} + L_n L_{n+2} - L_{n+2}^2 - 4L_{n+1}L_{n+2} \\
 &= L_n^2 - 4L_{n+1}L_{n+2} - L_{n+2}^2 \\
 &= L_n^2 - 2L_{n+1}L_{n+2} - (2L_{n+1}L_{n+2} + L_{n+2}^2) \\
 &= L_n^2 - 2L_{n+1}L_{n+2} - (L_{n+1}^2 + 2L_{n+1}L_{n+2} + L_{n+2}^2) + L_{n+1}^2 \\
 &= L_n^2 - 2L_{n+1}L_{n+2} + L_{n+1}^2 - (L_{n+1} + L_{n+2})^2 \\
 &= L_n^2 - 2L_{n+1}L_{n+2} + L_{n+1}^2 - L_{n+3}^2 \\
 &= C(HL_n).
 \end{aligned}$$

Agora, tendo em conta que $\|HL_n\| = \sqrt{|C(HL_n)|}$, temos que $\|HL_n\| = \sqrt{|\det\varphi_{HL_n}|}$, como pretendíamos provar. $\square$

Teorema 11. A função geradora do número híbrido de Lucas, denotada por G_{HL_n} , para $n \in \mathbb{N}$, é:

$$G_{HL_n}(w) = \frac{HL_0 + (HL_1 - HL_0)w}{1 - w - w^2}.$$

Demonstração. Para definir a função geradora do número híbrido de Lucas devemos escrever uma sequência em que cada termo da sequência corresponde aos coeficientes.

$$G_{HL_n}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} HL_n w^n.$$

Fazendo manipulações algébricas devido a relação de recorrência podemos escrever essa sequência como:

$$\begin{aligned}
 G_{HL_n}(w) &= HL_0 + HL_1 w + HL_2 w^2 + \dots + HL_n w^n + \dots \\
 -wG_{HL_n}(w) &= -wHL_0 - w^2 HL_1 - w^3 HL_2 - \dots - w^{n+1} HL_n - \dots \\
 -w^2 G_{HL_n}(w) &= -w^2 HL_0 - w^3 HL_1 - w^4 HL_2 - \dots - w^{n+2} HL_n - \dots
 \end{aligned}$$

Somando cada membro, temos:

$$\begin{aligned}
 (1 - w - w^2)G_{HL_n}(w) &= HL_0 + (HL_1 - HL_0)w + (HL_2 - HL_1 - HL_0)w^2 + \dots \\
 (1 - w - w^2)G_{HL_n}(w) &= HL_0 + (HL_1 - HL_0)w \\
 G_{HL_n}(w) &= \frac{HL_0 + (HL_1 - HL_0)w}{(1 - w - w^2)}
 \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 12. Para $n \geq 0$, temos que a fórmula de Binet para o número híbrido de Lucas é dada como:

$$HL_n = \frac{(HL_1 - HL_0x_2)x_1^n - (HL_1 - HL_0x_1)x_2^n}{x_1 - x_2},$$

onde x_1 e x_2 são as raízes reais da equação característica.

Demonstração. Tem-se que a fórmula de Binet pode ser representada da seguinte maneira:

$$HL_n = Ax_1^n + Bx_2^n$$

Para $n = 0$, tem-se: $A + B = HL_0$ e, para $n = 1$, temos $Ax_1 + Bx_2 = HL_1$.

Assim, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} A + B = HL_0 \\ Ax_1 + Bx_2 = HL_1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear, temos que os coeficientes encontrados foram: $A = \frac{HL_1 - HL_0x_2}{x_1 - x_2}$ e $B = \frac{HL_0x_1 - HL_1}{x_1 - x_2}$. Fazendo as devidas substituições na fórmula de Binet, temos:

$$HL_n = \frac{(HL_1 - HL_0x_2)x_1^n - (HL_1 - HL_0x_1)x_2^n}{x_1 - x_2}$$

□

A partir da fórmula de Binet podemos apresentar algumas identidades clássicas na sua forma híbrida. Considerando $R = (HL_1 - HL_0x_2)$ e $S = (HL_1 - HL_0x_1)$ tem-se:

$$HL_n = \frac{Rx_1^n - Sx_2^n}{x_1 - x_2}$$

Teorema 13. (Identidade de Catalan) Para os números naturais n e k , com $n \geq k$, se HL_n é o n -ésimo número híbrido de Lucas, então tem-se a seguinte identidade:

$$HL_{n-k}HL_{n+k} - HL_n^2 = \frac{RS(-1)^n [2 - (x_2^{2k} + x_1^{2k})]}{(x_1 - x_2)^2}.$$

Demonstração. Para demonstrar este Teorema utilizaremos a relação $x_1x_2 = -1$.

$$\begin{aligned}
HL_{n-k}HL_{n+k} - HL_n^2 &= \frac{Rx_1^{n-k} - Sx_2^{n-k}}{x_1 - x_2} \cdot \frac{Rx_1^{n+k} - Sx_2^{n+k}}{x_1 - x_2} - \left(\frac{Rx_1^n - Sx_2^n}{x_1 - x_2} \right)^2 \\
&= \frac{R^2x_1^{2n} - RSx_1^{n-k}x_2^{n+k} - SRx_2^{n-k}x_1^{n+k} + S^2x_2^{2n}}{(x_1 - x_2)^2} - \\
&\quad \frac{R^2x_1^{2n} - 2RSx_1^n x_2^n + S^2x_2^{2n}}{(x_1 - x_2)^2} \\
&= \frac{-RSx_1^{n-k}x_2^{n+k} - RSx_2^{n-k}x_1^{n+k} + 2RSx_1^n x_2^n}{(x_1 - x_2)^2} \\
&= \frac{-RS \left[x_1^n x_2^n (x_1^{-k}x_2^k + x_1^kx_2^{-k}) \right] + 2RSx_1^n x_2^n}{(x_1 - x_2)^2} \\
&= \frac{-RS(-1)^n (x_1^{-k}x_2^k + x_1^kx_2^{-k}) + 2RS(-1)^n}{(x_1 - x_2)^2} \\
&= \frac{RS(-1)^n \left[2 - (x_1^{-k}x_2^k + x_1^kx_2^{-k}) \right]}{(x_1 - x_2)^2} \\
&= \frac{RS(-1)^n \left[2 - (x_2^{2k} + x_1^{2k}) \right]}{(x_1 - x_2)^2}.
\end{aligned}$$

□

A identidade de Cassini é um caso particular da identidade de Catalan, quando $k = 1$. Assim, tem-se o seguinte resultado.

Corolário 2. (*Identidade de Cassini*) Para o número natural n , se HL_n é o n -ésimo número híbrido de Lucas, então temos a seguinte identidade:

$$HL_{n-1}HL_{n+1} - HL_n^2 = \frac{RS(-1)^n [2 - (x_2^2 + x_1^2)]}{(x_1 - x_2)^2}.$$

Proposição 10. (*Identidade de d'Ocagne*) Se HL_n , é o n -ésimo número híbrido de Lucas, a expressão da identidade de d'Ocagne é dada por:

$$HL_mHL_{n+1} - HL_{m+1}HL_n = \frac{RS(-1)^n [2 - (x_2^2 + x_1^2)]}{(x_1 - x_2)^2}.$$

Demonstração. Esta identidade é uma generalização da identidade de Cassini, fazendo $m = n - 1$, sendo m um número inteiro não negativo e n um numero inteiro positivo, temos: $HL_mHL_{n+1} - HL_{m+1}HL_n = HL_{n-1}HL_{n+1} - HL_n^2$ onde podemos encontrar a demonstração no Corolário 2. □

Definição 24. A recorrência para os termos de índices inteiros negativos dos números híbridos de Lucas, com $n \geq 1$, é definido por:

$$HL_{-n} = HL_{-n+2} - HL_{-n+1}.$$

Assim, é possível calcular os termos de índices inteiros negativos dos números híbridos de Lucas. Com isso, temos: $HL_{-1} = -1 + 2i + \varepsilon + 3h$ e $HF_{-2} = 3 - i + 2\varepsilon + h$.

Teorema 14. *A matriz geradora híbrida de Lucas para índice inteiro negativo, $n > 0$, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} HL_1 & HL_0 \\ HL_0 & HL_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} HL_{-n+1} & HL_{-n} \\ HL_{-n} & HL_{-n-1} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 3, pode-se validar este teorema. $\square$

3.1.3 Números Híbridos de Pell

Catarino (2019) apresenta os números híbridos de k -Pell e para $k = 1$ pode-se apresentar os números híbridos de Pell. Nesta seção abordaremos esses números e propriedades inerentes a eles.

Definição 25. *O número híbrido de Pell, denominado por HP_{n+1} , $n \in \mathbb{N}$, é definido por (CATARINO, 2019):*

$$HP_n = P_n + P_{n+1}i + P_{n+2}\varepsilon + P_{n+3}h.$$

Com as seguintes condições iniciais: $HP_0 = i + 2\varepsilon + 5h$ e $HP_1 = 1 + 2i + 5\varepsilon + 12h$.

Proposição 11. *A sequência de números híbridos de Pell, HP_n com $n \in \mathbb{N}$, satisfaz a recorrência híbrida de Pell $HP_{n+1} = 2HP_n + HP_{n-1}$ (CATARINO, 2019).*

Demonstração.

$$\begin{aligned} 2HP_n + HP_{n-1} &= 2(P_n + P_{n+1}i + P_{n+2}\varepsilon + P_{n+3}h) + (P_{n-1} + P_ni + P_{n+1}\varepsilon + P_{n+2}h) \\ &= (2P_n + P_{n-1}) + (2P_{n+1} + P_n)i + (2P_{n+2} + P_{n+1})\varepsilon + (2P_{n+3} + P_{n+2})h \\ &= P_{n+1} + P_{n+2}i + P_{n+3}\varepsilon + P_{n+4}h \\ &= HP_{n+1} \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 15. *A matriz geradora híbrida de Pell, para $n \geq 1$, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} HP_1 & HP_0 \\ HP_0 & HP_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} HP_{n+1} & HP_n \\ HP_n & HP_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 3, pode-se validar este teorema. $\square$

Teorema 16. Para os números híbridos de Pell, a equação característica é dada por:

$$y^2 - 2y - 1 = 0,$$

onde é uma equação de segundo grau possuindo duas raízes reais $y_1 = 1 + \sqrt{2}$ e $y_2 = 1 - \sqrt{2}$.

Demonstração. Semelhantemente ao Teorema 4, utilizaremos o Teorema de Cayley-Hamilton, tem-se que a equação característica de Pell é dada por (GOMES; OLIVEIRA, 2019):

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - R),$$

com $\lambda \in \mathbb{Z}$ ou $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ e tem-se que a matriz base da sequência de Pell, dada

por: $R = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Assim, $\lambda I - R = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}$.

E ainda,

$$\det(\lambda I - R) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 1.$$

Então, $p(\lambda) = 0$, tem-se $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$. Logo, $y^2 - 2y - 1 = 0$. □

Definição 26. O conjugado do número híbrido de Pell, denotado por $\overline{HP_n}$, é definido como:

$$\overline{HP_n} = P_n - P_{n+1}i - P_{n+2}\varepsilon - P_{n+3}h.$$

Definição 27. O caráter do número híbrido de Pell, denotado por $C(HP_n)$, com $n \in \mathbb{N}$, é definido como:

$$C(HP_n) = P_n^2 + (P_{n+1} - P_{n+2})^2 - P_{n+2}^2 - P_{n+3}^2.$$

Definição 28. Para os números híbridos de Pell, tem-se o vetor representação desses números, para $n \in \mathbb{N}$, definido por:

$$\nu_{HP_n} = (P_n, (P_{n+1} - P_{n+2}), P_{n+2}, P_{n+3}).$$

Propriedade 4. A norma de um número híbrido de Pell é definido como:

$$\|HP_n\|^2 = |P_n^2 - 6P_{n+1}P_{n+2} - 4P_{n+2}^2|.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \|HP_n\| &= \sqrt{|C(HP_n)|} \\ \|HP_n\|^2 &= |P_n^2 + (P_{n+1} - P_{n+2})^2 - P_{n+2}^2 - P_{n+3}^2| \\ &= |P_n^2 + P_{n+1}^2 - 2P_{n+1}P_{n+2} + P_{n+2}^2 - P_{n+2}^2 - (2P_{n+2} + P_{n+1})^2| \\ &= |P_n^2 + P_{n+1}^2 - 2P_{n+1}P_{n+2} - 4P_{n+2}^2 - 4P_{n+1}P_{n+2} - P_{n+1}^2| \\ &= |P_n^2 - 6P_{n+1}P_{n+2} - 4P_{n+2}^2| \end{aligned}$$

□

Definição 29. O vetor híbrido de Pell é um vetor do espaço de Minkowski R_1^3 , para $n \in \mathbb{N}$, definido por:

$$\xi_{HP_n} = ((P_{n+1} - P_{n+2}), P_{n+2}, P_{n+3}).$$

Definição 30. O inverso dos números híbridos de Pell, com $\|HP_n\| \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, é dado por:

$$HP_n^{-1} = \frac{\overline{HP_n}}{C(HP_n)}.$$

Proposição 12. A matriz do número híbrido de Pell, com $n \in \mathbb{N}$, é definida como:

$$\begin{bmatrix} P_n + P_{n+2} & 2P_{n+1} + P_{n+2} \\ 3P_{n+2} & P_n - P_{n+2} \end{bmatrix}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \varphi_{HP_n} &= P_n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + P_{n+1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + P_{n+2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + P_{n+3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_n + P_{n+2} & P_{n+1} - P_{n+2} + P_{n+3} \\ P_{n+2} - P_{n+1} + P_{n+3} & P_n - P_{n+2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_n + P_{n+2} & P_{n+1} - P_{n+2} + 2P_{n+2} + P_{n+1} \\ P_{n+2} - P_{n+1} + 2P_{n+2} + P_{n+1} & P_n - P_{n+2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_n + P_{n+2} & 2P_{n+1} + P_{n+2} \\ 3P_{n+2} & P_n - P_{n+2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Proposição 13. Se φ_{HP_n} corresponde a matriz híbrida do número híbrido de Pell, então $C(HP_n) = \det \varphi_{HP_n}$ e $\|HP_n\| = \sqrt{|\det \varphi_{HP_n}|}$.

Demonstração. Seja $HP_n = P_n + P_{n+1}i + P_{n+2}\varepsilon + P_{n+3}h$. Atendendo ao Teorema 2, obtemos:

$$\begin{aligned} \det \varphi_{HP_n} &= \begin{vmatrix} P_n + P_{n+2} & 2P_{n+1} + P_{n+2} \\ 3P_{n+2} & P_n - P_{n+2} \end{vmatrix} \\ &= (P_n + P_{n+2})(P_n - P_{n+2}) - (2P_{n+1} + P_{n+2})(3P_{n+2}) \\ &= P_n^2 - P_{n+2}^2 - 6P_{n+1}P_{n+2} - 3P_{n+2}^2 \\ &= P_n^2 - 6P_{n+1}P_{n+2} - 4P_{n+2}^2 \\ &= P_n^2 + P_{n+1}^2 - 2P_{n+1}P_{n+2} - 4P_{n+2}^2 - 4P_{n+1}P_{n+2} - P_{n+1}^2 \\ &= P_n^2 + P_{n+1}^2 - 2P_{n+1}P_{n+2} + P_{n+2}^2 - P_{n+2}^2 - (2P_{n+2} + P_{n+1})^2 \\ &= P_n^2 + (P_{n+1} - P_{n+2})^2 - P_{n+2}^2 - P_{n+3}^2 \\ &= C(HP_n). \end{aligned}$$

Agora, tendo em conta que $\|HP_n\| = \sqrt{|C(HP_n)|}$, temos que $\|HP_n\| = \sqrt{|\det \varphi_{HP_n}|}$, como pretendíamos provar. □

Teorema 17. A função geradora dos números híbridos de Pell, denotada por $G_{HP_n}(y)$, com $n \in \mathbb{N}$, é apresentado por:

$$G_{HP_n}(y) = \frac{HP_0 + (HP_1 - HP_0)y}{(1 - 2y - y^2)}.$$

Demonstração. Para definir a função geradora dos números híbridos de Pell vamos escrever uma sequência em que cada termo da sequência corresponde aos coeficientes.

$$G_{HP_n}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} HP_n y^n$$

Fazendo manipulações algébricas devido a relação de recorrência podemos escrever essa sequência como:

$$\begin{aligned} HP_n(y) &= HP_0 + HP_1 y + HP_2 y^2 + \dots + HP_n y^n + \dots \\ -2y HP_n(y) &= -HP_0 2y - HP_1 2y^2 - HP_2 2y^3 - \dots - HP_n 2y^{n+1} - \dots \\ -y^2 HP_n(y) &= -HP_0 y^2 - HP_1 y^3 - HP_2 y^4 - \dots - HP_n y^{n+2} - \dots \end{aligned}$$

Somando cada membro, tem-se:

$$\begin{aligned} (1 - 2y - y^2) HP_n(y) &= HP_0 + (HP_1 - HP_0)y \\ HP_n(y) &= \frac{HP_0 + (HP_1 - HP_0)y}{1 - 2y - y^2} \end{aligned}$$

□

Teorema 18. Para $n \geq 0$, temos que a fórmula de Binet para os números híbridos de Pell é dado por:

$$HP_n = \frac{(HP_1 - HP_0 y_2) y_1^n - (HP_1 - HP_0 y_1) y_2^n}{y_1 - y_2},$$

onde y_1 e y_2 são as raízes reais da equação característica.

Demonstração. Tem-se que a fórmula de Binet pode ser representada da seguinte maneira:

$$HP_n = Ay_1^n + By_2^n.$$

Para $n = 0$, tem-se: $A + B = HP_0$ e, para $n = 1$, temos $Ay_1 + By_2 = HP_1$.

Assim, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} A + B = HP_0 \\ Ay_1 + By_2 = HP_1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear, temos que os coeficientes encontrados foram: $A = \frac{HP_1 - HP_0 y_2}{y_1 - y_2}$

e $B = \frac{HP_0 y_1 - HP_1}{y_1 - y_2}$.

Fazendo as devidas substituições na fórmula de Binet, temos:

$$HP_n = \frac{(HP_1 - HP_0 y_2)y_1^n - (HP_1 - HP_0 y_1)y_2^n}{y_1 - y_2}.$$

□

Considerando $Z = (HP_1 - HP_0 y_2)$ e $W = (HP_1 - HP_0 y_1)$ tem-se:

$$HP_n = \frac{Zy_1^n - Wy_2^n}{y_1 - y_2}.$$

Teorema 19. (*Identidade de Catalan*) Para os números naturais n e k , com $n \geq k$, se HP_n é o n -ésimo número híbrido de Pell, então tem-se a seguinte identidade:

$$HP_{n-k}HP_{n+k} - HP_n^2 = \frac{ZW(-1)^n [2 - (y_2^{2k} + y_1^{2k})]}{(y_1 - y_2)^2}.$$

Demonstração. Para demonstrar este Teorema utilizaremos a relação $y_1 y_2 = -1$.

$$\begin{aligned} HP_{n-k}HP_{n+k} - HP_n^2 &= \frac{Zy_1^{n-k} - Wy_2^{n-k}}{y_1 - y_2} \cdot \frac{Zy_1^{n+k} - Wy_2^{n+k}}{y_1 - y_2} - \left(\frac{Zy_1^n - Wy_2^n}{y_1 - y_2} \right)^2 \\ &= \frac{Z^2 y_1^{2n} - ZW y_1^{n-k} y_2^{n+k} - WZ y_2^{n-k} y_1^{n+k} + W^2 y_2^{2n}}{(y_1 - y_2)^2} - \\ &\quad \frac{Z^2 y_1^{2n} - 2ZW y_1^n y_2^n + W^2 y_2^{2n}}{(y_1 - y_2)^2} \\ &= \frac{-ZW y_1^{n-k} y_2^{n+k} - ZW y_2^{n-k} y_1^{n+k} + 2ZW y_1^n y_2^n}{(y_1 - y_2)^2} \\ &= \frac{-ZW [y_1^n y_2^n (y_1^{-k} y_2^k + y_1^k y_2^{-k})] + 2ZW y_1^n y_2^n}{(y_1 - y_2)^2} \\ &= \frac{-ZW(-1)^n (y_1^{-k} y_2^k + y_1^k y_2^{-k}) + 2ZW(-1)^n}{(y_1 - y_2)^2} \\ &= \frac{ZW(-1)^n [2 - (y_1^{-k} y_2^k + y_1^k y_2^{-k})]}{(y_1 - y_2)^2} \\ &= \frac{ZW(-1)^n [2 - (y_2^{2k} + y_1^{2k})]}{(y_1 - y_2)^2}. \end{aligned}$$

□

A identidade de Cassini é um caso particular da identidade de Catalan, quando $k = 1$. Assim, tem-se o seguinte resultado.

Corolário 3. (*Identidade de Cassini*) Para o número natural n , se HF_n é o n -ésimo número híbrido de Pell, então tem-se a seguinte identidade:

$$HF_{n-1}HF_{n+1} - HF_n^2 = \frac{ZW(-1)^n [2 - (y_2^2 + y_1^2)]}{(y_1 - y_2)^2}.$$

Proposição 14. (*Identidade de d'Ocagne*) Se HP_n , é o n -ésimo número híbrido de Pell, a expressão da identidade de d'Ocagne é dada por:

$$HP_m HP_{n+1} - HP_{m+1} HP_n = \frac{ZW(-1)^n [2 - (y_2^{2k} + y_1^{2k})]}{(y_1 - y_2)^2}.$$

Demonstração. Esta identidade é uma generalização da identidade de Cassini, fazendo $m = n - 1$, sendo m um número inteiro não negativo e n um numero inteiro positivo, temos a seguinte identidade: $HP_m HP_{n+1} - HP_{m+1} HP_n = HP_{n-1} HP_{n+1} - HP_n^2$ onde podemos encontrar a demonstração no Corolário 3. $\square$

Definição 31. A recorrência para os termos de índices inteiros negativos dos números híbridos de Pell, para $n \geq 1$, é definido por:

$$HP_{-n} = HP_{-n+2} - 2HP_{-n+1}.$$

Assim, é possível calcular os termos de índices inteiros negativos dos números híbridos de Pell. Com isso, temos: $HP_{-1} = 1 + \varepsilon + 2h$ e $HP_{-2} = -2 + i + h$.

Teorema 20. A matriz geradora híbrida de Pell para índice inteiro negativo, $n > 0$, é dada por:

$$\begin{bmatrix} HP_1 & HP_0 \\ HP_0 & HP_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} HP_{-n+1} & HP_{-n} \\ HP_{-n} & HP_{-n-1} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 3, pode-se validar este teorema. $\square$

3.1.4 Números Híbridos de Leonardo

Os números de Leonardo foram abordados por Catarino e Borges (2019), e seu processo de híbridização foi apresentado por Manguiera, Alves e Catarino (no prelo). Por isso, nesta seção tem-se o intuito de apresentar esse processo.

Definição 32. O número híbrido de Leonardo, denominado por HLe_{n+1} para $n \in \mathbb{N}$, é definido como:

$$HLe_n = Le_n + Le_{n+1}i + Le_{n+2}\varepsilon + Le_{n+3}h.$$

Com os seguintes termos iniciais: $HLe_0 = 1 + i + 3\varepsilon + 5h$ e $HLe_1 = 1 + 3i + 5\varepsilon + 9h$.

Proposição 15. *A sequência dos números híbridos de Leonardo, HLe_n , com $n \in \mathbb{N}$, satisfaz a recorrência $HLe_{n+1} = 2HLe_n - HLe_{n-2}$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
2HLe_n - HLe_{n-2} &= 2(Le_n + Le_{n+1}i + Le_{n+2}\varepsilon + Le_{n+3}h) - (Le_{n-2} + Le_{n-1}i + Le_n\varepsilon + Le_{n+1}h) \\
&= (2Le_n - Le_{n-2}) + (2Le_{n+1} - Le_{n-1})i + (2Le_{n+2} - Le_n)\varepsilon + \\
&\quad (2Le_{n+3} - Le_{n+1})h \\
&= Le_{n+1} + Le_{n+2}i + Le_{n+3}\varepsilon + Le_{n+4}h \\
&= HLe_{n+1}.
\end{aligned}$$

□

Pode-se relacionar os números híbridos de Leonardo com os números híbridos de Fibonacci, onde os números híbridos de Fibonacci foi apresentada na Definição 11, observe:

Proposição 16. *Para, $n \geq 0$, tem-se a relação dos números híbridos de Leonardo com os números híbridos de Fibonacci.*

$$HLe_n = 2HF_{n+1} - (1 + i + \varepsilon + h).$$

Demonstração. Vamos provar essa proposição pelo método de indução matemática.

Para $n = 0$,

$$\begin{aligned}
HLe_0 &= 2HF_1 - (1 + i + \varepsilon + h) \\
&= 2(1 + i + 2\varepsilon + 3h) - (1 + i + \varepsilon + h) \\
&= 1 + i + 3\varepsilon + 5h
\end{aligned}$$

Supondo que a igualdade é válida para todo $1 < k \leq n$, ou seja, que $HLe_k = 2HF_{k+1} - (1 + i + \varepsilon + h)$.

Agora, é necessário provar a validade para $k + 1$, utilizando a relação de recorrência, a hipótese de indução e a Proposição 1, obtem-se:

$$\begin{aligned}
HLe_{k+1} &= HLe_k + HLe_{k-1} + (1 + i + \varepsilon + h) \\
&= [2HF_{k+1} - (1 + i + \varepsilon + h)] + [2HF_k - (1 + i + \varepsilon + h)] + (1 + i + \varepsilon + h) \\
&= 2(HF_{k+1} + HF_k) - (1 + i + \varepsilon + h) \\
&= 2HF_{k+2} - (1 + i + \varepsilon + h)
\end{aligned}$$

Com isso, tem-se que a proposição é válida.

□

Teorema 21. *A matriz híbrida geradora de Leonardo, para $n \geq 1$, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} HLe_2 & HLe_1 & HLe_0 \\ HLe_3 & HLe_2 & HLe_1 \\ HLe_4 & HLe_3 & HLe_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} HLe_{n+2} & HLe_{n+1} & HLe_n \\ HLe_{n+3} & HLe_{n+2} & HLe_{n+1} \\ HLe_{n+4} & HLe_{n+3} & HLe_{n+2} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Pelo princípio da indução infinita, tem-se que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} HLe_2 & HLe_1 & HLe_0 \\ HLe_3 & HLe_2 & HLe_1 \\ HLe_4 & HLe_3 & HLe_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2HLe_2 - HLe_0 & HLe_2 & HLe_1 \\ 2HLe_3 - HLe_1 & HLe_3 & HLe_2 \\ 2HLe_4 - HLe_2 & HLe_4 & HLe_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} HLe_3 & HLe_2 & HLe_1 \\ HLe_4 & HLe_3 & HLe_2 \\ HLe_5 & HLe_4 & HLe_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Supondo que seja válido para $n = k, k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{bmatrix} HLe_2 & HLe_1 & HLe_0 \\ HLe_3 & HLe_2 & HLe_1 \\ HLe_4 & HLe_3 & HLe_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} HLe_{k+2} & HLe_{k+1} & HLe_k \\ HLe_{k+3} & HLe_{k+2} & HLe_{k+1} \\ HLe_{k+4} & HLe_{k+3} & HLe_{k+2} \end{bmatrix}$$

Dessa forma, demonstra-se que é válido para $n = k + 1, k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} HLe_2 & HLe_1 & HLe_0 \\ HLe_3 & HLe_2 & HLe_1 \\ HLe_4 & HLe_3 & HLe_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} &= \begin{bmatrix} HLe_2 & HLe_1 & HLe_0 \\ HLe_3 & HLe_2 & HLe_1 \\ HLe_4 & HLe_3 & HLe_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} HLe_{k+2} & HLe_{k+1} & HLe_k \\ HLe_{k+3} & HLe_{k+2} & HLe_{k+1} \\ HLe_{k+4} & HLe_{k+3} & HLe_{k+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2HLe_{k+2} - HLe_k & HLe_{k+2} & HLe_{k+1} \\ 2HLe_{k+3} - HLe_{k+1} & HLe_{k+3} & HLe_{k+2} \\ 2HLe_{k+4} - HLe_{k+2} & HLe_{k+4} & HLe_{k+3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} HLe_{k+3} & HLe_{k+2} & HLe_{k+1} \\ HLe_{k+4} & HLe_{k+3} & HLe_{k+2} \\ HLe_{k+5} & HLe_{k+4} & HLe_{k+3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Teorema 22. Para os números híbridos de Leonardo, a equação característica é dada por:

$$z^3 - 2z^2 + 1 = 0,$$

onde é uma equação de terceiro grau possuindo três raízes, sendo duas iguais as raízes de Fibonacci, $z_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $z_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ e $z_3 = 1$.

Demonstração. Semelhantemente ao Teorema 4, utilizaremos o Teorema de Cayley-Hamilton, tem-se que a equação característica de Leonardo é dada por (GOMES; OLIVEIRA, 2019):

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - K),$$

com $\lambda \in \mathbb{Z}$ ou $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ e, no trabalho de Vieira et al. (2020), tem-se a

matriz base da sequência de Leonardo, dada por: $K = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Assim, $\lambda I - K =$

$$\begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

É ainda,

$$\det(\lambda I - K) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 1.$$

Então, $p(\lambda) = 0$, tem-se $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 1 = 0$. Logo, $z^3 - 2z^2 + 1 = 0$. $\square$

Definição 33. O conjugado do número híbrido de Leonardo, denotado por $\overline{HLe_n}$, é definido por:

$$\overline{HLe_n} = Le_n - Le_{n+1}i - Le_{n+2}\varepsilon - Le_{n+3}h.$$

Definição 34. O caráter do número híbrido de Leonardo, denotado por $C(HLe_n)$, com $n \in \mathbb{N}$, é definido por:

$$C(HLe_n) = Le_n^2 + (Le_{n+1} - Le_{n+2})^2 - Le_{n+2}^2 - Le_{n+3}^2.$$

Definição 35. Para os números híbridos de Leonardo, tem-se o vetor representação desses números, para $n \in \mathbb{N}$, definido por:

$$\nu_{HLe_n} = (Le_n, (Le_{n+1} - Le_{n+2}), Le_{n+2}, Le_{n+3}).$$

Proposição 17. A norma de um número híbrido de Leonardo, denotada por $\|HLe_n\|$, com $n \in \mathbb{N}$, é definida como:

$$\|HLe_n\|^2 = |Le_{n+1}^2 - 2Le_{n+1}Le_{n+2} + 4Le_{n+2}Le_n - 4Le_{n+2}^2|.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \|HLe_n\| &= \sqrt{|C(HLe_n)|} \\ \|HLe_n\|^2 &= |Le_n^2 + (Le_{n+1} - Le_{n+2})^2 - Le_{n+2}^2 - Le_{n+3}^2| \\ &= |Le_n^2 + Le_{n+1}^2 - 2Le_{n+1}Le_{n+2} + Le_{n+2}^2 - Le_{n+2}^2 - 4Le_{n+2}^2 + 4Le_nLe_{n+2} - Le_n^2| \\ &= |Le_{n+1}^2 - 2Le_{n+1}Le_{n+2} + 4Le_nLe_{n+2} - 4Le_{n+2}^2| \end{aligned}$$

$\square$

Definição 36. O vetor híbrido de Leonardo é um vetor do espaço de Minkowski R_1^3 , para $n \in \mathbb{N}$, definido por:

$$\xi_{HLe_n} = ((Le_{n+1} - Le_{n+2}), Le_{n+2}, Le_{n+3})$$

Definição 37. O inverso dos números híbridos de Leonardo, com $\|HLe_n\| \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, é dado por:

$$HLe_n^{-1} = \frac{\overline{HLe_n}}{C(HLe_n)}.$$

Proposição 18. A matriz do número híbrido de Leonardo, com $n \in \mathbb{N}$, é dada por:

$$\varphi_{HLe_n} = \begin{bmatrix} Le_n + Le_{n+2} & Le_{n+1} + Le_{n+2} - Le_n \\ 3Le_{n+2} - Le_n - Le_{n+1} & Le_n - Le_{n+2} \end{bmatrix}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \varphi_{Le_n} &= Le_n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + Le_{n+1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + Le_{n+2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + Le_{n+3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Le_n + Le_{n+2} & Le_{n+1} - Le_{n+2} + Le_{n+3} \\ Le_{n+2} - Le_{n+1} + Le_{n+3} & Le_n - Le_{n+2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Le_n + Le_{n+2} & Le_{n+1} - Le_{n+2} + 2Le_{n+2} - Le_n \\ Le_{n+2} - Le_{n+1} + 2Le_{n+2} - Le_n & Le_n - Le_{n+2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Le_n + Le_{n+2} & Le_{n+1} + Le_{n+2} - Le_n \\ 3Le_{n+2} - Le_n - Le_{n+1} & Le_n - Le_{n+2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

Proposição 19. Se φ_{HLe_n} corresponde a matriz híbrida do número híbrido de Leonardo, então $C(HLe_n) = \det \varphi_{HLe_n}$ e $\|HLe_n\| = \sqrt{|\det \varphi_{HLe_n}|}$.

Demonstração. Seja $HLe_n = Le_n + Le_{n+1}i + Le_{n+2}\varepsilon + Le_{n+3}h$. Atendendo ao Teorema 2, obtemos:

$$\begin{aligned} \det \varphi_{HLe_n} &= \begin{vmatrix} Le_n + Le_{n+2} & Le_{n+1} + Le_{n+2} - Le_n \\ 3Le_{n+2} - Le_n - Le_{n+1} & Le_n - Le_{n+2} \end{vmatrix} \\ &= Le_n^2 - Le_{n+2}^2 - 3Le_{n+2}Le_{n+1} + Le_{n+1}Le_n + Le_{n+1}^2 - 3Le_{n+2}^2 + Le_nLe_{n+2} + \\ &\quad Le_{n+1}Le_{n+2} + 3Le_{n+2}Le_n - Le_n^2 - Le_nLe_{n+1} \\ &= Le_n^2 - Le_{n+2}^2 - 2Le_{n+1}Le_{n+2} + Le_{n+1}^2 - 3Le_{n+2}^2 + 4Le_nLe_{n+2} - Le_n^2 \\ &= Le_{n+1}^2 - 2Le_{n+1}Le_{n+2} + 4Le_nLe_{n+2} - 4Le_{n+2}^2 \\ &= Le_n^2 + Le_{n+1}^2 - 2Le_{n+1}Le_{n+2} + Le_{n+2}^2 - Le_{n+2}^2 - 4Le_{n+2}^2 + 4Le_nLe_{n+2} - Le_n^2 \\ &= Le_n^2 + (Le_{n+1} - Le_{n+2})^2 - Le_{n+2}^2 - Le_{n+3}^2 \\ &= C(Le_n). \end{aligned}$$

Agora, tendo em conta que $\|HLe_n\| = \sqrt{|C(HLe_n)|}$, temos que $\|HLe_n\| = \sqrt{|det\varphi_{HLe_n}|}$, como pretendíamos provar. $\square$

Teorema 23. *A função geradora dos números híbridos de Leonardo, denotada por $G_{HLe_n}(z)$, é definido como:*

$$G_{HLe_n}(z) = \frac{(HLe_0 + HLe_1z)(1 - 2z) + HLe_2z^2}{1 - 2z + z^3}.$$

Demonstração. Para definir a função geradora do número híbrido de Leonardo, denotada por $G_{HLe_n}(z)$, vamos escrever uma sequência em que cada termo da sequência corresponde aos coeficientes.

$$G_{HLe_n}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} HLe_n z^n.$$

Fazendo manipulações algébricas devido a relação de recorrência podemos escrever essa sequência como:

$$\begin{aligned} G_{HLe_n}(z) &= HLe_0 + HLe_1z + HLe_2z^2 + \sum_{n=3}^{\infty} HLe_n z^n \\ &= HLe_0 + HLe_1z + HLe_2z^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (2HLe_{n-1} - HLe_{n-3})z^n \\ &= HLe_0 + HLe_1z + HLe_2z^2 + 2z \sum_{n=3}^{\infty} HLe_{n-1}z^{n-1} - z^3 \sum_{n=3}^{\infty} HLe_{n-3}z^{n-3} \\ &= HLe_0 + HLe_1z + HLe_2z^2 + 2z \sum_{n=0}^{\infty} (HLe_n z^n - HLe_0 - HLe_1z) - z^3 \sum_{n=0}^{\infty} HLe_n z^n \\ &= HLe_0 + HLe_1z + HLe_2z^2 - 2HLe_0z - 2HLe_1z^2 + 2z \sum_{n=0}^{\infty} HLe_n z^n - z^3 \sum_{n=0}^{\infty} HLe_n z^n \\ &= HLe_0 + HLe_1z + HLe_2z^2 - 2HLe_0z - 2HLe_1z^2 + 2zG_{HLe_n} - z^3G_{HLe_n} \end{aligned}$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} G_{HLe_n}(z) - 2zG_{HLe_n} + z^3G_{HLe_n} &= HLe_0 + HLe_1z + HLe_2z^2 - 2HLe_0z - 2HLe_1z^2 \\ G_{HLe_n}(z)(1 - 2z + z^3) &= HLe_0(1 - 2z) + HLe_1z(1 - 2z) + HLe_2z^2 \\ G_{HLe_n}(z) &= \frac{(HLe_0 + HLe_1z)(1 - 2z) + HLe_2z^2}{1 - 2z + z^3} \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 24. *Para $n \geq 0$, tem-se que a fórmula de Binet para o número híbrido de Leonardo é:*

$$HLe_n = \frac{x_1[2Ax_1^n - (1 + i + \varepsilon + h)] + x_2[(1 + i + \varepsilon + h) - 2Bx_2^n]}{x_1 - x_2}.$$

onde $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ são duas das raízes da equação característica da sequência de Fibonacci, $A = HF_0 - HF_1x_2$ e $B = HF_1 - HF_0x_1$.

Demonstração. A partir da fórmula de Binet dos números híbridos de Fibonacci, no Teorema 6, e utilizando a proposição 16, tem-se:

$$\begin{aligned}
HLe_n &= 2 \left(\frac{(HF_0 - HF_1 x_2)x_1^{n+1} - (HF_1 - HF_0 x_1)x_2^{n+1}}{x_1 - x_2} \right) - (1 + i + \varepsilon + h) \\
&= \frac{2(HF_0 - HF_1 x_2)x_1^{n+1} - 2(HF_1 - HF_0 x_1)x_2^{n+1} - (1 + i + \varepsilon + h)(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} \\
&= \frac{2(HF_0 - HF_1 x_2)x_1^{n+1} - x_1(1 + i + \varepsilon + h) - 2(HF_1 - HF_0 x_1)x_2^{n+1} + x_2(1 + i + \varepsilon + h)}{x_1 - x_2} \\
&= \frac{x_1[2(HF_0 - HF_1 x_2)x_1^n - (1 + i + \varepsilon + h)] + x_2[(1 + i + \varepsilon + h) - 2(HF_1 - HF_0 x_1)x_2^n]}{x_1 - x_2}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 25. (*Identidade de Catalan*) Para os números naturais n e k , com $n \geq k$, se HLe_n é o n -ésimo número híbrido de Leonardo, então tem-se a seguinte identidade:

$$\begin{aligned}
HLe_{n-k}HLe_{n+k} - HLe_n^2 &= (1 + i + \varepsilon + h) [-2HF_{n-k+1} - 2HF_{n+k+1} + 4HF_{n+1}] + \\
&\quad 4HF_{n-k+1}HF_{n+k+1} - 4HF_{n+1}^2.
\end{aligned}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
HLe_{n-k}HLe_{n+k} - HLe_n^2 &= [2HF_{n-k+1} - (1 + i + \varepsilon + h)][2HF_{n+k+1} - (1 + i + \varepsilon + h)] - \\
&\quad [2HF_{n+1} - (1 + i + \varepsilon + h)]^2 \\
&= 4HF_{n-k+1}HF_{n+k+1} - 2HF_{n-k+1}(1 + i + \varepsilon + h) - \\
&\quad 2HF_{n+k+1}(1 + i + \varepsilon + h) + (1 + i + \varepsilon + h)^2 - 4HF_{n+1}^2 + \\
&\quad 4HF_{n+1}(1 + i + \varepsilon + h) - (1 + i + \varepsilon + h)^2 \\
&= 4HF_{n-k+1}HF_{n+k+1} - 2HF_{n-k+1}(1 + i + \varepsilon + h) - \\
&\quad 2HF_{n+k+1}(1 + i + \varepsilon + h) - 4HF_{n+1}^2 + 4HF_{n+1}(1 + i + \varepsilon + h) - 4HF_{n+1}^2 \\
&= (1 + i + \varepsilon + h) [-2HF_{n-k+1} - 2HF_{n+k+1} + 4HF_{n+1}] + \\
&\quad 4HF_{n-k+1}HF_{n+k+1} - 4HF_{n+1}^2
\end{aligned}$$

□

A identidade de Cassini é um caso particular da identidade de Catalan, quando $k = 1$. Assim, tem-se o seguinte resultado.

Corolário 4. (*Identidade de Cassini*) Para os números naturais n , se HLe_n é o n -ésimo número híbrido de Leonardo, então tem-se a seguinte identidade:

$$\begin{aligned}
HLe_{n-1}HLe_{n+1} - HLe_n^2 &= (1 + i + \varepsilon + h) [-2HF_n - 2HF_{n+2} + 4HF_{n+1}] + \\
&\quad 4HF_nHF_{n+2} - 4HF_{n+1}^2.
\end{aligned}$$

Proposição 20. (*Identidade de d'Ocagne*) Se HLe_n , é o n -ésimo número híbrido de Leonardo, a expressão da identidade de d'Ocagne é dada por:

$$HLe_m HLe_{n+1} - HLe_{m+1} HLe_n = (1 + i + \varepsilon + h) [-2HF_n - 2HF_{n+2} + 4HF_{n+1}] + 4HF_n HF_{n+2} - 4HF_{n+1}^2.$$

Demonstração. Esta identidade é uma generalização da identidade de Cassini, fazendo $m = n - 1$, sendo m um número inteiro não negativo e n um numero inteiro positivo, temos a seguinte identidade: $HLe_{n-1} HLe_{n+1} - HLe_n^2$ onde pode encontramos a demonstração no Corolário anterior. $\square$

Definição 38. A recorrência para os termos de índices inteiros negativos dos números híbridos de Leonardo, para $n \geq 1$, e definida por:

$$HLe_{-n} = 2HLe_{-n+2} - HLe_{-n+3}.$$

Assim, é possível calcular os termos de índices inteiros negativos dos números híbridos de Leonardo. Com isso, tem-se: $HLe_{-1} = -1 + i + \varepsilon + 3h$ e $HLe_{-2} = 1 - i + \varepsilon + h$.

Teorema 26. A matriz geradora híbrida de Leonardo para índice inteiro negativo, $n > 0$, é dada por:

$$\begin{bmatrix} HLe_2 & HLe_1 & HLe_0 \\ HLe_3 & HLe_2 & HLe_1 \\ HLe_4 & HLe_3 & HLe_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} HLe_{-n+2} & HLe_{-n+1} & HLe_{-n} \\ HLe_{-n+3} & HLe_{-n+2} & HLe_{-n+1} \\ HLe_{-n+4} & HLe_{-n+3} & HLe_{-n+2} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 21, pode-se validar este teorema. $\square$

3.1.5 Números Híbridos de Jacobsthal

Szynal-Liana e Wloch (2019) apresentam os números híbridos de Jacobsthal, números híbridos de Jacobsthal-Lucas e propriedades existentes entre esses dois números. Nesta seção, daremos continuidade ao estudo desses números.

Definição 39. O número híbrido Jacobsthal, denominado HJ_n , $n \in \mathbb{N}$, é definido por (SZYNAL-LIANA; WLOCH, 2019):

$$HJ_n = J_n + J_{n+1}i + J_{n+2}\varepsilon + J_{n+3}h.$$

Com os seguintes termos iniciais: $HJ_0 = i + \varepsilon + 3h$ e $HJ_1 = 1 + i + 3\varepsilon + 5h$.

Proposição 21. A sequência de números híbridos de Jacobsthal, HJ_n , com $n \geq 2$, satisfaz a recorrência $HJ_n = HJ_{n-1} + 2HJ_{n-2}$ (SZYNAL-LIANA; WLOCH, 2019).

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 HJ_{n-1} + 2HJ_{n-2} &= (J_{n-1} + J_n i + J_{n+1} \varepsilon + J_{n+2} h) + 2(J_{n-2} + J_{n-1} i + J_n \varepsilon + J_{n+1} h) \\
 &= (J_{n-1} + 2J_{n-2}) + (J_n + 2J_{n-1})i + (J_{n+1} + 2J_n)\varepsilon + (J_{n+2} + 2J_{n+1})h \\
 &= J_n + J_{n+1}i + J_{n+2}\varepsilon + J_{n+3}h \\
 &= HJ_n.
 \end{aligned}$$

□

Teorema 27. *A matriz geradora híbrida de Jacobsthal, para $n \geq 1$, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} HJ_1 & 2HJ_0 \\ HJ_0 & 2HJ_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} HJ_{n+1} & 2HJ_n \\ HJ_n & 2HJ_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 3, pode-se validar este teorema. □

Teorema 28. *Para os números híbridos de Jacobsthal, a equação característica é dada por:*

$$k^2 - k - 2 = 0,$$

onde é uma equação de segundo grau possuindo duas raízes reais $k_1 = 2$ e $k_2 = -1$.

Demonstração. Semelhantemente ao Teorema 4, utilizaremos o Teorema de Cayley-Hamilton, tem-se que a equação característica de Jacobsthal é dada por (GOMES; OLIVEIRA, 2019):

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - J),$$

com $\lambda \in \mathbb{Z}$ ou $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ e tem-se que a matriz base da sequência de Jacobsthal,

dada por: $J = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Assim, $\lambda I - J = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}$.

E ainda,

$$\det(\lambda I - J) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2.$$

Então, $p(\lambda) = 0$, tem-se $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$. Logo, $k^2 - k - 2 = 0$. □

Definição 40. *O conjugado do número híbrido de Jacobsthal, denotado por $\overline{HJ_n}$, é definido por:*

$$\overline{HJ_n} = J_n - J_{n+1}i - J_{n+2}\varepsilon - J_{n+3}h.$$

Definição 41. *O caráter do número híbrido Jacobsthal, denotado por $C(HJ_n)$, com $n \in \mathbb{N}$, é definido por:*

$$C(HJ_n) = J_n^2 + (J_{n+1} - J_{n+2})^2 - J_{n+2}^2 - J_{n+3}^2.$$

Definição 42. Para os números híbridos de Jacobsthal, tem-se o vetor representação desses números, para $n \in \mathbb{N}$, definido por:

$$\nu_{HJ_n} = (J_n, (J_{n+1} - J_{n+2}), J_{n+2}, J_{n+3}).$$

Proposição 22. A norma de um número híbrido de Jacobsthal, denotada por $\|HJ_n\|$, com $n \in \mathbb{N}$, é dada por:

$$\|HJ_n\|^2 = |-3J_n^2 - 16J_nJ_{n+1} - 10J_{n+1}^2|.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \|HJ_n\| &= \sqrt{|J_n^2 + J_{n+1}^2 - 2J_{n+1}J_{n+2} - J_{n+3}^2|} \\ \|HJ_n\|^2 &= |J_n^2 + J_{n+1}^2 - 2J_{n+1}(J_{n+1} + 2J_n) - (J_{n+2} + 2J_{n+1})^2| \\ &= |J_n^2 + J_{n+1}^2 - 2J_{n+1}^2 - 4J_{n+1}J_n - J_{n+2}^2 - 4J_{n+1}J_{n+2} - 4J_{n+1}^2| \\ &= |J_n^2 - 5J_{n+1}^2 - 4J_{n+1}J_n - J_{n+1}^2 - 4J_nJ_{n+1} - 4J_n^2 - 4J_{n+1}^2 - 8J_nJ_{n+1}| \\ &= |-3J_n^2 - 16J_nJ_{n+1} - 10J_{n+1}^2|. \end{aligned}$$

□

Definição 43. O vetor híbrido de Jacobsthal é um vetor do espaço de Minkowski R_1^3 , para $n \in \mathbb{N}$, definido por:

$$\xi_{HJ_n} = ((J_{n+1} - J_{n+2}), J_{n+2}, J_{n+3}).$$

Definição 44. O inverso dos números híbridos de Jacobsthal com $\|HJ_n\| \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, é dado por:

$$HJ_n^{-1} = \frac{\overline{HJ_n}}{C(HJ_n)}.$$

Proposição 23. A matriz do número híbrido de Jacobsthal, com $n \in \mathbb{N}$, é dada por:

$$\varphi_{HJ_n} = \begin{bmatrix} 3J_n + J_{n+1} & 3J_{n+1} \\ 3J_{n+1} + 4J_n & -J_n - J_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \varphi_{HJ_n} &= J_n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + J_{n+1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + J_{n+2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + J_{n+3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} J_n + J_{n+2} & J_{n+1} - J_{n+2} + J_{n+3} \\ J_{n+2} - J_{n+1} + J_{n+3} & J_n - J_{n+2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} J_n + J_{n+1} + 2J_n & J_{n+1} - J_{n+2} + J_{n+2} + 2J_{n+1} \\ J_{n+2} - J_{n+1} + J_{n+2} + 2J_{n+1} & J_n - J_{n+1} - 2J_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3J_n + J_{n+1} & 3J_{n+1} \\ 2J_{n+1} + 4J_n + J_{n+1} & -J_n - J_{n+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3J_n + J_{n+1} & 3J_{n+1} \\ 3J_{n+1} + 4J_n & -J_n - J_{n+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Proposição 24. Se φ_{HJ_n} corresponde a matriz híbrida do número híbrido de Jacobsthal, então $C(HJ_n) = \det \varphi_{HJ_n}$ e $\|HJ_n\| = \sqrt{|\det \varphi_{HJ_n}|}$.

Demonstração. Seja $HJ_n = J_n + J_{n+1}i + J_{n+2}\varepsilon + J_{n+3}h$. Atendendo ao Teorema 2, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \det \varphi_{HJ_n} &= \begin{vmatrix} 3J_n + J_{n+1} & 3J_{n+1} \\ 3J_{n+1} + 4J_n & -J_n - J_{n+1} \end{vmatrix} \\
 &= (3J_n + J_{n+1})(-J_n - J_{n+1}) - 3J_{n+1}(3J_{n+1} + 4J_n) \\
 &= -3J_n^2 - 4J_nJ_{n+1} - J_{n+1}^2 - 9J_{n+1}^2 - 12J_nJ_{n+1} \\
 &= -3J_n^2 - 16J_nJ_{n+1} - 10J_{n+1}^2 \\
 &= J_n^2 - 5J_{n+1}^2 - 4J_{n+1}J_n - J_{n+1}^2 - 4J_nJ_{n+1} - 4J_n^2 - 4J_{n+1}^2 - 8J_nJ_{n+1} \\
 &= J_n^2 + J_{n+1}^2 - 2J_{n+1}^2 - 4J_{n+1}J_n + J_{n+2}^2 - J_{n+2}^2 - (J_{n+2}^2 - 4J_{n+1}J_{n+2} - 4J_{n+1}^2) \\
 &= J_n^2 + J_{n+1}^2 - 2J_{n+1}(J_{n+1} + 2J_n) + J_{n+2}^2 - J_{n+2}^2 - (J_{n+2} + 2J_{n+1})^2 \\
 &= J_n^2 + J_{n+1}^2 - 2J_{n+1}J_{n+2} + J_{n+2}^2 - J_{n+2}^2 - J_{n+3}^2 \\
 &= J_n^2 + (J_{n+1} - J_{n+2})^2 - J_{n+2}^2 - J_{n+3}^2 \\
 &= C(HJ_n).
 \end{aligned}$$

Agora, tendo em conta que $\|HJ_n\| = \sqrt{|C(HJ_n)|}$, temos que $\|HJ_n\| = \sqrt{|\det \varphi_{HJ_n}|}$, como pretendíamos provar. □

Teorema 29. A função geradora do número híbrido de Jacobsthal, denotada por G_{HJ_n} , para $n \in \mathbb{N}$ é:

$$G_{HJ_n}(k) = \frac{HJ_0 + (HJ_1 - HJ_0)k}{1 - k - 2k^2}.$$

Demonstração. Para definir a função geradora do número híbrido de Fibonacci devemos escrever uma sequência em que cada termo da sequência corresponde aos coeficientes

$$G_{HJ_n}(k) = \sum_{n=0}^{\infty} HJ_n k^n.$$

Fazendo manipulações algébricas devido a relação de recorrência podemos escrever essa sequência como:

$$\begin{aligned}
 G_{HJ_n}(k) &= HJ_0 + HJ_1k + HJ_2k^2 + \dots + HJ_nk^n + \dots \\
 -kG_{HJ_n}(k) &= -kHJ_0 - k^2HJ_1 - k^3HJ_2 - \dots - k^{n+1}HJ_n - \dots \\
 -2k^2G_{HJ_n}(k) &= -2k^2HJ_0 - 2k^3HJ_1 - 2k^4HJ_2 - \dots - 2k^{n+2}HJ_n - \dots
 \end{aligned}$$

Somando cada membro, temos:

$$\begin{aligned}
 (1 - k - 2k^2)G_{HJ_n}(k) &= HJ_0 + (HJ_1 - HJ_0)k + (HJ_2 - HJ_1 - 2HJ_0)k^2 + \dots \\
 (1 - k - 2k^2)G_{HJ_n}(k) &= HJ_0 + (HJ_1 - HJ_0)k \\
 G_{HJ_n}(k) &= \frac{HJ_0 + (HJ_1 - HJ_0)k}{(1 - k - k^2)}.
 \end{aligned}$$

□

Teorema 30. Para, $n \geq 0$, tem-se que a fórmula de Binet para o número híbrido de Jacobsthal é dada como:

$$HJ_n = \frac{HJ_0 - HJ_1}{3} \cdot k_1^n + \frac{2HJ_0 - HJ_1}{3} \cdot k_2^n,$$

onde k_1 e k_2 são as raízes reais da equação característica.

Demonstração. Tem-se que a fórmula de Binet pode ser representada da seguinte maneira:

$$HJ_n = Ak_1^n + Bk_2^n$$

Para $n = 0$, tem-se: $A + B = HJ_0$ e para $n = 1$, tem-se $Ak_1 + Bk_2 = HJ_1$.

Assim, é possível montar o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} A + B = HJ_0 \\ Ak_1 + Bk_2 = HJ_1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear, tem-se que os coeficientes encontrados foram:

$$\begin{aligned} A &= \frac{HJ_0 - HJ_1}{3} \\ B &= \frac{2HJ_0 - HJ_1}{3} \end{aligned}$$

Fazendo as devidas substituições na fórmula de Binet, obtêm-se:

$$HJ_n = \frac{HJ_0 - HJ_1}{3} \cdot k_1^n + \frac{2HJ_0 - HJ_1}{3} \cdot k_2^n$$

□

Considerando $U = \frac{HJ_0 - HJ_1}{3}$ e $V = \frac{2HJ_0 - HJ_1}{3}$, tem-se:

$$HJ_n = Uk_1^n + Vk_2^n.$$

Teorema 31. (Identidade de Catalan) Para os números naturais n e k , com $n \geq k$, se HJ_n é o n -ésimo híbrido de Jacobsthal, então tem-se a seguinte identidade:

$$HJ_{n-k}HJ_{n+k} - HJ_n^2 = (-2)^n(k_1^{-k}k_2^kUV - 2UV + k_1^k k_2^{-k}UV).$$

Demonstração. Para demonstrar este Teorema utilizaremos a relação $k_1k_2 = -2$.

$$\begin{aligned} HJ_{n-k}HJ_{n+k} - HJ_n^2 &= (Uk_1^{n-k} + Vk_2^{n-k})(Uk_1^{n+k} + Vk_2^{n+k}) - (Uk_1^n + Vk_2^n)^2 \\ &= U^2k_1^{2n} + Uk_1^{n-k}Vk_2^{n+k} + Uk_1^{n+k}Vk_2^{n-k} + V^2k_2^{2n} - U^2k_1^{2n} - \\ &\quad 2Uk_1^nVk_2^n - V^2k_2^{2n} \\ &= Uk_1^{n-k}Vk_2^{n+k} - 2Uk_1^nVk_2^n + Uk_1^{n+k}Vk_2^{n-k} \\ &= k_1^n k_2^n (k_1^{-k}k_2^kUV - 2UV + k_1^k k_2^{-k}UV) \\ &= (-2)^n(k_1^{-k}k_2^kUV - 2UV + k_1^k k_2^{-k}UV). \end{aligned}$$

□

A identidade de Cassini é um caso particular da identidade de Catalan, quando $k = 1$. Assim, tem-se o seguinte resultado.

Corolário 5. (*Identidade de Cassini*) Para o número natural n , se HJ_n é o n -ésimo híbrido de Jacobsthal, então tem-se a seguinte identidade:

$$HJ_{n-1}HJ_{n+1} - HJ_n^2 = (-2)^n(k_1^{-1}k_2UV - 2UV + k_1k_2^{-1}UV).$$

Proposição 25. (*Identidade de d'Ocagne*) Se HJ_n é o n -ésimo número híbrido de Jacobsthal, então a expressão da identidade de d'Ocagne é dada por:

$$HJ_mHJ_{n+1} - HJ_{m+1}HJ_n = (-2)^n(k_1^{-1}k_2UV - 2UV + k_1k_2^{-1}UV).$$

Demonstração. Esta identidade é uma generalização da identidade de Cassini, fazendo $m = n - 1$, sendo m um número inteiro não negativo e n um número inteiro positivo, tem-se: $HJ_mHJ_{n+1} - HJ_{m+1}HJ_n = HJ_{n-1}HJ_{n+1} - HJ_n^2$ onde podemos concluir a demonstração usando o Corolário 5 $\square$

Definição 45. A recorrência para os termos de índices inteiros negativos dos números híbridos de Jacobsthal, para $n \geq 1$, é definido por:

$$HJ_{-n} = \frac{HJ_{-n+2} + HJ_{-n+1}}{2}.$$

Assim, é possível calcular os termos de índices inteiros negativos da sequência híbrida de Jacobsthal. Com isso, temos: $HJ_{-1} = \frac{1}{2} + \varepsilon + h$ e $HJ_{-2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i + h$.

Teorema 32. A matriz geradora híbrida de Jacobsthal para índice inteiro negativo, $n > 0$, é dada por:

$$\begin{bmatrix} HJ_1 & 2HJ_0 \\ HJ_0 & 2HJ_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} HJ_{-n+1} & 2HJ_{-n} \\ HJ_{-n} & 2HJ_{-n-1} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 3, pode-se validar este teorema. $\square$

3.1.6 Números Híbridos de Padovan

Nesta seção serão apresentadas algumas definições a respeito aos números híbridos de Padovan, a fórmula variante de Binet, função geradora e algumas propriedades, tanto para os números naturais, assim como a sua extensão para índice inteiro negativo. Podemos encontrar estudos referente a esses números em Manguiera et al. (2020d).

Definição 46. O número híbrido de Padovan, denominado por HPa_n , $n \in \mathbb{N}$, é definido por (MANGUEIRA et al., 2020d):

$$HPa_n = Pa_n + Pa_{n+1}i + Pa_{n+2}\varepsilon + Pa_{n+3}h.$$

Com os seguintes termos iniciais: $HPa_0 = 1 + i + \varepsilon + 2h$ e $HPa_1 = 1 + i + 2\varepsilon + 2h$ e $HPa_2 = 1 + 2i + 2\varepsilon + 3h$.

Proposição 26. *A sequência de números híbridos de Padovan, HPa_n , com $n \geq 3$, satisfaz a recorrência $HPa_n = HPa_{n-2} + HPa_{n-3}$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 HPa_{n-2} + HPa_{n-3} &= (Pa_{n-2} + Pa_{n-1}i + Pa_n\varepsilon + Pa_{n+1}h) + (Pa_{n-3} + Pa_{n-2}i + Pa_{n-1}\varepsilon + Pa_nh) \\
 &= (Pa_{n-2} + Pa_{n-3}) + (Pa_{n-1} + Pa_{n-2})i + (Pa_n + Pa_{n-1})\varepsilon + (Pa_{n+1} + Pa_n)h \\
 &= Pa_n + Pa_{n+1}i + Pa_{n+2}\varepsilon + Pa_{n+3}h \\
 &= HPa_n.
 \end{aligned}$$

□

Teorema 33. *A matriz geradora híbrida de Padovan, para $n \geq 1$, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} HPa_2 & HPa_1 & HPa_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} HPa_{n+2} & HPa_{n+1} & HPa_n \end{bmatrix}.$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 21, pode-se validar este teorema. □

Teorema 34. *Para os números híbridos de Padovan, a equação característica é dada por:*

$$t^3 - t - 1 = 0,$$

constata-se que existem três raízes, sendo duas complexas e conjugadas e uma solução real, sejam elas:

$$\begin{aligned}
 t_1 &= \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} \approx 1.32, \\
 t_2 &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} \approx -0.662359 + 0.56229i \text{ e} \\
 t_3 &= \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} \approx -0.662359 - 0.56229i.
 \end{aligned}$$

Demonstração. Semelhantemente ao Teorema 4, utilizaremos o Teorema de Cayley-Hamilton, tem-se que a equação característica de Padovan é dada por (GOMES; OLIVEIRA, 2019):

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - L),$$

com $\lambda \in \mathbb{Z}$ ou $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ e tem-se que a matriz base da sequência de Padovan,

dada por: $L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Assim, $\lambda I - L = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{bmatrix}$.

E ainda,

$$\det(\lambda I - L) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda - 1.$$

Então, $p(\lambda) = 0$, tem-se $\lambda^3 - \lambda - 1 = 0$. Logo, $t^3 - t - 1 = 0$. $\square$

Definição 47. O conjugado do número híbrido de Padovan, denotado por $\overline{HPa_n}$, é definido por:

$$\overline{HPa_n} = Pa_n - Pa_{n+1}i - Pa_{n+2}\varepsilon - Pa_{n+3}h.$$

Definição 48. O caráter do número híbrido Padovan, denotado por $C(HPa_n)$, com $n \in \mathbb{N}$, é definido por (MANGUEIRA et al., 2020d):

$$C(HPa_n) = Pa_n^2 + (Pa_{n+1} - Pa_{n+2})^2 - Pa_{n+2}^2 - Pa_{n+3}^2.$$

Definição 49. Para os números híbridos de Padovan, tem-se o vetor representação desses números, para $n \in \mathbb{N}$, definido por:

$$\nu_{HPa_n} = (Pa_n, (Pa_{n+1} - Pa_{n+2}), Pa_{n+2}, Pa_{n+3}).$$

Proposição 27. A norma de um número híbrido de Padovan, denotada por $\|HP_n\|$, com $n \in \mathbb{N}$, é definida por (MANGUEIRA et al., 2020d):

$$\|HPa_n\|^2 = |-2Pa_{n+1}Pa_{n+2} - 2Pa_{n+1}Pa_n|.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \|HPa_n\| &= \sqrt{|C(HPa_n)|} \\ \|HPa_n\|^2 &= |Pa_n^2 + (Pa_{n+1} - Pa_{n+2})^2 - Pa_{n+2}^2 - Pa_{n+3}^2| \\ &= |Pa_n^2 + Pa_{n+1}^2 - 2Pa_{n+1}Pa_{n+2} + Pa_{n+2}^2 - Pa_{n+2}^2 - \\ &\quad (Pa_{n+1} + Pa_n)^2| \\ &= |Pa_n^2 + Pa_{n+1}^2 - 2Pa_{n+1}Pa_{n+2} - Pa_{n+1}^2 - 2Pa_{n+1}Pa_n - Pa_n^2| \\ &= |-2Pa_{n+1}Pa_{n+2} - 2Pa_{n+1}Pa_n|. \end{aligned}$$

$\square$

Definição 50. O vetor híbrido de Padovan é um vetor do espaço de Minkowski R_1^3 , para $n \in \mathbb{N}$, definido por:

$$\xi_{HPa_n} = ((Pa_{n+1} - Pa_{n+2}), Pa_{n+2}, Pa_{n+3}).$$

Definição 51. O inverso dos números híbridos de Padovan com $\|HPa_n\| \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, é dado por:

$$HPa_n^{-1} = \frac{\overline{HPa_n}}{C(HPa_n)}.$$

Proposição 28. A matriz do número híbrido de Padovan, com $n \in \mathbb{N}$, é dada por (MANGUEIRA et al., 2020d):

$$\varphi_{HPa_n} = \begin{bmatrix} Pa_n + Pa_{n+2} & 2Pa_{n+1} + Pa_n - Pa_{n+2} \\ Pa_{n+2} + Pa_n & Pa_n - Pa_{n+2} \end{bmatrix}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \varphi_{HPa_n} &= Pa_n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + Pa_{n+1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + Pa_{n+2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + Pa_{n+3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Pa_n + Pa_{n+2} & Pa_{n+1} - Pa_{n+2} + Pa_{n+3} \\ Pa_{n+2} - Pa_{n+1} + Pa_{n+3} & Pa_n - Pa_{n+2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Pa_n + Pa_{n+2} & Pa_{n+1} - Pa_{n+2} + Pa_{n+1} + Pa_n \\ Pa_{n+2} - Pa_{n+1} + Pa_{n+1} + Pa_n & Pa_n - Pa_{n+2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Pa_n + Pa_{n+2} & 2Pa_{n+1} + Pa_n - Pa_{n+2} \\ Pa_{n+2} + Pa_n & Pa_n - Pa_{n+2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Proposição 29. Se φ_{HPa_n} corresponde a matriz híbrida do número híbrido de Padovan, então $C(HPa_n) = \det \varphi_{HPa_n}$ e $\|HPa_n\| = \sqrt{|\det \varphi_{HPa_n}|}$.

Demonstração. Seja $HPa_n = Pa_n + Pa_{n+1}i + Pa_{n+2}\varepsilon + Pa_{n+3}h$. Atendendo ao Teorema 2, obtemos:

$$\begin{aligned} \det \varphi_{HPa_n} &= \begin{vmatrix} Pa_n + Pa_{n+2} & 2Pa_{n+1} + Pa_n - Pa_{n+2} \\ Pa_{n+2} + Pa_n & Pa_n - Pa_{n+2} \end{vmatrix} \\ &= Pa_n^2 - Pa_{n+2}^2 - (2Pa_{n+2}Pa_{n+1} + 2Pa_{n+1}Pa_n + Pa_nPa_{n+2} + Pa_n^2 - Pa_{n+2}^2 - Pa_nPa_{n+2}) \\ &= Pa_n^2 - Pa_{n+2}^2 - 2Pa_{n+1}Pa_{n+2} - 2Pa_{n+1}Pa_n - Pa_n^2 + Pa_{n+2}^2 \\ &= -2Pa_{n+1}Pa_{n+2} - 2Pa_{n+1}Pa_n \\ &= Pa_n^2 + Pa_{n+1}^2 - 2Pa_{n+1}Pa_{n+2} - Pa_{n+1}^2 - 2Pa_{n+1}Pa_n - Pa_n^2 \\ &= Pa_n^2 + Pa_{n+1}^2 - 2Pa_{n+1}Pa_{n+2} + Pa_{n+2}^2 - Pa_{n+2}^2 - (Pa_{n+1} + Pa_n)^2 \\ &= Pa_n^2 + (Pa_{n+1} - Pa_{n+2})^2 - Pa_{n+2}^2 - Pa_{n+3}^2 \\ &= C(HPa_n). \end{aligned}$$

Agora, tendo em conta que $\|HPa_n\| = \sqrt{|C(HPa_n)|}$, temos que $\|HPa_n\| = \sqrt{|det\varphi_{HPa_n}|}$, como pretendíamos provar. $\square$

Teorema 35. *A função geradora do número híbrido de Padovan, denotada por $G_{HPa_n}(t)$, $n \in \mathbb{N}$, (MANGUEIRA et al., 2020d):*

$$G_{HPa_n}(t) = \frac{HPa_0 + HPa_1t + (HPa_2 - HPa_0)t^2}{1 - t^2 - t^3}.$$

Demonstração. Para definir a função geradora do número híbrido de Padovan, denotada por $G_{HPa_n}(t)$, vamos escrever uma sequência em que cada termo da sequência corresponde aos coeficientes

$$G_{HPa_n}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} HPa_n t^n.$$

Fazendo manipulações algébricas devido a relação de recorrência podemos escrever essa sequência como:

$$\begin{aligned} G_{HPa_n}(t) &= HPa_0 + HPa_1t + HPa_2t^2 + HPa_3t^3 + HPa_4t^4 + \dots \\ -t^2G_{HPa_n}(t) &= -HPa_0t^2 - HPa_1t^3 - HPa_2t^4 - HPa_3t^5 - HPa_4t^6 - \dots \\ -t^3G_{HPa_n}(t) &= -HPa_0t^3 - HPa_1t^4 - HPa_2t^5 - HPa_3t^6 - HPa_4t^7 - \dots \end{aligned}$$

Somando cada membro, tem-se:

$$\begin{aligned} (1 - t^2 - t^3)G_{HPa_n}(t) &= HPa_0 + HPa_1t + (HPa_2 - HPa_0)t^2 + (HPa_3 - HPa_1 - HPa_0)t^3 + \dots \\ G_{HPa_n}(t) &= \frac{HPa_0 + HPa_1t + (HPa_2 - HPa_0)t^2}{1 - t^2 - t^3}. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 36. *Para $n \geq 0$, temos que a fórmula de Binet para o número híbrido de Padovan é dado como (MANGUEIRA et al., 2020d):*

$$HPa_n = A(t_1)^n + B(t_2)^n + C(t_3)^n,$$

onde t_1, t_2 e t_3 são as raízes da equação característica da sequência híbrida de Padovan e A, B e C os coeficientes iguais a:

$$\begin{aligned} A &= \frac{HPa_0(t_2t_3^2 - t_2^2t_3) + HPa_1(t_2^2 - t_3^2) + HPa_2(t_3 - t_2)}{t_3t_1^2 + t_3^2t_2 + t_1t_2^2 - t_3^2t_1 - t_1^2t_2 - t_3t_2^2} \\ B &= \frac{HPa_0(t_3t_1^2 - t_3^2t_1) + HPa_1(t_3^2 - t_1^2) + HPa_2(t_1 - t_3)}{t_3t_1^2 + t_3^2t_2 + t_1t_2^2 - t_3^2t_1 - t_1^2t_2 - t_3t_2^2} \\ C &= \frac{HPa_0(t_1t_2^2 - t_1^2t_2) + HPa_1(t_1^2 - t_2^2) + HPa_2(t_2 - t_1)}{t_3t_1^2 + t_3^2t_2 + t_1t_2^2 - t_3^2t_1 - t_1^2t_2 - t_3t_2^2} \end{aligned}$$

Demonstração. Tem-se que a fórmula de Binet pode ser representada da seguinte maneira:

$$HPa_n = A(t_1)^n + B(t_2)^n + C(t_3)^n$$

Assim, tem-se que para $n = 0$, $A + B + C = HPa_0$, para $n = 1$, tem-se $At_1 + Bt_2 + Ct_3 = HPa_1$ e para $n = 2$, tem $At_1^2 + Bt_2^2 + Ct_3^2 = HPa_2$. Com isso, pode-se construir um sistema de equações lineares da seguinte forma:

$$\begin{cases} A + B + C = HPa_0 \\ At_1 + Bt_2 + Ct_3 = HPa_1 \\ At_1^2 + Bt_2^2 + Ct_3^2 = HPa_2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear, pela regra de Cramer, tem-se que os coeficientes encontrados foram:

$$\begin{aligned} A &= \frac{HPa_0(t_2t_3^2 - t_2^2t_3) + HPa_1(t_2^2 - t_3^2) + HPa_2(t_3 - t_2)}{t_3t_1^2 + t_3^2t_2 + t_1t_2^2 - t_3^2t_1 - t_1^2t_2 - t_3t_2^2} \\ B &= \frac{HPa_0(t_3t_1^2 - t_3^2t_1) + HPa_1(t_3^2 - t_1^2) + HPa_2(t_1 - t_3)}{t_3t_1^2 + t_3^2t_2 + t_1t_2^2 - t_3^2t_1 - t_1^2t_2 - t_3t_2^2} \\ C &= \frac{HPa_0(t_1t_2^2 - t_1^2t_2) + HPa_1(t_1^2 - t_2^2) + HPa_2(t_2 - t_1)}{t_3t_1^2 + t_3^2t_2 + t_1t_2^2 - t_3^2t_1 - t_1^2t_2 - t_3t_2^2} \end{aligned}$$

□

Definição 52. A recorrência para os termos de índices inteiros negativos dos números híbridos de Padovan, para $n \geq 1$, é definida por:

$$HPa_{-n} = HPa_{-n+3} - HPa_{-n+1}.$$

Assim é possível calcular os termos de índices inteiros negativos da sequência híbrida de Padovan. Seja $HPa_{-1} = i + \varepsilon + h$, $HPa_{-2} = 1 + \varepsilon + h$ e $HPa_{-3} = i + h$.

Teorema 37. A matriz geradora híbrida de Padovan para índice inteiro negativo, $n > 0$, é dada por:

$$\begin{bmatrix} HPa_2 & HPa_1 & HPa_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} HPa_{-n+2} & HPa_{-n+1} & HPa_{-n} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 21, pode-se validar este teorema. □

3.1.7 Números Híbridos de Perrin

Nesta seção serão apresentadas algumas definições dos números híbridos de Perrin. Estes números híbridos são similares aos números híbridos de Padovan, diferenciando apenas os seus termos iniciais.

Definição 53. O número híbrido de Perrin, denominado por HPe_n , $n \in \mathbb{N}$, é definido por:

$$HPe_n = Pe_n + Pe_{n+1}i + Pe_{n+2}\varepsilon + Pe_{n+3}h.$$

Com os seguintes termos iniciais: $HPe_0 = 3 + 2\varepsilon + 3h$ e $HPe_1 = 2i + 3\varepsilon + 2h$ e $HPe_2 = 2 + 3i + 2\varepsilon + 5h$.

Proposição 30. A sequência de números híbridos de Perrin, HPe_n , com $n \geq 3$, satisfaz a recorrência $HPe_n = HPe_{n-2} + HPe_{n-3}$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} HPe_{n-2} + HPe_{n-3} &= (Pe_{n-2} + Pe_{n-1}i + Pe_n\varepsilon + Pe_{n+1}h) + (Pe_{n-3} + Pe_{n-2}i + Pe_{n-1}\varepsilon + Pe_nh) \\ &= (Pe_{n-2} + Pe_{n-3}) + (Pe_{n-1} + Pe_{n-2})i + (Pe_n + Pe_{n-1})\varepsilon + (Pe_{n+1} + Pe_n)h \\ &= Pe_n + Pe_{n+1}i + Pe_{n+2}\varepsilon + Pe_{n+3}h \\ &= HPe_n. \end{aligned}$$

□

Teorema 38. A forma matricial híbrida de Perrin, para $n \geq 1$, é dada por:

$$\begin{bmatrix} HPe_2 & HPe_1 & HPe_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} HPe_{n+2} & HPe_{n+1} & HPe_n \end{bmatrix}.$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 21, pode-se validar este teorema. □

Teorema 39. Para os números híbridos de Perrin, a equação característica é dada por:

$$l^3 - l - 1 = 0,$$

constata-se que existem três raízes, sendo duas complexas e conjugadas e uma solução real, sejam elas:

$$\begin{aligned} l_1 &= \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} \approx 1.32 \\ l_2, t_3 &= \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \left(-\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} \approx -0.662359 \pm 0.56229i \end{aligned}$$

Demonstração. Semelhantemente ao Teorema 4, utilizaremos o Teorema de Cayley-Hamilton, tem-se que a equação característica de Perrin é dada por (GOMES; OLIVEIRA, 2019):

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - P),$$

com $\lambda \in \mathbb{Z}$ ou $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ e tem-se que a matriz base da sequência de Perrin,

dada por: $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Assim, $\lambda I - P = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

E ainda,

$$\det(\lambda I - P) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda - 1.$$

Então, $p(\lambda) = 0$, tem-se $\lambda^3 - \lambda - 1 = 0$. Logo, $l^3 - l - 1 = 0$. $\square$

Definição 54. O conjugado do número híbrido de Perrin, denotado por $\overline{HPe_n}$, é definido por:

$$\overline{HPe_n} = Pe_n - Pe_{n+1}i - Pe_{n+2}\varepsilon - Pe_{n+3}h.$$

Definição 55. O caráter do número híbrido Perrin, denotado por $C(HPe_n)$, com $n \in \mathbb{N}$, é definido por:

$$C(HPe_n) = Pe_n^2 + (Pe_{n+1} - Pe_{n+2})^2 - Pe_{n+2}^2 - Pe_{n+3}^2.$$

Definição 56. Para os números híbridos de Perrin, tem-se o vetor representação desses números, para $n \in \mathbb{N}$, definido por:

$$\nu_{HPe_n} = (Pe_n, (Pe_{n+1} - Pe_{n+2}), Pe_{n+2}, Pe_{n+3}).$$

Proposição 31. A norma de um número híbrido de Perrin, denotada por $\|HPe_n\|$, com $n \in \mathbb{N}$, é definida como:

$$\|HPe_n\|^2 = | -2Pe_{n+1}Pe_{n+2} - 2Pe_{n+1}Pe_n |.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \|HPe_n\| &= \sqrt{|C(HPe_n)|} \\ \|HPe_n\|^2 &= |Pe_n^2 + (Pe_{n+1} - Pe_{n+2})^2 - Pe_{n+2}^2 - Pe_{n+3}^2| \\ &= |Pe_n^2 + Pe_{n+1}^2 - 2Pe_{n+1}Pe_{n+2} + Pe_{n+2}^2 - Pe_{n+2}^2 - Pe_{n+3}^2 - \\ &\quad (Pe_{n+1} + Pe_n)^2| \\ &= |Pe_n^2 + Pe_{n+1}^2 - 2Pe_{n+1}Pe_{n+2} - Pe_{n+1}^2 - 2Pe_{n+1}Pe_n - Pe_n^2| \\ &= | -2Pe_{n+1}Pe_{n+2} - 2Pe_{n+1}Pe_n |. \end{aligned}$$

$\square$

Definição 57. O vetor híbrido de Perrin é um vetor do espaço de Minkowski R_1^3 , para $n \in \mathbb{N}$, definido por:

$$\xi_{HPe_n} = ((Pe_{n+1} - Pe_{n+2}), Pe_{n+2}, Pe_{n+3}).$$

Definição 58. O inverso dos números híbridos de Perrin com $\|HPe_n\| \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, é dado por:

$$HPe_n^{-1} = \frac{\overline{HPe_n}}{C(HPe_n)}.$$

Proposição 32. A matriz do número híbrido de Perrin, com $n \in \mathbb{N}$, é dada por:

$$\varphi_{HPe_n} = \begin{bmatrix} Pe_n + Pe_{n+2} & 2Pe_{n+1} + Pe_n - Pe_{n+2} \\ Pe_{n+2} + Pe_n & Pe_n - Pe_{n+2} \end{bmatrix}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \varphi_{HPe_n} &= Pe_n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + Pe_{n+1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + Pe_{n+2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + Pe_{n+3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Pe_n + Pe_{n+2} & Pe_{n+1} - Pe_{n+2} + Pe_{n+3} \\ Pe_{n+2} - Pe_{n+1} + Pe_{n+3} & Pe_n - Pe_{n+2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Pe_n + Pe_{n+2} & Pe_{n+1} - Pe_{n+2} + Pe_{n+1} + Pe_n \\ Pe_{n+2} - Pe_{n+1} + Pe_{n+1} + Pe_n & Pe_n - Pe_{n+2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Pe_n + Pe_{n+2} & 2Pe_{n+1} + Pe_n - Pe_{n+2} \\ Pe_{n+2} + Pe_n & Pe_n - Pe_{n+2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Proposição 33. Se φ_{HPe_n} corresponde a matriz híbrida do número híbrido de Perrin, então $C(HPe_n) = \det \varphi_{HPe_n}$ e $\|HPe_n\| = \sqrt{|\det \varphi_{HPe_n}|}$.

Demonstração. Seja $HPe_n = Pe_n + Pe_{n+1}i + Pe_{n+2}\varepsilon + Pe_{n+3}h$. Atendendo ao Teorema 2, obtemos:

$$\begin{aligned} \det \varphi_{HPe_n} &= \begin{vmatrix} Pe_n + Pe_{n+2} & 2Pe_{n+1} + Pe_n - Pe_{n+2} \\ Pe_{n+2} + Pe_n & Pe_n - Pe_{n+2} \end{vmatrix} \\ &= Pe_n^2 - Pe_{n+2}^2 - (2Pe_{n+2}Pe_{n+1} + 2Pe_{n+1}Pe_n + Pe_nPe_{n+2} + Pe_n^2 - Pe_{n+2}^2 - Pe_nPe_{n+2}) \\ &= Pe_n^2 - Pe_{n+2}^2 - 2Pe_{n+1}Pe_{n+2} - 2Pe_{n+1}Pe_n - Pe_n^2 + Pe_{n+2}^2 \\ &= -2Pe_{n+1}Pe_{n+2} - 2Pe_{n+1}Pe_n \\ &= Pe_n^2 + Pe_{n+1}^2 - 2Pe_{n+1}Pe_{n+2} - Pe_{n+1}^2 - 2Pe_{n+1}Pe_n - Pe_n^2 \\ &= Pe_n^2 + Pe_{n+1}^2 - 2Pe_{n+1}Pe_{n+2} + Pe_{n+2}^2 - Pe_{n+2}^2 - (Pe_{n+1} + Pe_n)^2 \\ &= Pe_n^2 + (Pe_{n+1} - Pe_{n+2})^2 - Pe_{n+2}^2 - Pe_{n+3}^2 \\ &= C(HPe_n). \end{aligned}$$

Agora, tendo em conta que $\|HPe_n\| = \sqrt{|C(HPe_n)|}$, temos que $\|HPe_n\| = \sqrt{|det\varphi_{HPe_n}|}$, como pretendíamos provar. $\square$

Teorema 40. *A função geradora do número híbrido de Perrin, denotada por $G_{HPe_n}(l)$, $n \in \mathbb{N}$, é:*

$$G_{HPe_n}(l) = \frac{HPe_0 + HPe_1l + (HPe_2 - HPe_0)l^2}{1 - l^2 - l^3}.$$

Demonstração. Para definir a função geradora do número híbrido de Perrin, denotada por $G_{HPe_n}(l)$, vamos escrever uma sequência em que cada termo da sequência corresponde aos coeficientes

$$G_{HPe_n}(l) = \sum_{n=0}^{\infty} HPe_n l^n.$$

Fazendo manipulações algébricas devido a relação de recorrência podemos escrever essa sequência como:

$$\begin{aligned} G_{HPe_n}(l) &= HPe_0 + HPe_1l + HPe_2l^2 + HPe_3l^3 + HPe_4l^4 + \dots \\ -l^2G_{HPe_n}(l) &= -HPe_0l^2 - HPe_1l^3 - HPe_2l^4 - HPe_3l^5 - HPe_4l^6 - \dots \\ -l^3G_{HPe_n}(l) &= -HPe_0l^3 - HPe_1l^4 - HPe_2l^5 - HPe_3l^6 - HPe_4l^7 - \dots \end{aligned}$$

Somando cada membro, tem-se:

$$\begin{aligned} (1 - l^2 - l^3)G_{HPe_n}(l) &= HPe_0 + HPe_1l + (HPe_2 - HPe_0)l^2 + (HPe_3 - HPe_1 - HPe_0)l^3 + \dots \\ G_{HPe_n}(l) &= \frac{HPe_0 + HPe_1l + (HPe_2 - HPe_0)l^2}{1 - l^2 - l^3}. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 41. *Para $n \geq 0$, temos que a fórmula de Binet para o número híbrido de Perrin é dada como:*

$$HPe_n = \varphi(l_1)^n + \omega(l_2)^n + \theta(l_3)^n,$$

onde l_1, l_2 e l_3 são as raízes da equação característica da sequência híbrida de Perrin e φ, ω e θ os coeficientes iguais a:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{HPe_0(l_2l_3^2 - l_2^2l_3) + HPe_1(l_2^2 - l_3^2) + HPe_2(l_3 - l_2)}{l_3l_1^2 + l_3^2l_2 + l_1l_2^2 - l_3^2l_1 - l_1^2l_2 - l_3l_2^2}, \\ \omega &= \frac{HPe_0(l_3l_1^2 - l_3^2l_1) + HPe_1(l_3^2 - l_1^2) + HPe_2(l_1 - l_3)}{l_3l_1^2 + l_3^2l_2 + l_1l_2^2 - l_3^2l_1 - l_1^2l_2 - l_3l_2^2} \text{ e} \\ \theta &= \frac{HPe_0(l_1l_2^2 - l_1^2l_2) + HPe_1(l_1^2 - l_2^2) + HPe_2(l_2 - l_1)}{l_3l_1^2 + l_3^2l_2 + l_1l_2^2 - l_3^2l_1 - l_1^2l_2 - l_3l_2^2}. \end{aligned}$$

Demonstração. Tem-se que a fórmula de Binet pode ser representada da seguinte maneira:

$$HPe_n = \varphi(l_1)^n + \omega(l_2)^n + \theta(l_3)^n.$$

Assim, tem-se que para $n = 0$, obtêm $\varphi + \omega + \theta = HPe_0$, para $n = 1$, tem-se $\varphi l_1 + \omega l_2 + \theta l_3 = HPe_1$ e para $n = 2$, tem $\varphi l_1^2 + \omega l_2^2 + \theta l_3^2 = HPe_2$. Com isso, pode-se construir um sistema de equações lineares da seguinte forma:

$$\begin{cases} \varphi + \omega + \theta = HPe_0 \\ \varphi l_1 + \omega l_2 + \theta l_3 = HPe_1 \\ \varphi l_1^2 + \omega l_2^2 + \theta l_3^2 = HPe_2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear, pela regra de Cramer, tem-se que os coeficientes encontrados foram: $\varphi = \frac{HPe_0(l_2 l_3^2 - l_2^2 l_3) + HPe_1(l_2^2 - l_3^2) + HPe_2(l_3 - l_2)}{l_3 l_1^2 + l_3^2 l_2 + l_1 l_2^2 - l_3^2 l_1 - l_1^2 l_2 - l_3 l_2^2}$,
 $\omega = \frac{HPe_0(l_3 l_1^2 - l_3^2 l_1) + HPe_1(l_3^2 - l_1^2) + HPe_2(l_1 - l_3)}{l_3 l_1^2 + l_3^2 l_2 + l_1 l_2^2 - l_3^2 l_1 - l_1^2 l_2 - l_3 l_2^2}$ e
 $\theta = \frac{HPe_0(l_1 l_2^2 - l_1^2 l_2) + HPe_1(l_1^2 - l_2^2) + HPe_2(l_2 - l_1)}{l_3 l_1^2 + l_3^2 l_2 + l_1 l_2^2 - l_3^2 l_1 - l_1^2 l_2 - l_3 l_2^2}.$ $\square$

Definição 59. A recorrência para os termos de índices inteiros negativos dos números híbridos de Perrin, para $n \in \mathbb{N}$, é definida por:

$$HPe_{-n} = HPe_{-n+3} - HPe_{-n+1}.$$

Assim é possível calcular os termos de índices inteiros negativos da sequência híbrida de Perrin. Seja $HPe_{-1} = -1 + 3i + 2h$, $HPe_{-2} = 1 - i + 3\varepsilon$ e $HPe_{-3} = 2 + i - \varepsilon + 3h$.

Teorema 42. A matriz geradora híbrida de Perrin para índice inteiro negativo, $n > 0$, é dada por:

$$\begin{bmatrix} HPe_2 & HPe_1 & HPe_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} HPe_{-n+2} & HPe_{-n+1} & HPe_{-n} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 21, pode-se validar este teorema. $\square$

3.1.8 Números Híbridos de Narayana

Nesta seção serão apresentadas algumas definições a respeito dos números híbridos de Narayana, teoremas inerentes a eles, assim como a sua extensão para índice inteiro negativo.

Definição 60. O número híbrido de Narayana, denominado por HN_r , $r \in \mathbb{N}$, é definido por:

$$HN_r = N_r + N_{r+1}i + N_{r+2}\varepsilon + N_{r+3}h.$$

Com os seguintes termos iniciais: $HN_0 = i + \varepsilon + h$ e $HN_1 = 1 + i + \varepsilon + 2h$ e $HN_2 = 1 + i + 2\varepsilon + 3h$.

Teorema 43. *A sequência de números híbridos de Narayana, HN_r , com $r \geq 3$, satisfaz a recorrência $HN_r = HN_{r-1} + HN_{r-3}$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 HN_{r-1} + HN_{r-3} &= (N_{r-1} + N_r i + N_{r+1} \varepsilon + N_{r+2} h) + (N_{r-3} + N_{r-2} i + N_{r-1} \varepsilon + N_r h) \\
 &= (N_{r-1} + N_{r-3}) + (N_r + N_{r-2}) i + (N_{r+1} + N_{r-1}) \varepsilon + (N_{r+2} + N_r) h \\
 &= N_r + N_{r+1} i + N_{r+2} \varepsilon + N_{r+3} h \\
 &= HN_r
 \end{aligned}$$

□

Teorema 44. *A matriz geradora híbrida de Narayana, para $n \geq 3$, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} HN_1 & HN_0 & HN_{-1} \\ HN_{-1} & HN_{-2} & HN_{-3} \\ HN_0 & HN_{-1} & HN_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} HN_{r+1} & HN_r & HN_{r-1} \\ HN_{r-1} & HN_{r-2} & HN_{r-3} \\ HN_r & HN_{r-1} & HN_{r-2} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 21, pode-se validar este teorema. □

Teorema 45. *Para os números híbridos de Narayana, a equação característica é dada por:*

$$q^3 - q^2 - 1 = 0,$$

constata-se que existem três raízes, sendo duas complexas e conjugadas e uma solução real, sejam elas: $q_1 = -0.75487767$, $q_2 = 0.87743883 + 0.74486177i$ e $q_3 = 0.87743883 - 0.74486177i$.

Demonstração. Semelhantemente ao Teorema 4, utilizaremos o Teorema de Cayley-Hamilton, tem-se que o polinômio característico de Narayana é dado por (GOMES; OLIVEIRA, 2019):

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - T),$$

com $\lambda \in \mathbb{Z}$ ou $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ e tem-se que a matriz base da sequência de

Narayana, dada por: $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Assim, $\lambda I - T = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix}$.

E ainda,

$$\det(\lambda I - T) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 - 1.$$

Então, $p(\lambda) = 0$, tem-se $\lambda^3 - \lambda^2 - 1 = 0$. Logo, $q^3 - q^2 - 1 = 0$. □

Definição 61. O conjugado do números híbrido de Narayana, denotado por $\overline{HN_r}$, é definido por:

$$\overline{HN_r} = N_r - N_{r+1}i - N_{r+2}\varepsilon - N_{r+3}h.$$

Definição 62. O caráter do número híbrido Narayana, denotado por $C(HN_r)$, com $r \in \mathbb{N}$, é definido por:

$$C(HN_r) = N_r^2 + (N_{r+1} - N_{r+2})^2 - N_{r+2}^2 - N_{r+3}^2.$$

Definição 63. Para os números híbridos de Narayana, tem-se o vetor representação desses números, para $r \in \mathbb{N}$, definido por:

$$\nu_{HN_r} = (N_r, (N_{r+1} - N_{r+2}), N_{r+2}, N_{r+3}).$$

Proposição 34. A norma de um número híbrido de Narayana, denotada por $\|HN_r\|$, com $r \in \mathbb{N}$, é definida como:

$$\|HN_r\|^2 = |N_{r+1}^2 - 2N_{r+2}(N_{r+1} + N_r) - N_{r+2}^2|.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \|HN_r\| &= \sqrt{|C(HN_r)|} \\ \|HN_r\|^2 &= |N_r^2 + (N_{r+1} - N_{r+2})^2 - N_{r+2}^2 - N_{r+3}^2| \\ &= |N_r^2 + (N_{r+1} - N_{r+2})^2 - N_{r+2}^2 - (HN_{r+2} + HN_r)^2| \\ &= |N_r^2 + N_{r+1}^2 - 2N_{r+1}N_{r+2} - N_{r+2}^2 - 2N_{r+2}N_r - N_r^2| \\ &= |N_{r+1}^2 - 2N_{r+2}(N_{r+1} + N_r) - N_{r+2}^2|. \end{aligned}$$

□

Definição 64. O vetor híbrido de Narayana é um vetor do espaço de Minkowski R_1^3 , para $r \in \mathbb{N}$, definido por:

$$\xi_{HN_r} = ((N_{r+1} - N_{r+2}), N_{r+2}, N_{r+3}).$$

Definição 65. O inverso dos números híbridos de Narayana com $\|HN_r\| \neq 0$, $r \in \mathbb{N}$, é dado por:

$$HN_r^{-1} = \frac{\overline{HN_r}}{C(HN_r)}.$$

Proposição 35. A matriz do número híbrido de Narayana, com $r \in \mathbb{N}$, é dada por:

$$\varphi_{HN_r} = \begin{bmatrix} N_r + N_{r+2} & N_r + N_{r+1} \\ N_r - N_{r+1} + 2N_{r+2} & N_r - N_{r+2} \end{bmatrix}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\varphi_{HN_r} &= N_r \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + N_{r+1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + N_{r+2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + N_{r+3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} N_r + N_{r+2} & N_{r+1} - N_{r+2} + N_{r+3} \\ N_{r+2} - N_{r+1} + N_{r+3} & N_r - N_{r+2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} N_r + N_{r+2} & N_{r+1} - N_{r+2} + N_{r+2} + N_r \\ N_{r+2} - N_{r+1} + N_{r+2} + N_r & N_r - N_{r+2} \end{bmatrix} \\
&= \varphi_{HN_r} = \begin{bmatrix} N_r + N_{r+2} & N_r + N_{r+1} \\ N_r - N_{r+1} + 2N_{r+2} & N_r - N_{r+2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Proposição 36. Se φ_{HN_r} corresponde a matriz híbrida do número híbrido de Narayana, então $C(HN_r) = \det \varphi_{HN_r}$ e $\|HN_r\| = \sqrt{|\det \varphi_{HN_r}|}$.

Demonstração. Seja $HN_r = N_r + N_{r+1}i + N_{r+2}\varepsilon + N_{r+3}h$. Atendendo ao Teorema 2, obtemos:

$$\begin{aligned}
\det \varphi_{HN_r} &= \begin{vmatrix} N_r + N_{r+2} & N_r + N_{r+1} \\ N_r - N_{r+1} + 2N_{r+2} & N_r - N_{r+2} \end{vmatrix} \\
&= (N_r + N_{r+2})(N_r - N_{r+2}) - (N_r + N_{r+1})(N_r - N_{r+1} + 2N_{r+2}) \\
&= N_r^2 - N_{r+2}^2 - (N_r^2 - N_r N_{r+1} + 2N_r N_{r+2} + N_r N_{r+1} - N_{r+1}^2 + 2N_{r+1} N_{r+2}) \\
&= N_{r+1}^2 - 2N_{r+2}(N_{r+1} + N_r) - N_{r+2}^2 \\
&= N_r^2 + N_{r+1}^2 - 2N_{r+1}N_{r+2} + N_{r+2}^2 - N_{r+2}^2 - N_{r+2}^2 - 2N_{r+2}N_r - N_r^2 \\
&= N_r^2 + (N_{r+1} - N_{r+2})^2 - N_{r+2}^2 - (HN_{r+2} + HN_r)^2 \\
&= N_r^2 + (N_{r+1} - N_{r+2})^2 - N_{r+2}^2 - N_{r+3}^2 \\
&= C(HN_r).
\end{aligned}$$

Agora, tendo em conta que $\|HN_r\| = \sqrt{|C(HN_r)|}$, temos que $\|HN_r\| = \sqrt{|\det \varphi_{HN_r}|}$, como pretendíamos provar. □

Teorema 46. A função geradora do número híbrido de Narayana, denotada por $G_{HN_r}(q)$, $r \in \mathbb{N}$ é:

$$G_{HN_r}(q) = \frac{HN_0 + (HN_1 - HN_0)q + (HN_2 - HN_1)q^2}{1 - q - q^3}.$$

Demonstração. Para definir a função geradora do número híbrido Narayana, denotada por $G_{HN_r}(q)$, vamos escrever uma sequência em que cada termo da sequência corresponde aos coeficientes

$$G_{HN_r}(q) = \sum_{r=0}^{\infty} HN_r q^r.$$

Fazendo manipulações algébricas devido a relação de recorrência podemos escrever essa sequência como:

$$\begin{aligned} G_{HN_r}(q) &= HN_0 + HN_1q + HN_2q^2 + HN_3q^3 + HN_4q^4 + \dots \\ -qG_{HN_r}(q) &= -HN_0q - HN_1q^2 - HN_2q^3 - HN_3q^4 - HN_4q^5 - \dots \\ -q^3G_{HN_r}(q) &= -HN_0q^3 - HN_1q^4 - HN_2q^5 - HN_3q^6 - HN_4q^7 - \dots \end{aligned}$$

Somando cada membro acima, tem-se:

$$\begin{aligned} (1 - q - q^3)G_{HN_r}(q) &= HN_0 + (HN_1 - HN_0)q + (HN_2 - HN_1)q^2 + \\ &\quad (HN_3 - HN_2 - HN_0)q^3 + \dots \\ G_{HN_r}(q) &= \frac{HN_0 + (HN_1 - HN_0)q + (HN_2 - HN_1)q^2}{1 - q - q^3}. \end{aligned}$$

□

Teorema 47. Para $r \geq 0$ temos que a fórmula de Binet para o número híbrido de Narayana é dado como:

$$HN_r = \alpha(q_1)^r + \beta(q_2)^r + \gamma(q_3)^r,$$

onde q_1, q_2 e q_3 são as raízes da equação característica da sequência híbrida de Narayana e α, β e γ os coeficientes iguais a: $\alpha = \frac{HN_0(q_2q_3^2 - q_2^2q_3) + HN_1(q_2^2 - q_3^2) + HN_2(q_3 - q_2)}{q_3q_1^2 + q_3^2q_2 + q_1q_2^2 - q_3^2q_1 - q_1^2q_2 - q_3q_2^2}$, $\beta = \frac{HN_0(q_3q_1^2 - q_3^2q_1) + HN_1(q_3^2 - q_1^2) + HN_2(q_1 - q_3)}{q_3q_1^2 + q_3^2q_2 + q_1q_2^2 - q_3^2q_1 - q_1^2q_2 - q_3q_2^2}$ e $\gamma = \frac{HN_0(q_1q_2^2 - q_1^2q_2) + HN_1(q_1^2 - q_2^2) + HN_2(q_2 - q_1)}{q_3q_1^2 + q_3^2q_2 + q_1q_2^2 - q_3^2q_1 - q_1^2q_2 - q_3q_2^2}$.

Demonstração. Tem-se que a fórmula de Binet pode ser representada da seguinte maneira:

$$HN_r = \alpha(q_1)^r + \beta(q_2)^r + \gamma(q_3)^r.$$

Para $r = 0$, tem-se: $\alpha + \beta + \gamma = HN_0$, para $r = 1$, tem-se $\alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3 = HN_1$ e para $r = 2$, tem-se $\alpha q_1^2 + \beta q_2^2 + \gamma q_3^2 = HN_2$.

Com isso, podemos construir um sistema de equações lineares da seguinte forma:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = HN_0 \\ \alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3 = HN_1 \\ \alpha q_1^2 + \beta q_2^2 + \gamma q_3^2 = HN_2 \end{cases}$$

Esse sistema é possível e determinado e resolvendo o sistema linear, pela regra de Cramer, temos que os coeficientes encontrados foram: $\alpha = \frac{HN_0(q_2q_3^2 - q_2^2q_3) + HN_1(q_2^2 - q_3^2) + HN_2(q_3 - q_2)}{q_3q_1^2 + q_3^2q_2 + q_1q_2^2 - q_3^2q_1 - q_1^2q_2 - q_3q_2^2}$, $\beta = \frac{HN_0(q_3q_1^2 - q_3^2q_1) + HN_1(q_3^2 - q_1^2) + HN_2(q_1 - q_3)}{q_3q_1^2 + q_3^2q_2 + q_1q_2^2 - q_3^2q_1 - q_1^2q_2 - q_3q_2^2}$ e $\gamma = \frac{HN_0(q_1q_2^2 - q_1^2q_2) + HN_1(q_1^2 - q_2^2) + HN_2(q_2 - q_1)}{q_3q_1^2 + q_3^2q_2 + q_1q_2^2 - q_3^2q_1 - q_1^2q_2 - q_3q_2^2}$

□

Definição 66. A recorrência para os termos de índices inteiros negativos dos números híbridos de Narayana, para $r \geq 1$, é dada por:

$$HN_{-r} = HN_{-r+3} - HN_{-r+2}.$$

Assim é possível calcular os termos de índice inteiros negativos da sequência híbrida de Narayana. Seja $HN_{-1} = \varepsilon + h$, $HN_{-2} = 1 + h$ e $HN_{-3} = -i + \varepsilon + h$.

Teorema 48. A matriz geradora híbrida de Narayana para índice inteiro negativo, $n > 0$, é dada por:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} HN_1 & HN_0 & HN_{-1} \\ HN_{-1} & HN_{-2} & HN_{-3} \\ HN_0 & HN_{-1} & HN_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} HN_{-r+1} & HN_{-r} & HN_{-r-1} \\ HN_{-r-1} & HN_{-r-2} & HN_{-r-3} \\ HN_{-r} & HN_{-r-1} & HN_{-r-2} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 21, pode-se validar este teorema. $\square$

3.1.9 Números Híbridos de Mersenne

Nesta seção serão enunciadas algumas definições dos números híbridos de Mersenne, estudos em torno dos híbridos de Mersenne foi apresentado por Mangueira, Alves e Catarino (2020b). Com isso, nesta seção, continuaremos o estudo desses números apresentando teoremas inerentes a eles, assim como a sua extensão para índice inteiro negativo.

Definição 67. O número híbrido de Mersenne, denominado por HM_n , $n \in \mathbb{N}$, é definido como (MANGUEIRA; ALVES; CATARINO, 2020b):

$$HM_n = M_n + M_{n+1}i + M_{n+2}\varepsilon + M_{n+3}h.$$

Com os seguintes termos iniciais: $HM_0 = i + 3\varepsilon + 7h$ e $HM_1 = 1 + 3i + 7\varepsilon + 15h$.

Teorema 49. A sequência de números híbridos de Mersenne, HM_n , com $n \geq 0$, satisfaz a recorrência $HM_{n+2} = 3HM_{n+1} - 2HM_n$ (MANGUEIRA; ALVES; CATARINO, 2020b).

Demonstração.

$$\begin{aligned} 3HM_{n+1} - 2HM_n &= 3(M_{n+1} + M_{n+2}i + M_{n+3}\varepsilon + M_{n+4}h) - 2(M_n + M_{n+1}i + M_{n+2}\varepsilon + M_{n+3}h) \\ &= (3M_{n+1} - 2M_n) + (3M_{n+2} - 2M_{n+1})i + (3M_{n+3} - 2M_{n+2})\varepsilon + \\ &\quad (3M_{n+4} - 2M_{n+3})h \\ &= M_{n+2} + M_{n+3}i + M_{n+4}\varepsilon + M_{n+5}h \\ &= HM_{n+2}. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 50. *A matriz geradora híbrida de Mersenne, para $n \geq 1$, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} HM_1 & -2HM_0 \\ HM_0 & -2HM_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} HM_{n+1} & 2HM_n \\ HM_n & 2HM_{n-1} \end{bmatrix},$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 3, pode-se validar este teorema. $\square$

Teorema 51. *Para os números híbridos de Mersenne, a equação característica é dada por:*

$$v^2 - 3v + 2 = 0,$$

onde é uma equação de segundo grau possuindo duas raízes reais $v_1 = 2$ e $v_2 = 1$.

Demonstração. Semelhantemente ao Teorema 4, utilizaremos o Teorema de Cayley-Hamilton, tem-se que o polinômio característico de Mersenne é dado por (GOMES; OLIVEIRA, 2019):

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - Z),$$

com $\lambda \in \mathbb{Z}$ ou $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ e tem-se que a matriz base da sequência de Mersenne,

dada por: $Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$. Assim, $\lambda I - Z = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda - 3 \end{bmatrix}$.

E ainda,

$$\det(\lambda I - Z) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2.$$

Então, $p(\lambda) = 0$, tem-se $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Logo, $v^2 - 3v + 2 = 0$. $\square$

Definição 68. *O conjugado do número híbrido de Mersenne, denotado por $\overline{HM_n}$, é definido como:*

$$\overline{HM_n} = M_n - M_{n+1}i - M_{n+2}\varepsilon - M_{n+3}h.$$

Definição 69. *O caráter do número híbrido de Mersenne, denotado por $C(HM_n)$, com $n \in \mathbb{N}$, é definido como (MANGUEIRA; ALVES; CATARINO, 2020b):*

$$C(HM_n) = M_n^2 + (M_{n+1} - M_{n+2})^2 - M_{n+2}^2 - M_{n+3}^2.$$

Definição 70. *Para os números híbridos de Mersenne, tem-se o vetor representação desses números, para $n \in \mathbb{N}$, definido por:*

$$\nu_{HM_n} = (M_n, (M_{n+1} - M_{n+2}), M_{n+2}, M_{n+3}).$$

Proposição 37. *A norma de um número híbrido de Mersenne é definido como (MANGUEIRA; ALVES; CATARINO, 2020b):*

$$\|HM_n\|^2 = |M_n^2 - 3M_{n+1}^2 + 10M_{n+1}M_{n+2} - 9M_{n+2}^2|.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\|HM_n\| &= \sqrt{|C(HM_n)|} \\
\|HM_n\|^2 &= |M_n^2 + M_{n+1}^2 - 2M_{n+1}M_{n+2} - M_{n+3}^2| \\
&= |M_n^2 + M_{n+1}^2 - 2M_{n+1}M_{n+2} - (3HM_{n+2} - 2HM_{n+1})^2| \\
&= |M_n^2 + M_{n+1}^2 - 2M_{n+1}M_{n+2} - 9M_{n+2}^2 + 12M_{n+1}M_{n+2} - 4M_{n+1}^2| \\
&= |M_n^2 - 3M_{n+1}^2 + 10M_{n+1}M_{n+2} - 9M_{n+2}^2|.
\end{aligned}$$

□

Definição 71. O vetor híbrido de Mersenne é um vetor do espaço de Minkowski R_1^3 , para $n \in \mathbb{N}$, definido por:

$$\xi_{HM_n} = ((M_{n+1} - M_{n+2}), M_{n+2}, M_{n+3}).$$

Definição 72. O inverso dos números híbridos de Mersenne, com $\|HM_n\| \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, é dado por:

$$HM_n^{-1} = \frac{\overline{HM_n}}{C(HM_n)}.$$

Proposição 38. A matriz do número híbrido de Mersenne, com $n \in \mathbb{N}$, é definida por (MANGUEIRA; ALVES; CATARINO, 2020b):

$$\varphi_{HM_n} = \begin{bmatrix} M_n + M_{n+2} & -M_{n+1} + 2M_{n+2} \\ 4M_{n+2} - 3M_{n+1} & M_n - M_{n+2} \end{bmatrix}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\varphi_{HM_n} &= M_n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + M_{n+1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + M_{n+2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + M_{n+3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} M_n + M_{n+2} & M_{n+1} - M_{n+2} + M_{n+3} \\ M_{n+2} - M_{n+1} + M_{n+3} & M_n - M_{n+2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} M_n + M_{n+2} & M_{n+1} - M_{n+2} + 3M_{n+2} - 2M_{n+1} \\ M_{n+2} - M_{n+1} + 3M_{n+2} - 2M_{n+1} & M_n - M_{n+2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} M_n + M_{n+2} & -M_{n+1} + 2M_{n+2} \\ 4M_{n+2} - 3M_{n+1} & M_n - M_{n+2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Proposição 39. Se φ_{HM_n} corresponde a matriz híbrida do número híbrido de Mersenne, então $C(HM_n) = \det \varphi_{HM_n}$ e $\|HM_n\| = \sqrt{| \det \varphi_{HM_n} |}$.

Demonstração. Seja $HM_n = M_n + M_{n+1}i + M_{n+2}\varepsilon + M_{n+3}h$. Atendendo ao Teorema 2, obtemos:

$$\begin{aligned}
\det\varphi_{HM_n} &= \begin{vmatrix} M_n + M_{n+2} & -M_{n+1} + 2M_{n+2} \\ 4M_{n+2} - 3M_{n+1} & M_n - M_{n+2} \end{vmatrix} \\
&= M_n^2 - M_{n+2}^2 + 4M_{n+1}M_{n+2} - 3M_{n+1}^2 - 8M_{n+2}^2 + 6M_{n+1}M_{n+2} \\
&= M_n^2 - M_{n+2}^2 + 10M_{n+1}M_{n+2} - 3M_{n+1}^2 - 8M_{n+2}^2 \\
&= M_n^2 - 3M_{n+1}^2 + 10M_{n+1}M_{n+2} - 9M_{n+2}^2 \\
&= M_n^2 + M_{n+1}^2 - 2M_{n+1}M_{n+2} - 9M_{n+2}^2 + 12M_{n+1}M_{n+2} - 4M_{n+1}^2 \\
&= M_n^2 + M_{n+1}^2 - 2M_{n+1}M_{n+2} + M_{n+2}^2 - M_{n+2}^2 - (3HM_{n+2} - 2HM_{n+1})^2 \\
&= M_n^2 + M_{n+1}^2 - 2M_{n+1}M_{n+2} + M_{n+2}^2 - M_{n+2}^2 - M_{n+3}^2 \\
&= M_n^2 + (M_{n+1} - M_{n+2})^2 - M_{n+2}^2 - M_{n+3}^2 \\
&= C(HM_n).
\end{aligned}$$

Agora, tendo em conta que $\|HM_n\| = \sqrt{|C(HM_n)|}$, temos que $\|HM_n\| = \sqrt{|\det\varphi_{HM_n}|}$, como pretendíamos provar. $\square$

Teorema 52. A função geradora do número híbrido de Mersenne, denotada por $G_{HM_n}(v)$, (MANGUEIRA; ALVES; CATARINO, 2020b):

$$G_{HM_n}(v) = \frac{HM_0 + (HM_1 - 3HM_0)v}{(1 - 3v + 2v^2)}.$$

Demonstração. Para definir a função geradora do número híbrido de Mersenne, denotada por $G(HM_n)(v)$, vamos escrever uma sequência em que cada termo da sequência corresponde aos coeficientes

$$G_{HM_n}(v) = \sum_{n=0}^{\infty} HM_n v^n.$$

Fazendo manipulações algébricas devido a relação de recorrência podemos escrever essa sequência como:

$$\begin{aligned}
G_{HM_n}(v) &= HM_0 + HM_1v + HM_2v^2 + \dots + HM_nv^n + \dots \\
-3vG_{HM_n}(v) &= -3HM_0v - 3HM_1v^2 - 3HM_2v^3 - \dots - 3HM_nv^{n+1} - \dots \\
2v^2G_{HM_n}(v) &= 2HM_0v^2 + 2HM_1v^3 + 2HM_2v^4 + \dots + 2HM_nv^{n+2} + \dots
\end{aligned}$$

Somando cada membro, temos:

$$\begin{aligned}
(1 - 3v + 2v^2)G_{HM_n}(v) &= HM_0 + (HM_1 - 3HM_0)v + (HM_2 - 3HM_1 + 2HM_0)v^2 + \\
&\quad (HM_3 - 3HM_2 + 2HM_1)v^3 + \dots + (HM_n - 3HM_{n-1} + 2HM_{n-2})v^n \\
&= HM_0 + (HM_1 - 3HM_0)v + 0v^2 + 0v^3 + \dots + 0v^n \\
G_{HM_n}(v) &= \frac{HM_0 + (HM_1 - 3HM_0)v}{(1 - 3v + 2v^2)}.
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 53. Para $n \geq 0$, tem-se que a fórmula de Binet para o número híbrido de Mersenne é dada por (MANGUEIRA; ALVES; CATARINO, 2020b):

$$HM_n = (-HM_0 + HM_1)v_1^n + (2HM_0 - HM_1)v_2^n,$$

onde v_1 e v_2 são as raízes da equação característica da sequência.

Demonstração. Tem-se que a fórmula de Binet pode ser representada da seguinte maneira:

$$HM_n = Av_1^n + Bv_2^n.$$

Para $n = 0$, tem-se: $A + B = HM_0$ e, para $n = 1$, temos $Av_1 + Bv_2 = HM_1$.

Podemos construir um sistema de equações lineares da seguinte forma:

$$\begin{cases} A + B &= HM_0 \\ 2A + B &= HM_1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear, temos que os coeficientes encontrados foram: $A = -HM_0 + HM_1$ e $B = 2HM_0 - HM_1$.

Fazendo as devidas substituições na fórmula de Binet, temos:

$$HM_n = (-HM_0 + HM_1)v_1^n + (2HM_0 - HM_1)v_2^n.$$

□

Podemos reescrever a fórmula de Binet como $HM_n = Pv_1^n + Qv_2^n$, sendo $P = -HM_0 + HM_1$ e $Q = 2HM_0 - HM_1$. Assim, apresentaremos a seguir, a dedução de identidades clássicas vinculadas ao modelo híbrido de Mersenne.

Proposição 40. (*Identidade de Catalan*) Para os números naturais n e k , com $n \geq k$, se HM_n é o n -ésimo número híbrido de Mersenne, então tem-se a seguinte identidade:

$$HM_{n-k}HM_{n+k} - HM_n^2 = 2^n \left(PQv_1^{-k}v_2^k - 2PQ + PQv_1^kv_2^{-k} \right).$$

Demonstração. Para demonstrar este Teorema utilizaremos as relações $v_1v_2 = 2$.

$$\begin{aligned} HM_{n-k}HM_{n+k} - HM_n^2 &= (Pv_1^{n-k} + Qv_2^{n-k})(Pv_1^{n+k} + Qv_2^{n+k}) - (Pv_1^n + Qv_2^n)^2 \\ &= P^2v^{2n} + PQv_1^{n-k}v_2^{n+k} + PQv_1^{n+k}v_2^{n-k} + Q^2v^{2n} - P^2v^{2n} - \\ &\quad 2PQv_1^n v_2^n - Q^2v^{2n} \\ &= PQv_1^{n-k}v_2^{n+k} - 2PQv_1^n v_2^n + PQv_1^{n+k}v_2^{n-k} \\ &= v_1^n v_2^n \left(PQv_1^{-k}v_2^k - 2PQ + PQv_1^kv_2^{-k} \right) \\ &= 2^n \left(PQv_1^{-k}v_2^k - 2PQ + PQv_1^kv_2^{-k} \right). \end{aligned}$$

□

A identidade de Cassini é um caso particular da identidade de Catalan, quando $k = 1$. Assim, tem-se o seguinte resultado.

Corolário 6. (*Identidade de Cassini*) Para os números naturais n , se HM_n é o n -ésimo número híbrido de Mersenne, então temos a seguinte identidade:

$$HM_{n-1}HM_{n+1} - HM_n^2 = 2^n (PQv_1^{-1}v_2 - 2PQ + PQv_1v_2^{-1}).$$

Proposição 41. (*Identidade de d'Ocagne*) Se HM_n , é o n -ésimo número híbrido de Mersenne, a expressão da identidade de d'Ocagne é dada por:

$$HM_mHM_{n+1} - HM_{m+1}HM_n = 2^n (PQv_1^{-1}v_2 - 2PQ + PQv_1v_2^{-1}).$$

Demonstração. Esta identidade é uma generalização da identidade de Cassini, fazendo $m = n - 1$, sendo m um número inteiro não negativo e n um numero inteiro positivo, temos a seguinte identidade: $HM_mHM_{n+1} - HM_{m+1}HM_n = HM_{n-1}HM_{n+1} - HM_n^2$ onde pode encontramos a demonstração no corolário anterior. $\square$

Definição 73. A recorrência para os termos de índices inteiros negativos dos números híbridos de Mersenne, para $n > 1$, é definido por:

$$HM_{-n} = \frac{3HM_{-n+1} - HM_{-n+2}}{2}.$$

Assim é possível calcular os termos de índice inteiros negativos da sequência híbrida de Mersenne. Com isso, temos: $HM_{-1} = -\frac{1}{2} + \varepsilon + 3h$ e $HM_{-2} = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}i + h$.

Teorema 54. A matriz geradora híbrida de Mersenne para índice inteiro negativo, $n > 0$, é dada por:

$$\begin{bmatrix} HM_0 & HM_{-1} \\ HM_1 & HM_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} HM_{-n} & HM_{-n-1} \\ HM_{-n+1} & HM_{-n} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 3, pode-se validar este teorema. $\square$

3.1.10 Números Híbridos de Oresme

Os números híbridos de Oresme foram abordados por Manguiera et al. (2021b) e, nesta seção, iremos dar continuidade a este estudo.

Definição 74. O número híbrido de Oresme, denominado por HO_n é definido como:

$$HO_n = O_n + O_{n+1}i + O_{n+2}\varepsilon + O_{n+3}h.$$

Com as seguintes condições iniciais: $HO_0 = \frac{1}{2}i + \frac{2}{4}\varepsilon + \frac{3}{8}h$ e $HO_1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4}i + \frac{3}{8}\varepsilon + \frac{4}{16}h$.

Por outro lado, para $n \geq 0$, pode-se dizer que os números híbridos de Oresme também pode ser descrito como:

$$HO_n = \frac{n}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}}i + \frac{n+2}{2^{n+2}}\varepsilon + \frac{n+3}{2^{n+3}}h.$$

Proposição 42. *A sequência dos números híbridos de Oresme, HO_n , com $n \geq 0$, satisfaz a recorrência $HO_{n+2} = HO_{n+1} - \frac{1}{4}HO_n$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} HO_{n+1} - \frac{1}{4}HO_n &= (O_{n+1} + O_{n+2}i + O_{n+3}\varepsilon + O_{n+4}h) - \frac{1}{4}(O_n + O_{n+1}i + O_{n+2}\varepsilon + O_{n+3}h) \\ &= (O_{n+1} - \frac{1}{4}O_n) + (O_{n+2} - \frac{1}{4}O_{n+1})i + (O_{n+3} - \frac{1}{4}O_{n+2})\varepsilon + (O_{n+4} - \frac{1}{4}O_{n+3})h \\ &= O_{n+2} + O_{n+3}i + O_{n+4}\varepsilon + O_{n+5}h \\ &= HO_{n+2}. \end{aligned}$$

□

Teorema 55. *A matriz geradora híbrida de Oresme, para $n \geq 1$, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} HO_1 & HO_0 \\ HO_0 & HO_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} HO_{n+1} & HO_n \\ HO_n & HO_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 3, pode-se validar este teorema. □

Teorema 56. *Para os números híbridos de Oresme, a equação característica é dada por:*

$$4r^2 - 4r + 1 = 0,$$

onde é uma equação de segundo grau possuindo duas raízes reais $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$.

Demonstração. Semelhantemente ao Teorema 4, utilizaremos o Teorema de Cayley-Hamilton, tem-se que o polinômio característico de Oresme é dado por (GOMES; OLIVEIRA, 2019):

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - L),$$

com $\lambda \in \mathbb{Z}$ ou $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ e tem-se que a matriz base da sequência de Oresme,

dada por: $L = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Assim, $\lambda I - L = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & \frac{1}{4} \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}$.

E ainda,

$$\det(\lambda I - L) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & \frac{1}{4} \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4}.$$

Então, $p(\lambda) = 0$, tem-se $\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0$. Logo, $r^2 - r + \frac{1}{4} = 0$, ou ainda, $4r^2 - 4r + 1 = 0$. □

Definição 75. O conjugado do número híbrido de Oresme, denotado por $\overline{HO_n}$, é definido como:

$$\overline{HO_n} = O_n - O_{n+1}i - O_{n+2}\varepsilon - O_{n+3}h.$$

Definição 76. O caráter do número híbrido de Oresme, denotado por $C(HO_n)$, com $n \in \mathbb{N}$, é definido como:

$$C(HO_n) = O_n^2 + (O_{n+1} - O_{n+2})^2 - O_{n+2}^2 - O_{n+3}^2.$$

Definição 77. Para os números híbridos de Oresme, tem-se o vetor representação desses números, para $n \in \mathbb{N}$, definido por:

$$\nu_{HO_n} = (O_n, (O_{n+1} - O_{n+2}), O_{n+2}, O_{n+3}).$$

Proposição 43. A norma de um número híbrido de Oresme é definido como:

$$\|HO_n\|^2 = \left| O_n^2 + \frac{15}{16}O_{n+1}^2 - \frac{3}{2}O_{n+1}O_{n+2} - O_{n+2}^2 \right|.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \|HO_n\| &= \sqrt{|C(HO_n)|} \\ \|HO_n\|^2 &= |O_n^2 + (O_{n+1} - O_{n+2})^2 - O_{n+2}^2 - O_{n+3}^2| \\ &= |O_n^2 + O_{n+1}^2 - 2O_{n+1}O_{n+2} + O_{n+2}^2 + \frac{1}{2}O_{n+1}O_{n+2} - \frac{1}{16}O_{n+1}^2| \\ &= |O_n^2 + \frac{15}{16}O_{n+1}^2 - \frac{3}{2}O_{n+1}O_{n+2} - O_{n+2}^2|. \end{aligned}$$

□

Definição 78. O vetor híbrido de Oresme é um vetor do espaço de Minkowski R_1^3 , para $n \in \mathbb{N}$, definido por:

$$\xi_{HO_n} = ((O_{n+1} - O_{n+2}), O_{n+2}, O_{n+3}).$$

Definição 79. O inverso dos números híbridos de Oresme, com $\|HO_n\| \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, é dado por:

$$HO_n^{-1} = \frac{\overline{HO_n}}{C(HO_n)}.$$

Proposição 44. A matriz do número híbrido de Oresme, com $n \in \mathbb{N}$, é definida como:

$$\varphi_{HO_n} = \begin{bmatrix} O_n + O_{n+2} & \frac{3}{4}O_{n+1} \\ 2O_{n+2} - \frac{5}{4}O_{n+1} & O_n - O_{n+2} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Özdemir (2018) define a forma da matricial de um número híbrido como:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{HM_n} &= O_n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + O_{n+1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + O_{n+2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + O_{n+3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} O_n + O_{n+2} & O_{n+1} - O_{n+2} + O_{n+3} \\ O_{n+2} - O_{n+1} + O_{n+3} & O_n - O_{n+2} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} O_n + O_{n+2} & O_{n+1} - O_{n+2} + O_{n+2} - \frac{1}{4}O_{n+1} \\ O_{n+2} - O_{n+1} + O_{n+2} - \frac{1}{4}O_{n+1} & O_n - O_{n+2} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} O_n + O_{n+2} & \frac{3}{4}O_{n+1} \\ 2O_{n+2} - \frac{5}{4}O_{n+1} & O_n - O_{n+2} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

□

Proposição 45. Se φ_{HO_n} corresponde a matriz híbrida do número híbrido de Oresme, então $C(HO_n) = \det \varphi_{HO_n}$ e $\|HO_n\| = \sqrt{|\det \varphi_{HO_n}|}$.

Demonstração. Seja $HO_n = O_n + O_{n+1}i + O_{n+2}\varepsilon + O_{n+3}h$. Atendendo ao Teorema 2, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \det \varphi_{HO_n} &= \begin{vmatrix} O_n + O_{n+2} & \frac{3}{4}O_{n+1} \\ 2O_{n+2} - \frac{5}{4}O_{n+1} & O_n - O_{n+2} \end{vmatrix} \\
 &= (O_n + O_{n+2})(O_n - O_{n+2}) - \frac{3}{4}O_{n+1}(2O_{n+2} - \frac{5}{4}O_{n+1}) \\
 &= O_n^2 - O_{n+2}^2 - \frac{3}{2}O_{n+1}O_{n+2} + \frac{15}{16}O_{n+1}^2 \\
 &= O_n^2 + O_{n+1}^2 - 2O_{n+1}O_{n+2} + O_{n+2}^2 - O_{n+2}^2 - O_{n+2}^2 + \frac{1}{2}O_{n+1}O_{n+2} - \frac{1}{16}O_{n+1}^2 \\
 &= O_n^2 + (O_{n+1} - O_{n+2})^2 - O_{n+2}^2 - (O_{n+2} - \frac{1}{4}O_{n+1})^2 \\
 &= O_n^2 + (O_{n+1} - O_{n+2})^2 - O_{n+2}^2 - O_{n+3}^2 \\
 &= C(HO_n).
 \end{aligned}$$

Agora, tendo em conta que $\|HO_n\| = \sqrt{|C(HO_n)|}$, temos que $\|HO_n\| = \sqrt{|\det \varphi_{HO_n}|}$, como pretendíamos provar. □

Teorema 57. A função geradora dos números híbridos de Oresme, para $n \in \mathbb{N}$, denotada por $G_{HO_n}(r)$, é apresentado como:

$$G_{HO_n}(r) = \frac{HO_0 + (HO_1 - HO_0)r}{(1 - r + \frac{1}{4}r^2)}.$$

Demonstração. Para definir a função geradora do número híbrido de Oresme, denotada por $G(HO_n)(r)$, vamos escrever uma sequência em que cada termo corresponde aos coeficientes.

$$G_{HO_n}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} HO_n r^n.$$

Fazendo manipulações algébricas devido a relação de recorrência podemos escrever essa sequência como:

$$\begin{aligned} G_{HO_n}(r) &= HO_0 + HO_1 r + HO_2 r^2 + \dots + HO_n r^n + \dots \\ -r G_{HO_n}(r) &= -HO_0 r - HO_1 r^2 - HO_2 r^3 - \dots - HO_n r^{n+1} - \dots \\ \frac{1}{4} r^2 G_{HO_n}(r) &= \frac{1}{4} HO_0 r^2 + \frac{1}{4} HO_1 r^3 + \frac{1}{4} HO_2 r^4 + \dots + \frac{1}{4} HO_n r^{n+2} + \dots \end{aligned}$$

Somando cada membro, temos:

$$\begin{aligned} (1 - r + \frac{1}{4} r^2) G_{HO_n}(r) &= HO_0 + (HO_1 - HO_0) r + (HO_2 - HO_1 + \frac{1}{4} HO_0) r^2 \\ (1 - r + \frac{1}{4} r^2) G_{HO_n}(r) &= HO_0 + (HO_1 - HO_0) r + 0 r^2 \\ G_{HO_n}(r) &= \frac{HO_0 + (HO_1 - HO_0) r}{(1 - r + \frac{1}{4} r^2)}. \end{aligned}$$

□

Definição 80. A recorrência para os termos de índices inteiros negativos dos números híbridos de Oresme, para $n \geq 1$, é definido por:

$$HO_{-n} = 4(HO_{-n+1} - HO_{-n+2}).$$

Obtendo os números $HO_{-1} = -2 + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{2}{4}h$ e $HO_{-2} = -8 - 2i + \frac{1}{2}h$.

Teorema 58. A matriz geradora híbrida de Oresme para índice inteiro negativo, $n > 0$, é dada por:

$$\begin{bmatrix} HO_1 & HO_0 \\ HO_0 & HO_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} HO_{-n+1} & HO_{-n} \\ HO_{-n} & HO_{-n-1} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 3, pode-se validar este teorema. □

3.2 Hipercomplexificação de Sequências

Harman (1981) explora relações bidimensionais ou números gaussianos, denotados por $G(n, m) = n + im$ sendo $n, m \in \mathbb{Z}$ e $i^2 = l^2 = -1$ e tridimensionais, denotados por $G(l, n, m)$ a partir do modelo unidimensional da Sequência de Fibonacci. De modo

semelhante, Oliveira (2018), Oliveira, Alves e Paiva (2017) definem as identidades bi e tridimensionais para os números de Fibonacci na forma complexa e algumas propriedades inerentes a eles e, também, Diskaya e Menken (2022) definem a relação n -dimensional de (p, q) -Fibonacci. E ainda, podemos encontrar a complexificação de outras sequências nas pesquisas matemáticas, Mangueira et al. (2021a) apresentam as relações bidimensionais de Lucas, Vieira, Alves e Catarino (2019a), Vieira et al. (2021a) apresentam a relação bi, tri e n -dimensionais dos números de Leonardo e identidades inerentes a eles, Vieira (2020) apresenta as relações bi, tri e n -dimensionais de Padovan, Mangueira et al. (2021b), Vieira et al. (2021b) apresentam as relações bi, tri e n -dimensionais de Perrin e Bezerra, Alves e Vieira (2020) apresentam as relações bi e tridimensionais de Narayana.

Nesse sentido, o processo de complexificação das sequências é associado à inserção da unidade imaginária, ao aumento dimensional e à sua correspondente representação algébrica. Com base nisso, nas subseções à seguir serão apresentadas hipercomplexificações de outras sequências lineares.

3.2.1 Hipercomplexificação da Sequência de Pell

3.2.1.1 Relações Recorrentes Bidimensionais de Pell

Nesta subseção será introduzida a relação bidimensional da Sequência de Pell, serão definidas duas relações de recorrência, baseadas na recorrência unidimensional.

Definição 81. *Os números na forma $P(n, m)$ representarão os números da Sequência de Pell bidimensional e, devem satisfazer às seguintes condições bidimensionais de recorrência, em que $m, n \in \mathbb{N}$:*

$$\begin{cases} P(n+1, m) = 2P(n, m) + P(n-1, m) \\ P(n, m+1) = 2P(n, m) + P(n, m-1) \end{cases}$$

Com os seguintes valores iniciais definidos: $P(0, 0) = 0$; $P(1, 0) = 1$; $P(0, 1) = i$; e $P(1, 1) = 1 + i$, onde $i^2 = -1$.

Lema 1. *Valem as seguintes propriedades:*

- (a) $P(n, 0) = P_n$;
- (b) $P(0, m) = P_m \cdot i$;
- (c) $P(1, m) = (P_m + P_{m-1}) + P_m \cdot i$
- (d) $P(n, 1) = P_n + (P_n + P_{n-1}) \cdot i$

Demonstração. (a) Através da recorrência $P(n+1, m) = 2P(n, m) + P(n-1, m)$, recorre-se ao Princípio de Indução Matemática para a prova para este Lema.

Nesse sentido, para $n = 0$:

$$\begin{aligned} P(0, 0) &= P_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida, tendo em conta que $P(0, 0) = 0$.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n$, ou seja, supondo que

$$P(k, 0) = P_k$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} P(k + 1, 0) &= 2P(k, 0) + P(k - 1, 0) \\ &= 2P_k + P_{k-1} \\ &= P_{k+1} \end{aligned}$$

Desse modo, verifica-se a validade do lema 1 (a).

(b) Utilizando a recorrência $P(n, m + 1) = 2P(n, m) + P(n, m - 1)$ e o Princípio de Indução Matemática, tem-se:

Para $m = 0$:

$$\begin{aligned} P(0, 0) &= P_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida, pois $P(0, 0) = P_0 i$.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq m$, ou seja, supondo que

$$P(0, k) = P_k i$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} P(0, k + 1) &= 2P(0, k) + P(0, k - 1) \\ &= 2P_k i + P_{k-1} i \\ &= (2P_k + P_{k-1}) i \\ &= P_{k+1} i \end{aligned}$$

Com isso, tem-se a validade do lema 1 (b).

(c) Utilizando a recorrência $P(n, m + 1) = 2P(n, m) + P(n, m - 1)$, fixando $n = 1$ e $P_{-1} = 1$, pelo Princípio de Indução Matemática, tem-se:

Para $m = 0$:

$$\begin{aligned} P(1, 0) &= (P_0 + P_{-1}) + P_0 i \\ &= 1 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq m$, ou seja, supondo que

$$P(1, k) = (P_k + P_{k-1}) + P_k i$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
 P(1, k + 1) &= 2P(1, k) + P(1, k - 1) \\
 &= 2[(P_k + P_{k-1}) + P_k i] + (P_{k-1} + P_{k-2}) + P_{k-1} i \\
 &= 2P_k i + 2(P_k + P_{k-1}) + P_{k-1} i + (P_{k-1} + P_k - 2P_{k-1}) \\
 &= [P_k + (2P_k + P_{k-1})](2P_k + P_{k-1}) i \\
 &= (P_{k+1} + P_k) + P_{k+1} i
 \end{aligned}$$

Logo, tem-se que o lema 1 (c) é válido.

(d) Utilizando a recorrência $P(n + 1, m) = 2P(n, m) + P(n - 1, m)$, fixando $m = 1$ e $P_{-1} = 1$, pelo Princípio de Indução Matemática, tem-se:

Para $n = 0$:

$$\begin{aligned}
 P(0, 1) &= P_0 + (P_0 + P_{-1})i \\
 &= i
 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n$, ou seja, supondo que

$$P(k, 1) = P_k + (P_k + P_{k-1})i$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
 P(k + 1, 1) &= 2P(k, 1) + P(k - 1, 1) \\
 &= 2[P_k + (P_k + P_{k-1})i] + P_{k-1} + (P_{k-1} + P_{k-2})i \\
 &= 2P_k + 2(P_k + P_{k-1})i + P_{k-1} + (P_{k-1} + P_k - 2P_{k-1})i \\
 &= (2P_k + P_{k-1}) + (2P_k + P_{k-1})i + P_k i \\
 &= P_{k+1} + (P_{k+1} + P_k)i
 \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 1 (d). □

Teorema 59. Para os dois inteiros, $n, m \in \mathbb{N}$, os números bidimensionais de Pell são descritos por:

$$P(n, m) = P_n(P_m + P_{m-1}) + (P_n + P_{n-1})P_m i$$

Demonstração. Recorre-se ao Princípio de Indução Matemática como meio de prova para o teorema em questão.

• Começamos por fixar $n \in \mathbb{N}$ e vamos usar indução em m .

Para $m = 0$, temos:

$$\begin{aligned}
 P(n, 0) &= P_n(P_0 + P_{-1}) + (P_n + P_{n-1})P_0 i \\
 &= P_n(0 + 1) + (P_n + P_{n-1})0i \\
 &= P_n
 \end{aligned}$$

O que é verdade pelo Lema 1 (a).

Suponhamos agora que é válido para $k \leq m$ e n fixo, ou seja,

$$P(n, k) = P_n(P_k + P_{k-1}) + (P_n + P_{n-1})P_k i$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então:

$$\begin{aligned} P(n, k+1) &= 2P(n, k) + P(n, k-1) \\ &= 2[P_n(P_k + P_{k-1}) + (P_n + P_{n-1})P_k i] + P_n(P_{k-1} + P_{k-2}) + \\ &\quad (P_n + P_{n-1})P_{k-1} i \\ &= 2P_n(P_k + P_{k-1}) + 2(P_n + P_{n-1})P_k i + P_n(P_{k-1} + P_k - 2P_{k-1}) + \\ &\quad (P_n + P_{n-1})P_{k-1} i \\ &= 2P_n P_k + 2P_n P_{k-1} + (P_n + P_{n-1})(2P_k + P_{k-1})i + P_n P_{k-1} + \\ &\quad P_n P_k - 2P_n P_{k-1} \\ &= P_n(2P_k + P_{k-1} + P_k) + (P_n + P_{n-1})(2P_k + P_{k-1})i \\ &= P_n(P_{k+1} + P_k) + (P_n + P_{n-1})P_{k+1} i \end{aligned}$$

Como pretendíamos mostrar.

- Agora vamos fixar $m \in \mathbb{N}$ e usar indução em n .

Para $n = 0$, temos

$$\begin{aligned} P(0, m) &= P_0(P_m + P_{m-1}) + (P_0 + P_{-1})P_m i \\ &= 0(P_m + P_{m-1}) + (0 + 1)P_m i \\ &= P_m i \end{aligned}$$

O que é verdade pelo Lema 1 (b).

Suponhamos agora que é válido para $k \leq n$ e m fixo, ou seja,

$$P(k, m) = P_k(P_m + P_{m-1}) + (P_k + P_{k-1})P_m i$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então:

$$\begin{aligned} P(k+1, m) &= 2P(k, m) + P(k-1, m) \\ &= 2[P_k(P_m + P_{m-1}) + (P_k + P_{k-1})P_m i] + [P_{k-1}(P_m + P_{m-1}) + (P_{k-1} + P_{k-2})P_m i] \\ &= (2P_k + P_{k-1})(P_m + P_{m-1}) + [2(P_k + P_{k-1}) + (P_{k-1} + P_{k-2})]P_m i \\ &= P_{k+1}(P_m + P_{m-1}) + [(2P_k + P_{k-1}) + (2(P_{k-1} + P_{k-2}))]P_m i \\ &= P_{k+1}(P_m + P_{m-1}) + (P_{k+1} + P_k)P_m i \end{aligned}$$

Como pretendíamos mostrar. □

3.2.1.2 Relações Recorrentes Tridimensionais de Pell

Partindo do ponto de vista de Harman (1981), os números denominados por $P(n, m)$ representam o conjunto dos Gaussianos Inteiros. Por outro lado, com o viés de verificar essa extensão dos termos da Sequência de Pell para uma dimensão complexa, serão explanadas as relações de recursividade do caso tridimensional para a Sequência de Pell.

Definição 82. Os números na forma $P(n, m, p)$ são definidos como a Sequência Tridimensional de Pell, satisfazendo as seguintes relações de recorrência, em que $n, m, p > 0$:

$$\begin{cases} P(n+1, m, p) = 2P(n, m, p) + P(n-1, m, p) \\ P(n, m+1, p) = 2P(n, m, p) + P(n, m-1, p) \\ P(n, m, p+1) = 2P(n, m, p) + P(n, m, p-1) \end{cases}$$

Com as condições iniciais: $P(0, 0, 0) = 0$; $P(1, 0, 0) = 1$; $P(0, 1, 0) = i$; $P(0, 0, 1) = j$; $P(1, 1, 0) = 1 + i$; $P(1, 0, 1) = 1 + j$; $P(1, 1, 1) = 1 + i + j$ e $P(0, 1, 1) = i + j$ onde $i^2 = j^2 = -1$.

Lema 2. As seguinte propriedades são válidas para a Sequência Tridimensional de Pell:

- (a) $P(n, 0, 0) = P_n$;
- (b) $P(0, m, 0) = P_m \cdot i$;
- (c) $P(0, 0, p) = P_p \cdot j$;
- (d) $P(n, 1, 0) = P_n + (P_n + P_{n-1})i$;
- (e) $P(n, 0, 1) = P_n + (P_n + P_{n-1})j$;
- (f) $P(n, 1, 1) = P_n + (P_n + P_{n-1})i + (P_n + P_{n-1})j$;
- (g) $P(1, m, 0) = (P_m + P_{m-1}) + P_m i$;
- (h) $P(0, m, 1) = P_m i + (P_m + P_{m-1})j$;
- (i) $P(1, m, 1) = (P_m + P_{m-1}) + P_m i + (P_m + P_{m-1})j$;
- (j) $P(1, 0, p) = (P_p + P_{p-1}) + P_p j$;
- (k) $P(0, 1, p) = (P_p + P_{p-1})i + P_p j$;
- (l) $P(1, 1, p) = (P_p + P_{p-1}) + (P_p + P_{p-1})i + P_p j$;
- (m) $P(n, m, 0) = P_n(P_m + P_{m-1}) + (P_n + P_{n-1})P_m i$;
- (n) $P(n, 0, p) = P_n(P_p + P_{p-1}) + (P_n + P_{n-1})P_p j$;
- (o) $P(0, m, p) = P_m(P_p + P_{p-1})i + (P_m + P_{m-1})P_p j$.

Demonstração. (a) Através da recorrência $P(n+1, m, p) = 2P(n, m, p) + P(n-1, m, p)$, fixando o valor de $m = 0, p = 0$ e aplicando o princípio de indução sobre n , tem-se:

Para $n = 0$,

$$\begin{aligned} P(0, 0, 0) &= P_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

A igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n$, ou seja, supondo que

$$P(k, 0, 0) = P_k$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} P(k + 1, 0, 0) &= 2P(k, 0, 0) + P(k - 1, 0, 0) \\ &= 2P_k + P_{k-1} \\ &= P_{k+1} \end{aligned}$$

Desse modo, verifica-se a validade do lema 2 (a).

(b) Através da recorrência $P(n, m + 1, p) = 2P(n, m, p) + P(n, m - 1, p)$, fixando $n = 0$, $p = 0$ e aplicando o princípio de indução sobre m . Nesse sentido, para $m = 0$:

$$\begin{aligned} P(0, 0, 0) &= P_0 i \\ &= 0 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq m$, ou seja, supondo que

$$P(0, k, 0) = P_k i$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} P(0, k + 1, 0) &= 2P(0, k, 0) + P(0, k - 1, 0) \\ &= 2P_k i + P_{k-1} i \\ &= (2P_k + P_{k-1}) i \\ &= P_{k+1} i \end{aligned}$$

Com isso, tem-se a validade do lema 2 (b).

(c) Através da recorrência $P(n, m, p + 1) = 2P(n, m, p) + P(n, m, p - 1)$, fixando $n = 0$, $m = 0$ e aplicando o princípio de indução sobre p .

Nesse sentido, para $p = 0$:

$$\begin{aligned} P(0, 0, 0) &= P_0 j \\ &= 0 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq p$, ou seja, supondo que

$$P(0, 0, k) = P_k j$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} P(0, 0, k + 1) &= 2P(0, 0, k) + P(0, 0, k - 1) \\ &= 2P_k j + P_{k-1} j \\ &= P_{k+1} j \end{aligned}$$

Logo, tem-se que o lema 2 (c) é válido.

(d) Através da recorrência $P(n + 1, m, p) = 2P(n, m, p) + P(n - 1, m, p)$, fixando $m = 1$, $p = 0$, $P_{-1} = 1$ e aplicando o princípio de indução sobre n . Nesse sentido, para $n = 0$:

$$\begin{aligned} P(0, 1, 0) &= P_0 + (P_0 + P_{-1})i \\ &= i \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n$, ou seja, supondo que

$$P(k, 1, 0) = P_k + (P_k + P_{k-1})i$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} P(k + 1, 1, 0) &= 2P(k, 1, 0) + P(k - 1, 1, 0) \\ &= 2[P_k + (P_k + P_{k-1})i] + P_{k-1} + (P_{k-1} + P_{k-2})i \\ &= 2P_k + 2(P_k + P_{k-1})i + P_{k-1} + (P_{k-1} + P_k - 2P_{k-1})i \\ &= (2P_k + P_{k-1}) + [(2P_k + P_{k-1}) + P_k]i \\ &= P_{k+1} + (P_{k+1} + P_k)i \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 2 (d).

(e) Através da recorrência $P(n + 1, m, p) = 2P(n, m, p) + P(n - 1, m, p)$, fixando $m = 0$, $p = 1$ e aplicando o princípio de indução em n . Nesse sentido, para $n = 0$:

$$\begin{aligned} P(0, 0, 1) &= P_0 + (P_0 + P_{-1})j \\ &= j \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n$, ou seja, supondo que

$$P(k, 0, 1) = P_k + (P_k + P_{k-1})j$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} P(k + 1, 0, 1) &= 2P(k, 0, 1) + P(k - 1, 0, 1) \\ &= 2[P_k + (P_k + P_{k-1})j] + P_{k-1} + (P_{k-1} + P_{k-2})j \\ &= 2P_k + 2(P_k + P_{k-1})j + P_{k-1} + (P_{k-1} + P_k - 2P_{k-1})j \\ &= (2P_k + P_{k-1}) + (2P_k + P_{k-1})i + P_k j \\ &= P_{k+1} + (P_{k+1} + P_k)j \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 2 (e).

(f) Através da recorrência $P(n+1, m, p) = 2P(n, m, p) + P(n-1, m, p)$, fixando $m = 1$, $p = 1$ e aplicando indução em n . Para $n = 0$,

$$\begin{aligned} P(0, 1, 1) &= P_0 + (P_0 + P_{-1})i + (P_0 + P_{-1})j \\ &= i + j \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n$, ou seja, supondo que

$$P(k, 1, 1) = P_k + (P_k + P_{k-1})i + (P_k + P_{k-1})j$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned} P(k+1, 1, 1) &= 2P(k, 1, 1) + P(k-1, 1, 1) \\ &= 2[P_k + (P_k + P_{k-1})i + (P_k + P_{k-1})j] + P_{k-1} + \\ &\quad (P_{k-1} + P_{k-2})i + (P_{k-1} + P_{k-2})j \\ &= 2P_k + 2(P_k + P_{k-1})i + 2(P_k + P_{k-1})j + P_{k-1} + \\ &\quad (P_{k-1} + P_k - 2P_{k-1})i + (P_{k-1} + P_k - 2P_{k-1})j \\ &= (2P_k + P_{k-1}) + [(2P_k + P_{k-1}) + P_k]i + [(2P_k + P_{k-1}) + P_k]j \\ &= P_{k+1} + (P_{k+1} + P_k)i + (P_{k+1} + P_k)j \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 2 (f).

(g) Através da recorrência $P(n, m+1, p) = 2P(n, m, p) + P(n, m-1, p)$, fixando $n = 1$, $p = 0$ e aplicando o princípio da indução sobre m .

Para $m = 0$,

$$\begin{aligned} P(1, 0, 0) &= (P_0 + P_{-1}) + P_0i \\ &= 1 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq m$, ou seja, supondo que

$$P(1, k, 0) = (P_k + P_{k-1}) + P_k i$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned} P(1, k+1, 0) &= 2P(1, k, 0) + P(1, k-1, 0) \\ &= 2[(P_k + P_{k-1}) + P_k i] + (P_{k-1} + P_{k-2}) + P_{k-1} i \\ &= 2(P_k + P_{k-1}) + 2P_k i + (P_{k-1} + P_k - 2P_{k-1}) + P_{k-1} i \\ &= [(2P_k + P_{k-1}) + P_k] + (2P_k + P_{k-1})i \\ &= (P_{k+1} + P_k) + P_{k+1} i \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 2 (g).

(h) Através da recorrência $P(n, m+1, p) = 2P(n, m, p) + P(n, m-1, p)$, fixando $n = 0$, $p = 1$ e aplicando o princípio da indução sobre m .

Para $m = 0$,

$$\begin{aligned} P(0, 0, 1) &= P_0 i + (P_0 + P_{0-1})j \\ &= j \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq m$, ou seja, supondo que

$$P(0, k, 1) = P_k i + (P_k + P_{k-1})j$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned} P(0, k+1, 1) &= 2P(0, k, 1) + P(0, k-1, 1) \\ &= 2[P_k i + (P_k + P_{k-1})j] + P_{k-1} i + (P_{k-1} + P_{k-2})j \\ &= 2P_k i + 2(P_k + P_{k-1})j + P_{k-1} i + (P_{k-1} + P_k - 2P_{k-1})j \\ &= (2P_k + P_{k-1})i + [(2P_k + P_{k-1}) + P_k]j \\ &= P_{k+1} i + (P_{k+1} + P_k)j \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 2 (h).

(i) Através da recorrência $P(n, m+1, p) = 2P(n, m, p) + P(n, m-1, p)$, fixando $n = 1$, $p = 1$ e aplicando o princípio da indução sobre m .

Para $m = 0$,

$$\begin{aligned} P(1, 0, 1) &= (P_0 + P_{-1}) + P_0 i + (P_0 + P_{-1})j \\ &= 1 + j \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq m$, ou seja, supondo que

$$P(1, k, 1) = (P_k + P_{k-1}) + P_k i + (P_k + P_{k-1})j$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned} P(1, k+1, 1) &= 2P(1, k, 1) + P(1, k-1, 1) \\ &= 2[(P_k + P_{k-1}) + P_k i + (P_k + P_{k-1})j] + (P_{k-1} + P_{k-2}) + P_{k-1} i + (P_k + P_{k-2})j \\ &= 2(P_k + P_{k-1}) + 2P_k i + 2(P_k + P_{k-1})j + (P_{k-1} + P_k - 2P_{k-1}) + P_{k-1} i + \\ &\quad (P_k + P_k - 2P_{k-1})j \\ &= [(2P_k + P_{k-1}) + P_k] + (2P_k + P_{k-1})i + [(2P_k + P_{k-1}) + P_k]j \\ &= (P_{k+1} + P_k) + P_{k+1} i + (P_{k+1} + P_k)j \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 2 (i).

(j) Através da recorrência $P(n, m, p+1) = 2P(n, m, p) + P(n, m, p-1)$, seja $P_{-1} = 1$, fixando $n = 1$, $m = 0$ aplicando o princípio da indução sobre p .

Para $p = 0$,

$$\begin{aligned} P(1, 0, 0) &= (P_0 + P_{-1}) + P_0 j \\ &= 1 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq p$, ou seja, supondo que

$$P(1, 0, k) = (P_k + P_{k-1}) + P_k j$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned} P(1, 0, k+1) &= 2P(1, 0, k) + P(1, 0, k-1) \\ &= 2[(P_k + P_{k-1}) + P_k j] + (P_{k-1} + P_{k-2}) + P_{k-1} j \\ &= 2(P_k + P_{k-1}) + 2P_k j + (P_{k-1} + P_k - 2P_{k-1}) + P_{k-1} j \\ &= [(2P_k + P_{k-1}) + P_k] + (2P_k + P_{k-1}) j \\ &= (P_{k+1} + P_k) + P_{k+1} j \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 2 (j).

(k) Através da recorrência $P(n, m, p+1) = 2P(n, m, p) + P(n, m, p-1)$, fixando $n = 0$, $m = 1$ aplicando o princípio da indução sobre p .

Para $p = 0$,

$$\begin{aligned} P(0, 1, 0) &= (P_0 + P_{-1})i + P_0 j \\ &= i \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq p$, ou seja, supondo que

$$P(0, 1, k) = (P_k + P_{k-1})i + P_k j$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned} P(0, 1, k+1) &= 2P(0, 1, k) + P(0, 1, k-1) \\ &= 2[(P_k + P_{k-1})i + P_k j] + (P_{k-1} + P_{k-2})i + P_{k-1} j \\ &= 2(P_k + P_{k-1})i + 2P_k j + (P_{k-1} + P_k - 2P_{k-1})i + P_{k-1} j \\ &= [(2P_k + P_{k-1}) + P_k]i + (2P_k + P_{k-1})j \\ &= (P_{k+1} + P_k)i + P_{k+1} j \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 2 (k).

(l) Através da recorrência $P(n, m, p+1) = 2P(n, m, p) + P(n, m, p-1)$, fixando $n = 1$, $m = 1$ aplicando o princípio da indução sobre p .

Para $p = 0$,

$$\begin{aligned} P(1, 1, 0) &= (P_0 + P_{-1}) + (P_0 + P_{-1})i + P_0j \\ &= 1 + i \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq p$, ou seja, supondo que

$$P(1, 1, k) = (P_k + P_{k-1}) + (P_k + P_{k-1})i + P_kj$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned} P(1, 1, k+1) &= 2P(1, 1, k) + P(1, 1, k-1) \\ &= 2[(P_k + P_{k-1}) + (P_k + P_{k-1})i + P_kj] + (P_{k-1} + P_{k-2}) + (P_{k-1} + P_{k-2})i + P_{k-1}j \\ &= 2(P_k + P_{k-1}) + 2(P_k + P_{k-1})i + 2P_kj + (P_{k-1} + P_k - 2P_{k-1}) + (P_{k-1} + P_k - 2P_{k-1})i + P_{k-1}j \\ &= [(2P_k + P_{k-1}) + P_k] + [(2P_k + P_{k-1}) + P_k]i + (2P_k + P_{k-1})j \\ &= (P_{k+1} + P_k) + (P_{k+1} + P_k)i + P_{k+1}j \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 2 (l).

(m) Através da recorrência $P(n+1, m, p) = 2P(n, m, p) + P(n-1, m, p)$, fixando n e aplicando indução em m .

Para $m = 0$,

$$\begin{aligned} P(n, 0, 0) &= P_n(P_0 + P_{-1}) + (P_n + P_{n-1})P_0i \\ &= P_n(0 + 1) + (P_n + P_{n-1})0i \\ &= P_n \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq m$, ou seja, supondo que

$$P(n, k, 0) = P_n(P_k + P_{k-1}) + (P_n + P_{n-1})P_ki$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned} P(n, k+1, 0) &= 2P(n, k, 0) + P(n, k-1, 0) \\ &= 2[P_n(P_k + P_{k-1}) + (P_n + P_{n-1})P_ki] + P_n(P_{k-1} + P_{k-2}) + (P_n + P_{n-1})P_{k-1}i \\ &= 2P_n(P_k + P_{k-1}) + 2(P_n + P_{n-1})P_ki + P_n(P_{k-1} + P_{k-2}) + (P_n + P_{n-1})P_{k-1}i \\ &= P_n(2P_k + 2P_{k-1} + P_{k-1} + P_{k-2}) + (P_n + P_{n-1})(2P_k + P_{k-1})i \\ &= P_n(P_{k+1} + P_k) + (P_n + P_{n-1})P_{k+1}i \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

- Agora fixando m e usando indução em n . Consideremos $P_{-1} = 1$.

Para $n = 0$,

$$\begin{aligned} P(0, m, 0) &= P_0(P_m + P_{m-1}) + (P_0 + P_{-1})P_m i \\ &= 0(P_m + P_{m-1}) + (0 + 1)P_m i \\ &= P_m i \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n$, ou seja, supondo que

$$P(k, m, 0) = P_k(P_m + P_{m-1}) + (P_k + P_{k-1})P_m i$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} P(k+1, m, 0) &= 2P(k, m, 0) + P(k-1, m, 0) \\ &= 2[P_k(P_m + P_{m-1}) + (P_k + P_{k-1})P_m i] + P_{k-1}(P_m + P_{m-1}) + \\ &\quad (P_{k-1} + P_{k-2})P_m i \\ &= 2P_k(P_m + P_{m-1}) + 2(P_k + P_{k-1})P_m i + P_{k-1}(P_m + P_{m-1}) + \\ &\quad (P_{k-1} + P_{k-2})P_m i \\ &= (2P_k + P_{k-1})(P_m + P_{m-1}) + P_m(2P_k + 2P_{k-1} + P_{k-1} + P_{k-2})i \\ &= P_{k+1}(P_m + P_{m-1}) + (P_{k+1} + P_k)P_m i \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

Com isso, é válido o lema 2 (m).

(n) Através da recorrência $P(n+1, m, p) = 2P(n, m, p) + P(n-1, m, p)$, fixando n e aplicando indução em p . Para $p = 0$,

$$\begin{aligned} P(n, 0, 0) &= P_n(P_0 + P_{-1}) + (P_n + P_{n-1})P_0 j \\ &= P_n(0 + 1) + (P_n + P_{n-1})0j \\ &= P_n \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq p$, ou seja, supondo que

$$P(n, 0, k) = P_n(P_k + P_{k-1}) + (P_n + P_{n-1})P_k j$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
 P(n, 0, k + 1) &= 2P(n, 0, k) + P(n, 0, k - 1) \\
 &= 2[P_n(P_k + P_{k-1}) + (P_n + P_{n-1})P_k j] + P_n(P_{k-1} + P_{k-2}) + \\
 &\quad (P_n + P_{n-1})P_{k-1} j \\
 &= 2P_n(P_k + P_{k-1}) + 2(P_n + P_{n-1})P_k j + P_n(P_{k-1} + P_{k-2}) + \\
 &\quad (P_n + P_{n-1})P_{k-1} j \\
 &= P_n(2P_k + 2P_{k-1} + P_{k-1} + P_{k-2}) + (P_n + P_{n-1})(2P_k + P_{k-1})j \\
 &= P_n(P_{k+1} + P_k) + (P_n + P_{n-1})P_{k+1} j
 \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

• Agora fixando p e usando indução em n . Consideremos $P_{-1} = 1$.

Para $n = 0$,

$$\begin{aligned}
 P(0, 0, p) &= P_0(P_p + P_{p-1}) + (P_0 + P_{-1})P_p j \\
 &= 0(P_p + P_{p-1}) + (0 + 1)P_p j \\
 &= P_p j
 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n$, ou seja, supondo que

$$P(k, 0, p) = P_k(P_p + P_{p-1}) + (P_k + P_{k-1})P_p j$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
 P(k + 1, 0, p) &= 2P(k, 0, p) + P(k - 1, 0, p) \\
 &= 2[P_k(P_p + P_{p-1}) + (P_k + P_{k-1})P_p j] + P_{k-1}(P_p + P_{p-1}) + \\
 &\quad (P_{k-1} + P_{k-2})P_p j \\
 &= 2P_k(P_p + P_{p-1}) + 2(P_k + P_{k-1})P_p j + P_{k-1}(P_p + P_{p-1}) + \\
 &\quad (P_{k-1} + P_{k-2})P_p j \\
 &= (2P_k + P_{k-1})(P_p + P_{p-1}) + P_p(2P_k + 2P_{k-1} + P_{k-1} + P_{k-2})j \\
 &= P_{k+1}(P_p + P_{p-1}) + (P_{k+1} + P_k)P_p j
 \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

Com isso, é válido o lema 2 (n).

(o) Através da recorrência $P(n, m + 1, p) = 2P(n, m, p) + P(n, m - 1, p)$, fixando m e aplicando indução em p .

Para $p = 0$,

$$\begin{aligned}
 P(0, m, 0) &= P_m(P_0 + P_{-1})i + (P_m + P_{m-1})P_0 j \\
 &= P_m(0 + 1)i + (P_m + P_{m-1})0j \\
 &= P_m i
 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq p$, ou seja, supondo que

$$P(0, m, k) = P_m(P_k + P_{k-1})i + (P_m + P_{m-1})P_kj$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} P(0, m, k+1) &= 2P(0, m, k) + P(0, m, k-1) \\ &= 2[P_m(P_k + P_{k-1})i + (P_m + P_{m-1})P_kj] + P_m(P_{k-1} + P_{k-2})i + \\ &\quad (P_m + P_{m-1})P_{k-1}j \\ &= 2P_m(P_k + P_{k-1})i + 2(P_m + P_{m-1})P_kj + P_m(P_{k-1} + P_{k-2})i + \\ &\quad (P_m + P_{m-1})P_{k-1}j \\ &= P_m(2P_k + 2P_{k-1} + P_{k-1} + P_{k-2})i + (P_m + P_{m-1})(2P_k + P_{k-1})j \\ &= P_m(P_{k+1} + P_k)i + (P_m + P_{m-1})P_{k+1}j \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

• Agora fixando p e usando indução em m . Consideremos $P_{-1} = 1$.

Para $m = 0$,

$$\begin{aligned} P(0, 0, p) &= P_0(P_p + P_{p-1})i + (P_0 + P_{-1})P_pj \\ &= 0(P_p + P_{p-1})i + (0 + 1)P_pj \\ &= P_pj \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq m$, ou seja, supondo que

$$P(0, k, p) = P_k(P_p + P_{p-1})i + (P_k + P_{k-1})P_pj$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} P(0, k+1, p) &= 2P(0, k, p) + P(0, k-1, p) \\ &= 2[P_k(P_p + P_{p-1})i + (P_k + P_{k-1})P_pj] + P_{k-1}(P_p + P_{p-1})i + \\ &\quad (P_{k-1} + P_{k-2})P_pj \\ &= 2P_k(P_p + P_{p-1})i + 2(P_k + P_{k-1})P_pj + P_{k-1}(P_p + P_{p-1})i + \\ &\quad (P_{k-1} + P_{k-2})P_pj \\ &= (2P_k + P_{k-1})(P_p + P_{p-1})i + P_p(2P_k + 2P_{k-1} + P_{k-1} + P_{k-2})j \\ &= P_{k+1}(P_p + P_{p-1})i + (P_{k+1} + P_k)P_pj \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

Com isso, é válido o lema 2 (o). □

Teorema 60. Para os três inteiros, $n, m, p \in \mathbb{N}$, os números tridimensionais de Pell são descritos por:

$$P(n, m, p) = P_n(P_m + P_{m-1})(P_p + P_{p-1}) + (P_n + P_{n-1})P_m(P_p + P_{p-1})i + (P_n + P_{n-1})(P_m + P_{m-1})P_pj$$

.

Demonstração. Recorre-se ao Princípio de Indução Matemática como alternativa de prova para o teorema em questão.

• Seja n e m valores fixos, iremos aplicar o princípio da indução sobre p .

Nesse sentido, para $p = 0$:

$$\begin{aligned} P(n, m, 0) &= P_n(P_m + P_{m-1})(P_0 + P_{-1}) + (P_n + P_{n-1})P_m(P_0 + P_{-1})i + \\ &\quad (P_n + P_{n-1})(P_m + P_{m-1})P_0j \\ &= P_n(P_m + P_{m-1}) + (P_n + P_{n-1})P_m i \end{aligned}$$

Correto pelo Lema 2 (m).

Supondo que seja verdade para n e m fixos e qualquer $k \leq p$, ou seja, supondo que

$$P(n, m, k) = P_n(P_m + P_{m-1})(P_k + P_{k-1}) + (P_n + P_{n-1})P_m(P_k + P_{k-1})i + (P_n + P_{n-1})(P_m + P_{m-1})P_kj$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para n e m fixos e para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} P(n, m, k + 1) &= 2P(n, m, k) + P(n, m, k - 1) \\ &= 2[P_n(P_m + P_{m-1})(P_k + P_{k-1}) + (P_n + P_{n-1})P_m(P_k + P_{k-1})i + \\ &\quad (P_n + P_{n-1})(P_m + P_{m-1})P_kj] + P_n(P_m + P_{m-1})(P_{k-1} + P_{k-2}) + \\ &\quad (P_n + P_{n-1})P_m(P_{k-1} + P_{k-2})i + (P_n + P_{n-1})(P_m + P_{m-1})P_{k-1}j \\ &= 2P_n(P_m + P_{m-1})(P_k + P_{k-1}) + 2(P_n + P_{n-1})P_m(P_k + P_{k-1})i + \\ &\quad 2(P_n + P_{n-1})(P_m + P_{m-1})P_kj + P_n(P_m + P_{m-1})(P_{k-1} + P_k - 2P_{k-1}) + \\ &\quad (P_n + P_{n-1})P_m(P_{k-1} + P_k - 2P_{k-1})i + (P_n + P_{n-1})(P_m + P_{m-1})P_{k-1}j \\ &= P_n(P_m + P_{m-1})[2(P_k + P_{k-1}) + (P_{k-1} + P_k - 2P_{k-1})] + \\ &\quad (P_n + P_{n-1})P_m[2(P_k + P_{k-1}) + (P_{k-1} + P_k - 2P_{k-1})]i + \\ &\quad (P_n + P_{n-1})(P_m + P_{m-1})(2P_k + P_{k-1})j \\ &= P_n(P_m + P_{m-1})(2P_k + P_{k-1} + P_k) + (P_n + P_{n-1})P_m(2P_k + P_{k-1} + P_k)i + \\ &\quad (P_m + P_{m-1})P_{k+1}j \\ &= P_n(P_m + P_{m-1})(P_{k+1} + P_k) + (P_n + P_{n-1})P_m(P_{k+1} + P_k)i + \\ &\quad (P_n + P_{n-1})(P_m + P_{m-1})P_{k+1}j \end{aligned}$$

Como pretendíamos mostrar.

• Agora fixemos n e p e usemos indução em m . Nesse sentido, para $m = 0$:

$$\begin{aligned} P(n, 0, p) &= P_n(P_0 + P_{-1})(P_p + P_{p-1}) + (P_n + P_{n-1})P_0(P_p + P_{p-1})i + (P_n + P_{n-1})(P_0 + P_{-1})P_pj \\ &= P_n(P_p + P_{p-1}) + (P_n + P_{n-1})P_pj \end{aligned}$$

Correto pelo Lema 2 (n).

Supondo que seja verdade para n e p fixo e qualquer $k \leq m$, ou seja, supondo que

$$P(n, k, p) = P_n(P_k + P_{k-1})(P_p + P_{p-1}) + (P_n + P_{n-1})P_k(P_p + P_{p-1})i + (P_n + P_{n-1})(P_k + P_{k-1})P_pj$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para n e p fixos e para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} P(n, k + 1, p) &= 2P(n, k, p) + P(n, k - 1, p) \\ &= 2[P_n(P_k + P_{k-1})(P_p + P_{p-1}) + (P_n + P_{n-1})P_k(P_p + P_{p-1})i + \\ &\quad (P_n + P_{n-1})(P_k + P_{k-1})P_pj] + P_n(P_{k-1} + P_{k-2})(P_p + P_{p-1}) + \\ &\quad (P_n + P_{n-1})P_{k-1}(P_p + P_{p-1})i + (P_n + P_{n-1})(P_{k-1} + P_{k-2})P_pj \\ &= 2P_n(P_k + P_{k-1})(P_p + P_{p-1}) + 2(P_n + P_{n-1})P_k(P_p + P_{p-1})i + \\ &\quad 2(P_n + P_{n-1})(P_k + P_{k-1})P_pj + P_n(P_{k-1} + P_{k-2})(P_p + P_{p-1}) + \\ &\quad (P_n + P_{n-1})P_{k-1}(P_p + P_{p-1})i + (P_n + P_{n-1})(P_{k-1} + P_{k-2})P_pj \\ &= P_n(P_p + P_{p-1})(2P_k + 2P_{k-1} + P_{k-1} + P_{k-2}) + \\ &\quad (P_n + P_{n-1})(P_p + P_{p-1})(2P_k + P_{k-1})i \\ &\quad (P_n + P_{n-1})P_p(2P_k + 2P_{k-1} + P_{k-1} + P_{k-2}) \\ &= P_n(P_{k+1} + P_k)(P_p + P_{p-1}) + (P_n + P_{n-1})P_{k+1}(P_p + P_{p-1})i + \\ &\quad (P_n + P_{n-1})(P_{k+1} + P_k)P_pj \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

- Agora fixemos m e p e usemos indução em n .

Nesse sentido, para $n = 0$:

$$\begin{aligned} P(0, m, p) &= P_0(P_m + P_{m-1})(P_p + P_{p-1}) + (P_0 + P_{-1})P_m(P_p + P_{p-1})i + \\ &\quad (P_0 + P_{-1})(P_m + P_{m-1})P_pj \\ &= P_m(P_p + P_{p-1})i + (P_m + P_{m-1})P_pj \end{aligned}$$

Correto pelo Lema 2 (o).

Supondo que seja verdade para m e p fixos e qualquer $k \leq n$, ou seja, supondo que

$$P(k, m, p) = P_k(P_m + P_{m-1})(P_p + P_{p-1}) + (P_k + P_{k-1})P_m(P_p + P_{p-1})i + (P_k + P_{k-1})(P_m + P_{m-1})P_pj$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para m e p fixos e para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} P(k + 1, m, p) &= 2P(k, m, p) + P(k - 1, m, p) \\ &= 2[P_k(P_m + P_{m-1})(P_p + P_{p-1}) + (P_k + P_{k-1})P_m(P_p + P_{p-1})i + \\ &\quad (P_k + P_{k-1})(P_m + P_{m-1})P_pj] + P_{k-1}(P_m + P_{m-1})(P_p + P_{p-1}) + \\ &\quad (P_{k-1} + P_{k-2})P_m(P_p + P_{p-1})i + (P_{k-1} + P_{k-2})(P_m + P_{m-1})P_pj \\ &= 2P_k(P_m + P_{m-1})(P_p + P_{p-1}) + 2(P_k + P_{k-1})P_m(P_p + P_{p-1})i + \\ &\quad 2(P_k + P_{k-1})(P_m + P_{m-1})P_pj + P_{k-1}(P_m + P_{m-1})(P_p + P_{p-1}) + \\ &\quad (P_{k-1} + P_{k-2})P_m(P_p + P_{p-1})i + (P_{k-1} + P_{k-2})(P_m + P_{m-1})P_pj \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2P_k + P_{k-1})(P_m + P_{m-1})(P_p + P_{p-1}) + \\
&\quad (2P_k + 2P_{k-1} + P_{k-1} + P_{k-2})P_m(P_p + P_{p-1})i + \\
&\quad (2P_k + 2P_{k-1} + P_{k-1} + P_{k-2})(P_m + P_{m-1})P_pj \\
&= P_{k+1}(P_m + P_{m-1})(P_p + P_{p-1}) + (P_{k+1} + P_k)P_m(P_p + P_{p-1})i + \\
&\quad (P_{k+1} + P_k)(P_m + P_{m-1})P_pj
\end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

Com isso, tem-se que o Teorema é válido. $\square$

3.2.1.3 Relações Recorrentes n -Dimensionais de Pell

Baseado nos trabalhos de Harman (1981), Oliveira (2018), Oliveira, Alves e Paiva (2017), nesta seção, será introduzida a notação para a relação n -dimensional da Sequência de Pell designando assim uma expressão generalizada para os números hipercomplexos descritos na forma $P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n)$, em que n representa as variáveis. Os números hipercomplexos são definidos na forma $a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + \dots + a_ni_n$ em que $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ representam números reais e $i_1, i_2, \dots, i_n$ são os símbolos que representam as unidades imaginárias inseridas (KANTOR; SOLODOVNIKOV, 1989).

Definição 83. *Seja um número hipercomplexo $P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n)$ com n variáveis naturais, para $n \geq 2$ vale, além da componente imaginária i , o seguinte conjunto de unidades imaginárias $(\mu_1 = i, \mu_1 = j, \dots, \mu_n)$. Desse modo, são definidos os valores iniciais a seguir:*

$$\begin{aligned}
P(0, 0, 0, \dots, 0) &= 0 \\
P(1, 0, 0, \dots, 0) &= 1 \\
P(0, 1, 0, \dots, 0) &= \mu_1 \\
P(0, 0, 1, \dots, 0) &= \mu_2 \\
P(0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0) &= \mu_3 \\
P(0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0) &= \mu_4 \\
&\vdots = \vdots \\
P(0, 0, 0, \dots, 1) &= \mu_n \\
P(1, 1, 1, \dots, 1) &= 1 + \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n \\
P(0, 1, 1, \dots, 1) &= \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n \\
P(1, 0, 1, \dots, 1) &= 1 + \mu_2 + \dots + \mu_n \\
P(1, 1, 0, 1, \dots, 1) &= 1 + \mu_1 + \mu_3 + \dots + \mu_n \\
&\vdots = \vdots \\
P(1, 1, 1, \dots, 1, 0) &= 1 + \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{n-1}
\end{aligned}$$

Com isso, os números da forma $P(n, n_2, \dots, n_n)$ devem satisfazer às seguintes condições n -dimensionais de recorrência:

$$\begin{cases} P(n_1 + 1, n_2, \dots, n_n) &= 2P(n_1, n_2, \dots, n_n) + P(n_1 - 1, n_2, \dots, n_n) \\ P(n_1, n_2 + 1, \dots, n_n) &= 2P(n_1, n_2, \dots, n_n) + P(n_1, n_2 - 1, \dots, n_n) \\ \vdots &= \vdots \\ P(n_1, n_2, \dots, n_n + 1) &= 2P(n_1, n_2, \dots, n_n) + P(n_1, n_2, \dots, n_n - 1) \end{cases}$$

Lema 3. *As seguinte propriedades são válidas para a Sequência n -dimensional de Pell:*

$$\begin{aligned} (a) P(n_1, 0, \dots, 0) &= P_{n_1} \\ (b) P(0, n_2, \dots, 0) &= P_{n_2} \mu_1 \\ (c) P(0, 0, \dots, n_n) &= P_{n_n} \mu_n \\ (d) P(n_1, 1, \dots, 0) &= P_{n_1} + (P_{n_1} + P_{n_1-1}) \mu_1 \\ (e) P(n_1, 0, \dots, 1) &= P_{n_1} + \dots + (P_{n_1} + P_{n_1-1}) \mu_n \\ (f) P(n_1, 1, \dots, 1) &= P_{n_1} + (P_{n_1} + P_{n_1-1}) \mu_1 + \dots + (P_{n_1} + P_{n_1-1}) \mu_n \\ (g) P(1, n_2, \dots, 0) &= (P_{n_2} + P_{n_2-1}) + P_{n_2} \mu_1 \\ (h) P(0, n_2, \dots, 1) &= P_{n_2} \mu_1 + \dots + (P_{n_2} + P_{n_2-1}) \mu_n \\ (i) P(1, n_2, \dots, 1) &= (P_{n_2} + P_{n_2-1}) + P_{n_2} \mu_1 + \dots + (P_{n_2} + P_{n_2-1}) \mu_n \\ (j) P(1, 0, \dots, n_n) &= (P_{n_n} + P_{n_n-1}) + \dots + P_{n_n} \mu_n \\ (k) P(0, 1, \dots, n_n) &= (P_{n_n} + P_{n_n-1}) \mu_1 + \dots + P_{n_n} \mu_n \\ (l) P(1, 1, \dots, n_n) &= (P_{n_n} + P_{n_n-1}) + (P_{n_n} + P_{n_n-1}) \mu_1 + \dots + P_{n_n} \mu_n \\ (m) P(n_1, n_2, \dots, 0) &= P_{n_1} (P_{n_2} + P_{n_2-1}) + (P_{n_1} + P_{n_1-1}) P_{n_2} \mu_1 \\ (n) P(n_1, 0, \dots, n_n) &= P_{n_1} (P_{n_n} + P_{n_n-1}) + \dots + (P_{n_1} + P_{n_1-1}) P_{n_n} \mu_n \\ (o) P(0, n_2, \dots, n_n) &= P_{n_2} (P_{n_n} + P_{n_n-1}) \mu_1 + \dots + (P_{n_2} + P_{n_2-1}) P_{n_n} \mu_n \end{aligned}$$

Demonstração. (a) Através da recorrência $P(n_1 + 1, n_2, \dots, n_n) = 2P(n_1, n_2, \dots, n_n) + P(n_1 - 1, n_2, \dots, n_n)$, fixando $n_2, \dots, n_n$ iguais a zero e aplicando o método de indução em n_1 , tem-se:

Para $n_1 = 0$,

$$P(0, 0, \dots, 0) = 0$$

Supondo que seja verdade para $n_2, \dots, n_n$ fixos e qualquer $k \leq n_1$, ou seja supondo que

$$P(k, 0, \dots, 0) = P_k$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} P(k + 1, 0, 0, \dots, 0) &= 2P(k, 0, \dots, 0) + P(k - 1, 0, \dots, 0) \\ &= 2P_k + P_{k-1} \\ &= P_{k+1} \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (a).

(b) Através da recorrência $P(n_1, n_2 + 1, \dots, n_n) = 2P(n, n_2, \dots, n_n) + P(n, n_2 - 1, \dots, n_n)$, fixando $n_1, n_3, \dots, n_n$ iguais a zero e aplicando o método de indução em n_2 , tem-se:

Para $n_2 = 0$,

$$P(0, 0, \dots, 0) = 0.$$

Supondo que seja verdade para $n_1, \dots, n_n$ fixos e qualquer $k \leq n_2$, ou seja supondo que

$$P(0, k, \dots, 0) = P_k \mu_1$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} P(0, k + 1, \dots, 0) &= 2P(0, k, \dots, 0) + P(0, k - 1, \dots, 0) \\ &= 2P_k \mu_1 + P_{k-1} \mu_1 \\ &= P_{k+1} \mu_1 \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (b).

(c) Através da recorrência $P(n_1, n_2, \dots, n_n + 1) = 2P(n_1, n_2, \dots, n_n) + P(n_1, n_2, \dots, n_n - 1)$, fixando $n_1, n_2, \dots$ iguais a zero e aplicando o método de indução em n_n , tem-se:

Para $n_n = 0$,

$$P(0, 0, \dots, 0) = 0.$$

Supondo que seja verdade para $n_1, n_2, \dots$ fixos e qualquer $k \leq n_n$, ou seja supondo que

$$P(0, 0, \dots, k) = P_k \mu_n$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} P(0, 0, \dots, k + 1) &= 2P(0, 0, \dots, k) + P(0, 0, \dots, k - 1) \\ &= 2P_k \mu_n + P_{k-1} \mu_n \\ &= P_{k+1} \mu_n \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (c).

(d) Através da recorrência $P(n_1 + 1, n_2, \dots, n_n) = 2P(n, n_2, \dots, n_n) + P(n - 1, n_2, \dots, n_n)$, fixando $n_2 = 1, n_n = 0, P_{-1} = 1$ e aplicando o princípio de indução sobre n_1 . Nesse sentido, para $n_1 = 0$:

$$\begin{aligned} P(0, 1, \dots, 0) &= P_0 + (P_0 + P_{-1}) \mu_1 \\ &= \mu_1 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_1$, ou seja, supondo que

$$P(k, 1, \dots, 0) = P_k + (P_k + P_{k-1}) \mu_1$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
 P(k+1, 1, \dots, 0) &= 2P(k, 1, \dots, 0) + P(k-1, 1, \dots, 0) \\
 &= 2[P_k + (P_k + P_{k-1})\mu_1] + P_{k-1} + (P_{k-1} + P_{k-2})\mu_1 \\
 &= (2P_k + P_{k-1}) + [2(P_k + P_{k-1}) + (P_{k-1} + P_{k-2})]\mu_1 \\
 &= P_{k+1} + (P_{k+1} + P_k)\mu_1
 \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (d).

(e) Através da recorrência $P(n_1+1, n_2, \dots, n_n) = 2P(n, n_2, \dots, n_n) + P(n-1, n_2, \dots, n_n)$, fixando $n_2 = 0$, $n_n = 1$, $P_{-1} = 1$ e aplicando o princípio de indução sobre n_1 . Nesse sentido, para $n_1 = 0$:

$$\begin{aligned}
 P(0, 0, \dots, 1) &= P_0 + \dots + (P_0 + P_{-1})\mu_n \\
 &= \mu_n.
 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_1$, ou seja, supondo que

$$P(k, 0, \dots, 1) = P_k + \dots + (P_k + P_{k-1})\mu_n$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
 P(k+1, 0, \dots, 1) &= 2P(k, 0, \dots, 1) + P(k-1, 0, \dots, 1) \\
 &= 2[P_k + \dots + (P_k + P_{k-1})\mu_n] + P_{k-1} + \dots + (P_{k-1} + P_{k-2})\mu_n \\
 &= (2P_k + P_{k-1}) + \dots + [2(P_k + P_{k-1}) + (P_{k-1} + P_{k-2})]\mu_n \\
 &= P_{k+1} + \dots + (P_{k+1} + P_k)\mu_n
 \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (e).

(f) Através da recorrência $P(n_1+1, n_2, \dots, n_n) = 2P(n, n_2, \dots, n_n) + P(n-1, n_2, \dots, n_n)$, fixando $n_2 = 1$, $n_n = 1$, $P_{-1} = 1$ e aplicando o princípio de indução sobre n_1 . Nesse sentido, para $n_1 = 0$:

$$\begin{aligned}
 P(0, 1, \dots, 1) &= P_0 + (P_0 + P_{-1})\mu_1 + \dots + (P_0 + P_{-1})\mu_n \\
 &= \mu_1 + \dots + \mu_n
 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_1$, ou seja, supondo que

$$P(k, 1, \dots, 1) = P_k + (P_k + P_{k-1})\mu_1 + \dots + (P_k + P_{k-1})\mu_n$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
 P(k+1, 1, \dots, 1) &= 2P(k, 1, \dots, 1) + P(k-1, 1, \dots, 1) \\
 &= 2[P_k + (P_k + P_{k-1})\mu_1 + \dots + (P_k + P_{k-1})\mu_n] + P_k + (P_k + P_{k-1})\mu_1 \\
 &\quad + \dots + (P_k + P_{k-1})\mu_n \\
 &= (2P_k + P_{k-1}) + [2(P_k + P_{k-1}) + (P_{k-1} + P_{k-2})]\mu_1 + \dots + \\
 &\quad [2(P_k + P_{k-1}) + (P_{k-1} + P_{k-2})]\mu_n \\
 &= P_{k+1} + (P_{k+1} + P_k)\mu_1 + \dots + (P_{k+1} + P_k)\mu_n
 \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (f).

(g) Através da recorrência $P(n_1, n_2 + 1, \dots, n_n) = 2P(n, n_2, \dots, n_n) + P(n, n_2 - 1, \dots, n_n)$, fixando $n_1 = 1$, $n_n = 0$, $P_{-1} = 1$ e aplicando o princípio de indução sobre n_2 . Nesse sentido, para $n_2 = 0$:

$$\begin{aligned}
 P(1, 0, \dots, 0) &= (P_0 + P_{-1}) + P_0\mu_1 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_2$, ou seja, supondo que

$$P(1, k, \dots, 0) = (P_k + P_{k-1}) + P_k\mu_1$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
 P(1, k+1, \dots, 0) &= 2P(1, k, \dots, 0) + P(1, k-1, \dots, 0) \\
 &= 2[(P_k + P_{k-1}) + P_k\mu_1] + (P_k + P_{k-1}) + P_k\mu_1 \\
 &= [2(P_k + P_{k-1}) + (P_k + P_{k-1})] + (2P_k + P_k)\mu_1 \\
 &= (P_{k+1} + P_k) + P_{k+1}\mu_1
 \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (g).

(h) Através da recorrência $P(n_1, n_2 + 1, \dots, n_n) = 2P(n, n_2, \dots, n_n) + P(n, n_2 - 1, \dots, n_n)$, fixando $n_1 = 0$, $n_n = 1$, $P_{-1} = 1$ e aplicando o princípio de indução sobre n_2 . Nesse sentido, para $n_2 = 0$:

$$\begin{aligned}
 P(0, 0, \dots, 1) &= P_0\mu_1 + \dots + (P_0 + P_{-1})\mu_1 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_2$, ou seja, supondo que

$$P(0, k, \dots, 1) = P_k\mu_1 + \dots + (P_k + P_{k-1})\mu_n$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
 P(0, k+1, \dots, 1) &= 2P(0, k, \dots, 1) + P(0, k-1, \dots, 1) \\
 &= 2[P_k\mu_1 + \dots + (P_k + P_{k-1})\mu_n] + P_{k-1}\mu_1 + \dots + (P_{k-1} + P_{k-2})\mu_n \\
 &= (2P_k + P_{k-1})\mu_1 + \dots + [2(P_k + P_{k-1}) + (P_{k-1} + P_{k-2})]\mu_n \\
 &= P_{k+1}\mu_1 + \dots + (P_{k+1} + P_k)\mu_n
 \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (h).

(i) Através da recorrência $P(n_1, n_2 + 1, \dots, n_n) = 2P(n, n_2, \dots, n_n) + P(n, n_2 - 1, \dots, n_n)$, fixando $n_1 = 1$, $n_n = 1$, $P_{-1} = 1$ e aplicando o princípio de indução sobre n_2 . Nesse sentido, para $n_2 = 0$:

$$\begin{aligned}
 P(1, 0, \dots, 1) &= (P_0 + P_{-1}) + P_0\mu_1 + \dots + (P_0 + P_{-1})\mu_n \\
 &= 1 + \dots + \mu_n
 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_2$, ou seja, supondo que

$$P(1, k, \dots, 1) = (P_k + P_{k-1}) + P_k\mu_1 + \dots + (P_k + P_{k-1})\mu_n$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
 P(1, k+1, \dots, 1) &= 2P(1, k, \dots, 1) + P(1, k-1, \dots, 1) \\
 &= 2[(P_k + P_{k-1}) + P_k\mu_1 + \dots + (P_k + P_{k-1})\mu_n] + \\
 &\quad (P_{k-1} + P_{k-2}) + P_{k-1}\mu_1 + \dots + (P_{k-1} + P_{k-2})\mu_n \\
 &= [2(P_k + P_{k-1}) + (P_{k-1} + P_{k-2})] + (2P_k + P_{k-1})\mu_1 + \dots + \\
 &\quad [2(P_k + P_{k-1}) + (P_{k-1} + P_{k-2})]\mu_n \\
 &= (P_{k+1} + P_k) + P_{k+1}\mu_1 + \dots + (P_{k+1} + P_k)\mu_n
 \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (i).

(j) Através da recorrência $P(n_1, n_2, \dots, n_n + 1) = 2P(n, n_2, \dots, n_n) + P(n, n_2, \dots, n_n - 1)$, fixando $n_1 = 1$, $n_2 = 0$, $P_{-1} = 1$ e aplicando o princípio de indução sobre n_n .

Nesse sentido, para $n_n = 0$:

$$\begin{aligned}
 P(1, 0, \dots, 0) &= (P_0 + P_{-1}) + \dots + P_0\mu_n \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_n$, ou seja, supondo que

$$P(1, 0, \dots, k) = (P_k + P_{k-1}) + \dots + P_k\mu_n$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
 P(1, 0, \dots, k + 1) &= 2P(1, 0, \dots, k) + P(1, 0, \dots, k - 1) \\
 &= 2[(P_k + P_{k-1}) + \dots + P_k \mu_n] + (P_{k-1} + P_{k-2}) + \dots + P_{k-1} \mu_n \\
 &= [2(P_k + P_{k-1}) + (P_{k-1} + P_{k-2})] + \dots + (2P_k + P_{k-1}) \mu_n \\
 &= (P_{k+1} + P_k) + \dots + P_{k+1} \mu_n
 \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (j).

(k) Através da recorrência $P(n_1, n_2, \dots, n_n + 1) = 2P(n, n_2, \dots, n_n) + P(n, n_2, \dots, n_n - 1)$, fixando $n_1 = 0$, $n_2 = 1$, $P_{-1} = 1$ e aplicando o princípio de indução sobre n_n . Nesse sentido, para $n_n = 0$:

$$\begin{aligned}
 P(0, 1, \dots, 0) &= (P_0 + P_{-1}) \mu_1 + \dots + P_0 \mu_n \\
 &= \mu_1
 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_n$, ou seja, supondo que

$$P(0, 1, \dots, k) = (P_k + P_{k-1}) \mu_1 + \dots + P_k \mu_n$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
 P(0, 1, \dots, k + 1) &= 2P(0, 1, \dots, k) + P(0, 1, \dots, k - 1) \\
 &= 2[(P_k + P_{k-1}) \mu_1 + \dots + P_k \mu_n] + (P_{k-1} + P_{k-2}) \mu_1 + \dots + P_{k-1} \mu_n \\
 &= [2(P_k + P_{k-1}) + (P_{k-1} + P_{k-2})] \mu_1 + \dots + (2P_k + P_{k-1}) \mu_n \\
 &= (P_{k+1} + P_k) \mu_1 + \dots + P_{k+1} \mu_n
 \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (k).

(l) Através da recorrência $P(n_1, n_2, \dots, n_n + 1) = 2P(n, n_2, \dots, n_n) + P(n, n_2, \dots, n_n - 1)$, fixando $n_1 = 1$, $n_2 = 1$, $P_{-1} = 1$ e aplicando o princípio de indução sobre n_n . Nesse sentido, para $n_n = 0$:

$$\begin{aligned}
 P(1, 1, \dots, 0) &= (P_0 + P_{-1}) + (P_0 + P_{-1}) \mu_1 + \dots + P_0 \mu_n \\
 &= 1 + \mu_1
 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_n$, ou seja, supondo que

$$P(1, 1, \dots, k) = (P_k + P_{k-1}) + (P_k + P_{k-1}) \mu_1 + \dots + P_k \mu_n$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
 P(1, 1, \dots, k + 1) &= 2P(1, 0, \dots, k) + P(1, 1, \dots, k - 1) \\
 &= 2[(P_k + P_{k-1}) + (P_k + P_{k-1})\mu_1 + \dots + P_k\mu_n] + \\
 &\quad (P_{k-1} + P_{k-2}) + (P_{k-1} + P_{k-2})\mu_1 + \dots + P_{k-1}\mu_n \\
 &= [2(P_k + P_{k-1}) + (P_{k-1} + P_{k-2})] + [2(P_k + P_{k-1}) + \\
 &\quad (P_{k-1} + P_{k-2})]\mu_1 + \dots + (2P_k + P_{k-1})\mu_n \\
 &= (P_{k+1} + P_k) + (P_{k+1} + P_k)\mu_1 + \dots + P_{k+1}\mu_n
 \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (1).

(m) Através da recorrência $P(n_1 + 1, n_2, \dots, n_n) = 2P(n, n_2, \dots, n_n) + P(n - 1, n_2, \dots, n_n)$, fixando n_2 e $n_n = 0$, aplicando indução em n_1 .

Nesse sentido, para $n_1 = 0$:

$$\begin{aligned}
 P(0, n_2, \dots, 0) &= P_0(P_{n_2} + P_{n_2-1}) + (P_0 + P_{-1})P_{n_2}\mu_1 \\
 &= P_{n_2}\mu_1
 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_1$, ou seja, supondo que

$$P(k, n_2, \dots, 0) = P_k(P_{n_2} + P_{n_2-1}) + (P_k + P_{k-1})P_{n_2}\mu_1$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
 P(k + 1, n_2, \dots, 0) &= 2P(k, n_2, \dots, 0) + P(k - 1, n_2, \dots, 0) \\
 &= 2[P_k(P_{n_2} + P_{n_2-1}) + (P_k + P_{k-1})P_{n_2}\mu_1] + \\
 &\quad P_{k-1}(P_{n_2} + P_{n_2-1}) + (P_{k-1} + P_{k-2})P_{n_2}\mu_1 \\
 &= (2P_k + P_{k-1})(P_{n_2} + P_{n_2-1}) + [2(P_k + P_{k-1}) + (P_{k-1} + \\
 &\quad P_{k-2})]P_{n_2}\mu_1 \\
 &= P_{k+1}(P_{n_2} + P_{n_2-1}) + (P_{k+1} + P_k)P_{n_2}\mu_1
 \end{aligned}$$

• Agora fixando n_1 e aplicando indução em n_2 .

Nesse sentido, para $n_2 = 0$:

$$\begin{aligned}
 P(n_1, 0, \dots, 0) &= P_{n_1}(P_0 + P_{-1}) + (P_{n_1} + P_{n_1-1})P_0\mu_1 \\
 &= P_{n_1}
 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_2$, ou seja, supondo que

$$P(n_1, k, \dots, 0) = P_{n_1}(P_k + P_{k-1}) + (P_{n_1} + P_{n_1-1})P_k\mu_1$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
 P(n_1, k + 1, \dots, 0) &= 2P(n_1, k, \dots, 0) + P(n_1, k - 1, \dots, 0) \\
 &= 2[P_{n_1}(P_k + P_{k-1}) + (P_{n_1} + P_{n_1-1})P_k\mu_1] + \\
 &\quad P_{n_1}(P_{k-1} + P_{k-2}) + (P_{n_1} + P_{n_1-1})P_{k-1}\mu_1 \\
 &= P_{n_1}[2(P_k + P_{k-1}) + (P_{k-1} + P_{k-2})] + (P_{n_1} + P_{n_1-1})(2P_k + P_{k-1})\mu_1 \\
 &= P_{n_1}(P_{k+1} + P_k) + (P_{n_1} + P_{n_1-1})P_{k+1}\mu_1
 \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (m).

(n) Através da recorrência $P(n_1 + 1, n_2, \dots, n_n) = 2P(n, n_2, \dots, n_n) + P(n - 1, n_2, \dots, n_n)$, fixando n_n e $n_2 = 0$, aplicando indução em n_1 .

Nesse sentido, para $n_1 = 0$:

$$\begin{aligned}
 P(0, 0, \dots, n_n) &= P_0(P_{n_n} + P_{n_n-1}) + \dots + (P_0 + P_{-1})P_{n_n}\mu_n \\
 &= P_{n_n}\mu_n
 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_1$, ou seja, supondo que

$$P(k, 0, \dots, n_n) = P_k(P_{n_n} + P_{n_n-1}) + \dots + (P_k + P_{k-1})P_{n_n}\mu_n$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
 P(k + 1, 0, \dots, n_n) &= 2P(k, 0, \dots, n_n) + P(k - 1, 0, \dots, n_n) \\
 &= 2[P_k(P_{n_n} + P_{n_n-1}) + \dots + (P_k + P_{k-1})P_{n_n}\mu_n] + \\
 &\quad P_{k-1}(P_{n_n} + P_{n_n-1}) + \dots + (P_{k-1} + P_{k-2})P_{n_n}\mu_n \\
 &= (2P_k + P_{k-1})(P_{n_n} + P_{n_n-1}) + \dots + [2(P_k + P_{k-1}) + (P_{k-1} + \\
 &\quad P_{k-2})]P_{n_n}\mu_n \\
 &= P_{k+1}(P_{n_n} + P_{n_n-1}) + \dots + (P_{k+1} + P_k)P_{n_n}\mu_n
 \end{aligned}$$

• Agora fixando n_1 e aplicando indução em n_n .

Nesse sentido, para $n_n = 0$:

$$\begin{aligned}
 P(n_1, 0, \dots, 0) &= P_{n_1}(P_0 + P_{-1}) + \dots + (P_{n_1} + P_{n_1-1})P_0\mu_n \\
 &= P_{n_1}
 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_n$, ou seja, supondo que

$$P(n_1, 0, \dots, k) = P_{n_1}(P_k + P_{k-1}) + \dots + (P_{n_1} + P_{n_1-1})P_k\mu_n$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
 P(n_1, 0, \dots, k + 1) &= 2P(n_1, 0, \dots, k) + P(n_1, 0, \dots, k - 1) \\
 &= 2[P_{n_1}(P_k + P_{k-1}) + \dots + (P_{n_1} + P_{n_1-1})P_k\mu_n] + \\
 &\quad P_{n_1}(P_{k-1} + P_{k-2}) + \dots + (P_{n_1} + P_{n_1-1})P_{k-1}\mu_n \\
 &= P_{n_1}[2(P_k + P_{k-1}) + (P_{k-1} + P_{k-2})] + \dots + \\
 &\quad (P_{n_1} + P_{n_1-1})(2P_k + P_{k-1})\mu_n \\
 &= P_{n_1}(P_{k+1} + P_k) + \dots + (P_{n_1} + P_{n_1-1})P_{k+1}\mu_n
 \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (n).

(o) Através da recorrência $P(n_1 + 1, n_2, \dots, n_n) = 2P(n, n_2, \dots, n_n) + P(n - 1, n_2, \dots, n_n)$, fixando n_2 e $n_1 = 0$, aplicando indução em n_n .

Nesse sentido, para $n_n = 0$:

$$\begin{aligned}
 P(0, n_2, \dots, 0) &= P_{n_2}(P_0 + P_{-1})\mu_1 + \dots + (P_{n_2} + P_{n_2-1})P_0\mu_n \\
 &= P_{n_2}\mu_1
 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_n$, ou seja, supondo que

$$P(0, n_2, 0, \dots, k) = P_{n_2}(P_k + P_{k-1})\mu_1 + \dots + (P_{n_2} + P_{n_2-1})P_k\mu_n$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
 P(0, n_2, \dots, k + 1) &= 2P(0, n_2, \dots, k) + P(0, n_2, \dots, k - 1) \\
 &= 2[P_{n_2}(P_k + P_{k-1})\mu_1 + \dots + (P_{n_2} + P_{n_2-1})P_k\mu_n] \\
 &\quad P_{n_2}(P_{k-1} + P_{k-2})\mu_1 + \dots + (P_{n_2} + P_{n_2-1})P_{k-1}\mu_n \\
 &= P_{n_2}[2(P_k + P_{k-1}) + (P_{k-1} + P_{k-2})]\mu_1 + \dots + \\
 &\quad (P_{n_2} + P_{n_2-1})(2P_k + P_{k-1})\mu_n \\
 &= P_{n_2}(P_{k+1} + P_k)\mu_1 + \dots + (P_{n_2} + P_{n_2-1})P_{k+1}\mu_n
 \end{aligned}$$

• Agora fixando n_n e aplicando indução em n_2 .

Nesse sentido, para $n_2 = 0$:

$$\begin{aligned}
 P(0, 0, \dots, n_n) &= P_0(P_{n_n} + P_{n_n-1})\mu_1 + \dots + (P_0 + P_{-1})P_{n_n}\mu_n \\
 &= P_{n_n}\mu_n
 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_2$, ou seja, supondo que

$$P(0, k, \dots, n_n) = P_k(P_{n_n} + P_{n_n-1})\mu_1 + \dots + (P_k + P_{k-1})P_{n_n}\mu_n$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
 P(0, k + 1, \dots, n_n) &= 2P(0, k, \dots, n_n) + P(0, k - 1, \dots, n_n) \\
 &= 2[P_k(P_{n_n} + P_{n_n-1})\mu_1 + \dots + (P_k + P_{k-1})P_{n_n}\mu_n] \\
 &\quad P_{k-1}(P_{n_n} + P_{n_n-1})\mu_1 + \dots + (P_{k-1} + P_{k-2})P_{n_n}\mu_n \\
 &= (2P_k + P_{k-1})(P_{n_n} + P_{n_n-1})\mu_1 + \dots + [2(P_k + P_{k-1}) + \\
 &\quad (P_{k-1} + P_{k-2})]P_{n_n}\mu_n \\
 &= P_{k+1}(P_{n_n} + P_{n_n-1})\mu_1 + \dots + (P_{k+1} + P_k)P_{n_n}\mu_n
 \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (o).

Assim, tem-se que os Lemas são válidos. $\square$

Teorema 61. *Os números da forma $P(n_1, n_2, \dots, n_n)$, tais que $n, n_2, \dots, n_n \in \mathbb{N}$ são determinados por:*

$$\begin{aligned}
 P(n_1, n_2, \dots, n_n) &= P_{n_1}(P_{n_2} + P_{n_2-1}) \cdot \dots \cdot (P_{n_n} + P_{n_n-1}) + \\
 &\quad (P_{n_1} + P_{n_1-1})P_{n_2} \cdot \dots \cdot (P_{n_n} + P_{n_n-1})\mu_1 + \dots + \\
 &\quad (P_{n_1} + P_{n_1-1})(P_{n_2} + P_{n_2-1}) \cdot \dots \cdot P_{n_n}\mu_n
 \end{aligned}$$

Demonstração. Seja $n_1, n_2, \dots, n_{n-1}$ valores fixos, iremos aplicar o princípio da indução sobre n_n .

Para $n_n = 0$,

$$P(n_1, n_2, \dots, 0) = P_{n_1}(P_{n_2} + P_{n_2-1}) + (P_{n_1} + P_{n_1-1})P_{n_2}\mu_1$$

Tem-se que a igualdade é válida pelo Lema (m).

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_n$, ou seja, supondo que

$$\begin{aligned}
 P(n_1, n_2, \dots, k) &= P_{n_1}(P_{n_2} + P_{n_2-1}) \cdot \dots \cdot (P_k + P_{k-1}) + \\
 &\quad (P_{n_1} + P_{n_1-1})P_{n_2} \cdot \dots \cdot (P_k + P_{k-1})\mu_1 + \dots + \\
 &\quad (P_{n_1} + P_{n_1-1})(P_{n_2} + P_{n_2-1}) \cdot \dots \cdot P_k\mu_n
 \end{aligned}$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
 P(n_1, n_2, \dots, k + 1) &= 2P(n_1, n_2, \dots, k) + P(n_1, n_2, \dots, k - 1) \\
 &= 2[P_{n_1}(P_{n_2} + P_{n_2-1}) \cdot \dots \cdot (P_k + P_{k-1}) + \\
 &\quad (P_{n_1} + P_{n_1-1})P_{n_2} \cdot \dots \cdot (P_k + P_{k-1})\mu_1 + \dots + \\
 &\quad (P_{n_1} + P_{n_1-1})(P_{n_2} + P_{n_2-1}) \cdot \dots \cdot P_k\mu_n] + \\
 &\quad P_{n_1}(P_{n_2} + P_{n_2-1}) \cdot \dots \cdot (P_{k-1} + P_{k-2}) + \\
 &\quad (P_{n_1} + P_{n_1-1})P_{n_2} \cdot \dots \cdot (P_{k-1} + P_{k-2})\mu_1 + \dots + \\
 &\quad (P_{n_1} + P_{n_1-1})(P_{n_2} + P_{n_2-1}) \cdot \dots \cdot P_{k-1}\mu_n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P_{n_1}(P_{n_2} + P_{n_2-1}) \cdots [2(P_k + P_{k-1}) + (P_{k-1} + P_{k-2})] + \\
&\quad (P_{n_1} + P_{n_1-1})P_{n_2} \cdots [2(P_k + P_{k-1}) + (P_{k-1} + P_{k-2})]\mu_1 + \cdots + \\
&\quad (P_{n_1} + P_{n_1-1})(P_{n_2} + P_{n_2-1}) \cdots (2P_k + P_{k-1})\mu_n \\
&= P_{n_1}(P_{n_2} + P_{n_2-1}) \cdots (P_{k+1} + P_k) + \\
&\quad (P_{n_1} + P_{n_1-1})P_{n_2} \cdots (P_{k+1} + P_k)\mu_1 + \cdots + \\
&\quad (P_{n_1} + P_{n_1-1})(P_{n_2} + P_{n_2-1}) \cdots P_{k+1}\mu_n
\end{aligned}$$

Como queríamos provar.

• Agora para $n_1, \dots, n_n$ valores fixos, iremos aplicar o princípio da indução sobre n_2 .

Para $n_2 = 0$,

$$P(n_1, 0, \dots, n_n) = P_{n_1}(P_{n_n} + P_{n_n-1}) + \cdots + (P_{n_1} + P_{n_1-1})P_{n_n}\mu_n$$

Tem-se que a igualdade é válida pelo Lema (n).

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_2$, ou seja, supondo que

$$\begin{aligned}
P(n_1, k, \dots, n_n) &= P_{n_1}(P_k + P_{k-1}) \cdots (P_{n_n} + P_{n_n-1}) + \\
&\quad (P_{n_1} + P_{n_1-1})P_k \cdots (P_{n_n} + P_{n_n-1})\mu_1 + \cdots + \\
&\quad (P_{n_1} + P_{n_1-1})(P_k + P_{k-1}) \cdots P_{n_n}\mu_n
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned}
P(n_1, k+1, \dots, n_n) &= 2P(n_1, k, \dots, n_n) + P(n_1, k-1, \dots, n_n) \\
&= 2[P_{n_1}(P_k + P_{k-1}) \cdots (P_{n_n} + P_{n_n-1}) + \\
&\quad (P_{n_1} + P_{n_1-1})P_k \cdots (P_{n_n} + P_{n_n-1})\mu_1 + \cdots + \\
&\quad (P_{n_1} + P_{n_1-1})(P_k + P_{k-1}) \cdots P_{n_n}\mu_n] \\
&\quad P_{n_1}(P_{k-1} + P_{k-2}) \cdots (P_{n_n} + P_{n_n-1}) + \\
&\quad (P_{n_1} + P_{n_1-1})P_{k-1} \cdots (P_{n_n} + P_{n_n-1})\mu_1 + \cdots + \\
&\quad (P_{n_1} + P_{n_1-1})(P_{k-1} + P_{k-2}) \cdots P_{n_n}\mu_n \\
&= P_{n_1}(2P_k + 2P_{k-1} + P_{k-2}) \cdots (P_{n_n} + P_{n_n-1}) + \\
&\quad (P_{n_1} + P_{n_1-1})(2P_k + P_{k-1}) \cdots (P_{n_n} + P_{n_n-1})\mu_1 + \cdots + \\
&\quad (P_{n_1} + P_{n_1-1})(2P_k + 2P_{k-1} + P_{k-2}) \cdots P_{n_n}\mu_n \\
&= P_{n_1}(P_{k+1} + P_k) \cdots (P_{n_n} + P_{n_n-1}) + \\
&\quad (P_{n_1} + P_{n_1-1})P_{k+1} \cdots (P_{n_n} + P_{n_n-1})\mu_1 + \cdots + \\
&\quad (P_{n_1} + P_{n_1-1})(P_{k+1} + P_k) \cdots P_{n_n}\mu_n
\end{aligned}$$

Como queríamos provar.

• Agora para $n_2, \dots, n_n$ valores fixos, iremos aplicar o princípio da indução sobre n_1 .

Para $n_1 = 0$,

$$P(0, n_2, \dots, n_n) = P_{n_2}(P_{n_n} + P_{n_n-1})\mu_1 + \cdots + (P_{n_2} + P_{n_2-1})P_{n_n}\mu_n$$

Tem-se que a igualdade é válida pelo Lema (o).

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_1$, ou seja, supondo que

$$\begin{aligned} P(k, n_2, \dots, n_n) &= P_k(P_{n_2} + P_{n_2-1}) \cdot \dots \cdot (P_{n_n} + P_{n_n-1}) + \\ &\quad (P_k + P_{k-1})P_{n_2} \cdot \dots \cdot (P_{n_n} + P_{n_n-1})\mu_1 + \dots + \\ &\quad (P_k + P_{k-1})(P_{n_2} + P_{n_2-1}) \cdot \dots \cdot P_{n_n}\mu_n \end{aligned}$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} P(k+1, n_2, \dots, n_n) &= 2P(k, n_2, \dots, n_n) + P(k-1, n_2, \dots, n_n) \\ &= 2[P_k(P_{n_2} + P_{n_2-1}) \cdot \dots \cdot (P_{n_n} + P_{n_n-1}) + \\ &\quad (P_k + P_{k-1})P_{n_2} \cdot \dots \cdot (P_{n_n} + P_{n_n-1})\mu_1 + \dots + \\ &\quad (P_k + P_{k-1})(P_{n_2} + P_{n_2-1}) \cdot \dots \cdot P_{n_n}\mu_n] + \\ &\quad P_{k-1}(P_{n_2} + P_{n_2-1}) \cdot \dots \cdot (P_{n_n} + P_{n_n-1}) + \\ &\quad (P_{k-1} + P_{k-2})P_{n_2} \cdot \dots \cdot (P_{n_n} + P_{n_n-1})\mu_1 + \dots + \\ &\quad (P_{k-1} + P_{k-2})(P_{n_2} + P_{n_2-1}) \cdot \dots \cdot P_{n_n}\mu_n \\ &= (2P_k + P_{k-1})(P_{n_2} + P_{n_2-1}) \cdot \dots \cdot (P_{n_n} + P_{n_n-1}) + \\ &\quad (2P_k + 2P_k + P_{k-1} + P_{k-2})P_{n_2} \cdot \dots \cdot (P_{n_n} + P_{n_n-1})\mu_1 + \dots + \\ &\quad (2P_k + 2P_k + P_{k-1} + P_{k-2})(P_{n_2} + P_{n_2-1}) \cdot \dots \cdot P_{n_n}\mu_n \\ &= P_{k+1}(P_{n_2} + P_{n_2-1}) \cdot \dots \cdot (P_{n_n} + P_{n_n-1}) + \\ &\quad (P_{k+1} + P_k)P_{n_2} \cdot \dots \cdot (P_{n_n} + P_{n_n-1})\mu_1 + \dots + \\ &\quad (P_{k+1} + P_k)(P_{n_2} + P_{n_2-1}) \cdot \dots \cdot P_{n_n}\mu_n \end{aligned}$$

Como queríamos provar.

Com isso, o Teorema é válido. □

3.2.2 Hipercomplexificação da Sequência de Perrin

A recorrência da sequência de Perrin é dada por $Pe_n = Pe_{n-2} + Pe_{n-3}$, $n \geq 3$, sendo 3, 0, 2, 3, 2, 5, 5, 7, 10, 12, 17 os primeiros termos desta sequência. Por outro lado, na sequência de Padovan mantêm-se a mesma recorrência da sequência de Perrin e tem-se que os primeiros termos desta sequência são 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12.

Devido a semelhança da sequência de Perrin, Pe_n , com a sequência de Padovan, Pd_n , pode-se perceber que há uma relação dos números de Perrin com os números de Padovan. Assim, tem-se que:

$$Pe(n) = 2Pd(n-4) + 3Pd(n-5), n \geq 5.$$

Com isso, para realizar a hipercomplexificação da sequência de Perrin será utilizada essa relação entre os números de Perrin e Padovan.

3.2.2.1 Relações Recorrentes Bidimensionais de Perrin

Nesta subseção será introduzida a relação bidimensional da Sequência de Perrin, serão definidas duas relações de recorrência, baseadas na recorrência unidimensional.

Definição 84. Os números descritos na forma de $Pe(n, m)$ representarão os termos da sequência de Perrin bidimensionais, satisfazendo as condições recorrentes, sendo $n, m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} Pe(n, m) = Pe(n-2, m) + Pe(n-3, m) \\ Pe(n, m) = Pe(n, m-2) + Pe(n, m-3) \end{cases}$$

Assim, podemos estudar algumas propriedades que serão discutidas mais adiante. Com isso, a partir dos valores iniciais da sequência de Perrin, temos que: $Pe(0, 0) = 3$, $Pe(0, 1) = 3 + 2i$, $Pe(1, 0) = 0$, $Pe(1, 1) = 2i$, $Pe(0, 2) = 3 + 3i$, $Pe(2, 0) = 2$, $Pe(2, 1) = 2 + 2i$, $Pe(1, 2) = 3i$ e $Pe(2, 2) = 2 + 3i$, sendo $i^2 = -1$.

Lema 4. As seguintes propriedades são válidas para a sequência bidimensional de Perrin:

- (a) $Pe(n, 0) = Pe_n$;
- (b) $Pe(0, m) = 3Pd_m + Pe_{m+1}i$;
- (c) $Pe(1, m) = Pe_{m+1}i$;
- (d) $Pe(n, 1) = Pe_n + 2Pd_ni$.

Demonstração. (a) Através da recorrência $Pe(n, m) = Pe(n-2, m) + Pe(n-3, m)$, recorre-se ao Princípio de Indução Matemática para a prova para este Lema.

Nesse sentido, para $n = 0$:

$$\begin{aligned} Pe(0, 0) &= Pe_0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida, tendo em conta que $Pe(0, 0) = 3$.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n$, ou seja, supondo que

$$Pe(k, 0) = Pe_k$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(k+1, 0) &= Pe(k-1, 0) + Pe(k-2, 0) \\ &= Pe_{k-1} + Pe_{k-2} \\ &= Pe_{k+1} \end{aligned}$$

Desse modo, verifica-se a validade do lema 1 (a).

(b) Utilizando a recorrência $Pe(n, m) = Pe(n, m - 2) + Pe(n, m - 3)$ e o Princípio de Indução Matemática, tem-se:

Para $m = 0$:

$$\begin{aligned} Pe(0, 0) &= 3Pd_0 + Pe_1i \\ &= 3.1 + 0.i \\ &= 3 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq m$, ou seja, supondo que

$$Pe(0, k) = 3Pd_k + Pe_{k+1}i$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(0, k + 1) &= Pe(0, k - 1) + Pe(0, k - 2) \\ &= 3Pd_{k-1} + Pe_ki + 3Pd_{k-2} + Pe_{k-1}i \\ &= 3(Pd_{k-1} + Pd_{k-2}) + (Pe_k + Pe_{k-1})i \\ &= 3Pd_{k+1} + Pe_{k+2}i \end{aligned}$$

Com isso, tem-se a validade do lema 1 (b).

(c) Utilizando a recorrência $Pe(n, m) = Pe(n, m - 2) + Pe(n, m - 3)$, fixando $n = 1$, pelo Princípio de Indução Matemática, tem-se:

Para $m = 0$:

$$\begin{aligned} Pe(1, 0) &= Pe_1i \\ &= 0 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq m$, ou seja, supondo que

$$Pe(1, k) = Pe_{k+1}i$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(1, k + 1) &= Pe(1, k - 1) + Pe(1, k - 2) \\ &= Pe_ki + Pe_{k-1}i \\ &= Pe_{k+2}i \end{aligned}$$

Logo, tem-se que o lema 1 (c) é válido.

(d) Utilizando a recorrência $Pe(n, m) = Pe(n - 2, m) + Pe(n - 3, m)$, fixando $m = 1$, pelo

Princípio de Indução Matemática, tem-se:

Para $n = 0$:

$$\begin{aligned} Pe(0, 1) &= Pe_0 + 2Pd_0i \\ &= 3 + 2.1i \\ &= 3 + 2i \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n$, ou seja, supondo que

$$Pe(k, 1) = Pe_k + 2Pd_ki$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(k + 1, 1) &= Pe(k - 1, 1) + Pe(k - 2, 1) \\ &= Pe_{k-1} + 2Pd_{k-1}i + Pe_{k-2} + 2Pd_{k-2}i \\ &= Pe_{k-1} + Pe_{k-2} + 2(Pd_{k-1} + Pd_{k-2})i \\ &= Pe_{k+1} + 2Pd_{k+1}i \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 1 (d). □

Assim, temos a relação da sequência de Perrin, com a inserção de uma unidade imaginária, em função da sequência de Padovan.

Teorema 62. *Para os números inteiros, $n, m \in \mathbb{N}$, os termos da sequência de Perrin bidimensionais na forma $Pe(n, m)$, são descritos por:*

$$Pe(n, m) = Pd_mPe_n + Pe_{m+1}Pd_ni.$$

Demonstração. Recorre-se ao Princípio de Indução Matemática como meio de prova para o teorema em questão.

- Começamos por fixar $n \in \mathbb{N}$ e vamos usar indução em m .

Para $m = 0$, temos:

$$\begin{aligned} Pe(n, 0) &= Pd_0Pe_n + Pe_1Pd_ni \\ &= 1.Pe(n) + 0.Pd(n)i \\ &= Pe(n) \end{aligned}$$

O que é verdade pelo Lema 1 (a).

Suponhamos agora que é válido para $k \leq m$ e n fixo, ou seja,

$$Pe(n, k) = Pd_kPe_n + Pe_{k+1}Pd_ni$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então:

$$\begin{aligned}
 Pe(n, k + 1) &= Pe(n, k - 1) + Pe(n, k - 2) \\
 &= Pd_{k-1}Pe_n + Pe_kPd_ni + Pd_{k-2}Pe_n + Pe_{k-1}Pd_ni \\
 &= (Pd_{k-1} + Pd_{k-2})Pe_n + (Pe_k + Pe_{k-1})Pd_ni \\
 &= Pd_{k+1}Pe_n + Pe_{k+2}Pd_ni
 \end{aligned}$$

Como pretendíamos mostrar.

- Agora vamos fixar $m \in \mathbb{N}$ e usar indução em n .

Para $n = 0$, temos

$$\begin{aligned}
 Pe(0, m) &= Pd_mPe_0 + Pe_{m+1}Pd_0i \\
 &= 3Pd_m + 1.Pe_{m+1}i \\
 &= 3Pd_m + Pe_{m+1}i
 \end{aligned}$$

O que é verdade pelo Lema 1 (b).

Suponhamos agora que é válido para $k \leq n$ e m fixo, ou seja,

$$Pe(k, m) = Pd_mPe_k + Pe_{m+1}Pd_ki$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então:

$$\begin{aligned}
 Pe(k + 1, m) &= Pe(k - 1, m) + Pe(k - 2, m) \\
 &= Pd_mPe_{k-1} + Pe_{m+1}Pd_{k-1}i + Pd_mPe_{k-2} + Pe_{m+1}Pd_{k-2}i \\
 &= Pd_m(Pe_{k-1} + Pe_{k-2}) + Pe_{m+1}(Pd_{k-1} + Pd_{k-2})i \\
 &= Pd_mPe_{k+1} + Pe_{m+1}Pd_{k+1}i
 \end{aligned}$$

Como pretendíamos mostrar. □

3.2.2.2 Relações Recorrentes Tridimensionais de Perrin

Definição 85. Os números na forma $Pe(n, m, p)$ são definidos como a Sequência Tridimensional de Perrin, satisfazendo as seguintes relações de recorrência, em que $n, m, p > 0$:

$$\begin{cases} Pe(n, m, p) = Pe(n - 2, m, p) + Pe(n - 3, m, p) \\ Pe(n, m, p) = Pe(n, m - 2, p) + Pe(n, m - 3, p) \\ Pe(n, m, p) = Pe(n, m, p - 2) + Pe(n, m, p - 3) \end{cases}$$

Com as condições iniciais: $Pe(0, 0, 0) = 3, Pe(1, 0, 0) = 0, Pe(0, 1, 0) = 3 + 2i, Pe(0, 0, 1) = 3 + 2j, Pe(1, 0, 1) = 2j, Pe(1, 1, 0) = 2i, Pe(0, 1, 1) = 3 + 2i + 2j$ e $Pe(1, 1, 1) = 2i + 2j$ onde $i^2 = j^2 = -1$.

Lema 5. As seguinte propriedades são válidas para a Sequência Tridimensional de Perrin:

- (a) $Pe(n, 0, 0) = Pe_n$;
- (b) $Pe(0, m, 0) = 3Pd_m + Pe_{m+1}i$;
- (c) $Pe(0, 0, p) = 3Pd_p + Pe_{p+1}j$;
- (d) $Pe(n, 1, 0) = Pe_n + 2Pd_ni$;
- (e) $Pe(n, 0, 1) = Pe_n + 2Pd_nj$;
- (f) $Pe(n, 1, 1) = Pe_n + 2Pd_ni + 2Pd_nj$;
- (g) $Pe(1, m, 0) = Pe_{m+1}i$;
- (h) $Pe(0, m, 1) = 3Pd_m + Pe_{m+1}i + 2Pd_mj$;
- (i) $Pe(1, m, 1) = Pe_{m+1}i + 2Pd_mj$;
- (j) $Pe(1, 0, p) = Pe_{p+1}j$;
- (k) $Pe(0, 1, p) = 3Pd_p + 2Pd_pi + Pe_{p+1}j$;
- (l) $Pe(1, 1, p) = 2Pd_pi + Pe_{p+1}j$;
- (m) $Pe(n, m, 0) = Pe_nPd_m + Pd_nPe_{m+1}i$;
- (n) $Pe(n, 0, p) = Pe_nPd_p + Pd_nPe_{p+1}j$;
- (o) $Pe(0, m, p) = Pe_{m+1}Pd_pi + Pd_mPe_{p+1}j$.

Demonstração. (a) Através da recorrência $Pe(n, m, p) = Pe(n-2, m, p) + Pe(n-3, m, p)$, fixando o valor de $m = 0$, $p = 0$ e aplicando o princípio de indução sobre n , tem-se:

Para $n = 0$,

$$\begin{aligned} Pe(0, 0, 0) &= Pe_0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

A igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n$, ou seja, supondo que

$$Pe(k, 0, 0) = Pe_k$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(k+1, 0, 0) &= Pe(k-1, 0, 0) + Pe(k-2, 0, 0) \\ &= Pe_{k-1} + Pe_{k-2} \\ &= Pe_{k+1} \end{aligned}$$

Desse modo, verifica-se a validade do lema 2 (a).

(b) Através da recorrência $Pe(n, m, p) = Pe(n-2, m, p) + Pe(n-3, m, p)$, fixando $n = 0$, $p = 0$ e aplicando o princípio de indução sobre m . Nesse sentido, para $m = 0$:

$$\begin{aligned} Pe(0, 0, 0) &= 3Pd_0 + Pe_1i \\ &= 3 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq m$, ou seja, supondo que

$$Pe(0, k, 0) = 3Pd_k + Pe_{k+1}i$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(0, k + 1, 0) &= Pe(0, k - 1, 0) + Pe(0, k - 2, 0) \\ &= 3Pd_{k-1} + Pe_k i + 3Pd_{k-2} + Pe_{k-1} i \\ &= 3Pd_{k+1} + Pe_k i \end{aligned}$$

Com isso, tem-se a validade do lema 2 (b).

(c) Através da recorrência $Pe(n, m, p) = Pe(n - 2, m, p) + Pe(n - 3, m, p)$, fixando $n = 0$, $m = 0$ e aplicando o princípio de indução sobre p .

Nesse sentido, para $p = 0$:

$$\begin{aligned} Pe(0, 0, 0) &= 3Pd_0 + Pe_1 j \\ &= 3 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq p$, ou seja, supondo que

$$Pe(0, 0, k) = 3Pd_k + Pe_{k+1}j$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(0, 0, k + 1) &= Pe(0, 0, k - 1) + Pe(0, 0, k - 2) \\ &= 3Pd_{k-1} + Pe_k j + 3Pd_{k-2} + Pe_{k-1} j \\ &= 3Pd_{k+1} + Pe_{k+2} j \end{aligned}$$

Logo, tem-se que o lema 2 (c) é válido.

(d) Através da recorrência $Pe(n, m, p) = Pe(n - 2, m, p) + Pe(n - 3, m, p)$, fixando $m = 1$, $p = 0$ e aplicando o princípio de indução sobre n . Nesse sentido, para $n = 0$:

$$\begin{aligned} Pe(0, 1, 0) &= Pe_0 + 2Pd_0 i \\ &= 3 + 2i \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n$, ou seja, supondo que

$$Pe(k, 1, 0) = Pe_k + 2Pd_k i$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(k + 1, 1, 0) &= Pe(k - 1, 1, 0) + Pe(k - 2, 1, 0) \\ &= Pe_{k-1} + 2Pd_{k-1} i + Pe_{k-2} + 2Pd_{k-2} i \\ &= Pe_{k+1} + 2Pd_{k+1} i \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 2 (d).

(e) Através da recorrência $Pe(n, m, p) = Pe(n, m - 2, p) + Pe(n, m - 3, p)$, fixando $m = 0$, $p = 1$ e aplicando o princípio de indução em n . Nesse sentido, para $n = 0$:

$$\begin{aligned} Pe(0, 0, 1) &= Pe_0 + 2Pd_0j \\ &= 3 + 2j \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n$, ou seja, supondo que

$$Pe(k, 0, 1) = Pe_k + 2Pd_kj$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(k + 1, 0, 1) &= Pe(k - 1, 0, 1) + Pe(k - 2, 0, 1) \\ &= Pe_{k-1} + 2Pd_{k-1}j + Pe_{k-2} + 2Pd_{k-2}j \\ &= Pe_{k+1} + 2Pd_{k+1}j \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 2 (e).

(f) Através da recorrência $Pe(n, m, p) = Pe(n, m - 2, p) + Pe(n, m - 3, p)$, fixando $m = 1$, $p = 1$ e aplicando indução em n . Para $n = 0$,

$$\begin{aligned} Pe(0, 1, 1) &= Pe_0 + 2Pd_0i + 2Pd_0j \\ &= 3 + 2i + 2j \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n$, ou seja, supondo que

$$Pe(k, 1, 1) = Pe_k + 2Pd_ki + 2Pd_kj$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(k + 1, 1, 1) &= Pe(k - 1, 1, 1) + Pe(k - 2, 1, 1) \\ &= Pe_{k-1} + 2Pd_{k-1}i + 2Pd_{k-1}j + Pe_{k-2} + 2Pd_{k-2}i + 2Pd_{k-2}j \\ &= Pe_{k+1} + 2Pd_{k+1}i + 2Pd_{k+1}j \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 2 (f).

(g) Através da recorrência $Pe(n, m, p) = Pe(n, m - 2, p) + Pe(n, m - 3, p)$, fixando $n = 1$, $p = 0$ e aplicando o princípio da indução sobre m .

Para $m = 0$,

$$\begin{aligned} Pe(1, 0, 0) &= Pe_1i \\ &= 0 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq m$, ou seja, supondo que

$$Pe(1, k, 0) = Pe_{k+1}i$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(1, k + 1, 0) &= Pe(1, k - 1, 0) + Pe(1, k - 2, 0) \\ &= Pe_k i + Pe_{k-1} i \\ &= Pe_{k+2} i \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 2 (g).

(h) Através da recorrência $Pe(n, m, p) = Pe(n, m - 2, p) + Pe(n, m - 3, p)$, fixando $n = 0$, $p = 1$ e aplicando o princípio da indução sobre m .

Para $m = 0$,

$$\begin{aligned} Pe(0, 0, 1) &= 3Pd_0 + Pe_1 i + 2Pd_0 j \\ &= 3 + 2j \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq m$, ou seja, supondo que

$$Pe(0, k, 1) = 3Pd_k + Pe_{k+1} i + 2Pd_k j$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(0, k + 1, 1) &= Pe(0, k - 1, 1) + Pe(0, k - 2, 1) \\ &= 3Pd_{k-1} + Pe_k i + 2Pd_{k-1} j + 3Pd_{k-2} + Pe_{k-1} i + 2Pd_{k-2} j \\ &= 3Pd_{k+1} + Pe_{k+2} i + 2Pd_{k+1} j \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 2 (h).

(i) Através da recorrência $Pe(n, m, p) = Pe(n, m, p - 2) + Pe(n, m, p - 3)$, fixando $n = 1$, $p = 1$ e aplicando o princípio da indução sobre m .

Para $m = 0$,

$$\begin{aligned} Pe(1, 0, 1) &= Pe_1 i + 2Pd_0 j \\ &= 3i + 2j \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq m$, ou seja, supondo que

$$Pe(1, k, 1) = Pe_{k+1} i + 2Pd_k j$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(1, k + 1, 1) &= Pe(1, k - 1, 1) + Pe(1, k - 2, 1) \\ &= Pe_k i + 2Pd_{k-1} j + Pe_{k-1} i + 2Pd_{k-2} j \\ &= Pe_{k+2} i + 2Pd_{k+1} j \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 2 (i).

(j) Através da recorrência $Pe(n, m, p) = Pe(n, m, p - 2) + Pe(n, m, p - 3)$, fixando $n = 1$, $m = 0$ aplicando o princípio da indução sobre p .

Para $p = 0$,

$$\begin{aligned} Pe(1, 0, 0) &= Pe_1 j \\ &= 0 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq p$, ou seja, supondo que

$$Pe(1, 0, k) = Pe_{k+1} j$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(1, 0, k + 1) &= Pe(1, 0, k - 1) + Pe(1, 0, k - 2) \\ &= Pe_k j + Pe_{k-1} j \\ &= Pe_{k+2} j \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 2 (j).

(k) Através da recorrência $Pe(n, m, p) = Pe(n, m, p - 2) + Pe(n, m, p - 3)$, fixando $n = 0$, $m = 1$ aplicando o princípio da indução sobre p .

Para $p = 0$,

$$\begin{aligned} Pe(0, 1, 0) &= 3Pd_0 + 2Pd_0 i + Pe_1 j \\ &= 3 + 2i + 3j \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq p$, ou seja, supondo que

$$Pe(0, 1, k) = 3Pd_k + 2Pd_k i + Pe_{k+1} j$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(0, 1, k + 1) &= Pe(0, 1, k - 1) + Pe(0, 1, k - 2) \\ &= 3Pd_{k-1} + 2Pd_{k-1} i + Pe_k j + 3Pd_{k-2} + 2Pd_{k-2} i + Pe_{k-1} j \\ &= 3Pd_{k+1} + 2Pd_{k+1} i + Pe_{k+2} j \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 2 (k).

(l) Através da recorrência $Pe(n, m, p) = Pe(n, m, p-2) + Pe(n, m, p-3)$, fixando $n = 1$, $m = 1$ aplicando o princípio da indução sobre p .

Para $p = 0$,

$$\begin{aligned} Pe(1, 1, 0) &= 2Pd_0i + Pe_1j \\ &= 2i \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq p$, ou seja, supondo que

$$Pe(1, 1, k) = 2Pd_ki + Pe_{k+1}j$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(1, 1, k+1) &= Pe(1, 1, k-1) + Pe(1, 1, k-2) \\ &= 2Pd_{k-1}i + Pe_kj + 2Pd_{k-2}i + Pe_{k-1}j \\ &= 2Pd_{k+1}i + Pe_{k+2}j \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 2 (l).

(m) Através da recorrência $Pe(n, m, p) = Pe(n-2, m, p) + Pe(n-3, m, p)$, fixando n e aplicando indução em m .

Para $m = 0$,

$$\begin{aligned} Pe(n, 0, 0) &= Pe_nPd_0 + Pd_nPe_1i \\ &= Pe_n \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq m$, ou seja, supondo que

$$Pe(n, k, 0) = Pe_nPd_k + Pd_nPe_{k+1}i$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(n, k+1, 0) &= Pe(n, k-1, 0) + Pe(n, k-2, 0) \\ &= Pe_nPd_{k-1} + Pd_nPe_ki + Pe_nPd_{k-2} + Pd_nPe_{k-1}i \\ &= Pe_nPd_{k+1} + Pd_nPe_{k+2}i \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

• Agora fixando m e usando indução em n .

Para $n = 0$,

$$\begin{aligned} Pe(0, m, 0) &= Pe_0Pd_m + Pd_0Pe_{m+1}i \\ &= Pe_{m+1}i \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n$, ou seja, supondo que

$$Pe(k, m, 0) = Pe_k Pd_m + Pd_k Pe_{m+1} i$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(k+1, m, 0) &= Pe(k-1, m, 0) + Pe(k-2, m, 0) \\ &= Pe_{k-1} Pd_m + Pd_{k-1} Pe_{m+1} i + Pe_{k-2} Pd_m + Pd_{k-2} Pe_{m+1} i \\ &= Pe_{k+1} Pd_m + Pd_{k+1} Pe_{m+1} i \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

Com isso, é válido o lema 2 (m).

(n) Através da recorrência $Pe(n, m, p) = Pe(n-2, m, p) + Pe(n-3, m, p)$, fixando n e aplicando indução em p . Para $p = 0$,

$$\begin{aligned} Pe(n, 0, 0) &= Pe_n Pd_0 + Pd_n Pe_1 j \\ &= Pe_n \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq p$, ou seja, supondo que

$$Pe(n, 0, k) = Pe_n Pd_k + Pd_n Pe_{k+1} j$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(n, 0, k+1) &= Pe(n, 0, k-1) + Pe(n, 0, k-2) \\ &= Pe_n Pd_{k-1} + Pd_n Pe_k j + Pe_n Pd_{k-2} + Pd_n Pe_{k-1} j \\ &= Pe_n Pd_{k+1} + Pd_n Pe_{k+2} j \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

• Agora fixando p e usando indução em n .

Para $n = 0$,

$$\begin{aligned} Pe(0, 0, p) &= Pe_0 Pd_p + Pd_0 Pe_{p+1} j \\ &= 3Pd_p + Pe_{p+1} j \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n$, ou seja, supondo que

$$Pe(k, 0, p) = Pe_k Pd_p + Pd_k Pe_{p+1} j$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(k+1, 0, p) &= Pe(k-1, 0, p) + Pe(k-2, 0, p) \\ &= Pe_{k-1} Pd_p + Pd_{k-1} Pe_{p+1} j + Pe_{k-2} Pd_p + Pd_{k-2} Pe_{p+1} j \\ &= Pe_{k+1} Pd_p + Pd_{k+1} Pe_{p+1} j \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

Com isso, é válido o lema 2 (n).

(o) Através da recorrência $Pe(n, m, p) = Pe(n, m - 2, p) + Pe(n, m - 3, p)$, fixando m e aplicando indução em p .

Para $p = 0$,

$$\begin{aligned} Pe(0, m, 0) &= Pe_{m+1}Pd_0i + Pd_mPe_1j \\ &= Pe_{m+1}i \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq p$, ou seja, supondo que

$$Pe(0, m, k) = Pe_{m+1}Pd_ki + Pd_mPe_{k+1}j$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(0, m, k + 1) &= Pe(0, m, k - 1) + Pe(0, m, k - 2) \\ &= Pe_{m+1}Pd_{k-1}i + Pd_mPe_kj + Pe_{m+1}Pd_{k-2}i + Pd_mPe_{k-1}j \\ &= Pe_{m+1}Pd_{k+1}i + Pd_mPe_{k+2}j \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

• Agora fixando p e usando indução em m .

Para $m = 0$,

$$\begin{aligned} Pe(0, 0, p) &= Pe_1Pd_pi + Pd_0Pe_{p+1}j \\ &= 3Pd_pi + Pe_{p+1}j \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq m$, ou seja, supondo que

$$Pe(0, k, p) = Pe_{k+1}Pd_pi + Pd_kPe_{p+1}j$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(0, k + 1, p) &= Pe(0, k - 1, p) + Pe(0, k - 2, p) \\ &= Pe_kPd_pi + Pd_{k-1}Pe_{p+1}j + Pe_{k-1}Pd_pi + Pd_{k-2}Pe_{p+1}j \\ &= Pe_{k+2}Pd_pi + Pd_{k+1}Pe_{p+1}j \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

Com isso, é válido o lema 2 (o). □

Teorema 63. Para os três inteiros, $n, m, p \in \mathbb{N}$, os números tridimensionais de Perrin são descritos por:

$$Pe(n, m, p) = Pe_nPd_mPd_p + Pd_nPe_{m+1}Pd_pi + Pd_nPd_mPe_{p+1}j$$

Demonstração. Recorre-se ao Princípio de Indução Matemática como alternativa de prova para o teorema em questão.

- Seja n e m valores fixos, iremos aplicar o princípio da indução sobre p .

Nesse sentido, para $p = 0$:

$$\begin{aligned} Pe(n, m, 0) &= Pe_n Pd_m Pd_0 + Pd_n Pe_{m+1} Pd_0 i + Pd_n Pd_m Pe_1 j \\ &= Pe_n Pd_m + Pd_n Pe_{m+1} i \end{aligned}$$

Correto pelo Lema 2 (m).

Supondo que seja verdade para n e m fixos e qualquer $k \leq p$, ou seja, supondo que

$$Pe(n, m, k) = Pe_n Pd_m Pd_k + Pd_n Pe_{m+1} Pd_k i + Pd_n Pd_m Pe_{k+1} j$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para n e m fixos e para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(n, m, k + 1) &= Pe(n, m, k - 1) + Pe(n, m, k - 2) \\ &= Pe_n Pd_m Pd_{k-1} + Pd_n Pe_{m+1} Pd_{k-1} i + Pd_n Pd_m Pe_k j + \\ &\quad Pe_n Pd_m Pd_{k-2} + Pd_n Pe_{m+1} Pd_{k-2} i + Pd_n Pd_m Pe_{k-1} j \\ &= Pe_n Pd_m Pd_{k+1} + Pd_n Pe_{m+1} Pd_{k+1} i + Pd_n Pd_m Pe_{k+2} j \end{aligned}$$

Como pretendíamos mostrar.

- Agora fixemos n e p e usemos indução em m . Nesse sentido, para $m = 0$:

$$\begin{aligned} Pe(n, 0, p) &= Pe_n Pd_0 Pd_p + Pd_n Pe_1 Pd_p i + Pd_n Pd_0 Pe_{p+1} j \\ &= Pe_n Pd_p + Pd_n Pe_{p+1} j \end{aligned}$$

Correto pelo Lema 2 (n).

Supondo que seja verdade para n e p fixos e qualquer $k \leq m$, ou seja, supondo que

$$Pe(n, k, p) = Pe_n Pd_k Pd_p + Pd_n Pe_{k+1} Pd_p i + Pd_n Pd_k Pe_{p+1} j$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(n, k + 1, p) &= Pe(n, k - 1, p) + Pe(n, k - 2, p) \\ &= Pe_n Pd_{k-1} Pd_p + Pd_n Pe_k Pd_p i + Pd_n Pd_{k-1} Pe_{p+1} j + \\ &\quad Pe_n Pd_{k-2} Pd_p + Pd_n Pe_{k-1} Pd_p i + Pd_n Pd_{k-2} Pe_{p+1} j \\ &= Pe_n Pd_{k+1} Pd_p + Pd_n Pe_{k+2} Pd_p i + Pd_n Pd_{k+1} Pe_{p+1} j \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

- Agora fixemos m e p e usemos indução em n .

Nesse sentido, para $n = 0$:

$$\begin{aligned} Pe(0, m, p) &= Pe_0 Pd_m Pd_p + Pd_0 Pe_{m+1} Pd_p i + Pd_0 Pd_m Pe_{p+1} j \\ &= Pe_{m+1} Pd_p i + Pd_m Pe_{p+1} j \end{aligned}$$

Correto pelo Lema 2 (o).

Supondo que seja verdade para m e p fixos e qualquer $k \leq n$, ou seja, supondo que

$$Pe(k, m, p) = Pe_k Pd_m Pd_p + Pd_k Pe_{m+1} Pd_p i + Pd_k Pd_m Pe_{p+1} j$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(k+1, m, p) &= Pe(k-1, m, p) + Pe(k-2, m, p) \\ &= Pe_{k-1} Pd_m Pd_p + Pd_{k-1} Pe_{m+1} Pd_p i + Pd_{k-1} Pd_m Pe_{p+1} j + \\ &\quad Pe_{k-2} Pd_m Pd_p + Pd_{k-2} Pe_{m+1} Pd_p i + Pd_{k-2} Pd_m Pe_{p+1} j \\ &= Pe_{k+1} Pd_m Pd_p + Pd_{k+1} Pe_{m+1} Pd_p i + Pd_{k+1} Pd_m Pe_{p+1} j \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

Com isso, tem-se que o Teorema é válido. $\square$

3.2.2.3 Relações Recorrentes n -Dimensionais de Perrin

Definição 86. *Seja um número hipercomplexo $Pe(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n)$ com n variáveis naturais, para $n \geq 2$ vale, além da componente imaginária i , o seguinte conjunto de unidades imaginárias $(\mu_1 = i, \mu_2 = j, \dots, \mu_n)$. Desse modo, são definidos os valores iniciais a seguir:*

$$\begin{aligned} Pe(0, 0, 0, \dots, 0) &= 3 \\ Pe(1, 0, 0, \dots, 0) &= 0 \\ Pe(0, 1, 0, \dots, 0) &= 3 + 2\mu_1 \\ Pe(0, 0, 1, \dots, 0) &= 3 + 2\mu_2 \\ Pe(0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0) &= 3 + 2\mu_3 \\ Pe(0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0) &= 3 + 2\mu_4 \\ &\vdots \\ Pe(0, 0, 0, \dots, 1) &= 3 + \mu_n \\ Pe(1, 1, 1, \dots, 1) &= \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n \\ Pe(0, 1, 1, \dots, 1) &= 3 + \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n \\ Pe(1, 0, 1, \dots, 1) &= \mu_2 + \dots + \mu_n \\ Pe(1, 1, 0, 1, \dots, 1) &= \mu_1 + \mu_3 + \dots + \mu_n \\ &\vdots \\ Pe(1, 1, 1, \dots, 1, 0) &= \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{n-1} \end{aligned}$$

Com isso, os números da forma $Pe(n, n_2, \dots, n_n)$ devem satisfazer às seguintes

condições n -dimensionais de recorrência:

$$\begin{cases} Pe(n_1, n_2, \dots, n_n) = Pe(n_1 - 2, n_2, \dots, n_n) + Pe(n_1 - 3, n_2, \dots, n_n) \\ Pe(n_1, n_2, \dots, n_n) = Pe(n_1, n_2 - 2, \dots, n_n) + Pe(n_1, n_2 - 3, \dots, n_n) \\ Pe(n_1, n_2, \dots, n_n) = Pe(n_1, n_2, \dots, n_n - 2) + Pe(n_1, n_2, \dots, n_n - 3) \end{cases}$$

Lema 6. *As seguintes propriedades são válidas para a Sequência n -dimensional de Perrin:*

$$\begin{aligned} (a) Pe(n_1, 0, \dots, 0) &= Pe_{n_1} \\ (b) Pe(0, n_2, \dots, 0) &= 3Pd_{n_2} + Pe_{n_2+1}\mu_1 \\ (c) Pe(0, 0, \dots, n_n) &= 3Pd_{n_n} + Pe_{n_n+1}\mu_n \\ (d) Pe(n_1, 1, \dots, 0) &= Pe_{n_1} + 2Pd_{n_1}\mu_1 \\ (e) Pe(n_1, 0, \dots, 1) &= Pe_{n_1} + \dots + 2Pd_{n_1}\mu_n \\ (f) Pe(n_1, 1, \dots, 1) &= Pe_{n_1} + 2Pd_{n_1}\mu_1 + \dots + 2Pd_{n_1}\mu_n \\ (g) Pe(1, n_2, \dots, 0) &= Pe_{n_2+1}i \\ (h) Pe(0, n_2, \dots, 1) &= 3Pd_{n_2} + Pe_{n_2+1}\mu_1 + \dots + 2Pd_{n_2}\mu_n \\ (i) Pe(1, n_2, \dots, 1) &= Pe_{n_2+1}\mu_1 + \dots + 2Pd_{n_2}\mu_n \\ (j) Pe(1, 0, \dots, n_n) &= Pe_{n_n+1}\mu_n \\ (k) Pe(0, 1, \dots, n_n) &= 3Pd_{n_n} + 2Pd_{n_n}\mu_1 + \dots + Pe_{n_n+1}\mu_n \\ (l) Pe(1, 1, \dots, n_n) &= 2Pd_{n_n}\mu_1 + \dots + Pe_{n_n+1}\mu_n \\ (m) Pe(n_1, n_2, \dots, 0) &= Pe_{n_1}Pd_{n_2} + Pd_{n_1}Pe_{n_2+1}\mu_1 \\ (n) Pe(n_1, 0, \dots, n_n) &= Pe_{n_1}Pd_{n_n} + \dots + Pd_{n_1}Pe_{n_n+1}\mu_n \\ (o) Pe(0, n_2, \dots, n_n) &= Pe_{n_2+1}Pd_{n_n}\mu_1 + \dots + Pd_{n_2}Pe_{n_n+1}\mu_n \end{aligned}$$

Demonstração. (a) Através da recorrência $Pe(n_1, n_2, \dots, n_n) = Pe(n_1 - 2, n_2, \dots, n_n) + Pe(n_1 - 3, n_2, \dots, n_n)$, fixando $n_2, \dots, n_n$ iguais a zero e aplicando o método de indução em n_1 , tem-se:

Para $n_1 = 0$,

$$\begin{aligned} Pe(0, 0, \dots, 0) &= Pe_0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Supondo que seja verdade para $n_2, \dots, n_n$ fixos e qualquer $k \leq n_1$, ou seja supondo que

$$Pe(k, 0, \dots, 0) = Pe_k$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(k + 1, 0, \dots, 0) &= Pe(k - 1, 0, \dots, 0) + Pe(k - 2, 0, \dots, 0) \\ &= Pe_{k-1} + Pe_{k-2} \\ &= Pe_{k+1} \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (a).

(b) Através da recorrência $Pe(n_1, n_2, \dots, n_n) = Pe(n_1, n_2 - 2, \dots, n_n) + Pe(n_1, n_2 - 3, \dots, n_n)$, fixando $n_1, n_3, \dots, n_n$ iguais a zero e aplicando o método de indução em n_2 , tem-se:

Para $n_2 = 0$,

$$\begin{aligned} Pe(0, 0, \dots, 0) &= 3Pd_0 + Pe_1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Supondo que seja verdade para $n_1, \dots, n_n$ fixos e qualquer $k \leq n_2$, ou seja supondo que

$$Pe(0, k, \dots, 0) = 3Pd_k + Pe_{k+1}$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(0, k + 1, \dots, 0) &= Pe(0, k - 1, \dots, 0) + Pe(0, k - 2, \dots, 0) \\ &= 3Pd_{k-1} + Pe_k + 3Pd_{k-2} + Pe_{k-1} \\ &= 3Pd_{k+1} + Pe_{k+2} \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (b).

(c) Através da recorrência $Pe(n_1, n_2, \dots, n_n) = Pe(n_1, n_2, \dots, n_n - 2) + Pe(n_1, n_2, \dots, n_n - 3)$, fixando $n_1, n_2, \dots$ iguais a zero e aplicando o método de indução em n_n , tem-se:

Para $n_n = 0$,

$$\begin{aligned} Pe(0, 0, \dots, 0) &= 3Pd_0 + Pe_1\mu_n \\ &= 3 \end{aligned}$$

Supondo que seja verdade para $n_1, n_2, \dots$ fixos e qualquer $k \leq n_n$, ou seja supondo que

$$Pe(0, 0, \dots, k) = 3Pd_k + Pe_{k+1}\mu_n$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(0, 0, \dots, k + 1) &= Pe(0, 0, \dots, k - 1) + Pe(0, 0, \dots, k - 2) \\ &= 3Pd_{k-1} + Pe_k\mu_n + 3Pd_{k-2} + Pe_{k-1}\mu_n \\ &= 3Pd_{k+1} + Pe_{k+2}\mu_n \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (c).

(d) Através da recorrência $Pe(n_1, n_2, \dots, n_n) = Pe(n_1 - 2, n_2, \dots, n_n) + Pe(n_1 - 3, n_2, \dots, n_n)$, fixando $n_2 = 1, n_n = 0$ e aplicando o princípio de indução sobre n_1 . Nesse sentido, para $n_1 = 0$:

$$\begin{aligned} Pe(0, 1, \dots, 0) &= Pe_0 + 2Pd_0\mu_1 \\ &= 3 + 2\mu_1 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_1$, ou seja, supondo que

$$Pe(k, 1, \dots, 0) = Pe_k + 2Pd_k\mu_1$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(k+1, 1, \dots, 0) &= Pe(k-1, 1, \dots, 0) + Pe(k-2, 1, \dots, 0) \\ &= Pe_{k-1} + 2Pd_{k-1}\mu_1 + Pe_{k-2} + 2Pd_{k-2}\mu_1 \\ &= Pe_{k+1} + 2Pd_{k+1}\mu_1 \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (d).

(e) Através da recorrência $Pe(n_1, n_2, \dots, n_n) = Pe(n_1-2, n_2, \dots, n_n) + Pe(n_1-3, n_2, \dots, n_n)$, fixando $n_2 = 0$, $n_n = 1$ e aplicando o princípio de indução sobre n_1 . Nesse sentido, para $n_1 = 0$:

$$\begin{aligned} Pe(0, 0, \dots, 1) &= Pe_0 + \dots + 2Pd_0\mu_n \\ &= 3 + 2\mu_n \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_1$, ou seja, supondo que

$$Pe(k, 0, \dots, 1) = Pe_k + \dots + 2Pd_k\mu_n$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(k+1, 0, \dots, 1) &= Pe(k-1, 0, \dots, 1) + Pe(k-2, 0, \dots, 1) \\ &= Pe_{k-1} + \dots + 2Pd_{k-1}\mu_n + Pe_{k-2} + \dots + 2Pd_{k-2}\mu_n \\ &= Pe_{k+1} + \dots + 2Pd_{k+1}\mu_n \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (e).

(f) Através da recorrência $Pe(n_1, n_2, \dots, n_n) = Pe(n_1-2, n_2, \dots, n_n) + Pe(n_1-3, n_2, \dots, n_n)$, fixando $n_2 = 1$, $n_n = 1$ e aplicando o princípio de indução sobre n_1 . Nesse sentido, para $n_1 = 0$:

$$\begin{aligned} Pe(0, 1, \dots, 1) &= Pe_0 + 2Pd_0\mu_1 + \dots + 2Pd_0\mu_n \\ &= 3 + 2\mu_1 + \dots + 2\mu_n \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_1$, ou seja, supondo que

$$Pe(k, 1, \dots, 1) = Pe_k + 2Pd_k\mu_1 + \dots + 2Pd_k\mu_n$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
 Pe(k+1, 1, \dots, 1) &= Pe(k-1, 1, \dots, 1) + Pe(k-2, 1, \dots, 1) \\
 &= Pe_{k-1} + 2Pd_{k-1}\mu_1 + \dots + 2Pd_{k-1}\mu_n + Pe_{k-2} + \\
 &\quad 2Pd_{k-2}\mu_1 + \dots + 2Pd_{k-2}\mu_n \\
 &= Pe_{k+1} + 2Pd_{k+1}\mu_1 + \dots + 2Pd_{k+1}\mu_n
 \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (f).

(g) Através da recorrência $Pe(n_1, n_2, \dots, n_n) = Pe(n_1, n_2 - 2, \dots, n_n) + Pe(n_1, n_2 - 3, \dots, n_n)$, fixando $n_1 = 1$, $n_n = 0$ e aplicando o princípio de indução sobre n_2 . Nesse sentido, para $n_2 = 0$:

$$\begin{aligned}
 Pe(1, 0, \dots, 0) &= Pe_1 i \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_2$, ou seja, supondo que

$$Pe(1, k, \dots, 0) = Pe_{k+1} i$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
 Pe(1, k+1, \dots, 0) &= Pe(1, k-1, \dots, 0) + Pe(1, k-2, \dots, 0) \\
 &= Pe_k i + Pe_{k-1} i \\
 &= Pe_{k+2} i
 \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (g).

(h) Através da recorrência $Pe(n_1, n_2, \dots, n_n) = Pe(n_1, n_2 - 2, \dots, n_n) + Pe(n_1, n_2 - 3, \dots, n_n)$, fixando $n_1 = 0$, $n_n = 1$ e aplicando o princípio de indução sobre n_2 . Nesse sentido, para $n_2 = 0$:

$$\begin{aligned}
 Pe(0, 0, \dots, 1) &= 3Pd_0 + Pe_1\mu_1 + \dots + 2Pd_0\mu_n \\
 &= 3 + \dots + 2\mu_n
 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_2$, ou seja, supondo que

$$Pe(0, k, \dots, 1) = 3Pd_k + Pe_{k+1}\mu_1 + \dots + 2Pd_k\mu_n$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
 Pe(0, k+1, \dots, 1) &= Pe(0, k-1, \dots, 1) + Pe(0, k-2, \dots, 1) \\
 &= 3Pd_{k-1} + Pe_k\mu_1 + \dots + 2Pd_{k-1}\mu_n + 3Pd_{k-2} + \\
 &\quad Pe_{k-1}\mu_1 + \dots + 2Pd_{k-2}\mu_n \\
 &= 3Pd_{k+1} + Pe_{k+2}\mu_1 + \dots + 2Pd_{k+1}\mu_n
 \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (h).

(i) Através da recorrência $Pe(n_1, n_2, \dots, n_n) = Pe(n_1, n_2 - 2, \dots, n_n) + Pe(n_1, n_2 - 3, \dots, n_n)$, fixando $n_1 = 1$, $n_n = 1$ e aplicando o princípio de indução sobre n_2 . Nesse sentido, para $n_2 = 0$:

$$\begin{aligned} Pe(1, 0, \dots, 1) &= Pe_1\mu_1 + \dots + 2Pd_0\mu_n \\ &= 2\mu_n \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_2$, ou seja, supondo que

$$Pe(1, k, \dots, 1) = Pe_{k+1}\mu_1 + \dots + 2Pd_k\mu_n$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(1, k + 1, \dots, 1) &= Pe(1, k - 1, \dots, 1) + Pe(1, k - 2, \dots, 1) \\ &= Pe_k\mu_1 + \dots + 2Pd_{k-1}\mu_n + Pe_{k-1}\mu_1 + \dots + 2Pd_{k-2}\mu_n \\ &= Pe_{k+2}\mu_1 + \dots + 2Pd_{k+1}\mu_n \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (i).

(j) Através da recorrência $Pe(n_1, n_2, \dots, n_n) = Pe(n_1, n_2, \dots, n_n - 2) + Pe(n_1, n_2, \dots, n_n - 3)$, fixando $n_1 = 1$, $n_2 = 0$ e aplicando o princípio de indução sobre n_n .

Nesse sentido, para $n_n = 0$:

$$\begin{aligned} Pe(1, 0, \dots, 0) &= Pe_1\mu_n \\ &= 0 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_n$, ou seja, supondo que

$$Pe(1, 0, \dots, k) = Pe_{k+1}\mu_n$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(1, 0, \dots, k + 1) &= Pe(1, 0, \dots, k - 1) + Pe(1, 0, \dots, k - 2) \\ &= Pe_k\mu_n + Pe_{k-1}\mu_n \\ &= Pe_{k+2}\mu_n \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (j).

(k) Através da recorrência $Pe(n_1, n_2, \dots, n_n) = Pe(n_1, n_2, \dots, n_n - 2) + Pe(n_1, n_2, \dots, n_n - 3)$, fixando $n_1 = 0$, $n_2 = 1$ e aplicando o princípio de indução sobre n_n . Nesse sentido, para $n_n = 0$:

$$\begin{aligned} Pe(0, 1, \dots, 0) &= 3Pd_0 + 2Pd_0\mu_1 + \dots + Pe_1\mu_n \\ &= 3 + 2\mu_1 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_n$, ou seja, supondo que

$$Pe(0, 1, \dots, k) = 3Pd_k + 2Pd_k\mu_1 + \dots + Pe_{k+1}\mu_n$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(0, 1, \dots, k+1) &= Pe(0, 1, \dots, k-1) + Pe(0, 1, \dots, k-2) \\ &= 3Pd_{k-1} + 2Pd_{k-1}\mu_1 + \dots + Pe_k\mu_n + 3Pd_{k-2} + \\ &\quad 2Pd_{k-2}\mu_1 + \dots + Pe_{k-1}\mu_n \\ &= 3Pd_{k+1} + 2Pd_{k+1}\mu_1 + \dots + Pe_{k+2}\mu_n \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (k).

(1) Através da recorrência $Pe(n_1, n_2, \dots, n_n) = Pe(n_1, n_2, \dots, n_n - 2) + Pe(n_1, n_2, \dots, n_n - 3)$, fixando $n_1 = 1$, $n_2 = 1$ e aplicando o princípio de indução sobre n_n . Nesse sentido, para $n_n = 0$:

$$\begin{aligned} Pe(1, 1, \dots, 0) &= 2Pd_0\mu_1 + \dots + Pe_1\mu_n \\ &= 2\mu_1 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_n$, ou seja, supondo que

$$Pe(1, 1, \dots, k) = 2Pd_k\mu_1 + \dots + Pe_{k+1}\mu_n$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(1, 1, \dots, k+1) &= Pe(1, 1, \dots, k-1) + Pe(1, 1, \dots, k-2) \\ &= 2Pd_{k-1}\mu_1 + \dots + Pe_k\mu_n + 2Pd_{k-2}\mu_1 + \dots + Pe_{k-1}\mu_n \\ &= 2Pd_{k+1}\mu_1 + \dots + Pe_{k+2}\mu_n \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (l).

(m) Através da recorrência $Pe(n_1, n_2, \dots, n_n) = Pe(n_1 - 2, n_2, \dots, n_n) + Pe(n_1 - 3, n_2, \dots, n_n)$, fixando n_2 e $n_n = 0$, aplicando indução em n_1 .

Nesse sentido, para $n_1 = 0$:

$$\begin{aligned} Pe(0, n_2, \dots, 0) &= Pe_0Pd_{n_2} + Pd_0Pe_{n_2+1}\mu_1 \\ &= Pe_{n_2+1}\mu_1 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_1$, ou seja, supondo que

$$Pe(k, n_2, \dots, 0) = Pe_kPd_{n_2} + Pd_kPe_{n_2+1}\mu_1$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(k+1, n_2, \dots, 0) &= Pe(k-1, n_2, \dots, 0) + Pe(k-2, n_2, \dots, 0) \\ &= Pe_{k-1}Pd_{n_2} + Pd_{k-1}Pe_{n_2+1}\mu_1 + Pe_{k-2}Pd_{n_2} + Pd_{k-2}Pe_{n_2+1}\mu_1 \\ &= Pe_{k+1}Pd_{n_2} + Pd_{k+1}Pe_{n_2+1}\mu_1 \end{aligned}$$

- Agora fixando n_1 e aplicando indução em n_2 .

Nesse sentido, para $n_2 = 0$:

$$\begin{aligned} Pe(n_1, 0, \dots, 0) &= Pe_{n_1}Pd_0 + Pd_{n_1}Pe_1\mu_1 \\ &= Pe_{n_1} \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_2$, ou seja, supondo que

$$Pe(n_1, k, \dots, 0) = Pe_{n_1}Pd_k + Pd_{n_1}Pe_{k+1}\mu_1$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(n_1, k+1, \dots, 0) &= Pe(n_1, k-1, \dots, 0) + Pe(n_1, k-2, \dots, 0) \\ &= Pe_{n_1}Pd_{k-1} + Pd_{n_1}Pe_k\mu_1 + Pe_{n_1}Pd_{k-2} + Pd_{n_1}Pe_{k-1}\mu_1 \\ &= Pe_{n_1}Pd_{k+1} + Pd_{n_1}Pe_{k+2}\mu_1 \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (m).

(n) Através da recorrência $Pe(n_1, n_2, \dots, n_n) = Pe(n_1-2, n_2, \dots, n_n) + Pe(n_1-3, n_2, \dots, n_n)$, fixando n_n e $n_2 = 0$, aplicando indução em n_1 .

Nesse sentido, para $n_1 = 0$:

$$\begin{aligned} Pe(0, 0, \dots, n_n) &= Pe_0Pd_{n_n} + \dots + Pd_0Pe_{n_n+1}\mu_n \\ &= Pe_{n_n+1}\mu_n \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_1$, ou seja, supondo que

$$Pe(k, 0, \dots, n_n) = Pe_kPd_{n_n} + \dots + Pd_kPe_{n_n+1}\mu_n$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(k+1, 0, \dots, n_n) &= Pe(k-1, 0, \dots, n_n) + Pe(k-2, 0, \dots, n_n) \\ &= Pe_{k-1}Pd_{n_n} + \dots + Pd_{k-1}Pe_{n_n+1}\mu_n + \\ &\quad Pe_{k-2}Pd_{n_n} + \dots + Pd_{k-2}Pe_{n_n+1}\mu_n \\ &= Pe_{k+1}Pd_{n_n} + \dots + Pd_{k+1}Pe_{n_n+1}\mu_n \end{aligned}$$

- Agora fixando n_1 e aplicando indução em n_n .

Nesse sentido, para $n_n = 0$:

$$\begin{aligned} Pe(n_1, 0, \dots, 0) &= Pe_{n_1}Pd_0 + \dots + Pd_{n_1}Pe_1\mu_n \\ &= Pe_{n_1} \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_n$, ou seja, supondo que

$$Pe(n_1, 0, \dots, k) = Pe_{n_1}Pd_k + \dots + Pd_{n_1}Pe_{k+1}\mu_n$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(n_1, 0, \dots, k+1) &= Pe(n_1, 0, \dots, k-1) + Pe(n_1, 0, \dots, k-2) \\ &= Pe_{n_1}Pd_{k-1} + \dots + Pd_{n_1}Pe_k\mu_n + \\ &\quad Pe_{n_1}Pd_{k-2} + \dots + Pd_{n_1}Pe_{k-1}\mu_n \\ &= Pe_{n_1}Pd_{k+1} + \dots + Pd_{n_1}Pe_{k+2}\mu_n \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (n).

(o) Através da recorrência $Pe(n_1, n_2, \dots, n_n) = Pe(n_1 - 2, n_2, \dots, n_n) + Pe(n_1 - 3, n_2, \dots, n_n)$, fixando n_2 e $n_1 = 0$, aplicando indução em n_n .

Nesse sentido, para $n_n = 0$:

$$\begin{aligned} Pe(0, n_2, \dots, 0) &= Pe_{n_2+1}Pd_0\mu_1 + \dots + Pd_{n_2}Pe_1\mu_n \\ &= Pe_{n_2+1}\mu_1 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_n$, ou seja, supondo que

$$Pe(0, n_2, 0, \dots, k) = Pe_{n_2+1}Pd_k\mu_1 + \dots + Pd_{n_2}Pe_{k+1}\mu_n$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(0, n_2, \dots, k+1) &= Pe(0, n_2, \dots, k-1) + Pe(0, n_2, \dots, k-2) \\ &= Pe_{n_2+1}Pd_{k-1}\mu_1 + \dots + Pd_{n_2}Pe_k\mu_n + \\ &\quad Pe_{n_2+1}Pd_{k-2}\mu_1 + \dots + Pd_{n_2}Pe_{k-1}\mu_n \\ &= Pe_{n_2+1}Pd_{k+1}\mu_1 + \dots + Pd_{n_2}Pe_{k+2}\mu_n \end{aligned}$$

- Agora fixando n_n e aplicando indução em n_2 .

Nesse sentido, para $n_2 = 0$:

$$\begin{aligned} Pe(0, 0, \dots, n_n) &= Pe_1Pd_{n_n}\mu_1 + \dots + Pd_0Pe_{n_n+1}\mu_n \\ &= Pe_{n_n+1}\mu_n \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_2$, ou seja, supondo que

$$Pe(0, k, \dots, n_n) = Pe_{k+1}Pd_{n_n}\mu_1 + \dots + Pd_kPe_{n_n+1}\mu_n$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(0, k+1, \dots, n_n) &= Pe(0, k-1, \dots, n_n) + Pe(0, k-2, \dots, n_n) \\ &= Pe_kPd_{n_n}\mu_1 + \dots + Pd_{k-1}Pe_{n_n+1}\mu_n + \\ &\quad Pe_{k-1}Pd_{n_n}\mu_1 + \dots + Pd_{k-2}Pe_{n_n+1}\mu_n \\ &= Pe_{k+2}Pd_{n_n}\mu_1 + \dots + Pd_{k+1}Pe_{n_n+1}\mu_n \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (o).

Assim, tem-se que os Lemas são válidos. $\square$

Teorema 64. *Os números da forma $Pe(n_1, n_2, \dots, n_n)$, tais que $n, n_2, \dots, n_n \in \mathbb{N}$ são determinados por:*

$$\begin{aligned} Pe(n_1, n_2, \dots, n_n) &= Pe_{n_1}Pd_{n_2} \dots Pd_{n_n} + Pd_{n_1}Pe_{n_2+1} \dots Pd_{n_n}\mu_1 + \dots + \\ &\quad Pd_{n_1}Pd_{n_2} \dots Pe_{n_n+1}\mu_n \end{aligned}$$

Demonstração. Seja $n_1, n_2, \dots, n_{n-1}$ valores fixos, iremos aplicar o princípio da indução sobre n_n .

Para $n_n = 0$,

$$Pe(n_1, n_2, \dots, 0) = Pe_{n_1}Pd_{n_2} + Pd_{n_1}Pe_{n_2+1}\mu_1$$

Tem-se que a igualdade é válida pelo Lema (m).

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_n$, ou seja, supondo que

$$\begin{aligned} Pe(n_1, n_2, \dots, k) &= Pe_{n_1}Pd_{n_2} \dots Pd_k + Pd_{n_1}Pe_{n_2+1} \dots Pd_k\mu_1 + \dots + \\ &\quad Pd_{n_1}Pd_{n_2} \dots Pe_{k+1}\mu_n \end{aligned}$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(n_1, n_2, \dots, k+1) &= Pe(n_1, n_2, \dots, k-1) + Pe(n_1, n_2, \dots, k-2) \\ &= Pe_{n_1}Pd_{n_2} \dots Pd_{k-1} + Pd_{n_1}Pe_{n_2+1} \dots Pd_{k-1}\mu_1 + \dots + \\ &\quad Pd_{n_1}Pd_{n_2} \dots Pe_k\mu_n + Pe_{n_1}Pd_{n_2} \dots Pd_{k-2} + \\ &\quad Pd_{n_1}Pe_{n_2+1} \dots Pd_{k-2}\mu_1 + \dots + Pd_{n_1}Pd_{n_2} \dots Pe_{k-1}\mu_n \\ &= Pe_{n_1}Pd_{n_2} \dots Pd_{k+1} + Pd_{n_1}Pe_{n_2+1} \dots Pd_{k+1}\mu_1 + \dots + \\ &\quad Pd_{n_1}Pd_{n_2} \dots Pe_{k+1}\mu_n \end{aligned}$$

Como queríamos provar.

- Agora para $n_1, \dots, n_n$ valores fixos, iremos aplicar o princípio da indução sobre n_2 .

Para $n_2 = 0$,

$$Pe(n_1, 0, \dots, n_n) = Pe_{n_1}Pd_{n_n} + \dots + Pd_{n_1}Pe_{n_n+1}\mu_n$$

Tem-se que a igualdade é válida pelo Lema (n).

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_2$, ou seja, supondo que

$$\begin{aligned} Pe(n_1, k, \dots, n_n) &= Pe_{n_1}Pd_k \dots Pd_{n_n} + Pd_{n_1}Pe_{k+1} \dots Pd_{n_n}\mu_1 + \dots + \\ &\quad Pd_{n_1}Pd_k \dots Pe_{n_n+1}\mu_n \end{aligned}$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(n_1, k+1, \dots, n_n) &= Pe(n_1, k-1, \dots, n_n) + Pe(n_1, k-2, \dots, n_n) \\ &= Pe_{n_1}Pd_{k-1} \dots Pd_{n_n} + Pd_{n_1}Pe_k \dots Pd_{n_n}\mu_1 + \dots + \\ &\quad Pd_{n_1}Pd_{k-1} \dots Pe_{n_n+1}\mu_n + Pe_{n_1}Pd_{k-2} \dots Pd_{n_n} + \\ &\quad Pd_{n_1}Pe_{k-1} \dots Pd_{n_n}\mu_1 + \dots + Pd_{n_1}Pd_{k-2} \dots Pe_{n_n+1}\mu_n \\ &= Pe_{n_1}Pd_{k+1} \dots Pd_{n_n} + Pd_{n_1}Pe_{k+2} \dots Pd_{n_n}\mu_1 + \dots + \\ &\quad Pd_{n_1}Pd_{k+1} \dots Pe_{n_n+1}\mu_n \end{aligned}$$

Como queríamos provar.

- Agora para $n_2, \dots, n_n$ valores fixos, iremos aplicar o princípio da indução sobre n_1 .

Para $n_1 = 0$,

$$Pe(0, n_2, \dots, n_n) = Pe_{n_2+1} \dots Pd_{n_n}\mu_1 + \dots + Pd_{n_2} \dots Pe_{n_n+1}\mu_n$$

Tem-se que a igualdade é válida pelo Lema (o).

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_1$, ou seja, supondo que

$$\begin{aligned} Pe(k, n_2, \dots, n_n) &= Pe_kPd_{n_2} \dots Pd_{n_n} + Pd_kPe_{n_2+1} \dots Pd_{n_n}\mu_1 + \dots + \\ &\quad Pd_kPd_{n_2} \dots Pe_{n_n+1}\mu_n \end{aligned}$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Pe(k+1, n_2, \dots, n_n) &= Pe(k-1, n_2, \dots, n_n) + Pe(k-2, n_2, \dots, n_n) \\ &= Pe_{k-1}Pd_{n_2} \dots Pd_{n_n} + Pd_{k-1}Pe_{n_2+1} \dots Pd_{n_n}\mu_1 + \dots + \\ &\quad Pd_{k-1}Pd_{n_2} \dots Pe_{n_n+1}\mu_n + Pe_{k-2}Pd_{n_2} \dots Pd_{n_n} + \\ &\quad Pd_{k-2}Pe_{n_2+1} \dots Pd_{n_n}\mu_1 + \dots + Pd_{k-2}Pd_{n_2} \dots Pe_{n_n+1}\mu_n \\ &= Pe_{k+1}Pd_{n_2} \dots Pd_{n_n} + Pd_{k+1}Pe_{n_2+1} \dots Pd_{n_n}\mu_1 + \dots + \\ &\quad Pd_{k+1}Pd_{n_2} \dots Pe_{n_n+1}\mu_n \end{aligned}$$

Como queríamos provar.

Com isso, o Teorema é válido. □

3.2.3 Hipercomplexificação da Sequência de Leonardo

3.2.3.1 Relações Recorrentes Bidimensionais de Leonardo

Nesta subseção será introduzida a relação bidimensional da Sequência de Leonardo, serão definidas duas relações de recorrência, baseadas na recorrência unidimensional.

Definição 87. Os números na forma $Le(n, m)$, com $n, m \in \mathbb{N}$, são definidos como a Sequência Bidimensional de Leonardo, satisfazendo as seguintes relações de recorrência:

$$\begin{cases} Le(n+1, m) = 2Le(n, m) - Le(n-2, m) \\ Le(n, m+1) = 2Le(n, m) - Le(n, m-2) \end{cases}$$

Com as condições iniciais: $Le(0, 0) = 1$; $Le(1, 0) = 1$; $Le(0, 1) = 1 + i$; e $Le(1, 1) = 1 + i$, onde $i^2 = -1$ e $Le(0) = Le(1) = 1$ e $Le(2) = 3$.

Lema 7. Valem as seguintes propriedades:

- (a) $Le(n, 0) = Le_n$;
- (b) $Le(0, m) = Le_m + \left(\frac{Le_{m-1} + 1}{2}\right)i$;
- (c) $Le(1, m) = Le_m + \left(\frac{Le_{m-1} + 1}{2}\right)i$;
- (d) $Le(n, 1) = Le_n + \left(\frac{Le_n + 1}{2}\right)i$.

Demonstração. (a) Através da recorrência $Le(n+1, m) = 2Le(n, m) - Le(n-2, m)$ recorre-se ao Princípio de Indução Matemática para a prova para este Lema.

Nesse sentido, para $n = 0$:

$$\begin{aligned} Le(0, 0) &= Le_0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n$, ou seja, supondo que

$$Le(k, 0) = Le_k$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned} Le(k+1, 0) &= 2Le(k, 0) - Le(k-2, 0) \\ &= 2Le_k - Le_{k-2} \\ &= Le_{k+1} \end{aligned}$$

Desse modo, verifica-se a validade do lema 1 (a).

(b) Utilizando a recorrência $Le(n, m+1) = 2Le(n, m) - Le(n, m-2)$, sendo $Le_{-1} = -1$ e

o Princípio de Indução Matemática, tem-se:

Para $m = 0$:

$$\begin{aligned} Le(0, 0) &= Le_0 + \left(\frac{Le_{-1} + 1}{2} \right) i \\ &= 1 \end{aligned}$$

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq m$, ou seja, supondo que

$$Le(0, k) = Le_k + \left(\frac{Le_{k-1} + 1}{2} \right) i$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Le(0, k + 1) &= 2Le(0, k) - Le(0, k - 2) \\ &= 2 \left[Le_k + \left(\frac{Le_{k-1} + 1}{2} \right) i \right] - Le_{k-2} - \left(\frac{Le_{k-3} + 1}{2} \right) i \\ &= Le_{k+1} + \left(\frac{Le_k + 1}{2} \right) i \end{aligned}$$

Com isso, tem-se a validade do lema 1 (b).

(c) Utilizando a recorrência $Le(n + 1, m) = 2Le(n, m) - Le(n - 2, m)$, sendo $Le_{-1} = -1$, fixando $n = 1$ e pelo Princípio de Indução Matemática, tem-se:

Para $m = 0$:

$$\begin{aligned} Le(1, 0) &= Le_0 + \left(\frac{Le_{-1} + 1}{2} \right) i \\ &= 1 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq m$, ou seja, supondo que

$$Le(1, k) = Le_k + \left(\frac{Le_{k-1} + 1}{2} \right) i$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Le(1, k + 1) &= 2Le(1, k) - Le(1, k - 2) \\ &= 2 \left[Le_k + \left(\frac{Le_{k-1} + 1}{2} \right) i \right] - Le_{k-2} - \left(\frac{Le_{k-3} + 1}{2} \right) i \\ &= Le_{k+1} + \left(\frac{Le_k + 1}{2} \right) i \end{aligned}$$

Logo, tem-se que o lema 1 (c) é válido.

(d) Utilizando a recorrência $Le(n, m + 1) = 2Le(n, m) - Le(n, m - 2)$, fixando $m = 1$, pelo Princípio de Indução Matemática, tem-se:

Para $n = 0$:

$$\begin{aligned} Le(0, 1) &= Le_0 + \left(\frac{Le_0 + 1}{2} \right) i \\ &= 1 + i \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n$, ou seja, supondo que

$$Le(k, 1) = Le_k + \left(\frac{Le_k + 1}{2}\right)i$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Le(k+1, 1) &= 2Le(k, 1) - Le(k-2, 1) \\ &= 2 \left[Le_k + \left(\frac{Le_k + 1}{2}\right)i \right] - Le_{k-2} - \left(\frac{Le_{k-2} + 1}{2}\right)i \\ &= Le_{k+1} + \left(\frac{Le_{k+1} + 1}{2}\right)i \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 1 (d). □

Teorema 65. Para os dois inteiros, $n, m \in \mathbb{N}$, os números bidimensionais de Leonardo são descritos por:

$$Le(n, m) = \left[Le_n \cdot \frac{Le_m + 1}{2} + \frac{Le_m + 1}{2} - 1 \right] + \frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_{m-1} + 1}{2} i.$$

Demonstração. Recorre-se ao Princípio de Indução Matemática como meio de prova para o teorema em questão.

• Começamos por fixar $n \in \mathbb{N}$ e vamos usar indução em m .

Para $m = 0$ e $Le_{-1} = -1$, temos:

$$\begin{aligned} Le(n, 0) &= \left[Le_n \cdot \frac{Le_0 + 1}{2} + \frac{Le_0 + 1}{2} - 1 \right] + \frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_{-1} + 1}{2} i \\ &= Le_n \end{aligned}$$

O que é verdade pelo Lema 1 (a).

Suponhamos agora que é válido para $k \leq m$ e n fixo, ou seja,

$$Le(n, k) = \left[Le_n \cdot \frac{Le_k + 1}{2} + \frac{Le_k + 1}{2} - 1 \right] + \frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-1} + 1}{2} i$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então:

$$\begin{aligned} Le(n, k+1) &= 2Le(n, k) - Le(n, k-2) \\ &= 2 \left[Le_n \cdot \frac{Le_k + 1}{2} + \frac{Le_k + 1}{2} - 1 \right] + 2 \frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-1} + 1}{2} i - \\ &\quad \left[Le_n \cdot \frac{Le_{k-2} + 1}{2} + \frac{Le_{k-2} + 1}{2} - 1 \right] + \frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-3} + 1}{2} i \\ &= \left[Le_n \cdot \frac{Le_{k+1} + 1}{2} + \frac{Le_{k+1} + 1}{2} - 1 \right] + \frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} i \end{aligned}$$

Como pretendíamos mostrar.

• Agora vamos fixar $m \in \mathbb{N}$ e usar indução em n .

Para $n = 0$, temos

$$\begin{aligned} Le(0, m) &= \left[Le_0 \cdot \frac{Le_m + 1}{2} + \frac{Le_m + 1}{2} - 1 \right] + \frac{Le_0 + 1}{2} \cdot \frac{Le_{m-1} + 1}{2} i \\ &= Le_m + \left(\frac{Le_{m-1} + 1}{2}\right)i \end{aligned}$$

O que é verdade pelo Lema 1 (b).

Suponhamos agora que é válido para $k \leq n$ e m fixo, ou seja,

$$Le(k, m) = \left[Le_k \cdot \frac{Le_m + 1}{2} + \frac{Le_m + 1}{2} - 1 \right] + \frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_{m-1} + 1}{2} i$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então:

$$\begin{aligned} Le(k+1, m) &= 2Le(k, m) - Le(k-2, m) \\ &= 2 \left[Le_k \cdot \frac{Le_m + 1}{2} + \frac{Le_m + 1}{2} - 1 \right] + 2 \frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_{m-1} + 1}{2} i - \\ &\quad \left[Le_{k-2} \cdot \frac{Le_m + 1}{2} + \frac{Le_m + 1}{2} - 1 \right] - \frac{Le_{k-2} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{m-1} + 1}{2} i \\ &= \left[Le_{k+1} \cdot \frac{Le_m + 1}{2} + \frac{Le_m + 1}{2} - 1 \right] + \frac{Le_{k+1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{m-1} + 1}{2} i \end{aligned}$$

Como pretendíamos mostrar. □

3.2.3.2 Relações Recorrentes Tridimensionais de Leonardo

Com o intuito de realizar a extensão dos termos da Sequência de Leonardo para uma dimensão complexa, serão explanadas as relações de recursividade do caso tridimensional para a Sequência de Leonardo.

Definição 88. Os números na forma $Le(n, m, p)$, com $n, m, p \in \mathbb{N}$, são definidos como a Sequência Tridimensional de Leonardo, satisfazendo as seguintes relações de recorrência:

$$\begin{cases} Le(n+1, m, p) = 2Le(n, m, p) - Le(n-2, m, p) \\ Le(n, m+1, p) = 2Le(n, m, p) - Le(n, m-2, p) \\ Le(n, m, p+1) = 2Le(n, m, p) - Le(n, m, p-2) \end{cases}$$

Com as condições iniciais: $Le(0, 0, 0) = 1 = Le(0)$, $Le(1, 0, 0) = 1 = Le(1)$, $Le(0, 1, 0) = 1 + i$, $Le(0, 0, 1) = 1 + j$, $Le(1, 1, 1) = 1 + i + j$, $Le(0, 1, 1) = 1 + i + j$, $Le(1, 0, 1) = 1 + j$, $Le(1, 1, 0) = 1 + i$ em que $i^2 = j^2 = -1$.

Lema 8. As seguintes propriedades são válidas para a Sequência Tridimensional de Leonardo:

- (a) $Le(n, 0, 0) = Le_n$;
- (b) $Le(0, m, 0) = Le_m + \frac{Le_{m-1} + 1}{2} i$;
- (c) $Le(0, 0, p) = Le_p + \frac{Le_{p-1} + 1}{2} j$;
- (d) $Le(n, 1, 0) = Le_n + \frac{Le_n + 1}{2} i$;
- (e) $Le(n, 0, 1) = Le_n + \frac{Le_n + 1}{2} j$;
- (f) $Le(n, 1, 1) = Le_n + \frac{Le_n + 1}{2} i + \frac{Le_n + 1}{2} j$;
- (g) $Le(1, m, 0) = Le_{m+1} + \frac{Le_{m-1} + 1}{2} i$;

$$\begin{aligned}
(h) \quad Le(0, m, 1) &= Le_m + \frac{Le_{m-1} + 1}{2}i + \frac{Le_m + 1}{2}j; \\
(i) \quad Le(1, m, 1) &= Le_m + \frac{Le_{m-1} + 1}{2}i + \frac{Le_m + 1}{2}j; \\
(j) \quad Le(1, 0, p) &= Le_p + \frac{Le_{p-1} + 1}{2}j; \\
(k) \quad Le(0, 1, p) &= Le_p + \frac{Le_p + 1}{2}i + \frac{Le_{p-1} + 1}{2}j; \\
(l) \quad Le(1, 1, p) &= Le_p + \frac{Le_p + 1}{2}i + \frac{Le_{p-1} + 1}{2}j; \\
(m) \quad Le(n, m, 0) &= \left(Le_n \cdot \frac{Le_m + 1}{2} + \frac{Le_m + 1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_{m-1} + 1}{2} \right) i; \\
(n) \quad Le(n, 0, p) &= \left(Le_n \cdot \frac{Le_p + 1}{2} + \frac{Le_p + 1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_{p-1} + 1}{2} \right) j; \\
(o) \quad Le(0, m, p) &= \left(\frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} + \frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{Le_{m-1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} \right) i + \\
&\quad \left(\frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_{p-1} + 1}{2} \right) j.
\end{aligned}$$

Demonstração. (a) Através da recorrência $Le(n+1, m, p) = 2Le(n, m, p) - Le(n-2, m, p)$, fixando o valor de $m = 0$, $p = 0$ e aplicando o princípio de indução sobre n , tem-se:

Para $n = 0$,

$$\begin{aligned}
Le(0, 0, 0) &= Le_0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

A igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n$, ou seja, supondo que

$$Le(k, 0, 0) = Le_k$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned}
Le(k+1, 0, 0) &= 2Le(k, 0, 0) - Le(k-2, 0, 0) \\
&= 2Le_k - Le_{k-2} \\
&= Le_{k+1}
\end{aligned}$$

Desse modo, verifica-se a validade do lema 2 (a).

(b) Através da recorrência $Le(n, m+1, p) = 2Le(n, m, p) - Le(n, m-2, p)$, sendo $Le_{-1} = -1$ fixando $n = 0$, $p = 0$ e aplicando o princípio de indução sobre m . Nesse sentido, para $m = 0$:

$$\begin{aligned}
Le(0, 0, 0) &= Le_0 + \frac{Le_{-1} + 1}{2}i \\
&= 1
\end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq m$, ou seja, supondo que

$$Le(0, k, 0) = Le_k + \frac{Le_{k-1} + 1}{2}i$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Le(0, k + 1, 0) &= 2Le(0, k, 0) - Le(0, k - 2, 0) \\ &= 2 \left(Le_k + \frac{Le_{k-1} + 1}{2} i \right) - Le_{k-2} - \frac{Le_{k-3} + 1}{2} i \\ &= Le_{k+1} + \frac{Le_k + 1}{2} i \end{aligned}$$

Com isso, tem-se a validade do lema 2 (b).

(c) Através da recorrência $Le(n, m, p+1) = 2Le(n, m, p) - Le(n, m, p-2)$, sendo $Le_{-1} = -1$, fixando $n = 0$, $m = 0$ e aplicando o princípio de indução sobre p .

Nesse sentido, para $p = 0$:

$$\begin{aligned} Le(0, 0, 0) &= Le_0 + \frac{Le_{-1} + 1}{2} j \\ &= 1 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq p$, ou seja, supondo que

$$Le(0, 0, k) = Le_k + \frac{Le_{k-1} + 1}{2} j$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Le(0, 0, k + 1) &= 2Le(0, 0, k) - Le(0, 0, k - 2) \\ &= 2 \left(Le_k + \frac{Le_{k-1} + 1}{2} j \right) - Le_{k-2} - \frac{Le_{k-3} + 1}{2} j \\ &= Le_{k+1} + \frac{Le_k + 1}{2} j \end{aligned}$$

Logo, tem-se que o lema 2 (c) é válido.

(d) Através da recorrência $Le(n + 1, m, p) = 2Le(n, m, p) - Le(n - 2, m, p)$, fixando $m = 1$, $p = 0$, e aplicando o princípio de indução sobre n . Nesse sentido, para $n = 0$:

$$\begin{aligned} Le(0, 1, 0) &= Le_0 + \frac{Le_0 + 1}{2} i \\ &= 1 + i \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n$, ou seja, supondo que

$$Le(k, 1, 0) = Le_k + \frac{Le_k + 1}{2} i$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Le(k + 1, 1, 0) &= 2Le(k, 1, 0) - Le(k - 2, 1, 0) \\ &= 2 \left(Le_k + \frac{Le_k + 1}{2} i \right) - Le_{k-2} - \frac{Le_{k-2} + 1}{2} i \\ &= Le_{k+1} + \frac{Le_{k+1} + 1}{2} i \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 2 (d).

(e) Através da recorrência $Le(n+1, m, p) = 2Le(n, m, p) - Le(n-2, m, p)$, fixando $m = 0$, $p = 1$ e aplicando o princípio de indução em n . Nesse sentido, para $n = 0$:

$$\begin{aligned} Le(0, 0, 1) &= Le_0 + \frac{Le_0 + 1}{2}j \\ &= 1 + j \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n$, ou seja, supondo que

$$Le(k, 0, 1) = Le_k + \frac{Le_k + 1}{2}j$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned} Le(k+1, 0, 1) &= 2Le(k, 0, 1) - Le(k-2, 0, 1) \\ &= 2\left(Le_k + \frac{Le_k + 1}{2}j\right) - Le_k - \frac{Le_k + 1}{2}j \\ &= Le_{k+1} + \frac{Le_{k+1} + 1}{2}j \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 2 (e).

(f) Através da recorrência $Le(n+1, m, p) = 2Le(n, m, p) - Le(n-2, m, p)$, fixando $m = 1$, $p = 1$, sendo $J_{-1} = \frac{1}{2}$ e aplicando indução em n . Para $n = 0$,

$$\begin{aligned} Le(0, 1, 1) &= Le_0 + \frac{Le_0 + 1}{2}i + \frac{Le_0 + 1}{2}j \\ &= 1 + i + j \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n$, ou seja, supondo que

$$Le(k, 1, 1) = Le_k + \frac{Le_k + 1}{2}i + \frac{Le_k + 1}{2}j$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned} Le(k+1, 1, 1) &= 2Le(k, 1, 1) - Le(k-2, 1, 1) \\ &= 2\left(Le_k + \frac{Le_k + 1}{2}i + \frac{Le_k + 1}{2}j\right) - Le_{k-2} - \frac{Le_{k-2} + 1}{2}i - \frac{Le_{k-2} + 1}{2}j \\ &= Le_{k+1} + \frac{Le_{k+1} + 1}{2}i + \frac{Le_{k+1} + 1}{2}j \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 2 (f).

(g) Através da recorrência $Le(n, m+1, p) = 2Le(n, m, p) - Le(n, m-2, p)$, sendo $Le_{-1} = -1$, fixando $n = 1$, $p = 0$ e aplicando o princípio da indução sobre m .

Para $m = 0$,

$$\begin{aligned} Le(1, 0, 0) &= Le_1 + \frac{Le_{-1} + 1}{2}i \\ &= 1 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq m$, ou seja, supondo que

$$Le(1, k, 0) = Le_{k+1} + \frac{Le_{k-1} + 1}{2}i$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Le(1, k + 1, 0) &= 2Le(1, k, 0) - Le(1, k - 2, 0) \\ &= 2\left(Le_{k+1} + \frac{Le_{k-1} + 1}{2}i\right) - Le_{k-1} - \frac{Le_{k-3} + 1}{2}i \\ &= Le_{k+2} + \frac{Le_k + 1}{2}i \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 2 (g).

(h) Através da recorrência $Le(n, m + 1, p) = 2Le(n, m, p) - Le(n, m - 2, p)$, sendo Le_{-1} , fixando $n = 0$, $p = 1$ e aplicando o princípio da indução sobre m .

Para $m = 0$,

$$\begin{aligned} Le(0, 0, 1) &= Le_0 + \frac{Le_{-1} + 1}{2}i + \frac{Le_0 + 1}{2}j \\ &= 1 + j \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq m$, ou seja, supondo que

$$Le(0, k, 1) = Le_k + \frac{Le_{k-1} + 1}{2}i + \frac{Le_k + 1}{2}j$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Le(0, k + 1, 1) &= 2Le(0, k, 1) - Le(0, k - 2, 1) \\ &= 2\left(Le_k + \frac{Le_{k-1} + 1}{2}i + \frac{Le_k + 1}{2}j\right) - Le_{k-2} - \frac{Le_{k-3} + 1}{2}i - \frac{Le_{k-2} + 1}{2}j \\ &= Le_{k+1} + \frac{Le_k + 1}{2}i + \frac{Le_{k+1} + 1}{2}j \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 2 (h).

(i) Através da recorrência $Le(n, m + 1, p) = 2Le(n, m, p) - Le(n, m - 2, p)$, fixando $n = 1$, $p = 1$ e aplicando o princípio da indução sobre m .

Para $m = 0$,

$$\begin{aligned} Le(1, 0, 1) &= Le_0 + \frac{Le_{-1} + 1}{2}i + \frac{Le_0 + 1}{2}j \\ &= 1 + j \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq m$, ou seja, supondo que

$$Le(1, k, 1) = Le_k + \frac{Le_{k-1} + 1}{2}i + \frac{Le_k + 1}{2}j$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Le(1, k+1, 1) &= 2Le(1, k, 1) - Le(1, k-2, 1) \\ &= 2\left(Le_k + \frac{Le_{k-1} + 1}{2}i + \frac{Le_k + 1}{2}j\right) - Le_{k-2} - \frac{Le_{k-3} + 1}{2}i - \frac{Le_{k-2} + 1}{2}j \\ &= Le_{k+1} + \frac{Le_k + 1}{2}i + \frac{Le_{k+1} + 1}{2}j \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 2 (i).

(j) Através da recorrência $Le(n, m, p+1) = 2Le(n, m, p) - Le(n, m, p-2)$, sendo $Le_{-1} = -1$, fixando $n = 1$, $m = 0$ aplicando o princípio da indução sobre p .

Para $p = 0$,

$$\begin{aligned} Le(1, 0, 0) &= Le_0 + \frac{Le_{-1} + 1}{2}j \\ &= 1 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq p$, ou seja, supondo que

$$Le(1, 0, k) = Le_k + \frac{Le_{k-1} + 1}{2}j$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Le(1, 0, k+1) &= 2Le(1, 0, k) - Le(1, 0, k-2) \\ &= 2\left(Le_k + \frac{Le_{k-1} + 1}{2}j\right) - Le_{k-2} - \frac{Le_{k-3} + 1}{2}j \\ &= Le_{k+1} + \frac{Le_k + 1}{2}j \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 2 (j).

(k) Através da recorrência $Le(n, m, p+1) = 2Le(n, m, p) - Le(n, m, p-2)$, sendo $Le_{-1} = -1$, fixando $n = 0$, $m = 1$ aplicando o princípio da indução sobre p .

Para $p = 0$,

$$\begin{aligned} Le(0, 1, 0) &= Le_0 + \frac{Le_0 + 1}{2}i + \frac{Le_{-1} + 1}{2}j \\ &= 1 + i \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq p$, ou seja, supondo que

$$Le(0, 1, k) = Le_k + \frac{Le_k + 1}{2}i + \frac{Le_{k-1} + 1}{2}j$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Le(0, 1, k+1) &= 2Le(0, 1, k) - Le(0, 1, k-2) \\ &= 2\left(Le_k + \frac{Le_k + 1}{2}i + \frac{Le_{k-1} + 1}{2}j\right) - Le_k - \frac{Le_k + 1}{2}i - \frac{Le_{k-1} + 1}{2}j \\ &= Le_{k+1} + \frac{Le_{k+1} + 1}{2}i + \frac{Le_k + 1}{2}j \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 2 (k).

(l) Através da recorrência $Le(n, m, p+1) = 2Le(n, m, p) - Le(n, m, p-2)$, fixando $n = 1$, $m = 1$ aplicando o princípio da indução sobre p .

Para $p = 0$,

$$\begin{aligned} Le(1, 1, 0) &= Le_0 + \frac{Le_0 + 1}{2}i + \frac{Le_{-1} + 1}{2}j \\ &= 1 + i \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq p$, ou seja, supondo que

$$Le(1, 1, k) = Le_k + \frac{Le_k + 1}{2}i + \frac{Le_{k-1} + 1}{2}j$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned} Le(1, 1, k+1) &= 2Le(1, 1, k) - Le(1, 1, k-2) \\ &= 2\left(Le_k + \frac{Le_k + 1}{2}i + \frac{Le_{k-1} + 1}{2}j\right) - Le_{k-2} + \frac{Le_{k-2} + 1}{2}i + \frac{Le_{k-3} + 1}{2}j \\ &= Le_{k+1} + \frac{Le_{k+1} + 1}{2}i + \frac{Le_k + 1}{2}j \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 2 (l).

(m) Através da recorrência $Le(n+1, m, p) = 2Le(n, m, p) + Le(n-2, m, p)$, fixando n e aplicando indução em m .

Para $m = 0$,

$$\begin{aligned} Le(n, 0, 0) &= \left(Le_n \cdot \frac{Le_0 + 1}{2} + \frac{Le_0 + 1}{2} - 1\right) + \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_{-1} + 1}{2}\right)i \\ &= Le_n \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq m$, ou seja, supondo que

$$Le(n, k, 0) = \left(Le_n \cdot \frac{Le_k + 1}{2} + \frac{Le_k + 1}{2} - 1\right) + \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-1} + 1}{2}\right)i$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned} Le(n, k+1, 0) &= 2Le(n, k, 0) - Le(n, k-2, 0) \\ &= 2\left(Le_n \cdot \frac{Le_k + 1}{2} + \frac{Le_k + 1}{2} - 1\right) + 2\left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-1} + 1}{2}\right)i - \\ &\quad \left(Le_n \cdot \frac{Le_{k-2} + 1}{2} + \frac{Le_{k-2} + 1}{2} - 1\right) - \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-3} + 1}{2}\right)i \\ &= \left(Le_n \cdot \frac{Le_{k+1} + 1}{2} + \frac{Le_{k+1} + 1}{2} - 1\right) + \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2}\right)i \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

• Agora fixando m e usando indução em n .

Para $n = 0$,

$$\begin{aligned} Le(0, m, 0) &= \left(Le_0 \cdot \frac{Le_m + 1}{2} + \frac{Le_m + 1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{Le_0 + 1}{2} \cdot \frac{Le_{m-1} + 1}{2} \right) i \\ &= Le_m + \frac{Le_{m-1} + 1}{2} i \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n$, ou seja, supondo que

$$Le(k, m, 0) = \left(Le_k \cdot \frac{Le_m + 1}{2} + \frac{Le_m + 1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_{m-1} + 1}{2} \right) i$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Le(k + 1, m, 0) &= 2Le(k, m, 0) - Le(k - 2, m, 0) \\ &= 2 \left(Le_k \cdot \frac{Le_m + 1}{2} + \frac{Le_m + 1}{2} - 1 \right) + 2 \left(\frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_{m-1} + 1}{2} \right) i \\ &\quad \left(Le_{k-2} \cdot \frac{Le_m + 1}{2} + \frac{Le_m + 1}{2} - 1 \right) - \left(\frac{Le_{k-2} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{m-1} + 1}{2} \right) i \\ &= \left(Le_{k+1} \cdot \frac{Le_m + 1}{2} + \frac{Le_m + 1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{Le_{k+1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{m-1} + 1}{2} \right) i \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

Com isso, é válido o lema 2 (m).

(n) Através da recorrência $Le(n + 1, m, p) = 2Le(n, m, p) - Le(n - 2, m, p)$, seja $Le_{-1} = -1$, fixando n e aplicando indução em p .

Para $p = 0$,

$$\begin{aligned} Le(n, 0, 0) &= \left(Le_n \cdot \frac{Le_0 + 1}{2} + \frac{Le_0 + 1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_{-1} + 1}{2} \right) j \\ &= Le_n \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq p$, ou seja, supondo que

$$Le(n, 0, k) = \left(Le_n \cdot \frac{Le_k + 1}{2} + \frac{Le_k + 1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-1} + 1}{2} \right) j$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Le(n, 0, k + 1) &= 2Le(n, 0, k) - Le(n, 0, k - 2) \\ &= 2 \left(Le_n \cdot \frac{Le_k + 1}{2} + \frac{Le_k + 1}{2} - 1 \right) + 2 \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-1} + 1}{2} \right) j \\ &\quad \left(Le_n \cdot \frac{Le_{k-2} + 1}{2} + \frac{Le_{k-2} + 1}{2} - 1 \right) - \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-3} + 1}{2} \right) j \\ &= \left(Le_n \cdot \frac{Le_{k+1} + 1}{2} + \frac{Le_{k+1} + 1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} \right) j \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

- Agora fixando p e usando indução em n .

Para $n = 0$,

$$\begin{aligned} Le(0, 0, p) &= \left(Le_0 \cdot \frac{Le_0 + 1}{2} + \frac{Le_p + 1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{Le_0 + 1}{2} \cdot \frac{Le_{p-1} + 1}{2} \right) j \\ &= Le_p + \frac{Le_{p-1} + 1}{2} j \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n$, ou seja, supondo que

$$Le(k, 0, p) = \left(Le_k \cdot \frac{Le_p + 1}{2} + \frac{Le_p + 1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_{p-1} + 1}{2} \right) j$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Le(k + 1, 0, p) &= 2Le(k, 0, p) - Le(k - 2, 0, p) \\ &= 2 \left(Le_k \cdot \frac{Le_p + 1}{2} + \frac{Le_p + 1}{2} - 1 \right) + 2 \left(\frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_{p-1} + 1}{2} \right) j - \\ &\quad \left(Le_{k-2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} + \frac{Le_p + 1}{2} - 1 \right) - \left(\frac{Le_{k-2} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{p-1} + 1}{2} \right) j \\ &= \left(Le_{k+1} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} + \frac{Le_p + 1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{Le_{k+1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{p-1} + 1}{2} \right) j \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

Com isso, é válido o lema 2 (n).

(o) Através da recorrência $Le(n, m + 1, p) = 2Le(n, m, p) - Le(n, m - 2, p)$, fixando m e aplicando indução em p .

Para $p = 0$,

$$\begin{aligned} Le(0, m, 0) &= \left(\frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_0 + 1}{2} + \frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_0 + 1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{Le_{m-1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_0 + 1}{2} \right) i + \\ &\quad \left(\frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_{-1} + 1}{2} \right) j \\ &= Le_m + \frac{Le_{m-1} + 1}{2} i \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq p$, ou seja, supondo que

$$\begin{aligned} Le(0, m, k) &= \left(\frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} + \frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{Le_{m-1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} \right) i + \\ &\quad \left(\frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-1} + 1}{2} \right) j \end{aligned}$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
Le(0, m, k + 1) &= 2Le(0, m, k) - Le(0, m, k - 2) \\
&= 2 \left(\frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} + \frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} - 1 \right) + \\
&\quad 2 \left(\frac{Le_{m-1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} \right) i + 2 \left(\frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-1} + 1}{2} \right) j - \\
&\quad \left(\frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} + \frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} - 1 \right) - \\
&\quad \left(\frac{Le_{m-1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} \right) i - \left(\frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-1} + 1}{2} \right) j \\
&= \left(\frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k+1} + 1}{2} + \frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k+1} + 1}{2} - 1 \right) + \\
&\quad \left(\frac{Le_{m-1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k+1} + 1}{2} \right) i + \left(\frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} \right) j
\end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

• Agora fixando p e usando indução em m .

Para $m = 0$,

$$\begin{aligned}
Le(0, 0, p) &= \left(\frac{Le_0 + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} + \frac{Le_0 + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{Le_{-1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} \right) i + \\
&\quad \left(\frac{Le_0 + 1}{2} \cdot \frac{Le_{p-1} + 1}{2} \right) j \\
&= Le_p + \frac{Le_{p-1} + 1}{2} j
\end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq m$, ou seja, supondo que

$$\begin{aligned}
Le(0, k, p) &= \left(\frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} + \frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{Le_{k-1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} \right) i + \\
&\quad \left(\frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_{p-1} + 1}{2} \right) j
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
Le(0, k + 1, p) &= 2Le(0, k, p) - Le(0, k - 2, p) \\
&= 2 \left(\frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} + \frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} - 1 \right) + \\
&\quad 2 \left(\frac{Le_{k-1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} \right) i + 2 \left(\frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_{p-1} + 1}{2} \right) j - \\
&\quad \left(\frac{Le_{k-2} + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} + \frac{Le_{k-2} + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} - 1 \right) - \\
&\quad \left(\frac{Le_{k-3} + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} \right) i - \left(\frac{Le_{k-2} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{p-1} + 1}{2} \right) j \\
&= \left(\frac{Le_{k+1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} + \frac{Le_{k+1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} - 1 \right) \\
&\quad + \left(\frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} \right) i + \left(\frac{Le_{k+1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{p-1} + 1}{2} \right) j
\end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

Com isso, é válido o lema 2 (o). □

Teorema 66. Para $n, m, p \in \mathbb{N}$, os números tridimensionais de Leonardo são descritos por:

$$\begin{aligned} Le(n, m, p) = & \left(Le_n \cdot \frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} + \frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} - 1 \right) + \\ & \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_{m-1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} \right) i + \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_{p-1} + 1}{2} \right) j \end{aligned}$$

Demonstração. Recorre-se ao Princípio de Indução Matemática como alternativa de prova para o teorema em questão.

• Seja n e m valores fixos, iremos aplicar o princípio da indução sobre p .

Nesse sentido, seja $Le_{-1} = -1$, para $p = 0$:

$$\begin{aligned} Le(n, m, 0) = & \left(Le_n \cdot \frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_0 + 1}{2} + \frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_0 + 1}{2} - 1 \right) + \\ & \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_{m-1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_0 + 1}{2} \right) i + \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_{-1} + 1}{2} \right) j \\ = & \left(Le_n \cdot \frac{Le_m + 1}{2} + \frac{Le_m + 1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_{m-1} + 1}{2} \right) i \end{aligned}$$

Correto pelo Lema 2 (m).

Supondo que seja verdade para n e m fixos e qualquer $k \leq p$, ou seja, supondo que

$$\begin{aligned} Le(n, m, k) = & \left(Le_n \cdot \frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} + \frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} - 1 \right) + \\ & \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_{m-1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} \right) i + \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-1} + 1}{2} \right) j \end{aligned}$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para n fixo e para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Le(n, m, k + 1) = & 2Le(n, m, k) - Le(n, m, k - 2) \\ = & 2 \left(Le_n \cdot \frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} + \frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} - 1 \right) + \\ & 2 \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_{m-1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} \right) i + 2 \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-1} + 1}{2} \right) j - \\ & \left(Le_n \cdot \frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-2} + 1}{2} + \frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-2} + 1}{2} - 1 \right) - \\ & \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_{m-1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-2} + 1}{2} \right) i - \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-3} + 1}{2} \right) j \\ = & \left(Le_n \cdot \frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k+1} + 1}{2} + \frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k+1} + 1}{2} - 1 \right) + \\ & \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_{m-1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k+1} + 1}{2} \right) i + \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} \right) j \end{aligned}$$

Como pretendíamos mostrar.

• Agora fixemos n e p e usemos indução em m . Nesse sentido, seja $Le_{-1} = -1$ e para

$m = 0$:

$$\begin{aligned} Le(n, 0, p) &= \left(Le_n \cdot \frac{Le_0 + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} + \frac{Le_0 + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} - 1 \right) + \\ &\quad \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_{-1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} \right) i + \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_0 + 1}{2} \cdot \frac{Le_{p-1} + 1}{2} \right) j \\ &= \left(Le_n \cdot \frac{Le_p + 1}{2} + \frac{Le_p + 1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_{p-1} + 1}{2} \right) j \end{aligned}$$

Correto pelo Lema 2 (n).

Supondo que seja verdade para n e p fixo e qualquer $k \leq m$, ou seja, supondo que

$$\begin{aligned} Le(n, k, p) &= \left(Le_n \cdot \frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} + \frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} - 1 \right) + \\ &\quad \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} \right) i + \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_{p-1} + 1}{2} \right) j \end{aligned}$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Le(n, k + 1, p) &= 2Le(n, k, p) - Le(n, k - 2, p) \\ &= 2 \left(Le_n \cdot \frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} + \frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} - 1 \right) + \\ &\quad 2 \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} \right) i + 2 \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_{p-1} + 1}{2} \right) j - \\ &\quad \left(Le_n \cdot \frac{Le_{k-2} + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} + \frac{Le_{k-2} + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} - 1 \right) - \\ &\quad \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-3} + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} \right) i - \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-2} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{p-1} + 1}{2} \right) j \\ &= \left(Le_n \cdot \frac{Le_{k+1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} + \frac{Le_{k+1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} - 1 \right) + \\ &\quad \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} \right) i + \left(\frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k+1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{p-1} + 1}{2} \right) j \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

- Agora fixemos m e p e usemos indução em n .

Nesse sentido, para $n = 0$:

$$\begin{aligned} Le(0, m, p) &= \left(Le_0 \cdot \frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} + \frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} - 1 \right) + \\ &\quad \left(\frac{Le_0 + 1}{2} \cdot \frac{Le_{m-1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} \right) i + \left(\frac{Le_0 + 1}{2} \cdot \frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_{p-1} + 1}{2} \right) j \\ &= \left(\frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} + \frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{Le_{m-1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} \right) i + \\ &\quad \left(\frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_{p-1} + 1}{2} \right) j \end{aligned}$$

Correto pelo Lema 2 (o).

Supondo que seja verdade para m e p fixos e qualquer $k \leq n$, ou seja, supondo que

$$\begin{aligned} Le(k, m, p) &= \left(Le_k \cdot \frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} + \frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} - 1 \right) + \\ &\quad \left(\frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_{m-1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_p + 1}{2} \right) i + \left(\frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_m + 1}{2} \cdot \frac{Le_{p-1} + 1}{2} \right) j \end{aligned}$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
 Le(k+1, m, p) &= 2Le(k, m, p) - Le(k-2, m, p) \\
 &= 2 \left(Le_k \cdot \frac{Le_m+1}{2} \cdot \frac{Le_p+1}{2} + \frac{Le_m+1}{2} \cdot \frac{Le_p+1}{2} - 1 \right) + \\
 &\quad 2 \left(\frac{Le_k+1}{2} \cdot \frac{Le_{m-1}+1}{2} \cdot \frac{Le_p+1}{2} \right) i + 2 \left(\frac{Le_k+1}{2} \cdot \frac{Le_m+1}{2} \cdot \frac{Le_{p-1}+1}{2} \right) j - \\
 &\quad \left(Le_{k-2} \cdot \frac{Le_m+1}{2} \cdot \frac{Le_p+1}{2} + \frac{Le_m+1}{2} \cdot \frac{Le_p+1}{2} - 1 \right) - \\
 &\quad \left(\frac{Le_{k-2}+1}{2} \cdot \frac{Le_{m-1}+1}{2} \cdot \frac{Le_p+1}{2} \right) i - \left(\frac{Le_{k-2}+1}{2} \cdot \frac{Le_m+1}{2} \cdot \frac{Le_{p-1}+1}{2} \right) j \\
 &= \left(Le_{k+1} \cdot \frac{Le_m+1}{2} \cdot \frac{Le_p+1}{2} + \frac{Le_m+1}{2} \cdot \frac{Le_p+1}{2} - 1 \right) + \\
 &\quad \left(\frac{Le_{k+1}+1}{2} \cdot \frac{Le_{m-1}+1}{2} \cdot \frac{Le_p+1}{2} \right) i + \left(\frac{Le_{k+1}+1}{2} \cdot \frac{Le_m+1}{2} \cdot \frac{Le_{p-1}+1}{2} \right) j
 \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

Com isso, tem-se que o Teorema é válido. $\square$

3.2.3.3 Relações Recorrentes n -Dimensionais de Leonardo

Baseado em Harman (1981), Oliveira (2018), Oliveira, Alves e Paiva (2017), nesta seção, será introduzida a notação para a relação n -dimensional da Sequência de Leonardo designando assim uma expressão generalizada para os números hipercomplexos descritos na forma $Le(n_0, n_1, n_2, \dots, n_n)$, em que n representa as variáveis.

Definição 89. *Seja um número hipercomplexo $Le(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n)$ com n variáveis, para $n \geq 2$ vale, além da componente imaginária i , o seguinte conjunto de unidades imaginárias $(\mu_1 = i, \mu_2 = j, \dots, \mu_n)$. Quanto às variáveis e sua notação, tem-se que $n = n_1$. Desse modo, são definidos os valores iniciais a seguir:*

$$\begin{aligned}
 Le(0, 0, 0, \dots, 0) &= 1 \\
 Le(1, 0, 0, \dots, 0) &= 1 \\
 Le(0, 1, 0, \dots, 0) &= 1 + \mu_1 \\
 Le(0, 0, 1, \dots, 0) &= 1 + \mu_2 \\
 Le(0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0) &= 1 + \mu_3 \\
 &\vdots \\
 Le(0, 0, 0, \dots, 1) &= 1 + \mu_n \\
 Le(1, 1, 1, \dots, 1) &= 1 + \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n \\
 Le(0, 1, 1, \dots, 1) &= 1 + \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n \\
 Le(1, 0, 1, \dots, 1) &= 1 + \mu_2 + \dots + \mu_n \\
 Le(1, 1, 0, 1, \dots, 1) &= 1 + \mu_1 + \mu_3 + \dots + \mu_n
 \end{aligned}$$

Com isso, os números da forma $Le(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n)$ devem satisfazer às seguintes condições n -dimensionais de recorrência:

$$\begin{cases} Le(n_1 + 1, n_2, \dots, n_n) &= 2Le(n_1, n_2, \dots, n_n) - Le(n_1 - 2, n_2, \dots, n_n) \\ Le(n_1, n_2 + 1, \dots, n_n) &= 2Le(n_1, n_2, \dots, n_n) - Le(n_1, n_2 - 2, \dots, n_n) \\ \vdots &= \vdots \\ Le(n_1, n_2, \dots, n_n + 1) &= 2Le(n_1, n_2, \dots, n_n) - Le(n_1, n_2, \dots, n_n - 2) \end{cases}$$

Lema 9. *As seguintes propriedades são válidas para a Sequência n -dimensional de Leonardo:*

$$\begin{aligned} (a) & Le(n_1, 0, \dots, 0) = Le_{n_1}; \\ (b) & Le(0, n_2, \dots, 0) = Le_{n_2} + \frac{Le_{n_2-1} + 1}{2} \mu_1; \\ (c) & Le(0, 0, \dots, n_n) = Le_{n_n} + \frac{Le_{n_n-1} + 1}{2} \mu_n; \\ (d) & Le(n_1, 1, \dots, 0) = Le_{n_1} + \frac{Le_{n_1} + 1}{2} \mu_1; \\ (e) & Le(n_1, 0, \dots, 1) = Le_{n_1} + \dots + \frac{Le_{n_1} + 1}{2} \mu_n; \\ (f) & Le(n_1, 1, \dots, 1) = Le_{n_1} + \frac{Le_{n_1} + 1}{2} \mu_1 + \dots + \frac{Le_{n_1} + 1}{2} \mu_n; \\ (g) & Le(1, n_2, \dots, 0) = Le_{n_2+1} + \frac{Le_{n_2-1} + 1}{2} \mu_1; \\ (h) & Le(0, n_2, \dots, 1) = Le_{n_2} + \frac{Le_{n_2-1} + 1}{2} \mu_1 + \dots + \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \mu_n; \\ (i) & Le(1, n_2, \dots, 1) = Le_{n_2} + \frac{Le_{n_2-1} + 1}{2} \mu_1 + \dots + \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \mu_n; \\ (j) & Le(1, 0, \dots, n_n) = Le_{n_n} + \dots + \frac{Le_{n_n-1} + 1}{2} \mu_n; \\ (k) & Le(0, 1, \dots, n_n) = Le_{n_n} + \frac{Le_{n_n} + 1}{2} \mu_1 + \dots + \frac{Le_{n_n-1} + 1}{2} \mu_n; \\ (l) & Le(1, 1, \dots, n_n) = Le_{n_n} + \frac{Le_{n_n} + 1}{2} \mu_1 + \dots + \frac{Le_{n_n-1} + 1}{2} \mu_n; \\ (m) & Le(n_1, n_2, \dots, 0) = \left(Le_{n_1} \cdot \frac{Le_{n_2} + 1}{2} + \frac{Le_{n_2} + 1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_2-1} + 1}{2} \right) \mu_1; \\ (n) & Le(n_1, 0, \dots, n_n) = \left(Le_{n_1} \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} + \frac{Le_{n_n} + 1}{2} - 1 \right) + \dots + \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_n-1} + 1}{2} \right) \mu_n; \\ (o) & Le(0, n_2, \dots, n_n) = \left(\frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} + \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} - 1 \right) + \\ & \left(\frac{Le_{n_2-1} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} \right) \mu_1 + \dots + \left(\frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n-1} + 1}{2} \right) \mu_n. \end{aligned}$$

Demonstração. (a) Através da recorrência $Le(n + 1, n_2, \dots, n_n) = 2Le(n, n_2, \dots, n_n) - Le(n_1 - 2, n_2, \dots, n_n)$, fixando $n_2, \dots, n_n$ iguais a zero e aplicando o método de indução em n_1 , tem-se:

Para $n_1 = 0$,

$$\begin{aligned} Le(0, 0, \dots, 0) &= Le_0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Supondo que seja verdade para $n_2, \dots, n_n$ fixos e qualquer $k \leq n_1$, ou seja supondo que

$$Le(k, 0, \dots, 0) = Le_k$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Le(k+1, 0, 0, \dots, 0) &= 2Le(k, 0, \dots, 0) - Le(k-2, 0, \dots, 0) \\ &= 2Le_k - Le_{k-2} \\ &= Le_{k+1} \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (a).

(b) Através da recorrência $Le(n_1, n_2 + 1, \dots, n_n) = 2Le(n_1, n_2, \dots, n_n) - Le(n_1, n_2 - 2, \dots, n_n)$, fixando $n_1, n_3, \dots, n_n$ iguais a zero e aplicando o método de indução em n_2 , tem-se:

Para $n_2 = 0$,

$$\begin{aligned} Le(0, 0, \dots, 0) &= Le_0 + \frac{Le_{0-1} + 1}{2} \mu_1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Supondo que seja verdade para $n_1, \dots, n_n$ fixos e qualquer $k \leq n_2$, ou seja supondo que

$$Le(0, k, \dots, 0) = Le_k + \frac{Le_{k-1} + 1}{2} \mu_1$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Le(0, k+1, \dots, 0) &= 2Le(0, k, \dots, 0) - Le(0, k-1, \dots, 0) \\ &= 2 \left(Le_k + \frac{Le_{k-1} + 1}{2} \mu_1 \right) - Le_{k-2} - \frac{Le_{k-2-1} + 1}{2} \mu_1 \\ &= Le_{k+1} + \frac{Le_{k+1-1} + 1}{2} \mu_1 \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (b).

(c) Através da recorrência $Le(n_1, n_2, \dots, n_n + 1) = 2Le(n_1, n_2, \dots, n_n) - Le(n_1, n_2, \dots, n_n - 2)$, fixando $n_1, n_2, \dots$ iguais a zero e aplicando o método de indução em n_n , tem-se:

Para $n_n = 0$,

$$Le(0, 0, \dots, 0) = Le_0 + \frac{Le_{-1} + 1}{2} \mu_n$$

Supondo que seja verdade para $n_1, n_2, \dots$ fixos e qualquer $k \leq n_n$, ou seja supondo que

$$Le(0, 0, \dots, k) = Le_k + \frac{Le_{k-1} + 1}{2} \mu_n$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Le(0, 0, \dots, k+1) &= 2Le(0, 0, \dots, k) - Le(0, 0, \dots, k-2) \\ &= 2 \left(Le_k + \frac{Le_{k-1} + 1}{2} \mu_n \right) - Le_{k-2} - \frac{Le_{k-2-1} + 1}{2} \mu_n \\ &= Le_{k+1} + \frac{Le_{k+1-1} + 1}{2} \mu_n \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (c).

(d) Através da recorrência $Le(n_1+1, n_2, \dots, n_n) = 2Le(n_1, n_2, \dots, n_n) - Le(n_1-2, n_2, \dots, n_n)$, fixando $n_2 = 1$, $n_n = 0$ e aplicando o princípio de indução sobre n_1 . Nesse sentido, para $n_1 = 0$:

$$\begin{aligned} Le(0, 1, \dots, 0) &= Le_0 + \frac{Le_0 + 1}{2} \mu_1 \\ &= 1 + \mu_1 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_1$, ou seja, supondo que

$$Le(k, 1, \dots, 0) = Le_k + \frac{Le_k + 1}{2} \mu_1$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Le(k+1, 1, \dots, 0) &= 2Le(k, 1, \dots, 0) - Le(k-2, 1, \dots, 0) \\ &= 2 \left(Le_k + \frac{Le_k + 1}{2} \mu_1 \right) - Le_{k-2} - \frac{Le_{k-2} + 1}{2} \mu_1 \\ &= Le_{k+1} + \frac{Le_{k+1} + 1}{2} \mu_1 \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (d).

(e) Através da recorrência $Le(n_1+1, n_2, \dots, n_n) = 2Le(n_1, n_2, \dots, n_n) - Le(n_1-2, n_2, \dots, n_n)$, fixando $n_2 = 0$, $n_n = 1$ e aplicando o princípio de indução sobre n_1 . Nesse sentido, para $n_1 = 0$:

$$\begin{aligned} Le(0, 0, \dots, 1) &= Le_0 + \dots + \frac{Le_0 + 1}{2} \mu_n \\ &= 1 + \mu_n \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_1$, ou seja, supondo que

$$Le(k, 0, \dots, 1) = Le_k + \dots + \frac{Le_k + 1}{2} \mu_n$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Le(k+1, 0, \dots, 1) &= 2Le(k, 0, \dots, 1) - Le(k-2, 0, \dots, 1) \\ &= 2 \left(Le_k + \dots + \frac{Le_k + 1}{2} \mu_n \right) - Le_{k-2} - \dots - \frac{Le_{k-2} + 1}{2} \mu_n \\ &= Le_{k+1} + \dots + \frac{Le_{k+1} + 1}{2} \mu_n \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (e).

(f) Através da recorrência $Le(n_1+1, n_2, \dots, n_n) = 2Le(n_1, n_2, \dots, n_n) - Le(n_1-2, n_2, \dots, n_n)$,

fixando $n_2 = 1$, $n_n = 1$ e aplicando o princípio de indução sobre n_1 . Nesse sentido, para $n_1 = 0$:

$$\begin{aligned} Le(0, 1, \dots, 1) &= Le_0 + \frac{Le_0 + 1}{2}\mu_1 + \dots + \frac{Le_0 + 1}{2}\mu_n \\ &= 1 + \mu_1 + \dots + \mu_n \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_1$, ou seja, supondo que

$$Le(k, 1, \dots, 1) = Le_k + \frac{Le_k + 1}{2}\mu_1 + \dots + \frac{Le_k + 1}{2}\mu_n$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Le(k+1, 1, \dots, 1) &= 2Le(k, 1, \dots, 1) - Le(k-2, 1, \dots, 1) \\ &= 2\left(Le_k + \frac{Le_k + 1}{2}\mu_1 + \dots + \frac{Le_k + 1}{2}\mu_n\right) - Le_{k-2} - \frac{Le_{k-2} + 1}{2}\mu_1 - \\ &\quad \dots - \frac{Le_{k-2} + 1}{2}\mu_n \\ &= Le_{k+1} + \frac{Le_{k+1} + 1}{2}\mu_1 + \dots + \frac{Le_{k+1} + 1}{2}\mu_n \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (f).

(g) Através da recorrência $Le(n_1, n_2 + 1, \dots, n_n) = 2Le(n_1, n_2, \dots, n_n) - Le(n_1, n_2 - 2, \dots, n_n)$, fixando $n_1 = 1$, $n_n = 0$ e aplicando o princípio de indução sobre n_2 . Nesse sentido, para $n_2 = 0$:

$$\begin{aligned} Le(1, 0, \dots, 0) &= Le_1 + \frac{Le_{-1} + 1}{2}\mu_1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_2$, ou seja, supondo que

$$Le(1, k, \dots, 0) = Le_{k+1} + \frac{Le_{k-1} + 1}{2}\mu_1$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Le(1, k+1, \dots, 0) &= 2Le(1, k, \dots, 0) - Le(1, k-2, \dots, 0) \\ &= 2\left(Le_{k+1} + \frac{Le_{k-1} + 1}{2}\mu_1\right) - Le_{k-1} - \frac{Le_{k-3} + 1}{2}\mu_1 \\ &= Le_{k+2} + \frac{Le_k + 1}{2}\mu_1 \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (g).

(h) Através da recorrência $Le(n_1, n_2 + 1, \dots, n_n) = 2Le(n_1, n_2, \dots, n_n) - Le(n_1, n_2 - 2, \dots, n_n)$, fixando $n_1 = 0$, $n_n = 1$ e aplicando o princípio de indução sobre n_2 . Nesse sentido, para $n_2 = 0$:

$$\begin{aligned} Le(0, 0, \dots, 1) &= Le_0 + \frac{Le_{-1} + 1}{2}\mu_1 + \dots + \frac{Le_0 + 1}{2}\mu_n \\ &= 1 + \dots + \mu_n \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_2$, ou seja, supondo que

$$Le(0, k, \dots, 1) = Le_k + \frac{Le_{k-1} + 1}{2}\mu_1 + \dots + \frac{Le_k + 1}{2}\mu_n$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Le(0, k+1, \dots, 1) &= 2Le(0, k, \dots, 1) - Le(0, k-2, \dots, 1) \\ &= 2\left(Le_k + \frac{Le_{k-1} + 1}{2}\mu_1 + \dots + \frac{Le_k + 1}{2}\mu_n\right) - Le_{k-2} - \\ &\quad \frac{Le_{k-3} + 1}{2}\mu_1 - \dots - \frac{Le_{k-1} + 1}{2}\mu_n \\ &= Le_{k+1} + \frac{Le_k + 1}{2}\mu_1 + \dots + \frac{Le_{k+1} + 1}{2}\mu_n \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (h).

(i) Através da recorrência $Le(n_1, n_2 + 1, \dots, n_n) = 2Le(n_1, n_2, \dots, n_n) - Le(n_1, n_2 - 2, \dots, n_n)$, fixando $n_1 = 1$, $n_n = 1$ e aplicando o princípio de indução sobre n_2 . Nesse sentido, para $n_2 = 0$:

$$\begin{aligned} Le(1, 0, \dots, 1) &= Le_0 + \frac{Le_{-1} + 1}{2}\mu_1 + \dots + \frac{Le_0 + 1}{2}\mu_n \\ &= 1 + \dots + \mu_n \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_2$, ou seja, supondo que

$$Le(1, k, \dots, 1) = Le_k + \frac{Le_{k-1} + 1}{2}\mu_1 + \dots + \frac{Le_k + 1}{2}\mu_n$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Le(1, k+1, \dots, 1) &= 2Le(1, k, \dots, 1) - Le(1, k-2, \dots, 1) \\ &= 2\left(Le_k + \frac{Le_{k-1} + 1}{2}\mu_1 + \dots + \frac{Le_k + 1}{2}\mu_n\right) - Le_{k-2} - \\ &\quad \frac{Le_{k-3} + 1}{2}\mu_1 - \dots - \frac{Le_{k-2} + 1}{2}\mu_n \\ &= Le_{k+1} + \frac{Le_k + 1}{2}\mu_1 + \dots + \frac{Le_{k+1} + 1}{2}\mu_n \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (i).

(j) Através da recorrência $Le(n_1, n_2, \dots, n_n + 1) = 2Le(n_1, n_2, \dots, n_n) - Le(n_1, n_2, \dots, n_n - 2)$, fixando $n_1 = 1$, $n_2 = 0$ e aplicando o princípio de indução sobre n_n .

Nesse sentido, para $n_n = 0$:

$$\begin{aligned} Le(1, 0, \dots, 0) &= Le_0 + \dots + \frac{Le_{-1} + 1}{2}\mu_n \\ &= 1 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_n$, ou seja, supondo que

$$Le(1, 0, \dots, k) = Le_k + \dots + \frac{Le_{k-1} + 1}{2} \mu_n$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Le(1, 0, \dots, k+1) &= 2Le(1, 0, \dots, k) - Le(1, 0, \dots, k-2) \\ &= 2 \left(Le_k + \dots + \frac{Le_{k-1} + 1}{2} \mu_n \right) - Le_{k-2} - \dots - \frac{Le_{k-3} + 1}{2} \mu_n \\ &= Le_{k+1} + \dots + \frac{Le_k + 1}{2} \mu_n \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (j).

(k) Através da recorrência $Le(n_1, n_2, \dots, n_n+1) = 2Le(n_1, n_2, \dots, n_n) - Le(n_1, n_2, \dots, n_n-2)$, fixando $n_1 = 0$, $n_2 = 1$ e aplicando o princípio de indução sobre n_n . Nesse sentido, para $n_n = 0$:

$$\begin{aligned} Le(0, 1, \dots, 0) &= Le_0 + \frac{Le_0 + 1}{2} \mu_1 + \dots + \frac{Le_{-1} + 1}{2} \mu_n \\ &= 1 + \mu_1 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_n$, ou seja, supondo que

$$Le(0, 1, \dots, k) = Le_k + \frac{Le_k + 1}{2} \mu_1 + \dots + \frac{Le_{k-1} + 1}{2} \mu_n$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Le(0, 1, \dots, k+1) &= 2Le(0, 1, \dots, k) - Le(0, 1, \dots, k-2) \\ &= 2 \left(Le_k + \frac{Le_k + 1}{2} \mu_1 + \dots + \frac{Le_{k-1} + 1}{2} \mu_n \right) - \\ &\quad Le_{k-2} - \frac{Le_{k-2} + 1}{2} \mu_1 - \dots - \frac{Le_{k-3} + 1}{2} \mu_n \\ &= Le_{k+1} + \frac{Le_{k+1} + 1}{2} \mu_1 + \dots + \frac{Le_k + 1}{2} \mu_n \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (k).

(l) Através da recorrência $Le(n_1, n_2, \dots, n_n+1) = 2Le(n_1, n_2, \dots, n_n) - Le(n_1, n_2, \dots, n_n-2)$, fixando $n_1 = 1$, $n_2 = 1$ e aplicando o princípio de indução sobre n_n . Nesse sentido, para $n_n = 0$:

$$\begin{aligned} Le(1, 1, \dots, 0) &= Le_0 + \frac{Le_0 + 1}{2} \mu_1 + \dots + \frac{Le_{-1} + 1}{2} \mu_n \\ &= 1 + \mu_1 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_n$, ou seja, supondo que

$$Le(1, 1, \dots, k) = Le_k + \frac{Le_k + 1}{2} \mu_1 + \dots + \frac{Le_{k-1} + 1}{2} \mu_n$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
 Le(1, 1, \dots, k + 1) &= 2Le(1, 0, \dots, k) - Le(1, 1, \dots, k - 2) \\
 &= 2 \left(Le_k + \frac{Le_k + 1}{2} \mu_1 + \dots + \frac{Le_{k-1} + 1}{2} \mu_n \right) - \\
 &\quad Le_{k-2} - \frac{Le_{k-2} + 1}{2} \mu_1 - \dots - \frac{Le_{k-3} + 1}{2} \mu_n \\
 &= Le_{k+1} + \frac{Le_{k+1} + 1}{2} \mu_1 + \dots + \frac{Le_k + 1}{2} \mu_n
 \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (1).

(m) Através da recorrência $Le(n_1 + 1, n_2, \dots, n_n) = 2Le(n_1, n_2, \dots, n_n) - Le(n_1 - 2, n_2, \dots, n_n)$, fixando n_2 e $n_n = 0$, aplicando indução em n_1 .

Nesse sentido, para $n_1 = 0$:

$$\begin{aligned}
 Le(0, n_2, \dots, 0) &= \left(Le_0 \cdot \frac{Le_{n_2} + 1}{2} + \frac{Le_{n_2} + 1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{Le_0 + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_2-1} + 1}{2} \right) \mu_1 \\
 &= Le_{n_2} + \left(\frac{Le_{n_2-1} + 1}{2} \right) \mu_1
 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_1$, ou seja, supondo que

$$Le(k, n_2, \dots, 0) = \left(Le_k \cdot \frac{Le_{n_2} + 1}{2} + \frac{Le_{n_2} + 1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_2-1} + 1}{2} \right) \mu_1$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
 Le(k + 1, n_2, \dots, 0) &= 2Le(k, n_2, \dots, 0) - Le(k - 2, n_2, \dots, 0) \\
 &= 2 \left(Le_k \cdot \frac{Le_{n_2} + 1}{2} + \frac{Le_{n_2} + 1}{2} - 1 \right) + 2 \left(\frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_2-1} + 1}{2} \right) \mu_1 - \\
 &\quad \left(Le_{k-2} \cdot \frac{Le_{n_2} + 1}{2} + \frac{Le_{n_2} + 1}{2} - 1 \right) - \left(\frac{Le_{k-2} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_2-1} + 1}{2} \right) \mu_1 \\
 &= \left(Le_{k+1} \cdot \frac{Le_{n_2} + 1}{2} + \frac{Le_{n_2} + 1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{Le_{k+1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_2-1} + 1}{2} \right) \mu_1
 \end{aligned}$$

• Agora fixando n_1 e aplicando indução em n_2 .

Nesse sentido, para $n_2 = 0$:

$$\begin{aligned}
 Le(n_1, 0, \dots, 0) &= \left(Le_{n_1} \cdot \frac{Le_0 + 1}{2} + \frac{Le_0 + 1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{-1} + 1}{2} \right) \mu_1 \\
 &= Le_{n_1}
 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_2$, ou seja, supondo que

$$Le(n_1, k, \dots, 0) = \left(Le_{n_1} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} + \frac{Le_k + 1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-1} + 1}{2} \right) \mu_1$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
 Le(n_1, k + 1, \dots, 0) &= 2Le(n_1, k, \dots, 0) - Le(n_1, k - 2, \dots, 0) \\
 &= 2 \left(Le_{n_1} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} + \frac{Le_k + 1}{2} - 1 \right) + 2 \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-1} + 1}{2} \right) \mu_1 - \\
 &\quad \left(Le_{n_1} \cdot \frac{Le_{k-2} + 1}{2} + \frac{Le_{k-2} + 1}{2} - 1 \right) - \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-3} + 1}{2} \right) \mu_1 \\
 &= \left(Le_{n_1} \cdot \frac{Le_{k+1} + 1}{2} + \frac{Le_{k+1} + 1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} \right) \mu_1
 \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (m).

(n) Através da recorrência $Le(n_1 + 1, n_2, \dots, n_n) = 2Le(n_1, n_2, \dots, n_n) - Le(n_1 - 2, n_2, \dots, n_n)$, fixando n_n e $n_2 = 0$, aplicando indução em n_1 .

Nesse sentido, para $n_1 = 0$:

$$\begin{aligned}
 Le(0, 0, \dots, n_n) &= \left(Le_0 \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} + \frac{Le_{n_n} + 1}{2} - 1 \right) + \dots + \left(\frac{Le_0 + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_n-1} + 1}{2} \right) \mu_n \\
 &= Le_{n_n} + \dots + \left(\frac{Le_{n_n-1} + 1}{2} \right) \mu_n
 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_1$, ou seja, supondo que

$$Le(k, 0, \dots, n_n) = \left(Le_k \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} + \frac{Le_{n_n} + 1}{2} - 1 \right) + \dots + \left(\frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_n-1} + 1}{2} \right) \mu_n$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
 Le(k + 1, 0, \dots, n_n) &= 2Le(k, 0, \dots, n_n) - Le(k - 2, 0, \dots, n_n) \\
 &= 2 \left(Le_k \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} + \frac{Le_{n_n} + 1}{2} - 1 \right) + \dots + 2 \left(\frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_n-1} + 1}{2} \right) \mu_n - \\
 &\quad \left(Le_{k-2} \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} + \frac{Le_{n_n} + 1}{2} - 1 \right) - \dots - \left(\frac{Le_{k-2} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_n-1} + 1}{2} \right) \mu_n \\
 &= \left(Le_{k+1} \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} + \frac{Le_{n_n} + 1}{2} - 1 \right) + \dots + \left(\frac{Le_{k+1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_n-1} + 1}{2} \right) \mu_n
 \end{aligned}$$

• Agora fixando n_1 e aplicando indução em n_n .

Nesse sentido, para $n_n = 0$:

$$\begin{aligned}
 Le(n_1, 0, \dots, 0) &= \left(Le_{n_1} \cdot \frac{Le_0 + 1}{2} + \frac{Le_0 + 1}{2} - 1 \right) + \dots + \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{-1} + 1}{2} \right) \mu_n \\
 &= Le_{n_1}
 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_n$, ou seja, supondo que

$$Le(n_1, 0, \dots, k) = \left(Le_{n_1} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} + \frac{Le_k + 1}{2} - 1 \right) + \dots + \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-1} + 1}{2} \right) \mu_n$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
 Le(n_1, 0, \dots, k+1) &= 2Le(n_1, 0, \dots, k) - Le(n_1, 0, \dots, k-2) \\
 &= 2 \left(Le_{n_1} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} + \frac{Le_k + 1}{2} - 1 \right) + \dots + 2 \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-1} + 1}{2} \right) \mu_n - \\
 &\quad \left(Le_{n_1} \cdot \frac{Le_{k-2} + 1}{2} - \frac{Le_{k-2} + 1}{2} - 1 \right) - \dots - \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-3} + 1}{2} \right) \mu_n \\
 &= \left(Le_{n_1} \cdot \frac{Le_{k+1} + 1}{2} + \frac{Le_{k+1} + 1}{2} - 1 \right) + \dots + \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} \right) \mu_n
 \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (n).

(o) Através da recorrência $Le(n_1+1, n_2, \dots, n_n) = 2Le(n_1, n_2, \dots, n_n) - Le(n_1-2, n_2, \dots, n_n)$, fixando n_2 e $n_1 = 0$, aplicando indução em n_n .

Nesse sentido, para $n_n = 0$:

$$\begin{aligned}
 Le(0, n_2, \dots, 0) &= \left(\frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \frac{Le_0 + 1}{2} + \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \frac{Le_0 + 1}{2} - 1 \right) + \\
 &\quad \left(\frac{Le_{n_2-1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_0 + 1}{2} \right) \mu_1 + \dots + \left(\frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{-1} + 1}{2} \right) \mu_n \\
 &= Le_{n_2} + \left(\frac{Le_{n_2-1} + 1}{2} \right) \mu_1
 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_n$, ou seja, supondo que

$$\begin{aligned}
 Le(0, n_2, 0, \dots, k) &= \left(\frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} + \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} - 1 \right) + \\
 &\quad \left(\frac{Le_{n_2-1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} \right) \mu_1 + \dots + \left(\frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-1} + 1}{2} \right) \mu_n
 \end{aligned}$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
 Le(0, n_2, \dots, k+1) &= 2Le(0, n_2, \dots, k) - Le(0, n_2, \dots, k-2) \\
 &= 2 \left(\frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} + \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} - 1 \right) + \\
 &\quad 2 \left(\frac{Le_{n_2-1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} \right) \mu_1 + \dots + 2 \left(\frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-1} + 1}{2} \right) \mu_n - \\
 &\quad \left(\frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-2} + 1}{2} - \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-2} + 1}{2} - 1 \right) - \\
 &\quad \left(\frac{Le_{n_2-1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-2} + 1}{2} \right) \mu_1 - \dots - \left(\frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-3} + 1}{2} \right) \mu_n \\
 &= \left(\frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k+1} + 1}{2} + \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k+1} + 1}{2} - 1 \right) + \\
 &\quad \left(\frac{Le_{n_2-1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k+1} + 1}{2} \right) \mu_1 + \dots + \left(\frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} \right) \mu_n
 \end{aligned}$$

- Agora fixando n_n e aplicando indução em n_2 .

Nesse sentido, para $n_2 = 0$:

$$\begin{aligned} Le(0, 0, \dots, n_n) &= \left(\frac{Le_0 + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} + \frac{Le_0 + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{Le_{-1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} \right) \mu_1 + \\ &\quad \dots + \left(\frac{Le_0 + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_{n-1}} + 1}{2} \right) \mu_n \\ &= Le_{n_n} + \dots + \left(\frac{Le_{n_{n-1}} + 1}{2} \right) \mu_n \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_2$, ou seja, supondo que

$$\begin{aligned} Le(0, k, \dots, n_n) &= \left(\frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} + \frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{Le_{k-1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} \right) \mu_1 + \\ &\quad \dots + \left(\frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_{n-1}} + 1}{2} \right) \mu_n \end{aligned}$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} Le(0, k + 1, \dots, n_n) &= 2Le(0, k, \dots, n_n) - Le(0, k - 2, \dots, n_n) \\ &= 2 \left(\frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} + \frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} - 1 \right) + \\ &\quad 2 \left(\frac{Le_{k-1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} \right) \mu_1 \dots + 2 \left(\frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_{n-1}} + 1}{2} \right) \mu_n - \\ &\quad \left(\frac{Le_{k-2} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} + \frac{Le_{k-2} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} - 1 \right) - \\ &\quad \left(\frac{Le_{k-3} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} \right) \mu_1 - \dots - \left(\frac{Le_{k-2} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_{n-1}} + 1}{2} \right) \mu_n \\ &= \left(\frac{Le_{k+1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} + \frac{Le_{k+1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} - 1 \right) + \\ &\quad \left(\frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} \right) \mu_1 + \dots + \left(\frac{Le_{k+1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_{n-1}} + 1}{2} \right) \mu_n \end{aligned}$$

Com isso, é válido o lema 3 (o).

Assim, tem-se que os Lemas são válidos. □

Teorema 67. *Os números da forma $Le(n, n_2, \dots, n_n)$, tal que $n_1, n_2, \dots, n_n \in \mathbb{N}$ são determinados por:*

$$\begin{aligned} Le(n_1, n_2, \dots, n_n) &= \left(Le_{n_1} \cdot \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} + \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} - 1 \right) + \\ &\quad \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_2-1} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} \right) \mu_1 + \dots + \\ &\quad \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_{n-1}} + 1}{2} \right) \mu_n \end{aligned}$$

Demonstração. Seja $n_1, n_2, \dots, n_{n-1}$ valores fixos, iremos aplicar o princípio da indução

sobre n_n . Para $n_n = 0$:

$$\begin{aligned}
 Le(n_1, n_2, \dots, 0) &= \left(Le_{n_1} \cdot \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_0 + 1}{2} + \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_0 + 1}{2} - 1 \right) + \\
 &\quad \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_2-1} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_0 + 1}{2} \right) \mu_1 + \dots + \\
 &\quad \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{-1} + 1}{2} \right) \mu_n \\
 &= \left(Le_{n_1} \cdot \frac{Le_{n_2} + 1}{2} + \frac{Le_{n_2} + 1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_2-1} + 1}{2} \right) \mu_1
 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida pelo Lema (m).

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_n$, ou seja, supondo que

$$\begin{aligned}
 Le(n_1, n_2, \dots, k) &= \left(Le_{n_1} \cdot \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_k + 1}{2} + \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_k + 1}{2} - 1 \right) + \\
 &\quad \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_2-1} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_k + 1}{2} \right) \mu_1 + \dots + \\
 &\quad \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{k-1} + 1}{2} \right) \mu_n
 \end{aligned}$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
 Le(n_1, n_2, \dots, k + 1) &= 2Le(n_1, n_2, \dots, k) - Le(n_1, n_2, \dots, k - 2) \\
 &= 2 \left(Le_{n_1} \cdot \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_k + 1}{2} + \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_k + 1}{2} - 1 \right) + \\
 &\quad 2 \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_2-1} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_k + 1}{2} \right) \mu_1 + \dots + \\
 &\quad 2 \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{k-1} + 1}{2} \right) \mu_n - \\
 &\quad \left(Le_{n_1} \cdot \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{k-2} + 1}{2} + \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{k-2} + 1}{2} - 1 \right) - \\
 &\quad \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_2-1} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{k-2} + 1}{2} \right) \mu_1 - \dots - \\
 &\quad \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{k-3} + 1}{2} \right) \mu_n \\
 &= \left(Le_{n_1} \cdot \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{k+1} + 1}{2} + \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{k+1} + 1}{2} - 1 \right) + \\
 &\quad \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_2-1} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{k+1} + 1}{2} \right) \mu_1 + \dots + \\
 &\quad \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_k + 1}{2} \right) \mu_n
 \end{aligned}$$

Como queríamos provar.

- Agora para $n_1, \dots, n_n$ valores fixos, iremos aplicar o princípio da indução sobre n_2 . Para

$n_2 = 0$:

$$\begin{aligned}
 Le(n_1, 0, \dots, n_n) &= \left(Le_{n_1} \cdot \frac{Le_0 + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} + \frac{Le_0 + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} - 1 \right) + \\
 &\quad \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{-1} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} \right) \mu_1 + \dots + \\
 &\quad \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_0 + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_{n-1}} + 1}{2} \right) \mu_n \\
 &= \left(Le_{n_1} \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} + \frac{Le_{n_n} + 1}{2} - 1 \right) + \dots + \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_{n-1}} + 1}{2} \right) \mu_n
 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida pelo Lema (n).

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_2$, ou seja, supondo que

$$\begin{aligned}
 Le(n_1, k, \dots, n_n) &= \left(Le_{n_1} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} + \frac{Le_k + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} - 1 \right) + \\
 &\quad \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-1} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} \right) \mu_1 + \dots + \\
 &\quad \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_{n-1}} + 1}{2} \right) \mu_n
 \end{aligned}$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
 Le(n_1, k + 1, \dots, n_n) &= 2Le(n_1, k, \dots, n_n) - Le(n_1, k - 2, \dots, n_n) \\
 &= 2 \left(Le_{n_1} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} + \frac{Le_k + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} - 1 \right) + \\
 &\quad 2 \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-1} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} \right) \mu_1 + \dots + \\
 &\quad 2 \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_{n-1}} + 1}{2} \right) \mu_n - \\
 &\quad \left(Le_{n_1} \cdot \frac{Le_{k-2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} + \frac{Le_{k-2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} - 1 \right) - \\
 &\quad \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-3} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} \right) \mu_1 - \dots - \\
 &\quad \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k-2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_{n-1}} + 1}{2} \right) \mu_n \\
 &= \left(Le_{n_1} \cdot \frac{Le_{k+1} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} + \frac{Le_{k+1} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} - 1 \right) + \\
 &\quad \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_k + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} \right) \mu_1 + \dots + \\
 &\quad \left(\frac{Le_{n_1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{k+1} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_{n-1}} + 1}{2} \right) \mu_n
 \end{aligned}$$

Como queríamos provar.

• Agora para $n_2, \dots, n_n$ valores fixos, iremos aplicar o princípio da indução sobre n_1 . Para

$n_1 = 0$:

$$\begin{aligned}
 Le(0, n_2, \dots, n_n) &= \left(Le_0 \cdot \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} + \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} - 1 \right) + \\
 &\quad \left(\frac{Le_0 + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_2-1} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} \right) \mu_1 + \dots + \\
 &\quad \left(\frac{Le_0 + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n-1} + 1}{2} \right) \mu_n \\
 &= \left(\frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} + \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} - 1 \right) + \\
 &\quad \left(\frac{Le_{n_2-1} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} \right) \mu_1 + \dots + \left(\frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n-1} + 1}{2} \right) \mu_n
 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida pelo Lema (o).

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_1$, ou seja, supondo que

$$\begin{aligned}
 Le(k, n_2, \dots, n_n) &= \left(Le_k \cdot \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} + \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} - 1 \right) + \\
 &\quad \left(\frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_2-1} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} \right) \mu_1 + \dots + \\
 &\quad \left(\frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n-1} + 1}{2} \right) \mu_n
 \end{aligned}$$

Vamos mostrar que a igualdade continua válida para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
 Le(k+1, n_2, \dots, n_n) &= 2Le(k, n_2, \dots, n_n) - Le(k-2, n_2, \dots, n_n) \\
 &= 2 \left(Le_k \cdot \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} + \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} - 1 \right) + \\
 &\quad 2 \left(\frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_2-1} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} \right) \mu_1 + \dots + \\
 &\quad 2 \left(\frac{Le_k + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n-1} + 1}{2} \right) \mu_n - \\
 &\quad \left(Le_{k-2} \cdot \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} + \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} - 1 \right) - \\
 &\quad \left(\frac{Le_{k-2} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_2-1} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} \right) \mu_1 - \dots - \\
 &\quad \left(\frac{Le_{k-2} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n-1} + 1}{2} \right) \mu_n \\
 &= \left(Le_{k+1} \cdot \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} + \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} - 1 \right) + \\
 &\quad \left(\frac{Le_{k+1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_2-1} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n} + 1}{2} \right) \mu_1 + \dots + \\
 &\quad \left(\frac{Le_{k+1} + 1}{2} \cdot \frac{Le_{n_2} + 1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{Le_{n_n-1} + 1}{2} \right) \mu_n
 \end{aligned}$$

Como queríamos provar.

Com isso, o Teorema é válido. $\square$

Finalmente, encerra-se o capítulo sobre o campo epistêmico-matemático desta pesquisa. Esse estudo da hibridização e hipercomplexificação das sequências lineares e

recursivas é um aporte teórico que oferece ao professor-pesquisador um repertório de relações, com o intuito de selecionar conteúdos que serão transpostos para situações didáticas.

4 UMA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA NO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Este trabalho teve sua fase experimental desenvolvida no curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, *campus* Fortaleza, na disciplina de História da Matemática. A partir da transposição didática da hibridização e hipercomplexificação de sequências lineares recursivas, foi realizado um estudo do campo epistêmico-matemático, com o intuito de explorar a hibridização e o processo de hipercomplexificação de sequências numa abordagem epistemológica e dentro de um contexto cognitivo-didático no âmbito da formação inicial de professores de Matemática.

Foram desenvolvidas situações didáticas compostas por situações-problema, fundamentadas na TSD, explorando a metodologia utilizada e as suas concepções. Posteriormente, será analisado os possíveis comportamentos e soluções manifestados pelos alunos na discussão das situações-problema, assim caracterizando a fase de concepção e análise *a priori* da ED.

4.1 Concepções das Situações Didáticas

Na fase da análise prévia da ED, a hibridização e hipercomplexificação de sequências foram desenvolvidas no campo epistêmico-matemático fundamentando a concepção das situações-problemas. Como prevê esta etapa, iremos definir as variáveis que orientarão as escolhas da pesquisa, essas variáveis são definidas numa perspectiva microdidática local, visando a existência de uma interação entre os processos matemáticos apresentados com as situações-problemas propostas. Contudo, destaca-se a importância de transformar o processo evolutivo das sequências, com foco na sua hipercomplexificação e hibridização, em conteúdos a serem ensinados, uma vez que os conteúdos discutidos no capítulo anterior, são abordados na Matemática Pura.

Nessa perspectiva, a concepção da situação didática deste trabalho, visa abordar a hibridização e hipercomplexificação de sequências como um conteúdo a ser ensinado em sala de aula. Com isso, foi elaborada uma hipótese didática em que se refere ao desenvolvimento do processo de hibridização e hipercomplexificação de sequências com o intuito de investigar e explorar teoremas e propriedades em torno desse processo, perante o contexto de ensino de HM e fundamentada na metodologia de pesquisa da ED aparada

pela TSD, que é uma metodologia de ensino. A disciplina escolhida foi bastante relevante, uma vez que a HM está associada à epistemologia dos conceitos matemáticos apresentados na pesquisa.

Nas análises prévias da ED, a hibridização e hipercomplexificação de sequências foi definida como campo epistêmico-matemático, que apoia na concepção das situações-problema. Assim, vale recordar os conteúdos matemáticos desenvolvidos: hibridização de dez sequências lineares e recorrentes, apresentando as recorrências, equações características, propriedades inerentes aos números hibridizados, função geradora e fórmula de Binet. E ainda, as relações recorrentes bidimensionais, tridimensionais e n -dimensionais de algumas sequências. Além do mais, o assunto de hibridização e hipercomplexificação de algumas sequências foi selecionado para a elaboração das situações-problemas. E ainda, destaca-se que neste conteúdo é exigido pouco conhecimento matemático prévio, uma vez que seus teoremas são validados pelo método indutivo.

4.2 Análise *a Priori* das Situações Didáticas

Durante esta fase, é então selecionada a variável didática a qual será utilizada nesta pesquisa, sendo portanto, a microdidática. Nas seções anteriores, foram realizados estudos referente às sequências lineares recorrentes, sua complexificação e os números híbridos, para assim tornar possível o processo de hibridização e hipercomplexificação destas sequências. Assim, com base nos teoremas e propriedades apresentados anteriormente, foram elaboradas seis situações didáticas, fundamentadas na TSD, transformando-as numa atividade proposta aos estudantes do curso de formação inicial de professores de matemática, Licenciatura em Matemática, com o intuito de estimular o processo cognitivo do aluno, a fim de desenvolver um conhecimento pautado nas quatro fases da TSD.

Situação-problema 1: com base nos estudos referente à sequência de Fibonacci e no conjunto dos números híbridos, é então introduzido o processo de hibridização desta sequência, possuindo a recorrência dada por: $HF_{n+1} = HF_n + HF_{n-1}$, $n \geq 1$. Temos ainda a definição dos números híbridos de Fibonacci, como sendo $HF_n = F_n + F_{n+1}i + F_{n+2}\varepsilon + F_{n+3}h$. Assim, apresente uma nova recorrência para a obtenção dos termos da sequência híbrida de Fibonacci para o campo dos números inteiros negativos.

Situação de ação: Fundamentado no conhecimento referente aos números de Fibonacci e em sua recorrência, espera-se que os alunos encontrem a extensão destes números para o campo dos números inteiros negativos, sendo eles: 1, -1, 2, -3, 5, -8, ... Em seguida, substituam estes números na definição de um número híbrido de Fibonacci ($HF_n = F_n + F_{n+1}i + F_{n+2}\varepsilon + F_{n+3}h$), ou seja, para $n = -1$, tem-se: $HF_{-1} = F_{-1} + F_0i + F_1\varepsilon + F_2h = 1 + \varepsilon + h$ e assim sucessivamente. Com isso, obtêm os números negativos dos números híbridos de Fibonacci.

Situação de formulação: Com o suporte nos números negativos híbridos ou pela recorrência híbrida de Fibonacci espera-se que os alunos, por meio de manipulações algébricas e deduções matemáticas, obtenham a relação de recorrência para o campo dos números inteiros negativos, ou seja, pretende-se que os alunos encontrem a seguinte recorrência: $HF_{-n} = HF_{-n+1} + HF_{-n+2}$, $n > 1$.

Situação de validação: A partir da recorrências dos números híbridos de Fibonacci, $HF_{n+1} = HF_n + HF_{n-1}$, percebe-se que a condição atribuída à esta relação é $n \geq 1$. Com isso, espera-se que os alunos percebam que ao utilizar $n = 0$, obtêm-se $HF_1 = HF_0 + HF_{-1} \therefore HF_{-1} = HF_1 - HF_0$, criando assim uma nova condição, $n < 1$. Assim, ao utilizar essas condições, os alunos deverão perceber que serão obtidos os números híbridos de Fibonacci com índices inteiros negativos e, por meio de dedução, formalizar a recorrência para estes números.

Situação de institucionalização: O docente retoma o domínio da situação didática, com o intuito de analisar as soluções encontradas pelos alunos e verificar a sua validade. É neste momento que o docente apresenta aos estudantes o objetivo da atividade proposta, relatando a obtenção da extensão para o campo dos números inteiros negativos da sequência híbrida de Fibonacci, evidenciando o seu processo evolutivo-matemático.

A seguir, na situação-problema 2, será discutida a fórmula de Binet da sequência híbrida de Fibonacci.

Situação-problema 2: A partir da equação característica da sequência híbrida de Fibonacci, $x^2 - x - 1 = 0$, em que possui duas raízes reais $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. É possível obter uma função, conhecida pela fórmula variante de Binet, em que a partir desta função se possa obter os termos dessa sequência híbrida sem utilizar a recorrência?

Situação de ação: Nesta fase os alunos têm que tomar como base a fórmula geral de Binet, apresentada por: $f(n) = Ax_1^n + Bx_2^n + \dots + Wx_z^n$, em que $A, B, \dots, W$ são os coeficientes e $x_1, x_2, \dots, x_z$ as raízes do polinômio característico da sequência (WHITFORD, 1977). Com isso, os alunos deverão perceber que a fórmula variante de Binet para a sequência híbrida de Fibonacci será da forma $HF_n = Ax_1^n + Bx_2^n$.

Situação de formulação: A partir da fórmula encontrada anteriormente, os estudantes precisarão realizar manipulações algébricas, com o intuito de encontrar duas equações distintas, que irão compor um sistema linear de equações, do tipo:

$$\begin{cases} A + B = HF_0 \\ Ax_1 + Bx_2 = HF_1 \end{cases}$$

Situação de validação: Nesta fase, os alunos irão solucionar o sistema linear de equações por meio da substituição ou escalonamento, encontrando os valores das constantes A e B , sendo estas iguais a: $A = \frac{HF_1 - HF_0x_2}{x_1 - x_2}$ e $B = \frac{HF_0x_1 - HF_1}{x_1 - x_2}$. Com isso, devem

realizar a substituição das constantes na fórmula geral de Binet, resultando assim:

$$HF_n = \frac{(HF_1 - HF_0x_2)x_1^n - (HF_1 - HF_0x_1)x_2^n}{x_1 - x_2}.$$

Ademais, já conhecendo os valores das raízes da equação característica, é possível que sejam substituídos valores para a variável n , encontrando os termos da sequência híbrida de Fibonacci sem a necessidade de utilizar a relação de recorrência.

Situação de institucionalização: Neste momento, o docente retoma a situação e analisa as soluções alcançadas pelos estudantes, efetivando a existência da fórmula de Binet da sequência híbrida de Fibonacci. O docente revela que a partir desta fórmula, é possível adquirir os termos da sequência híbrida de Fibonacci, sem exigir a sua recursividade.

Dando continuidade a sequências lineares recursivas, abordaremos a sequência de Leonardo. Com isso, na situação-problema a seguir, a partir da relação dos números híbridos de Leonardo com os números híbridos de Fibonacci exibiremos a fórmula de Binet de Leonardo.

Situação-problema 3: Dada a relação dos números híbridos de Leonardo com o de Fibonacci $HLe_n = 2HF_{n+1} - (1 + i + \varepsilon + h)$ e a fórmula de Binet dos números híbridos de Fibonacci, $HF_n = Ax_1^n + Bx_2^n$, sendo $A = \frac{HF_1 - HF_0x_2}{x_1 - x_2}$ e $B = \frac{HF_0x_1 - HF_1}{x_1 - x_2}$. Determine a fórmula de Binet para a sequência híbrida de Leonardo.

Situação de ação: Na situação de ação deste situação problema, os alunos devem buscar a fórmula de Binet para os números híbridos de Leonardo, a qual será encontrada após relacionar a fórmula de Binet para os números de Fibonacci com a relação existente entre esses dois números híbridos.

Situação de formulação: Os estudantes deverão perceber que a partir da fórmula de Binet de Fibonacci, $HF_n = \frac{Ax_1^n - Bx_2^n}{x_1 - x_2}$, pode-se encontrar HF_{n+1} , somando apenas uma unidade em seu índice, e assim, substituir essa fórmula encontrada na relação entre os números híbridos de Leonardo e os números híbridos Fibonacci, $HLe_n = 2HF_{n+1} - (1 + i + \varepsilon + h)$ e, após realizar manipulações algébricas resultará em uma nova fórmula conhecida como fórmula de Binet, esta fórmula é dada por: $HLe_n = \frac{2Ax_1^{n+1} - 2Bx_2^{n+1} - (x_1 - x_2)(1 + i + \varepsilon + h)}{x_1 - x_2}$, em que $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ são as raízes da equação característica da sequência.

Situação de validação: Os estudantes deverão utilizar o princípio de indução finita, comprovando a validade desta fórmula.

Situação de institucionalização: O professor retomará a situação conferindo os resultados apresentados e evidenciando a existência de relações entre os números híbridos de Leonardo e os números híbridos de Fibonacci e como essas relações são importantes para resultados futuros.

Dando continuidade aos estudos em torno da hibridização de sequências, a seguir, apresentaremos a função geradora da sequência híbrida de Mersenne.

Situação-problema 4: Sabendo que a função geradora permite a resolução de recorrências lineares com coeficientes constantes. Encontre a função geradora da Sequência Híbrida de Mersenne a partir da sua relação de recorrência e da função abaixo realizando manipulações algébricas.

$$\begin{aligned} G_{HM_n}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} HM_n x^n \\ &= HM_0 + HM_1 x + HM_2 x^2 + \cdots + HM_n x^n + \cdots \end{aligned}$$

Situação de ação: Para encontrar a função geradora de Mersenne, os alunos devem observar a relação de recorrência da sequência, atentando as constantes presentes na fórmula e seus respectivos sinais, e assim realizar operações na série apresentada previamente.

Situação de formulação: Nesta etapa é esperado que os alunos tenham realizado algumas observações, como: o fato de que, inicialmente, seria interessante igualar a recorrência ao zero, assim será identificado qual sinal a constante carrega na hora de realizar as manipulações e também perceber que a função geradora será a soma dos termos de três funções distintas. Assim, devem encontrar a seguinte função: $G_{HM_n} = \frac{HM_0 + (HM_1 - 3HM_0)x}{1 - 3x + 2x^2}$.

Situação de validação: A partir da função descrita no enunciado deve-se multiplicá-la por $-3x$ e $2x^2$ encontrando as seguintes funções:

$$\begin{aligned} G_{HM_n}(x) &= HM_0 + HM_1 x + HM_2 x^2 + \cdots + HM_n x^n + \cdots \\ -3x G_{HM_n}(x) &= -3x HM_0 - 3HM_1 x^2 - 3HM_2 x^3 - \cdots - 3HM_n x^{n+1} + \cdots \\ 2x^2 G_{HM_n}(x) &= 2x^2 HM_0 + 2x^3 HM_1 + 2x^4 HM_2 + \cdots + 2x^{n+2} HM_n + \cdots \end{aligned}$$

Somando cada membro, tem-se que:

$$\begin{aligned} (1 - 3x + 2x^2) G_{HM_n}(x) &= HM_0 + (HM_1 - 3HM_0)x + (HM_2 - 3HM_1 + 2HM_0)x^2 + \cdots + \\ &\quad HM_n x^n + \cdots \\ (1 - 3x + 2x^2) G_{HM_n}(x) &= HM_0 + (HM_1 - 3HM_0)x \\ G_{HM_n}(x) &= \frac{HM_0 + (HM_1 - 3HM_0)x}{1 - 3x + 2x^2} \end{aligned}$$

Situação de institucionalização: Por fim, o professor deve institucionalizar, ou seja, formalizar que existe uma série em que os seus coeficientes obtêm informações sobre uma sucessão, conhecida como função geradora, vinculada aos números híbridos de Mersenne.

Quanto a hipercomplexificação de sequências, será apresentado uma situação-problema em torno dos números bidimensionais de Leonardo, em que foi apresentado

previamente as recorrências bidimensionais dada por

$$\begin{cases} Le(n+1, m) = 2Le(n, m) - Le(n-2, m) \\ Le(n, m+1) = 2Le(n, m) - Le(n, m-2) \end{cases}$$

e seus termos iniciais $Le(n, 0) = Le(n)$ e $Le(0, m) = Le(m) + \left(\frac{Le(m-1+1)}{2}\right)i$.

Situação-problema 5: A partir das relações recorrentes bidimensionais de Leonardo, seus termos iniciais, $Le(n, 0)$ e $Le(0, m)$. Estabeleça as propriedades para $Le(1, m)$ e $Le(n, 1)$ para os números bidimensionais de Leonardo. Demonstre-as.

Situação de ação: Os alunos devem utilizar as recorrências dada previamente e deve-se perceber que para encontrar $Le(n, 1)$ irá utilizar a recorrência $Le(n+1, m) = 2Le(n, m) - Le(n-2, m)$ pois irá fixar $m = 1$ e variar n . De forma análoga, para encontrar $Le(1, m)$ será utilizado a recorrência em que fixará $n = 1$ e variar m .

Situação de formulação: Os estudantes deverão utilizar os termos encontrados anteriormente e daí, os alunos deverão alcançar, de modo intuitivo, um padrão entre os termos descobertos e irão apresentar a propriedade solicitada. Assim, os alunos deverão apresentar que $Le(n, 1) = Le(n) + \left(\frac{Le(n)+1}{2}\right)i$ e $Le(1, m) = Le(m) + \left(\frac{Le(m-1)+1}{2}\right)i$.

Situação de validação: Os estudantes deverão mostrar, pelo método de indução matemática sobre n e sobre m , fixando o valor do número natural, que a propriedade encontrada é válida para 1, supor que é válida para k e mostrar que é válida para todo $k+1$. Com isso, a propriedade estará demonstrada matematicamente.

Situação de institucionalização: O professor retoma a situação didática e verifica as resoluções dos alunos e revela que a partir de dois conteúdos matemáticos distintos pode realizar uma ligação entre ambos e gerar um novo conteúdo a ser explorado, iniciando o processo de complexificação da sequência de Leonardo.

Situação-problema 6: Com base nas propriedades encontradas anteriormente, é possível estabelecer uma relação para os números na forma $Le(n, m)$, em que os dois inteiros, $n, m \in \mathbb{N}$? Demonstre.

Situação de ação: Tendo conhecimento das propriedades visto na situação anterior, $Le(1, m)$ e $Le(n, 1)$, os estudantes poderão encontrar os termos $Le(n, 2)$, $Le(n, 3)$, $Le(n, 4)$ e encontrar um padrão existente entre essas propriedades, analisando os termos já obtidos e formalizar a relação $Le(n, m)$. Salienta-se que os alunos também podem trabalhar com os termos $Le(2, m)$, $Le(3, m)$ $Le(4, m)$.

Situação de formulação: Com base nas propriedades fornecidas, e nas calculadas, os estudantes deverão perceber, de modo intuitivo, que para os dois inteiros, $n, m \in \mathbb{N}$, os números na forma $Le(n, m)$ formam a relação bidimensional: $Le(n, m) = \left[Le_n \cdot \frac{Le_m+1}{2} + \frac{Le_m+1}{2} - 1\right] + \frac{Le_n+1}{2} \cdot \frac{Le_{m-1}+1}{2}i$.

Situação de validação: Semelhantemente a situação anterior, os estudantes deverão mostrar, pelo método de indução matemática sobre n e, também, sobre m , fixando o valor do número natural, que a propriedade encontrada é válida para 1, supor que é válida para k e mostrar que é válida para todo $k + 1$.

Situação de institucionalização: É o momento em que o professor verifica as resoluções dos estudantes e, revela o início do processo de complexificação da sequência de Leonardo, obtendo as relações bidimensionais destes números, a partir da inserção de uma unidade imaginária.

4.3 Experimentação

A fase da experimentação ocorreu no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), campus Fortaleza, no curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de HM obrigatória para o sexto semestre. Esta pesquisa possui o parecer aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) (Anexo C), sendo então disponibilizado o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) (Apêndice B), na qual, foram assinados pelos oito alunos participantes, sendo três mulheres e cinco homens, desta pesquisa, ressalta-se que o IFCE disponibilizou *chips* com dados móveis e *tablets* para aqueles que não possuíam acesso à internet.

Inicialmente a aplicação seria realizada presencialmente, porém devido a situação atual do país, em consequência do novo coronavírus (COVID-19), as aulas foram realizadas de forma *online*. Durante este momento, é necessário um contato com os estudantes participantes da pesquisa, contudo foi utilizado o recurso do *Google Meet*, sendo este recurso de fácil acesso e disponibilizado de forma gratuita, para coletar os dados. Dessa forma, foram criadas salas de reuniões, e determinando um acordo de convivência entre os alunos e alunos e professor, foram estabelecido algumas regras, tais como: o uso do microfone ser somente quando os participantes estiverem discutindo as resoluções; ao necessitar falar, utilizar o recurso "levantar a mão"; e, utilizar folhas de rascunhos para as resoluções das questões. Foram realizadas oito aulas remotas e cada aula teve duração de duas horas e foram realizadas através de situações didáticas fundamentadas na TSD. As situações-problema foram desenvolvidas por meio de listas de exercícios, as quais foram enviadas aos alunos no início da aula.

Foi apresentado o conjunto dos números híbridos e a abordagem histórica e evolutiva da sequência que será trabalhada. Logo mais, as situações-problema foram apresentadas e os estudantes buscaram uma solução com base nos conhecimentos prévios e, às vezes, levantando questionamentos na plataforma. Nesta fase, foi necessário registrar as ações dos estudantes, por meio de *prints* da tela do computador, retiradas no momento em que determinados participantes estão explicando a sua resolução para os demais colegas e

gravação de vídeo. Foi ainda solicitado, que os estudantes enviassem as fotos das soluções desenvolvidas pelo aplicativo *WhatsApp* ou via e-mail.

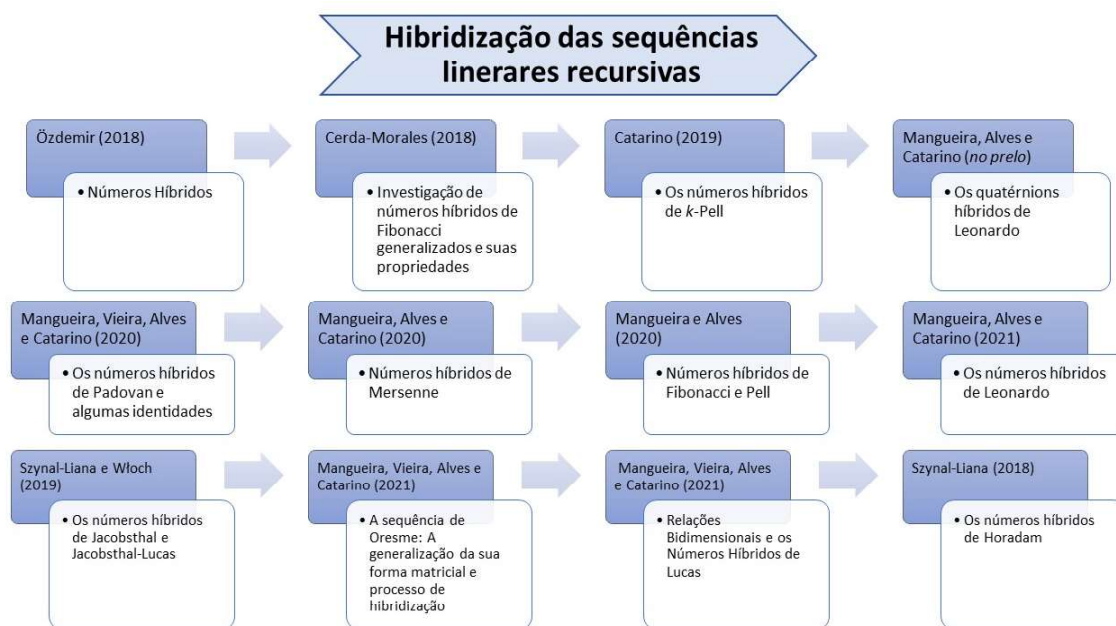
No capítulo a seguir, serão apresentados os dados e resultados coletados durante a execução da TSD e discutidos, baseados nas produções mais relevantes para a validação desta pesquisa.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Nesta última etapa, na análise dos dados que foram coletados durante a experimentação desta pesquisa, é feita de acordo com a fase de análise *a posteriori* da ED, tendo como suporte a TSD, e com o intuito de realizar a validação interna desta pesquisa. Dessa forma, a seguir, serão descritas observações relevantes pertinentes aos momentos de aplicação.

A Figura 20 ilustra o processo evolutivo da hibridização das sequências lineares recursivas, ressaltando que a hibridização vem sendo estudada nos últimos anos, nesta figura apresentamos o trabalho dos NH, produzido pelo Özdemir (2018) e posteriormente obras de diversos autores que associaram os NH com sequências.

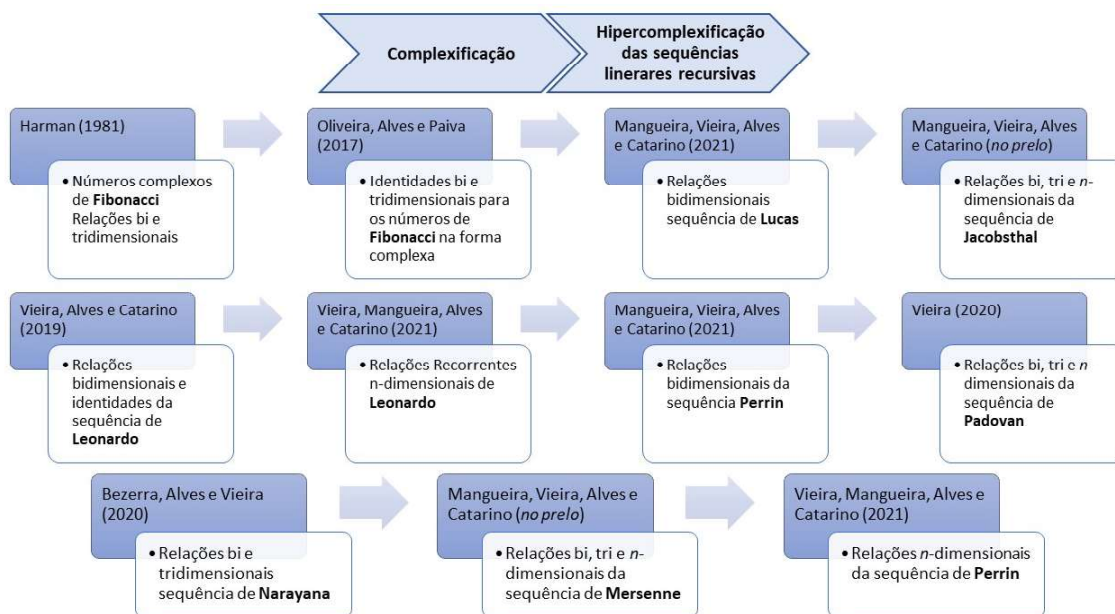
Figura 20 – Processo evolutivo da hibridização das sequências lineares.



Fonte: Elaborado pela autora

Quanto o processo de hipercomplexificação, é utilizado o artigo base de Harman (1981) e posteriormente vem sendo trabalhado por outros autores, esse processo consiste em inserir unidades imaginárias e o aumento de dimensional das sequências.

Figura 21 – Processo evolutivo da hipercomplexificação das sequências lineares.



Fonte: Elaborado pela autora

Com o intuito de realizar uma transposição didática sobre o processo de hibridização e hipercomplexificação das sequências, desenvolveram-se situações-didáticas a partir de alguns conteúdos e que foram utilizados na fase de experimentação.

E ainda, após a análise *a posteriori*, é imprescindível que tenha uma validação dos dados colhidos na fase de experimentação da ED, assim será realizado uma comparação dos resultados obtidos e discutidos pelos discentes com o que foi previsto na análise *a priori*, levantando possíveis questionamentos e analisando o progresso, ou não, da engenharia sugerida.

Assim, na próxima seção são apresentadas as análises *a posteriori* a partir do que foi registrado na experimentação, com base na ED e TSD, e a validação interna desta pesquisa.

5.1 Análise *a Posteriori* e Validação Interna da Pesquisa

As situações didáticas foram desenvolvidas de forma remota com os alunos, através das atividades compostas por questões norteadoras, com o intuito de que as questões instigassem os alunos a comprometer-se a solucionar as situações, isto é, realizar a efetivação do contrato didático. E ainda, as situações-problema abordam a construção de teoremas e propriedades, além de possibilitar a compreensão do processo de hibridização e hipercomplexificação das sequências lineares recursivas.

Nesse sentido, será realizado uma análise *a posteriori* avaliando e analisando os resultados que serão obtidos, considerando algumas variáveis didáticas, para que ocorra uma contribuição de conhecimento didático durante a transmissão do conteúdo. E ainda, a validação desta pesquisa é de forma interna, ou seja, não é realizado uma comparação dos dados coletados com produções externas, fundamentada na ED, por meio dos resultados adquiridos da aplicação das situações didáticas.

A *situação-problema 1*, tem como objetivo apresentar a fórmula de recorrência para os números híbridos de Fibonacci, com índices negativos. Assim, foi apresentado a definição da recorrência da sequência híbrida de Fibonacci e a definição do seu número híbrido, dando uma base teórica os alunos, com o intuito de que eles pudessem resolver a situação proposta. Nesse sentido, os alunos decidiram, *a priori*, encontrar os primeiros termos negativos da sequência híbrida de Fibonacci, com o intuito de encontrar alguma relação entre esses termos e conseguir formular a sua recorrência. Para isso, foi utilizado os termos negativos da sequência de Fibonacci e o número híbrido de Fibonacci, assim eles fizeram para $n = -1$ tem-se $HF_{-1} = F_{-1} + F_0i + F_1\varepsilon + F_2h$ e assim sucessivamente até HF_{-6} , como podemos ver na Figura 22, em que o aluno A encontrou os 6 primeiros termos híbridos negativos de Fibonacci. Assim, o aluno A apresentou uma relação para os números híbridos negativos de Fibonacci porém, o professor percebeu que ao utilizar essa relação e aplicar $n = 1$ não é possível encontrar HF_{-1} de forma correta. E ainda, foi possível observar uma dificuldade dos alunos de identificar o que a situação proposta almejava.

Figura 22 – Fase de ação e formulação pelo aluno A.

Handwritten mathematical work by student A showing the derivation of the recurrence formula for negative hybrid Fibonacci numbers. The work includes calculations for HF_{-1} through HF_{-6} and a general formula for HF_n .

$$\begin{aligned}
 HF_{-1} &= 1 + \varepsilon + h = \cancel{-F_2 + F_1i + F_0\varepsilon + F_{-1}h} \\
 HF_{-2} &= -1 + i + h = \cancel{F_3 - F_2i + F_1\varepsilon + F_0h} \\
 HF_{-3} &= 2 - i + \varepsilon = \cancel{F_4 - F_3i + F_2\varepsilon} \\
 HF_{-4} &= -3 + 2i + h = -F_5 + F_4i - F_3\varepsilon + F_2h \\
 HF_{-5} &= 5 - 3i - \varepsilon + h = F_6 - F_5i + F_4\varepsilon - F_3h \\
 HF_{-6} &= -8 + 5i + 3\varepsilon + 2h = -F_7 + F_6i - F_5\varepsilon + F_4h
 \end{aligned}$$

Assim podemos perceber que

$$HF_n = (-1)^{n-1} F_{n+1} + (-1)^n F_{n+2}i + (-1)^{n-1} F_{n+3}\varepsilon + (-1)^n F_{n+4}h$$

para $n > 3$, e $HF_{-3} = 2 - i + \varepsilon$, $HF_{-2} = -1 + i + h$ e $HF_{-1} = 1 + \varepsilon + h$

Fonte: Dados da pesquisa

Nesse sentido, os alunos procuraram outra estratégia de resolução, a princípio, obtiveram dificuldade na obtenção da recorrência dos termos híbridos negativos, uma vez

que o comportamento da recorrência não é similar aos termos positivos. Assim, o aluno B utilizou o raciocínio de que, para encontrar um número híbrido inteiro positivo, soma-se os seus dois números anteriores. Dessa maneira, para a sua extensão dos números inteiros negativos, o aluno realizou a operação contrária, a subtração dos seus antecessores. Assim, para validar essa estratégia, foi utilizado a recorrência $HF_n = HF_{n-1} + HF_{n-2}$, como podemos ver na Figura 23, ao substituir $n = 1$ apareceu o termo HF_{-1} . Dessa forma, o aluno isolou esse termo e percebeu que o primeiro termo híbrido negativo de Fibonacci é a subtração do termo HF_1 por HF_0 , confirmando a estratégia pensada. Sendo assim, o aluno realizou o mesmo processo para termos seguintes e conseguiu formalizar uma nova recorrência para os números híbridos inteiros negativos de Fibonacci, apresentada por $HF_{-n} = HF_{-n+2} - HF_{-n+1}$.

Figura 23 – Fase de validação pelo aluno B.

1) Temos que $HF_n = HF_{n-1} + HF_{n-2}$, Assim

$$HF_1 = HF_0 + HF_{-1} \Rightarrow HF_{-1} = HF_1 - HF_0$$

$$HF_0 = HF_{-1} + HF_{-2} \Rightarrow HF_{-2} = HF_0 - HF_{-1}$$

$$HF_{-1} = HF_{-2} + HF_{-3} \Rightarrow HF_{-3} = HF_{-1} - HF_{-2}$$

Assim, podemos perceber que $HF_{-n} = HF_{(-n+2)} - HF_{(-n+1)}$

Fonte: Dados da pesquisa

Na *situação-problema 2*, tem por objetivo estabelecer a fórmula variante de Binet para os números híbridos de Fibonacci, apresentando inicialmente o conceito da fórmula de Binet para sequências lineares recursivas e a equação característica desses números. Essas informações, apresentadas previamente, servem como suporte para que os alunos consigam resolver a situação-problema proposta.

Na Figura 24, tem-se a fase da ação e formulação acontecendo pelo Aluno B, onde este utiliza a fórmula de Binet geral dada pela equação $HF_n = A\alpha^n + B\beta^n$, $n \geq 0$ na qual α e β são as raízes da equação característica. Com isso, os alunos perceberam que é possível substituir $n = 0$ e $n = 1$, na fórmula geral de Binet e, assim, encontrar duas novas equações, montando um sistema linear com essas equações.

Diante disso, temos que este aluno, inicialmente, substituiu HF_0 por $i + \varepsilon + 2h$ e HF_1 por $1 + i + 2\varepsilon + 3h$, percebendo, que seria mais difícil utilizar várias variáveis, tornando a situação mais propícia ao erro. Assim, o aluno retomou ao uso dos termos HF_0 e HF_1 .

Portanto, na Figura 24, verifica-se as fases de ação e formulação pelo aluno B, em que foi possível montar o sistema linear.

Figura 24 – Fase de ação e formulação pelo aluno B.

Handwritten mathematical work by student B showing the derivation of a linear recurrence relation and its solution:

$$2) \quad x^2 - x - 1 = 0, \quad \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \dots + C_k a_{n-k}, \quad \text{com } C_1, C_2, \dots, C_k \in \mathbb{R} \quad C_k \neq 0$$

$$HF_n = C_1 HF_{n-1} + C_2 HF_{n-2}, \quad \text{para } C_1 = \alpha \quad \text{e} \quad C_2 = \beta, \quad \text{temos}$$

$$HF_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \cdot A + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) B$$

$$HF_n = A \alpha^n + B \beta^n, \quad \text{para } n=0$$

$$HF_0 = A \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^0 + B \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^0 \Rightarrow 1 + \varepsilon + 2h = A + B$$

p/ n=1

$$HF_1 = A \alpha + B \beta \Rightarrow 1 + 1 + 2\varepsilon + 3h = A \alpha + B \beta$$

$$\begin{cases} A \alpha + B \beta = 1 + 1 + 2\varepsilon + 3h \Rightarrow (HF_0 - B) \alpha + B \beta = HF_1 \\ A + B = 1 + \varepsilon + 2h \Rightarrow A = HF_0 - B \end{cases}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Nesse sentido, na Figura 25, o aluno B realizou a validação da situação proposta. O aluno isolou o termo A , encontrando $A = HF_0 - B$, e substituindo na primeira equação do sistema linear. Com isso, foi possível encontrar os coeficientes A e B , como podemos ver na resolução abaixo.

Figura 25 – Fase de validação pelo aluno B.

Handwritten mathematical work by student B showing the validation of the solution for A and B :

$$\begin{cases} A \alpha + B \beta = 1 + 1 + 2\varepsilon + 3h \Rightarrow (HF_0 - B) \alpha + B \beta = HF_1 \\ A + B = 1 + \varepsilon + 2h \Rightarrow A = HF_0 - B \end{cases}$$

$$HF_0 \alpha - B \alpha + B \beta - HF_1 \Rightarrow B(\beta - \alpha) = HF_1 - HF_0 \alpha$$

$$B = \frac{HF_1 - HF_0 \alpha}{(\beta - \alpha)} \quad \text{e} \quad A = HF_0 - \left(\frac{HF_1 - HF_0 \alpha}{(\beta - \alpha)} \right) \Rightarrow$$

$$A = \frac{(\beta - \alpha) HF_0 + HF_0 \alpha - HF_1}{(\beta - \alpha)} \Rightarrow A = \frac{HF_0 (\beta - \alpha + \alpha) - HF_1}{\beta - \alpha}$$

$$A = \frac{HF_0 \beta - HF_1}{(\beta - \alpha)}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Finalmente, na Figura 26, podemos ver a fórmula variante de Binet para os números híbridos de Fibonacci.

Figura 26 – Fase de validação pelo aluno C.

Handwritten mathematical formulas for the Binet variant of hybrid Fibonacci numbers. The first formula is labeled 'Assim,' and the second is labeled 'ou ainda,'.

$$\text{Assim, } HF_n = \frac{HF_0\beta - HF_1\alpha^n}{\beta - \alpha} + \frac{HF_1 - HF_0\alpha}{\beta - \alpha} \beta^n$$

$$\text{ou ainda, } HF_n = \frac{HF_1 - HF_0\beta}{\alpha - \beta} \alpha^n - \frac{HF_1 - HF_0\alpha}{\alpha - \beta} \beta^n$$

Fonte: Dados da pesquisa

Assim, percebe-se na institucionalização, que o objetivo dessa atividade foi alcançado, pois compreendeu-se a existência da fórmula de Binet dos números híbridos de Fibonacci e o professor ressaltou a importância dessa fórmula, visto que esta é utilizada para obter os termos dessa sequência híbrida sem utilizar a recorrência.

Dando continuidade, temos a resolução da *situação-problema 3*, em que os estudantes se deparam com duas fórmulas, a primeira é uma relação entre os números híbridos de Fibonacci com os números híbridos de Leonardo e a segunda é a fórmula de Binet dos números híbridos de Fibonacci. Tem-se como objetivo principal desta questão apresentar a fórmula de Binet dos números híbridos de Leonardo a partir das informações apresentadas no enunciado.

Na Figura 27, o aluno B a princípio apresenta como se comporta o termo $2HF_{n+1}$ e ainda define que $\lambda = 1 + i + \varepsilon + h$, o aluno relata que utilizará λ ao invés do número híbrido com o intuito de trabalhar com um termo menor, evitando possíveis erros. Com isso, é realizado a substituição do termo $2HF_{n+1}$ na relação entre os números híbridos de Fibonacci com os números híbridos de Leonardo e, também, substitui o termo A por $HF_1 - HF_0x_2$ e o termo B por $HF_1 - HF_0x_1$. O aluno desenvolveu a fórmula, colocando em evidência termos semelhantes e multiplicando o denominador com o termo híbrido, encontrando a fórmula de Binet dos números híbridos de Leonardo, como podemos ver na resolução abaixo.

Figura 27 – Fase de ação e formulação pelo aluno B.

$$\begin{aligned}
 2HF_{n+1} &= \frac{2Ax_1^{n+1} - 2Bx_2^{n+1}}{x_1 - x_2}, \text{ digamos que } \lambda = 1 + i + \varepsilon + h \\
 HLe_n &= \frac{2Ax_1^{n+1} - 2Bx_2^{n+1}}{x_1 - x_2} - \lambda \\
 HLe_n &= \frac{2HF_1 x_1^{n+1} - 2HF_0 x_1^{(n+1)} x_2 - 2HF_1 x_2^{(n+1)} + 2HF_0 x_2^{(n+1)} x_1}{x_1 - x_2} - \lambda \\
 HLe_n &= \frac{2HF_1 [x_1^{n+1} - x_2^{n+1}] + 2HF_0 [x_2^{(n+1)} x_1 - x_1^{(n+1)} x_2]}{x_1 - x_2} - \lambda \\
 HLe_n &= \frac{2HF_1 [x_1^{n+1} - x_2^{n+1}] + 2HF_0 [x_2^{n+1} x_1 - x_1^{n+1} x_2]}{x_1 - x_2} - (1 + i + \varepsilon + h)(x_1 - x_2)
 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Nesse sentido, para validar a estratégia de solução, o aluno D utilizou o princípio de indução finita, ou seja, verificou se a fórmula é válida para $n = 1$, como podemos ver na Figura 28. Ressalta-se que o aluno D, diferentemente do aluno B, utiliza $P = 1 + i + \varepsilon + h$ e recorreu a propriedades em torno das raízes da equação característica.

Figura 28 – Fase de validação pelo aluno D.

$$\begin{aligned}
 &\text{Por indução, para } n=1 \\
 HLe_1 &= \frac{2HF_1(x_1^2 - x_2^2) + 2HF_0 x_1 x_2 (x_2 - x_1) - (x_1 - x_2)P}{x_1 - x_2} \\
 HLe_1 &= \frac{2HF_1[(x_1+1) - (x_2+1)] - 2HF_0 x_1 x_2 (x_1 - x_2) - (x_1 - x_2)P}{x_1 - x_2} \\
 HLe_1 &= \frac{2HF_1(x_1 - x_2) + 2HF_0(x_1 - x_2) - (x_1 - x_2)P}{x_1 - x_2} \\
 HLe_1 &= \frac{(x_1 - x_2) \cdot (2HF_1 + 2HF_0 - P)}{x_1 - x_2} \\
 HLe_1 &= 2HF_1 + 2HF_0 - (1 + i + \varepsilon + h) \\
 HLe_1 &= 2(HF_1 + HF_0) - (1 + i + \varepsilon + h) \\
 HLe_1 &= 2HF_2 - (1 + i + \varepsilon + h)
 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Dando continuidade a fase de validação, tem-se na Figura 29 a segunda etapa do princípio da indução finita.

Figura 29 – Fase de validação pelo aluno D.

Admitindo que é válido para m

$$H_{Lem} = \frac{2HF_1(X_1^{m+1} - X_2^{m+1}) + 2HF_0X_1X_2(X_2^m - X_1^m) - P(X_1 - X_2)}{X_1 - X_2}$$

Precisamos mostrar que é válido para $m+1$

$$H_{Lem+1} = \frac{2HF_1(X_1^{m+2} - X_1^{m+2}) + 2HF_0X_1X_2(X_2^{m+1} - X_1^{m+1}) - P(X_1 - X_2)}{X_1 - X_2}$$

$$H_{Lem+1} = \frac{2HF_1X_1^{m+2} - 2HF_1X_2^{m+2} + 2HF_0X_1X_2^{m+2} - 2HF_0X_1X_2^{m+2} - P(X_1 - X_2)}{X_1 - X_2}$$

$$H_{Lem+1} = \frac{2X_1^{m+2}(HF_1 - HF_0X_2) - 2X_2^{m+2}(HF_1 - HF_0X_1) - P(X_1 - X_2)}{X_1 - X_2}$$

$$H_{Lem+1} = 2 \left(\frac{AX_1^{m+2} - BX_2^{m+2}}{X_1 - X_2} \right) - P$$

$H_{Lem+1} = 2HF_{m+2} - P$, Sendo $P = (1 + i + \varepsilon + h)$

$H_{Lem+1} = 2HF_{m+2} - (1 + i + \varepsilon + h)$

Fonte: Dados da pesquisa

Ressalta-se o aluno D mostrou bastante dificuldade ao validar esta fórmula, pois apresentava resistência em utilizar o método de indução, porém, após discussões entre os alunos, os estudantes conseguiram realizar a validação da fórmula de Binet para os números híbridos de Leonardo.

Assim, percebe-se na institucionalização, que o objetivo dessa situação foi atingido, validando a hipótese apresentada pelos alunos durante as demais fases.

Utilizando os números híbridos de Mersenne, na *situação-problema 4* tem-se como objetivo apresentar a função geradora desses números, a partir da recorrência e da série dada no enunciado da questão. Nesse sentido, a princípio, os alunos apresentaram muitas dificuldades nessa situação pois não souberam como relacionar as duas informações dadas previamente. Com isso, o professor instruiu os alunos a observarem os coeficientes da recorrência e tentar associá-los à série dada.

Nessa situação, os alunos debateram bastante em como solucioná-la apresentando diversas idéias, desde de somar os coeficientes na série até realizar substituições dos valores dos coeficientes no n da série, até que um participante apresentou a idéia de multiplicar os coeficientes da recorrência na série (ver Figura 30) e encontrar um padrão entre os termos.

Figura 30 – Fase de ação e formulação pelo aluno E.

$\circ$ Dada $G(HM_n(x)) = HM_0 + \dots + 2HM_n x^n$
 $\hookrightarrow$ Multiplicamos por $2x^2$:
 $\textcircled{i}$ $2x^2 G(HM_n(x)) = 2HM_0 x^2 + \dots + 2HM_{n-2} x^n$
 $\hookrightarrow$ Multiplicamos por $(-3x)$:
 $\textcircled{ii}$ $-3x G(HM_n(x)) = -3HM_0 x + \dots + (-3)HM_{n-1} x^n$
 $\hookrightarrow$ Multiplicamos por (1) :
 $\textcircled{iii}$ $G(HM_n(x)) = HM_0 + \dots + HM_n x^n$

Fonte: Dados da pesquisa

Na Figura 31, podemos ver que o aluno E somou as equações encontradas a partir das manipulações algébricas realizadas anteriormente. Ao somar as equações, o aluno E relatou que não conseguia encontrar uma função sucinta, devido ser uma soma de n fatores e assim acreditava que sua resposta estava errada. Com isso, outro aluno observou que alguns termos seriam anulados devido a recorrência da sequência híbrida de Mersenne. A partir desta observação, o aluno E deu continuidade à situação, encontrando a função requerida, assim validando a situação aplicada.

Figura 31 – Fase de validação pelo aluno E.

$\{ \textcircled{i} + \textcircled{ii} + \textcircled{iii} \}$
 $\Rightarrow G(HM_n(x))(2x^2 - 3x + 1) = HM_0 + (HM_1 - 3HM_0)x + (2HM_0 - 3HM_1 + HM_2)x^2$
 $+ \dots + (2HM_{n-2} - 3HM_{n-1} + HM_n)x^n$
 $G(HM_n(x)) = \frac{HM_0 + (HM_1 - 3HM_0)x}{2x^2 - 3x + 1}$

Fonte: Dados da pesquisa

Por fim, na institucionalização, o professor ressaltou que existe uma série em que os seus coeficientes obtêm informações sobre uma sucessão dos números híbridos de Mersenne, almejando o objetivo da situação proposta.

Dando início as situações de hipercomplexificação de sequências, tem-se na *situação-problema 5* os bidimensionais da sequência de Leonardo que tem-se como objetivo estabelecer as propriedades para $Le(1, m)$ e $Le(n, 1)$. Logo, foi apresentada duas recorrências que

satisfação os bidimensionais de Leonardo, com a inserção da unidade imaginária i , e seus termos iniciais, dando um suporte teórico para os alunos. Assim, podemos perceber que na Figura 32 o aluno F escolheu a recorrência $Le(n, m+1) = 2Le(n, m) - Le(n, m-2)$ para utilizar, fixou $n = 1$ e variou m . Daí, o aluno percebeu uma relação entre os termos encontrado e formalizou quem é o $Le(1, m)$.

Figura 32 – Fase de ação e formulação pelo aluno F.

fixando $n=1$ e variando m

$$p/m=2 \quad Le(1, 2+1) = 2Le(1, 2) - Le(1, 0) = (3+i)2 - 1$$

$$Le(1, 3) = 5 + 2i$$

$$p/m=3 \quad Le(1, 3+1) = 2Le(1, 3) - Le(1, 1) = 2(5+2i) - (1+i)$$

$$Le(1, 4) = 9 + 3i$$

$$p/m=4 \quad Le(1, 4+1) = 2Le(1, 4) - Le(1, 2) = 2(9+3i) - (3+i)$$

$$Le(1, 5) = 15 + 5i$$

sendo Assim, podemos perceber que:

$$Le(1, m) = Le_m + \left(\frac{Le_{(m-1)} + 1}{2} \right) i$$

Fonte: Dados da pesquisa

Na Figura 33, para encontrar $Le(n, 1)$ o aluno F, de forma semelhante a anteriormente, utilizou a recorrência $Le(n+1, m) = 2Le(n, m) - Le(n-2, m)$, na qual fixou $m = 1$ e variou n . Encontrando assim uma relação entre os termos e encontrando o que foi proposto.

Figura 33 – Fase de ação e formulação pelo aluno F.

Agora fixando $m=1$ e variando n

$$p/n=2 \quad Le(2+1, 1) = 2Le(2, 1) - Le(0, 1) = 2(3+2i) - (1+i)$$

$$Le(3, 1) = 5 + 3i$$

$$p/n=3 \quad Le(3+1, 1) = 2Le(3, 1) - Le(1, 1) = 2(5+3i) - (1+i)$$

$$Le(4, 1) = 9 + 5i$$

$$p/n=4 \quad Le(4+1, 1) = 2Le(4, 1) - Le(2, 1) = 2(9+5i) - (3+2i)$$

$$Le(5, 1) = 15 + 8i$$

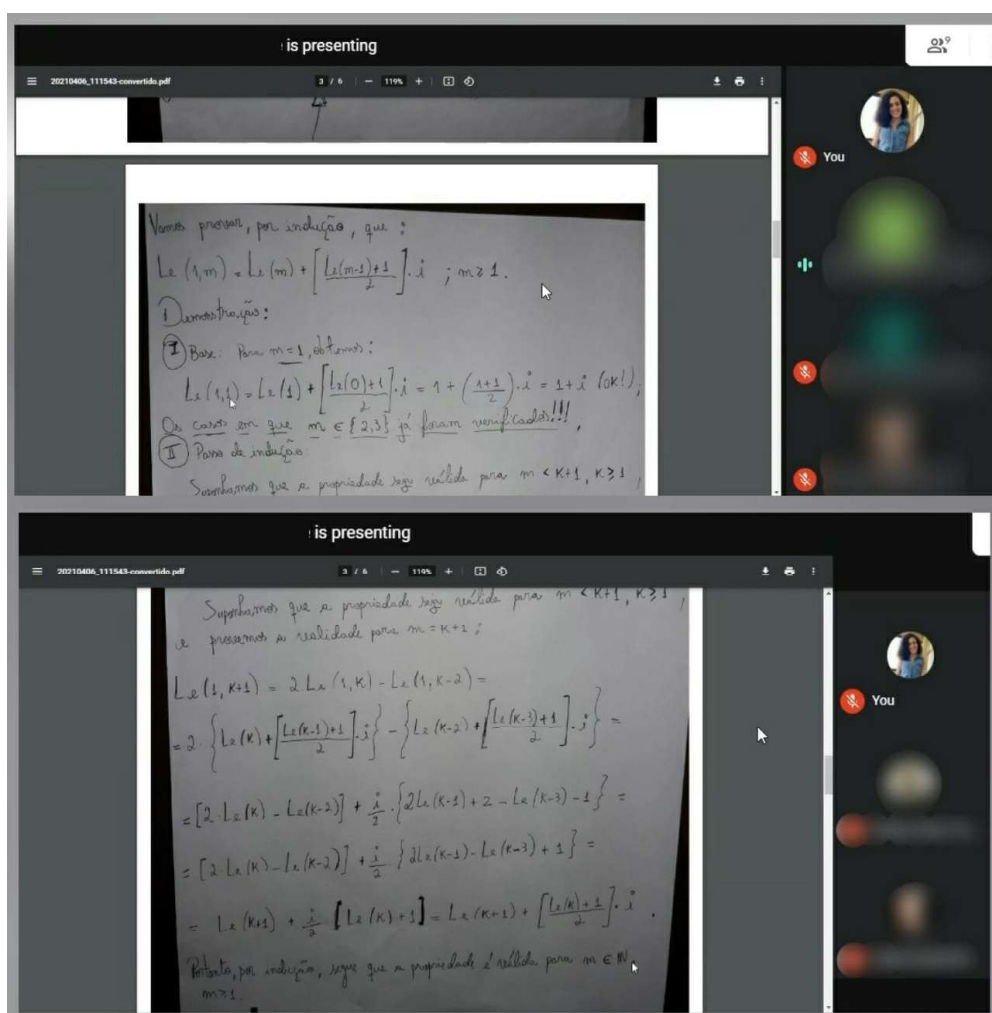
sendo Assim, podemos perceber que

$$Le(n, 1) = Le_n + \left(\frac{Le_n + 1}{2} \right) i$$

Fonte: Dados da pesquisa

Daí, para validar os resultados encontrados, podemos ver na Figura 34 um captura de tela da aula em que o aluno G utiliza o princípio de indução matemática para validar a propriedade encontrada. De início, na primeira etapa da indução, o aluno testou se a propriedade é válida para $m = 1$, após verificar a validade ele supôs que era válido para $m < k + 1$, $k \geq 1$ e verificou se é válido para $k + 1$. Durante a verificação o aluno apresentou dificuldades nas contas que foi desenvolvendo e relatou a dificuldade durante a aula, até que o aluno F percebeu que ao colocar em evidências alguns termos dava pra encontrar a recorrência da sequência de Leonardo e assim realizar uma substituição e validar a propriedade para $k + 1$. Comprovando assim, que a propriedade encontrada pelo aluno é válida.

Figura 34 – Fase de validação pelo aluno G.



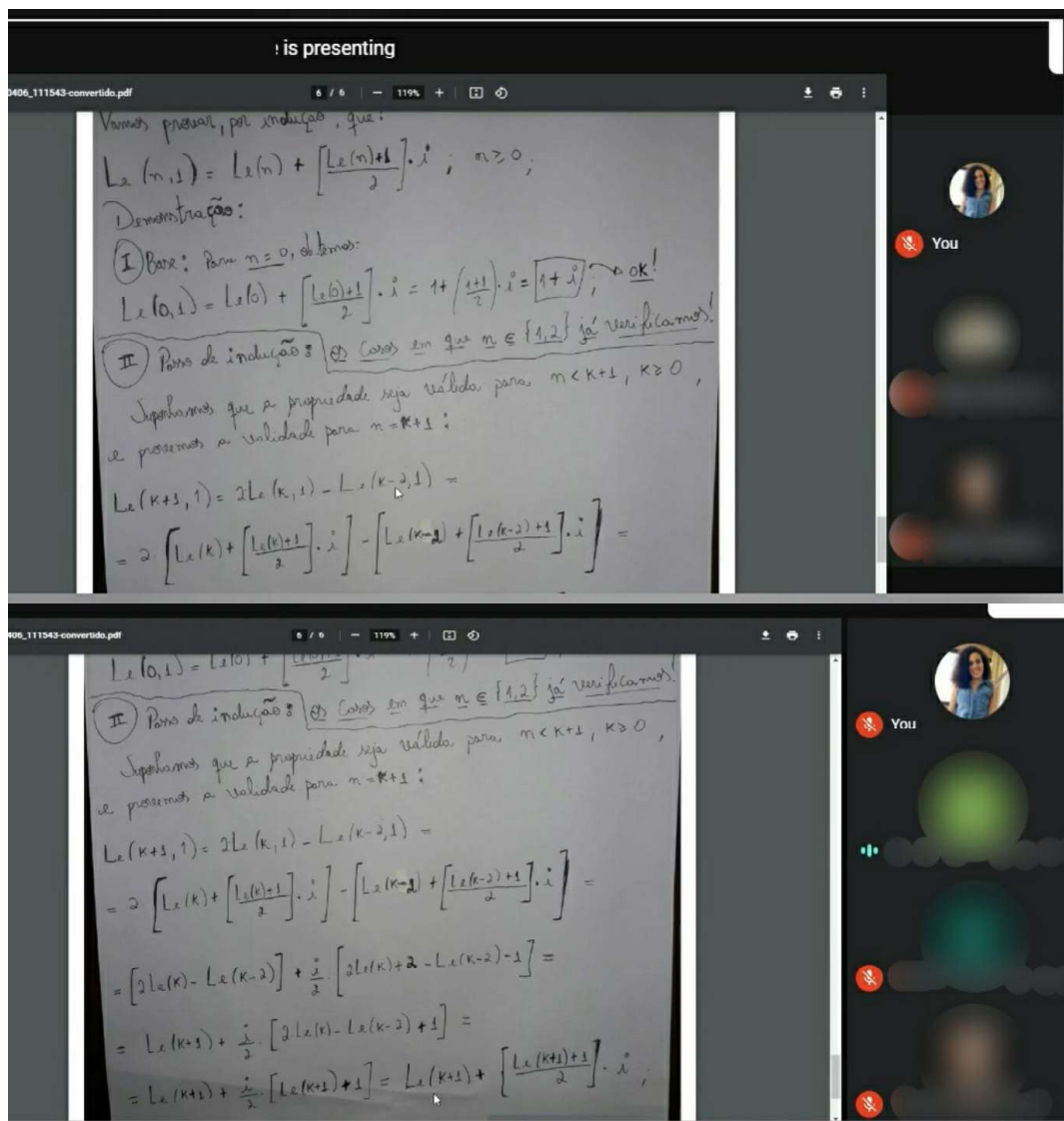
Fonte: Dados da pesquisa

Durante a explicação do aluno G para os colegas de como ele realizou o método de indução, outro aluno levantou o seguinte questionamento: “se na primeira etapa da indução fosse usado o $m = 0$, a propriedade ainda é válida?”. O questionamento surgiu

pois, nesse caso, aparece o termo Le_{-1} , assim o professor incentivou o aluno a encontrar os termos negativos da sequência de Leonardo, a qual foi encontrado $Le_{-1} = -1$ e ao substituir na equação o aluno conseguiu validar a propriedade.

E ainda, semelhantemente ao que foi realizado anteriormente, o aluno realizou a demonstração pelo método indutivo para $Le(n, 1)$, como podemos ver na Figura 35.

Figura 35 – Fase de validação pelo aluno G.



Fonte: Dados da pesquisa

Dando continuidade aos bidimensionais da sequência de Leonardo, na *Situação-problema 6* tem-se como objetivo estabelecer uma relação para os números bidimensionais na forma $Le(n, m)$, em que os dois inteiros $n, m \in \mathbb{N}$.

Tendo conhecimento das propriedades visto na situação anterior, $Le(1, m)$ e $Le(n, 1)$, o aluno G, a princípio encontrou os termos $Le(n, 2)$, $Le(n, 3)$, $Le(n, 4)$ com o intuito de

encontrar um padrão entre esses termos, como podemos ver na Figura 36.

Figura 36 – Fase de ação e formulação pelo aluno G.

$$\begin{aligned}
 \cdot \underline{Le(n, 2)} &= \left(2 \cdot Le(n) + 1 \right) + 1 \cdot \left(\frac{Le(n) + 1}{2} \right) \cdot i ; n \geq 0. \\
 \cdot \underline{Le(n, 3)} &= 2 \cdot Le(n, 2) - Le(n, 0) = \\
 &= 2 \cdot \left[\left(2 \cdot Le(n) + 1 \right) + 1 \cdot \left(\frac{Le(n) + 1}{2} \right) \cdot i \right] - Le(n) = \\
 &= 4 \cdot Le(n) + 2 - Le(n) + (Le(n) + 1) \cdot i = \\
 &= \left(3 \cdot Le(n) + 2 \right) + 2 \cdot \left(\frac{Le(n) + 1}{2} \right) \cdot i ; \\
 \cdot \underline{Le(n, 4)} &= 2 \cdot Le(n, 3) - Le(n, 1) = \\
 &= 2 \cdot \left[\left(3 \cdot Le(n) + 2 \right) + 2 \cdot \left(\frac{Le(n) + 1}{2} \right) \cdot i \right] - \left[Le(n) + \left(\frac{Le(n) + 1}{2} \right) \cdot i \right] = \\
 &= 6 \cdot Le(n) + 4 - Le(n) + 3 \cdot \left(\frac{Le(n) + 1}{2} \right) \cdot i = \\
 &= \left(5 \cdot Le(n) + 4 \right) + 3 \cdot \left(\frac{Le(n) + 1}{2} \right) \cdot i ;
 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Na Figura 37, o aluno G encontrou um padrão existente entre essas propriedades, analisando os termos já obtidos e formalizando a relação $Le(n, m)$. Com isso, tem-se que:

$$Le(n, m) = \left[Le_n \cdot \frac{Le_m + 1}{2} + \frac{Le_m + 1}{2} - 1 \right] + \frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_{m-1} + 1}{2} i.$$

Figura 37 – Fase de ação e formulação pelo aluno G.

Então, elaboramos a seguinte Conjectura:

$$Le(n, m) = \left[Le(n) \cdot \left(\frac{Le(m) + 1}{2} \right) + \left(\frac{Le(m) + 1}{2} \right) - 1 \right] + \left(\frac{Le(n) + 1}{2} \right) \cdot \left(\frac{Le(m-1) + 1}{2} \right) \cdot i$$

com $m \geq 0$ e $m \geq 1$.

Fonte: Dados da pesquisa

Para a validação, o aluno G utilizou o método de indução matemática sobre n e, também, sobre m . Na primeira etapa o aluno fixou n e realizou indução sobre m , na Figura 39 podemos ver a primeira etapa da indução.

Figura 38 – Fase de validação pelo aluno G.

Vamos mostrar que:

$$L_e(n, m) = \left[L_e(n) \cdot \left(\frac{L_e(m)+1}{2} \right) + \left(\frac{L_e(m)+1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{L_e(n)+1}{2} \right) \cdot \left(\frac{L_e(m-1)+1}{2} \right) \cdot i \right], \text{ com } m > 0 \text{ e } m \geq 1.$$

Demonstração:

Fixando m , vamos realizar a demonstração por indução sobre m .

(I) Base: Os casos $m=1$ e $m=3$ já verificamos. Na verdade, já mostramos que a propriedade é válida para $1 \leq m \leq 5$.

Fonte: Dados da pesquisa

Na Figura 39 tem-se o segundo passo da indução, onde o aluno supôs que é válido para $m < k+1$, $k \geq 1$ e prova a validade para $m = k+1$.

Figura 39 – Fase de validação pelo aluno G.

(II) Passo de indução: Suponhamos que a propriedade seja válida para $m < k+1$, $k \geq 1$, e provemos que isso implica na validade para $m = k+1$:

$$\begin{aligned} L_e(n, k+1) &= 2 \cdot L_e(n, k) - L_e(n, k-2) = \\ &= 2 \cdot \left[L_e(n) \cdot \left(\frac{L_e(k)+1}{2} \right) + \left(\frac{L_e(k)+1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{L_e(n)+1}{2} \right) \cdot \left(\frac{L_e(k-1)+1}{2} \right) \cdot i \right] \\ &\quad - \left[L_e(n) \cdot \left(\frac{L_e(k-2)+1}{2} \right) + \left(\frac{L_e(k-2)+1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{L_e(n)+1}{2} \right) \cdot \left(\frac{L_e(k-3)+1}{2} \right) \cdot i \right] = \\ &= L_e(n) \cdot \left(\frac{2L_e(k) - L_e(k-2) + 1}{2} \right) + \left(\frac{2 \left(\frac{L_e(k)+1}{2} - 1 \right) - \left(\frac{L_e(k-2)+1}{2} - 1 \right)}{2} \right) - 1 \\ &\quad + \left(\frac{L_e(n)+1}{2} \right) \cdot \left(\frac{2L_e(k-1) - L_e(k-3) + 1}{2} \right) \cdot i = \\ &= \left[L_e(n) \cdot \left(\frac{L_e(k)+1}{2} \right) + \left(\frac{L_e(k)+1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{L_e(n)+1}{2} \right) \cdot \left(\frac{L_e(k)+1}{2} \right) \cdot i \right]; \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Assim, dando continuidade a prova, o aluno fixa m e realiza a indução sobre n . Na Figura 40 tem-se a primeira etapa da indução, mostrando validade para $n = 0$.

Figura 40 – Fase de validação pelo aluno G.

parte 2: Fixando m , vamos realizar a demonstração por indução sobre n .

(I) Base: $n=0$:

$$L_e(0, m) = \left[L_e(0) \cdot \left(\frac{L_e(m)+1}{2} \right) + \left(\frac{L_e(m)+1}{2} \right) - 1 \right] + \left(\frac{L_e(0)+1}{2} \right) \cdot \left(\frac{L_e(m-1)+1}{2} \right) \cdot \lambda^0 =$$

$$= (L_e(m) + 1 - 1) + \left(\frac{L_e(m-1)+1}{2} \right) \cdot \lambda^0 = L_e(m) + \left(\frac{L_e(m-1)+1}{2} \right) \cdot \lambda^0 ;$$

OK!

Fonte: Dados da pesquisa

Por fim, na Figura 41, o aluno supôs que é válido para $n < k + 1$, $k \geq 1$ e prova a validade para $n = k + 1$. Portanto, o aluno G demonstrou a veracidade da relação bidimensional de Leonardo.

Figura 41 – Fase de validação pelo aluno G.

(II) Suponha que vale para $n \leq k$, $k \geq 0$, e provemos que valerá para $n = k + 1$:

$$L_e(k+1, m) = 2 \cdot L_e(k, m) - L_e(k-2, m) =$$

$$= 2 \cdot \left[L_e(k) \cdot \left(\frac{L_e(m)+1}{2} \right) + \left(\frac{L_e(m)+1}{2} \right) - 1 + \left(\frac{L_e(k)+1}{2} \right) \cdot \left(\frac{L_e(m-1)+1}{2} \right) \cdot \lambda^0 \right]$$

$$- \left[L_e(k-2) \cdot \left(\frac{L_e(m)+1}{2} \right) + \left(\frac{L_e(m)+1}{2} \right) - 1 + \left(\frac{L_e(k-2)+1}{2} \right) \cdot \left(\frac{L_e(m-1)+1}{2} \right) \cdot \lambda^0 \right] =$$

$$= (2 \cdot L_e(k) - L_e(k-2)) \cdot \left(\frac{L_e(m)+1}{2} \right) + \left(\frac{L_e(m)+1}{2} \right) - 1 +$$

$$+ \left(\frac{2L_e(k) - L_e(k-2) + 1}{2} \right) \cdot \left(\frac{L_e(m-1)+1}{2} \right) \cdot \lambda^0 =$$

$$= \left[L_e(k+1) \cdot \left(\frac{L_e(m)+1}{2} \right) + \left(\frac{L_e(m)+1}{2} \right) - 1 \right] + \left(\frac{L_e(k+1)+1}{2} \right) \cdot \left(\frac{L_e(m-1)+1}{2} \right) \cdot \lambda^0 ;$$

Fonte: Dados da pesquisa

Por fim, foi realizado a institucionalização das situações 5 e 6 pelo professor, a qual foi analisado as respostas dos alunos, onde foi possível indicar e explicitar as propriedades construídas. Nas situação-problema em questão foi possível formalizar a complexificação

da sequência de Leonardo, a partir da inserção da unidade imaginária i , apresentando propriedades e a relação bidimensional de Leonardo.

Na Tabela 2, observa-se ainda a institucionalização dos conceitos matemáticos abordados nas situações-problemas propostas, em torno do processo de hibridização das sequências lineares recursivas. Com isso, na primeira situação-problema, foi possível realizar uma extensão da sequência para os números inteiros negativos, estabelecendo a sua fórmula de recorrência da sequência híbrida de Fibonacci com índices negativos. Na segunda situação-problema foi possível estabelecer a fórmula variante de Binet para os números híbridos de Fibonacci. Na terceira situação-problema, foi possível estabelecer a fórmula variante de Binet para os números híbridos de Leonardo, a partir de uma associação da fórmula de Binet dos híbridos de Fibonacci com a relação dos híbridos de Fibonacci e Leonardo. Na quarta situação-problema, foi apresentado a função geradora dos números híbridos de Mersenne, que permite a resolução de recorrências lineares com coeficientes constantes.

Tabela 2 – Categorização das resoluções das situações-problema propostas referentes à hibridização das sequências lineares recursivas.

Situação-problema 1	
Ação	Estabelecer a recorrência dos termos inteiros não positivos da sequência híbrida de Fibonacci.
Formulação	Construção da relação recorrente: $HF_{-n} = HF_{-n+1} + HF_{-n+2}$, $\forall n > 1$.
Validação	Determinação dos termos híbridos de Fibonacci com índices negativos.
Institucionalização	Criação da relação recorrente da sequência híbrida de Fibonacci com índices negativos.
Situação-problema 2	
Ação	Busca obter a fórmula variante de Binet dos números híbridos de Fibonacci, a partir de conhecimentos prévios.
Formulação	Construção do sistema de equação linear.
Validação	Resolução do sistema de equação obtendo os coeficientes com base nas raízes do polinômio característico.
Institucionalização	Estabelecimento da Fórmula variante de Binet dos números híbridos de Fibonacci $HF_n = \frac{(HF_1 - HF_0 x_2)x_1^n - (HF_1 - HF_0 x_1)x_2^n}{x_1 - x_2}$.
Situação-problema 3	
Ação	Relacionar a fórmula de Binet dos híbridos de Fibonacci com a relação dos híbridos de Fibonacci e Leonardo para estabelecer fórmula de Binet dos híbridos de Leonardo.
Formulação	Definir HF_{n+1} e substituir na relação $HLe_n = 2HF_{n+1} - (1 + i + \varepsilon + h)$.
Validação	Validação da fórmula variante de Binet para os números híbridos de Leonardo por indução matemática.

Institucionalização	Apresentar a fórmula de Binet dada por: $HLe_n = \frac{x_1[2Ax_1^n - (1 + i + \varepsilon + h)] + x_2[(1 + i + \varepsilon + h) - 2Bx_2^n]}{x_1 - x_2}$, onde $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.
Situação-problema 4	
Ação	Obter da função geradora da sequência híbrida de Mersenne.
Formulação	Construção da função geradora com base na relação de recorrência da sequência híbrida de Mersenne.
Validação	Utilização das constantes presentes na recorrência para obter e validar a função geradora da sequência híbrida de Mersenne.
Institucionalização	Formalização da função geradora da sequência híbrida de Mersenne $G_{HM_n}(x) = \frac{HM_0 + (HM_1 - 3HM_0)x}{(1 - 3x + 2x^2)}$.

Fonte: Elaborado pela autora

Na Tabela 5 é então realizada uma institucionalização referente ao processo de hipercomplexificação dos números de Leonardo, revelados nas situações debatidas. Não obstante, na quinta situação-problema, foi obtida duas propriedades referentes aos números bidimensionais de Leonardo, estas propriedades foram de suma importância para que seja possível apresentar sua relação bidimensional. Na sexta situação-problema, foi apresentado a relação bidimensional da sequência, de forma generalizada, inserindo apenas uma unidade imaginária i .

Tabela 5 – Categorização das resoluções das situações-problema propostas referentes à hipercomplexificação das sequências lineares recursivas.

Situação-problema 5	
Ação	Estabelecer propriedades, variando n e m , para os números bidimensionais de Leonardo.
Formulação	Determinação das propriedades $Le(n, 1)$ e $Le(1, m)$.
Validação	Validação das propriedades dos números bidimensionais de Leonardo pelo princípio da indução finita.
Institucionalização	Formalização de $Le(n, 1) = Le(n) + \left(\frac{Le(n) + 1}{2}\right)i$ e $Le(1, m) = Le(m) + \left(\frac{Le(m - 1) + 1}{2}\right)i$.
Situação-problema 6	
Ação	Obter da relação bidimensional de Leonardo a partir das propriedades encontradas.
Formulação	Determinação da forma bidimensional de Leonardo, com a inserção da unidade imaginária i .

Validação	Validação da forma generalizada bidimensional da sequência de Leonardo, por meio do princípio da indução finita.
Institucionalização	Relação bidimensional de Leonardo $Le(n, m) = \left[Le_n \cdot \frac{Le_m + 1}{2} + \frac{Le_m + 1}{2} - 1 \right] + \frac{Le_n + 1}{2} \cdot \frac{Le_{m-1} + 1}{2} i$.

Fonte: Elaborado pela autora

Nesta seção foi feita uma análise e discussão das soluções das situações-problema propostas aos alunos do curso de Licenciatura em Matemática e, ainda categorizadas de acordo com a Tabela 2 e Tabela 5. A ED admite dois tipos de validação: interna e externa. Nesta pesquisa, a validação foi realizada de forma interna, uma vez que teve foco nas situações didáticas apresentadas, ou seja, esta pesquisa analisou apenas as produções e o desempenho dos estudantes que foram observados nesta pesquisa, não havendo comparação com produções externas a esta aplicação.

Com isso, na validação desta pesquisa, foi realizada uma comparação entre as fases de análise *a priori* e *a posteriori* baseado nos dados coletados durante a experimentação. Ressalta-se a fase de institucionalização da TSD, que possui uma grande importância na validação da pesquisa, uma vez que é nesta etapa que ocorre a confirmação do entendimento dos alunos e a concepção dos conceitos vistos em sala.

Todavia, durante a resolução das situações-problema, foram identificados os obstáculos epistemológicos e cognitivos, atentando a dificuldade dos alunos em desenvolver algumas situações, como trabalhar com os números híbridos, uma vez que um número híbrido apresenta quatro unidades e, também, outra dificuldade apresentada pelos alunos foi na validação das situações pois muitos relataram não saber utilizar o princípio da indução finita. Todavia, para que esses obstáculos fossem superados, os alunos apresentavam suas dificuldades e as informações obtidas na situação, assim outros alunos compartilhavam informações complementares, obtendo uma troca de conhecimento entre os estudantes.

Por fim, a partir da discussão dos dados coletados, nesta pesquisa permitiu compreender que os objetivos desta pesquisa foram alcançados, ocorrendo a validação interna. Salienta-se que a pesquisa foi realizada de forma *online* o que impossibilitou uma interação maior entre os alunos e, por causa da oscilação da internet, alguns alunos não conseguiram participar de forma efetiva pois não conseguiam se manter na reunião. Por outro lado, a utilização do *Google Meet* possibilitou a coleta de dados, contribuindo para as fases de experimentação e validação, não prejudicando o andamento da pesquisa e finalizando este estudo.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa parte de orientações didático metodológicas fundamentadas na ED e da TSD, assim foi realizada, uma análise preliminar do objeto matemático, a partir de estudos encontrados em artigos científicos que abrange sequências lineares recursivas, números híbridos e números hipercomplexos, publicados em periódicos de Matemática Pura, assim como narrativas históricas por livros de HM.

Neste sentido, a partir do levantamento bibliográfico, foi apresentado o campo epistêmico-matemático que enfatiza a hibridização e hipercomplexificação de sequências lineares recursivas. Nessa perspectiva, esta pesquisa foi iniciada no campo epistêmico-matemático que abrange a hipercomplexificação das sequências de Fibonacci, Lucas, Pell, Leonardo, Jacobsthal, Padovan, Perrin, Narayana, Mersenne e Oresme, apresentando suas recorrências, fórmulas de Binet, função geradora, forma matricial e extensão para índices negativos, bem como a hipercomplexificação de algumas destas sequências, abordando sua relação bi, tri e n -dimensional, a partir do aumento de dimensionalidade e inserção de unidades imaginárias. Com isso, foi almejado o primeiro objetivo específico da pesquisa.

Nesse sentido, foi selecionado a hibridização e relação bidimensional de sequências como um conteúdo a ser transposto para o contexto didático-cognitivo, ressaltando o seu modelo histórico e permitindo uma discussão dos conceitos e relações matemáticas. Esta pesquisa foi aplicada na disciplina de HM, no curso de Licenciatura em Matemática do IFCE, após analisar a matriz curricular e observar que nesta disciplina permite discutir a evolução dos conceitos e das relações matemáticas.

Durante a experimentação foi possível observar alguns obstáculos epistemológicos em relação as situações propostas e quanto a sua validação, foram superados por meio de troca de informações e interações entre os alunos. Vale ressaltar que as construções matemáticas superaram determinados obstáculos epistemológicos, dando origem a conceitos matemáticos não conhecidos para algumas sequências estudadas.

Quanto aporte teórico para nortear os percursos metodológicos da pesquisa, foi utilizado a ED, em complementariedade com a TSD, que contribuiu para a área da matemática e de ensino, para a compreensão da hibridização e hipercomplexificação das sequências. Dessa forma, vale ressaltar que a hibridização das sequências foram dadas em torno da sua extensão, obtendo a construção da sua forma matricial, polinômio característico, função geradora e fórmula de Binet. O processo de hipercomplexificação deu início com a inserção de unidades imaginárias, destacando assim as relações recorrentes bi, tri e n -dimensionais.

Entretanto, diante do contexto da microengenharia didática e transposição didática, é importante observar que a hibridização e hipercomplexificação de sequências foram estudadas em situações de ensino, baseada na TSD, por meio de situações-problema de conteúdos selecionados previamente, com o intuito de compreender o processo histórico-evolutivo, satisfazendo os dois últimos objetivos específicos da pesquisa.

Destaca-se que durante a pesquisa ocorreram algumas limitações, uma vez que a aplicação foi realizada de forma remota e alguns alunos não tinham uma conexão de *internet* suficiente, assim perdendo alguns detalhes da aula e, também, o fato de que nem todos os alunos conseguiram resolver todas as situações apresentadas. Por outro lado, os alunos que não apresentaram dificuldades foram muito solícitos aos demais, auxiliando da maneira que lhe cabia e promovendo uma interação entre os alunos, o que favoreceu ao processo de aprendizagem.

Finalmente, esta pesquisa proporcionou aos alunos, professores em formação inicial, aumentar o seu repertório de conhecimento de sequências lineares recursivas, números híbridos e números hipercomplexos, através de relações matemáticas. E ainda, permitiu o desenvolvimento de um entendimento epistemológico-matemático no ensino. Com isso, espera-se que este trabalho sirva de referência para outras pesquisas que procuram explorar, com a perspectiva da TSD, conteúdos matemáticos que são não apresentados em curso de Licenciatura em Matemática.

Salienta-se ainda a expectativa de uma futura pesquisa referente a sequência de Leonardo contando com a contribuição de pesquisadores oriundos de Portugal, a saber as professoras: Dra. Paula Maria Machado Cruz Catarino, Dra. Anabela Maria Ferreira Borges Varela Rodrigues, Dra. Ana Paula Florêncio Aires e Dra. Helena Maria Barros de Campos.

Referências

- ADAMS, W.; SHANKS, D. Strong primality tests that are not sufficient. *Mathematics of Computation*, v. 39, n. 159, p. 255–300, 1982.
- ALFRED, U. *An introduction to Fibonacci discovery*. [S.l.]: Fibonacci Assoc., 1965.
- ALMOULOUD, S. A. Educação matemática: Fundamentos da didática da matemática. *Paraná: Editora, da UF de Paraná*, 2007.
- ALMOULOUD, S. A. Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. *REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 11, n. 2, p. 109–141, 2016.
- ALMOULOUD, S. A.; QUEIROZ, C. de; COUTINHO, S. Engenharia didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. *REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 3, n. 1, p. 62–77, 2008.
- ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. da. Engenharia didática: evolução e diversidade didactic engineering: evolution and diversity. *REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 7, n. 2, p. 22–52, 2012.
- ALVES, F. R. V. Engenharia didática (análises preliminares e análise a priori): O caso das equações diferenciais de segunda ordem. *Ensino de Ciências e Tecnologia em Revista*, v. 2, n. 2, p. 1–22, 2016a.
- ALVES, F. R. V. Engenharia didática para a generalização da sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura didactical engineering for the generalization of Fibonacci's sequence: an experience in a graduate course. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, v. 18, n. 1, 2016b.
- ALVES, F. R. V. Didática de matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. *Interfaces da Educação*, v. 7, n. 21, p. 131–150, 2016c.
- ALVES, F. R. V. Sequência generalizada de Pell (SGP): aspectos históricos e epistemológicos sobre a evolução de um modelo. *Revista Thema*, v. 13, n. 2, p. 27–41, 2016d.
- ALVES, F. R. V. Engenharia didática para a s-sequência generalizada de Jacobsthal e a (s,t)-sequência generalizada de Jacobsthal: análises preliminares e a priori. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM), n. 51, p. 83–106, 2017.
- ALVES, F. R. V. Mestrado (acadêmico) em ensino de ciências e matemática: a proposta do Instituto Federal do Ceará (IFCE). *Revista Contexto & Educação*, v. 33, n. 105, p. 305–340, 2018.
- ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C.; MANGUEIRA, M. C. d. S. Discovering theorems about the gaussian Mersenne sequence with the maple's help. *Annals. Computer Science Series*, v. 17, n. 2, 2019.

- ALVES, F. R. V. et al. Teaching recurrent sequences in Brazil usin historical facts and graphical illustrations. *Acta Didactica Napocensia*, v. 13, n. 1, p. 87–104, 2020.
- ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, Grenoble, v. 9, n. 3, p. 281–308, 1988.
- ARTIGUE, M. et al. Ingenieria didactica en educacion matematica: un esquema para la investigacion y la innovacion en la enseñanza y el aprendizaje de las matematicas. Bogotá: una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V., 1995.
- BABB, J. Mathematical concepts and proofs from Nicole Oresme. *Science & Education*, Springer, v. 14, n. 3-5, p. 443–456, 2005.
- BACHELARD, G. A formação do espírito científico. *Rio de Janeiro: Contraponto*, v. 1938, 1996.
- BELINI, M. M. *A razão áurea e a sequência de Fibonacci*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2015.
- BEZERRA, F. H. C.; ALVES, F. R. V.; VIEIRA, R. P. M. Relações recorrentes bidimensionais e tridimensionais de narayana. *C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, v. 18, p. 12–28, 2020.
- BICKNELL, M. Primer on Pell sequence and related sequences. *Fibonacci Quarterly*, Fibonacci Assoc C/O Patty Solsaa, PO BOX 320, Aurora, SD 57002-0320, v. 13, n. 4, p. 345, 1975.
- BOYER, C. História da matemática. *Merzbach, tradução Elza F. Gomide. 2a ed, São Paulo-SP: Ed. Edgard Blucher LTDA*, 2006.
- BROUSSEAU, G. *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*. [S.l.]: Louvain-la-neuve, 1976.
- BROUSSEAU, G. Ingénierie didactique: d'un problème à l'étude a priori d'une situation didactique. *Actes de la Deuxième école d'été de didactique des mathématiques*, p. 39–60, 1982.
- BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, v. 7, n. 2, p. 33–115, 1986.
- BROUSSEAU, G. *Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino*. [S.l.]: Ática, 2008.
- CARVALHO, C. F. de. Números híbridos e sua visualização no GeoGebra. *Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará*, 2019.
- CATARINO, P. On k-Pell hybrid numbers. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, Taylor & Francis, p. 1–7, 2019.
- CATARINO, P.; CAMPOS, H.; VASCO, P. On the Mersenne sequence. *Annales Mathematicae et Informaticae*, CM-Centro de Matemática, Tibor Tómacs, p. 37–53, 2016.
- CATARINO, P. M.; BORGES, A. On Leonardo numbers. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, p. 1–12, 2019.

- CERDA-MORALES, G. Investigation of generalized hybrid Fibonacci numbers and their properties. *arXiv preprint arXiv:1806.02231*, 2018.
- CERDA-MORALES, G. Oresme polynomials and their derivatives. *arXiv preprint arXiv:1904.01165*, 2019.
- CHEVALLARD, Y. La transposición didáctica. del saber sabio al saber enseñado. 3^a. Edición. Edit. Aique, Buenos Aires, 1998.
- CLAGETT, M. Nicole Oresme and medieval scientific thought. *Proceedings of the American Philosophical Society*, JSTOR, v. 108, n. 4, p. 298–309, 1964.
- COSTA, T. J. M. B. d. Os números perfeitos e os primos de Mersenne. *Dissertação do Curso de Mestrado em Matemática para professores da Universidade de Lisboa*, 2015.
- COURANT, R.; ROBBINS, H. O que é matemática?, Rio de Janeiro-RJ. ed. *Ciência Moderna Ltda*, 2000.
- CRAVEIRO, I. M. et al. *Extensões e interpretações combinatórias para os números de Fibonacci, Pell e Jacobsthal*. Tese (Doutorado), 2004.
- D'AMORE, B. Epistemologia, didática da matemática e práticas de ensino. *Boletim de Educação Matemática*, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, v. 20, n. 28, p. 179–205, 2007a.
- D'AMORE, B. *Elementos de didática da matemática*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2007b. ISBN 9788588325883.
- DISKAYA, O.; MENKEN, H. On the (p, q) -fibonacci n -dimensional recurrences. *Bull. Int. Math. Virtual Inst*, v. 12, n. 2, p. 205–212, 2022.
- ERCOLANO, J. Matrix generators of Pell sequences. *Fibonacci Quart*, v. 17, n. 1, p. 71–77, 1979.
- FERRAZ, A. I. L. d. A. *O problema de Lucas, um problema clássico de análise combinatória*. Tese (Doutorado) — Universidade do Minho, 2017.
- FERREIRA, R. d. C. Números mórficos. *94 f. Dissertação, (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa*, 2015.
- FREITAS, J. L. M. d. Teoria das situações didáticas. in. machado, sda et al. *Educação Matemática: Uma (nova) introdução*. 3^a ed, Educ, São Paulo, p. 77–111, 2010.
- FREITAS, J. L. M. d. Teoria das situações didáticas. In: MACHADO, Silvia Dias A. *Educação matemática: uma (nova) introdução*, São Paulo: Editora EDUC, p. 77–111, 2015.
- GÁLVEZ, G. A didática da matemática. Parra, C. e Saiz, I., *Didática da Matemática*, p. 26–35, 1996.
- GOMES, C. A.; OLIVEIRA, R. B. d. O. *O Teorema de Cayley-Hamilton*. [S.l.]: IME-USP, 2019.
- GULLBERG, J. *Mathematics: from the birth of numbers*. [S.l.]: WW Norton & Company, 1997.

- HARMAN, C. Complex Fibonacci numbers. *The Fibonacci Quarterly*, v. 19, n. 1, p. 82–86, 1981.
- HOGGATT, V. E. *Fibonacci and Lucas numbers. A publication of The Fibonacci Association*. [S.l.]: University of Santa Clara, CA, 1969.
- HORADAM, A. Oresme numbers. *The Fibonacci Quarterly*, v. 12, n. 3, p. 267–271, 1974.
- HORADAM, A. Quaternion recurrence relations. *Ulam Quarterly*, v. 2, n. 2, p. 23–33, 1993.
- HORADAM, A. Jacobsthal representation numbers. *Significance*, v. 2, p. 2–8, 1996.
- HORADAM, A. F.; MAHON, J. Pell and Pell-Lucas polynomials. *The Fibonacci Quarterly*, v. 23, n. 1, p. 7–20, 1985.
- JACOBSTHAL, E. Fibonaccische polynome und kreisteilungsgleichungen. *Sitzungsberichte der berliner Math. Gesellschaft*, v. 17, p. 43–47, 1919.
- KANTOR, I.; SOLODOVNIKOV, A. *Hypercomplex numbers: an elementary introduction to algebras*. [S.l.]: Springer, 1989.
- KAPLANSKY, I. Solution of the “problème des ménages”. *Bulletin of the American Mathematical Society*, American Mathematical Society, v. 49, n. 10, p. 784–785, 10 1943. Disponível em: <<https://projecteuclid.org:443/euclid.bams/1183505432>>.
- KATZ, V. J.; IMHAUSEN, A. *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: A Sourcebook*. [S.l.]: Princeton University Press, 2007.
- KAYGISIZ, K.; SAHIN, A. Calculating terms of associated polynomials of Perrin and Cordonnier numbers. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, v. 20, n. 1, p. 10–18, 2014.
- KIM, P. *Mathematics in India*. [S.l.]: Princeton University Press Princeton, 2009.
- KNUTH, D. E. *The art of computer programming, volume 4A: combinatorial algorithms, part 1*. [S.l.]: Pearson Education India, 2011.
- KOKEN, F.; BOZKURT, D. On the Jacobsthal-Lucas numbers by matrix methods. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, v. 3, n. 33, p. 1629–1633, 2008.
- KOSHY, T. *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. [S.l.]: New York: Wileyand Sons publications, 2001. v. 1.
- KOSHY, T. *Pell and Pell-Lucas numbers with applications*. [S.l.]: Springer, 2014.
- LABORDE, C. Affronter la complexité des situations d'apprentissage des mathématiques en classe. défis et tentatives. *Didaskalia (Paris)*, INRP, Lyon (FRA), 1997.
- LARCOMBE, P.; BAGDASAR, O.; FENNESSEY, E. Horadam sequences: a survey. *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, v. 67, 01 2013.
- LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio, volume 2, 3ª edição*. [S.l.: s.n.], 2000.

- MALCOLM, N. The publications of John Pell frs (1611-1685): some new light and some old confusions. *Notes and Records of the Royal Society of London*, The Royal Society, v. 54, n. 3, p. 275–292, 2000.
- MANGUEIRA, M. C. et al. Relações bidimensionais e os números híbridos da sequência de Lucas. *Espacio Matemático*, v. 2, n. 1, p. 31–45, 2021a.
- MANGUEIRA, M. C. d. S.; ALVES, F. R. V. Números híbridos de Fibonacci e Pell. *Revista Thema*, v. 17, n. 3, p. 831–842, 2020a.
- MANGUEIRA, M. C. d. S.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. Os números híbridos de Leonardo. *Ciência e Natura*, no prelo.
- MANGUEIRA, M. C. d. S.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Números híbridos de Mersenne. *C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, v. 18, p. 1–11, 2020b.
- MANGUEIRA, M. C. d. S. et al. A generalização da forma matricial da sequência de Perrin. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, v. 5, n. 1, p. 384–392, 2020c.
- MANGUEIRA, M. C. d. S. et al. The Oresme sequence: The generalization of its matrix form and its hybridization process. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, v. 27, n. 1, p. 101–111, 2021b.
- MANGUEIRA, M. C. dos S. et al. The hybrid numbers of Padovan and some identities. *Annales Mathematicae Silesianae*, v. 1, n. ahead-of-print, 2020d.
- MANGUEIRA, M. C. dos S. et al. A generalized perrin polynomial sequence and its two-dimensional recurrences. *Annals of the Alexandru Ioan Cuza University-Mathematics*, v. 67, n. 2, 2021b.
- MAROHNIĆ, L.; STRMEČKI, T. Plastic number: Construction and applications. In: *International Virtual Conference ARSA (Advanced Research in Scientific Area) 2012*. [S.l.: s.n.], 2013.
- MENDONÇA, A. F.; NETO, H. B. Nicole Oresme: Perspectivas históricas para uso em sala de aula. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, v. 3, n. 9, p. 48–62, 2016.
- NORONHA, W. F. R. Engenharia didática clássica sobre a sequência de Pell e seus modelos de generalização. *Dissertação de Mestrado Acadêmico do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE – Campus Fortaleza*, 2020.
- OLIVEIRA, R. d.; ALVES, F.; PAIVA, R. Identidades bi e tridimensionais para os números de Fibonacci na forma complexa. *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, v. 11, p. 91–106, 2017.
- OLIVEIRA, R. R. de. Engenharia didática sobre o modelo de complexificação da sequência generalizada de Fibonacci: Relações recorrentes n -dimensionais e representações polinomiais e matriciais. *Dissertação de Mestrado Acadêmico do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE – Campus Fortaleza*, 2018.

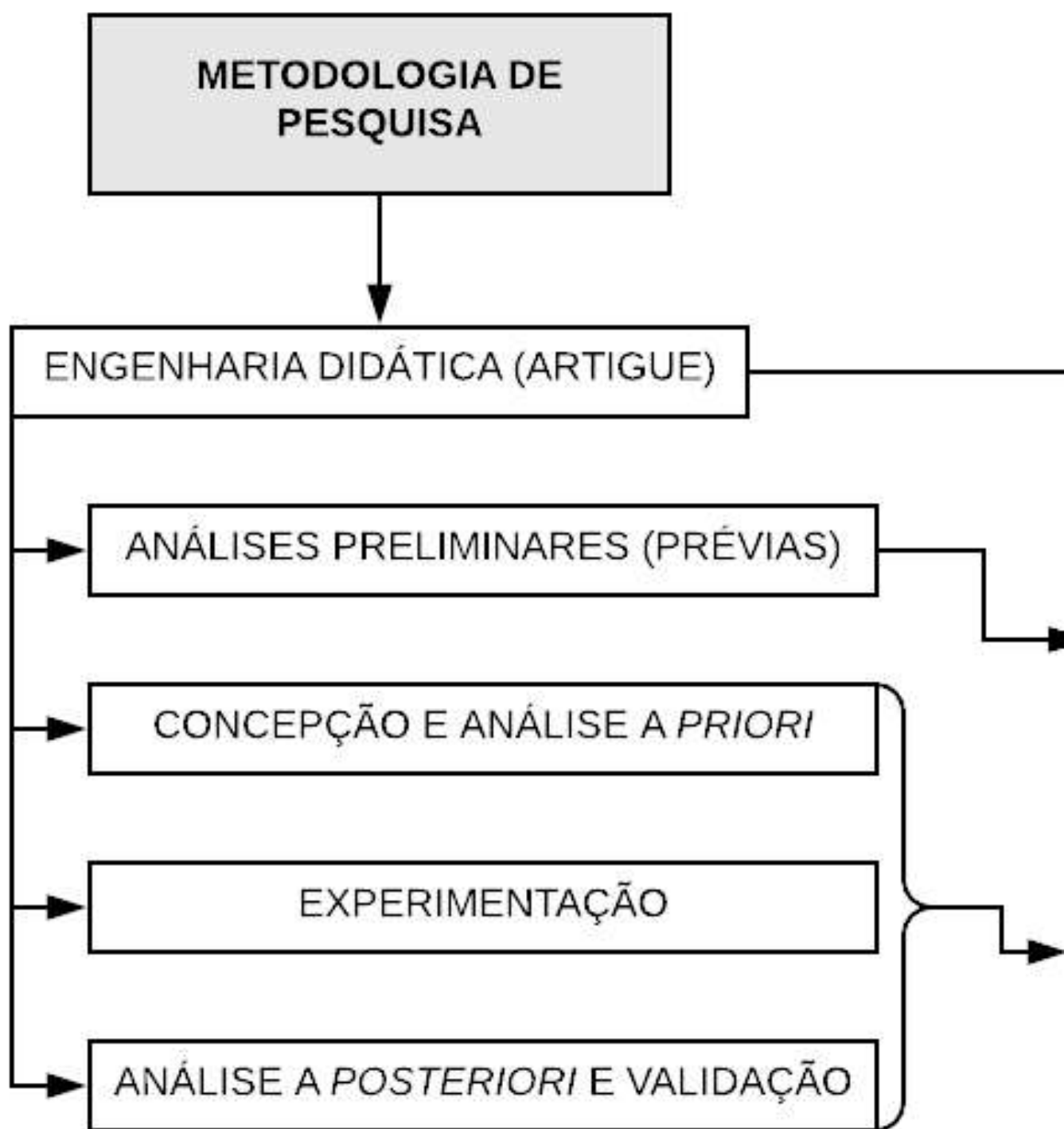
- OLIVEIRA, R. R. de; ALVES, F. R. V. Uma investigação dos polinômios bivariados e complexos de Fibonacci amparada na engenharia didática: uma aplicação da teoria das situações didáticas. *Acta Scientiae*, v. 21, n. 3, p. 170–195, 2019.
- ÖZDEMİR, M. Introduction to hybrid numbers. *Advances in Applied Clifford Algebras*, Springer, v. 28, n. 1, p. 11, 2018.
- PAIS, L. C. *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa*. [S.l.]: Belo Horizonte: Autêntica, 2011.
- PETHE, S.; HORADAM, A. Generalised gaussian Fibonacci numbers. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, Cambridge University Press, v. 33, n. 1, p. 37–48, 1986.
- POMMER, W. M. A engenharia didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as equações diofantinas lineares. *São Paulo*, 2013.
- PONTES, F. L. G. d.; GOBBI, C. R.; SOUSA, E. K. V. de. As contribuições de Édouard Lucas para a teoria dos números. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, v. 5, n. 14, p. 243–252, 2018.
- POSAMENTIER dr. A. S.; LEHMANN, I. *The (Fabulous) Fibonacci Numbers*. [S.l.]: Prometheus Books, 2007.
- PUTTASWAMY, T. *Mathematical achievements of pre-modern Indian mathematicians*. [S.l.]: Newnes, 2012.
- RAMIREZ, J. L.; SIRVENT, V. F. Uma nota sobre a sequência k-Narayana. *Ann. Matemática. Inform.*, v. 45, p. 91–105, 2015.
- ROSA, C. História da ciência: a ciência e o triunfo do pensamento científico no mundo contemporâneo (vol. 3, pp. 15-24). *Brasília, DF: Fundação Alexandre de Gusmão*, 2012.
- SANTOS, A. A. dos. Engenharia didática sobre o estudo e ensino da fórmula de Binet como modelo de generalização e extensão da sequência de Fibonacci. *Dissertação de Mestrado Acadêmico do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE – Campus Fortaleza*, 2017.
- SANTOS, A. A. dos; ALVES, F. R. V. A engenharia didática em articulação com a teoria das situações didáticas como percurso metodológico ao estudo e ensino de matemática. *Acta Scientiae*, v. 19, n. 3, 2017.
- SARMA, K. V. A history of kerala school in hindy astronomy. *Panjab: Panjab University*, 1972. Acessado: 16 jun. 2020. Disponível em: <http://www.rarebooksofindia.org/book_archive/196174216674_10153030067961675.pdf>. Acesso em: 16 jun. 2020.
- SEENUKUL, P. Matrices which have similar properties to Padovan-matrix and its generalized relations. *SNRU Journal of Science and Technology*, v. 7, n. 2, p. 90–94, 2015.
- SHANNON, A. A note on generalized Leonardo numbers. *Note on Number Theory and Discrete Mathematics*, v. 25, n. 3, p. 97–101, 2019.
- SIEGMUND-SCHULTZE, R. *Mathematicians fleeing from Nazi Germany: Individual fates and global impact*. [S.l.]: Princeton University Press, 2009.

- SILVA, B. A. Números de Fibonacci e números de Lucas. (*Dissertação de Mestrado*) *Mestrado em Ciências - Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação*, 2017.
- SILVA, C. V.; ALMOULOU, S. A. Uma articulação entre o quadro dos paradigmas geométricos e a teoria das situações didáticas. *Acta Scientiae*, v. 20, n. 1, 2018.
- SLOANE, N. A handbook of integer sequences (new york: Academic). 1973.
- SOKHUMA, K. Padovan q-matrix and the generalized relations. *Applied Mathematical Sciences*, v. 7, n. 56, p. 2777–2780, 2013.
- SOUZA, M. F. d. O uso das TIC no processo de ensino e aprendizagem da matemática: das práticas às concepções docentes. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2010.
- SPINADEL, V. W. de; BUITRAGO, A. R. Towards van der Laan's plastic number in the plane. *Journal for Geometry and Graphics*, v. 13, n. 2, p. 163–175, 2009.
- SUGUMARAN, A.; RAJESH, K. Perrin graceful graphs. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, v. 114, n. 6, p. 131–137, 2017.
- SZYNAL-LIANA, A. The Horadam hybrid numbers. *Discussiones Mathematicae-General Algebra and Applications*, Sciendo, v. 38, n. 1, p. 91–98, 2018.
- SZYNAL-LIANA, A.; WLOCH, I. Sobre os números híbridos de Jacobsthal e Jacobsthal-Lucas. *Annales Mathematicae Silesianae*, Sciendo, v. 33, n. 1, p. 276–283, 2019.
- TEIXEIRA, P. J. M.; PASSOS, C. C. M. Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau. *Zetetike*, v. 21, n. 1, p. 155–168, 2013.
- VIEIRA, R. P. M. Engenharia didática (ed): o caso da generalização e complexificação da sequência de padovan ou cordonnier. *Dissertação de Mestrado Acadêmico do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE – Campus Fortaleza*, 2020.
- VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. A sequência de Padovan e o número plástico: uma análise prévia e a priori. *Research, Society and Development*, v. 8, n. 8, p. e26881212, 2019.
- VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Relações bidimensionais e identidades da sequência de Leonardo. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, v. 4, n. 2, p. 156–173, 2019a.
- VIEIRA, R. P. M. et al. A forma matricial dos números de Leonardo. *Ciência e Natura*, v. 42, p. 1–13, 2020.
- VIEIRA, R. P. M. et al. As relações recorrentes n-dimensionais de Leonardo. *Ciência e Natura*, v. 43, p. 89, 2021a.
- VIEIRA, R. P. M. et al. Perrin n-dimensional relations. *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, v. 4, n. 2, p. 100–109, 2021b.
- VOET, C.; SCHOONJANS, Y. Benedictine thought as a catalyst for 20th century liturgical space. the motivations behind Dom Hans van der Laan's ascetic church architecture. In: KONINKLIJKE VLAAMSE ACADEMIE VAN BELGIË VOOR WETENSCHAPPEN EN KUNSTEN; BRUSSELS. *Proceedings of the Second International Conference of the European Architectural History Network*. [S.l.], 2012. p. 255–261.

- VOROBIOV, N. N. Números de Fibonacci. *Moscou: Editora Mir*, 1974.
- WALDSCHMIDT, M. Some arithmetic problems raised by rabbits, cows and the da Vinci code. *Mohammed Ali Jinnah University*, v. 7, n. 1, p. 31–48, 2009.
- WALKER, I. Explorations in recursion with John Pell and the Pell sequence. 2011.
- WHITFORD, A. Binets formula generalized. *FIBONACCI QUARTERLY*, Fibonacci Assoc Univ Santa Clara, v. 15, n. 1, p. 21, 1977.
- YILMAZ, N.; TASKARA, N. Matrix sequences in terms of Padovan and Perrin numbers. *Journal of Applied Mathematics*, Hindawi, v. 2013, 2013.

Apêndices

APÊNDICE A – Estrutura da Pesquisa baseada em Engenharia Didática em associação com a Teoria das Situações Didáticas



APÊNDICE B – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido



INSTITUTO FEDERAL
CEARÁ
Campus Fortaleza

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DO ESTADO DO CEARÁ - IFCE
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA - PGECM

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

“Engenharia Didática (ED): Um processo de hibridização e hipercomplexificação de sequências lineares recursivas ”

Pesquisadora: Milena Carolina dos Santos Mangueira

Orientador: Dr. Francisco Regis Vieira Alves

1. Identificação

Você está sendo convidado a participar como voluntário de uma pesquisa de tema: “Engenharia Didática (ED): Um processo de hibridização e hipercomplexificação de sequências lineares recursivas” pesquisado pela aluna Milena Carolina dos Santos Mangueira. Este documento nominado de termo de consentimento livre e esclarecido, visa assegurar os seus direitos como participante, sendo elaborado em duas vias, uma que deverá ficar com você e a outra com a pesquisadora.

Leia atentamente todo o documento, caso haja dúvidas favor comunicar à pesquisadora para que essas sejam sanadas. Você poderá leva-lo para casa, a fim de ler com mais calma e tranquilidade, consultando os seus familiares quando necessário. Não haverá nenhum tipo de penalidade, caso não concorde em participar ou retirar a sua autorização em qualquer momento.

2. Justificativa e objetivos

Justifica-se esta pesquisa no fato de que livros de História da Matemática não apresentam discussões sobre os conceitos matemáticos e as relações oriundas das sequências lineares recursivas, tampouco sobre o processo de hibridização e hipercomplexificação das mesmas.

Objetivo geral:

Explorar os comportamentos e obstáculos epistemológicos surgidos a partir da aplicação das situações didáticas projetadas para o ensino da hibridização e hipercomplexificação de sequências lineares recursivas, comparando-as com as previsões iniciais.

Objetivos Específicos:

- a. Identificar possíveis percursos metodológicos para o ensino da hibridização e hipercomplexificação das sequências lineares recursivas;
- b. Examinar se a estrutura axiomática e epistemológica natural do objeto matemático: hibridização e hipercomplexificação das sequências lineares recursivas, com o objetivo de identificar as necessidades de procedimentos de transposição didática ao longo do desenvolvimento do assunto proposto.

Rubrica do pesquisador: _____

Rubrica do participante: _____



INSTITUTO FEDERAL
CEARÁ
Campus Fortaleza

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DO ESTADO DO CEARÁ - IFCE
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA - PGECM

3. Procedimentos

Participando do estudo você será convidado a:

- ✓ Participar da pesquisa que será aplicada em forma de aulas com duração de noventa (90) minutos, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, campus Fortaleza.
- ✓ A previsão de início das aulas de aplicação é de:
- ✓ As aulas serão registradas através de fotos, gravações de áudio e anotações das produções dos participantes.
- ✓ Serão aplicados questionários, com situações-problema propostos de forma de lista de exercícios, com tempo de noventa (90) minutos para as respostas.
- ✓ Os dados coletados serão utilizados somente para a pesquisa e os resultados serão mostrados através de revistas especializadas na área de investigação e/ou encontros científicos e na dissertação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, promovido pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (PGECM/IFCE) no campus Fortaleza, sem expor a identificação dos participantes.

4. Desconfortos e Riscos

Você não deve participar deste estudo, caso venha sentir-se constrangido com algum dos procedimentos anteriormente citados, tendo a liberdade de deixar de participar do estudo em qualquer momento, sem haver nenhum prejuízo para a sua conduta.

5. Benefícios

Os participantes terão a oportunidade de participar de situações didáticas possibilitando aos discentes da Licenciatura em Matemática desenvolver uma concepção epistemológica da História da Matemática através de estudos de definições, teoremas e propriedades matemáticas inerentes à Hibridização e Hipercomplexificação de Sequências Lineares Recursivas. Assim, contribuirão com a formação inicial dos professores.

6. Acompanhamento e Assistência

O participante tem a garantia ao acesso, em qualquer etapa do estudo para esclarecimentos de eventuais dúvidas na instituição em que você estuda. Para maiores informações nosso contato é (84) 9 96099333, e-mail: milenacarolina24@gmail.com.

7. Sigilo e Privacidade

Você tem a garantia de que a sua identidade será mantida em sigilo e nenhuma informação será dada à terceiros que não faça parte da equipe de pesquisadores. Durante a divulgação dos resultados desse estudo, o seu nome não será revelado.

Rubrica do pesquisador: _____

Rubrica do participante: _____



INSTITUTO FEDERAL
CEARÁ
Campus Fortaleza

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DO ESTADO DO CEARÁ - IFCE
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA - PGECM

Ressarcimento e Indenização

Não existirão despesas para o participante em qualquer fase da pesquisa e também o mesmo não receberá nenhuma remuneração para participar do estudo. Você terá garantia ao direito de indenização caso algum dos itens anteriores seja violado.

8. Contato

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, você poderá entrar em contato com a pesquisadora Milena Carolina dos Santos Manguiera pelo celular (84) 9 96099333 ou pelo e-mail: milenacarolina24@gmail.com. Em caso de dúvidas e reclamações sobre a sua participação, além de questões de ética do estudo, você deverá entrar em contato com a secretaria do Comitê de Ética e Pesquisa (CEP) do IFCE, das 8h às 12h e das 13h às 17h, localizada na Rua Jorge Dumar, nº 1703, Jardim América, no IFCE Reitoria, Fortaleza-CE, 60410-426, fone: (85) 34012332, e-mail: cep@ifce.edu.br

9. Observações Finais

Ao assinar este termo, o participante concorda voluntariamente em participar desta pesquisa e permite o registro de fotos, áudios e anotações de suas produções durante a aplicação da pesquisa, desde que possa retirar seu consentimento a qualquer momento sem penalidade ou prejuízos de qualquer natureza.

10. Consentimento Livre e Esclarecido

Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais de riscos e o incômodo que esta possa acarretar, aceito participar e declaro estar recebendo uma via original deste documento assinada pelo pesquisador e por mim, tendo todas as folhas por nós rubricadas:

Nome do(a) participante:

e-mail (opcional):

(Assinatura do participante ou nome e assinatura do seu RESPONSÁVEL LEGAL)

Data: ____/____/____.

Rubrica do pesquisador: _____

Rubrica do participante: _____



INSTITUTO FEDERAL
CEARÁ
Campus Fortaleza

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DO ESTADO DO CEARÁ - IFCE
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA - PGECM

Responsabilidade do Pesquisador:

Asseguro ter cumprido as exigências da resolução 466/2012 CNS/MS e complementares na elaboração do protocolo e na obtenção deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Asseguro também, ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Informo que o estudo foi aprovado pelo CEP perante o qual o projeto foi apresentado e pela CONEP, quando pertinente. Comprometo-me a utilizar o material e os dados obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

Pesquisadora,

Milena Carolina dos Santos Mangueira

Fortaleza, ____ de ____ de ____

Rubrica do pesquisador: _____

Rubrica do participante: _____

Anexos

ANEXO A – Matriz Curricular do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ

DIRETORIA DE ENSINO

Matrizes Curriculares

INSTITUTO FEDERAL
CEARÁ

Matriz

3908 - Licenciatura em Matemática IV (2012/1)

Curso

01402 - Licenciatura em Matemática

Nível

Superior

Períodicidade

Período

Regime

Não-seriado

Situação

Matriz em Vigor

Per. Letivo Inicial

2012/1

C.H. Disciplinas

3000

Per.	Componentes Curriculares						Co-Requisitos				Carga Horária	Pre-requisitos
	Código	Descrição	Núcleo	OPT	Hab.	Cred.						
1	01.402.01	GEOMETRIA PLANA E CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS	COM	N	57	4	0			80		
1	01.402.02	MATEMÁTICA DISCRETA	COM	N	57	4	0			80		
1	01.402.03	MATEMÁTICA ELEMENTAR I	COM	N	57	4	0			80		
1	01.402.04	HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO NO BRASIL	COM	N	57	2	0			40		
1	01.402.05	COMUNICAÇÃO E LINGUAGEM	COM	N	57	3	0			60		
1	01.402.06	INICIAÇÃO A FILOSOFIA	COM	N	57	3	0			60		
2	01.402.07	CÁLCULO I	COM	N	57	4	0			80		01.402.03
2	01.402.08	LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA	COM	N	57	2	0			40		
2	01.402.09	MATEMÁTICA ELEMENTAR II	COM	N	57	4	0			80		01.402.01+01.402.02
2	01.402.10	FUNDAMENTOS SOCIOFILOSÓFICOS DA EDUCAÇÃO	COM	N	57	4	0			80		
2	01.402.11	PSICOLOGIA DO DESENVOLVIMENTO	COM	N	57	2	0			40		
2	01.402.12	LIBRAS	COM	N	57	2	0			40		
2	01.402.13	METODOLOGIA DO TRABALHO CIENTÍFICO I	COM	N	57	2	0			40		
3	01.402.14	ÁLGEBRA LINEAR	COM	N	57	4	0			80		01.402.09
3	01.402.15	CÁLCULO II	COM	N	57	4	0			80		01.402.07
3	01.402.16	INFORMÁTICA APLICADA AO ENSINO DA MATEMÁTICA	COM	N	57	4	0			80		01.402.01+01.402.07
3	01.402.17	PROJETOS SOCIAIS	COM	N	57	2	0			40		
3	01.402.18	POLÍTICAS EDUCACIONAIS	COM	N	57	3	0			60		
3	01.402.19	PSICOLOGIA DA APRENDIZAGEM	COM	N	57	3	0			60		01.402.11

 INSTITUTO FEDERAL CEARÁ INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ DIRETORIA DE ENSINO Matrizes Curriculares										
4	01.402.20	CÁLCULO III	COM	N	57	4	0	80		01.402.14 + 01.402.15
4	01.402.21	GEOMETRIA ESPACIAL E PROJETIVA	COM	N	57	4	0	80		01.402.01 + 01.402.14
4	01.402.22	METODOLOGIA DO ENSINO DA MATEMÁTICA	COM	N	57	4	0	80		01.402.08 + 01.402.10
4	01.402.23	TEORIA DOS NÚMEROS	COM	N	57	4	0	80		01.402.02
4	01.402.24	DIDÁTICA GERAL	COM	N	57	4	0	80		
5	01.402.25	CÁLCULO IV	COM	N	57	4	0	80		01.402.20
5	01.402.26	ESTRUTURAS ALGÉBRICAS	COM	N	57	4	0	80		01.402.14 + 01.402.23
5	01.402.27	CURRÍCULOS E PRÁTICAS EDUCATIVAS	COM	N	57	3	0	60		
5	01.402.28	MECÂNICA NEWTONIANA	COM	N	57	4	0	80		01.402.15
5	01.402.29	ESTÁGIO I	COM	N	57	5	0	100		
6	01.402.30	EDO E SÉRIES	COM	N	57	4	0	80		
6	01.402.31	HISTÓRIA DA MATEMÁTICA	COM	N	57	4	0	80		01.402.01 + 01.402.15 + 01.402.23
6	01.402.32	ELETRICIDADE E MAGNETISMO	COM	N	57	4	0	80		01.402.25 + 01.402.28
6	01.402.33	ESTÁGIO II	COM	N	57	8	0	160		
7	01.402.34	CÁLCULO NUMÉRICO	COM	N	57	4	0	80		01.402.20
7	01.402.35	FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA	COM	N	57	4	0	80		01.402.25 + 01.402.30
7	01.402.36	METODOLOGIA DO TRABALHO CIENTÍFICO II	COM	N	57	2	0	40		01.402.13
7	01.402.37	ESTÁGIO III	COM	N	57	7	0	140		
7	01.402.38	OPTATIVA 71	COM	S	57	3	0	60		
8	01.402.39	INTRODUÇÃO A ANÁLISE	COM	N	57	4	0	80		
8	01.402.40	PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	COM	N	57	4	0	80		01.402.02 + 01.402.15
8	01.402.41	PROGRESSÕES E MATEMÁTICA FINANCEIRA	COM	N	57	3	0	60		
8	01.402.42	OPTATIVA 81	COM	S	57	4	0	80		
8	01.402.43	TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO	COM	N	57	2	0	40		

			Créd.		Carga Horária						
Código	Sigla	Habilitação	Básica	Obrig.	Estágio	Optativa	Eletiva	At. Comp.	Proj. Final	Min. Créd.	
57	57	DISC. BÁSICAS - LICENCIATURA EM MATEMÁTICA	Sim	0		0	0	0		0	

ANEXO B – Ementa da disciplina de História da Matemática



PROGRAMA DE UNIDADE DIDÁTICA – PUD

DISCIPLINA: HISTÓRIA DA MATEMÁTICA		
Código:		
Carga Horária Total: 80 h	Teórica: 70 h	Prática Como Componente Curricular: 10 h
Número de Créditos:	4	
Código pré-requisito:	Geo Plana e Cons. Geom, Cálculo II e Teoria dos Números	
Semestre:	6º	
Nível:	Graduação	
EMENTA		
Estudo do conceito, desenvolvimento histórico e representações do número. O desenvolvimento da Matemática nas diversas civilizações ao longo da história. Vida obra e contexto histórico dos principais matemáticos e suas contribuições para o desenvolvimento da Matemática. História da Matemática no Brasil.		
OBJETIVO		
- Levar o aluno a compreender o desenvolvimento da Matemática de acordo com o contexto histórico e social e fazer conexões com as metodologias de ensino e propostas curriculares; - Conhecer os principais matemáticos e suas principais contribuições no desenvolvimento do conhecimento matemático ao longo da história; - Utilizar o conhecimento da História da Matemática para aprimorar o ensino de forma crítica e contextualizada; - Entender o desenvolvimento da História da Matemática no Brasil.		
PROGRAMA		
1. O conceito de número e os sistemas de numeração. 2. O desenvolvimento histórico da álgebra, Geometria e Aritmética nas diferentes épocas e civilizações. 3. Principais matemáticos da história e suas contribuições para o desenvolvimento da Matemática. 4. História da Matemática no Brasil.		
METODOLOGIA DE ENSINO		
Aulas expositivas, seminários, debates, apresentação de vídeos e pesquisa.		
AVALIAÇÃO		
Provas, trabalhos, seminários e avaliação contínua.		
BIBLIOGRAFIA BÁSICA		
- EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. Campinas-SP: Editora Unicamp, 2004. - BOYER, Carl B. História da Matemática. 2ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006. - D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Uma História Concisa da Matemática no Brasil. Petrópolis-RJ: Vozes, 2008.		
BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR		
- MENDES, I. A. O uso da História no Ensino da Matemática: reflexões teóricas e experiências. Belém: EDUEPA, 2001.		

Válido somente com assinatura e carimbo do IFCE

 INSTITUTO FEDERAL DO CEARÁ - IFCE
CAMPUS FORTALEZA
DIRETORIA DE ENSINO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

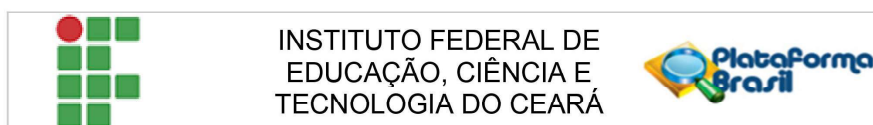
- MIGUEL, Antônio *et. al.* **História da Matemática em Atividades Didáticas**. São Paulo: Livraria da Física Editora, 2009.

Coordenador do Curso

Setor Pedagógico

Válido somente com assinatura e carimbo do IFCE

ANEXO C – Parecer do Comitê de Ética da Pesquisa



PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: Engenharia Didática (ED): Um processo de hibridização e hipercomplexificação de sequências lineares recursivas.

Pesquisador: MILENA CAROLINA DOS SANTOS MANGUEIRA

Área Temática:

Versão: 2

CAAE: 30045720.7.0000.5589

Instituição Proponente: INSTITUTO FEDERAL DE EDUCACAO, CIENCIA E TECNOLOGIA DO CEARA

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 4.066.001

Apresentação do Projeto:

Está razoavelmente bem apresentado. Consegue inserir o leitor na temática.

Objetivo da Pesquisa:

Desenvolver uma Engenharia Didática utilizando a hibridização e a hipercomplexificação de sequências como conteúdos matemáticos a fim de realizar uma transposição didática desse conteúdo, ou seja, explorar os comportamentos e obstáculos epistemológicos surgidos a partir da aplicação das situações didáticas projetadas para o ensino da hibridização e hipercomplexificação de sequências lineares recursivas através de teoremas e propriedades, comparando-as com as previsões iniciais.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

Desconfortos e Riscos

Você não deve participar deste estudo, caso venha sentir-se constrangido com algum dos procedimentos anteriormente citados, tendo a liberdade de deixar de participar do estudo em qualquer momento, sem haver nenhum prejuízo para a sua conduta.

Benefícios

Os participantes terão a oportunidade de participar de situações didáticas possibilitando aos discentes da Licenciatura em Matemática desenvolver uma concepção epistemológica da História

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703

Bairro: Jardim América

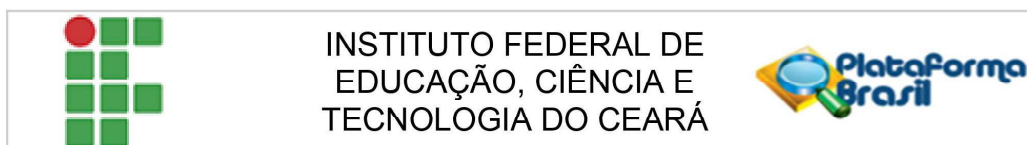
UF: CE

Município: FORTALEZA

CEP: 60.410-426

Telefone: (85)3401 2332

E-mail: cep@ifce.edu.br



Continuação do Parecer: 4.066.001

da Matemática através de estudos de definições, teoremas e propriedades matemáticas inerentes à Híbridação e Hipercomplexificação de Sequências Lineares Recursivas. Assim, contribuirão com a formação inicial dos professores.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

Apesar da amostra pequena considerada para o experimento a pesquisa apresenta uma temática interessante e contribuirá para a melhoria da transferência de conhecimento na matemática.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

Estão a contento.

Recomendações:

Dizer a forma como os alunos serão selecionados para o estudo.

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

Não há pendências

Considerações Finais a critério do CEP:

É importante ressaltar que, caso alguma Instituição Coparticipante possua Comitê de Ética em Pesquisa (CEP), o projeto, também, deverá ser avaliado no CEP da Instituição Coparticipante, após a aprovação no CEP da Instituição Proponente, devendo o pesquisador aguardar, também, a aprovação na Instituição Coparticipante antes de iniciar sua pesquisa. Logo, recomenda-se/solicita-se que o pesquisador efetue essa verificação.

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_1517729.pdf	28/04/2020 14:35:04		Aceito
Cronograma	cronograma_novo.pdf	28/04/2020 14:34:34	MILENA CAROLINA DOS SANTOS MANGUEIRA	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	termo_de_consentimento_livre.docx	17/04/2020 13:02:27	MILENA CAROLINA DOS SANTOS MANGUEIRA	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	PROJETO_FINAL.docx	17/04/2020 12:58:23	MILENA CAROLINA DOS SANTOS MANGUEIRA	Aceito
Declaração de	INFRAESTRUTURA.pdf	07/03/2020	MILENA CAROLINA	Aceito

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703

Bairro: Jardim América

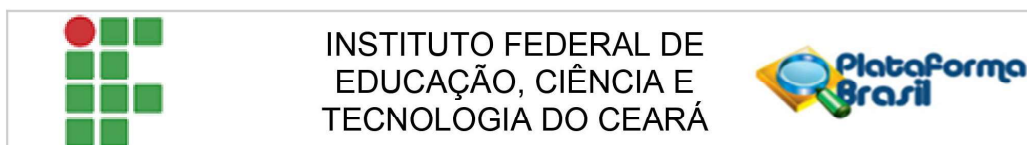
CEP: 60.410-426

UF: CE

Município: FORTALEZA

Telefone: (85)3401-2332

E-mail: cep@ifce.edu.br



Continuação do Parecer: 4.066.001

Instituição e Infraestrutura	INFRAESTRUTURA.pdf	10:59:17	DOS SANTOS MANGUEIRA	Aceito
Folha de Rosto	FOLHA_DE_ROSTO.pdf	07/03/2020 10:58:18	MILENA CAROLINA DOS SANTOS MANGUEIRA	Aceito
Outros	COMPROMISSO_RESULTADOS.pdf	03/03/2020 11:02:10	MILENA CAROLINA DOS SANTOS MANGUEIRA	Aceito
Outros	DECLARACAO_GARANTIA_BENEFICIO.pdf	03/03/2020 10:53:01	MILENA CAROLINA DOS SANTOS MANGUEIRA	Aceito
Orçamento	ORCAMENTO.pdf	03/03/2020 10:46:25	MILENA CAROLINA DOS SANTOS MANGUEIRA	Aceito

Situação do Parecer:

Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:

Não

FORTALEZA, 03 de Junho de 2020

Assinado por:
Jefté Ferreira da Silva
 (Coordenador(a))

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703**Bairro:** Jardim América**CEP:** 60.410-426**UF:** CE **Município:** FORTALEZA**Telefone:** (85)3401-2332**E-mail:** cep@ifce.edu.br