



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ
IFCE *CAMPUS* FORTALEZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
- PPGECM

RENATA TEÓFILO DE SOUSA

CATEGORIAS DO RACIOCÍNIO INTUITIVO E O ENSINO DE PARÁBOLAS EM
GEOMETRIA ANALÍTICA COM APORTE DO *SOFTWARE* GEOGEBRA

FORTALEZA

2022

RENATA TEÓFILO DE SOUSA

CATEGORIAS DO RACIOCÍNIO INTUITIVO E O ENSINO DE PARÁBOLAS EM
GEOMETRIA ANALÍTICA COM APORTE DO *SOFTWARE* GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao curso de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PGECM) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) - *Campus* Fortaleza, como requisito para obtenção do Título de Mestre. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.

Coorientadora: Profa. Dra. Maria José Araújo Souza.

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal do Ceará - IFCE
Sistema de Bibliotecas - SIBI
Ficha catalográfica elaborada pelo SIBI/IFCE, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- S725c Sousa, Renata Teófilo de.
 Categorias do Raciocínio Intuitivo e o ensino de parábolas em Geometria Analítica com o aporte do software GeoGebra / Renata Teófilo de Sousa. - 2022.
 222 f. : il. color.
- Dissertação (Mestrado) - Instituto Federal do Ceará, Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Campus Fortaleza, 2022.
 Orientação: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.
 Coorientação: Prof. Dr. Maria José Araújo Souza.
1. Parábolas. 2. Geometria Analítica. 3. Teoria das Situações Didáticas. 4. Categorias do Raciocínio Intuitivo. 5. GeoGebra. I. Título.

CDD 510.07

RENATA TEÓFILO DE SOUSA

CATEGORIAS DO RACIOCÍNIO INTUITIVO E O ENSINO DE PARÁBOLAS EM
GEOMETRIA ANALÍTICA COM APORTE DO *SOFTWARE* GEOGEBRA

Dissertação apresentado ao curso de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) - *Campus* Fortaleza, como requisito para obtenção do Título de Mestre. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovado (a) em: 16 /12 / 2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves (Orientador)

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) – *Campus* Fortaleza

Profa. Dra. Maria José Araújo Souza (Coorientadora)

Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA)

Profa. Dra. Ana Paula Aires (membro externo)

Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD - Portugal)

Profa. Dra. Marluce Alves dos Santos (membro externo)

Universidade do Estado da Bahia (UNEB)

Prof. Dr. Francisco José de Lima (membro interno)

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) – *Campus* Cedro

A Deus.

Aos meus pais Francisca e Stênio (*in
memorian*) e ao meu esposo Marcelo.

Aos meus professores, com carinho.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me permitir finalizar esta etapa da vida acadêmica, sem me deixar desistir ou vacilar sobre meu propósito enquanto pesquisadora e aprendiz.

À minha família, em especial à minha mãe Francisca, pelo incentivo aos estudos desde a infância, por ser minha parceira em todos os momentos da vida e apoiar os meus sonhos incondicionalmente. Ao meu esposo Marcelo, por sempre me motivar, me acolher e me compreender nos momentos de ausência e de incertezas, acreditando em mim e sendo meu alicerce nas horas mais difíceis.

Ao meu orientador, professor Dr. Francisco Régis Vieira Alves, por acreditar em mim e me confiar a oportunidade de ser sua aprendiz. Por todos os ensinamentos, conselhos, por todo o material, saberes acadêmicos e de vida compartilhados, pelas orientações e conversas e, sobretudo, pela palavra amiga nos momentos de dificuldades.

À minha coorientadora e professora da graduação, Dra. Maria José Araújo Souza, por todas as suas contribuições para a realização desta pesquisa, especialmente a realização do experimento em campo, pelas reuniões valiosas mesmo nos horários o mais tarde possível (duas corujas), pelos conselhos, lições de vida, risos e atenção.

Aos professores da banca, Dra. Ana Paula Aires, Dra. Marluce Alves dos Santos e Dr. Francisco José de Lima pela disponibilidade ao aceitar o convite e por suas valiosas contribuições, que certamente vieram a somar para o crescimento desta pesquisa.

A todos os professores do PPGECEM/IFCE, pelos ensinamentos e contribuições no decorrer do meu processo formativo, por serem agregadores, sensíveis e compreensivos diante da realidade do ensino remoto, das perdas de familiares e amigos decorrentes do cenário da pandemia e da dificuldade para a liberação para estudos em nossos processos de afastamento.

Aos amigos e colegas de turma que considero como irmãos de guerra, em especial aos que me acompanharam mais de perto neste processo, Arnaldo Dias, Carla Patrícia, Joelma Alves, Narla Matias e Graciene Moreira. Estes viveram comigo muitos dos desafios e me ajudaram a vencê-los. Aos amigos Paulo Vítor Santiago e Italândia Azevedo, por compartilhar suas experiências, materiais, parceria em trabalhos e incentivo. Agradeço imensamente o carinho, o apoio, a paciência, os conselhos, a troca de experiências e, sobretudo, a amizade que se tornou um laço mais forte com o passar do tempo.

À Secretaria de Educação do Estado do Ceará, por oportunizar meu afastamento, mesmo que tardio, me possibilitando ir a campo e coletar os dados desta pesquisa, estudar com afinco, escrever esta dissertação e concluí-la da melhor forma possível.

“Apprendre ne consiste pas seulement à acquérir de l’information en tant que moyen de réduire l’incertitude, cela consiste aussi à envisager des possibilités nouvelles donc, provisoirement à accroître l’incertitude du joueur”. (BROUSSEAU, 1990, p. 318).

RESUMO

Esta pesquisa traz um estudo acerca do ensino de parábolas no campo da Geometria Analítica, seus percalços e possibilidades, visando contribuir para a formação inicial do professor de Matemática. Para tal, utilizamos como aporte a Teoria das Situações Didáticas (TSD) e o *software* GeoGebra, para modelar as situações de ensino, as Categorias do Raciocínio Intuitivo para a análise dos dados coletados e a Engenharia Didática (ED), com ênfase na Engenharia Didática de Formação (EDF), como metodologia de pesquisa. Assim, o objetivo deste trabalho foi analisar as contribuições da TSD para o ensino do conceito de parábolas, mediante a identificação e registro das Categorias do Raciocínio Intuitivo com aporte do *software* GeoGebra. A partir de uma análise preliminar, reconhecemos que há lacunas de ordem epistemológica na formação inicial acerca do ensino deste tema, bem como escassa ou ausente abordagem do tema tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior, sobretudo com uso da tecnologia. Deste modo, desenvolvemos em nossa análise *a priori* um conjunto de situações didáticas que visam compreender a natureza destas lacunas, explorando o raciocínio matemático no campo epistêmico, a partir dos distintos modelos de raciocínio intuitivo. O GeoGebra foi utilizado para o desenvolvimento das situações didáticas, como forma de auxiliar a compreensão dos elementos da parábola, explorando sua visualização algébrica, analítica e geométrica. Para a experimentação desta pesquisa contamos com um grupo de oito (8) graduandos da Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA), situada em Sobral - CE. Estes participantes colaboraram de forma voluntária em uma atividade de pesquisa na modalidade presencial, desenvolvida pelo Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática e Ensino à Distância (GEPEMED/UVA), no primeiro semestre de 2022, onde foram conectados à realidade de sua futura profissão, mediante atividades e discussões pautadas na contribuição do avanço deste tema. A coleta de dados foi realizada por meio de questionários, fotografias, registros de áudio e vídeo e produções no ambiente GeoGebra. Com base nos resultados da pesquisa e em nossa análise *a posteriori* e validação interna, temos que o reconhecimento e registro das Categorias do Raciocínio Intuitivo nos mostram algumas fragilidades presentes na formação inicial, relacionadas aos conhecimentos prévios ainda restritos dos sujeitos acerca da parábola pela óptica da Geometria Analítica. Entretanto, notamos também a manifestação de intuições que podem ser consideradas relevantes para o processo de evolução do ensino deste tópico, diante do modelo de abordagem delineado com a contribuição do GeoGebra e a possibilidade de construir, visualizar e manipular elementos em seu ambiente. Desta forma, entendemos que as situações didáticas elaboradas possuem potencial para estimular o desenvolvimento de generalizações, apreensão de propriedades e/ou analogias, gerando uma visão da parábola que relaciona seus aspectos algébrico, geométrico e analítico, o que consideramos como um contributo desta pesquisa para a formação docente.

Palavras-chave: Parábolas. Geometria Analítica. Teoria das Situações Didáticas. Categorias do Raciocínio Intuitivo. GeoGebra.

ABSTRACT

This research brings a study about the teaching of parabolas in the field of Analytical Geometry, its mishaps and possibilities, aiming to contribute to the initial formation of the mathematics teacher. To this end, we used the Theory of Didactic Situations (TDS) and the GeoGebra software to model teaching situations, the Categories of Intuitive Reasoning for the analysis of the collected data and Didactic Engineering (DE), with an emphasis on Training Didactic Engineering (TDE) as a research methodology. Thus, the objective of this work was to analyze the contributions of TSD to the teaching of the concept of parabolas, through the identification and registration of the Categories of Intuitive Reasoning with the contribution of the GeoGebra software. From a preliminary analysis, we recognize that there are epistemological gaps in the initial training on the teaching of this topic, as well as a scarce or absent approach to the topic both in Basic Education and in Higher Education, especially with the use of technology. Thus, in our a priori analysis, we developed a set of didactic situations that aim to understand the nature of these gaps, exploring mathematical reasoning in the epistemic field, based on different models of intuitive reasoning. GeoGebra was used for the development of didactic situations, as a way of helping to understand the elements of the parabola, exploring its algebraic, analytical and geometric visualization. For the experimentation of this research, we have a group of eight (8) undergraduates in Mathematics at the State University Vale do Acaraú (UVA), located in Sobral - CE. These participants voluntarily collaborated in a research activity in the face-to-face modality, developed by the Group of Studies and Research in Mathematics Education and Distance Learning (GEPEMED/UVA), in the first semester of 2022, where they were connected to the reality of their future profession, through activities and guided by discussions and contribution to the advancement of this topic. Data collection was carried out through questionnaires, photographs, audio and video recordings and productions in the GeoGebra environment. Based on the research results and on our a posteriori analysis and internal validation, we have that the recognition and registration of the Categories of Intuitive Reasoning show us some weaknesses of initial training, related to the subjects still restricted prior knowledge about the parabola from the perspective of Analytical Geometry. However, we also noticed the manifestation of intuitions that can be considered relevant to the evolution process of teaching this topic, given the approach model outlined with the contribution of GeoGebra and the possibility of building, visualizing and manipulating elements in its environment. In this way, we understand that the didactic situations elaborated have the potential to stimulate the development of generalizations, apprehension of properties and/or analogies, generating a vision of the parable that relates its algebraic, geometric and analytical aspects, which we consider as a contribution of this research to teacher training.

Keywords: Parabolas. Analytical Geometry. Theory of Didactic Situations. Categories of Intuitive Reasoning. GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	— Triângulo Didático, segundo a TSD	26
Figura 2	— Diagrama representativo sobre a relação entre o saber e o conhecimento.....	35
Figura 3	— Efraim Fischbein (<i>in memorian</i>)	37
Figura 4	— Exemplo de conceito sem controle sobre a imagem.....	44
Figura 5	— Relação entre os níveis de raciocínio na TSD e as Categorias Intuitivas	49
Figura 6	— Noções complementares de Engenharias desenvolvidas na Franca	54
Figura 7	— Objetivos e aspectos centrais das Engenharias de 1ª e 2ª Geração	56
Figura 8	— Aspectos e diferenças entre a IDR e a IDD	57
Figura 9	— Representação geométrica da parábola, segundo Venturi	59
Figura 10	— Representação geométrica da parábola, segundo Lima	60
Figura 11	— Elementos de uma parábola	60
Figura 12	— Dedução da equação da parábola	61
Figura 13	— Influência do parâmetro p na concavidade da parábola – 1	62
Figura 14	— Influência do parâmetro p na concavidade da parábola – 2	62
Figura 15	— Parábola com vértice fora da origem	63
Figura 16	— Comportamento do gráfico com base no valor de a e Δ em uma função quadrática	64
Figura 17	— Esboço de um Sistema de Coordenadas Polares	67
Figura 18	— Representação gráfica do Teorema 1	68
Figura 19	— A parábola no sistema de coordenadas polares	68
Figura 20	— Parábola como a secção de um cone	69
Figura 21	— Parábola a partir de dobraduras de papel	82
Figura 22	— Parábola com dobraduras no ambiente GeoGebra	83
Figura 23	— Retas tangentes à parábola de foco F e diretriz d	84
Figura 24	— Construção da ponte pênsil – situação didática II	88
Figura 25	— Sugestão de solução feita via software para computador	90
Figura 26	— Solução feita via aplicativo para <i>smartphone</i>	91
Figura 27	— Demonstração da equação da parábola com eixo paralelo ao eixo x	92
Figura 28	— Gráfico de $y = 4x^2 - 24x + 37$	94
Figura 29	— Esboço de $(x - 3)^2 = \frac{1}{4}(y - 1)$ no GeoGebra.....	95
Figura 30	— Solução da SD4 no GeoGebra	95

Figura 31	— Situação Didática V no GeoGebra	97
Figura 32	— Manipulação apenas do vértice V no GeoGebra	99
Figura 33	— Parábola quando $V \neq (0,0)$ e α não pertence aos eixos coordenados	100
Figura 34	— Esboço inicial do participante na situação de ação	102
Figura 35	— Segundo esboço do participante na situação de formulação	103
Figura 36	— Transposição do papel para o <i>software</i>	104
Figura 37	— Parábola construída no pré-experimento	106
Figura 38	— Folder de divulgação dos encontros	109
Figura 39	— Situação de ação dos participantes P7 (à esquerda) e P8 (à direita)	117
Figura 40	— Registro da etapa de formulação da SD1	118
Figura 41	— Construção manual do participante P6	119
Figura 42	— Formulação de P3 (acima) e P5 (abaixo)	120
Figura 43	— Formulação de P1 no GeoGebra	121
Figura 44	— Construção final de P1	122
Figura 45	— Formulação de P2 (parte 1)	122
Figura 46	— Formulação de P2 (parte 2)	123
Figura 47	— Formulação de P4	123
Figura 48	— Construção final de P4	124
Figura 49	— Construções de P7	125
Figura 50	— Tentativa inicial de solução do participante P5	128
Figura 51	— Esboço do participante P2	129
Figura 52	— Solução analítica de P1, similar a P8, com uso de sistemas lineares	130
Figura 53	— Formulação do participante P3	131
Figura 54	— Registro de apresentação dos participantes P1 (à direita) e P7 (à esquerda) ...	132
Figura 55	— Apresentação da solução de P1	132
Figura 56	— Apresentação da solução de P7	133
Figura 57	— Validação de P1 – parte 1	133
Figura 58	— Validação de P1 – parte 2	134
Figura 59	— Validação de P4	135
Figura 60	— Validação de P5 (similar à de P8)	135
Figura 61	— Validação de P6	136
Figura 62	— Validação de P7	137
Figura 63	— Validação de P2 – parte 1	137

Figura 64	— Validação de P2 – parte 2	138
Figura 65	— Validação de P2 – parte 3	140
Figura 66	— Modelo de solução complementar à situação de institucionalização	141
Figura 67	— SD3 - Formulação de P2	143
Figura 68	— Formulação de P1 para os raios luminosos	145
Figura 69	— Construção final de P1	145
Figura 70	— Formulação de P2 no GeoGebra	146
Figura 71	— Validação de P2	147
Figura 72	— Formulação de P3 no GeoGebra	147
Figura 73	— Validação de P3 – registro escrito	148
Figura 74	— Formulação de P4	148
Figura 75	— Validação de P4 – registro no GeoGebra	149
Figura 76	— Validação de P4 – registro escrito	149
Figura 77	— Formulação de P6 – parte 1	150
Figura 78	— Formulação de P6 – parte 2	151
Figura 79	— Validação de P6 – registro escrito	151
Figura 80	— Validação de P6 – registro no GeoGebra	152
Figura 81	— Situação de Ação - P1, P6 e P7, da direita para a esquerda	154
Figura 82	— Situação de Ação de P3 para o cálculo do vértice	154
Figura 83	— Situação de formulação de P1	155
Figura 84	— Situação de formulação de P2	157
Figura 85	— Cálculo do foco de P3 na SD4	158
Figura 86	— Cálculo do foco de P3 na SD4 – corrigido	158
Figura 87	— Equívoco de P3 na SD4	159
Figura 88	— Formulação de P4 – parte 1	159
Figura 89	— Formulação de P4 – parte 2	160
Figura 90	— Formulação de P5	160
Figura 91	— Formulação de P6	161
Figura 92	— Construção final de P6	161
Figura 93	— Formulação de P7	163
Figura 94	— Formulação de P8	163
Figura 95	— Validação da SD4 pelo participante P7	164
Figura 96	— Validação apresentada pela turma	165

Figura 97	— Institucionalização da SD4	166
Figura 98	— Situação de formulação da SD5.....	167
Figura 99	— Validação da SD5 - dupla P6 e P7	168
Figura 100	— Validação da SD5 – dupla P2 e P5	169
Figura 101	— Validação da SD5 – dupla P1 e P4	169
Figura 102	— Validação da SD5 – dupla P3 e P8	170

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 — Fases da Engenharia Didática Clássica	52
Quadro 2 — Situações didáticas propostas	79
Quadro 3 — Situações didáticas e suas respectivas fontes	80
Quadro 4 — Cronograma das atividades	110
Quadro 5 — Parte I – Perfil acadêmico/profissional dos participantes	112
Quadro 6 — Parte 2 – Conhecimentos relativos ao GeoGebra	113
Quadro 7 — Inventário de documentos da pesquisa	115
Quadro 8 — Perguntas do questionário final	182
Quadro 9 — Resposta à terceira questão do questionário final	183

LISTA DE SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
TSD	Teoria das Situações Didáticas
IFCE	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
DM	Didática da Matemática
ED	Engenharia Didática
EDF	Engenharia Didática de Formação
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
UVA	Universidade Estadual Vale do Acaraú
DM	Didática da Matemática
IREM	<i>Institut Universitaire de Recherche sur L'Enseignement des Mathématiques</i>
LIMA	Laboratório de Informática do Curso de Matemática
SD	Situação Didática
IDD	<i>Ingénierie Didactique de Développement</i>
IDR	<i>Ingénierie Didactique pour la Recherche</i>
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
GEPEMED	Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática e Ensino à Distância
CEP	Comitê de Ética e Pesquisa
CCET	Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	19
2	REFERENCIAL TEÓRICO E METODOLÓGICO	25
2.1	Teoria das Situações Didáticas	25
2.1.1	<i>Situação de Ação.....</i>	30
2.1.2	<i>Situação de Formulação</i>	31
2.1.3	<i>Situação de Validação</i>	32
2.1.4	<i>Situação de Institucionalização</i>	34
2.2	Categorias do Raciocínio Intuitivo	36
2.2.1	<i>Classificação das Categorias do Raciocínio Intuitivo</i>	38
2.2.2	<i>O raciocínio intuitivo em Geometria.....</i>	42
2.2.3	<i>Relação entre a Teoria das Situações Didáticas e as Categorias do Raciocínio Intuitivo</i>	45
2.3	Engenharia Didática Clássica	50
2.4	Engenharia Didática de Formação	53
3	ANÁLISES PRELIMINARES	59
3.1	A parábola em Geometria Analítica	59
3.2	A parábola como gráfico de uma função quadrática	63
3.3	A parábola em coordenadas polares	66
3.4	A parábola como uma secção cônica	69
3.5	Aspectos históricos, epistemológicos e didáticos no ensino de parábolas	71
3.6	O papel do GeoGebra na construção do conceito de parábola	75
4	ANÁLISE <i>A PRIORI</i>	77
4.1	Situações Didáticas e seu <i>mise en place</i>	78
4.2	Análise <i>a priori</i> das situações	81
4.2.1	<i>Situação Didática I</i>	81

4.2.2	<i>Situação Didática II</i>	85
4.2.3	<i>Situação Didática III</i>	88
4.2.4	<i>Situação Didática IV</i>	92
4.2.5	<i>Situação Didática V</i>	96
4.3	Pré-experimento	101
5	EXPERIMENTAÇÃO	108
5.1	Procedimentos iniciais	108
5.2	Caracterização do locus e sujeitos da pesquisa	111
5.3	Descrição da experimentação	114
5.3.1	<i>Experimentação da Situação Didática I</i>	116
5.3.2	<i>Experimentação da Situação Didática II</i>	127
5.3.3	<i>Experimentação da Situação Didática III</i>	141
5.3.4	<i>Experimentação da Situação Didática IV</i>	153
5.3.5	<i>Experimentação da Situação Didática V</i>	166
6	ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO INTERNA	173
6.1	<i>Análise a posteriori e validação da SD1</i>	174
6.2	<i>Análise a posteriori e validação da SD2</i>	175
6.3	<i>Análise a posteriori e validação da SD3</i>	177
6.4	<i>Análise a posteriori e validação da SD4</i>	178
6.5	<i>Análise a posteriori e validação da SD5</i>	180
6.6	<i>Análise do questionário final</i>	181
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS E PESQUISAS FUTURAS	184
	REFERÊNCIAS	189
	APÊNDICE A — TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)	198
	APÊNDICE B — QUESTIONÁRIO INICIAL	201

APÊNDICE C — QUESTIONÁRIO FINAL	202
APÊNDICE D — SITUAÇÕES DIDÁTICAS	203
ANEXO A – PARECER DO COMITÊ DE ÉTICA E PESQUISA	208
ANEXO B – MATRIZ CURRICULAR DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DA UVA	213

1. INTRODUÇÃO

A Geometria Analítica é um campo da Matemática que permite a resolução de problemas geométricos por métodos algébricos. Seu estudo tem grande importância na solução de situações diversas, sendo aplicado na Física e Engenharias e servindo como base para outras áreas, como Geometria Discreta, Geometria Computacional, Geometria Diferencial e Geometria Algébrica. No entanto, a compreensão deste assunto requer assimilação de uma abstração matemática pelo estudante, o que por muitas vezes é encarado de forma negativa, sendo um entrave em sua aprendizagem.

Halberstadt (2015) afirma que uma possível dificuldade epistemológica acerca do aprendizado da Geometria Analítica deve-se ao fato de que esta tem caráter bidimensional, sendo necessário o conhecimento prévio tanto da Álgebra quanto da Geometria. Além desta, outra dificuldade encontrada é a compreensão geral do assunto, tendo em vista que seus conceitos e propriedades são abstratos. Portanto, entendemos que isto pode ser um fator que dificulta a aprendizagem do estudante, visto que as aulas correm o risco de se tornarem excessivamente técnicas, causando desinteresse e, conseqüentemente prejudicando o desempenho. Conforme Nasser (2013) a abstração matemática faz parte do processo de evolução do pensamento, porém, para que esta evolução ocorra, é necessária a reconstrução de estruturas cognitivas que permitam que o processo de ensino e aprendizagem ocorra de forma eficaz.

Segundo Alves e Pereira (2016) a própria linguagem trazida pelos livros didáticos e utilizada na transmissão conceitual da Geometria Analítica acarreta dificuldades na compreensão do assunto, sendo apresentada como se tais conceitos fossem construídos em uma sequência de passos, sem explorar o real significado de cada termo envolvido. A aprendizagem efetiva destes conceitos se faz necessária ao desenvolvimento do estudante, o que reforça a importância da competência profissional do docente no âmbito epistêmico, ao buscar uma apresentação clara e que tenha significado, bem como uma melhor desenvoltura no ensino deste campo do conhecimento, visando fluidez no processo de aprendizagem de seus estudantes.

Com relação ao ensino do tópico de parábolas dentro da Geometria Analítica, poucas são as aplicações vistas em sala de aula, tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior (BERMÚDEZ; MESA, 2018; CERQUEIRA, 2015; HALBERSTADT, 2013; MACEDO, 2015; SIQUEIRA, 2016). Entretanto a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) aponta a importância de se articular a Geometria e a Álgebra para construir significado matemático

para o estudante, onde não se devem tratar as equações de modo desvinculado de sua interpretação geométrica (BRASIL, 2018).

A Geometria Analítica é um assunto de grande relevância para o desenvolvimento dos estudantes na disciplina de Matemática, não apenas na Educação Básica, mas também para sua desenvoltura em cursos de graduação na área de Ciências Exatas, dadas suas contribuições para a Engenharia, Arquitetura, Astronomia, entre outras áreas. Por conseguinte, é importante que o professor busque explorar este assunto com uma abordagem que traga significado, inovando sua prática por meio da tecnologia e da inter-relação entre a Geometria Analítica e outros tópicos da Matemática.

Deste modo, é importante investigar a conexão entre Álgebra e Geometria, oriundas da própria Geometria Analítica, em busca de uma articulação que desenvolva o pensamento abstrato no estudante. Isto mostra também a importância de se trabalhar esta temática com professores que são atuantes na Educação Básica, o que geralmente não ocorre ou quando ocorre, é de modo muito abreviado, na formação inicial no contexto brasileiro (SIQUEIRA, 2016). Além disso, a BNCC sugere o uso de recursos tecnológicos por meio de *softwares* ou aplicativos, como forma de viabilizar a metodologia empregada pelo professor em sala de aula (BRASIL, 2018).

Partindo do exposto, compreendemos que há lacunas na formação inicial do professor de Matemática no tocante ao ensino de Geometria Analítica, que podem ser de ordem epistemológica (e até mesmo didática), sobretudo com uso da tecnologia. No que diz respeito à especificidade matemática dentro deste campo, atemo-nos ao estudo da parábola, dada sua presença tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior, bem como os distintos modelos de abordagem apresentados nos livros-texto. Assim, buscamos desenvolver uma pesquisa para compreender os percalços presentes no campo epistêmico do docente ao trabalhar este tema em sala de aula.

De modo mais acentuado, a problemática a ser investigada nesta dissertação surge diante da dificuldade de os docentes de Matemática apresentarem uma abordagem da parábola diferente do ensino tradicional – binômio quadro-pincel –, da escassa associação entre seu viés algébrico, geométrico e analítico, além da rara exploração deste tópico com uso de tecnologias.

Como forma de ampliar os estudos e compreender esta problemática, amparamo-nos na vertente francesa da Didática da Matemática (DM), devido ao fato de que seus estudos trazem diversas correntes que questionam os paradigmas canônicos que permeiam a formação do professor de Matemática e o ensino de seus componentes curriculares (ALVES, 2017).

Dentre os estudos da DM, estruturamos esta investigação na metodologia de pesquisa Engenharia Didática (ED) por sua adequabilidade quando se trata de projetar situações (TEMPIER, 2011), dado o fato de que a ED, a partir de sua gênese, possibilita um olhar diferenciado sobre as realizações didáticas em sala de aula, sobretudo concentrada na relação binomial ensino-aprendizagem, ou seja “na concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino [...] cuja validação é essencialmente interna, baseada no confronto entre as análises *a priori* e *a posteriori*” (ARTIGUE, 1988, p. 286).

Alves e Dias (2019, p. 6) enfatizam que “a ED é uma metodologia de pesquisa, sendo assim se torna indispensável o uso de teorias que servem para fundamentar a investigação e para a leitura/interpretação dos dados possivelmente produzidos pelos estudantes”. Partindo dessa concepção, adotamos a Teoria das Situações Didáticas (TSD), também de origem francesa, como uma teoria de ensino compatível com a ED e com os objetivos a serem atingidos nesta pesquisa, sendo norteadora da experimentação desenvolvida.

A TSD, concebida por Guy Brousseau na década de 80, a partir dos estudos da DM, endossa uma forma de compreensão acerca da relação existente entre estudante, professor e saber, bem como o meio (*milieu*) em que a situação didática ocorre. Nesse sentido, a TSD busca tornar o estudante um investigador, à medida que o professor (mediador) fornece situações fundamentais para que este estudante, a partir de suas ações, construa o seu próprio conhecimento. Ou seja, com base em seus conhecimentos prévios e percepções instigadas pelo professor durante as sessões de ensino, o estudante pode aprimorar o seu saber, adquirindo novos conhecimentos.

Outro ponto balizador desta investigação, que se relaciona com a abstração e o aspecto predominantemente algébrico e algorítmico da parábola, são as Categorias do Raciocínio Intuitivo na perspectiva das pesquisas do psicólogo e estudioso romeno Efraim Fischbein. O ensino da parábola tende a perdurar sob formato mecanizado, com procedimentos e técnicas decoradas e, compreendendo isto como parte das dificuldades de aprendizagem de muitos estudantes, desenvolvemos um conjunto de situações didáticas que exploram a parábola por diferentes perspectivas (algébrica, geométrica, analítica) com uso da tecnologia, a fim de identificar a manifestação de tais categorias e suas possíveis contribuições para o ensino com arrimo da TSD e do *software* GeoGebra.

Assim, trazemos como pergunta diretriz desta investigação: **Como a Teoria das Situações Didáticas pode proporcionar a concepção/construção de um modelo didático¹, visando o ensino do conceito de parábolas, mediante o interesse pela mobilização e registro empírico das Categorias do Raciocínio Intuitivo?**

Em busca de responder este questionamento, traçamos como objetivo geral para esta pesquisa analisar as contribuições da TSD para o ensino do conceito de parábolas, mediante a identificação e registro das Categorias do Raciocínio Intuitivo com aporte do *software* GeoGebra. Para atingir este objetivo geral, foram delineados os seguintes objetivos específicos:

- (i) Identificar obstáculos/lacunas que permeiam o ensino de parábolas pelo prisma da Geometria Analítica;
- (ii) Verificar se as situações didáticas elaboradas com o arrimo do *software* GeoGebra proporcionam estímulos para uma mobilização do campo intuitivo, diante das possibilidades de construção, visualização e manipulação;
- (iii) Identificar e registrar as Categorias do Raciocínio Intuitivo manifestadas pelos sujeitos com base em suas ações e estratégias para solucionar as situações didáticas propostas.

Utilizamos a TSD para organização das situações didáticas e a ED enquanto metodologia de pesquisa, dando ênfase à Engenharia Didática de Formação (EDF), por se tratar de um estudo desenvolvido com professores em formação inicial. Além disso, analisamos a experimentação das situações didáticas pelo viés das Categorias do Raciocínio Intuitivo, tendo como suporte o *software* GeoGebra para estimular as manifestações intuitivas, bem como a percepção geométrica a partir da visualização, construção e manipulação.

Almejamos contribuir para o aperfeiçoamento da práxis do professor em formação inicial no tópico de parábolas, oferecendo diferentes maneiras de ver, compreender e abordar este tópico em seu futuro lócus de trabalho. Nesse sentido, tencionamos uma viabilidade destes licenciandos ampliarem suas concepções matemáticas e possibilidades de institucionalização dentro do campo da Geometria Analítica, apresentando a relação existente entre a parábola e sua aparição em diferentes contextos (SOUSA; ALVES, 2022).

¹ De acordo com Brousseau (1990), para modelar a relação didática e prever os diferentes modos de operação, deve-se considerar a combinação de distintos sistemas interativos para revelar dois papéis diferenciados (o do aluno e o do professor), através de suas relações recíprocas e sua relação com o conhecimento, bem como estudar a compatibilidade de suas características particulares.

Os principais teóricos referenciados como base para esta pesquisa foram Brousseau (1996, 2002, 2008) e outros teóricos que discorrem sobre sua pesquisa no campo da Teoria das Situações Didáticas; Artigue *et al.* (1995), Artigue (1996), Almouloud e Coutinho (2008), Almouloud e Silva (2012), Almouloud (2017), Perrín-Glorian (2011, 2019), Perrín-Glorian e Bellemain (2016, 2019), Alves (2016a, 2016b, 2017, 2018, 2019), Santos e Alves (2017) e Alves e Catarino (2017), Tempier (2011) para a compreensão da Engenharia Didática Clássica e da Engenharia Didática de Formação, e; Fischbein (1982, 1987a, 1987b, 1999, 2001) e Mariotti e Fischbein (1997) na compreensão das Categorias do Raciocínio Intuitivo, bem como o raciocínio intuitivo em Geometria, entre outras obras pertinentes.

Para a etapa de experimentação, contamos com a participação de oito graduandos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA), situada na cidade de Sobral, Ceará, em que buscamos por meio de uma atividade de pesquisa ofertada pelo Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática e Ensino à Distância (GEPEMED/UVA), conectar o professor em formação inicial à realidade de sua futura profissão, através de encontros formativos e discussões pautadas na contribuição do avanço do tema pesquisado.

A coleta de dados foi realizada por meio dos instrumentais: questionários, registros fotográficos, registros escritos, gravações de áudios e vídeos da tela do computador, analisando o percurso das produções dos participantes no GeoGebra, bem como os arquivos .ggb, sendo sua análise estruturada com base nos pressupostos da Engenharia Didática.

A pesquisa foi dividida sete em capítulos que trazem um delineamento para sua concepção, como descritos a seguir.

No capítulo 1 trazemos a introdução deste trabalho, apontando a problemática da pesquisa, sua justificativa e relevância, bem como seus objetivos gerais e específicos. Apontamos os principais teóricos que embasam a pesquisa e uma breve descrição sobre o percurso teórico e metodológico deste trabalho.

No capítulo 2, em suas subdivisões, trazemos o referencial teórico e metodológico da pesquisa, onde discorremos sobre a Teoria das Situações Didáticas; descrevemos características das Categorias do Raciocínio Intuitivo, sua categorização e influência na Geometria, bem como uma relação entre estas e a TSD; em seguida, trazemos uma discussão sobre a Engenharia Didática Clássica e, por fim, apontamos alguns dos pressupostos da Engenharia Didática de Formação, relacionando-os a esta pesquisa.

No capítulo 3 iniciamos o desenvolvimento da ED a partir de uma análise preliminar, abordando o conceito matemático da parábola, alguns dos aspectos históricos,

epistemológicos e didáticos em seu ensino e, por fim, o papel do GeoGebra na construção deste conceito, bem como suas contribuições para tal.

No capítulo 4 apresentamos a análise *a priori*, discorrendo sobre o planejamento e a concepção das situações didáticas a serem desenvolvidas e a descrição de cada uma delas, realizando previsões dos possíveis comportamentos dos sujeitos da pesquisa e soluções que porventura venham a ser apresentados no decorrer dos encontros. Além disso, trazemos os resultados de um pré-experimento, como forma de avaliar as variáveis didáticas da pesquisa e a viabilidade das situações didáticas propostas.

No capítulo 5 descrevemos toda a etapa de experimentação, caracterizando desde a seleção do público-alvo e seu perfil, o lócus da pesquisa, os procedimentos realizados para a coleta de dados e uma descrição da experiência vivenciada no decorrer de cada encontro com o desenvolvimento das situações didáticas, bem como seus registros.

No capítulo 6 dialogamos sobre a análise *a posteriori* e validação interna das situações didáticas desenvolvidas, buscando confrontar os resultados obtidos com os previamente descritos na análise *a priori*, verificando se as conjecturas estabelecidas foram válidas ou não e refletindo sobre as possibilidades de replicação e/ou ampliação deste estudo em outros contextos. Neste capítulo também trazemos uma breve análise sobre o questionário final realizado com os participantes após o encerramento das atividades.

Para finalizar, no capítulo 7 apresentamos as considerações finais, em que fazemos uma retomada do tema e ressaltamos a contribuição acadêmica do trabalho. Também analisamos o cumprimento dos seus objetivos, verificamos as hipóteses estabelecidas e respondemos à pergunta de pesquisa delineada, fechando com uma reflexão sobre os dados mais relevantes da investigação e uma prospecção para pesquisas futuras nesta área.

2. REFERENCIAL TEÓRICO E METODOLÓGICO

“Un élève ne fait pas de mathématiques s'il ne se pose et ne résoud pas de problèmes. Tout le monde est d'accord là-dessus. Les difficultés commencent lorsqu'il s'agit de savoir quels problèmes il doit se poser, qui les pose, et comment” (BROUSSEAU, 1998, p. 117).

Neste capítulo discutimos sobre os aspectos teóricos e metodológicos abordados neste trabalho, com base em uma revisão de literatura dos principais autores que subsidiam esta investigação. Também elencamos os procedimentos metodológicos escolhidos para esta pesquisa, as etapas de sua execução e a forma como ocorre a análise e interpretação de dados.

O desenvolvimento desta dissertação é orientado pela Teoria das Situações Didáticas (TSD) enquanto teoria de ensino, pela Engenharia Didática (ED), na perspectiva da Engenharia Didática de Formação (EDF) como metodologia de pesquisa e Categorias do Raciocínio Intuitivo, enquanto teoria basilar para a interpretação dos dados coletados. A articulação entre as teorias indicadas visa fornecer suporte para o desenvolvimento do professor em formação inicial no que diz respeito ao ensino do tópico matemático de parábolas, como explicitado nas subseções seguintes.

2.1 Teoria das Situações Didáticas (TSD)

A forma como os estudantes assimilam os componentes curriculares na disciplina de Matemática tem sido objeto de estudo de vários *experts* ao longo do tempo. Didatas de grande importância como Yves Chevallard, Gérard Vergnaud (1933-2021), Régine Douady, Michèle Artigue, Guy Brousseau, entre outros pesquisadores, procuravam uma compreensão e aprimoramento relativos aos métodos de transmissão dos conteúdos escolares, seu ensino e aprendizagem e a formação de professores, por meio do campo de investigações denominado Didática da Matemática (DM), tendo a França como berço de sua criação. Alves (2017, p. 298) explica que:

[...] a partir dos anos 80, foram criados na França, centros universitários, espalhados em todo o país que, de modo prosaico, impulsionaram a organização e trabalho conjunto de vários profissionais, de matizes e formações variadas, realmente preocupados com melhorias no sistema de ensino. Chamados de Institutos de Pesquisa sobre o ensino de Matemática (*Institut Universitaire de Recherche sur L'Enseignement des Mathématiques-IREM*), por intermédio do estabelecimento institucional e “transversal” desta estrutura de ideias possibilitou, segundo Douady (1984, p. 2), a evolução de pesquisas levando em consideração os três polos: “professor, alunos de Matemática e sistema de ensino”. (ALVES, 2017, p. 298).

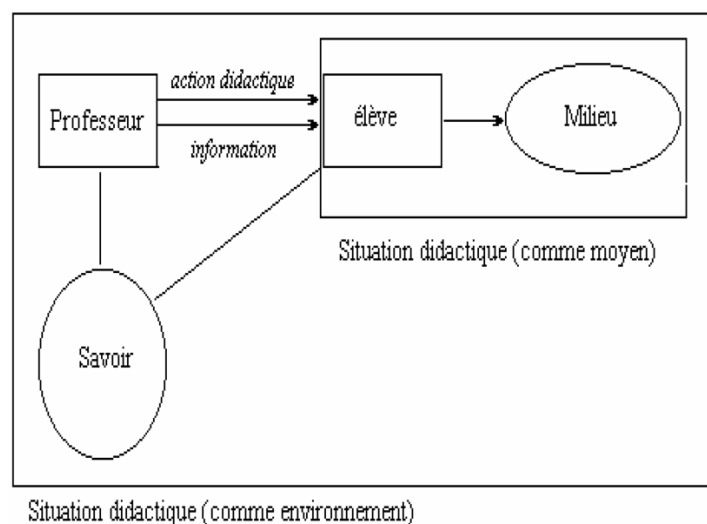
A DM e seus estudos sobre os fenômenos intrínsecos ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática, bem como suas discussões pedagógicas, traz consigo a gênese de alguns elementais teóricos, como os Obstáculos Epistemológicos, a Teoria das Situações Didáticas e o Contrato Didático, a Teoria dos Campos Conceituais, a Transposição Didática e a Engenharia Didática, sendo estes os seus fundamentos da mais influentes no Brasil (SOARES; CARVALHO, 2011), em que o estudante é posto como centro no processo de aprendizagem, descentralizando a figura do professor. Douady (1995, p. 5), sobre a DM, afirma que “[...] se desenvolve uma aproximação histórica e didática das Matemáticas que fornece um caráter mais humano das Matemáticas em face da necessidade de tomar em conta diferentes escalas no tempo”.

Para o embasamento desta pesquisa utilizamos especificamente a Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau, um dos pioneiros deste campo de estudos.

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) viabiliza o entendimento da relação existente entre estudante, professor e o saber, bem como o meio (*milieu*) em que a conjuntura de uma situação didática específica ocorre. Assim, na TSD, a tarefa ou atribuição realizada pelo estudante aproxima-se do trabalho de um pesquisador, em que este estudante, por meio de um conjunto de dialéticas, torna-se capaz de formular hipóteses, teorias e conceitos, à medida que o professor fornece as situações favoráveis para que este, ao agir, transforme aquela informação em conhecimento para si mesmo.

Para conceber o modelo teórico e dialético da TSD, Brousseau esquematizou o que conhecemos por triângulo didático (Figura 1), que tem em seus vértices os pilares das relações entre professor (*professeur*), aluno (*élève*) e o saber (*savoir*), além do meio (*milieu*):

Figura 1: Triângulo Didático, segundo a TSD.



Fonte: Brousseau (1997a, p. 20)

Na perspectiva apontada por Brousseau (1997a), o triângulo apontado traz os pilares que compõem a relação didática, sendo estes constitutivos de uma relação dinâmica, em que “a ação do professor inclui um marcante componente de regulação do processo de aquisição do aluno. O próprio aluno aprende regulando sua relação com seu ambiente” (p. 21). Assim, percebemos que são consideradas as interações *professeur-élève*, *professeur-savoir* e *élève-savoir*, levando em conta o *milieu* como ambiente onde o estudante atua de forma independente.

Ainda conforme Santos e Alves (2017, p. 6), “As relações entre professor-saber, saber-aluno e professor-aluno são estabelecidas no triângulo, a partir de seus vértices, sendo estas assimétricas e conflituosas”, o que nos possibilita a compreensão do fato de que a TSD ocasiona uma reflexão acerca destas relações estabelecidas. Para que tais relações sejam produtivas, devemos considerar um *milieu* elaborado propositalmente pelo professor para incentivar o estudante em sua busca pelo conhecimento, à medida que este se adapta às situações propostas. Segundo Brousseau (2008, p. 21) “Consideramos o *meio* como subsistema autônomo, antagônico ao sujeito”. Assim, o autor ainda evidencia que:

Para um sujeito, “atuar” consiste em escolher diretamente os estados do *meio* antagonista em função de suas próprias motivações. Se o meio reage com certa regularidade, o sujeito pode relacionar algumas informações às suas decisões (*feedback*), antecipar suas respostas e considerá-las em suas futuras decisões. (BROUSSEAU, 2008, p. 21)

Em complementaridade, Brousseau (2002) traz que o aprendizado do estudante ocorre a partir de sua adaptação a um *milieu* que gera contradições, dificuldades e desequilíbrios, fazendo um paralelo à sociedade humana. O conhecimento, resultado da adaptação do estudante, se manifesta por meio de novas respostas, que por sua vez fornecem evidências de aprendizagem. Nesse sentido, a autonomia do estudante é desenvolvida por meio da tomada de decisões, da reflexão, da organização de ideias e estratégias com base em seus conhecimentos prévios, desde que o *milieu* para que as situações didáticas ocorram seja elaborado pelo professor de modo a produzir tais desequilíbrios e sua consequente busca pela compreensão e apreensão do conhecimento, pois “um meio sem intenções didáticas é incapaz de induzir o aluno a adquirir todos os conhecimentos culturais que se espera que ele obtenha” (BROUSSEAU, 2008, p. 34).

Para Teixeira e Passos (2013), a mediação do professor para com o estudante é imprescindível para que a aprendizagem aconteça. O professor, por meio desta mediação, instiga o estudante de maneira intencional, estimulando-o a desenvolver sua autonomia e, consequentemente, propiciando o seu desenvolvimento.

Com efeito, a expressão “situações didáticas” remete aos modelos que descrevem as relações das atividades entre aluno, professor e o *milieu*. De modo amplo temos que o ‘*milieu*’ indica o meio adidático, um sistema antagonista, sem intenção didática explícita e que desempenha um papel central dentro da aprendizagem devido às adaptações e dentro do ensino, como referência e objeto epistemológico. Sua definição, conforme Brousseau (1990, p. 321) é “o *milieu* é um jogo ou uma parte de um jogo que se comporta com um sistema não finalizado”.

Brousseau (2008) aponta que na TSD cada conhecimento está conectado através da interação entre duas ou mais pessoas a um tipo de situação, e essas interações podem ocorrer por meio de um jogo, problema/desafio ou dispositivo com suas próprias regras, em que o desenvolvimento da situação ocasiona a apreensão do conhecimento. Este autor define que “uma ‘situação’ é um modelo de interação de um sujeito com um meio determinado” (BROUSSEAU, 2008, p. 20).

A concepção, organização e planejamento de uma situação didática por si só demanda etapas em que o estudante se encontra sozinho diante do problema e busca resolvê-lo sem a intervenção direta do professor (BROUSSEAU, 2002, 2008). Esta situação é denominada pelo autor como situação adidática, em que o estudante ao interagir com a situação-problema proposta consegue resolvê-la, sem nenhum auxílio ou resposta direta dada pelo professor, fazendo-o apenas com base em seus conhecimentos prévios e vivências. Partindo deste ponto, vale destacar que as situações adidáticas são elaboradas para que coexistam com as situações didáticas, caracterizando e obedecendo a um processo didático pré-determinado por objetivos, métodos, recursos e conceitos, como explicado em Brousseau (2002):

The objects of teaching and the knowledge communicated must allow the student to engage in all non-didactical situations and social practices as a responsible subject and not as a student. This involves, on the one hand, the teacher progressively freeing from their didactical presupposition, the situation which she proposes to the student in relation to a notion, and on the other hand, her acknowledging this adidactical *milieu* as a territory of cultural reference and of functioning of the knowledge taught.”. (BROUSSEAU, 1990, p. 322-323, apud BROUSSEAU, 2002, p. 226)².

² Os objetos de ensino e os conhecimentos comunicados devem permitir que o aluno se envolva em todas as situações não didáticas e práticas sociais como sujeito responsável e não como aluno. Isso envolve, por um lado, o professor libertando progressivamente de seu pressuposto didático, a situação que ela propõe ao aluno em relação a uma noção, e por outro lado, seu reconhecendo este meio adidático como território de referência cultural e de funcionamento dos saberes ensinados. (BROUSSEAU, 1990, p. 322-323, apud BROUSSEAU, 2002, p. 226, tradução nossa).

Deste modo, o estudante tem ciência de que a situação-problema foi escolhida para incitá-lo a adquirir um novo conhecimento. Entretanto, este conhecimento é totalmente justificado pela lógica interna da situação e que, possivelmente demanda razões didáticas para construí-lo (BROUSSEAU, 1976; 1990; 2002; 2008).

Assim, a concepção de uma situação didática abrange a elaboração de circunstâncias favoráveis para que o estudante, de fato, desenvolva suas habilidades e construa o conhecimento. O incentivo à cooperação entre estudantes e professor é uma relação que desenvolve capacidades importantes para a apreensão do saber, além de promover a integração da turma. Para que tais relações sejam benéficas, Brousseau (1996a) enfatiza que estas devem ser estabelecidas pelo que ele denomina contrato didático:

Estabelece-se uma relação que determina – explicitamente em pequena parte, mas sobretudo implicitamente – aquilo que cada parceiro, o professor e o aluno, tem a responsabilidade de gerir e pelo qual será, de uma maneira ou de outra, responsável perante o outro. Este sistema de obrigações recíprocas assemelha-se a um contrato. (BROUSSEAU, 1996a, p. 51).

Em suma, o contrato didático consiste em um conjunto recíproco de comportamentos esperados na relação professor-estudante, mediados pelo saber, como explanado por Galvéz (1996) e Brousseau (2008).

Galvéz (1996), em concordância com as ideias de Brousseau, conceitua o contrato didático como sendo uma relação negociada entre professor e estudante, com componentes explícitos e implícitos, que definem princípios para o andamento da situação didática, com uma distribuição de responsabilidades e permissões (ou não) para determinados recursos, em que este contrato se torna um norteador na interpretação das relações professor, aluno e saber.

Para Brousseau (2008, p. 74), “Cada um – o professor e o aluno – imagina o que o outro espera dele e o que cada um pensa do que o outro pensa ... e essa ideia cria as possibilidades de intervenção, de devolução da parte adidática das situações e de institucionalização”. Artigue *et al.* (1995, p. 12) complementa ainda que “a análise do funcionamento cognitivo do aluno não pode ser realizada de forma independente, sem levar em consideração o contrato didático que é colocado em jogo”.

Sobre o processo de devolução mencionado no excerto anterior, Brousseau (2008) afirma ainda que a devolução entra como um dos componentes essenciais do contrato didático, sendo definida como o ato pelo qual o professor conduz o estudante a aceitar a sua responsabilidade dentro da situação de aprendizagem (adidática), fazendo com que este se comprometa a tentar resolver os problemas de respostas ainda inexploradas. “Nesse sentido, o

professor propõe o problema ao aluno e este deve ter condições de agir sobre ele; o aluno vê o problema como um desafio” (SANTOS; ALVES, 2017, p. 453).

A TSD organiza o processo de aprendizagem do estudante a partir de dialéticas ou situações denominadas de ação, formulação, validação e institucionalização, sendo as três primeiras consideradas a fase adidática. A seguir, apresentamos uma descrição de cada uma destas situações.

2.1.1 Situação de ação

Na situação de ação, o estudante depara-se com o problema e, de posse deste, busca em seus conhecimentos prévios e em sua interação com o *milieu*, elementos que o auxiliem na busca da correta de sua solução. Brousseau (2002) aponta que dentro de uma situação de ação, o *milieu* que atua sobre o estudante ou sobre o qual ele atua pode incluir ou não o professor ou outro(s) estudante(s).

Em sua tese, Brousseau (1986) coloca ainda que o modelo na situação de ação pode ser considerado como qualquer processo de cálculo que gere um tipo de estratégia, o que dentro de uma situação didática é capaz de produzir os estados de conhecimento, que possibilitarão antever caminhos para uma argumentação lógica dentro da situação proposta. Desta maneira, a elaboração de modelos de ação permite ir muito mais longe na análise de possíveis comportamentos do sujeito (BROUSSEAU, 1986).

Nesse sentido, a sequência de inferências em situações de ação configura-se no processo pelo qual o estudante cria estas estratégias, ou seja, "ensina a si mesmo um método de resolver seu problema" (BROUSSEAU, 2002, p. 9). Na passagem sobre referir-se à situação de ação como “dialética de ação”, o autor enfatiza que:

This succession of interactions between the student and the *milieu* constitutes what we call a “dialectic of action”. We use the word “dialectic” rather than the word “interaction” because, on the one hand, the student is capable of anticipating the results of her choices and, on the other hand, her strategies are, in a way, propositions confirmed or invalidated by experimentation in a sort of dialogue with the situation. (BROUSSEAU, 2002, p. 9)³.

Assim, no curso da dialética da ação, o estudante organiza os procedimentos a serem

³ Essa sucessão de interações entre o aluno e o meio constitui o que chamamos de “dialética da ação”. Usamos a palavra “dialética” em vez da palavra “interação” porque, por um lado, o aluno é capaz de antecipar os resultados de suas escolhas e, por outro lado, suas estratégias são, de certa forma, proposições confirmadas ou invalidadas pela experimentação em uma espécie de diálogo com a situação. (BROUSSEAU, 2002, p. 9, tradução nossa).

executados e elabora uma representação da situação que lhe serve de modelo ou padrão, para norteá-lo em sua tomada de decisões (BROUSSEAU, 2002).

Brousseau (2004) considera que o modelo didático, permite um estudo acerca da consistência das escolhas feitas e suas consequências, direcionando o olhar do professor para o repertório de conhecimentos que os estudantes colocam em ação. Com efeito, o que é denominado por “modelo” exemplifica relações entre certos elementos que o estudante foi capaz de perceber como relevantes para a situação.

Como colocado em Brousseau (2002), grande parte das situações didáticas surgem de um esquema particular de ação. Contudo, o autor enfatiza que considera a terminologia “dialética de ação” em seu sentido estrito, voltado para situações didáticas em que não haja a obrigatoriedade do estudante formular o modelo utilizado. Por vezes, “alguns modelos implícitos correspondem, no final da aprendizagem, a pedaços de ‘*know-how*’ que foram ensinados” (BROUSSEAU, 2002, p. 31).

2.1.2 Situação de formulação

Na situação de formulação há uma troca de informações entre o estudante e o *milieu*. É o momento de expor as ideias de forma clara e verbalizada, no entanto sem a obrigação do uso de uma linguagem matemática rigorosa e/ou formalizada. Assim, o estudante traça estratégias e começa a se apropriar do conhecimento.

Conforme Teixeira e Passos (2013), há a possibilidade de ocorrer ambiguidades, redundâncias, uso de metáforas, criação de termos semiológicos novos, ou até mesmo inadequação e ausência de eficácia na mensagem, dentro de retroações contínuas. Assim, os estudantes buscam alterar a linguagem que empregam costumeiramente, adequando-a às informações que devem anunciar. Segundo Brousseau (2008, p. 29), temos o esquema de uma situação de formulação dado por:

A formulação de um conhecimento corresponderia a uma capacidade do sujeito de retomá-lo (reconhecê-lo, identificá-lo, decompô-lo e reconstruí-lo em um sistema linguístico). O *meio* que exigirá do sujeito o uso de uma formulação deve, então, envolver (efetivamente ou de maneira fictícia) um outro sujeito, a quem o primeiro deverá comunicar uma informação. (BROUSSEAU, 2008, p. 29).

Nesse sentido, o autor traz que a dialética de formulação é uma etapa em que o estudante conjectura suas ideias e as expõe, sem se preocupar com o rigor matemático, mas levando em consideração elementos da linguagem que façam com que suas ideias, conjecturas

ou teorias para a resolução do problema tenham sentido para quem as ouve.

Assim, a situação de formulação conforme Brousseau (1986) é, por vezes, facilitada se existe um modelo implícito de ação, o que implica no fato de que nenhuma das dialéticas ou situações é independente umas das outras, pois “*L'action est facilitée par une formulation convenable [...]. Le langage découpe la situation en objets et relations pertinentes. L'action fournit un type de validation implicite fondamental et la formulation une autre...*” (BROUSSEAU, 1986, p. 820)⁴.

No que diz respeito ao seu percurso dentro da TSD, a formulação ocorre entre uma etapa mental de convicção e antes da prova formal (BROUSSEAU, 2002), visando responder às necessidades de comunicação (verbal, gestual, escrita) de uma ação. Assim, a situação de formulação precede a prova e se sustenta, simultaneamente, nos pilares de sua eficácia e racionalidade.

2.1.3 Situação de validação

Na dialética de validação, o estudante apresenta sua estratégia de solução para a turma e busca argumentar com base em seu raciocínio, verificando se o que ele conjecturou é, de fato, válido. Conforme Santos e Alves (2017, p. 453) a validação é a “fase de convencimento dos interlocutores sobre a veracidade, ou não, dos argumentos apresentados à solução do problema”. Partindo deste ponto, é importante que se busque o uso de uma linguagem mais formalizada e mecanismos de prova.

Brousseau (1986) considera a situação de validação como uma situação de comunicação, no sentido de que nesta etapa surgem discursos que se aproximam de uma linguagem matemática formal, com uma sequência de inferências e ideias organizadas, sendo estas compostas com base na situação proposta e na influência do meio adidático.

“Supõe-se que as provas e validações explícitas se apoiem mutuamente como evidência, mas sua articulação certamente não é automática” (BROUSSEAU, 2002, p. 83). Nesse sentido, as distintas formas de comunicação para a validação se utilizam de mecanismos de prova, como forma de estruturar e organizar um discurso matemático, em que:

Les moyens techniques de ces démonstrations et les arguments peuvent être d'ordre sémantique — adéquation au “milieu”, au problème — ou d'ordre syntaxique à

⁴ “A ação é facilitada por uma formulação adequada [...]. A linguagem divide a situação em objetos e relações pertinentes. A ação fornece um tipo fundamental de validação implícita e a formulação, outro tipo” (BROUSSEAU, 1986, p. 820). Tradução nossa.

plusieurs niveaux: articulation et validité mathématique, constitution logique et même formelle de l'argument. Mais aussi d'ordre épistémologique, [...] (BROUSSEAU, 1986, p. 110)⁵.

Desta forma, entendemos que a busca pela prova constituída no processo de validação induz o estudante ao uso natural de figuras de retórica e, posteriormente, à sua renúncia ou negação, pois “um problema de validação é muito mais um problema de comparação, avaliação, rejeição de provas do que uma busca de demonstração” (BROUSSEAU, 1986, p. 46). Podemos supor que tais provas no processo de validação sejam gerenciadas por representações, esquemas epistemológicos ou cognitivos, modelos implícitos, entre outros (BROUSSEAU, 1986; 2002). Contudo, a distinção dos tipos de conhecimento manifestados não ultrapassa o limite do que se considera necessário para a organização de um debate didático com o estudante.

Em Brousseau (2004), o autor coloca que, *a priori*, há distintos tipos de conhecimento que são requeridos em cada uma das situações didáticas, e que cada um destes pode ser associado ao desenvolvimento de competências e diferentes modos de aprendizagem:

We associated to these types of knowledge typical organizations of mathematical Situations: Situations of action; Situations of formulation; and Situations of validation. We observed that different modes of learning are associated with each of them. Competencies (schemes, languages and theories) are acquired in Situations where performance (decisions, messages and proofs) must adapt itself to difficulties. (BROUSSEAU, 2004, p. 249)⁶.

Brousseau (2002) aponta que o esquema didático de validação motiva os estudantes a discutir uma situação e favorece a formulação de suas validações implícitas. Entretanto, seu raciocínio é, por vezes, insuficiente, incorreto, desajeitado. Assim, o estudante pode adotar falsas teorias, aceitar provas insuficientes ou falsas.

Nesse sentido, a situação didática deve levá-los a evoluir, a revisar suas opiniões, a substituir sua teoria equivocada por uma que seja coerente, pois, “essa evolução também tem um caráter dialético; uma hipótese deve ser suficientemente aceita – pelo menos

⁵ Os meios técnicos dessas demonstrações e dos argumentos podem ser de ordem semântica – adequação ao “ambiente”, ao problema – ou de ordem sintática em vários níveis: articulação e validade matemática, constituição lógica e até formal do argumento. Mas também epistemologicamente [...] (BROUSSEAU, 1986, p. 110, tradução nossa).

⁶ Associamos a esses tipos de organizações de conhecimento típicas de situações matemáticas: Situações de ação; Situações de formulação; e Situações de validação. Observamos que diferentes modos de aprendizagem estão associados a cada um deles. As competências (esquemas, linguagens e teorias) são adquiridas em Situações em que o desempenho (decisões, mensagens e provas) deve adaptar-se às dificuldades. (BROUSSEAU, 2004, p. 249, tradução nossa).

provisoriamente – até mesmo para mostrar que é falsa. O sistema de provas funciona alternativamente” (BROUSSEAU, 2002, p. 17). Assim, as discussões geradas devem provocar uma atividade mental que desarranje essas distinções ou raciocínios frágeis, unificando esses modos de controle em um pensamento complexo.

Aqui, em nosso entendimento, cabem duas observações: a primeira é a de que os tipos de conhecimento produzidos pelo estudante podem ser relacionados às distintas dialéticas da TSD no que autor coloca como situação adidática e, a segunda, é que o autor no curso de suas obras (BROUSSEAU, 1986; 2002; 2008) destaca que a institucionalização se faz necessária.

2.1.4 Situação de institucionalização

Na dialética de institucionalização a figura do professor entra em cena para sintetizar tudo o que foi exposto e dialogado pelos estudantes nas etapas anteriores, de maneira formal e com linguagem matemática adequada. Segundo Brousseau (2008), a necessidade da institucionalização nasce da inevitabilidade de uma organização do professor no que diz respeito a delinear um espaço para rever o que já foi feito. Desta forma, o professor era compelido a “dar conta da produção dos alunos, descrever os fatos observados e tudo que estivesse vinculado ao conhecimento em questão” (BROUSSEAU, 2008, p. 31). Desta forma, o professor eliminaria os modelos contraditórios que porventura tenham surgido na dialética de validação, de forma teórica, generalizada e categórica.

Assim, a institucionalização define as relações que podem ser permitidas entre o comportamento ou produção livre do estudante, o conhecimento cultural ou científico e o projeto didático, fornecendo uma maneira de ler ou interpretar essas atividades, dando a elas um status de sentido:

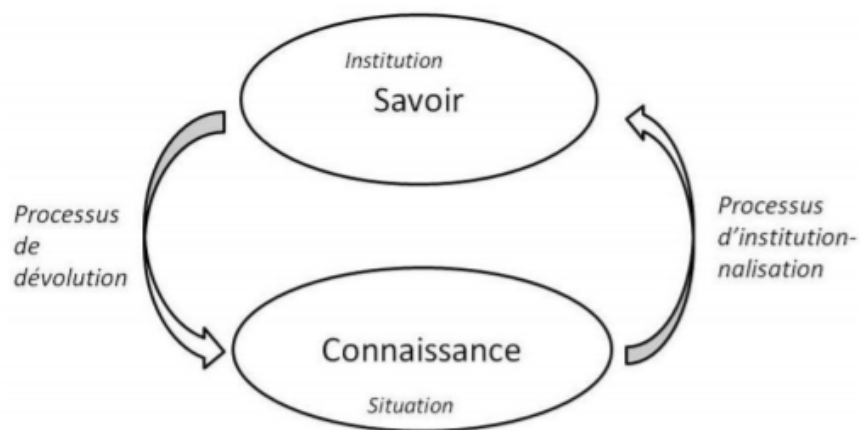
Le rôle du maître c'est aussi d'institutionnaliser ! L'institutionnalisation porte aussi bien sur une situation d'action - on reconnaît la valeur d'une procédure qui va devenir un moyen de référence - que sur la formulation. Il y a des formulations qu'on va conserver ("ça se dit comme ça", "celles-là valent la peine d'être retenues"). Et pour les preuves de la même façon, il faut identifier ce qu'on retient des propriétés des objets qu'on a rencontrés. Il est clair qu'on peut tout réduire à de l'institutionnalisation. (BROUSSEAU, 1997a, p. 48)⁷.

⁷ O papel do professor também é institucionalizar! A institucionalização diz respeito tanto à situação de ação - reconhecemos o valor de um procedimento que se tornará um meio de referência - quanto à formulação. Há formulações que vamos guardar (“diz-se assim”, “essas vale a pena lembrar”). E para provas da mesma forma, devemos identificar o que retemos das propriedades dos objetos que encontramos. É claro que tudo pode ser reduzido à institucionalização. (BROUSSEAU, 1997a, p. 48).

Partindo deste ponto e ao analisar as dialéticas/situações didáticas na perspectiva de Brousseau, temos que o momento em que o estudante constrói o conhecimento ocorre na situação adidática, sendo esta elaborada para que este estudante interaja com um ambiente sem a intervenção do docente, como citado anteriormente. Esta situação compreende as três primeiras fases ou dialéticas da TSD.

Já a institucionalização, como apresentada na Figura 2, consiste em parte integrante da transformação do *conhecimento* – simples familiaridade, mas não intimidade com o objeto de estudo – em *saber* – intelectual, que admite conceitos e juízos a respeito –, por meio do processo de *devolução*, que ocorre ao longo de toda a situação didática:

Figura 2: Diagrama representativo sobre a relação entre o saber e o conhecimento.



Fonte: Margolinas (2015, p. 5).

A intenção de ensinar representa o processo de busca em transmitir o saber, ou seja, gerar conhecimento de uma situação. De acordo com Margolinas (2015), o conhecimento, quando não corresponde ao saber, quando não institucionalizado, é frágil. Desta forma, o processo de devolução no caso das situações adidáticas é considerado um processo mais geral, não vinculado de forma particular da organização do ensino.

Alves (2019) traz que as dialéticas apontadas no percurso da TSD demandam um expediente detalhado e cuidadoso de atenção e análise, na medida que há o interesse na perspectiva e compreensão da ação do professor, mediada e apoiada em fundamentos que subsidiam e indicam a adoção de uma metodologia de ensino para Matemática.

A TSD tem sido uma fonte originadora de diversos conceitos teóricos e noções que nos permitem compreender de modo mais peculiar a dinâmica do funcionamento da sala de aula, em particular, voltada para o campo da Matemática. Caracterizações e definições como situações adidáticas e didáticas, institucionalização, ação, devolução, além das noções de

contrato didático, *milieu*, tipos de obstáculos etc., tornaram-se amplamente acessíveis através de suas obras, sendo de grande valia para o campo da Educação Matemática. Entretanto, como ressalva, observamos na leitura das obras de Brousseau a ausência de uma caracterização dos distintos tipos de raciocínio esperados ou manifestados pelos sujeitos do decurso das dialéticas da TSD.

2.2. Categorias do Raciocínio Intuitivo

A intuição no âmbito educacional tem sido pauta de discussões ao longo de muito tempo dentro do campo da Psicologia Cognitiva e da Educação Matemática (PAIS, 1996; KIDRON, 2011; GRANDE, 2013; GRANDE; SILVA, 2013; ALVES, 2016). Podemos dizer que a intuição remete a um produto de representações que são feitas a partir da realidade e, nesse sentido, ela tem um papel auxiliar no processo de aprendizagem dos estudantes, que pode ser levado em consideração pelo docente. Esse papel é especialmente significativo no contexto da Matemática.

A partir da evolução da Matemática e suas ramificações em diferentes subdivisões, a linguagem, as notações e definições formalizadas passam a ter papel imprescindível em sua compreensão. Esta evolução traz uma complexidade decorrente das simbologias que representam os objetos matemáticos, sendo tais representações “consequências da generalização das formas de abstração, cognição e memória necessárias para a apreensão destas entidades conceituais abstratas peculiares da Matemática” (ALVES, 2011, p. 20).

Nasser (2013) explica que no decorrer na Educação Básica, o estudante apropria-se de conhecimentos acerca dos resultados principais da Matemática de forma pronta, em grande parte das ocasiões sem ter a chance de contemplar sua evolução histórica, teorias e demonstrações. Isto nos faz refletir sobre as dificuldades encontradas no percurso destes estudantes nesta disciplina em particular. Em muitos casos, tais obstáculos podem ser oriundos do formato com que os assuntos são apresentados, de modo mecanizado, com fórmulas prontas, sem levar em consideração o raciocínio matemático, sua natureza e aspectos da Psicologia Cognitiva em seu desenvolvimento (ALVES, 2016). É possível ainda que tais obstáculos, por vezes, acompanhem a trajetória deste estudante até o Ensino Superior.

Acerca da intuição, voltada para o campo da matemática, mas com um olhar pormenorizado a partir do viés da Psicologia Cognitiva, baseamo-nos nesta pesquisa nas obras de Efraim Fischbein (1920-1998) (Figura 3), psicólogo e pesquisador romeno, com diversas contribuições para o campo da Educação Matemática:

Figura 3: Efraim Fischbein (*in memoriam*).



Fonte: Mariotti (1998)⁸.

Segundo Fischbein (1993), é importante conhecer o modo como os estudantes solucionam diferentes tipos de problemas, os obstáculos e percalços que eles encontram, a raiz de tais obstáculos e, por sua vez, os erros sistemáticos cometidos por eles, como forma de compreender aspectos do pensamento matemático e de sua evolução.

Nesta perspectiva, Fischbein (1987a) fomenta uma proposta por um viés teórico que abrange o domínio da intuição. Em seu livro *Intuition in Science and Mathematics: an Educational Approach* ele reconhece e sistematiza resultados experimentais relativos à intuição, além de declarar suas implicações no campo educacional, desenvolvidas para a ciência e disseminadas para uma ampla variedade de contextos de pesquisa em Educação Matemática (FISCHBEIN, 1987a; SOUSA, 2022).

No que concerne particularmente ao campo da Matemática, Fischbein (1987b) afirma que o aprendizado de um conceito ou prova formal não determina absolutamente a maneira pela qual o estudante entende e aplica. Dessa forma, “obstáculos à compreensão, equívocos e estratégias de solução inadequadas são, muitas vezes, o efeito de influências intuitivas” (FISCHBEIN, 1987b, p. 49). Partindo dessa premissa, o autor classifica tais influências cognitivas em categorias, abordadas na subseção seguinte.

⁸ Imagem e comentários sobre a obra do autor disponíveis em: <http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/981112Theme/981112ThemeUK.html>

2.2.1 Classificação das Categorias do Raciocínio Intuitivo

Na perspectiva de Fischbein (1987a, 1987b), o raciocínio de um estudante sobre um novo assunto parte a princípio da intuição e, com base em suas percepções, este aluno passa a conjecturar suas ideias, formalizando-as em uma linha de pensamento que tenha nexo para ele. Ainda no que diz respeito à intuição, o autor reforça uma visão de que este termo significa, basicamente, “uma avaliação global, sintética, não explicitamente justificada ou predição. Tal cognição global é sentida por um sujeito como auto evidente, auto consistente e duramente questionável” (FISCHBEIN; GAZIT, 1984, p. 2).

Fischbein (1999) pormenoriza o significado característico de alguns processos do raciocínio intuitivo na obra intitulada *Intuitions and Schemata of Mathematical Reasoning*, como sintetizado em Alves (2016, p. 65), em uma explanação que identifica tais raciocínios:

- (i) Cognições auto evidentes: significam que intuições são aceitas sem que o indivíduo manifeste a necessidade de uma checagem/verificação ou prova a posteriori;
- (ii) Convicção intrínseca: diz respeito a uma cognição (de natureza privada) intuitiva usualmente associada ao sentimento de certeza, convicção de segurança;
- (iii) Sentido coercitivo: que a intuição manifesta um ‘efeito coercitivo’ no sentido de afetar as estratégias de raciocínio do indivíduo e sua seleção de hipóteses e soluções. Isto significa que o indivíduo tende a rejeitar/negar interpretações alternativas de outrem, as quais contrariem suas intuições privadas e momentâneas;
- (iv) Caráter de globalidade: por fim, uma característica basilar entre um raciocínio intuitivo e um raciocínio lógico é descrita pelo autor, distinguimos o caráter de globalidade, isto é, intuições são cognições globais em oposição às cognições adquiridas por uma via de sequências inferenciais (do tipo: Se vale... Então...) e lógicas ou analítico-inferencial. (ALVES, 2016, p. 65).

Fischbein (1999) exemplifica de formas variadas tais características, como apontado a seguir. Inicialmente, observe os dois problemas de aritmética apresentados:

- a) One litre of juice costs 5 shekels. How much will 3 litres of juice cost? How do you arrive at the answer?
- b) One litre of juice costs 5 shekels. How much will 0.75 litre of juice cost? How do you arrive at the answer? (FISCHBEIN, 1999, p. 15-16, tradução nossa).⁹

Ao analisar o problema (a), podemos respondê-lo de forma simples e direta. Se 1 litro de suco custa 5 siclos, então três litros custam 3 vezes 5, ou seja, 15 siclos. Entretanto, para o problema (b) o raciocínio não ocorre de forma direta do mesmo modo que no problema (a).

⁹ (a) Um litro de suco custa 5 siclos. Quanto custarão 3 litros de suco?

(b) Um litro de suco custa 5 siclos. Quanto vai custar 0,75 litro de suco? Como você chega à resposta? (FISCHBEIN, 1999, p. 15-16, tradução nossa).

Alguns estudantes poderiam responder que seria necessário dividir ($5 \div 0,75$). Outros talvez não respondam. Em todo caso, a resposta correta não é direta, necessitando uma mobilização maior do pensamento antes de enunciar uma resposta. Contudo, ambos os problemas têm a mesma estrutura matemática: o preço por unidade e o número de unidades. Ou seja, nos dois problemas a operação a ser realizada seria a multiplicação (o preço por unidade $\times$ o número de unidades). Não obstante, no problema (a), a resposta correta é dada sem hesitação, diretamente como uma solução óbvia. No problema (b) a resposta correta não é direta, ela precisa de alguma reflexão lógica (FISCHBEIN, 1999).

Outro exemplo pode ser visto a partir da afirmação: “A soma dos ângulos internos em um triângulo é 180° ”. Conforme o autor, a sentença não parece intuitivamente verdadeira, visto que há uma infinidade de triângulos com lados de comprimentos diferentes. Ele afirma que a sentença descrita não é uma intuição cognitiva, por exemplo, pois “tem que ser provada, logicamente, indiretamente, recorrendo a uma série de etapas sucessivas. Intuitivamente, 180° não é mais aceitável do que, por exemplo, 160° ” (FISCHBEIN, 1999, p. 18).

A partir do exposto, compreendemos que no domínio da Matemática existem afirmações que são aparentemente aceitáveis de modo direto, como auto evidentes, enquanto para outras asserções faz-se necessária uma prova lógica ou formal para aceitá-las como verdadeiras. Assim, Fischbein (1999, p. 18) generaliza que as cognições intelectuais se apresentam em dois tipos de categorias:

- a) A category of cognitions which appear directly acceptable as selfevident. These are intuitive cognitions.
- b) A category of cognitions which are accepted indirectly on the basis of a certain explicit, logical proof. These are logical, or logically-based cognitions. (FISCHBEIN, 1999, p. 18)¹⁰.

Ademais, o autor distingue os conceitos de intuição e de percepção, esclarecendo que nem toda cognição direta é uma intuição. As percepções são captadas e têm relação direta com os sentidos, porém não são intuições. Intuições são cognições intelectuais, que exprimem uma concepção geral (uma noção, um princípio, uma interpretação, uma previsão, uma solução), ao passo que as percepções são cognições sensoriais (ver uma cadeira, um triângulo, entre outros) (FISCHBEIN, 1999).

¹⁰ (i) Uma categoria de cognições que parecem diretamente aceitáveis como evidentes por si mesmas. Estas são cognições intuitivas.

(ii) Uma categoria de cognições que são aceitas indiretamente com base em uma certa prova lógica e explícita. Estas são cognições lógicas ou baseadas na lógica. (FISCHBEIN, 1999, p. 18, tradução nossa).

No que tange à categorização da intuição, Fischbein (1987a, 1987b) considera a relação existente entre intuições e soluções de problemas, dividindo-as no que ele nomeia por Categorias do Raciocínio Intuitivo, sendo estas classificadas em *intuições afirmativas*, *conjecturais*, *antecipatórias* e *conclusivas*, descritas a seguir com base em suas obras.

A primeira categoria corresponde às *intuições afirmativas*. Estas fazem menção às representações, explicações ou interpretações diretamente aceitas pelo ser humano como naturais, evidentes, intrinsecamente significativas, como por exemplo, se alguém indagar a um estudante o que é uma linha reta, muito provavelmente ele tentará desenhar uma linha reta ou ele mostrará o exemplo de uma linha bem esticada.

A segunda categoria diz respeito às *intuições conjecturais*. Neste tipo de intuição existe uma perspectiva explícita da solução, no entanto esta não está envolvida claramente em um esforço para a sua resolução, ou seja, são suposições associadas ao sentimento de certeza. Representam declarações sobre eventos futuros ou sobre o curso de certo evento, sendo uma visão preliminar, global que antecede uma solução analítica e completamente desenvolvida de um problema.

Com relação às *intuições antecipatórias* e *conclusivas*, estas representam a terceira e quarta categorias, enquanto as *afirmativas* e *conjecturais* correspondem às duas primeiras, sendo denominadas por “intuições de resolução de problemas” (FISCHBEIN, 1987a, 1987b)

Sobre as *intuições antecipatórias*, Fischbein (1987a) afirma que este tipo de intuição é uma visão global preliminar de uma solução para um problema, que precede a resolução analítica totalmente desenvolvida. Assim, a partir da compreensão global de uma forma possível de resolver um problema, esta intuição influencia e direciona as etapas de busca e construção da solução, onde há uma aplicação concreta de estratégias que auxiliam de modo efetivo a identificação de uma resposta adequada. Além disso, pode-se assumir que as intuições antecipatórias são inspiradas ou estimuladas por intuições afirmativas pré-existentes, como ilustrado no exemplo:

If one is asked: “How much is $\frac{3}{4}$ of 120 cm?” one does not look, generally, for the solution by multiplying, $120 \times \frac{3}{4}$, but one tends naturally to determine first one fourth ($120 \div 4$) and then one multiplies the result by 3. One tends intuitively to avoid multiplications in which the operator is not a whole number (FISCHBEIN, 1987a, p. 63)¹¹.

¹¹ Se alguém for perguntado: “Quanto é $\frac{3}{4}$ de 120 cm?” não se olha, geralmente, para a solução por multiplicação, $120 \times \frac{3}{4}$, mas tende-se naturalmente a determinar primeiro um quarto ($120 \div 4$) e depois multiplica-se o resultado por 3. Tende-se intuitivamente a evitar multiplicações nas quais o operador não é um todo número. (FISCHBEIN, 1987a, p. 63, tradução nossa).

No que tange às *intuições conclusivas*, estas já sintetizam uma visão globalizada e estruturada das ideias básicas da solução de um problema, previamente elaboradas, dependendo, assim, dos outros três tipos de intuição citadas anteriormente (FISCHBEIN, 1987a).

Fischbein em seus estudos analisa cuidadosamente o processo de ensino e aprendizagem ao afirmar que, com frequência, o estudante enfrenta dificuldades em sua aprendizagem, compreensão e resolução de problemas em níveis mais avançados, pois suas técnicas e estratégias de raciocínio são conduzidas por modelos implícitos, por vezes inadequados. Desta forma, o professor deve buscar identificar tais modelos, fornecendo suporte ao estudante na correção de seus esquemas mentais, para que seu raciocínio seja construído de maneira apropriada.

Nesse sentido, Alves e Borges Neto (2011) alertam para o fato de que grande parte dos professores se encontram em uma realidade diferente do estudante, em que suas inclinações, propensões e hábitos formais fornecem um saber matemático de caráter universal, suprimindo a dimensão subjetiva inerente ao cotidiano de seus aprendizes, sendo um formato de ensino que tem provocado, ao longo dos anos, sérios entraves à sua evolução no campo da Matemática. Em outro trabalho, estes autores reforçam ainda sobre a importância de levar em consideração os processos intuitivos no âmbito instrucional, refletindo sobre suas implicações pedagógicas (ALVES; BORGES NETO, 2009).

Fischbein (1987a, 1987b, 1999) instiga o docente a questionar-se sobre de que modo ele poderia identificar modelos mentais inadequados oriundos de base intuitiva. Assim, a partir de um conhecimento sobre as formas de manifestação do raciocínio intuitivo, o docente poderia adequar seus modelos de transmissão didática com base nesta categorização da intuição, muito bem delineada em suas obras.

Partindo do exposto, consideramos a importância de se desenvolver nos estudantes a capacidade de distinguir entre sentimentos intuitivos, crenças intuitivas e convicções formalmente suportadas. Em Matemática, a prova formal é decisiva e sempre que possível se deve recorrer a ela, porque as intuições podem ser enganosas. Isto é uma ideia que o estudante pode aceitar teoricamente, mas que também deve aprender a praticar de forma consistente em seu raciocínio matemático. Ou seja, é importante desenvolver nos estudantes a convicção de que também se possui intuições corretas e úteis e podemos nos tornar capazes de controlar nossas intuições assimilando estruturas formais adequadas (FISCHBEIN, 1987a).

Certamente, o estudante pode perceber a diferença fundamental entre uma prova formal em matemática e uma confirmação experimental. Uma prova formal garante a validade

universal de uma afirmação, enquanto a evidência empírica adicional apenas aumenta a probabilidade da respectiva afirmação. Como enfatiza o autor, a distinção não é intuitivamente evidente e cuidados especiais devem ser tomados no ensino de Matemática, a fim de desenvolver nos estudantes a compreensão desta ideia.

2.2.2 *O raciocínio intuitivo em Geometria*

A Geometria enquanto ramo da Matemática se utiliza também do raciocínio lógico-dedutivo. Contudo, em diversas situações que dizem respeito à compreensão de seus conceitos, aspectos cognitivos como a intuição, a imaginação criativa e até mesmo a utilização de ferramentas gráficas que tratem suas características não são devidamente exploradas no processo de construção do conhecimento, mesmo sabendo que o tratamento das figuras geométricas obedecem a um sistema axiomático previamente estabelecido (ALVES, 2016).

Poincaré (1984) em sua obra *La science et l'hypothèse* (A ciência e a hipótese), argumenta que a intuição desempenha um papel imprescindível com relação à criatividade e à invenção. Segundo este autor, a intuição consiste em uma faculdade do espírito e sua tarefa é, sobretudo, heurística, pois para ele, é pela intuição que se descobre e se inventa, contudo é pela lógica e pela razão que se justifica.

Conforme Fischbein (1993), a Geometria se utiliza de entidades mentais – as chamadas figuras geométricas – que possuem características de ordem conceitual e figural. O autor também reforça o fato de que muitos estudantes ao se depararem com problemas de Geometria, de modo geral, sintam-se desanimados, pois a construção do raciocínio geométrico exige que estes estudantes estabeleçam uma relação entre conceito e imagem mental a diversos conceitos prévios, e não de forma fragmentada como ocorre comumente, com mero uso de fórmulas prontas, baseado em algoritmos e teoremas retidos na memória do indivíduo. A relação entre conceito e imagem, neste ponto, torna-se essencial para a construção do raciocínio intuitivo em Geometria.

Segundo Costa (2020) a diferenciação existente entre o objeto geométrico (construção mental) e sua representação (objeto físico) tem um notável papel no desenvolvimento do pensamento geométrico. Alguém que apresenta dificuldades nessa distinção comumente não atingiu um nível mais avançado deste tipo de raciocínio. “Nessa direção, o campo geométrico é considerado como uma ferramenta para compreensão do mundo físico. Logo, a Geometria

não é vista como um modelo teórico para o estudo dos objetos matemáticos do mundo platônico” (COSTA, 2020, p. 155).

Fischbein (1993), ao tratar em sua tese sobre a Teoria dos Conceitos Figurais, afirma que em Geometria existem relações que não dependem de desenhos esquematizados, mas sim são impostas por teoremas e definições lógicas. O autor ressalta que as propriedades das figuras geométricas são impostas ou derivadas de definições dentro do domínio de um sistema axiomático, tendo uma figura geométrica natureza conceitual.

No entanto, um estudante diante de um problema geométrico é induzido pelas características figurais em detrimento das definições e restrições formais. Mas, inconscientemente, e em várias situações, quem determina a imagem mental construída são os conceitos formais. Assim, é importante que o estudante compreenda a diferença entre a definição formal, a imagem e o conceito figural, pois estas consistem em três categorias de entidades mentais distintas, com influência direta sobre os modelos de pensamento intuitivo (FISCHBEIN, 1993; COSTA, 2020).

De acordo com o autor, o que caracteriza um conceito é o fato de que ele expressa uma ideia, uma forma de representação ideal de uma classe de objetos que apresentam características comuns. Já uma imagem (entendida aqui como imagem mental) remete à uma representação sensorial de um objeto ou fenômeno (FISCHBEIN, 1993).

Enquanto isso, o conceito figural expressa uma realidade mental, sendo uma construção tratada pelo raciocínio matemático no domínio da Geometria. Assim, o conceito figural é totalmente desprovido de propriedades concretas como peso, cor, densidade etc., no entanto apresenta as propriedades figurais, como explicitado por Fischbein (1993):

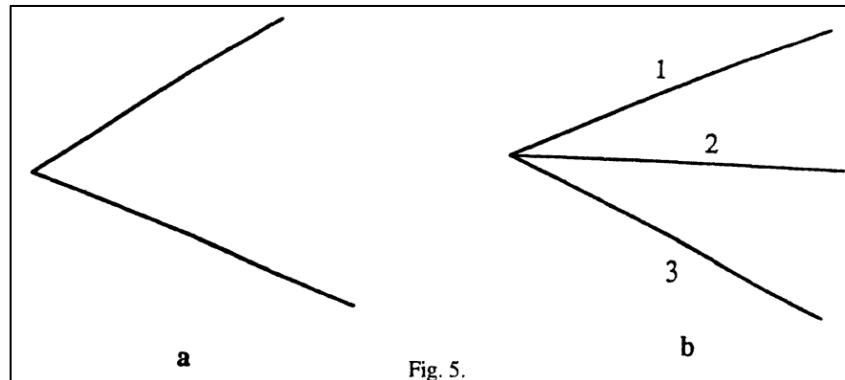
The objects of investigation and manipulation in geometrical reasoning are then mental entities, called by us figural concepts, which reflect spatial properties (shape, position, magnitude), and at the same time, possess conceptual qualities – like ideality, abstractness, generality, perfection. (FISCHBEIN, 1993, p. 143)¹².

No fragmento apontado e a partir da perspectiva do autor, entendemos que por meio da natureza dual entre conceito e imagem, constrói-se uma imagem mental baseada primeiramente em conceitos previamente estabelecidos e formalizados. Por exemplo, a imagem de um quadrado não consiste em uma mera imagem desenhada em uma folha de

¹² Os objetos investigação e de manipulação no raciocínio geométrico são as entidades mentais, chamadas de conceitos figurais, que refletem as propriedades espaciais (forma, posição, magnitude) e, ao mesmo tempo, possuem qualidades conceituais – como idealidade, abstração, generalização, perfeição. (FISCHBEIN, 1993, p. 143, tradução nossa).

papel de forma arbitrária, mas sua concepção, embora possa ser influenciada por um objeto real, parte de uma definição formal dentro de um sistema axiomático que impõe que *um quadrado é um retângulo com todos os lados iguais*. De forma geral, as imagens são controladas por conceitos. Entretanto, existem situações em que os conceitos não conseguem controlar as imagens, como no exemplo a seguir (Figura 4):

Figura 4: Exemplo de conceito sem controle sobre a imagem.



Fonte: MARIOTTI (1992, *apud* FISCHBEIN, 1993, p. 152).

A pergunta referente à Figura 4 foi: *Quantos ângulos você vê nas figuras a e b?* direcionada a um estudante de 16 anos de idade, o que em nosso sistema educacional, provavelmente seria um estudante do ensino médio. A resposta obtida foi:

Whenever I see two lines which intersect, I know that the space between the two lines is an angle. I think that, in both figures, there is only one angle, even if at first, I thought that in the second figure there were two angles. I can explain my supposition. First, I thought that, in this representation, line 1 and line 2 form one angle, and line 2 and line 3 form a second angle. However, now I think that there is only one angle formed by the crossing lines (1, 3) and that line 2 is the bisector of this angle (FISCHBEIN, 1993, p. 151, *apud* MARIOTTI, 1992, p. 875)¹³.

Observe que, a partir da resposta dada pelo estudante, o conceito não teve controle sobre a imagem, de modo que houve uma confusão mental por parte deste sujeito, com intuições equivocadas com base na percepção visual. Este, mesmo de posse da imagem, não conseguiu relacionar o conceito de ângulo a uma resposta correta e de forma imediata. Isto

¹³ Sempre que vejo duas linhas que se cruzam, sei que o espaço entre as duas linhas está um ângulo. Acho que, em ambas as figuras, só existe um ângulo, embora a princípio eu pensasse que na segunda figura havia dois ângulos. Posso explicar minha suposição. Em primeiro lugar, pensei que, nesta representação, a linha 1 e a linha 2 formam um ângulo, e a linha 2 e a linha 3 formam um segundo ângulo. Porém, agora acho que há apenas um ângulo formado pelas linhas de cruzamento (1, 3) e que a linha 2 é a bissetriz desse ângulo. (MARIOTTI 1992, *apud* FISCHBEIN, 1993, p. 151, tradução nossa).

porque “a figura ainda carrega consigo características da Gestalt¹⁴ inspiradas na prática” (FISCHBEIN, 1993, p. 152). Assim, o conceito de ângulo não controla totalmente a figura e sua interpretação depende, de forma parcial, de restrições não formais.

Fischbein (1993) explica que a integração de propriedades conceituais e figurais em estruturas mentais unitárias, dada a predominância das restrições conceituais sobre as figurais, não consiste em um processo natural ou um efeito espontâneo dos cursos usuais da Geometria na mente do estudante. Assim, isto deve ser uma preocupação contínua e sistemática do professor.

Por diversas vezes o ensino de Geometria, e em particular nesta pesquisa, da Geometria Analítica, parte da utilização de algoritmos e técnicas que privilegiam a apresentação dos conceitos via definições formais, demonstrações e realização de exercícios que podem não propiciar, a princípio, um desenvolvimento cognitivo do raciocínio geométrico do estudante. Pesquisas apontam que o uso recorrente de analogias e uma exploração inadequada da intuição na construção do conhecimento, acompanhada de diversos exemplos e contraexemplos até que se tenha uma demonstração formal e generalizada, consiste, geralmente, no formato de ensino dos conceitos fundamentais deste assunto (HALBERSTADT, 2015; CERQUEIRA, 2015; SIQUEIRA, 2016).

Nesse sentido, reforçamos o quanto é importante compreender a Geometria Analítica a partir de um viés intuitivo, explorado por meio da visualização geométrica, para que a construção dos conceitos matemáticos possa ocorrer de forma gradual, conectada e seguindo uma lógica de pensamento a partir de estímulos que podem ser proporcionados pelo formato de trabalho (metodologia) do professor. A compreensão do conceito de parábola, cerne deste trabalho, partindo de uma abordagem que trabalhe com a tecnologia, pode apontar uma maneira diferente de tratar este assunto com os estudantes, sendo um norte ao trabalho dos professores em formação inicial, sujeitos desta pesquisa.

2.2.3 Relação entre a Teoria das Situações Didáticas e as Categorias do Raciocínio Intuitivo

Para a discussão desta seção, baseamo-nos na obra de Brousseau e Gibel (2005), intitulada *Didactical handling of students' reasoning processes* (Manipulação didática dos

¹⁴ Gestalt é uma doutrina da psicologia que, inspirada no trabalho de Max Wertheimer, tem por princípio orientador que o todo é maior do que a soma das suas partes. Ou seja, considera-se que um conjunto de informações é mais relevante do que um trecho e a ideia da totalidade deve ser compreendida para que haja a percepção das partes (PIAGET, 1983).

processos de raciocínio dos estudantes, tradução em português), como forma de trazer uma discussão sobre o percurso do raciocínio matemático dentro do desenvolvimento das dialéticas da TSD e relacioná-lo aos mecanismos da intuição.

Durante muito tempo considerou-se que em Matemática o raciocínio devia ser concebido como uma apresentação de provas de modelo, ensinado pelo professor e fielmente reproduzido pelos estudantes. Contudo, para os professores atualmente, assim como para os psicólogos, “o raciocínio como atividade mental não é uma simples recitação de uma prova memorizada” (BROUSSEAU; GIBEL, 2005, p. 14).

Desta maneira, para construir um modelo de raciocínio matemático de um sujeito a partir da noção de situação, é necessária uma compreensão de que o raciocínio diz respeito a um domínio que não se restringe ao das estruturas formais, lógicas ou matemáticas de raciocínio, apesar de serem constituídos por um conjunto ordenado de afirmações ligadas, combinadas ou opostas umas às outras, respeitando certas restrições que podem ser explicitadas na solução de um problema (BROUSSEAU; GIBEL, 2005), ou ainda, como os autores explicam:

Therefore, to be able to claim that a given observable behavior is a sign of a reasoning whose elements are, for the most part, implicit, it is necessary to go beyond the formal definition and examine the conditions in which a "presumed reasoning" can be considered as an "actual reasoning". (BROUSSEAU; GIBEL, 2005, p. 16)¹⁵.

Conforme Brousseau (1997b), um raciocínio pode ser caracterizado pelo papel que desempenha em uma situação, ou seja, por sua função nessa situação. Assim, tal função pode ser decidir sobre algo, informar, convencer ou explicar. Por essa óptica, a função de um raciocínio varia de acordo com o tipo de situação em que ocorre, tendo relação direta com o movimento dialético dentro da TSD, ou seja, se é uma situação de ação, formulação ou validação.

Assim, em Brousseau e Gibel (2005), os autores buscam fazer uma distinção dos níveis de raciocínio matemático, considerados mais ou menos degenerados, e que se adaptam aos diferentes tipos de situações na TSD, sintetizados a seguir:

¹⁵ Portanto, para poder afirmar que determinado comportamento observável é sinal de um raciocínio cujos elementos são, em sua maioria, implícitos, é preciso ir além da definição formal e examinar as condições em que um "raciocínio presumido" pode ser considerado como um "raciocínio real". (BROUSSEAU; GIBEL, 2005, p. 16, tradução nossa).

Raciocínio de nível 1 (N1): pode ser caracterizado por um tipo de raciocínio que não é formulado como tal, entretanto pode ser atribuído ao sujeito com base em suas ações, e construído como um modelo dessa ação, sendo considerado como um modelo implícito relativo à situação de ação na TSD.

Raciocínio de nível 2 (N2): pode ser considerado como um raciocínio incompleto do ponto de vista formal, porém com lacunas que podem ser, de modo implícito, preenchidas pelas ações do estudante em uma situação em que uma formulação completa não se justificaria. Este tipo de raciocínio aparece em situações em que é necessária a comunicação, sendo relacionado à fase de formulação.

Raciocínio de nível 3 (N3): pode ser definido como um raciocínio formal, global e concluído, baseado em um conjunto de inferências corretamente relacionadas, que fazem uma clara menção aos elementos da situação ou conhecimento considerado como compartilhado pela classe, mesmo que ainda não se postule que tal raciocínio seja absolutamente correto. O raciocínio deste nível é característico de situações de validação.

Como trazem Brousseau e Gibel (2005), o problema apresentado ao estudante demanda soluções ou provas cuja validação pode ser dada de modo independente das circunstâncias didáticas em que o problema foi introduzido. “A solução padrão, ou seja, uma solução que poderia ser produzida pelo professor e que se espera do aluno, tem a forma de uma sequência de inferências (e cálculos), que está corretamente conectada, ou seja, conforme regras da lógica” (BROUSSEAU; GIBEL, 2005, p. 19). Assim, podemos considerar que cada etapa do raciocínio é incorporada a justificativas lógicas e matemáticas consideradas padrão, em que sua validade e relevância parecem ser autônomas.

Portanto, como propõem os autores, a interpretação das soluções dos estudantes precisa considerar um sistema maior e mais complexo, caso seja a intenção do docente desafiá-los, instigá-los ou mesmo explicar por que tais formas de raciocínio, corretas ou não, foram produzidas. Desta maneira, recomenda-se que o professor leve em conta os conhecimentos prévios do estudante para a construção do seu raciocínio em uma situação objetiva, pois:

A new reasoning is learned when it is promoted from being just a particular means of solving a given problem to a "universal" means of solving all problems of a certain type and becomes integrated as such with the subject's knowledge. In an autonomous situation, the reasoning is based on induction, but this induction is

supported by a chain of inferences that can be made explicit. (BROUSSEAU; GIBEL, 2005, p. 21)¹⁶.

No entanto, à medida que se amplia a quantidade de novos conhecimentos a serem aprendidos, torna-se cada vez mais inviável perceber o número crescente de conexões circunstanciais independentes e há um risco considerável de confusão. Nesse sentido, os autores consideram o raciocínio do estudante como algo amplo, que depende de muitas variáveis, inclusive do que eles trazem em sua bagagem de conhecimentos prévios.

Diante do exposto, podemos inferir uma relação entre o que Brousseau e Gibel (2005) propõem como os diferentes níveis de raciocínio matemático no desenvolvimento da Teoria das Situações Didáticas, e o que Fischbein (1987) propõe em sua classificação da intuição, no que ele denomina como Categorias do Raciocínio Intuitivo e buscamos ilustrar uma articulação entre as propostas desses autores.

Quando Brousseau e Gibel (2005) propõem o *raciocínio de nível 1*, descrevendo-o como um modelo de raciocínio ainda não formulado, mas relacionado à tomada de posição do sujeito em uma situação de ação dentro da TSD, podemos vislumbrar uma similaridade com a categoria de *intuição conjectural* de Fischbein (1987). Esta relação pode ser percebida quando Fischbein (1987) propõe que o sujeito, neste modelo de intuição, tem uma visão preliminar do problema e superficialmente de seu percurso de solução, entretanto não realizou, de fato, ação alguma para resolvê-lo, mas sim está conjecturando suas hipóteses para então seguir um trajeto baseado em um raciocínio que tenha sentido, para a tomada de posição.

Já o *raciocínio de nível 2* proposto por Brousseau e Gibel (2005) é considerado um raciocínio inacabado do ponto de vista formal, mas com hiatos que, implicitamente, podem ser preenchidos a partir das ações do estudante em uma situação de formulação dentro da TSD. Este modelo de raciocínio pode ser comparado, a depender do nível destas lacunas, tanto com as *intuições conjecturais* propostas por Fischbein (1987), em que o estudante inicia suas deduções diante de um ponto de partida, quanto com as *intuições antecipatórias*, em que o estudante já conseguiu formular ideias e estabelecer um percurso para a solução de forma mais explícita.

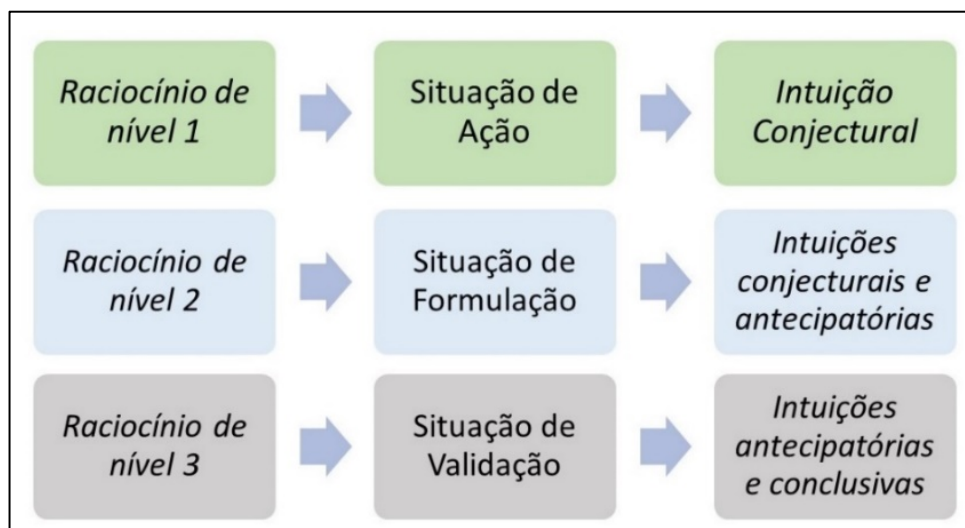
¹⁶ Um novo raciocínio é aprendido quando é promovido de apenas um meio particular de resolver um determinado problema para um meio "universal" de resolver todos os problemas de um certo tipo, e se integra como tal com o conhecimento do sujeito. Em uma situação autônoma, o raciocínio é baseado na indução, mas essa indução é sustentada por uma cadeia de inferências que podem ser explicitadas. (BROUSSEAU; GIBEL, 2005, p. 21, tradução nossa).

Nessa mesma perspectiva, podemos compreender que o *raciocínio de nível 3*, definido por Brousseau e Gibel (2005) como um modelo de raciocínio formal global e finalizado, que tem por base a conexão sequencial de inferências articuladas de forma coesa, mesmo que tal raciocínio não seja, de todo modo, absolutamente correto, como sendo um formato apresentado em situações de validação na TSD. Partindo dessa óptica, podemos relacionar o *raciocínio de nível 3* ao que Fischbein (1987) propõe como *intuição antecipatória* e *intuição conclusiva*, a depender também da forma como esse raciocínio foi produzido pelo estudante.

Consideramos a *intuição antecipatória*, dado o fato de que o estudante em seu percurso pode vislumbrar uma solução analítica totalmente desenvolvida, apresentando uma lógica coerente para sua solução. E *conclusiva*, pois caso este estudante tenha compreensão e articulação plena entre seus conhecimentos prévios e o desenvolvimento de conhecimentos novos a partir da situação didática proposta, este pode estabelecer uma padronização e uma generalização de sua solução para situações que apresentem similaridade com o exposto. Tal generalização pode ser validada pelo docente em uma situação posterior de institucionalização.

Os níveis de raciocínio apontados por Brousseau e Gibel (2005) e as Categorias do Raciocínio Intuitivo elencadas por Fischbein (1987), partindo das dialéticas da TSD podem ser correlacionados a partir do esquema proposto na Figura 5:

Figura 5: Relação entre os níveis de raciocínio na TSD e as Categorias Intuitivas.



Fonte: Elaboração da autora (2022).

Desta maneira, entendemos que tanto os níveis de raciocínio propostos por Brousseau e Gibel (2005) quanto as categorias estabelecidas por Fischbein (1987) apresentam que o

percurso de aprendizagem de um novo raciocínio ocorre quando este é promovido de apenas um meio particular de resolver um determinado problema para um meio "universal" de resolver todos os problemas de um certo tipo, e se integra como tal com o conhecimento do estudante. Em uma situação autônoma, o raciocínio é baseado na indução, mas essa indução é sustentada por uma cadeia de inferências que podem ser explicitadas.

A maiêutica socrática normalmente é descrita como a arte de conduzir alguém a produzir o próprio conhecimento por meio de perguntas, sem que Sócrates acrescente nada a este conhecimento (BROUSSEAU; GIBEL, 2005). Nesse sentido, os autores trazem que as situações-problema devem estimular o modelo de abordagem do professor ao propô-las aos estudantes.

Além disso, a identificação, tanto dos modelos implícitos de raciocínio de diferentes níveis propostos nos estudos desses autores exige uma análise *a priori* teórica, dos comportamentos, das dificuldades e dos procedimentos que podem surgir nas diferentes fases da aula e do desenvolvimento de uma situação didática.

Isso nos permite conjecturar que um dos fatores que porventura pode limitar as possibilidades do docente de considerar, articular e processar o raciocínio dos estudantes não é tanto a complexidade desse raciocínio, mas sim outra característica, relativa à própria natureza da situação proposta para os estudantes, o que demanda um expediente de atenção e planejamento por parte do docente.

2.3. Engenharia Didática Clássica

Almejando alcançar os objetivos desta pesquisa, adotamos como metodologia a Engenharia Didática (ED), evidenciando a Engenharia Didática de Segunda Geração ou Engenharia Didática de Formação (EDF). Para tal, buscamos suporte teórico em obras como Artigue (1996, 2009), Artigue *et al.* (1995), Tempier (2011), Almouloud (2012, 2017), Almouloud e Coutinho (2008), Almouloud e Silva (2012), Perrín-Glorian (2011), Perrín-Glorian e Bellemain (2019), Alves e Catarino (2017), entre outros. Segundo Almouloud e Silva (2012), estruturalmente, a ED e a EDF têm as mesmas etapas, no entanto a EDF é direcionada especificamente para a formação docente e produção de material didático.

Na década de 70 na França, em um cenário de inquietações e mudanças paradigmáticas, surgiram diversas investigações acerca do processo de aprendizagem da Matemática, em que muitas das pesquisas desenvolvidas analisavam a realização de sequências didáticas em sala de aula (BITTAR, 2017).

No caso da Engenharia Didática Clássica (ou Engenharia Didática de 1ª geração), esta tem seus estudos iniciados primeiramente por Brousseau na década de 60, a partir da obra *Les Mathématiques du Cours Préparatoire* (BROUSSEAU, 1965), sendo retomada e difundida mais amplamente em 1982, por seu pupilo Yves Chevallard, e depois por Michèle Artigue.

Ao final da década de 80, Michèle Artigue publica um artigo na revista *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, que sistematiza e permite disseminar a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa na França e no exterior, seja por publicações em outras línguas e/ou por difusão desse mesmo texto. Segundo a autora:

Cet étiquetage est alors perçu comme le moyen d'aborder deux questions cruciales, vu l'état du développement de la didactique des mathématiques à l'époque :
 - les rapports entre la recherche et l'action sur le système d'enseignement ;
 - le rôle qui convient de faire jouer aux « réalisations didactiques » en classe, au sein des méthodologies de la recherche didactique. (ARTIGUE, 1988, p. 283)¹⁷.

A Engenharia Didática Clássica (ED) teve sua origem a partir destas pesquisas, sendo parte dos estudos relativos à Didática da Matemática (DM). A ED foi apresentada como uma metodologia de pesquisa suscetível de fazer aparecer fenômenos didáticos em condições mais próximas possíveis do funcionamento de uma sala de aula clássica. Esta metodologia foi concebida para a sistematização e organização de pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem em Matemática e, em particular, a “elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito” (ALMOULOU; COUTINHO, 2008, p. 66).

Segundo Artigue *et al.* (1995), a ED caracteriza-se por um esquema experimental baseado em realizações didáticas no âmbito da sala de aula, ou seja, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Além disso, a ED também pode ser considerada como uma metodologia de pesquisa experimental, pelo registro em que se situa e o modo de validação que lhe são associados: a comparação entre as análises *a priori* e *a posteriori*. Conforme Almouloud e Coutinho (2008) a validação de uma Engenharia Didática é uma das peculiaridades desse modelo de metodologia, pelo fato de ser feita internamente, sem demandar necessariamente a aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste.

Alves e Catarino (2017, p. 133) apontam que “o *design* de investigação característico de uma ED possibilita uma prática de intervenção controlada, assumindo a relevância do

¹⁷ Essa rotulação é então vista como o meio de abordar duas questões cruciais, dado o estado de desenvolvimento da didática da matemática na época:

- a relação entre pesquisa e ação no sistema educacional;
 - o papel que as “realizações didáticas” devem desempenhar em sala de aula, dentro das metodologias da pesquisa didática. (ARTIGUE, 1988, p. 283, tradução nossa).

entendimento pormenorizado dos fenômenos ensino-aprendizagem”. Assim, a ED possibilita uma evolução no *design* de investigação em Educação Matemática, em que o professor/pesquisador tem a possibilidade de realizar ações similares as de um engenheiro, articulando diferentes conhecimentos em situações práticas e planejamentos experimentais precisos e bem elaborados.

O planejamento e execução de uma ED pode ser estruturado em quatro etapas, que são: i) Análises preliminares, ii) Concepção e análise *a priori* das situações didáticas, iii) Experimentação e iv) Análise *a posteriori* e validação, descritas sumariamente no Quadro 1:

Quadro 1: Etapas da Engenharia Didática Clássica.

Etapa	Descrição
Análises preliminares	Nesta fase realiza-se um levantamento bibliográfico acerca do quadro teórico didático, isto é, uma análise epistemológica dos conteúdos e do ensino atual, levantamento dos conhecimentos prévios dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos e uma análise do campo onde vai situar-se a realização didática.
Concepção e análise <i>a priori</i>	Nesta segunda fase, o pesquisador delimita as variáveis didáticas (globais e locais) sobre as quais o ensino pode atuar, a fim de guiar a pesquisa e propor um plano de ação, bem como ocorre a preparação da sequência de ensino e a previsibilidade de possíveis comportamentos com base nas variáveis didáticas determinadas.
Experimentação	Nesta fase ocorre a aplicação das situações didáticas ou sequência didática elaboradas <i>a priori</i> . Firma-se também o contrato didático com os sujeitos envolvidos no processo e ocorre a coleta dos dados relativos à pesquisa.
Análise <i>a posteriori</i> e validação	Esta última fase apoia-se sobre todos os dados coletados durante a experimentação. A partir da análise dos dados, faz-se necessário um confronto destes com o que foi previsto anteriormente na análise <i>a priori</i> , para assim, fazer a validação ou não das hipóteses formuladas na investigação.

Fonte: Elaboração da autora (2021).

A partir das etapas descritas, Almouloud e Coutinho (2008, p. 68) frisam que o objetivo da ED, em suma, “é relacionar as observações com os objetivos definidos *a priori* e estimar a reprodutibilidade e a regularidade dos fenômenos didáticos identificados”. Contudo, cabe esclarecer que cada etapa pode ser retomada e aperfeiçoada no decorrer do trabalho de pesquisa, pois estão sempre em processo de complementação.

Deste modo, a estruturação de uma ED possui dois níveis de organização da pesquisa no que diz respeito às variáveis didáticas, que são a *microengenharia* e *macroengenharia*, e dois tipos de validação, que são a *externa* e a *interna*.

No que tange aos seus níveis de organização, Alves (2016b) explica que a *microengenharia* refere-se aos fenômenos que ocorrem no contexto da sala de aula, restringindo o campo de investigação, sendo que “neste nível, podemos estudar determinado assunto no âmbito da complexidade da classe” (p. 70), ao passo que a *macroengenharia*

consiste em uma investigação mais ampla, defrontando-se com obstáculos de ordem metodológica e/ou institucionais.

No que remete aos tipos de validação da ED, podemos compreender que a *validação externa* tem como objetivo avaliar o desempenho do estudante durante a realização da situação didática. Assim, esse processo pode ser realizado através da comparação entre as produções iniciais e finais desenvolvidas pelo estudante, através de aplicação e análise de questionários e/ou entrevistas, ou mesmo comparações com outros grupos (grupos experimentais ou grupos de controle). Dessa forma, Alves (2018) reforça que a validação externa pode ocorrer através da equiparação das produções externas a outros estudantes que não participam dessa mesma situação didática.

Já na *validação interna* realiza-se uma descrição global dos estudantes, analisando seu comportamento e desenvolvimento cognitivo durante a execução da situação didática, consistindo em um acompanhamento individualizado de cada um dos sujeitos envolvidos. Desta maneira, são selecionadas situações específicas que posteriormente serão apreciadas e interpretadas, contribuindo consideravelmente para a validação da pesquisa (LABORDE, 1997).

No caso da pesquisa desenvolvida neste trabalho, esta consiste em uma *microengenharia*, pois busca observar e aprimorar uma ED direcionada ao ensino de parábolas, voltada para o desenvolvimento do professor em formação inicial enquanto estudante de graduação, no âmbito da sala de aula. Para além disso, o registro empírico da investigação realizada a partir desta ED fornece dados para uma *validação interna*, dado o fato de que esta baseia-se no confronto entre a análise *a priori*, que traz consigo o subsídio de um quadro teórico, e a análise *a posteriori*, por um viés que se ancora na dimensão prática.

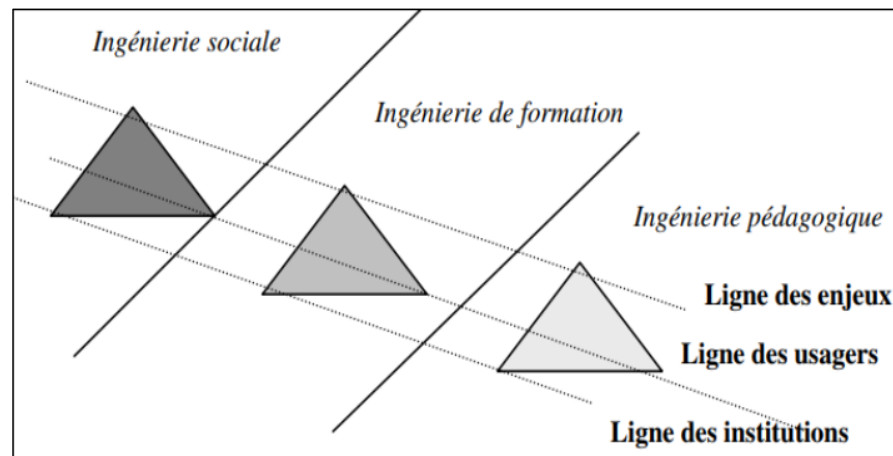
2.4 Engenharia Didática de Formação

Segundo Alves e Catarino (2017) no final da década de 80, algumas insuficiências foram apontadas pelos estudiosos da área de Didática da Matemática, correspondentes ao papel e a atividade do professor de Matemática. De modo complementar, “[...] passou ocorrer uma reorientação dos estudos sob o viés da ED, todavia repercutidos sob a terminologia Engenharia Didática de 2ª geração ou Engenharia Didática de Formação (EDF)” (ALVES, 2018, p. 49).

Ao longo do tempo e dentro de um cenário de mudanças paradigmáticas na França nos anos 70, bem como o desenvolvimento de várias engenharias, como as Engenharias Sociais e

Engenharias Pedagógicas (ALVES; CATARINO, 2017), a Engenharia de Formação situa-se em um ponto entre estas duas anteriores, sendo desenvolvida com base nos fundamentos da Didática e na formação de adultos (LECLERCQ, 2002). Na Figura 6, apresentam-se as noções destas engenharias:

Figura 6: Noções complementares de Engenharias desenvolvidas na França



Fonte: Leclercq (2002, p. 80).

Na Figura 6, a Engenharia de Formação é compreendida como um meio termo entre as Engenharias Sociais e a Engenharia Pedagógica, visando a formação de adultos. E direcionando para esta pesquisa, delimitamos aqui as situações adequadas à formação do professor de Matemática.

Perrín-Glorian e Bellemain (2019) mencionam que a evolução da Engenharia Didática foi capaz de identificar fenômenos didáticos relativos às dificuldades dos alunos ou professores e fornecer caminhos úteis para o ensino. Até então, as primeiras Engenharias Didáticas preocupavam-se em desenvolver e estudar uma proposta de transposição didática para o ensino, sendo a transposição o âmago das pesquisas. No entanto, simultaneamente, também se desenvolviam estudos a partir de outros fenômenos didáticos de forma mais generalizada, mas que possibilitavam enriquecimento e esclarecimento dos referenciais teóricos apontados. Ainda conforme as autoras:

L'ingénierie didactique comme produit est donc aussi importante que comme méthode. Ce sont les situations elles-mêmes qu'on étudie, d'un point de vue adidactique (mais le terme n'est apparu qu'en 1982), sans étudier le rôle du maître, même s'il est incontournable dans la dévolution, l'institutionnalisation ou la mise en œuvre de la dialectique outil-objet ou des jeux de cadres : il s'agit d'identifier les vertus de ces situations et les liens entre elles pour produire des connaissances

nouvelles chez les élèves et l'avancée du savoir d'une classe. (PERRÍN-GLORIAN; BELLEMAIN, 2019, p. 67)¹⁸.

A partir do exposto compreendemos que a EDF parte, a princípio, do estudo e compreensão de situações adidáticas à necessidade de levar em consideração o papel do professor, bem como as diferenças entre os alunos, uma vez que a ED era compreendida apenas pelo prisma adidático, onde as situações não tinham o envolvimento direto do professor, mesmo sendo ele de fundamental importância na devolução e institucionalização das situações didáticas (PERRÍN-GLORIAN, 2011).

Assim, faz-se necessário fornecer suporte e recursos aos docentes acerca da institucionalização do conhecimento, sua descontextualização progressiva e a concepção de exercícios de formação, ou seja, sobre o próprio processo de institucionalização (PERRÍN-GLORIAN, 1993; TEMPIER, 2011). Conforme Perrín-Glorian (2011, p. 57), temos que:

[...] le problème n'est plus seulement celui du contrôle et de la mise en œuvre des principes théoriques qui guident l'ingénierie didactique. C'est aussi celui des possibilités d'adaptation des situations par les enseignants dans les conditions ordinaires de fonctionnement de l'enseignement (PERRÍN-GLORIAN, 2011, p. 57, apud TEMPIER, 2011, p. 9)¹⁹.

Desta forma, a formação docente e a expertise do professor mediante a necessidade de adaptação de situações à realidade da sua sala de aula confere uma preocupação da EDF. A abordagem dos conteúdos e sua transposição didática ou mesmo a identificação de hiatos em sua formação, como a falta de conhecimento epistêmico e/ou habilidades necessárias à atuação profissional, consiste em aspectos que permitem identificar fenômenos didáticos mais gerais. Assim, conforme Perrín-Glorian e Bellemain (2019, p. 73) utiliza-se o termo Engenharia Didática para Desenvolvimento e Formação (abreviada como IDD) “para designar essa engenharia que visa estudar a adaptação das situações produzidas às condições normais de ensino e às necessidades dos professores”.

¹⁸ A Engenharia Didática como produto é, portanto, tão importante quanto método. São as próprias situações que nós estudamos, de um ponto de vista adidático (mas o termo não apareceu até 1982), sem estudar o papel do professor, mesmo que seja essencial na devolução, institucionalização ou implementação da dialética ferramenta-objeto ou conjuntos de quadros: este envolve identificar as virtudes dessas situações e as ligações entre elas para produzir novos conhecimentos nos alunos e o avanço do conhecimento em uma classe. (PERRÍN-GLORIAN; BELLEMAIN, 2019, p. 67, tradução nossa).

¹⁹ [...] o problema não é mais apenas controlar e implementar os princípios teóricos que orientam a engenharia didática. É também o das possibilidades de os professores adaptarem as situações às condições normais de funcionamento do ensino com a dupla perspectiva de estudar a robustez de uma série de situações e a formação de professores. (PERRÍN-GLORIAN, 2011, p. 57).

Almouloud e Silva (2012) apontam que a EDF tem como objetivo desenvolver recursos (ou objetos de aprendizagem) para o ensino ou a formação de professores, o que pode levar a diversos níveis de construção, inclusive as situações em que o docente descreve ações dirigidas para o intermédio de uma situação de ensino.

Deste modo, o professor tem o papel de mediador da aprendizagem e, para cumpri-lo de modo eficiente, há a necessidade de planejar e prever os obstáculos que podem surgir em decorrência do desenvolvimento das situações, viabilizando o *modus operandi* da condução dos processos de construção e apropriação do saber matemático pelos alunos (SOUSA; ALVES; FONTENELE, 2020).

Na Figura 7, Almouloud e Silva (2012) apontam de maneira sintetizada em um quadro comparativo alguns dos objetivos e aspectos centrais das Engenharias Didáticas de 1ª e 2ª Gerações:

Figura 7: Objetivos e aspectos centrais das Engenharias de 1ª e 2ª Geração.

	Objetivo(s)	Aspectos centrais
ED 1ª geração	Elaborar e estudar propostas de transposição didática para o ensino.	Metodologia de pesquisa e produto
ED 2ª geração	Determinar os princípios que comandam a engenharia que se quer transformar em recurso para o ensino regular, e estudar as condições de sua divulgação.	Três funções não independentes: a investigação, o desenvolvimento e a formação de professores por meio da análise. Necessita de vários níveis de construção.

Fonte: Almouloud e Silva (2012, p. 46).

A partir destes aspectos, compreendemos que uma Engenharia Didática de Segunda Geração, visando o desenvolvimento profissional, traz questões norteadoras de pesquisas que vêm diretamente de um problema de ensino, de um conteúdo específico e incluem questões relativas à formação de professores (PERRÍN-GLORIAN, 2011).

Deste modo, podemos estabelecer duas definições distintas, ou seja, dois tipos de ED em função da pergunta inicial da investigação, que são a Engenharia Didática para a Investigação (IDR – em francês *Ingénierie Didactique pour la Recherche*) e a Engenharia Didática de Desenvolvimento (IDD – em francês *Ingénierie Didactique de Développement*).

Almouloud e Silva (2012) afirmam que a IDR busca fazer com que fenômenos didáticos se manifestem para estudá-los, almejando um progresso nos resultados da investigação, a partir de experimentações elaboradas em harmonia com a questão de pesquisa,

sem uma preocupação imediata de uma divulgação mais ampla das situações utilizadas. Por outro viés, a IDD tem por objetivo a produção de recursos para professores ou para a formação de professores. Na Figura 8 apresentamos alguns aspectos entre estas Engenharias:

Figura 8: Aspectos e diferenças entre a IDR e a IDD.

Engenharias Didáticas de 1ª e 2ª geração	
IDR	IDD
• Faz emergir fenômenos didáticos para estudá-los; • Visa um avanço no resultado de investigação, fazendo uso de experimentações montadas em função da questão de pesquisa; • Não há a preocupação imediata em divulgar as situações utilizadas.	• Produzir recurso (s) para professores ou para a formação de professores. • Liberdade de ação para o professor • A investigação continua a ser essencial, mas, as questões de investigação não são motivadas, em primeiro lugar, pela ampliação dos quadros teóricos; • Baseia-se na engenharia de 1ª geração.

Fonte: Almouloud e Silva (2012, p. 46).

Sobre a IDD e a IDR, Artigue (2020) explica que ao comparar os níveis de controle teórico que a IDR e a IDD exercem, em ambos os casos, a análise da matemática envolvida, do conhecimento dos estudantes, a definição das situações e dos ambientes associados, mesmo que estejam sob controle, muito mais flexibilidade é necessária em IDDs para preparar uma adaptação a uma diversidade de contextos.

Já na IDR, Artigue (2020) explica que antes de considerar a aplicação dos recursos da IDR em turmas ordinárias, é necessária uma organização dos níveis intermediários, cada um com suas próprias questões e objetivos, e uma divisão em pelo menos dois níveis:

Au premier niveau, [...], l'objectif est de tester la validité théorique des situations (leur capacité à produire les connaissances attendues) et de dégager les choix fondamentaux de l'ingénierie, séparant ce qui est essentiel, incontournable en référence au savoir visé de ce qui relève du contexte choisi et pourrait être modifié, adapté. [...] Au deuxième niveau, il s'agit d'étudier l'adaptabilité des situations validées à l'enseignement ordinaire, en négociant l'ingénierie avec des enseignants qui n'ont pas été associés à sa conception. Ces négociations, les transformations auxquelles elles conduisent, leur impact sur l'ingénierie et ses résultats, deviennent l'objet d'étude pour déterminer ce qui doit être préservé et pourquoi, et quelles formes de contrôle pourraient être maintenues (ARTIGUE, 2020, p. 58)²⁰.

²⁰ No primeiro nível, [...] o objetivo seria testar a validade teórica das situações (sua capacidade de produzir o conhecimento esperado) e identificar as escolhas fundamentais da engenharia, separando o que é essencial, inevitável com referência ao conhecimento direcionado do que se enquadra no contexto escolhido e poderia ser modificado, adaptado. [...] No segundo nível, trata-se de estudar a adaptabilidade de situações validadas ao ensino comum, negociando a engenharia com professores que não estavam associados ao seu desenho. Essas negociações, as transformações a que conduzem, seu impacto na engenharia e seus resultados, tornam-se objeto de estudo para determinar o que deve ser preservado e o porquê, e quais formas de controle podem ser mantidas. (ARTIGUE, 2020, p. 58, tradução nossa).

Assim, Artigue (2020) explica que este compõe todo o processo que ela denomina de Engenharia Didática de Segunda Geração, em que tais considerações refletem o que aprendemos com as pesquisas sobre o uso de recursos curriculares por professores. “Elas nos mostram claramente que [...] o design se estende ao uso e que, portanto, é necessário antecipar no próprio design o trabalho de design que será o do professor” (ARTIGUE, 2020, p. 58).

Nesse sentido, este trabalho traz situações didáticas que envolvem a parábola pelo prisma da Geometria Analítica enquanto componente curricular, para que seu estudo pelos professores em formação inicial forneçam, a partir de suas ações, o delineamento de um design para o trabalho com esta temática em sala de aula, com associações da parábola à outros contextos e as ligações entre estes.

Ainda conforme Artigue (2009, p. 225) todas essas engenharias (1ª e 2ª gerações) estão voltadas para “a concepção, implementação e avaliação de dispositivos didáticos tendo objetivos bem definidos, e apoiados claramente sobre bases teóricas, e suscetíveis de ser objeto de um discurso tecnológico no sentido da Teoria Antropológica do Didático”.

Sobre a Teoria Antropológica do Didático (TAD), Chevallard (1998, p. 92) propõe que a TAD deve “[...] ser encarada como um desenvolvimento e uma articulação das noções cuja elaboração visa permitir pensar de maneira unificada um grande número de fenômenos didáticos, que surgem no final de múltiplas análises”. Assim, compreendemos o andamento da TAD a partir da Transposição Didática (TD) no ambiente da sala de aula, no momento em que este ambiente é ampliado para as relações entre objetos de ensino, que irão além deste.

A partir do que foi estruturado neste referencial teórico e metodológico, seguimos para o capítulo 3, que inicia a descrição das etapas da ED desenvolvidas neste estudo, começando pelas análises preliminares da engenharia.

3. ANÁLISES PRELIMINARES

Com base no referencial teórico apresentado no capítulo 2, este capítulo é dedicado ao desenvolvimento da ED desta pesquisa, a partir da estruturação de suas fases – análises preliminares, concepção e análise *a priori*, experimentação, análise *a posteriori* e validação.

Segundo Almouloud e Silva (2012), as análises preliminares de um estudo consideram um quadro teórico didático geral acerca de um determinado objeto matemático, composta por uma análise que considera o prisma epistemológico, histórico e didático. Assim, segundo os autores, deve-se levar em conta o ensino atual de determinado objeto matemático, seus efeitos, concepções, dificuldades e obstáculos enfrentados pelos estudantes, bem como uma análise sobre o campo no qual serão desenvolvidas efetivamente as realizações didáticas.

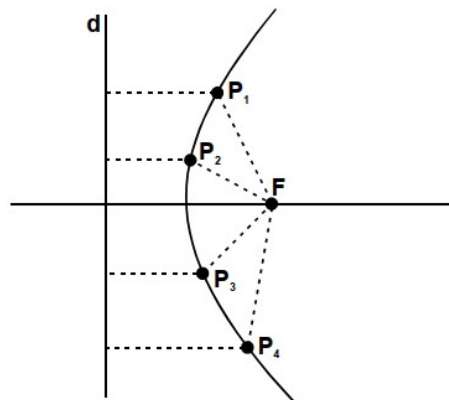
Partindo dessa premissa, as análises preliminares deste estudo se subdividem nas diferentes perspectivas matemáticas acerca do conceito de parábola, no levantamento de aspectos históricos, epistemológicos e didáticos em seu ensino e no papel do GeoGebra na construção desse conceito.

3.1. A parábola em Geometria Analítica

A parábola faz parte do nosso cotidiano e podemos percebê-la em situações como a trajetória do chute em uma bola, o formato das antenas parabólicas, faróis de carro, lanternas e espelhos parabólicos, além de construções diversas no campo da Arquitetura e Engenharia.

Uma definição analítica da parábola, segundo Venturi (2003, p. 41) é: “Considere em um plano, um ponto F e uma reta d que não contém F . Denominamos parábola de foco F e diretriz d ao lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de d e F ”.

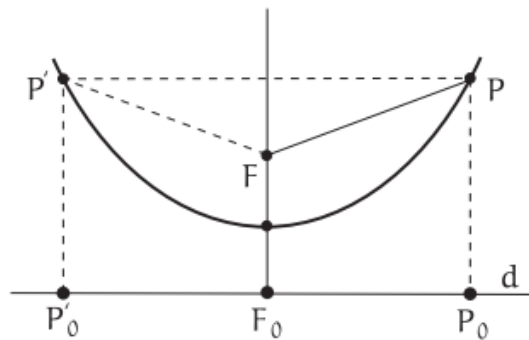
Figura 9: Representação geométrica da parábola, segundo Venturi.



Fonte: Venturi (2003, p. 41).

Na Figura 9 apresentada temos a representação de alguns pontos que pertencem à parábola de foco F e diretriz d , equidistantes do ponto F e da reta d . Uma definição similar é apontada por Lima (2014, p. 115), em que o autor enuncia “sejam d uma reta e F um ponto fora dela. No plano determinado por d e F , chama-se parábola de foco F e diretriz d ao conjunto dos pontos equidistantes de d e F ”, representada pela Figura 10:

Figura 10: Representação geométrica da parábola, segundo Lima.

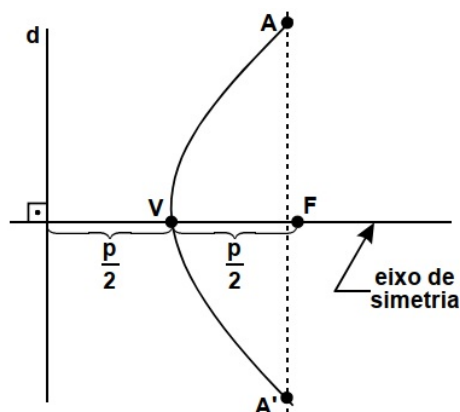


Fonte: Lima (2014, p. 115)

Conforme Lima (2014) o ponto P pertence à parábola de foco F e de diretriz d , pois a distância do ponto P à F é a mesma distância entre o ponto P e P_0 . Ou seja, a $d(P, F) = d(P, P_0)$, com o segmento PP_0 perpendicular à diretriz d e a perpendicular FF_0 baixada do foco sobre a diretriz configura-se em um eixo de simetria.

Os elementos essenciais de uma parábola são o foco (F), a diretriz (d), o vértice (V), o parâmetro (p), que representa a distância do foco à diretriz e a reta VF , que é o eixo de simetria da parábola. Estes elementos são ilustrados na Figura 11:

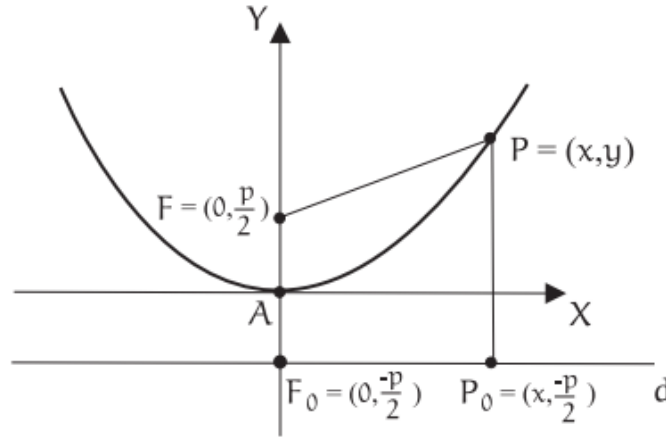
Figura 11: Elementos de uma parábola.



Fonte: Venturi (2003, p. 42)

A dedução da equação de uma parábola de foco F e diretriz d , com $p > 0$ representando a distância de F a d é demonstrada em Lima (2014) a partir do esquema apontado na Figura 12:

Figura 12: Dedução da equação da parábola.



Fonte: Lima (2014, p. 116).

Na dedução de Lima (2014) toma-se um sistema de eixos em que o vértice da parábola é a origem do sistema e o eixo vertical é a reta FF_0 , eixo de simetria da parábola. Observe que o ponto F tem coordenadas $F = (0, \frac{p}{2})$ e a equação da diretriz d é $y = -\frac{p}{2}$. Se o ponto $P = (x, y)$ pertence à parábola, logo temos que $y \geq 0$. Sendo o eixo vertical o eixo de simetria e tendo $P = (x, y)$ pertencente à parábola, então $P' = (-x, y)$ também pertence.

Logo, sendo $P = (x, y)$ um ponto genérico da parábola, temos que a distância de P à diretriz d é igual a $y + p/2$, enquanto a distância de P ao foco F é $\sqrt{x^2 + (y - p/2)^2}$. E como P é um ponto pertencente à parábola, temos que:

$$y + p/2 = \sqrt{x^2 + (y - p/2)^2}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado e desenvolvendo a expressão, temos:

$$(y + p/2)^2 = x^2 + (y - p/2)^2$$

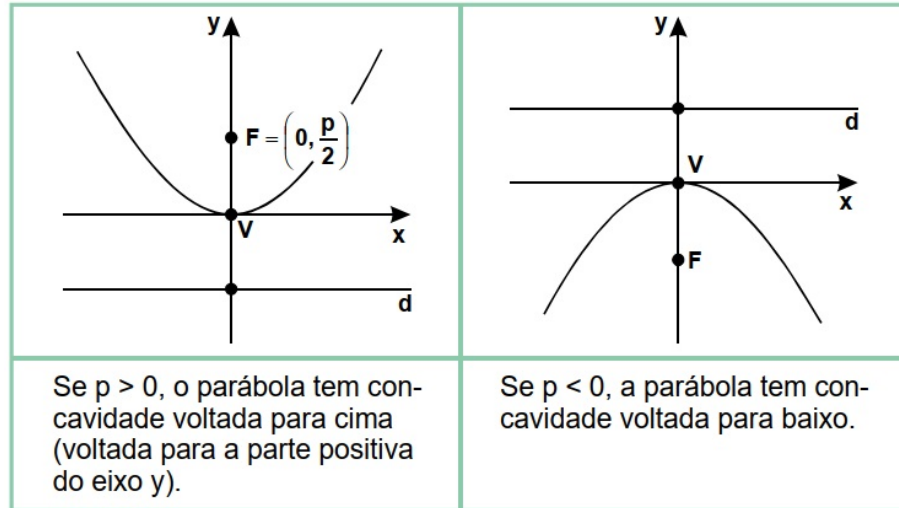
$$y^2 + py + \frac{p^2}{4} = x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4}$$

Reduzindo os termos semelhantes temos:

$$x^2 = 2py \text{ ou } y = \frac{x^2}{2p}$$

Esta equação representa a *equação canônica da parábola* com vértice na origem e eixo de simetria FF_0 . Podemos observar ainda, sobre o parâmetro p (Figura 13), que:

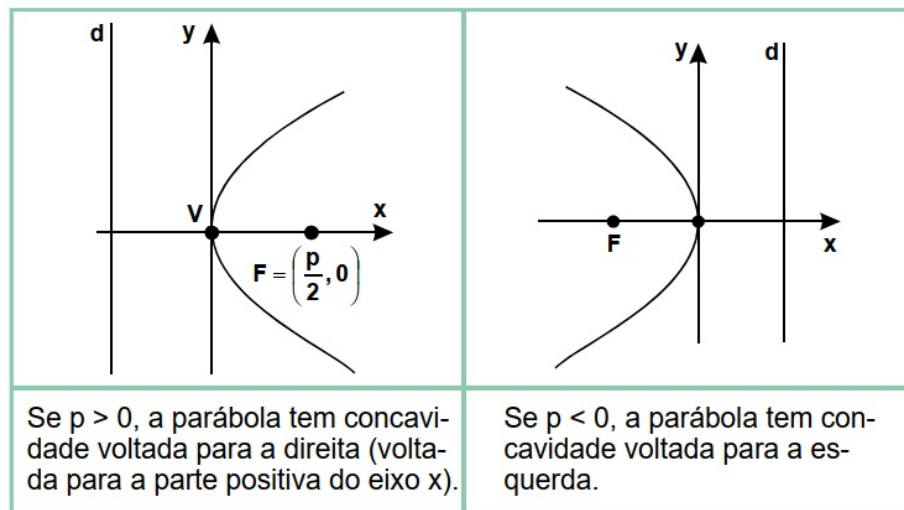
Figura 13: Influência do parâmetro p na concavidade da parábola.



Fonte: Venturi (2003, p. 44).

Por analogia, podemos estabelecer a equação canônica da parábola com vértice na origem e eixo de simetria coincidente com o eixo x . Neste caso a equação da diretriz seria $x = -p/2$. Realizando um procedimento análogo, encontramos a expressão $y^2 = 2px$, sendo esta a equação canônica ou reduzida de uma parábola cujo eixo de simetria coincide com o eixo x . Neste caso, com relação ao parâmetro p , temos (Figura 14):

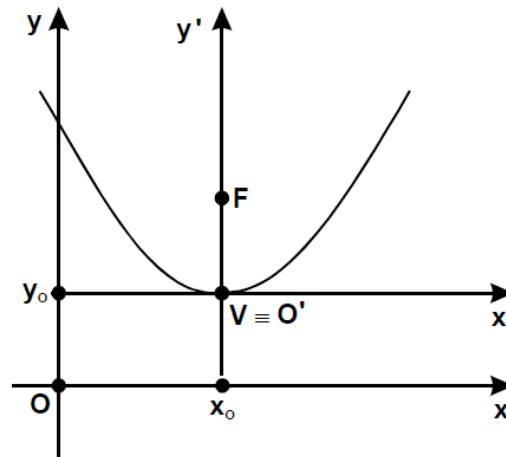
Figura 14: Influência do parâmetro p na concavidade da parábola – 2.



Fonte: Venturi (2003, p. 43).

No caso de uma parábola com vértice fora da origem, ou seja, a partir de uma translação dos eixos, de modo que $x \parallel x'$ e $y \parallel y'$, consideramos os eixos x' e y' e o vértice como ponto $V(x_0, y_0)$, tendo o esquema mostrado na Figura 15:

Figura 15: Parábola com vértice fora da origem.



Fonte: Venturi (2003, p. 51).

A partir disso, temos que a equação da parábola é (I) $(x')^2 = 2py'$. Ao observar o esquema da Figura 15, temos que (II) $x' = x - x_0$ e (III) $y' = y - y_0$. Ao substituirmos (II) e (III) em (I), encontramos que $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$, representando uma parábola de vértice $V(x_0, y_0)$ e eixo de simetria paralelo ao eixo y .

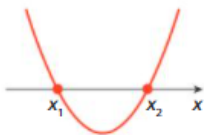
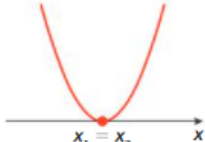
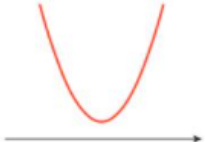
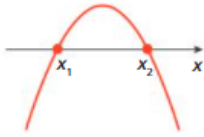
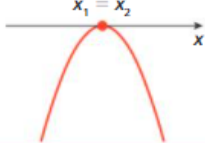
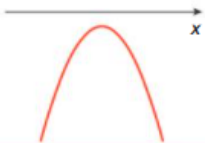
As definições apresentadas por Venturi (2003) e Lima (2014) são vistas em outros livros de Geometria Analítica, com poucas diferenças. Contudo, percebe-se uma abordagem com viés mais voltado para a Álgebra de fato do que para a Geometria.

3.2 A parábola como gráfico de uma função quadrática

Já no contexto das funções polinomiais do 2º grau, na Educação Básica especialmente, a definição de parábola é apresentada nos livros didáticos como o gráfico da função quadrática, com uma explicação de que quando as parábolas representam uma função quadrática, estas podem ter sua abertura (concavidade) voltada para cima ou para baixo (LEONARDO, 2016) sem mencionar muitas vezes porque isto ocorre, ou mesmo a diferença entre uma parábola e uma catenária, por exemplo.

Nos livros didáticos da Educação Básica a parábola é comumente apresentada do ponto de vista das funções quadráticas, levando em consideração apenas o sinal do coeficiente a e do discriminante (Δ), como em Leonardo (2016, p. 116), apresentado na Figura 16:

Figura 16: Comportamento do gráfico com base no valor de a e Δ em uma função quadrática.

	1º caso ($\Delta > 0$)	2º caso ($\Delta = 0$)	3º caso ($\Delta < 0$)
$a > 0$			
$a < 0$			

Fonte: Leonardo (2016, p. 116).

Lucena e Gitirana (2016, p. 25) afirmam que o estudo da parábola ocorre por meio de “um ensino que prioriza o tratamento algébrico e deixa a desejar a interpretação geométrica do objeto matemático representado, o que dificulta um aprofundamento maior dos conceitos em foco”. Isto nos faz refletir sobre a importância de buscar diferentes abordagens para o ensino desta temática voltadas para a sala de aula.

Além disso, outras pesquisas como a de Feltes e Puhl (2016), Bohrer e Tinti (2021), Vieira *et al.* (2021), corroboram que a metodologia dos professores no contexto brasileiro traz consigo alguns hiatos, com aulas tradicionais e pouco uso de recursos tecnológicos ou aplicações práticas. Assim, os estudantes tendem a desenvolver pouco a parte do pensamento abstrato, apresentando uma visão estreita e redutora da parábola e da própria função quadrática. Há ainda a carência de uma discussão mais profunda sobre o conceito de função quadrática em sala de aula, bem como a exploração das múltiplas representações de funções, considerando a relação entre o conceito e a imagem, e uma consequente exploração do raciocínio (intuitivo) matemático, como defendido por Fischbein (1987a, 1987b, 1993).

Uma maneira diferente de se escrever a função polinomial do 2º grau, e até mesmo estendê-la para uma demonstração da equação da parábola, é a sua forma canônica, em que a função pode ser escrita a partir das coordenadas de seu vértice. Esta abordagem é pouco explorada nas aulas de Matemática e raramente é contemplada nos livros-texto do Ensino Médio (CERQUEIRA, 2015; MACEDO, 2015).

De acordo Lima *et al.* (2006) temos que as coordenadas do vértice (x_v, y_v) de uma parábola que é associada a uma função quadrática podem ser obtidas de diferentes formas. Caso a função esteja na forma canônica:

$$f(x) = a \cdot (x - h)^2 + k, \text{ com } a \neq 0$$

o vértice é dado pelas coordenadas do ponto (h, k) . Utilizando produtos notáveis, podemos reescrever a forma geral da função do 2º grau $f(x) = a \cdot x^2 + bx + c$ para a forma canônica: $f(x) = a \cdot (x - h)^2 + k$. Sabemos que as coordenadas do vértice da parábola são:

$$V(x_v, y_v) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

com $h = -\frac{b}{2a}$ e $k = -\frac{\Delta}{4a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Demonstrando esta relação, dada a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, colocaremos a em evidência e buscaremos reescrever a função a partir das coordenadas (x_v, y_v) . Assim, temos:

$$f(x) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c$$

Para transformar a expressão dada em parênteses $x^2 + \frac{b}{a}x$ em um produto notável, devemos fazer aparecer um trinômio quadrado perfeito na expressão. Para isso, devemos escrever:

$$f(x) = a \left[x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right] + c$$

Considerando que a expressão $x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a} \right)^2$, neste formato pode ser escrita como um produto notável e desenvolvendo o termo $\left(\frac{b}{2a} \right)^2$ temos:

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \right] + c$$

$$f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + c$$

$$f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

Reorganizando a função para que fiquem explícitas as expressões que representam as coordenadas do vértice, temos:

$$f(x) = a \left[x - \left(-\frac{b}{2a} \right)^2 \right] + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

$$f(x) = a \left[x - \left(-\frac{b}{2a} \right)^2 \right] + \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$f(x) = a \left[x - \left(-\frac{b}{2a} \right)^2 \right] + \frac{-\Delta}{4a}$$

$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$$

que é a forma canônica da função quadrática, escrita em função das coordenadas $V(x_v, y_v)$. Devemos compreender as coordenadas do vértice como sendo o ponto da parábola mais próximo da diretriz, sendo este o ponto médio do segmento cujas extremidades são o foco F da parábola e a interseção do eixo de simetria com a reta diretriz d . A forma canônica é viável na resolução de situações em que as coordenadas do vértice são conhecidas.

Cerqueira (2015) e Macedo (2015) em suas pesquisas criticam a abordagem deste assunto, apontando sua exploração de forma demasiadamente resumida, em uma visão analítica/algébrica, não explorando as características e possibilidades geométricas da parábola, quiçá o uso da tecnologia na exploração de seus elementos. E partindo dessa premissa, trazemos a exploração da parábola neste trabalho buscando compreendê-la a partir de uma visão geométrica e da manipulação de seus parâmetros com arrimo do *software* GeoGebra.

3.3. A parábola em coordenadas polares

Dentre os sistemas de coordenadas planas, comumente utilizamos o sistema cartesiano ortogonal, que associa pares (x, y) a uma posição dentro do espaço delimitado por dois eixos ortogonais. E até o momento, na escrita deste trabalho consideramos apenas este modelo de sistema de coordenadas.

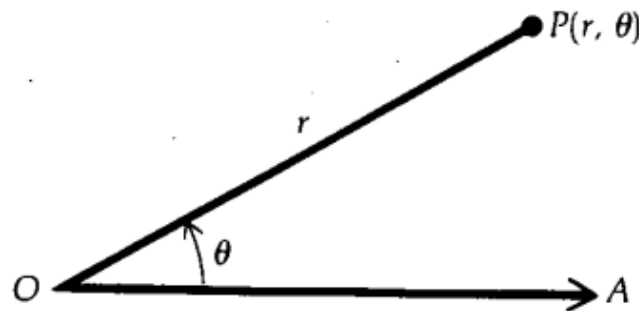
Contudo, uma outra maneira de se representar pontos no plano corresponde ao sistema de *coordenadas polares*. Com relação a este sistema, para algumas curvas e problemas referentes à lugar geométrico, este modelo oferece maiores vantagens em relação às

coordenadas cartesianas, além de facilitar, em alguns casos, o cálculo de integrais (LEITHOLD, 1994).

Assim, como traz Leithold (1994, p. 609), no sistema de coordenadas polares, “as coordenadas de um ponto consistem em uma distância orientada e da medida de um ângulo, em relação a um ponto fixo e a um semieixo fixo”. Desta maneira, ao fixarmos um ponto O , denominado *polo* ou *origem* e uma semirreta de origem neste ponto denominada *semieixo polar*, localizamos qualquer ponto P do plano se conhecermos a sua distância ao *polo* e o ângulo θ que o segmento $\overline{OP}$ forma com o semieixo polar.

Um esboço desta ideia pode ser visto na Figura 17:

Figura 17: Esboço de um Sistema de Coordenadas Polares.



Fonte: Leithold (1994, p. 608).

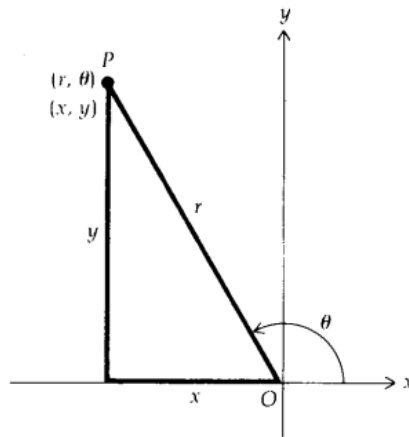
Leithold (1994) e Agustini (2020) argumentam que é uma desvantagem o fato de não haver uma correspondência biunívoca entre pares e pontos, como no caso do sistema de coordenadas cartesianas. É especialmente este aspecto que possibilita resultados que, em alguns casos, diferem dos obtidos no sistema cartesiano ortogonal. Contudo, é importante relacionarmos coordenadas cartesianas e coordenadas polares. Essa relação pode ser dada pelo teorema proposto em Agustini (2020, p. 192):

Teorema 1: *Consideremos um plano munido do Sistema de Coordenadas Cartesianas Ortogonais e do Sistema de Coordenadas Polares, nos quais os eixos polar e das abscissas coincidem. Então as coordenadas cartesianas (x, y) e as coordenadas polares (r, θ) de um mesmo ponto satisfazem:*

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

De forma gráfica, podemos visualizar o Teorema 1 proposto em Agustini (2020) na obra de Leithold (1994) por meio da Figura 18:

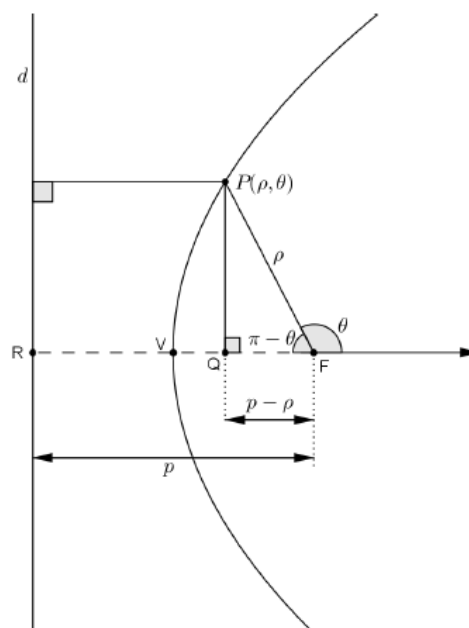
Figura 18: Representação gráfica do Teorema 1



Fonte: Leithold (1994, p. 611).

A partir das equações descritas no Teorema 1, podemos obter a equação polar de uma curva, dada sua equação cartesiana. Deste modo, consideremos uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo x , vértice V , foco F e $RF = \rho$. Sendo $P(\rho, \theta)$ um ponto arbitrário da parábola e fazendo coincidir o polo O com o foco F e o eixo polar com o eixo de simetria da parábola de acordo com a Figura 19, temos:

Figura 19: A parábola no sistema de coordenadas polares.



Fonte: Peixoto (2013, p. 60).

Ao observarmos a Figura 18, temos que no ΔPQF :

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta = \frac{p - \rho}{\rho}$$

Partindo disso, temos que $\rho = \frac{p}{1 - \cos\theta}$, em que p é o parâmetro da parábola. Inserindo na equação a excentricidade e como uma razão constante, temos que sua equação na forma polar é dada por:

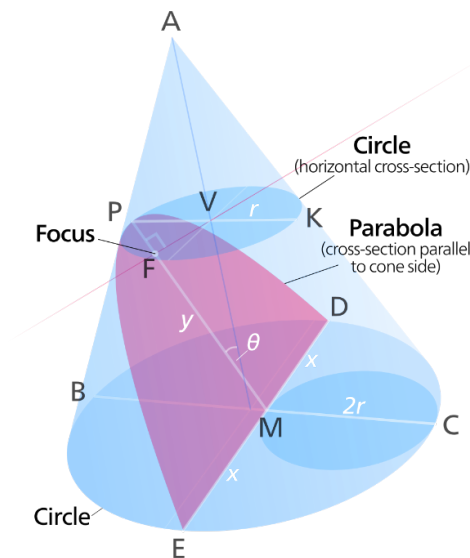
$$\rho = \frac{p \cdot e}{1 - e \cdot \cos\theta}$$

com $p \neq 0$ e $e = 1$.

3.4. A parábola como uma secção cônica

Como secção cônica, a parábola configura-se em uma curva obtida através da intersecção de um cone e de um plano que não passa pelo seu vértice e é paralelo à sua geratriz (VENTURI, 2003; DIAS; DANTAS, 2006; LIMA *et al.*, 2014). Desta forma, existe um processo geométrico para determiná-la a partir de sua definição como a secção de um cone. Buscamos ilustrar esta secção de modo mais claro na Figura 20:

Figura 20: Parábola como a secção de um cone.



Fonte: Repositório Pngegg²¹ (2022).

²¹ Imagem disponível no endereço eletrônico: <https://www.pngegg.com/pt/png-cigjs>

Na Figura 20 temos a representação de um cone (em azul), com eixo no sentido $\overline{AV}$ e vértice no ponto A . Em rosa, temos uma secção transversal oblíqua ao cone, inclinada a partir do eixo em um ângulo de abertura θ , tangenciando a lateral do cone. Partindo da definição de parábola como secção cônica, temos que o limite da região compreendida pelos pontos DEP e destacadas em cor rosa corresponde a uma parábola.

Ainda observando a Figura 19, podemos escrever uma equação quadrática em função de r e θ .

Note que há uma secção transversal, perpendicular ao eixo do cone e que passa por P , vértice da parábola. Considere que esta secção é circular, com centro V e $\overline{PK}$ sendo seu diâmetro, logo temos que $\frac{\overline{PK}}{2} = r$. Mais abaixo, podemos observar outra secção transversal também circular e perpendicular ao eixo do cone, que possui uma corda $\overline{DE}$ em sua base e que liga os pontos onde a parábola cruza o círculo. Se notarmos, temos outra corda $\overline{BC}$, perpendicular à $\overline{DE}$ e, conseqüentemente, diâmetro do círculo da base. As cordas $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$, bem como o eixo de simetria $\overline{PM}$ da parábola se interceptam no ponto M . Chamemos os segmentos $\overline{DM}$ e $\overline{EM}$ de x e o comprimento $\overline{PM}$ de y . Os comprimentos de $\overline{BM}$ e CM são:

$$\overline{BM} = 2r \sin \theta$$

dado o fato de que $\angle BPM$ é isósceles, pois $\overline{PM} \parallel \overline{AC} \rightarrow \angle PMB = \angle ACB = \angle ABC$, e

$$\overline{CM} = 2r$$

com $PMCK$ sendo um paralelogramo. A partir do Teorema das Cordas²², oriundo das relações métricas em uma circunferência, temos que:

$$\overline{BM} \cdot \overline{CM} = \overline{DM} \cdot \overline{EM}$$

e ao substituir, temos a expressão:

$$4r \sin \theta = x^2$$

que sendo reescrita em função de y , fica:

$$y = \frac{x^2}{4r \sin \theta}$$

²² Sejam AB e CD cordas distintas de um mesmo círculo que se intersectam no ponto P . Então $AP \cdot PB = CP \cdot PD$ (BARBOSA, 2012, p. 154).

Assim, dado qualquer cone e parábola nessas condições, temos que r e θ são constantes. Entretanto, x e y são valores mutáveis, pois são variáveis que dependem da altura arbitrária na qual a seção transversal horizontal $BECD$ é feita. A equação $y = \frac{x^2}{4r \operatorname{sen} \theta}$ aponta a relação existente entre essas variáveis, que podem ser compreendidas como coordenadas cartesianas dos pontos D e E , considerando um sistema no plano (em rosa) e tendo o ponto P como origem.

Além disso, dado o fato de que x é elevado ao quadrado nesta equação, a ocorrência de D e E em lados opostos do eixo y não é relevante. Caso a secção transversal horizontal se mova para cima ou para baixo, para mais próximo perto ou mais distante do vértice V do cone, os pontos D e E se movem ao longo da parábola, mantendo a relação entre x e y explicitada na equação. Portanto, temos que a curva parabólica é o locus dos pontos em que a equação é satisfeita, o que a torna um gráfico cartesiano da função quadrática na equação dada.

3.5. Aspectos históricos, epistemológicos e didáticos no ensino de parábolas

Desde muito tempo as cônicas são estudadas. Menaecmus (350 a.C.) foi o primeiro a tratar das secções cônicas, seccionando cones com planos perpendiculares à geratriz. Contudo, sua definição principal foi deduzida na obra prima de Apolônio de Perga (262-190 a.C.) denominada *As Cônicas*, que rendeu a este matemático o título de O Grande Geômetra (EVES, 2011; BOYER, 2012).

Apolônio trouxe o estudo das curvas das secções cônicas a partir de superfícies cônicas duplas e retas, como utilizamos atualmente. Todavia seu estudo obteve considerável relevância no século XVII, a partir dos trabalhos de Gérard Desargues (1593-1661), Blaise Pascal (1623-1662), Johannes Kepler (1571-1630) e Galileu Galilei (1564-1642) (STILLWELL, 2010; EVES, 2011; BOYER, 2012).

As aplicações mais famosas das cônicas devem-se a Galileu (1564-1640), que em 1604 concluiu que a trajetória da bala de um canhão descreve uma parábola, bem como Kepler (1571-1630) e Newton (1643-1727) que constataram por meio de suas pesquisas que as órbitas dos planetas são elípticas. “O resultado de Galileu de que a trajetória de um projétil é uma parábola decorre facilmente da suposição de que a única força é vertical e, portanto, o projétil tem aceleração zero na direção horizontal” (STILLWELL, 2010, p. 245).

As teorias de Galileu foram confirmadas anos depois por Newton (1643-1727), a partir da Lei da Gravitação Universal. De acordo com Boyer (2012) tais descobertas possibilitaram conjecturar uma relação entre as cônicas e a natureza, como é o caso da órbita dos planetas e de alguns cometas no sistema solar, o que fez com que o estudo dessas curvas fossem além da Matemática, passando a interessar a outras ciências, como a Astronomia e a Física.

As cônicas, no geral, são objetos matemáticos estudados com uma breve abordagem no Ensino Médio e sua extensão nos cursos de licenciatura em nível superior, geralmente na disciplina de Geometria Analítica. A definição de uma cônica é dada a partir de dois pontos de vista: interseção de um plano com um cone e como lugar geométrico de pontos, sendo estas divididas em circunferência, parábola, elipse e hipérbole. Entretanto, neste trabalho nosso interesse é direcionado apenas à cônica parábola.

Bermúdez e Mesa (2018) afirmam que as cônicas - elipse, parábola e hipérbole - de modo geral, são apresentadas nos livros como uma unidade didática e sua demonstração toma por pressuposto que os estudantes possuem uma base prévia sobre o seu conceito matemático. Isto pode ser percebido no modo como o conteúdo é introduzido em sala de aula e na forma como se chegam às suas definições, a partir da generalização de conceitos, sem realizar uma sondagem prévia que permita ter alguns julgamentos ou elementos geométricos básicos na construção e obtenção da equação que representa a curva de uma cônica.

Alves e Pereira (2016) enfatizam que a linguagem apresentada nos livros didáticos e usada no ensino da própria Geometria Analítica apresenta falhas, gerando dificuldades na compreensão do assunto, pois a forma como o tema é abordado trata seus tópicos de modo dissociado, por vezes não relacionando estes tópicos a conhecimentos prévios e não explorando o real significado de cada termo envolvido. Porém, a compreensão eficiente destes conceitos é necessária para o desenvolvimento cognitivo do estudante no âmbito da Geometria, não apenas na Educação Básica, mas também no Ensino Superior.

Nesse sentido, é essencial que o docente tenha a competência profissional desenvolvida nos âmbitos epistêmico e didático, em que é interessante que este busque meios para uma transposição didática adequada do conteúdo, com real significado matemático, possibilidades de aplicações, bem como uma melhor desenvoltura em sua atuação, refletindo na compreensão e aprendizado de seus alunos.

Poucas são as aplicações abordadas em sala de aula no que diz respeito ao ensino de parábolas dentro da Geometria Analítica (CERQUEIRA, 2015; MACEDO, 2015). Esta é uma temática pouco explorada no Ensino Médio, sendo um assunto não priorizado no currículo brasileiro, “inclusive, não é um tema que aparece, com frequência nos exames de seleção em

várias partes do país” (SIQUEIRA, 2016, p. 6), o que tem reverberado na dificuldade do estudante ao se deparar com algumas disciplinas de nível superior como Geometria Analítica (Plana ou Vetorial), Álgebra Linear e Cálculo Diferencial e Integral, por exemplo.

No contexto brasileiro, há estudos anteriores que apontam que o estudo das cônicas em nível superior prioriza o uso de equações e tratamento algébrico, em detrimento de sua compreensão geométrica (OLIVEIRA, 2011; PEREIRA, 2013; LIMA, 2015; SIQUEIRA; SILVA, 2019). Pereira (2013, p. 12), acerca deste estudo, afirma que:

No ensino básico, as cônicas só aparecem no terceiro ano do ensino médio, sendo quase sempre trabalhadas somente com centro na origem, esquecendo-se assim das cônicas com centros em outros pontos e que as cônicas também podem estar rotacionadas. As elipses e as hipérboles são trabalhadas por meio dos parâmetros a , b e c e as parábolas do parâmetro p . No ensino superior elas voltam a ser estudadas em cálculo, para a construção de superfícies no espaço, em geometria analítica, com enfoque nas equações analíticas e álgebra linear, onde é feita uma ligação delas com vetores e matrizes. (PEREIRA, 2013, p. 12).

Nesse sentido, há uma preocupação em como a parábola enquanto cônica é apreendida pelo estudante de graduação no decorrer de sua formação inicial, bem como de que forma ele trabalha com este tópico em seu campo de atuação profissional. Há possíveis hiatos que permeiam o estudo analítico da parábola entre o percurso que inicia na Educação Básica e segue até o nível superior (SIQUEIRA, 2016; SIQUEIRA; SILVA, 2019) que podem ser decorrentes de diversos fatores, como o fato de o docente não ter estudado este tema dentro do campo da Geometria Analítica em nenhum nível educacional, dificuldades de ordem epistêmica, decorrentes de um estudo superficial do tema, ou mesmo dificuldades de ordem didática no trabalho com esta temática em sala de aula.

Lima (2015) aponta que nos livros didáticos de Matemática, as cônicas são tratadas apenas sob a óptica das equações algébricas, enquanto sua abordagem histórica, propriedades geométricas, relações entre curvas e suas aplicações geralmente são deixadas de lado, ou brevemente mencionadas em notas complementares com sugestões de leituras, de modo abreviado. Ainda segundo este autor:

É muito provável que essa abordagem limitada e superficial das cônicas nos livros didáticos seja um dos grandes motivos da não valorização do tema pelos alunos, sentimento compartilhado, pela maioria dos próprios professores, que por usar, na maioria das vezes, o livro didático como única fonte de pesquisa, deixa de reconhecer a beleza, história, importância e utilidade do tema. (LIMA, 2015, p. 193).

As lacunas presentes na formação básica do estudante de graduação acumulam-se até o nível superior, acarretando dificuldades no aprendizado deste tema durante sua formação

inicial, isto quando o estudo dessa temática ocorre (SIQUEIRA, 2016). É comum que a parábola seja vista em alguns programas da disciplina de Geometria Analítica, como último tópico a ser trabalhado e, em alguns casos, seu estudo não é contemplado, como Siqueira (2016) aponta. Tais lacunas e dificuldades podem reverberar em sua atuação profissional.

Entretanto, destacamos que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) reforça a importância da articulação entre a Geometria e a Álgebra, construindo significado para o estudante, enfatizando que não se deve tratar as equações de modo desvinculado de sua interpretação geométrica. No documento da BNCC podemos encontrar uma das habilidades que corroboram a pertinência do conhecimento acerca de funções polinomiais do 2º grau e que pode ser estendida para o estudo de parábolas:

(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. (BRASIL, 2018, p. 534).

Assim, ao reconhecer o valor desta temática de estudo, cabe mencionar também a relevância de se trabalhar este tópico com professores atuantes na Educação Básica. Para isso, a BNCC oferece como sugestão o uso de recursos tecnológicos por meio de *softwares* ou aplicativos, como forma de facilitar o planejamento do professor e dinamizar as aulas, promovendo um ambiente propício ao desenvolvimento do estudante (BRASIL, 2018).

Guedes (2015) afirma que os *softwares*, se utilizados de forma bem elaborada na metodologia do professor, são capazes de impulsionar a participação dos estudantes, promovendo um espaço de aprendizagem ativa e de reflexão, em que o estudante se sente envolvido no processo e pode explorar manipulações e variações dos dados, obtendo respostas às perguntas que possam surgir no decorrer das atividades propostas, de modo autônomo.

Por diversas vezes o ensino de Geometria Analítica parte da utilização de algoritmos e técnicas que privilegiam a apresentação dos conceitos via definições formais, demonstrações e realização de exercícios que não propiciam, a princípio, um desenvolvimento cognitivo do raciocínio geométrico do estudante (BERMÚDEZ; MESA, 2018). É possível que o uso recorrente de analogias e uma exploração inadequada da intuição na construção do conhecimento, acompanhado de diversos exemplos e contraexemplos, até que se tenha uma demonstração formal e generalizada, consista no formato de ensino dos conceitos fundamentais deste assunto/disciplina.

Desta forma, reafirmamos a importância da compreensão do tópico de parábolas a partir de um viés que explora a visualização geométrica, visando compreender como ocorre a construção dos conceitos matemáticos pelo prisma intuitivo. Almejamos, ainda, que tal compreensão ocorra de forma gradual, conectada e seguindo uma lógica de pensamento a partir dos estímulos propiciados pelas situações didáticas propostas na análise *a priori* desta pesquisa, e que a experiência por meio do GeoGebra possa instigar um novo olhar e uma busca por diferentes possibilidades metodológicas pelos professores em formação inicial.

3.6. O papel do GeoGebra na construção do conceito de parábola

A utilização de recursos tecnológicos durante o estudo da Matemática, de modo geral, pode auxiliar no processo de ensino e aprendizagem (GUEDES, 2015; ABAR, 2020). Assim, *softwares* de Geometria Dinâmica como o GeoGebra configuram-se em ferramentas de ensino com ótimos recursos para a visualização, manipulação e interpretação de diversos assuntos, corroborando aos processos mentais oriundos da aprendizagem a partir das ações dos estudantes durante o seu uso. Contudo, destacamos que o uso de modo produtivo/eficiente deste tipo de recurso em sala de aula, independentemente do nível de ensino, está sujeito, essencialmente, ao domínio dos conteúdos matemáticos que serão explorados através do mesmo.

O GeoGebra é um *software* de livre acesso, que permite a criação, visualização e manipulação de representações de conceitos matemáticos em um ambiente computacional de Geometria Dinâmica, defendido por muitos autores em diferentes pesquisas ao redor do mundo. No que diz respeito à compreensão do mundo que nos cerca a partir da visualização geométrica, Alves (2019) afirma que com o *software* GeoGebra, os estudantes podem desenvolver uma capacidade de análise global e local de propriedades extraídas do ambiente computacional e geométrico.

O ambiente do GeoGebra possibilita o trabalho com Geometria, Álgebra e Cálculo de forma articulada, proporcionando a construção de relações entre objetos e conceitos mediante distintas possibilidades de construções. Alves e Borges Neto (2012) afirmam que a exploração do GeoGebra como instrumento tecnológico possibilita a visualização de situações inimagináveis, quando restritas ao lápis e papel. Alves (2019) reitera que, com base no potencial do *software* GeoGebra para a resolução de problemas, o professor, ao utilizá-lo, pode estimular o envolvimento do estudante em uma exploração dinâmica de propriedades

numéricas e geométricas, desenvolvendo a visualização, percepção e intuição, essenciais para a evolução da aprendizagem dos estudantes.

Para Iglesias e Ortiz (2018) os *softwares* de Geometria Dinâmica, incluindo o GeoGebra, favorecem a elaboração de construções geométricas, bem como a sua exploração por meio de ferramentas como “mover um objeto”, entre outras possibilidades de manipulação dentro de seu ambiente, o que permite o reconhecimento de propriedades invariáveis quando um objeto é submetido a uma transformação. Deste modo, o *software* pode propiciar a descoberta de relações entre os objetos que compõem uma construção geométrica. Paiva e Alves (2018, p. 78) complementam que “ao utilizamos o *software*, revelamos uma metodologia aplicável em sala de aula, que prioriza manipulações geométricas ao invés de execuções de natureza algébrico-analíticas”.

Segundo Abar (2020), no que tange ao uso da tecnologia em sala de aula para o Ensino de Matemática em seus diversos tópicos, apesar da evolução ao longo dos anos, ainda há um longo caminho a percorrer. Sobre o GeoGebra, a autora ressalta que o *software* é um recurso que vem para agregar ao professor e facilitar sua prática, no entanto, muitos professores têm dificuldades no manuseio desta ferramenta. Uma razão para isso é que para elaborar estratégias metodológicas diferentes do ensino tradicional exige do professor uma dedicação maior ao seu desenvolvimento profissional, demandando mais tempo para que este consiga absorver todas as informações, estudar e transpor essas ideias para a sua prática (ABAR, 2020).

Assim, enfatizamos a importância do GeoGebra na compreensão do conceito de parábola, partindo da construção e manipulação de seus elementos, buscando interpretá-la em situações didáticas propostas nesta pesquisa, que exploram a visualização geométrica, para assim, via *software*, assimilar como a construção deste conceito ocorre no campo da Geometria Analítica e as diferentes possibilidades de articulação deste assunto com outros tópicos da matemática que, porventura, possam surgir no decorrer dos encontros formativos. Espera-se que o professor em formação inicial, a partir da participação e resolução das situações didáticas, reconheça, experimente e/ou desenvolva diferentes formas de trabalhar este tema em sua atuação em sala de aula.

Por fim, no próximo capítulo trazemos a análise *a priori* desta pesquisa, com a descrição das situações didáticas propostas, bem como uma previsão dos possíveis comportamentos dos sujeitos, com base nas dialéticas da Teoria das Situações Didáticas e de possíveis manifestações das Categorias do Raciocínio Intuitivo.

4 ANÁLISE *A PRIORI*

Segundo Almouloud e Coutinho (2008), em uma análise *a priori* devemos levar em consideração as variáveis didáticas do estudo e todas as características da situação didática a ser desenvolvida, buscando ter controle, no sentido de previsibilidade dos possíveis comportamentos dos estudantes mediante uma situação didática, em que “as ações do aluno são vistas no funcionamento quase isolado do professor, que sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagem” (ALMOULOU; COUTINHO, 2008, p. 67).

Nesse sentido, buscamos elencar situações didáticas de ensino que abordam a parábola para além do prisma algébrico/analítico, explorando-a também por uma perspectiva geométrica, a partir da construção das soluções destas situações didáticas no GeoGebra, com a manipulação de seus parâmetros e elementos pelos sujeitos, incumbindo-os da tarefa de demonstrar seu raciocínio matemático (e intuitivo) nestas soluções.

Para isso, esta etapa da pesquisa segue um plano de ação em que definimos as variáveis (globais e locais) da Engenharia Didática. No que tange às variáveis globais, compreendemos como sendo a organização da Engenharia como um todo e a possibilidade de replicação deste estudo em outros contextos, com a vistas à ampliação das hipóteses.

A partir desta delimitação para as variáveis globais, surgem as variáveis locais, como hipóteses mais específicas voltadas para o âmbito da sala de aula. Tais hipóteses referem-se à previsão atitudinal dos sujeitos, no que diz respeito ao seu comportamento diante das situações didáticas que, ao final de todo o percurso, serão essenciais para a validação da Engenharia. Neste caso, como variáveis locais, temos:

- (i) As possíveis dificuldades no desenvolvimento das situações didáticas no GeoGebra (transposição do papel para o *software*);
- (ii) Os conhecimentos prévios dos estudantes sobre o tema matemático a ser estudado não serem suficientes para a compreensão e solução das situações didáticas;
- (iii) Os estudantes não apresentarem de forma clara uma manifestação das Categorias do Raciocínio Intuitivo.

Para Artigue (1996), problemas ou questões de controle podem ajudar a prever os comportamentos dos estudantes e, portanto, nesta fase apresentamos as situações didáticas que envolvem parábolas, em diferentes perspectivas e níveis, bem como suas descrições e resoluções a partir do comportamento esperado pelo estudante.

Assim, esta análise *a priori* organiza as situações didáticas a partir das etapas da TSD, no intuito de prever comportamentos a partir de uma dialética entre os sujeitos da pesquisa e as situações didáticas, intermediados pela pesquisadora no processo de institucionalização e devolução, em que são apontadas possíveis manifestações de conhecimentos e habilidades matemáticas destes sujeitos no desenvolvimento dos problemas investigados e de sua abordagem.

Ressaltamos a importância da elaboração desta etapa da pesquisa, pois a partir destes comportamentos, buscamos validar as situações didáticas descritas, com base na manifestação das Categorias do Raciocínio Intuitivo, oriunda da interação entre os sujeitos da pesquisa e os conhecimentos desenvolvidos ou revelados de forma intuitiva, fruto de suas vivências práticas e das diferentes resoluções das situações didáticas propostas.

Assim, a validação da ED desta pesquisa é essencialmente interna e será realizada com base no confronto entre a análise *a priori*, que estabelece estas previsões atitudinais com base na TSD e nas Categorias do Raciocínio Intuitivo; e a análise *a posteriori*, que toma por substrato a coleta de dados no percurso de experimentação, com as produções dos sujeitos escritas e no GeoGebra, gravações de áudio e vídeos da tela do computador e outros tipos de registros que sejam pertinentes à validação da pesquisa.

4.1 Situações Didáticas e seu *mise en place*

As situações didáticas descritas nesta seção são voltadas para o trabalho com parábolas tendo como objetivo explorar seu conceito, identificar seus elementos pela óptica da Geometria Analítica (foco, vértice, diretriz), bem como compreendê-la por um prisma geométrico com arrimo do GeoGebra, almejando identificar quais categorias intuitivas podem vir a emergir a partir do seu desenvolvimento.

Estas situações foram escolhidas/elaboradas pois, de algum modo, a parábola é mais corriqueiramente trabalhada em sala de aula no contexto das funções quadráticas e pouco explorada no Ensino Superior, no contexto da licenciatura em Matemática (LOUZADA, 2013; SIQUEIRA, 2016; SIQUEIRA; SILVA, 2019) e buscamos observar como os sujeitos se comportarão mediante as atividades propostas.

Outro ponto elencado com relação ao trabalho com parábolas é a pouca articulação entre a parábola no campo da Geometria Analítica e metodologias de ensino que preconizem o uso de recursos tecnológicos no Ensino Superior, (RICHIT, 2005; LUCENA; GITIRANA, 2016; PAIVA; ALVES, 2019; BERMÚDEZ; MESA, 2018; SOUSA *et al.*, 2021) o que

também justifica nossa escolha pelo desenvolvimento das situações didáticas com uso do GeoGebra. Com isso, nossa intenção é verificar que conhecimentos estes professores em formação inicial trazem consigo acerca da temática e de que forma estes conhecimentos podem manifestar-se a partir da proposta trazida com o *software*.

Desta forma, pretendemos utilizar as situações didáticas para analisar, a partir das dialéticas da TSD, de que forma as Categorias do Raciocínio Intuitivo se manifestam no campo epistêmico no momento da interação situações didáticas - professores em formação, verificando suas atitudes e comportamentos durante a resolução das situações propostas dentro da etapa de experimentação.

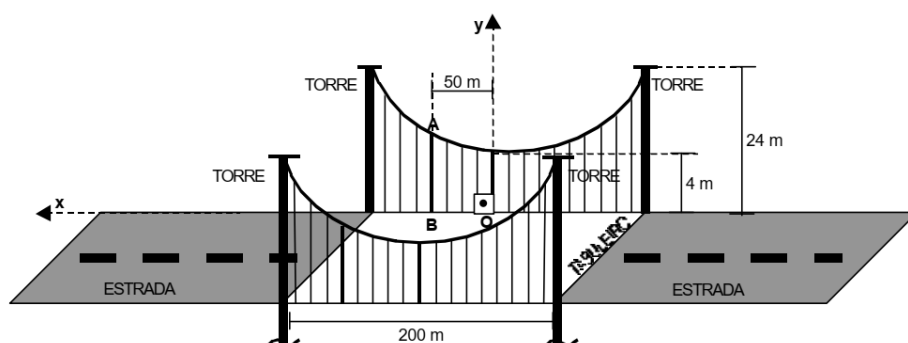
Delimitamos nosso número de situações didáticas a serem desenvolvidas para cinco questões, em que estas serão trabalhadas tanto no ambiente lápis e papel, quanto no ambiente computacional. É um número de questões que consideramos razoável o suficiente para identificar possíveis manifestações intuitivas, buscando evitar a possibilidade de o sujeito passar a realizar os procedimentos para solução das situações didáticas por meio de analogias ou comparações. As situações didáticas a serem propostas estão elencadas no Quadro 2:

Quadro 2: Situações didáticas propostas.

SITUAÇÃO DIDÁTICA I: Com o auxílio de uma régua, trace uma reta r e fora dela marque um ponto F . Escolha em r pontos equidistantes $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$ e dobre o papel de modo que A_1 coincida com F . Para facilitar a visualização da curva, trace a reta que coincide com a dobra. Repita essa operação para todos os outros pontos marcados em r . Veja que as dobras obtidas tangenciam uma curva. Trace essa curva e responda:

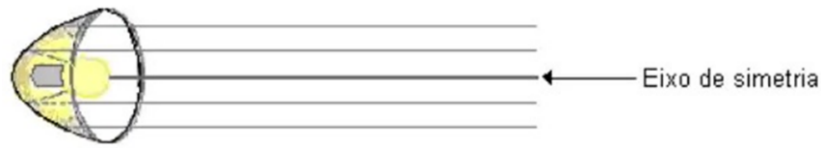
- Que tipo de curva foi descrita?
- Que papéis exercem a reta r e o ponto F curva descrita? Esquematize esta situação no GeoGebra e apresente sua solução.

SITUAÇÃO DIDÁTICA II: Os cabos da ponte pênsil, indicada na figura abaixo, tomam a forma de arcos de parábola do segundo grau. As torres de suporte têm 24 m de altura e há um intervalo entre elas de 200 m. O ponto mais baixo de cada cabo fica a 4 m do leito da estrada. Considerando o plano horizontal do tabuleiro da ponte contendo o eixo dos x e o eixo de simetria da parábola como sendo o eixo dos y , perpendicular a x , determine o comprimento do elemento de sustentação BA , que liga verticalmente o cabo parabólico ao tabuleiro da ponte, situado a 50 m do eixo y . Esquematize sua solução utilizando o GeoGebra.



SITUAÇÃO DIDÁTICA III: Matematicamente, o farol de um carro funciona desta forma: ao ligar os faróis de um carro, os raios de luz, provenientes da lâmpada que se encontra no foco da parábola,

incidem sobre um espelho parabólico e são refletidos paralelamente ao eixo de simetria, como no esboço a seguir:



Partindo dessa ideia, construa o esboço deste modelo de farol de carro, a partir de uma parábola lateral utilizando o *software* GeoGebra. Após sua construção, aponte a equação encontrada com base em seus parâmetros utilizados.

SITUAÇÃO DIDÁTICA IV: Encontre os principais elementos da parábola $y = 4x^2 - 24x + 37$. Esquematize esta situação no GeoGebra e apresente sua solução.

SITUAÇÃO DIDÁTICA V: Manipule o vértice V da parábola para deslocá-la e modifique o ângulo α para girá-la. Se a movermos sem girá-la, que novos termos aparecem na equação geral? Como é então a equação é reduzida? Se a girarmos em um ângulo $\alpha \neq 90^\circ$, que novo termo aparece? (Construção a ser manipulada diretamente no GeoGebra).

Fonte: Elaboração da autora (2021).

As situações didáticas apresentadas no Quadro 2 são de diferentes materiais e níveis e buscam analisar a compreensão dos sujeitos da pesquisa acerca do tema parábolas por diferentes perspectivas. As questões utilizadas para o desenvolvimento das situações didáticas foram extraídas e/ou adaptadas dos materiais apresentados no Quadro 3:

Quadro 3: Situações didáticas e suas respectivas fontes.

Situação didática I	Adaptado de Dias e Dantas (2006)
Situação didática II	Adaptado de Giovanni e Bonjorno (2005)
Situação didática III	Elaboração da autora
Situação didática IV	Elaboração da autora
Situação didática V	Adaptado de GeoGebra.org

Fonte: Elaboração da autora (2021).

Assim, para prosseguirmos para a etapa de experimentação, onde ocorrerão os encontros formativos e a aplicação das situações didáticas, o contrato didático deve ser estabelecido entre a pesquisadora e os professores em formação que serão os sujeitos da pesquisa. Pretendemos acordar que estes sujeitos aceitem a responsabilidade por sua evolução e aprendizado, comprometendo-se em participar de forma ativa no decorrer dos encontros. A partir da perspectiva de Brousseau (1996b), entendemos que o contrato didático nesta pesquisa estabelece um conjunto de comportamentos (específicos) dos sujeitos da pesquisa esperados pelo professor e vice-versa.

Partindo deste delineamento, na subseção seguinte, apresentamos a concepção e descrição de cada uma das situações didáticas aqui apresentadas.

4.2. Análise *a priori* das situações

Nesta subseção apresentamos as situações didáticas direcionadas à mobilização das Categorias do Raciocínio Intuitivo, no que diz respeito às diferentes formas de compreensão do conceito de parábola, norteadas pelos pressupostos da Teoria das Situações Didáticas (TSD), pois buscamos analisar, conforme a perspectiva de Brousseau (2004, p. 245) “a situação [...] e as possibilidades de tomada de decisão de um ator em um determinado ambiente, [...] de tal forma que a estratégia de solução só pode ser implementada com algum conhecimento matemático”.

Nesta fase, as previsões dos comportamentos dos sujeitos mediante as situações didáticas propostas são organizadas a partir das situações de ação, formulação, validação e institucionalização e descritas com base nestas dialéticas e em algumas possibilidades de manifestação das categorias do raciocínio intuitivo, que podem ser expressas na resolução no ambiente lápis e papel e/ou com o auxílio do *software* GeoGebra. É interessante que as situações didáticas sejam discutidas e resolvidas tanto individualmente quanto em duplas ou pequenos grupos, para que a dialética de formulação ocorra de forma eficaz.

O *software* GeoGebra foi utilizado em cada situação didática como recurso para estimular a intuição e a percepção geométrica a partir das diferentes possibilidades de construção dos conceitos e visualização no ambiente computadorizado, o que pode auxiliar no desenvolvimento de ideias e conjecturas dos sujeitos da pesquisa no decorrer da solução das situações propostas.

4.2.1 Situação Didática I

Esta questão foi extraída e adaptada de Dias e Dantas (2006, p. 3):

Com o auxílio de uma régua, trace uma reta r e fora dela marque um ponto F . Escolha em r pontos equidistantes $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$ e dobre o papel de modo que A_1 coincida com F . Para facilitar a visualização da curva, trace a reta que coincide com a dobra. Repita essa operação para todos os outros pontos marcados em r . Veja que as dobras obtidas tangenciam uma curva. Trace essa curva e responda:

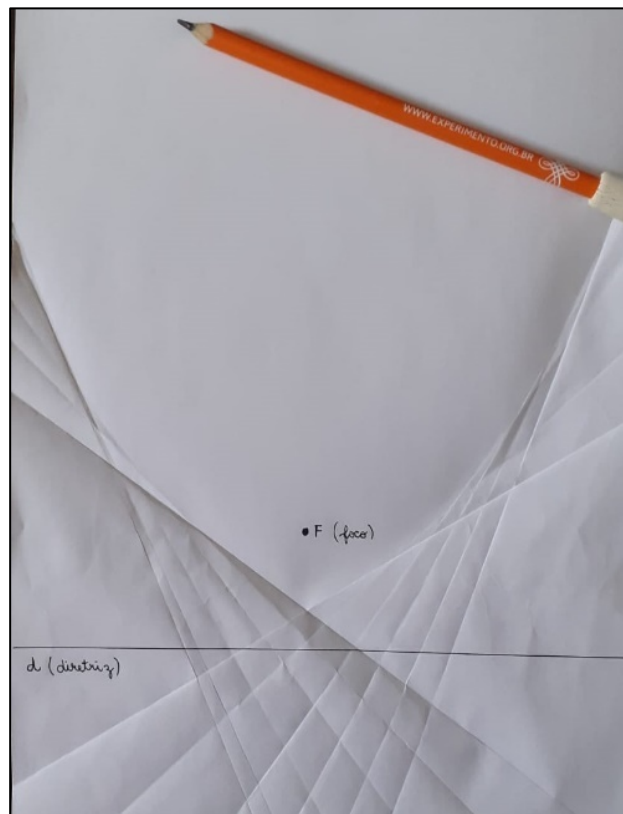
- Que tipo de curva foi descrita?
- Que papéis exercem a reta r e o ponto F na curva descrita? Esquematize esta situação no GeoGebra e apresente sua solução.

Esta situação didática tem por objetivo fazer com que os estudantes/professores em formação reconheçam o formato de uma parábola a partir de técnicas de dobradura de papel. Também se espera dos professores em formação que estes reconheçam a reta r e o ponto F da curva esboçada como sendo os elementos diretriz e foco da parábola, respectivamente, o que dependerá de seu percurso escolar/acadêmico caso eles tenham estudado ou não este tema. Para que os professores em formação desenvolvam esta situação didática, são necessários conhecimentos prévios de Geometria Plana e de Desenho Geométrico.

Situação de ação: Em um primeiro momento, o estudante deve realizar uma leitura atenta do enunciado do problema e buscar em seus conhecimentos prévios elementos que subsidiem a elaboração de conjecturas para a solução do problema. Caso o estudante conheça previamente a definição de parábola no campo da Geometria Analítica, espera-se que, a partir de uma *intuição afirmativa*, ele identifique prontamente que os elementos “reta r ” e “ponto F ” correspondem, respectivamente, à diretriz e ao foco da parábola.

Situação de formulação: Ao realizar os procedimentos descritos no ambiente lápis e papel e repeti-los o máximo de vezes possível, os estudantes devem se deparar com uma construção semelhante ao que está ilustrado na Figura 21:

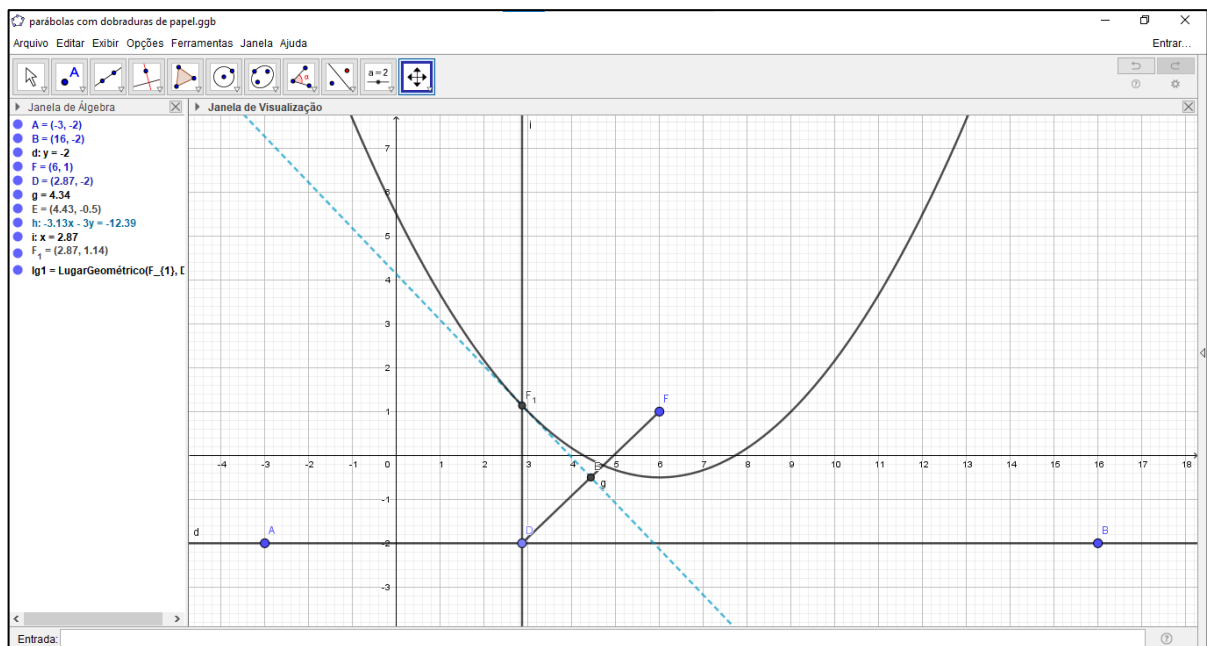
Figura 21: Parábola a partir de dobraduras de papel.



Fonte: Elaboração da autora (2021).

Esta construção utilizando lápis e papel pode fornecer subsídios para que os estudantes visualizem os elementos da parábola e busquem as diferentes formas de construí-la no GeoGebra, como solicitado na questão, pois conforme Fischbein (1999, p. 16) temos que “as intuições não são absolutas. Elas dependem do contexto – no caso presente, o contexto perceptivo”. Assim, no ambiente do GeoGebra, a partir de uma percepção visual, os estudantes podem chegar à construção apresentada na Figura 22 (ou semelhante a ela):

Figura 22: Parábola com dobraduras no ambiente GeoGebra.



Fonte: Elaboração da autora (2021).

Esperamos que o estudante chegue à uma construção similar à Figura 21, a partir da manifestação de *intuições conjecturais*, surgidas através de um esforço para a solução e de seus conhecimentos prévios sobre Desenho Geométrico, dado o fato que não se tem equações previamente estruturadas para uma solução algébrica.

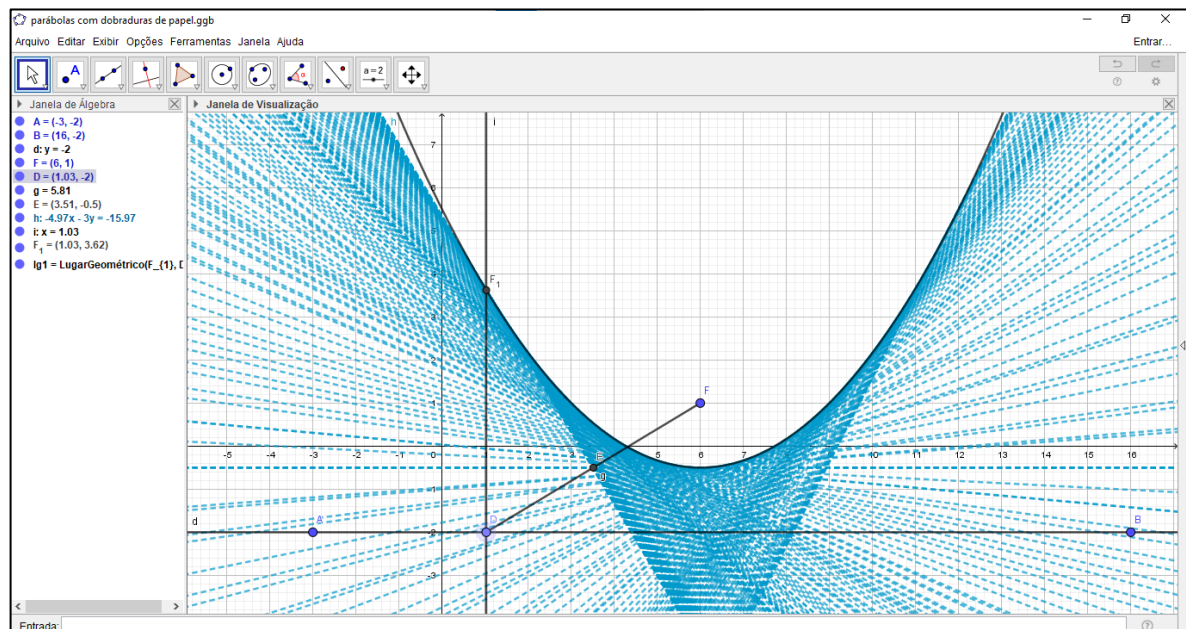
É importante ressaltar que, com base nas possíveis *intuições conjecturais* a surgir, devemos atentar-nos ao que Fischbein (1987a, p. 69) traz como “intuições conjecturais leigas ou experientes”. Enquanto uma *intuição leiga* não se baseia em conhecimentos especializados, as *intuições experientes* apresentam comportamentos que manifestam um *know-how* relacionado ao domínio da atividade/conceito (FISCHBEIN, 1987a).

Após a manipulação no GeoGebra, o professor em formação deve organizar sua linha de pensamento para expressar formalmente os seus conhecimentos matemáticos na situação de validação.

Situação de validação: Segundo Brousseau (1996a), na situação de validação o estudante deve tentar convencer seus interlocutores a respeito da veracidade de suas afirmações. “Neste caso, os alunos devem elaborar provas para demonstrá-las. Não basta a comprovação empírica de que o que dizem é certo; é preciso explicar por que, necessariamente, deve ser assim” (BROUSSEAU, 1996a, p. 30). Vale ressaltar que nesta etapa podem ocorrer debates e argumentações, bem como diferentes propostas de solução para a questão, pois há mais de um caminho que pode ser percorrido até a resposta correta.

É possível que o professor em formação desenvolva, a partir de *intuições conjecturais* e *antecipatórias*, uma prévia da solução da questão com base na construção com as dobraduras de papel e na manipulação do GeoGebra. Assim, é plausível que a reta h em azul, construída na Figura 22, seja percebida como uma reta tangente à parábola de foco F e diretriz d . A partir disso, o professor em formação pode visualizar o que seria uma representação das dobras de papel, mostradas ao habilitar a função “exibir rastro”, que após ativada e a partir da movimentação do ponto D gera as várias retas tangentes possíveis de serem traçadas, relacionadas ao lugar geométrico parábola. Esta situação pode ser vista na Figura 23:

Figura 23: Retas tangentes à parábola de foco F e diretriz d .



Fonte: Elaboração da autora (2021).

Com o auxílio dos comandos do GeoGebra e os estímulos de sua percepção a partir da visualização e exploração gráfico-geométricas (ALVES, 2020) o professor em formação tem

a possibilidade de compreender de forma mais clara cada um dos elementos da parábola, manipulá-los e replicá-los em outros contextos.

Assim, espera-se que o professor em formação aponte como solução final para o item (a) que a curva descrita corresponde à uma parábola e no item (b) que eles cheguem à conclusão de que a reta r e o ponto F são, respectivamente, a diretriz e o foco da parábola e que apresentem uma construção com elementos semelhantes ao exposto nesta subseção, com uma argumentação sólida e organizada.

Situação de institucionalização: Nesta fase, a professora/pesquisadora deve retomar o controle da situação didática, observando todos os argumentos e procedimentos apresentados pelos professores em formação e organizando uma síntese do que foi exposto. A partir disso, a professora deve realizar a institucionalização, apontando as definições dos elementos foco e diretriz e sua relação com a parábola, efetuando uma analogia entre a parábola com dobraduras de papel e a construção no GeoGebra. Para isso, a docente se apoiará na definição de Lima (2014, p. 115) que traz:

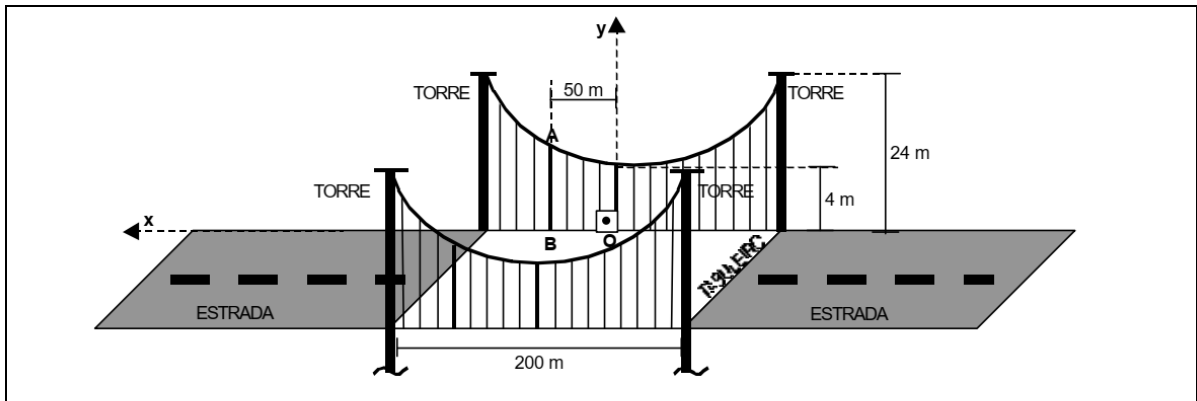
Sejam d uma reta e F um ponto fora dela. No plano determinado por d e F , chama-se *parábola de foco F e diretriz d* ao conjunto dos pontos equidistantes de d e F .

Também é factível a discussão sobre uma reta tangente à uma parábola, podendo surgir durante o encontro, entre os professores em formação.

4.2.2 Situação Didática II

Esta questão foi extraída e adaptada de Giovanni e Bonjorno (2005, p. 131):

Os cabos da ponte pênsil, indicada na figura abaixo, tomam a forma de arcos de parábola do segundo grau. As torres de suporte têm 24 m de altura e há um intervalo entre elas de 200 m. O ponto mais baixo de cada cabo fica a 4 m do leito da estrada. Considerando o plano horizontal do tabuleiro da ponte contendo o eixo dos x e o eixo de simetria da parábola como sendo o eixo dos y , perpendicular a x , determine o comprimento do elemento de sustentação BA, que liga verticalmente o cabo parabólico ao tabuleiro da ponte, situado a 50 m do eixo y . Esquematize sua solução utilizando o GeoGebra.



Esta situação didática traz uma contextualização da parábola a partir da dinâmica de funcionamento de uma ponte pênsil, tendo como objetivo calcular o comprimento do segmento $\overline{BA}$, que conecta o cabo em formato parabólico à base da ponte. Espera-se que o professor em formação inicial se utilize, a princípio, de conhecimentos prévios sobre funções quadráticas, o que pode ser estendido para uma discussão sobre a equação da parábola com vértice fora da origem para solucionar a questão proposta.

Situação de ação: Nesta etapa, o professor em formação deve realizar uma leitura atenta da questão, buscando identificar o máximo de elementos fornecidos pelo problema, associados à imagem da ponte pênsil para elaborar suas estratégias de solução.

Nesse contexto, algumas intuições podem ser manifestadas pelo que Fischbein (1987a, 1987b) denomina de *status da teoria*, dado o fato de que a intuição é uma teoria que pode ser expressa a partir de uma representação particular usando um modelo, o que nesta situação didática seria a representação gráfica por meio do esquema/desenho da ponte.

Uma possibilidade é que os professores em formação reconheçam, a partir da leitura, alguns elementos apresentados no desenho que representa a ponte pênsil, como a origem do sistema de coordenadas, o vértice da parábola no ponto $V(0,4)$, ou mesmo que o ponto $(100,24)$ pertence à curva descrita.

Situação de formulação: Os professores em formação, com base nos dados apresentados no esquema da ponte pênsil, podem traçar estratégias para a solução utilizando conhecimentos sobre a função quadrática ou a própria equação da parábola. Contudo, é provável que eles optem pela primeira opção, por ser uma abordagem utilizada com maior recorrência. Conforme Siqueira (2016), a parábola comumente é estudada na Educação Básica com ênfase apenas no conceito de função, não tendo um tratamento adequado no quadro da Geometria, sobretudo na Geometria Analítica.

O estímulo intuitivo para a tomada de decisões na resolução deste problema é condicionado por sua natureza conceitual, pois de acordo com Fischbein (1993, p. 141) “as propriedades geométricas de uma figura nos são impostas ou derivadas das definições num campo e determinado sistema axiomático”. Ou seja, as *intuições conjecturais* possivelmente elaboradas nesta etapa devem relacionar o conceito de parábola enquanto gráfico da função quadrática à figura da parábola apresentada no esquema. Assim, um possível desenvolvimento para a solução com uso da função quadrática, seria:

A função quadrática pode ser escrita como $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Como o eixo de simetria da parábola, de acordo com a questão, é o próprio eixo das ordenadas (eixo y), temos que $b = 0$.

Pelo esquema proposto no desenho, temos que o ponto $V(0,4)$ é o vértice da parábola. Substituindo em $y = ax^2 + bx + c$, temos $4 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$, o que implica em $c = 4$.

Também é possível inferir pelo esquema que a parábola passa pelo ponto $P(100,24)$. Desta forma, substituindo novamente todas as informações em $y = ax^2 + bx + c$, temos:

$$24 = a \cdot 100^2 + 0 \cdot 100 + 4$$

$$24 - 4 = 10000a$$

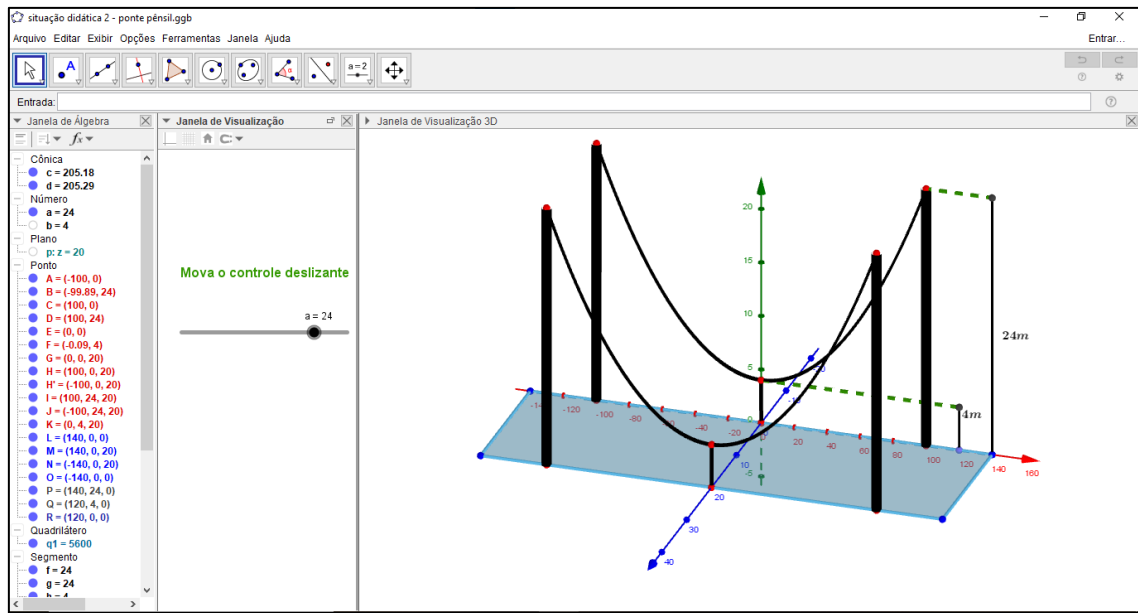
$$a = \frac{20}{10000} \text{ ou } a = \frac{1}{500}$$

Assim, a equação que representa o cabo parabólico da ponte é $y = \left(\frac{1}{500}\right)x^2 + 4$. Para $x = 50$, temos $y = \frac{1}{500} \cdot 50^2 + 4 = 9m$.

Situação de validação: Nesta etapa, os professores em formação devem apresentar suas conjecturas e estratégias que conduzem ao que eles acreditam ser a solução da questão. É um momento de argumentação e debate de ideias, dado o fato de que para uma mesma questão matemática há mais de um caminho para a solução.

Com base na percepção, na visualização e das possíveis *intuições conjecturais* expressadas, os professores podem utilizar o quadro do laboratório para expor suas ideias e o GeoGebra como recurso para comprovar a solução. Uma possibilidade de construção no GeoGebra para explorar a situação proposta corresponde ao exposto na Figura 24:

Figura 24: Construção da ponte pênsil – situação didática II



Fonte: Elaboração da autora (2021).

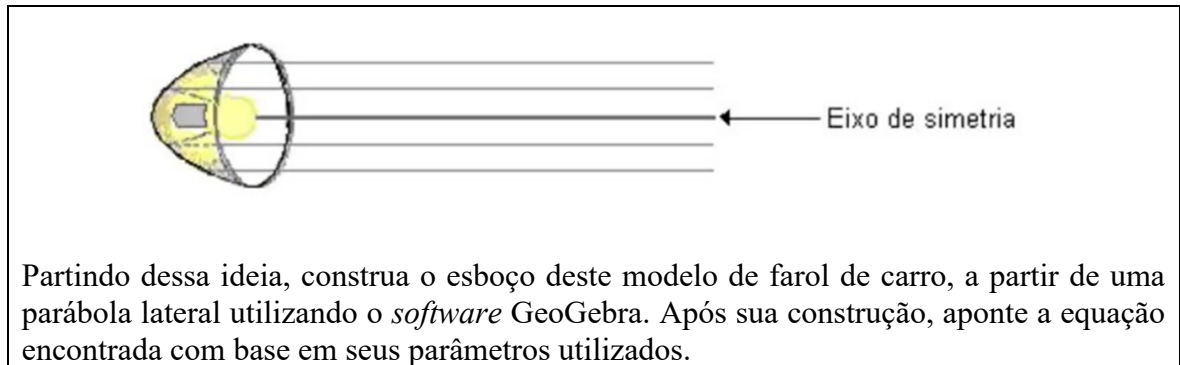
Situação de institucionalização: A pesquisadora deve retomar a responsabilidade pela situação didática fazendo um compilado de tudo o que foi apontado pelos professores em formação. Nessa ocasião, almeja-se discutir o conceito matemático abordado nesta questão, em que pretendemos apresentar o uso da equação da parábola com vértice fora da origem como alternativa para a solução, além de comparar/explorar as construções realizadas no quadro/pincel ou lápis/papel e no ambiente do GeoGebra.

Como conceito matemático, pretendemos utilizar a definição de Venturi (2003), a partir da equação da parábola quando o vértice está situado fora da origem $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$ e considerando a translação do vértice da parábola no eixo y .

4.2.3 Situação Didática III

Esta situação didática foi elaborada pela pesquisadora, intencionalmente, como forma de fazer emergir os conhecimentos referentes à parábola do ponto de vista geométrico. Observe que esta situação didática não apresenta equações previamente estabelecidas, o que demanda maior atenção, criatividade e possibilidades de manifestação do raciocínio intuitivo.

Matematicamente, o farol de um carro funciona desta forma: ao ligar os faróis de um carro, os raios de luz, provenientes da lâmpada que se encontra no foco da parábola, incidem sobre um espelho parabólico e são refletidos paralelamente ao eixo de simetria, como no esboço a seguir:



Esta situação didática traz uma parábola diferente do formato comumente apresentado no estudo das funções quadráticas – a concavidade voltada para cima ou para baixo. Contudo, pretendemos instigar os professores em formação a construírem esta parábola sem se limitar ao uso de equações pré-determinadas.

Nesse sentido, esperamos que os professores em formação tenham um conhecimento prévio sobre parábolas em que o eixo de simetria seja paralelo ao eixo x (ou coincida com este), com a possibilidade de ter sua concavidade voltada para as laterais direita ou esquerda, de modo que sua diretriz tenha equação $x = \frac{-p}{2}$. Entretanto, almejamos que eles construam a parábola dada a partir de elementos da Geometria Plana dentro do ambiente do GeoGebra, fazendo um paralelo entre a imagem mental da parábola e sua definição. Ressaltamos também que é possível relacionar esta situação didática com a situação didática I, planejada para ser desenvolvida no primeiro encontro.

Situação de ação: esperamos que os professores em formação, a partir da compreensão do enunciado, verifiquem que a questão solicita a construção de uma parábola, mas sem especificar seus principais elementos (foco, vértice e diretriz) ou uma equação que possa fornecer estas informações.

Assim, almejamos que os professores em formação iniciem sua tentativa de solução a partir da elaboração de uma expressão algébrica que, ao ser esboçada graficamente, represente uma imagem semelhante à parábola do farol em questão, em uma investida para visualizar alguma possibilidade de solução. De acordo com Fischbein (1993), o uso sistemático de *loci* (ou *lôcus*) no estudo da parábola enquanto lugar geométrico e com sua natureza dual explicitamente declarada - conceito e imagem -, representa uma ferramenta didática importante para aprofundar a compreensão da natureza do conceito figural deste tema, sendo o GeoGebra um subsídio que tem potencial para evocar a intuição a partir da percepção e visualização.

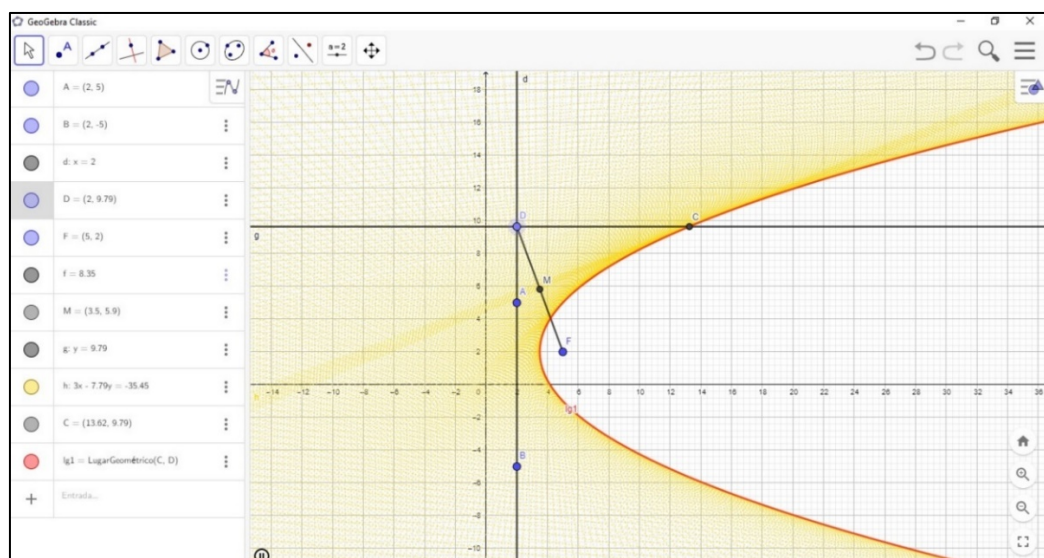
Situação de formulação: almejamos que os professores em formação, de posse do problema, relacionem o modelo de parábola proposto aos seus conhecimentos prévios e estudados na disciplina de Geometria Analítica, estabelecendo uma relação entre as representações geométrica e algébrica da parábola, a partir do prisma analítico e esboçando esta relação de forma coerente.

Caso os conhecimentos em Geometria Analítica necessários a uma possível solução para esta situação didática estejam presentes na bagagem do professor em formação, uma *intuição afirmativa* por parte deles pode apontar para o fato de que a parábola proposta não é representada por uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, pois o formato da parábola é diferente do usual formato para cima ou para baixo. Assim, há a possibilidade da manifestação de *intuições conjecturais* a partir da exploração de ferramentas do GeoGebra para a elaboração de uma equação que solucione a situação didática em questão, ou mesmo em uma tentativa de elaborar uma expressão conveniente utilizando lápis e papel. As intuições podem surgir e servir de base para a formulação de hipóteses e construção de um raciocínio a partir de conjecturas.

Situação de validação: nesta etapa, esperamos que os professores em formação apresentem uma construção similar ao que se propõe na primeira situação didática, contudo, com um modelo de parábola com concavidade voltada para a direita ou esquerda e, consequentemente com um modelo de equação diferente do apresentado anteriormente.

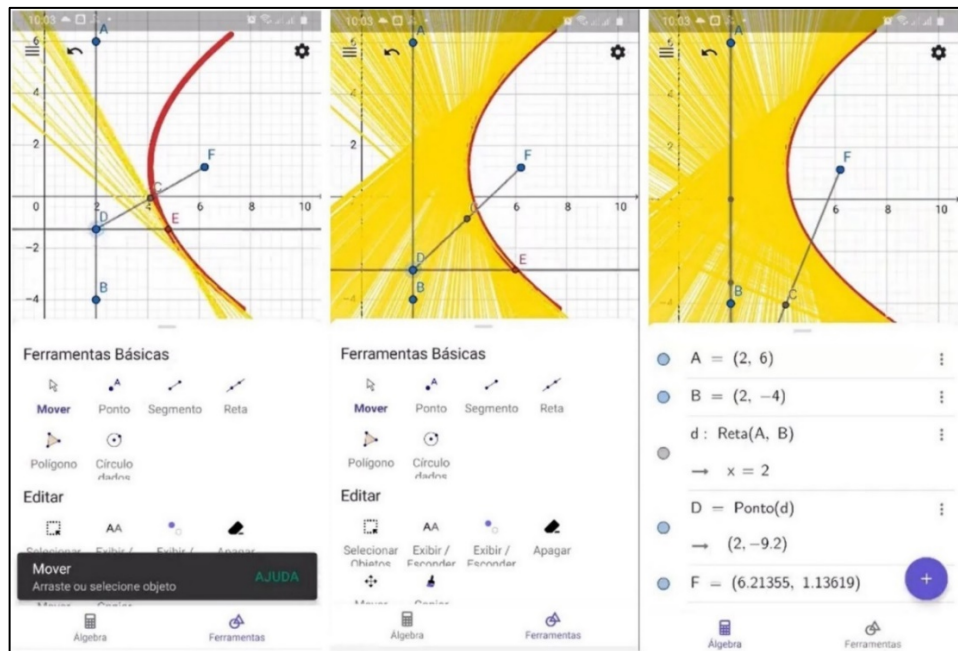
Neste caso, há diversas possibilidades de solução para a situação didática e apontamos nas Figuras 25 e 26 uma dessas soluções como sugestão:

Figura 25: Sugestão de solução feita via *software* para computador.



Fonte: Elaboração da autora (2021).

Figura 26: Sugestão de solução feita via aplicativo para *smartphone*.



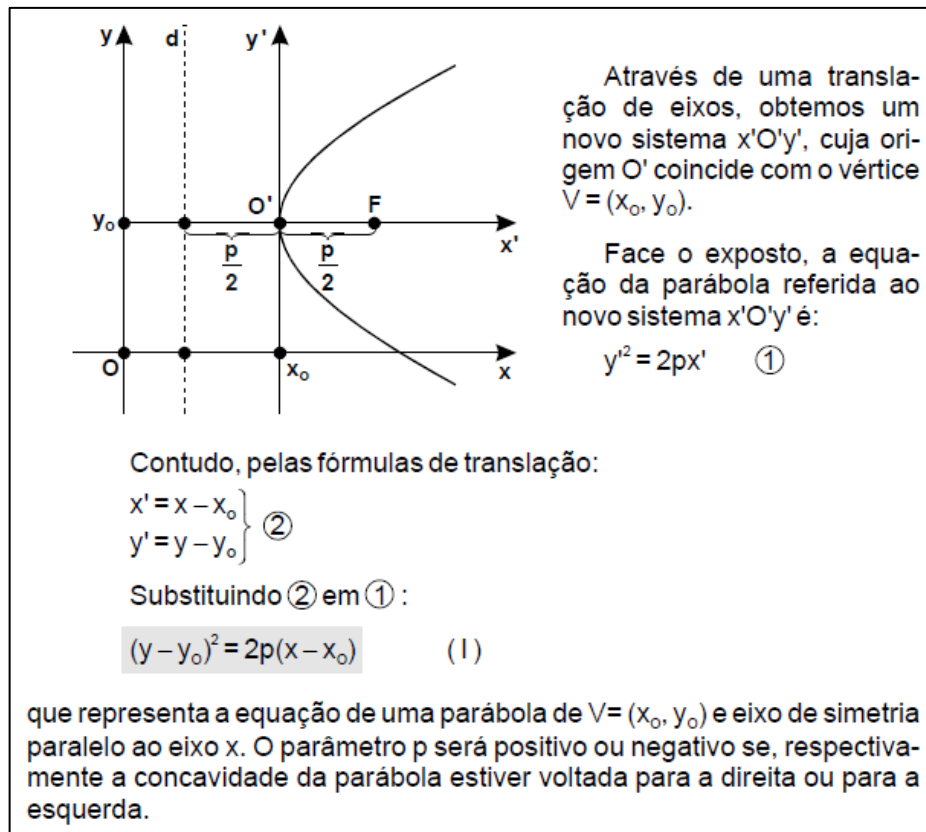
Fonte: Elaboração da autora (2021).

Observe que para a chegar à solução apresentada nas Figuras 25 e 26, o professor em formação deve criar uma reta diretriz e um foco arbitrários, porém observando que a reta diretriz deve ser paralela ao eixo y , por meio de *intuições conjecturais* originadas a partir de seus conhecimentos prévios sobre o assunto.

Após a realização da construção, também se espera que os professores em formação apontem como equação encontrada para o lugar geométrico esboçado um modelo matemático do tipo $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$.

Situação de institucionalização: nesta etapa, como aponta Almouloud (2007, p. 40) “o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber”. Assim, a pesquisadora reassume o controle da situação didática, formalizando o conceito matemático desenvolvido pelos professores em formação, partindo de seus apontamentos e construções no GeoGebra. Desta forma, a pesquisadora deve observar se há dúvidas entre os participantes e, em caso positivo, esclarecê-las, além de confrontar os modelos matemáticos escritos e os modelos computacionais apresentados. Neste caso, a pesquisadora pode organizar as produções e conjecturas apresentadas, bem como associá-las à definição de Venturi (2003, p. 50) (Figura 27), que traz a seguinte demonstração:

Figura 27: Demonstração da equação da parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo x.



Fonte: Venturi (2003, p. 50).

4.2.4 Situação Didática IV

Esta situação didática foi elaborada pela autora, em busca de, a partir de uma equação da parábola em sua forma explícita, encontrarmos os seus principais elementos, que são o foco (F), o vértice (V), o parâmetro (p) e a equação da reta diretriz, partindo dos dados estabelecidos no enunciado e, com base nisto, esboçar sua solução no GeoGebra:

Encontre os principais elementos da parábola $y = 4x^2 - 24x + 37$. Esquematize esta situação no GeoGebra e apresente sua solução.

Note que esta situação didática não especifica quais são os principais elementos, de fato, para a construção e existência de uma parábola, o que preliminarmente pode ocasionar um estímulo nos sujeitos a utilizar primeiramente seus conhecimentos em funções do 2º grau, dado o fato de que o modelo de equação apresentado é apropriado para se trabalhar com os procedimentos algébricos deste tópico. No entanto, vale ressaltar que, matematicamente, quando nos referimos aos principais elementos de uma parábola, estamos fazendo menção ao

foco F , à diretriz d , ao parâmetro p (distância entre o foco e a diretriz), ao vértice V e ao eixo de simetria.

Situação de ação: A princípio, esperamos que os professores em formação busquem esboçar os dados do problema e demarcar sua estratégia de solução previamente no papel, a partir de uma leitura inicial.

Observe que o formato da equação apresentada é uma parábola em sua forma explícita, o que pode gerar em algum dos sujeitos uma precipitação em resolvê-la utilizando a fórmula de Bháskara, corriqueiramente adotada em situações semelhantes. Mesmo que erroneamente, este tipo de raciocínio pode ser interpretado como uma *intuição afirmativa*. Caso isto ocorra com algum dos sujeitos, este professor em formação demonstra uma visão ainda redundante acerca do conceito matemático de parábola atrelado sobretudo ao gráfico de uma função quadrática.

Caso contrário, os professores em formação possivelmente devem iniciar um esboço em papel, buscando transformar a equação explícita dada em uma equação da forma $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$, partindo de procedimentos algébricos que podem surgir em meio a *intuições conjecturais e antecipatórias*.

Situação de formulação: Aqui almejamos que os professores em formação troquem ideias entre si, esboçando no papel a estrutura da equação explícita da parábola $y = 4x^2 - 24x + 37$ da forma $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$, seguindo um percurso que reescreve a equação $y = 4x^2 - 24x + 37$ como um trinômio quadrado perfeito:

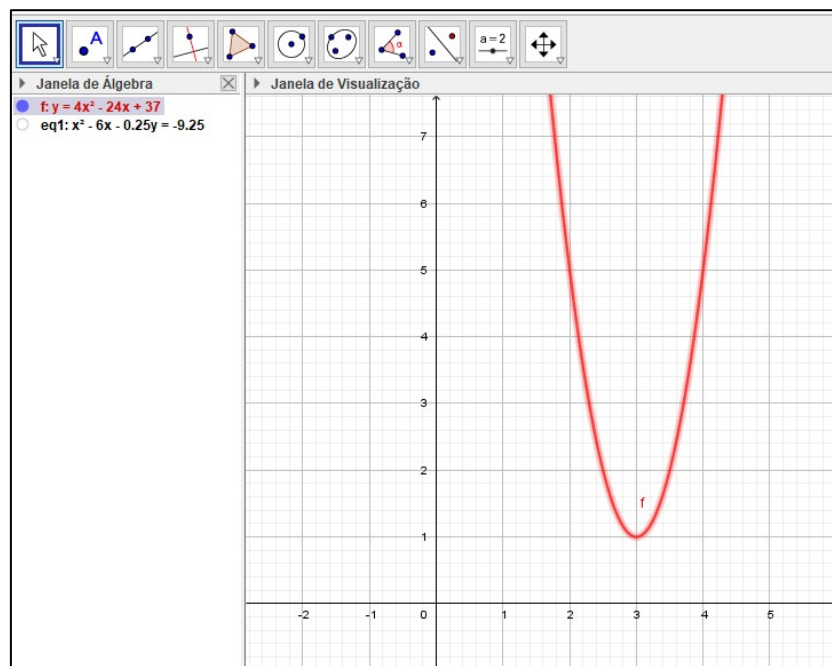
$$\begin{aligned} y &= 4x^2 - 24x + 37 \\ y &= 4x^2 - 24x + 36 - 36 + 37 \\ y &= (2x - 6)^2 + 1 \\ y - 1 &= 2^2(x - 3)^2 \\ y - 1 &= 4(x - 3)^2 \\ (x - 3)^2 &= \frac{1}{4}(y - 1) \end{aligned}$$

Situação de validação: nesta etapa, esperamos que os professores em formação consigam conjecturar, a partir da equação reescrita $(x - 3)^2 = \frac{1}{4}(y - 1)$, por meio de *intuições antecipatórias*, que o vértice da parábola se encontra no ponto $V(3,1)$, seu parâmetro seja equivalente a $p = \frac{1}{16}$ e seu foco seja o ponto $F(3; 1 + \frac{1}{16})$, ou seja $F(3, \frac{17}{16})$.

Esperamos também que, a partir do vértice e do foco encontrados, os professores em formação esbocem a equação da diretriz a partir de $y = 1 - \frac{1}{16}$, ou seja, $y - \frac{15}{16} = 0$.

Caso a solução seja iniciada no GeoGebra e não no papel, é possível traçá-la inserindo no campo de entrada a equação explícita dada $y = 4x^2 - 24x + 37$. Ao observar seu gráfico (Figura 28) podem ocorrer *intuições afirmativas* e *conjecturais*, em que o professor em formação siga um percurso em busca dos elementos principais da parábola:

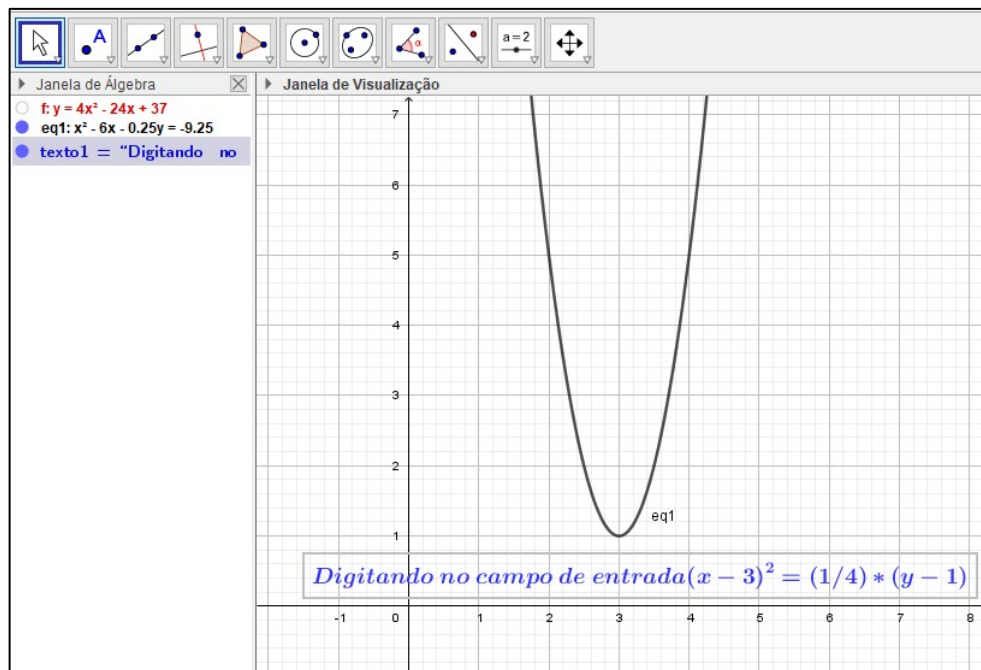
Figura 28: Gráfico de $y = 4x^2 - 24x + 37$



Fonte: Elaboração da autora (2022).

A partir das observações realizadas na Figura 28, o professor em formação consegue visualizar o tipo de parábola dada pelo problema (concavidade voltada para cima, reta diretriz paralela ao eixo x , eixo de simetria paralelo ao eixo y). Usando seus conhecimentos prépara reescrever a equação em sua forma canônica $(x - 3)^2 = \frac{1}{4}(y - 1)$, os professores em formação podem inseri-la no campo de entrada do GeoGebra, encontrando o esboço na Figura 29:

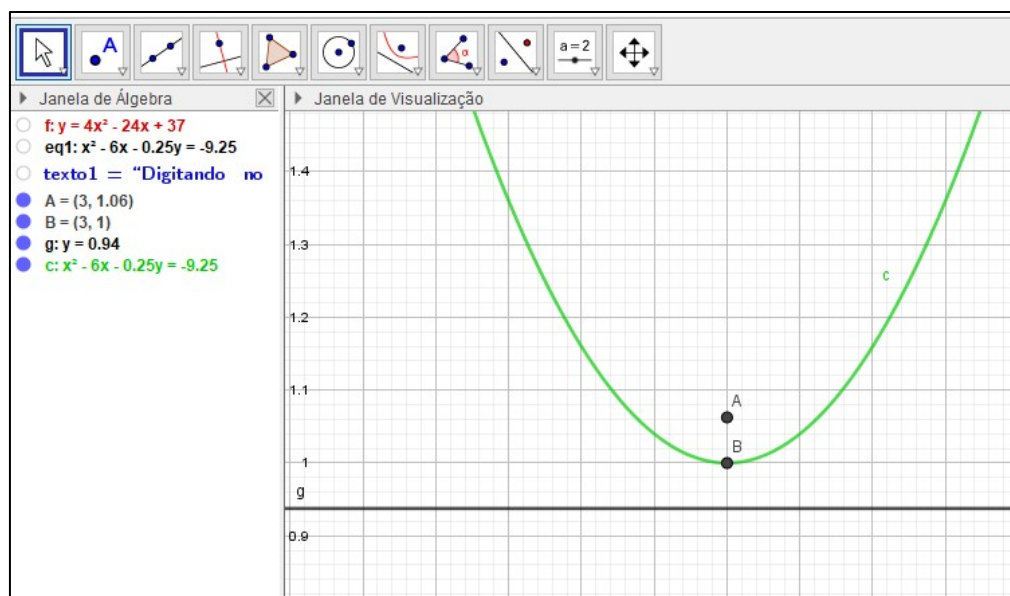
Figura 29: Esboço de $(x - 3)^2 = \frac{1}{4}(y - 1)$ no GeoGebra



Fonte: Elaboração da autora (2022).

Observando a janela de álgebra na Figura 29, os professores em formação podem perceber na equação, por meio de *intuições conjecturais e antecipatórias*, os valores do foco, vértice, parâmetro e diretriz da parábola, com auxílio do papel ou não. Uma outra possibilidade seria utilizar os comandos *Foco(< Cônica >)*, *Vértice(< Cônica >)*, e *Diretriz(< Cônica >)* relativos à *eq1*, encontrando a solução do problema (Figura 30):

Figura 30: Solução da SD4 no GeoGebra



Fonte: Elaboração da autora (2022).

Situação de institucionalização: nesta etapa, a pesquisadora deve intervir apresentando o conceito de equação explícita da parábola. Para tal, utilizaremos uma definição baseada em Venturi (2003), que explica que a equação de uma parábola de vértice $V(x_0, y_0)$ e eixo paralelo ao eixo dos y tem a forma padrão: $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$. Neste caso, conhecendo x_0, y_0, p e explicitando y nessa equação, então encontramos uma equação apresentada sob sua forma explícita, na estrutura $y = ax^2 + bx + c$, conforme os dados do enunciado.

4.2.5 Situação Didática V

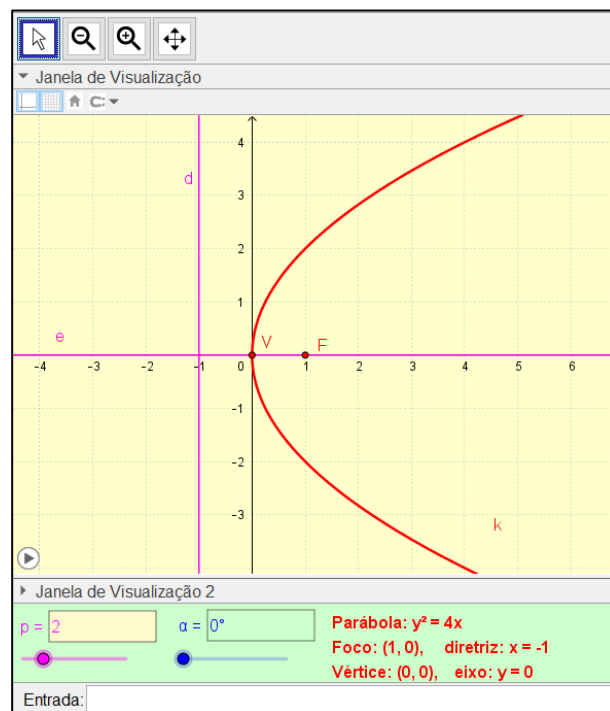
Esta situação didática está disponível na comunidade GeoGebra.org no endereço eletrônico: <https://www.geogebra.org/m/j59xaqux>.

Manipule o vértice V da parábola para deslocá-la e modifique o ângulo α para girá-la. Se a movermos sem girá-la, que novos termos aparecem na equação geral? Como é então a equação é reduzida? Se a girarmos em um ângulo $\alpha \neq 90^\circ$, que novo termo aparece?

Observe que esta situação didática trata das distintas possibilidades de rotação e translação da parábola, em que podemos observar a movimentação da posição de seu eixo de simetria ao manipular o ângulo α , sua translação a partir do movimento das coordenadas do vértice V , a abertura da concavidade ao movimentar o parâmetro p , bem como a consequente mudança na sua equação, o que possibilita uma discussão mais ampla sobre o tema.

A intenção é verificar que conhecimentos prévios os docentes trazem acerca da equação geral e de que forma podem ser estabelecidas relações entre os distintos modelos de equações que podem ser geradas ao manipular os controles deslizantes ou outros elementos postos na construção:

Ao acessar a construção no GeoGebra, os professores em formação devem deparar-se com uma tela inicial como apontada na Figura 31:

Figura 31: Situação Didática V no GeoGebra.

Fonte: Elaboração da autora (2022).

Situação de ação: De posse da construção e do enunciado, os professores em formação devem observar as solicitações da questão para elaborar seus procedimentos e anotações.

Manipulando o vértice V da parábola, o professor em formação poderá deslocá-la no plano. Contudo, a equação da parábola em sua forma reduzida $y^2 = 2px$ ou $x^2 = 2py$ se dará apenas no caso em que $V(0,0)$ e α seja um ângulo pertencente aos eixos ($0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ ou 360°). É importante que em seus conhecimentos prévios e com base em sua percepção visual, os professores em formação notem estes dois casos:

- (i) Se $V \neq (0,0)$, mas α é um ângulo pertencente aos eixos: teremos uma equação explícita do tipo $y = ax^2 + bx + c$ (para $\alpha = 90^\circ$ ou $\alpha = 270^\circ$), ou do tipo $x = ay^2 + by + c$, para $\alpha = 90^\circ$ ou $\alpha = 270^\circ$;
- (ii) Se $V \neq (0,0)$ e α é um ângulo diferente de $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ ou 360° : teremos uma equação geral, do formato $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, ou seja, uma equação em sua forma geral.

Situação de formulação: Com base na dialética anterior, ao mover a construção disponibilizada como mostrado na Figura 30, almeja-se que os professores em formação tomem nota dos elementos visuais disponíveis na construção e das respectivas funções dos controles deslizantes p e α .

Desta maneira, ao manipular p e α , por meio de *intuições afirmativas*, esperamos que os professores em formação notem que p relaciona-se diretamente à concavidade da parábola (mais aberta ou mais fechada) e α refere-se diretamente ao ângulo formado entre o eixo de simetria da parábola e o eixo das abscissas.

Como apontado por Lagrange *et al.* (2003) e Ramirez, Osorio e Goycochea (2021), o GeoGebra integra ferramentas de Álgebra e Cálculo, permitindo abordar a Geometria em um ambiente dinâmico. Assim, a partir dessa construção e de suas diferentes possibilidades de manipulação e visualização, o professor em formação tem a possibilidade de entender ou mesmo de representar famílias de parábolas ao experimentá-la. Dessa maneira, há a possibilidade de os sujeitos em questão reforçarem significados originados de construções geométricas, desenvolvendo um processo de metacognição²³.

Situação de validação: Ao manipularem a construção, sem necessariamente alterar o valor de α , ou seja, movendo apenas a posição do vértice, os professores em formação podem perceber que a equação que surge aparecerá em uma estrutura do tipo $x^2 = ax + by + c$, que pode ser reescrita como:

$$by = x^2 - ax - c$$

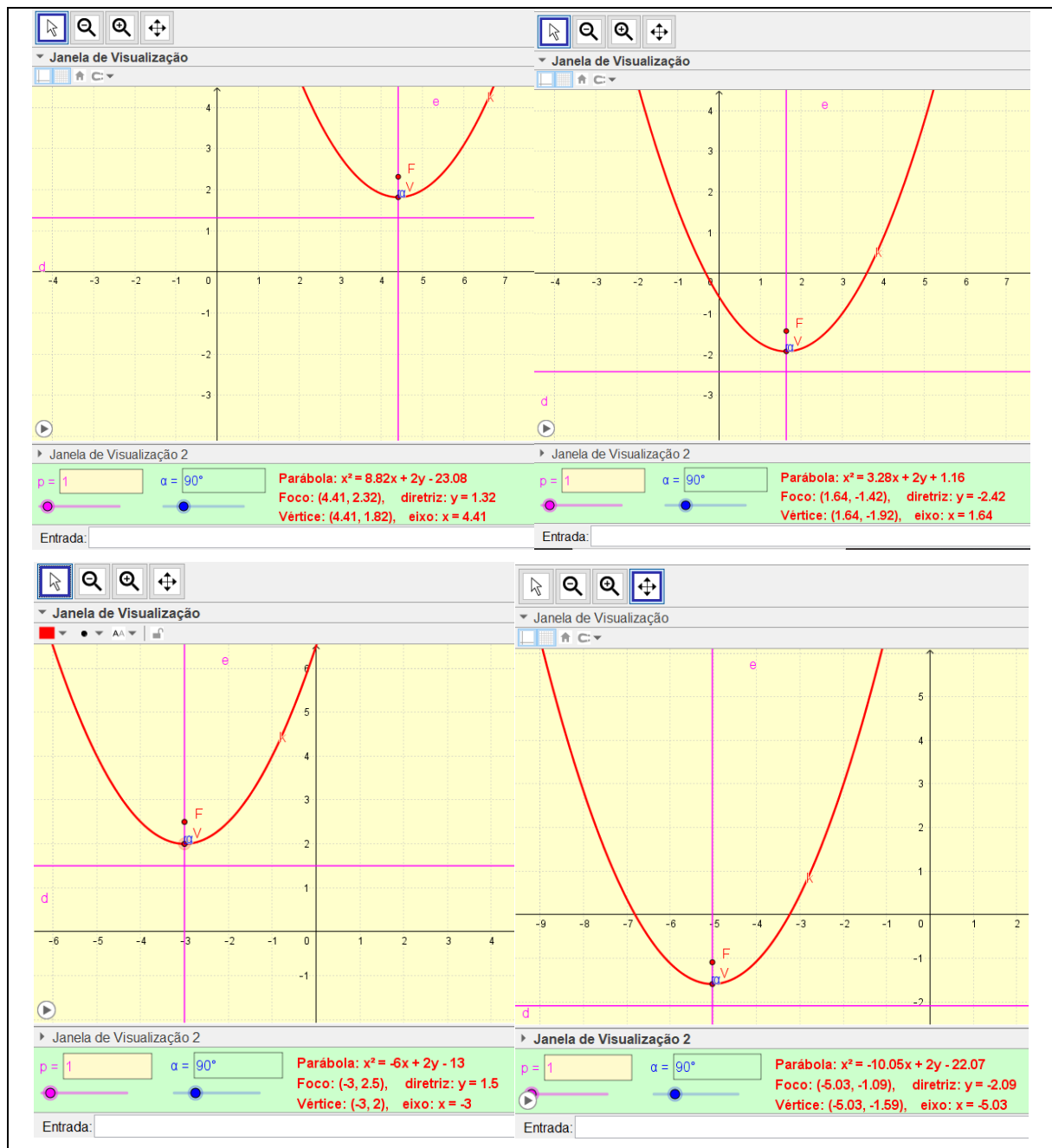
$$y = \frac{x^2}{b} - \frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

o que corresponde à equação de uma parábola em sua forma explícita, com eixo de simetria paralelo ao eixo y e parâmetro $p > 0$, pois a concavidade da parábola está voltada para cima. Isto pode ser percebido tanto por *intuições afirmativas*, com base na visualização e percepção geométrica da construção, quanto por *intuições conjecturais*, partindo dos conhecimentos prévios dos participantes estabelecidos nas situações didáticas anteriores.

Distintas formas de visualizar esta manipulação inicial podem ser esboçadas. Buscamos ilustrar algumas destas possibilidades na Figura 32:

²³ A metacognição é a habilidade do ser humano de observar e autorregular os processos cognitivos, a partir da consciência de seus atos e pensamentos (STERNBERG, 2000).

Figura 32: Manipulação apenas do vértice V no GeoGebra.

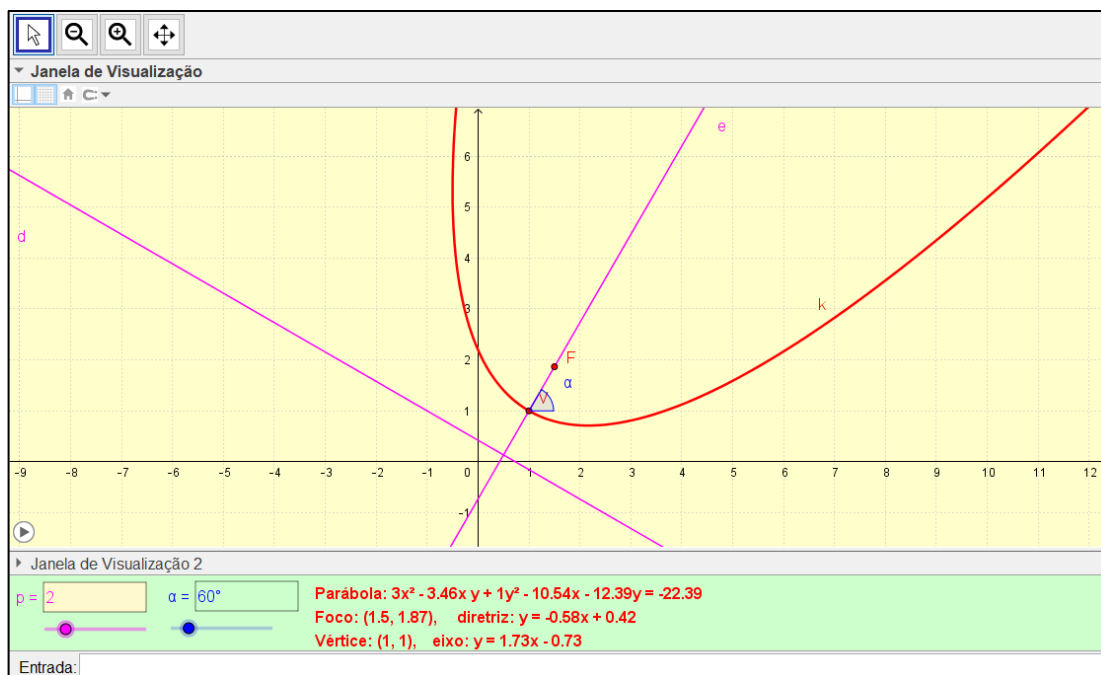


Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Situação de validação: Aqui esperamos que os professores em formação apresentem suas conjecturas, arrematando suas respostas de acordo com o que foi proposto na questão. Espera-se que eles apontem que ao mover a parábola sem girá-la, a equação não será mais do tipo $x^2 = 2py$, mas sim uma equação $x^2 = ax + by + c$, que em sua forma reduzida pode ser escrita como $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$, dado o fato de que, nas condições dadas a princípio, temos que $p > 0$.

Também almejamos que os professores em formação apontem que, caso o giro da parábola seja em um ângulo $\alpha \neq 90^\circ$, este ângulo corresponde à abertura formada entre o eixo das abscissas e o eixo de simetria da parábola, por meio de *intuições conjecturais*. Tais intuições podem ser geradas a partir de movimentações do parâmetro p e do ângulo α , como esboçado na Figura 33:

Figura 33: Parábola quando $V \neq (0,0)$ e α não pertence aos eixos coordenados



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Assim sendo, a equação da parábola passa a ter o formato geral $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, o que em um esforço para uma solução por meio de *intuições antecipatórias e conclusivas* pode ser demonstrado pelos participantes do encontro.

Situação de institucionalização: É importante que a pesquisadora, após retomar a situação didática e observar os apontamentos dos professores em formação, apresente as diferentes equações da parábola e suas possíveis variações, com base nas coordenadas do vértice e na posição do eixo de simetria:

- (i) Vértice na origem e eixo paralelo aos eixos coordenados;
- (ii) Vértice na origem e eixo não-paralelo aos eixos coordenados;
- (iii) Vértice fora da origem e eixo paralelo aos eixos coordenados;
- (iv) Vértice fora da origem e eixo não paralelo aos eixos coordenados.

Cada uma destas situações deve ser retomada na construção e discutida, observando as diferenças em suas equações, a razão pelas quais estas diferenças ocorrem e entendendo sua

origem. Também é importante que se discuta a demonstração de uma equação da parábola em sua forma geral e, para isso, utilizaremos a definição de Venturi (2003, p. 120), que chama de cônica ao “conjunto de pontos do plano cujas coordenadas cartesianas satisfazem uma equação do 2º grau com duas variáveis”, do tipo:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

sendo uma equação completa quando todos os seus coeficientes não são nulos.

O termo Bxy , quando $B \neq 0$, mostra que o eixo focal da cônica é oblíquo aos eixos cartesianos, o que pode ser discutido na observação da construção. Além disso, podemos observar que, para esta equação, caso o valor do discriminante $B^2 - 4AC$ seja igual a zero, temos uma parábola.

Concluída esta análise *a priori*, a seção seguinte apresenta um pré-experimento realizado para a correção de rotas e previsão de eventuais dificuldades no decorrer do desenvolvimento das situações didáticas propostas.

4.3 Pré-experimento

Com base nas variáveis microdidáticas apontadas anteriormente e como forma de prever possíveis obstáculos didáticos e dificuldades externas que possam surgir, utilizamos uma das situações didáticas apresentadas em nossa análise *a priori* como forma de pré-teste.

Segundo Almouloud (2007), o equilíbrio e a organização na elaboração de uma análise *a priori* são de grande importância para o êxito de uma situação didática, pois esta etapa permite ao professor um controle sobre a realização das atividades dos estudantes, possibilitando uma identificação, de forma preditiva, das circunstâncias observadas. Ainda segundo o autor “as conjecturas que vão aparecer poderão ser consideradas, e algumas poderão ser objeto de um debate científico em sala de aula” (ALMOULOU, 2007, p. 176).

Nesse sentido, a *Situação Didática I* foi desenvolvida com um único sujeito, também professor em formação inicial e não participante da pesquisa, como forma de avaliar alguns pontos e, caso necessário, traçar uma mudança de rota ou ajustes para a etapa de experimentação. Assim, neste pré-experimento os aspectos observados foram:

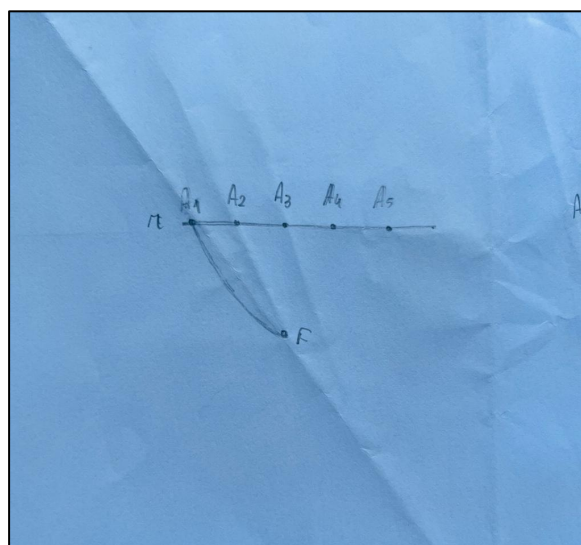
- (i) Se a situação didática foi clara o suficiente para o participante;
- (ii) Se a situação didática foi estruturada de modo equilibrado, no que diz respeito ao seu nível de dificuldade, de modo que a TSD pudesse ser desenvolvida adequadamente;
- (iii) Se o tempo destinado à solução da situação didática foi o suficiente;

- (iv) Se os recursos disponibilizados para o participante foram adequados e suficientes para auxiliá-lo na solução da situação proposta (computador, *software* GeoGebra 5.0 instalado, lápis, régua, folha A4);
- (v) Se as gravações de áudio e vídeo dos protocolos de construção mostram informações relevantes para a interpretação das manifestações intuitivas do sujeito, no que diz respeito à solução apresentada.

O desenvolvimento da situação didática com o participante em questão ocorreu nas dependências do Laboratório de Informática do Curso de Matemática (LIMA). A princípio, o contrato didático foi estabelecido, em que a pesquisadora solicitou que o participante realizasse uma leitura da situação proposta, esboçasse sua solução usando o ambiente lápis e papel e realizasse sua transposição para o GeoGebra, apontando suas conjecturas e observações. Foi especificado que todo o material (anotações para a resolução da situação didática, gravação da tela do computador, gravação de áudio) seria coletado para análise. O participante em questão também declarou ciência sobre sua colaboração no experimento, assentindo que o mesmo ocorresse, mediante a assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) (APÊNDICE A). Desta maneira, o experimento da *Situação Didática I* ocorreu da seguinte forma:

Na *situação de ação*, o participante realizou uma leitura atenta do que o problema propunha e levou um tempo pensando em como o faria. Inicialmente, houve dificuldade na compreensão de como as dobras deveriam ser feitas no papel. A princípio, ele desenhou uma semirreta curta, com diversos pontos espaçados, como mostra a Figura 34:

Figura 34: Esboço inicial do participante na situação de ação

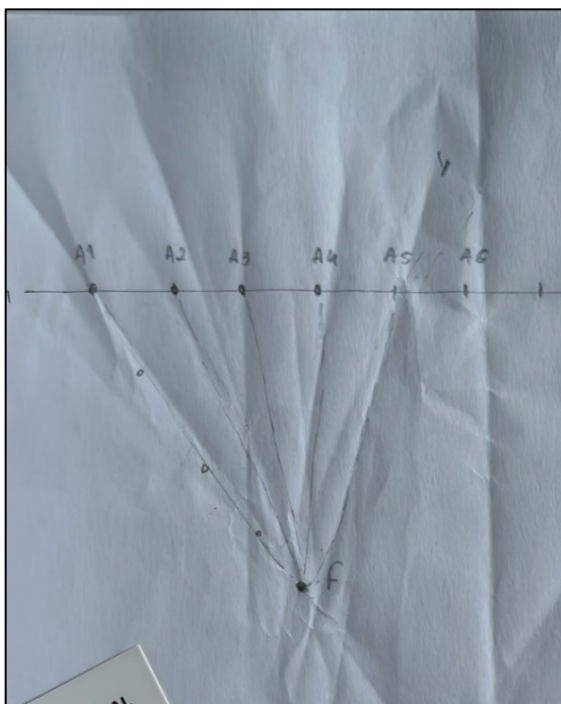


Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Note que, inicialmente, o participante fez um desenho em tamanho inadequado para as dobras, por meio de uma *intuição afirmativa*, mesmo que parcialmente inadequada. E veja que, de acordo com a Figura 33, houve uma tentativa de esboçar as dobras que não foi bem-sucedida. Quando a situação didática propõe que “Com o auxílio de uma régua, trace uma reta r e fora dela marque um ponto F . Escolha em r pontos equidistantes $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$ e dobre o papel de modo que A_1 coincida com F ” não há menção ao comprimento desta reta.

Almouloud (2007, p. 37) explica que, no decorrer da situação de ação, “o aluno pode melhorar ou abandonar seu modelo para criar um outro: a situação provoca assim uma aprendizagem por adaptação”. Dessa forma, o participante ao entender que não conseguiria realizar as dobras daquela maneira, reelaborou seu raciocínio inicial e refez seu esboço, em tamanho maior, como mostra a Figura 35:

Figura 35: Segundo esboço do participante na situação de formulação

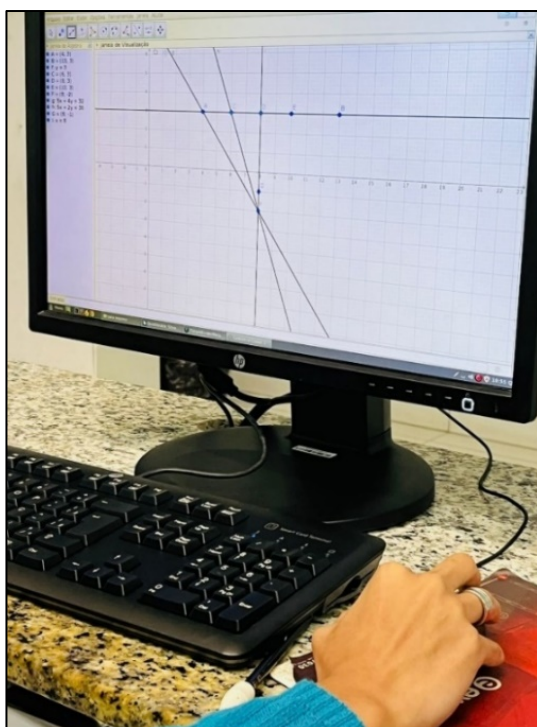


Fonte: Registro do autor (2022).

Na *situação de formulação*, ao realizar as dobras, o participante esboçou com lápis uma ligação entre os pontos traçados sobre a reta e o ponto fora dela (F), o que para a pesquisadora, enquanto observadora, não conferiu sentido. Entretanto, ao ler novamente o enunciado e observar seu esboço, por meio de uma *intuição conjectural*, o participante ainda com resquícios de dúvidas, afirmou que a curva “se parecia com uma parábola”, caso considerássemos os pontos mais “abertos” (referindo-se aos pontos mais distantes entre si).

Na segunda parte da solução, o participante passou a esboçar sua estratégia no GeoGebra. Contudo, observamos que em sua construção o participante não recorreu de imediato aos recursos que poderiam fornecer uma parábola, como por exemplo, usar a ferramenta *parábola*, na guia *cônicas*. De modo intuitivo, ele tentou esboçar seu próprio desenho, da forma como estava sendo vislumbrado no papel, realizando sua transposição para o *software*, como pode ser visto na Figura 36:

Figura 36: Transposição do papel para o *software*



Fonte: Registro do autor (2022).

Veja na Figura 36 que a construção parcial do sujeito mostra que suas *intuições conjecturais* ainda não apontam caminhos para *intuições antecipatórias*, pois da forma como o percurso da construção ocorreu, não era possível visualizar a curva parábola de fato. As retas que ligam o ponto F fora da reta e os demais pontos, aparentemente foram criadas para representar o que seriam as dobras no papel. Assim, o participante afirmou novamente que seria uma parábola, mas que estava com dificuldades de reproduzi-la no ambiente do GeoGebra, pois “*não lembrava bem do assunto*”.

A identificação de dificuldades inerentes à compreensão de um objeto matemático é de grande influência para nortear o trabalho do professor, no que diz respeito a estruturação de um *milieu* que forneça as condições mínimas para que a apreensão e construção de novos saberes possam ocorrer. Nesse sentido, Brousseau (1976) explica a importância de se entender

a noção de obstáculo no ensino de matemática para a construção do sentido pelo estudante, colocando que:

Nous admettrons donc que la constitution du sens, tel que nous l'entendons, implique une interaction constante de l'élève avec des situations problématiques, interaction dialectique (car le su jet anticipe, finalise ses actions) où il engage des connaissances antérieures, les soumet à révision, les modifie, les complète ou les rejette pour former des conceptions nouvelles. L'objet principal de la didactique est justement d'étudier des conditions que doivent remplir les situations ou les problèmes proposés à l'élève pour favoriser l'apparition, le fonctionnement et le rejet de ces conceptions. [...] On peut déduire de ce régime discontinu d'acquisitions que les caractères informationnels de ces situations doivent eux aussi varier par sauts. (BROUSSEAU, 1976, p. 104).²⁴

Na *situação de validação*, ao tentar responder à pergunta do item b: “*Que papéis exercem a reta r e o ponto F curva descrita?*”, o participante afirmou, segundo o registro de transcrição de áudio do encontro:

É como se a reta r fosse o eixo x e o ponto F um ponto qualquer, mas quando eu traço as retas, parece que o F é o vértice de uma parábola, no caso o ponto mínimo. E o r pode ser o eixo x ou uma reta paralela ao eixo x . Eu sei que é para ser uma parábola, que a parábola tem a concavidade para cima ou para baixo dependendo do a , do b e do c , e nesse caso, desse desenho aqui no GeoGebra, era pra ser pra cima, mas eu não consigo desenhar a curva bem direitinho.

Note que, pela fala do participante, ele percebe que a curva é uma parábola, mas não conseguiu descrevê-la de modo mais exato no papel e nem reproduzir seu esboço no *software*. Ao ser indagado pela pesquisadora sobre seu conhecimento em parábolas, o participante afirmou tê-las estudado apenas no Ensino Médio, em funções do 2º grau, mas que nunca chegou a ver no decorrer da graduação. Em seguida, ao ser questionado sobre seus conhecimentos em cônicas, ele afirmou que sabia o que era, mas nunca as tinha estudado.

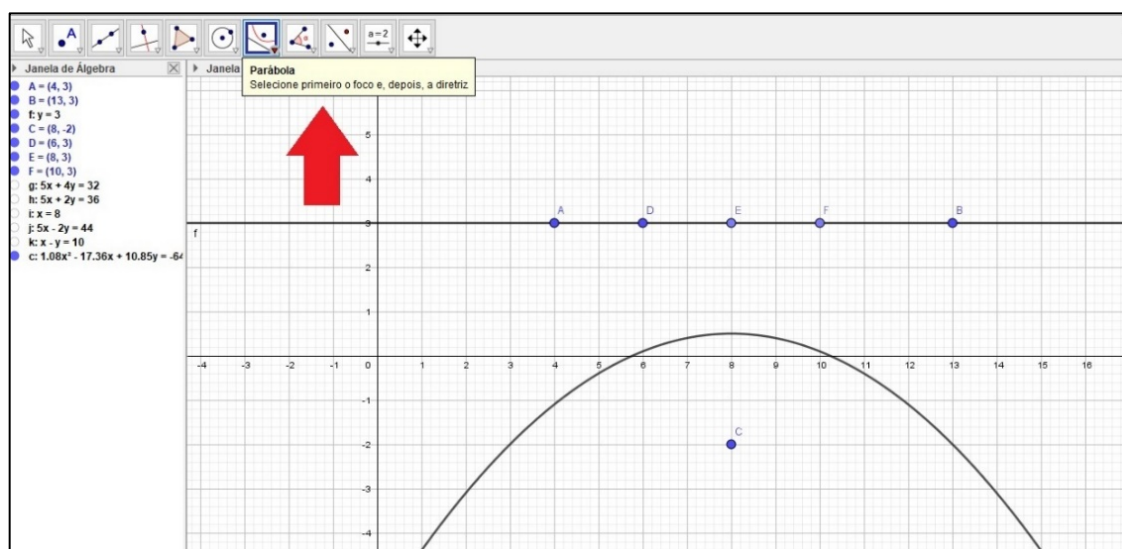
Podemos perceber em seu discurso que ele não utiliza termos como foco ou diretriz, que são elementos básicos na construção geométrica de uma parábola. No entanto, a partir de suas estratégias e manifestações intuitivas de ordem *afirmativa* e *conjectural*, o participante conseguia perceber a existência da curva por meio de seus esboços.

²⁴ Admitiremos, portanto, que a constituição do sentido, tal como o entendemos, implica uma interação constante do aluno com situações problemáticas, uma interação dialética (porque o sujeito antecipa, finaliza suas ações) onde ele engaja conhecimentos prévios, revisa, modifica, complementa ou rejeita-os para formar novos designs. O objetivo principal da didática é justamente estudar as condições que as situações ou problemas apresentados ao aluno devem preencher para favorecer o aparecimento, funcionamento e rejeição dessas concepções. [...] Podemos deduzir desse padrão descontínuo de aquisições que as características informacionais dessas situações também devem variar aos saltos. (BROUSSEAU, 1976, p. 104, tradução nossa).

Após esta discussão, a pesquisadora apresentou a *institucionalização* a partir de Lima (2014, p. 115), já apresentada na análise *a priori* deste trabalho, explicando que “Sejam d uma reta e F um ponto fora dela. No plano determinado por d e F , chama-se parábola de foco F e diretriz d ao conjunto dos pontos equidistantes de d e F ”, reforçando o conceito de uma parábola enquanto lugar geométrico.

Ao entender a *institucionalização* e retornar à construção no GeoGebra, o participante afirmou que a reta r seria então a diretriz e o ponto F fora da reta seria o foco. Ao mexer em todas as guias e procurar uma ferramenta que o auxiliasse a traçar a parábola, ele encontrou a ferramenta parábola e, observando a orientação que o GeoGebra fornece (apontado em vermelho na Figura 37), clicou sobre o ponto C e a reta f , encontrando:

Figura 37: Parábola construída no pré-experimento.



Fonte: Registro de vídeo da pesquisa (2022).

Note que as retas traçadas anteriormente foram então ocultadas pelo participante, para uma melhor visualização da curva parábola.

Posteriormente, como orientado no contrato didático, o participante salvou o arquivo .ggb de sua construção e o vídeo de gravação de tela do computador e entregou todos os registros escritos, ciente de que estes materiais seriam base para análise deste pré-teste, assentindo mais uma vez sua utilização.

Dito isto, analisamos cada um dos pontos elencados anteriormente para a continuidade da pesquisa e desenvolvimento das demais situações didáticas nos moldes pré-estabelecidos. Averiguamos que a situação didática foi clara para o participante, apesar do equívoco inicial de interpretação, no que diz respeito ao tamanho da reta a ser traçada. Também consideramos

que seu nível de dificuldade foi aceitável, dado o fato de que o participante não tinha conhecimentos aprofundados sobre o assunto, possibilitando o desenvolvimento da TSD de maneira bem estruturada.

Os conhecimentos em GeoGebra do participante, apesar de básicos, foram suficientes para perceber suas manifestações intuitivas. Mesmo que o participante não tenha chegado à solução total, (apenas depois da institucionalização), o que dificultou seu processo de resolução foi a lacuna de conhecimentos prévios acerca do assunto e não suas habilidades com o *software*. Além disso, o tempo para o desenvolvimento da situação didática e os recursos fornecidos foram suficientes, e a gravação da tela e o arquivo .ggb, bem como os materiais escritos e outros tipos de registro como áudio e fotografias também nos forneceram dados importantes acerca de seu processo intuitivo e da solução apontada.

Desta maneira, seguimos o percurso da pesquisa com as situações didáticas já estruturadas nesta análise *a priori*, dando continuidade a esta Engenharia. Nenhuma dentre as cinco situações didáticas precisou ser modificada, pois a pesquisadora entendeu que todas atenderiam aos parâmetros necessários para atingir os objetivos da pesquisa.

Partindo do exposto, o capítulo seguinte foi destinado à terceira fase da Engenharia Didática, que consiste na experimentação destas situações.

5. EXPERIMENTAÇÃO

Segundo Almouloud e Silva (2012, p. 27), a etapa de experimentação “consiste na aplicação da sequência didática, tendo como pressupostos apresentar os objetivos e condições da realização da pesquisa, estabelecer o contrato didático e registrar as observações feitas”.

Assim, nesta seção descrevemos os procedimentos realizados para a organização dos encontros, como os participantes da pesquisa foram selecionados e como foi realizada a coleta dos dados, bem como detalhamos algumas características do curso de licenciatura em Matemática em que a pesquisa está situada e do perfil dos sujeitos participantes. Além disso, descrevemos, conforme as dialéticas da TSD e Categorias do Raciocínio Intuitivo, cada uma das etapas desenvolvidas nas cinco situações didáticas estruturadas.

5.1 Procedimentos iniciais

Os encontros formativos foram ofertados como atividade de pesquisa em formato presencial pelo Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática e Ensino à Distância (GEPEMED) da Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA), com carga horária total de 20 horas, sendo expedido certificado aos participantes pelo grupo de pesquisa. O local para a realização dos encontros foi o Laboratório de Informática do Curso de Matemática (LIMA).

A princípio, foram abertas 20 vagas para os licenciandos interessados. A seleção dos participantes foi realizada de modo virtual, por meio do preenchimento de uma ficha de inscrição via formulário eletrônico²⁵, em que foram solicitadas informações básicas, como nome completo, telefone, e-mail e histórico de graduação.

Solicitamos o histórico, pois um dos pré-requisitos para ser participante voluntário da pesquisa é ter cursado e concluído a disciplina de Geometria Analítica (Plana e/ou Vetorial). Nossa intenção é analisar seu desenvolvimento com base em conhecimentos prévios oriundos do estudo desta(s) disciplina(s) e as manifestações intuitivas dos participantes inscritos mediante a associação destes conhecimentos prévios e do GeoGebra.

Dessa maneira, estabelecemos como critérios para considerar os sujeitos aptos à análise: 100% de frequência nos encontros formativos e maior participação/interação nas atividades propostas.

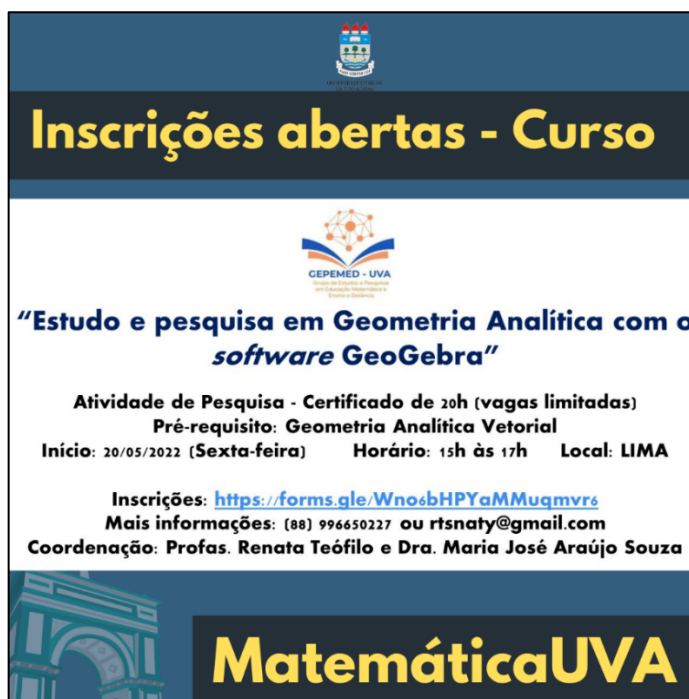
²⁵ O formulário de inscrição pode ser acessado em: <https://forms.gle/RmYYqoB1TowiEBhu5>

Abrimos um número maior de vagas devido à possibilidade de desistência dos participantes, pois o perfil dos estudantes da referida Universidade é, em sua maioria, de licenciandos que residem fora do município de Sobral, o que inviabiliza a questão do transporte, entre outras particularidades. Além disso, dado o fato de que o curso de licenciatura em Matemática da UVA é noturno, há uma alta demanda para o uso do Laboratório de Informática neste turno, o que nos fez optar por ofertar os encontros formativos no período vespertino.

De fato, nossas hipóteses se confirmaram. Das 20 vagas, apenas 13 foram preenchidas. Dentre estes inscritos, iniciamos com 10 sujeitos, dos quais apenas 8 participaram até o final dos encontros, perfazendo carga horária de 100% e estando aptos para serem os sujeitos analisados nesta pesquisa.

Organizamos um *folder*²⁶ para divulgação da atividade de pesquisa, com suas informações essenciais, para que os interessados pudessem realizar sua inscrição e entrar em contato para saber mais detalhes sobre sua participação. Desta forma, disponibilizamos os contatos para tal. Temos uma ilustração do *folder* na Figura 38:

Figura 38: Folder de divulgação dos encontros.



Fonte: Elaboração da autora (2022).

²⁶ Link de acesso à divulgação oficial da atividade de pesquisa, no site do curso: <http://www.matematicauva.org/inscricoes-abertas-para-o-curso-estudo-e-pesquisa-em-geometria-analitica-com-o-software-geogebra/>

A atividade de pesquisa foi divulgada durante o mês de maio/2022 nas redes sociais vinculadas ao curso, como o *Instagram* (@matematicauva3) e seu site oficial (www.matematicauva.org) e as inscrições se mantiveram abertas. O início das atividades era previsto para 20 de maio de 2022, mas precisou ser adiado em uma semana, iniciando em 27 de maio de 2022, dada a dificuldade de se angariar inscitos para participar da pesquisa na modalidade presencial.

Criamos um grupo de *WhatsApp* para troca de mensagens e informações pertinentes à realização dos encontros, bem como para incentivar os sujeitos a dialogarem entre si.

O material necessário para a realização de cada encontro de formação foi lápis/caneta, borracha, régua, folhas A4, *data show* e computador com o *software* GeoGebra versão 5.0 instalado, celular para registro fotográfico e de áudio. O GeoGebra foi utilizado como recurso didático com vistas a aprimorar a visão geométrica dos sujeitos no momento da elaboração de conjecturas para solucionar as situações didáticas propostas no decorrer das etapas da TSD.

Além destes materiais, também providenciamos os seguintes instrumentais impressos:

- Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) (ver APÊNDICE A);
- Questionário inicial (ver APÊNDICE B);
- Questionário final (ver APÊNDICE C);
- Cada uma das situações didáticas individualmente (ver APÊNDICE D);
- Registro de frequência para cada encontro.

O cronograma das atividades foi estruturado para ocorrer entre Maio/2022 e Julho/2022. Os encontros ocorreram com frequência semanal, sendo realizados no turno da tarde às sextas-feiras, como ilustrado no Quadro 4:

Quadro 4: Cronograma das atividades

Data do encontro	Conteúdo previsto
27/05/2022	Leitura e assinatura do TCLE e questionário inicial Desenvolvimento da Situação Didática I – Parábolas com dobraduras
03/06/2022	Desenvolvimento da Situação Didática II – Ponte pênsil
10/06/2022	Desenvolvimento da Situação Didática III – Construção do farol
24/06/2022	Desenvolvimento da Situação Didática IV – Principais elementos da parábola
01/07/2022	Desenvolvimento da Situação Didática V – Generalização da equação da parábola Questionário final e encerramento dos encontros formativos.

Fonte: Elaboração da autora (2022).

Para a execução do cronograma descrito no Quadro 4 ser bem-sucedida, traçamos como elementos a serem estruturantes da coleta dos dados desta pesquisa:

- os registros fotográficos com a expressa autorização dos participantes, mantendo o sigilo e a confidencialidade dos envolvidos;
- registros de anotações de suas soluções para cada uma das situações didáticas;
- registro de áudio dos encontros;
- registro de vídeo (gravação)²⁷ da tela do computador com as produções no ambiente do GeoGebra;
- o arquivo .ggb com a construção final elaborada.

A partir destes dados, sua análise foi realizada com base nos pressupostos da Engenharia Didática, verificando as impressões e concepções dos professores em formação, partindo das dimensões cognitivas, epistêmicas e de ordem intuitiva, a fim de fortalecer a pesquisa e em busca de atingir seus objetivos.

No início da execução deste cronograma, no primeiro encontro, os professores em formação foram apresentados à pesquisa e seus objetivos, firmando o contrato didático com a pesquisadora a partir da assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), leitura e detalhamento de todo o cronograma de atividades e procedimentos a serem realizados.

Após a assinatura do TCLE, realizamos uma coleta de dados preliminar sobre os participantes, por meio de um questionário inicial com informações sobre seu perfil acadêmico e seus conhecimentos acerca do *software* GeoGebra, como descrito na seção seguinte. Ressaltamos que esta pesquisa tem parecer de aprovação pelo Comitê de Ética e Pesquisa (CEP) (ver ANEXO A).

5.2 Caracterização do lócus e sujeitos da pesquisa

A atividade de pesquisa foi sediada pela Universidade Estadual Vale do Acaraú, na cidade de Sobral, Ceará, no Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas (CCET), Departamento de Matemática, nas dependências do Laboratório de Informática do Curso de Matemática (LIMA), no período compreendido entre maio/2022 e julho/2022.

Esta experimentação foi vinculada a estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática, que já tivessem cursado a disciplina de Geometria Analítica (Vetorial/Plana) e

²⁷ O *software* utilizado para o registro de gravação de tela é chamado Screen Recorder.

manifestassem interesse em seu estudo com uso do *software* GeoGebra. A colaboração dos professores em formação se deu de forma voluntária, em que eles participaram de momentos agregadores à sua formação, no que tange à possibilidade de inclusão do estudo da parábola em suas futuras práticas de ensino, ao mesmo tempo, associando este estudo ao uso do *software* GeoGebra para uma melhor representação e modelização dos problemas.

Dessa forma, os encontros relativos à esta atividade de pesquisa focaram na resolução de situações didáticas de diferentes níveis e abordagens, direcionadas ao estudo da parábola e na observação do comportamento dos participantes da pesquisa ao tentar resolver esses problemas, isto é, como eles se sobressaíram diante das situações propostas. Acreditamos que as situações elencadas têm o potencial de despertar seus conhecimentos de ordem epistêmica, bem como provocar manifestações intuitivas, além de capacitá-los para situações que possam ocorrer ou ser elaboradas por eles visando a sala de aula.

O questionário inicial (APÊNDICE B) coleta algumas informações sobre o perfil acadêmico e profissional dos sujeitos, bem como sua visão e experiência acerca do uso do GeoGebra. Na primeira parte do questionário inicial solicitamos as seguintes informações: nome; idade; se já possui uma formação acadêmica (se sim, qual); que período cursa atualmente; que disciplina(s) envolvendo Geometria Analítica já cursou, e; se já trabalha como professor (se sim, quanto tempo de experiência tem).

Com relação ao nome dos participantes, estes não foram reveladas, dado o acordo de confidencialidade estabelecido entre as partes via TCLE. Desta forma, ressaltamos que nos referimos a cada participante da pesquisa ao longo de toda a experimentação e análise *a posteriori* como P1, P2, ..., e assim por diante, como forma de preservar suas identidades. Os participantes tinham idade entre 20 e 24 anos, sendo sete (7) do sexo masculino e um (1) do sexo feminino. Buscamos catalogar e sintetizar as respostas da primeira parte do questionário inicial em um quadro-síntese (Quadro 5):

Quadro 5: Parte I – Perfil acadêmico/profissional dos participantes

Perguntas	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
Já possui formação acadêmica?	Não							
Cursa qual período atualmente?	6º	6º	8º	6º	9º	6º	9º	9º
Que disciplinas envolvendo Geometria Analítica já cursou?	- Geometria Analítica Plana - Geometria Analítica Vetorial - Cálculo Diferencial e Integral I, II e III							
Já trabalha ou já trabalhou como professor? Se sim, por quanto tempo?	Não	Não	Sim, 1 ano e 6 meses	Não	Não	Sim, 2 meses	Sim, 4 anos e 8 meses	Não

Fonte: Elaboração da autora (2022).

Diante das informações do Quadro 5, observamos que todos os sujeitos têm a licenciatura em Matemática como primeira graduação e são estudantes entre o 6º e o 9º período. Com relação às disciplinas que envolvem Geometria Analítica, todos os participantes cursaram Geometria Analítica Vetorial e Cálculo Diferencial e Integral I, II e III. No entanto, apenas três dentre os sujeitos cursaram Geometria Analítica Plana (P1, P2 e P8).

Já no que diz respeito à experiência profissional, dentre os oito sujeitos analisados apenas três afirmaram ter alguma experiência em sala de aula, sendo um período inferior a cinco anos e somente um deles trabalha atualmente como professor, mesmo não tendo concluído a ainda licenciatura.

Na segunda parte do questionário inicial, buscamos informações sobre os conhecimentos prévios dos sujeitos com relação ao GeoGebra, dado o fato de que seu uso é de grande importância para o desenvolvimento das situações didáticas e análise dos dados desta pesquisa. Assim, os questionamentos feitos aos sujeitos foram: se os sujeitos conhecem o *software* GeoGebra e, em caso afirmativo, qual a visão deles sobre o uso do GeoGebra em aulas de Matemática; se eles já resolveram situações-problema ou exercícios utilizando o GeoGebra; se eles já tiveram experiência com o uso do GeoGebra no decorrer da licenciatura e, em caso afirmativo, em qual(is) disciplina(s), e; uma visão pessoal acerca do *software*.

Todos os sujeitos afirmaram conhecer o *software* e ter alguma experiência com este. Sintetizamos as respostas dos participantes de maneira mais objetiva no Quadro 6:

Quadro 6: Parte 2 – Conhecimentos relativos ao GeoGebra.

Pergunta	Resposta
Qual sua visão em relação ao uso do GeoGebra em aulas de Matemática?	P1: O GeoGebra facilita bastante a construção de gráficos e figuras geométricas e torna mais fácil a visualização. P2: É uma excelente ferramenta para fazer com que o aluno aprenda, pois ele confirmará e detalhará o problema. P3: Facilita a visão espacial de determinadas figuras e análise de gráficos. P4: É um software que ajuda na resolução de questões, no entendimento, na visualização de gráficos e desenhos. P5: Ele desconstrói o mito da matemática “chata” e traz uma matemática mais lúdica e visível, principalmente na construção de gráficos, figuras geométricas e funções. P6: Ele ajuda nas construções mais complexas quando precisamos do uso da Geometria. P7: É uma ferramenta que pode ajudar o aluno a entender a matemática, pois pode fornecer uma eficiente apresentação dos problemas. P8: É um software muito rico em conteúdo e ajuda bastante o professor e o aluno em Geometria.
Você já teve experiência como uso do GeoGebra	P1: Sim, em Cálculo Numérico. P2: Sim, em Geometria Analítica Plana. P3: Sim, em cursos de extensão.

na licenciatura em Matemática? Se sim, em qual(is) disciplina(s)?	P4: Sim, em Tecnologias Digitais no Ensino de Matemática. P5: Não. P6: Sim, em Tecnologias Digitais no Ensino de Matemática. P7: Sim, em Tecnologias Digitais no Ensino de Matemática. P8: Sim, em Geometria Analítica Plana.
---	--

Fonte: Elaboração da autora (2022).

Observe que, com relação à primeira pergunta apontada no Quadro 6, todos os participantes de alguma forma enfatizaram a possibilidade de visualização como forma de auxílio à compreensão de situações/problemas proporcionada pelo ambiente do *software*.

Outro ponto que vale ser mencionado é que a maioria dos participantes cita “gráficos” e “Geometria” como conteúdos que podem ter sua aprendizagem viabilizada por meio do *software*. Isto nos mostra que, apesar de ser uma visão simplificada acerca do GeoGebra, está em conformidade com o que propomos nesta pesquisa.

Com relação à segunda pergunta do Quadro 6, apenas um dos participantes (P5) afirma não ter experiência com o GeoGebra durante a licenciatura até o presente momento, no entanto afirmou conhecer e já ter manuseado o *software* por conta própria, tendo conhecimentos básicos. Os demais apontaram experiência em disciplinas como Cálculo Numérico (P1); Geometria Analítica Plana (P2 e P8); em Tecnologias Digitais no Ensino de Matemática (P4, P6 e P7) e em cursos de extensão (P3).

Após a análise realizada acerca destas respostas, na subseção seguinte descrevemos a fase de experimentação. Vale ressaltar que, respeitando às normas sanitárias e os decretos estaduais vigentes em decorrência da pandemia COVID-19, recomendamos o uso de máscaras e disponibilizamos álcool em gel 70% nas dependências do laboratório supracitado.

5.3 Descrição da experimentação

Nesta subseção apresentamos a experimentação de cada uma das situações didáticas desta pesquisa, observando as manifestações intuitivas dos participantes, bem como as demonstrações de seus conhecimentos de ordem epistêmica acerca do tema proposto, que porventura possam ter sido adquiridos ao longo de sua trajetória como estudantes.

Desta forma, firmamos o contrato didático estabelecido entre as partes envolvidas. Segundo Brousseau (2002) o contrato didático conduz a relação e determina, tanto de forma explícita quanto implícita, as tarefas que cada um dos sujeitos envolvidos na situação didática deve assumir. O que se propõe neste contrato didático visa o bom andamento das situações

didáticas, evitando falhas de comunicação e/ou sua ruptura. Assim, o contrato didático assumido entre os professores em formação e a pesquisadora estabelece que:

- (i) Os participantes da pesquisa são responsáveis pelo compromisso de tentar resolver as situações didáticas com base em seus conhecimentos prévios, da melhor forma possível, podendo estes fazerem perguntas durante o desenvolvimento de cada uma das situações, bem como trocar ideias entre si. Eles também têm a liberdade de não resolver alguma etapa da situação didática, caso não a compreendam ou não se sintam à vontade para tal;
- (ii) Os participantes da pesquisa estão cientes de que a pesquisadora necessita de materiais para a coleta de dados e estes dados serão coletados em forma de fotografias, áudios, vídeos, produções no ambiente do GeoGebra e todo e qualquer material escrito elaborado por eles. Assim, eles se comprometem em salvar os arquivos conforme as orientações da pesquisadora e fornecê-los como material para análise;
- (iii) Os participantes estão cientes de que sua presença em todos os encontros é de suma importância para o bom andamento da pesquisa e da realização da coleta de dados e se comprometem a fazer um esforço para manter a assiduidade nos encontros.

Após o contrato didático estabelecido, a pesquisadora esclareceu importância de seu cumprimento, segundo a perspectiva de Brousseau (2002), como viabilizador da compreensão do *milieu* estruturado e da análise realizada a partir das relações que ocorrem entre o trinômio professor-aluno-saber.

No Quadro 7, trazemos um quadro-síntese com um inventário dos documentos coletados na pesquisa, referente aos registros em arquivos de áudio e transcrições dos encontros formativos:

Quadro 7: Inventário de documentos da pesquisa.

Código	IDENTIFICAÇÃO DO MATERIAL	
1 - MATERIAL EM ÁUDIO		
AA01	Arquivo em Áudio	Desenvolvimento da Situação Didática I – Parábolas com dobraduras
AA02	Arquivo em Áudio	Desenvolvimento da Situação Didática II – Ponte pênsil
AA03	Arquivo em Áudio	Desenvolvimento da Situação Didática III – Construção do farol
AA04	Arquivo em Áudio	Desenvolvimento da Situação Didática IV – Principais elementos da parábola
AA05	Arquivo em Áudio	Desenvolvimento da Situação Didática V – Generalização da equação da parábola
2 - TRANSCRIÇÕES DE ENCONTROS FORMATIVOS		
TR01	Transcrição do Encontro Formativo: Desenvolvimento da Situação Didática I – Parábolas com dobraduras. Duração de 1h53min54seg, que totalizou 06 páginas após transcrição.	
TR02	Transcrição do Encontro Formativo: Desenvolvimento da Situação Didática II – Ponte pênsil. Duração de 1h44min36seg, que totalizou 05 páginas após transcrição.	

TR03	Transcrição do Encontro Formativo: Desenvolvimento da Situação Didática III – Construção do farol. Duração de 2h03min02seg, que totalizou 08 páginas após transcrição.
TR04	Transcrição do Encontro Formativo: Desenvolvimento da Situação Didática IV – Principais elementos da parábola. Duração de 2h14min02seg, que totalizou 10 páginas após transcrição.
TR05	Transcrição do Encontro Formativo: Desenvolvimento da Situação Didática V – Generalização da equação da parábola. Duração de 1h36min08seg, que totalizou 05 páginas após transcrição.

Fonte: Elaboração da autora (2022).

O conteúdo apresentado no Quadro 7 visa organizar e situar o leitor desta dissertação no que diz respeito aos momentos de realização do experimento. Os códigos das transcrições estão situados após cada excerto apresentado com o formato (TR01, 2022) e assim por diante.

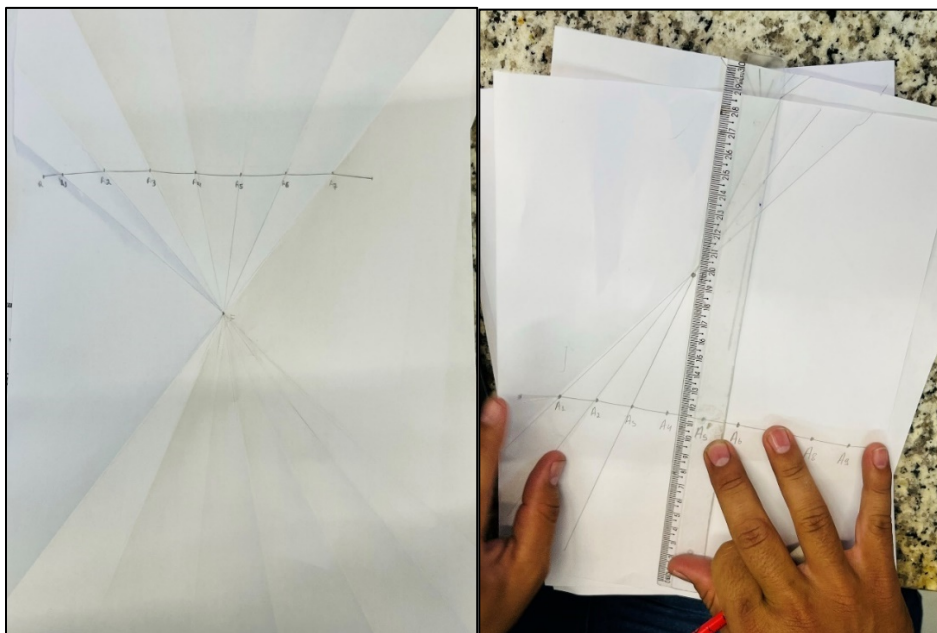
Vale salientar que observamos as concepções epistêmicas com base nas ações que foram executadas/apresentadas pelos professores em formação, no que diz respeito à compreensão da parábola pelo prisma da Geometria Analítica, bem como observamos as contribuições do GeoGebra na modelagem das situações propostas, como mediador da manifestação das categorias intuitivas por meio da visualização e percepção geométrica dos sujeitos no decorrer das situações desenvolvidas. Partindo do exposto, a seguir apresentamos os dados coletados, bem como as observações, discussões e apontamentos acerca destes.

5.3.1 Experimentação da Situação Didática I

A primeira situação didática trouxe como proposta a construção geométrica da parábola a partir de dobraduras de papel. A situação demandava uso de técnicas básicas de desenho geométrico, em que os participantes utilizaram, a princípio, o ambiente lápis e papel, para então transpor suas conjecturas para o ambiente computacional.

Na *situação de ação* todos os participantes realizaram a leitura da questão e, por meio de *intuições afirmativas*, buscaram seguir de forma literal o que propunha o enunciado apresentado, ou seja, desenharam uma reta r e um ponto F fora dela. No entanto, algumas conjecturas iniciais não permitiram a participantes, como o caso de P7 e P8 seguirem de imediato. Podemos ver um exemplo disso na Figura 39:

Figura 39: Situação de ação dos participantes P7 (à esquerda) e P8 (à direita).



Fonte: Registro da autora (2022).

Note que na Figura 39, os participantes P7 e P8 traçaram a reta e pontos aparentemente equidistantes sobre esta, além de um ponto F fora da reta, como propõe o enunciado. No entanto, ambos não compreenderam de forma clara como proceder com as dobras, traçando retas que ligam os pontos sobre a reta inicialmente traçada e o ponto F fora desta, mostrando um equívoco na interpretação das orientações fornecidas pela situação.

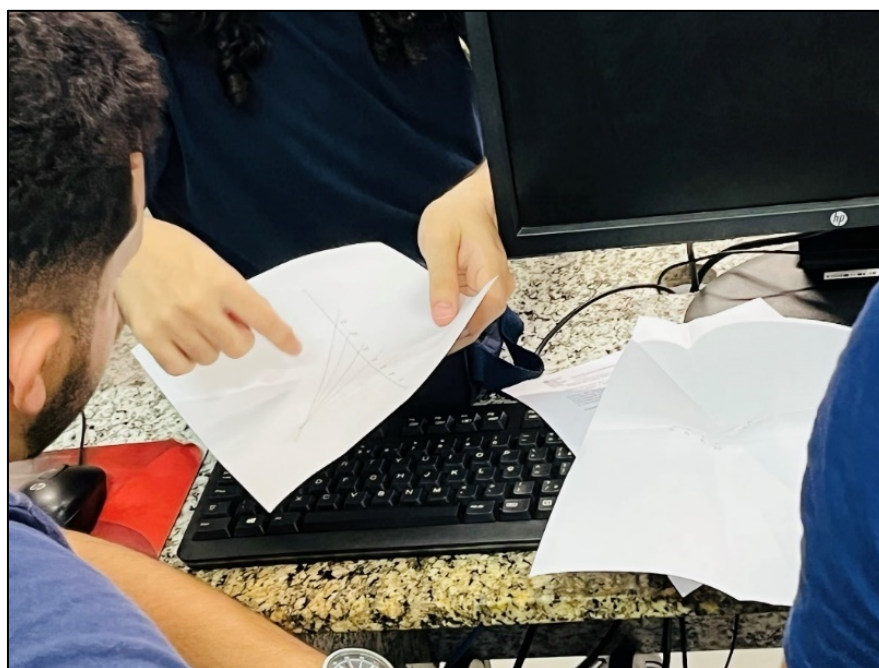
Neste caso, podemos dizer que ambos os participantes apresentaram *intuições conjecturais*, mesmo que errôneas. Isso pode ser explicado por Fischbein (1993), quando ele afirma que no curso de um raciocínio matemático, objetos materiais – sejam materiais concretos ou esboços gráficos – correspondem meramente a modelos materializados das entidades mentais com as quais o matemático lida. Desta maneira, a figura geométrica da parábola não é um mero conceito, mas sim uma imagem visual, que não foi reconhecida de imediato (intuitivamente) por P7 e P8. Na fala de P8, ele afirmou “*eu não tô conseguindo ver essas dobras fazendo uma curva não...*”, o que de fato sua representação no ambiente lápis e papel não alcançou. Já a fala de P7 nos mostra algo relevante para análise, fornecendo os primeiros indícios da lacuna no estudo deste assunto, quando ele aponta:

[...] professora eu achei interessante esse problema porque não tem equação nenhuma. A gente da matemática tem um costume de equacionar tudo e esse problema é uma coisa simples, mas faz a gente bater cabeça. Eu, por exemplo, nunca tinha visto (P7). (TR01, 2022).

Entretanto, durante a *situação de formulação* e a troca de informações entre os participantes e o *milieu*, P1 forneceu ajuda a P7 e P8, apontando qual o problema com suas dobras e o porquê delas não atingirem a curva. Entretanto, mesmo após esforço manifestado por meio de *intuições conjecturais*, P7 e P8 não conseguiram se basear nas orientações apontadas nem apresentaram um esboço satisfatório, o que é mostrado mais adiante.

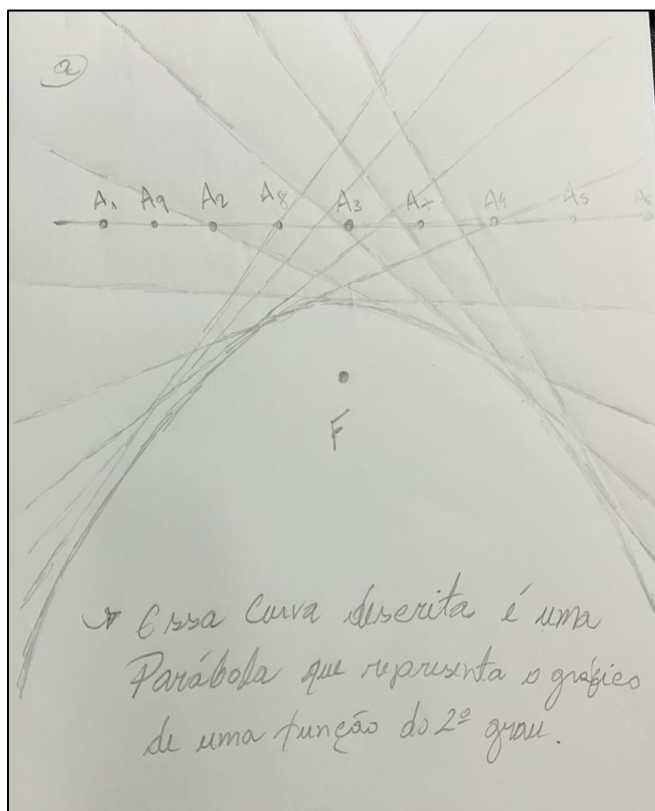
Um registro da dialética de formulação entre os sujeitos é apresentado na Figura 40:

Figura 40: Registro da etapa de formulação da SD1.



Fonte: Registro da autora (2022).

Compreendemos, com base nos registros escritos e nas transcrições de áudio do primeiro encontro, que a maioria dos participantes, a princípio, não entendeu prontamente que a curva descrita pelas dobraduras seria a figura de uma parábola. A exceção ocorreu com os participantes P2 e P3, que conseguiram esboçar a curva no papel quase que de imediato, sem apresentar grandes dificuldades, o que foi algo previsto na análise *a priori*. Entretanto, destacamos que o previsto ocorreu com a minoria dos sujeitos. Outra situação que nos chamou atenção ocorreu com o participante P6, mostrada na Figura 41:

Figura 41: Construção manual do participante P6

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

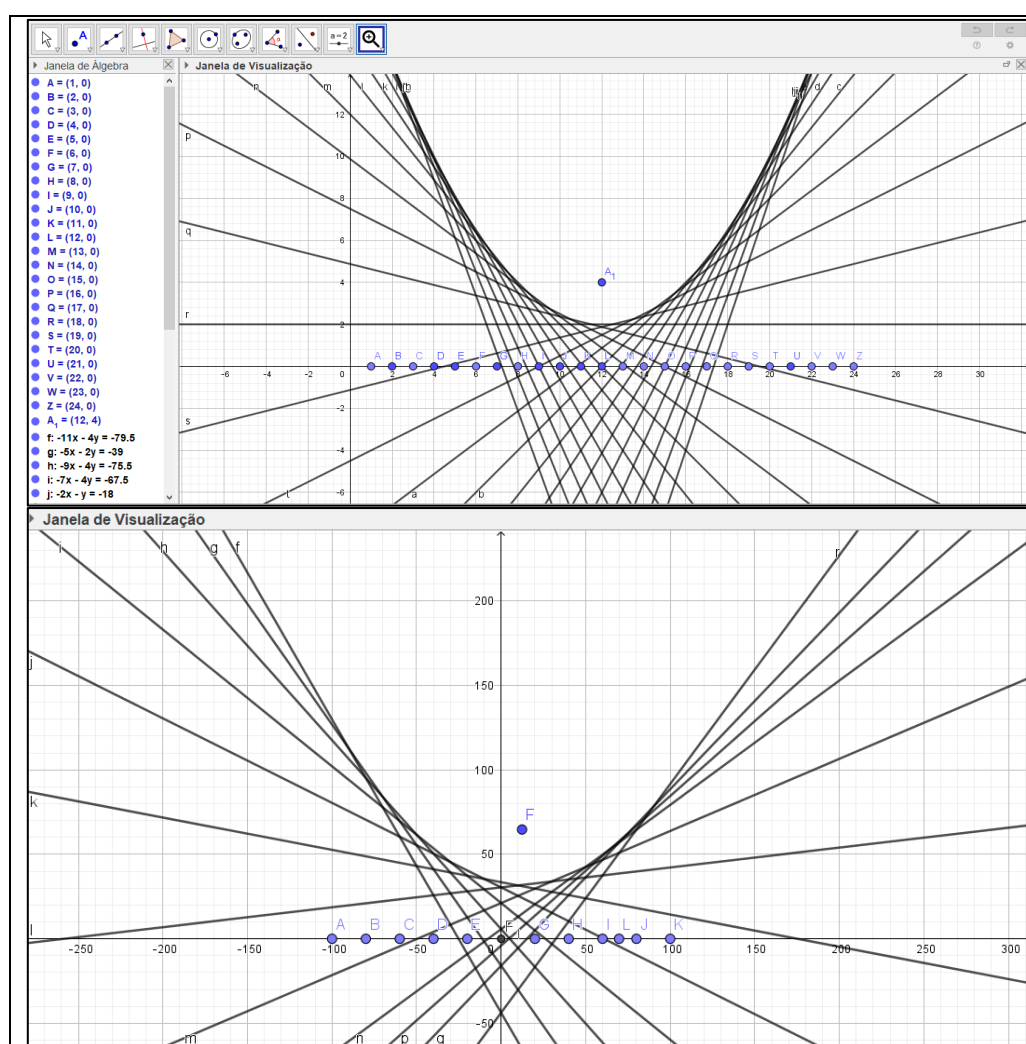
No enunciado da situação didática, o item (a) pede que o participante identifique o tipo de curva descrita, que no caso a resposta esperada de fato é uma parábola. Entretanto, observe o comentário de P6, logo abaixo de sua construção geométrica, apontando que a parábola “... representa o gráfico de uma função do 2º grau”. De modo instintivo/imediato, mesmo sem equações previamente estabelecidas nesta situação didática, como prevê Fischbein (1987), a partir de uma *intuição afirmativa* baseada em seus conhecimentos prévios sobre esta curva, o participante P6 faz uma associação direta da parábola com o gráfico da função quadrática. Este fato foi levantado em nossa análise preliminar e se revelou no pré-teste realizado.

Ainda seguindo na *situação de formulação*, os participantes realizaram a transposição de suas construções do ambiente lápis e papel para o ambiente do GeoGebra. Nesta etapa, os participantes P3 e P5 se destacaram, pois realizaram a construção de forma apropriada, com comandos simples e diretos, como o uso da ferramenta mediatriz no GeoGebra.

Ambos seguiram uma linha de raciocínio parecida: criaram um conjunto de pontos equidistantes sobre o eixo x e um ponto fora deste conjunto, representando o foco da parábola. Partindo de *intuições conjecturais*, eles criaram um conjunto de mediatrizes entre cada ponto sobre o eixo e o ponto fora do eixo, formando a figura da parábola.

Entretanto, P3 apresentou maior destreza que P5, pois, aparentemente, a partir das dobraduras em papel, este participante já tinha se dado conta do que fazer para reproduzir a construção no GeoGebra. Sua forma de construir mostrou que *intuições antecipatórias* e *conclusivas* foram manifestadas, pois a partir de certo ponto do registro de vídeo, ele não hesitou nos passos de sua construção, demonstrando que já tinha uma visão da solução final e uma noção de como proceder, como observado no decorrer de sua execução. Uma representação das construções de P3 e P5 podem ser vistas na Figura 42:

Figura 42: Formulação de P3 (acima) e P5 (abaixo).



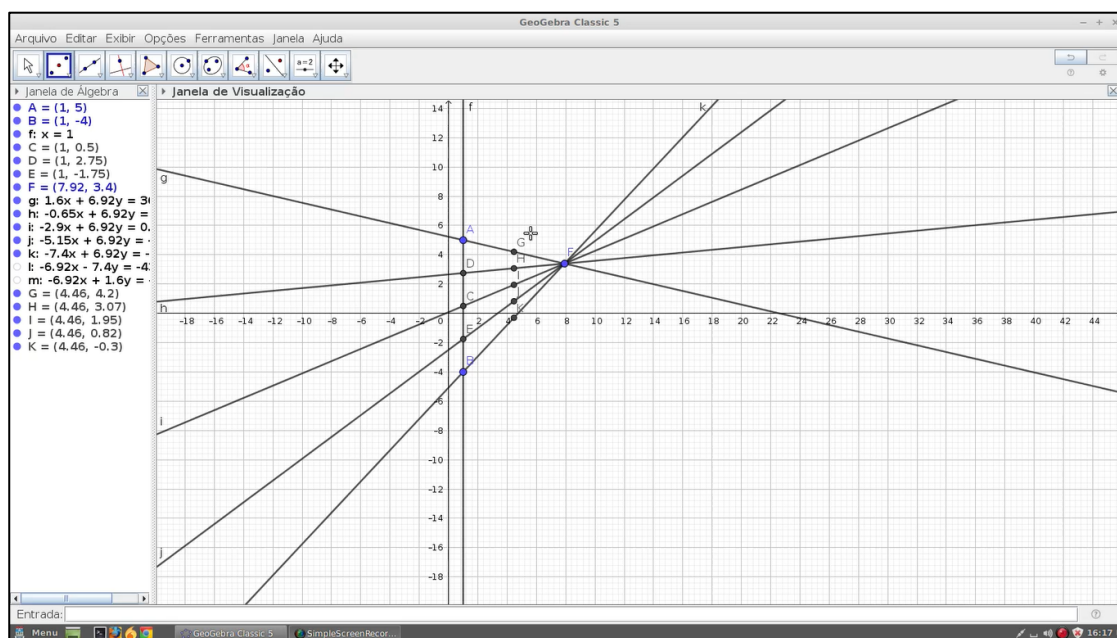
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Observe na Figura 42 que a perspectiva visual da construção de ambos os participantes é similar, bem como a estrutura da construção em si. É algo a ser observado em particular é que P3 e P5 não trocaram ideias entre si durante a *situação de formulação*, mas sim com outros colegas que estavam fisicamente mais próximos deles na sala durante o encontro. Esta

similaridade não ocorreu com as construções dos demais participantes. Nas construções de P1 e P2, por exemplo, os resultados têm certa semelhança, mas seus percursos foram distintos.

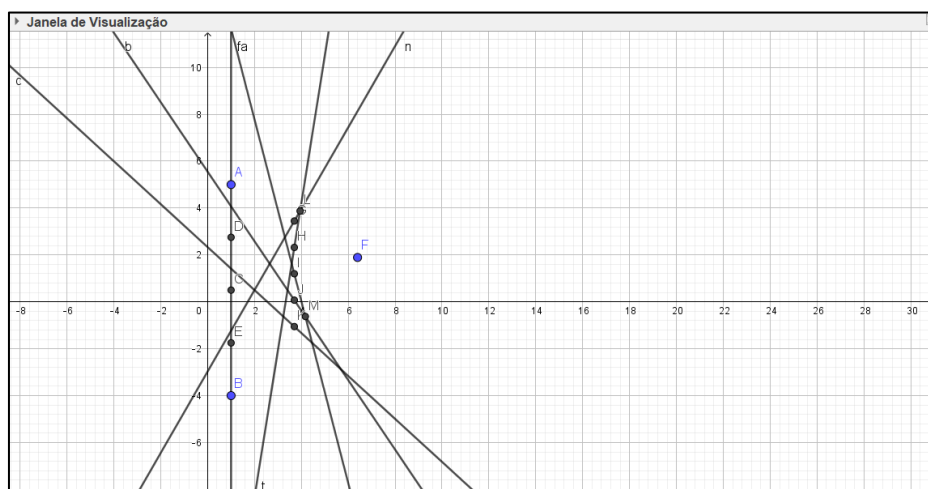
O participante P1 começou sua construção a partir da criação de uma reta paralela ao eixo y , criando dois pontos arbitrários e o ponto médio entre eles, e depois os pontos médios entre o ponto médio e os pontos inicialmente criados. Após isso, P1 traçou um ponto F fora da reta e criou outras retas ligando os pontos sobre a reta inicialmente criada ao ponto F . Aparentemente ele estava seguindo o que a questão propôs, mas podemos notar que ele não chegou a uma conclusão satisfatória inicialmente. Na Figura 43 podemos observar sua construção inicial:

Figura 43: Formulação de P1 no GeoGebra



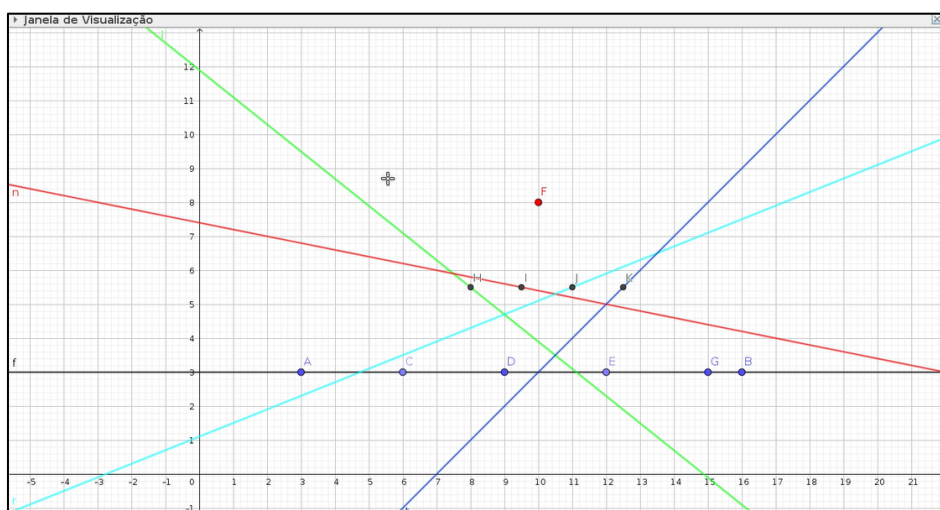
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

O participante P1 moveu esta construção por alguns minutos, como observado no vídeo, procurando formular uma estratégia para resolver a situação. Ele também criou várias retas paralelas passando pelo ponto F , mas as desfez, pois não conseguiu solucionar por este caminho também. As intuições manifestadas pelo sujeito, de ordem *afirmativa* e *conjectural*, não foram adequadas o suficiente para a solução do problema por esta linha de pensamento. Então ele desfez as paralelas criadas e tentou refazer a construção, chegando à aproximação de uma parábola, mas não exatamente, como mostra a Figura 44:

Figura 44: Construção final de P1

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Já com relação ao percurso seguido por P2, ele iniciou como os demais, por meio de *intuições afirmativas* geradas a partir do que o enunciado do problema propôs. Criou uma reta e pontos equidistantes nela, bem como e um ponto fora da reta. Além disso, P2 manifestou *intuições conjecturais* ao tentar o uso de comandos como segmento, reta paralela e reta perpendicular, na tentativa de esboçar as dobras do papel, mas sem sucesso inicialmente. Algo simples, mas que foi notado é que P2 foi o único participante a utilizar cores diferentes na construção, como mostra a Figura 45:

Figura 45: Formulação de P2 (parte 1).

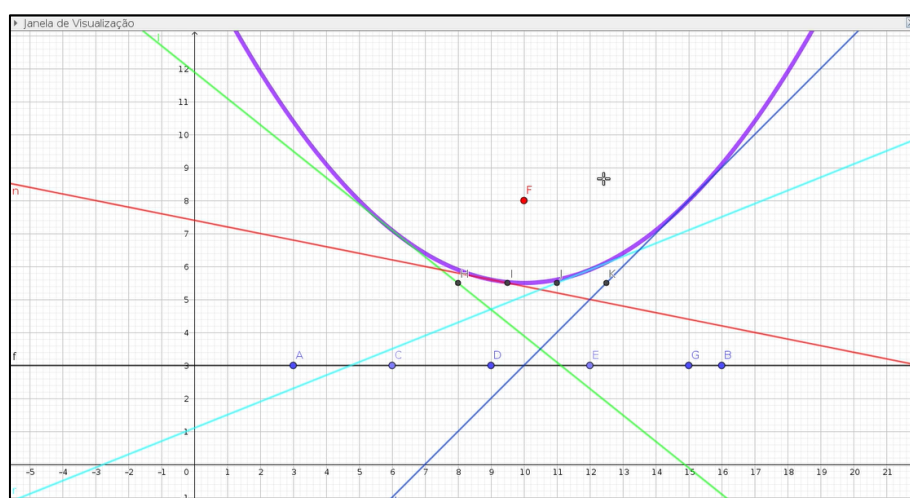
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Note que as intersecções entre as retas coloridas formam um esboço que, ao observar cautelosamente, podemos ver que se aproxima da figura de uma parábola. Ele afirmou “eu

consegui criar uma parábola, agora vou criar o foco e a diretriz no GeoGebra e ver se consigo fazer algo parecido” (TR01, 2022), referindo-se à transposição do papel para o software.

Assim, P2 ao perceber isto, explorou outros recursos, diferente do que P1 fez. Por meio de *intuições antecipatórias* e *conclusivas*, ao clicar na ferramenta “parábola” na guia “cônicas”, no ponto *E* e no ponto *F* de sua construção e fazer o ajuste da curva, depois os ajustes estéticos como largura do traço e cor, obteve a seguinte construção final (Figura 46):

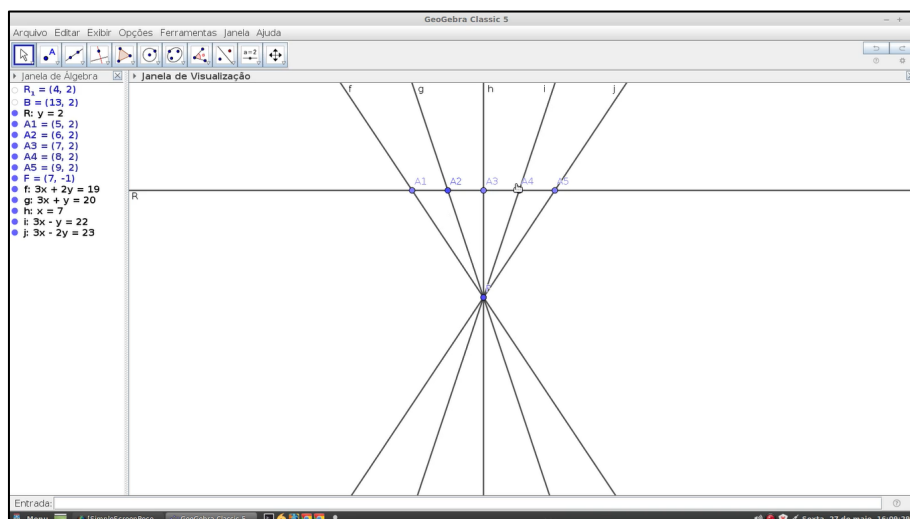
Figura 46: Formulação de P2 (parte 2)



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Já o participante P4 inicialmente manifestou *intuições afirmativas*, a partir do enunciado do problema, construindo algo semelhante ao que o participante P1 fez (Figura 47):

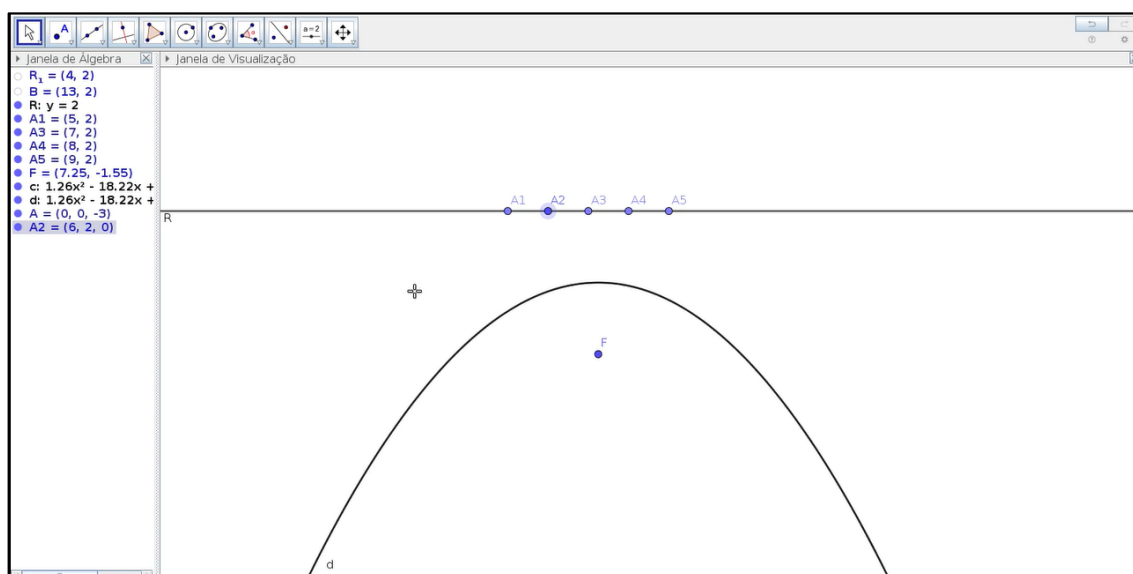
Figura 47: Formulação de P4.



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

No entanto, ao pensar que não chegaria à conclusão da situação didática com esta estratégia, P4 trocou o curso de seu raciocínio, o que é algo previsto dentro da TSD como apontam Brousseau e Gibel (2005) e Almouloud (2007). Desta forma, ele buscou dentre as ferramentas do GeoGebra algo que o auxiliasse a responder o problema, ou seja, a construção de uma parábola com os comandos dados. Então ao abrir e explorar todas as guias, de acordo com as observações do registro de vídeo, P4 encontrou a ferramenta “parábola”, obtendo como construção final a Figura 48:

Figura 48: Construção final de P4.

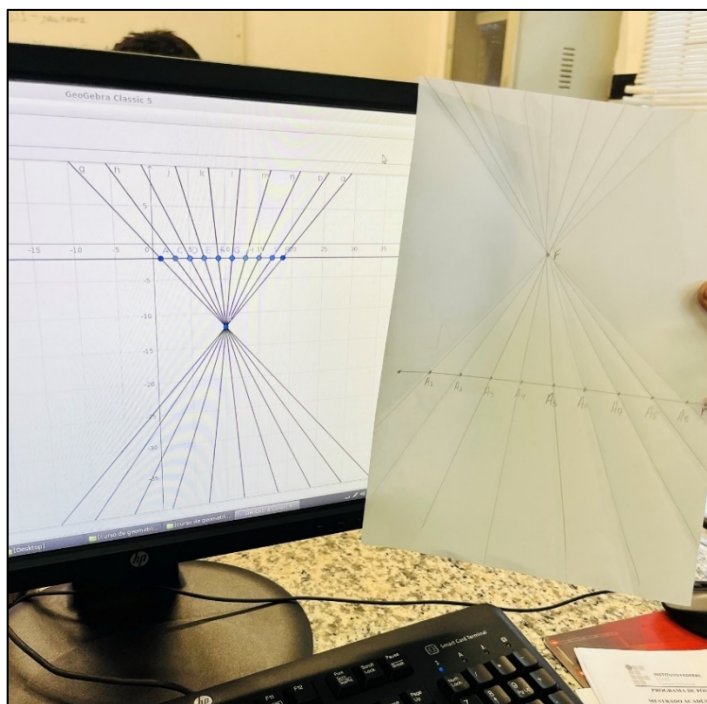


Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Por fim, os participantes P7 e P8, que não conseguiram concluir suas construções, nem no ambiente lápis e papel e nem no ambiente computacional, cometeram equívocos parecidos. Ambos discutiram juntos durante a *situação de formulação*. Em suas falas, temos:

Professora eu criei a reta e o ponto fora e tô fazendo pontos na mesma distância e retas entre esses dois pontos aqui (se referindo aos pontos A e B que foram arbitrários na criação da reta) e o ponto que está fora, mas não tá ficando bem uma curva não. Tá parecido com o papel, mas as retas tão ficando diferentes [...](P8)
Professora, essas retas viram uma curva mesmo? Porque no papel deu certo, mas a gente não tá conseguindo fazer bem no GeoGebra não (P7) (TR01, 2022).

Os participantes entenderam, por meio de *intuições afirmativas e conjecturais*, mesmo que inadequadas, que suas ações e formulações em papel estavam seguindo o percurso correto. Mesmo após a discussão com o auxílio de P1, podemos observar em suas construções nos ambientes (papel e *software*) que os passos para a solução da situação didática não foram bem compreendidos por estes participantes. Observe as construções de P7 na Figura 49:

Figura 49: Construções de P7

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

As construções de P7 e P8, de natureza bastante similar, mostram que ambos os participantes não compreenderam as instruções dadas pela situação didática com relação às dobras. E ainda que eles tenham manifestado *intuições afirmativas*, estas foram de modo equivocado e suas tentativas de reprodução da solução se mostraram insuficientes. Com relação ao erro de base conceitual/estrutural nesta solução, podemos nos apoiar no discurso de Fischbein (1994), que relaciona tais erros a modelos mentais/intuitivos inadequados:

Maybe, what is less understood is that, in order to overcome such errors, the student needs to gain a fuller understanding of the relationships between the formal and the algorithmic components in mathematics. The student has to understand, in my opinion, the formal basis (definitions and theorems) that justifies an algorithm. It is the blind learning of algorithms that leads to these types of misuse. In the absence of a clear understanding of the formal frame and justification, the superficial similarity of problems leads to wrong generalizations. (FISCHBEIN, 1994, p. 242)²⁸.

Ao serem indagados sobre seus conhecimentos prévios acerca do assunto, estes participantes afirmaram que não tinham conhecimento sobre esse tema de forma associada a

²⁸ Talvez, o que é menos compreendido é que, para superar tais erros, o aluno precisa obter uma compreensão mais completa das relações entre os componentes formal e algorítmico em matemática. O aluno tem que entender, na minha opinião, a base formal (definições e teoremas) que justifica um algoritmo. É o aprendizado cego de algoritmos que leva a esses tipos de uso indevido. Na ausência de uma compreensão clara do enquadramento formal e da justificação, a semelhança superficial dos problemas leva a generalizações erradas. (FISCHBEIN, 1994, p. 242).

Geometria Analítica, tanto no nível da Educação Básica quanto Superior, ou que, quando conheciam, não haviam tido a experiência com o *software*, como no registro de áudio:

*na geometria analítica vetorial não, mas na geometria analítica plana sim, só que sem software (P7)
em geometria analítica a gente viu mais foi ponto e reta (P8)*(AA01, 2022).

Sobre o erro ligado aos conhecimentos prévios e como manifestação de obstáculos em Didática da Matemática, Brousseau (1976, p. 109) esclarece que:

En rapprochant cette erreur de quelques autres, on comprend que de façon inconsciente, cet étudiant a fait un certain raisonnement, faussé par une représentation incorrecte [...] qui remonte à l'enseignement primaire et secondaire. [...] Peut être cet étudiant n'écrirait-il pas ce raisonnement, sans s'apercevoir qu'il est faux, mais il lui paraît évident, car il repose sur une pratique constante. (BROUSSEAU, 1976, p. 109).²⁹

Dessa maneira, na perspectiva de Brousseau (1976), este tipo de erro não é, de fato, um fruto do acaso ou da ausência de conhecimento, mas sim de conhecimentos prévios que em situações anteriores eram adequados, mas que para o momento tornaram-se falsos, inaptos ou não atentem a demanda da situação e são considerados pelo autor como obstáculos.

Na *situação de validação* todos os participantes apresentaram em suas soluções que a curva descrita é uma parábola, socializando suas construções e discutindo os procedimentos realizados. Entretanto, vale observar algumas particularidades:

- (i) Apenas três dos oito participantes (P1, P2 e P3) tinham a noção de foco e diretriz. E dentre eles, apenas P3 conhecia (e verbalizou) sua definição formal;
- (ii) Os participantes P7 e P8, que não concluíram a atividade de forma adequada, afirmaram que a construção “pela lógica, deveria ser uma parábola”, mas que eles não conseguiram construí-la, mesmo tendo conhecimentos básicos sobre o GeoGebra.

Após discussão, a pesquisadora apresentou sua maneira de realizar a construção, de acordo com o elaborado na análise *a priori*, e iniciou a institucionalização com o auxílio de Lima (2014, p. 115): “Sejam d uma reta e F um ponto fora dela. No plano determinado por d e F , chama-se *parábola de foco F e diretriz d* ao conjunto dos pontos equidistantes de d e F ”. Também complementou a explanação com o conceito de lugar geométrico, utilizando esta

²⁹Ao comparar este erro com alguns outros, entendemos que, inconscientemente, esse aluno fez um certo raciocínio, distorcido por uma representação incorreta [...] que remonta ao ensino fundamental e médio. [...] Talvez esse aluno não escrevesse esse raciocínio, sem perceber que é falso, mas parece óbvio para ele, porque é baseado na prática constante. (BROUSSEAU, 1976, p. 109).

definição. A partir disso, realizou um fechamento sobre a situação didática, apontando que se esperava que fosse respondido no item a) a curva é uma parábola; e no item b) que o ponto F fora da reta representava o foco da parábola e a reta d com os pontos equidistantes seria a diretriz.

5.3.2 Experimentação da Situação Didática II

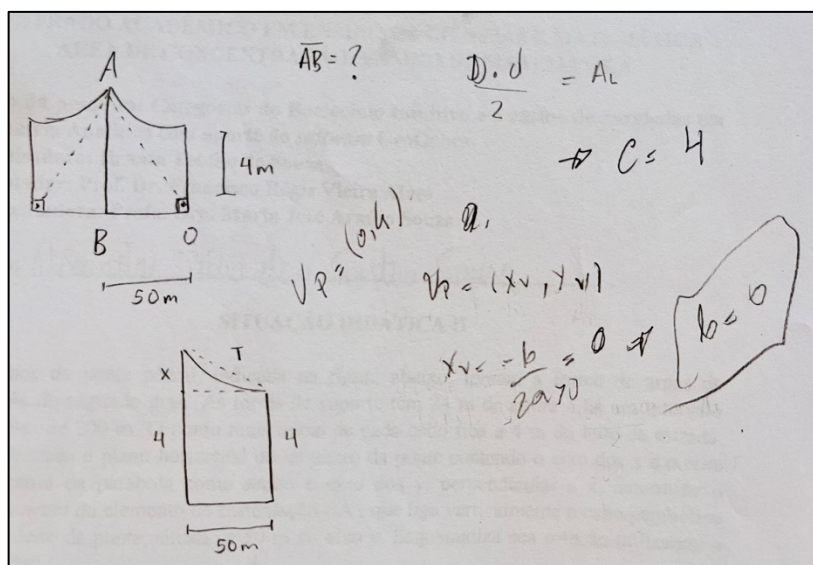
Na segunda situação didática proposta o enunciado mostrou o esboço de uma ponte pênsil, com algumas informações numéricas que poderiam ser observadas a partir de *intuições afirmativas*, como o vértice da parábola, posição de sua concavidade e um dos pontos pertencentes à curva. O contrato didático foi reforçado pela pesquisadora, em que os professores em formação foram orientados a buscar informações dentro da situação proposta, tentar solucioná-la no ambiente lápis e papel e, após isso, transpor sua solução para o GeoGebra, apresentando-a e discutindo-a com os demais.

Na *situação de ação*, como esperado, todos os professores em formação fizeram uma interpretação do enunciado da questão, observando quais informações foram apresentadas de imediato, a partir da observação do gráfico da ponte pênsil. Alguns esboços foram rabiscados pelos sujeitos na tentativa de organizar os elementos disponíveis para uma posterior formulação.

De modo quase unânime, as *intuições afirmativas* iniciais apresentadas pelos sujeitos giravam em torno do uso da função quadrática para solucionar o problema. De acordo com Fischbein (1989), um estudante ao longo do tempo acumula informações oriundas de modelos intuitivos específicos previamente identificados, que interferem diretamente na sua forma de raciocínio. Como posto em nossa análise *a priori*, pelo fato de a parábola ser recorrentemente estudada ao longo do percurso escolar/acadêmico pela óptica das funções quadráticas, tal modelo foi replicado, de modo intuitivo e talvez até natural. Entretanto, alguns deles se utilizaram de estratégias iniciais diferentes no decorrer da *situação de formulação*, como o caso de P5 e P2, relatados nos parágrafos subsequentes.

Por exemplo, o participante P5 iniciou sua elaboração buscando uma solução por meio da Geometria Plana, como mostra a Figura 50:

Figura 50: Tentativa inicial de solução do participante P5



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

A princípio, P5 na tentativa de conjecturar uma estratégia de solução, pensou ser possível o cálculo do segmento $\overline{BA}$ com uso de triângulos, como mostra a Figura 49. Contudo, seu modelo de *intuição conjectural* elaborado e manifestado para esta solução não foi o mais adequado. De acordo com Fischbein (1989, p. 13):

Os erros podem apontar para restrições decorrentes de um determinado modelo tácito. Através da discussão em sala de aula, os alunos podem ser ajudados a tomar consciência do respectivo modelo e do potencial conflito gerado pelas restrições do modelo e aquelas formalmente estabelecidas por definições matemáticas e teoremas. Os próprios alunos podem deduzir, do suposto modelo tácito, as restrições que ele impõe e compará-las com aquelas derivadas de definições e teoremas. (FISCHBEIN, 1989, p. 13).

Nos registros de áudio da pesquisa, ao dialogar com a pesquisadora, P5 afirmou:

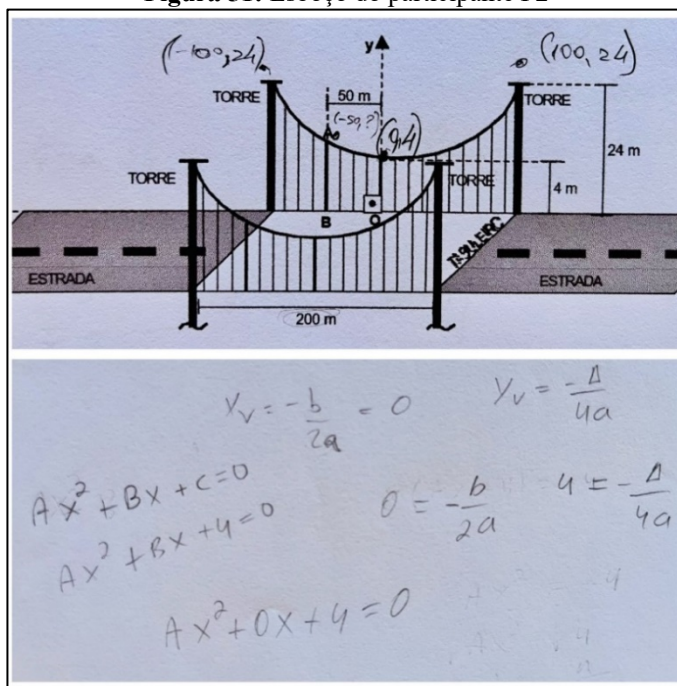
- Eu tô tentando criar um triângulo aqui e ver se consigo achar o seno e o cosseno, pra ver se acho as medidas dos lados desses triângulos e me ajuda em alguma coisa... (P5)
- Você está tentando usar geometria plana na solução? (pesquisadora)
- É sim, vou ver se dá. [...] eu queria me lembrar a fórmula do losango... (P5)
- Da área? (pesquisadora)
- Sim (P5). (TR02, 2022).

Após tentativas e ao concluir que não chegaria à solução com este método, P5 recorreu à mesma estratégia dos sujeitos P4, P6 e P7, adotando função quadrática como caminho, conseguindo finalizar seu raciocínio no ambiente lápis e papel, mostrado mais adiante.

Já o participante P2 não conseguiu esboçar solução, nem no ambiente lápis e papel, nem no GeoGebra. Observamos rabiscos de ideias parcialmente elaboradas, *intuições*

conjecturais que não se estabeleceram suficientemente para se tornarem soluções analíticas globais e consequentes *intuições antecipatórias*. Se observarmos os rascunhos de P2 na Figura 51, vemos que ele não conseguiu elaborar uma linha de raciocínio acabada o suficiente para arrematar a solução do problema:

Figura 51: Esboço do participante P2



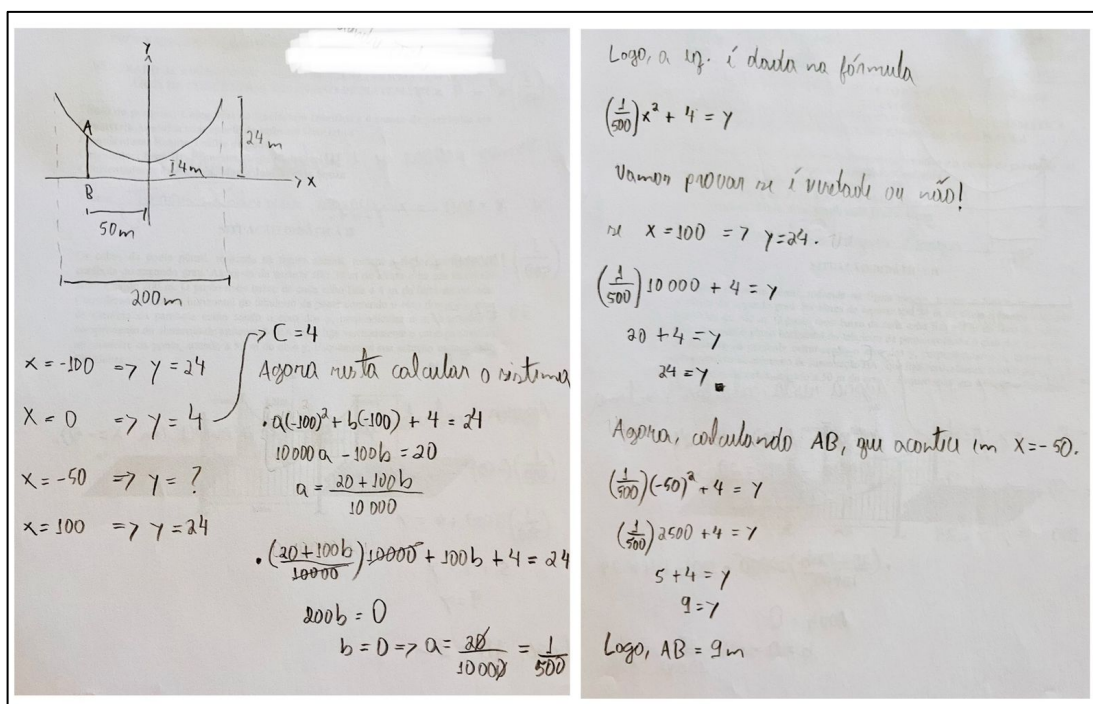
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Observe as duas partes da Figura 51. Note que temos marcações no desenho, indicando os pontos e alguns elementos extraídos do gráfico. “À medida que aumenta a quantidade de novos conhecimentos a serem aprendidos, torna-se cada vez mais difícil ter em mente o número crescente de conexões circunstanciais independentes, e há um risco considerável de confusão” (BROUSSEAU; GIBEL, 2005, p. 23). Aqui podemos considerar as manifestações de raciocínio de P2 como algo amplo, não linear e que depende de muitas variáveis, inclusive os conhecimentos prévios bem estabelecidos, o que no caso não foi demonstrado por este sujeito.

Já as formulações dos participantes P1, P3, P4, P6, P7 e P8 apresentaram manifestações intuitivas com um percurso para a solução concluído pela óptica das funções quadráticas, como previsto. Contudo, com relação ao uso da estratégia para chegar à solução, há algumas similaridades e diferenças no percurso.

Os participantes P1 e P8, por exemplo, na busca pelos coeficientes a , b e c da função quadrática, optaram pelo uso de um sistema linear, como podemos ver na Figura 52:

Figura 52: Solução analítica de P1, similar a P8, com uso de sistemas lineares.



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Como estes sujeitos trocaram ideias no decorrer da *situação de formulação*, seus registros escritos trazem bastantes similaridades. Note na Figura 52 que eles utilizaram os pontos dados no problema, substituindo-os na estrutura de uma função quadrática, $y = ax^2 + bx + c$, concluindo que $a = \frac{1}{500}$, $b = 0$ e $c = 4$, encontrando a expressão $y = \frac{1}{500}x^2 + 4$.

No caso das soluções de P4, P6 e P7, observamos discussões e elaborações um pouco diferentes. Na *situação de formulação* destes sujeitos, eles manifestaram *intuições conjecturais* e *antecipatórias* para a elaboração de seu raciocínio, a partir de uma discussão conjunta. Essas intuições foram notadas com base no registro de transcrição de áudio:

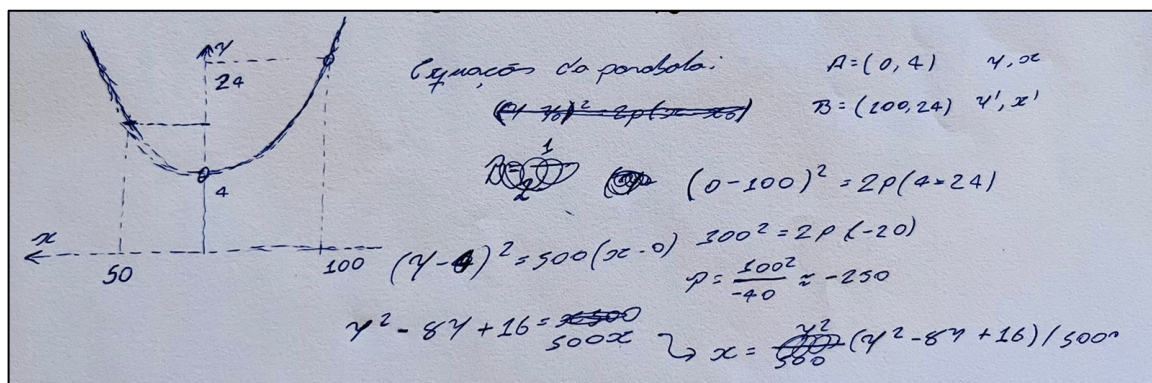
- Eu tentei pegar os dados aqui do gráfico e montar uma função do 2º grau (P7)
- A gente já tem o vértice e está claro que o b é zero, porque se o x_v é zero e x_v vale $-b/2a$, e a gente tá vendo aqui que o $a > 0$, então o b só pode ser zero, pro resultado da divisão também ser zero (P6).
- Agora é só pegar os pontos e fazer a equação, né não? (P4)
- (pausa)
- Então... meu b deu zero, e o teu? (P4 perguntando para P6 e P7)
- É zero mesmo, precisava nem de cálculo pra ver (P6)
- O c eu sei que é 4 porque aqui é a intersecção do gráfico com o y , então esse ponto aqui é $(0, c)$ (P7).
- (pausa)...
- Eu achei que a altura seria 12, porque aqui como está na metade e as partes parecem que aumentam na mesma proporção, eu achei que aqui seria 12... só que claro que eu teria que fazer uma forma geométrica de provar isso daí (P4).
- Tu não tentou equacionar? (P6).

- Eu vou tentar agora... como aqui o c é 4, eu vou tentar encontrar o b e o a ... como a parábola está voltada pra cima sei que o $a > 0$ (P4).
- A intersecção da parábola aqui é 4, aí o que foi que eu fiz, eu fiz $ax^2 + 4 = 24$ e quando o x for 100 o y é 24, aí eu coloquei aqui olha, ..., e deu que o meu coeficiente $a = 1/500$ (P7).
- Pronto, (nome do participante P7)! Tu não já tem a equação geral? Agora tu só pega o ponto aqui e substitui...(P6). (TR02, 2022).

Note que estes professores em formação buscaram extrair o máximo de informações com base no que foi dado pelo problema, para elaborar suas *intuições conjecturais* e, a partir delas, traçar uma solução mais objetiva, demonstrando características de *intuições antecipatórias*. Segundo a perspectiva de Brousseau e Gibel (2005), compreendemos que existe uma necessidade dos sujeitos em provar que o raciocínio elaborado foi intencional, proposital e útil, no que diz respeito ao seu conhecimento matemático. Já para Fischbein (1987a) há conjecturas deliberadamente e formalmente produzidas, que consideram a diversidade de relações possíveis entre variáveis em uma determinada situação.

Ainda com relação à *situação de formulação*, um dos sujeitos utilizou de fato a equação da parábola na Geometria Analítica para solucionar a questão, o que não foi previsto em nossa análise *a priori*. O participante P3 usou o modelo apresentado na Figura 53:

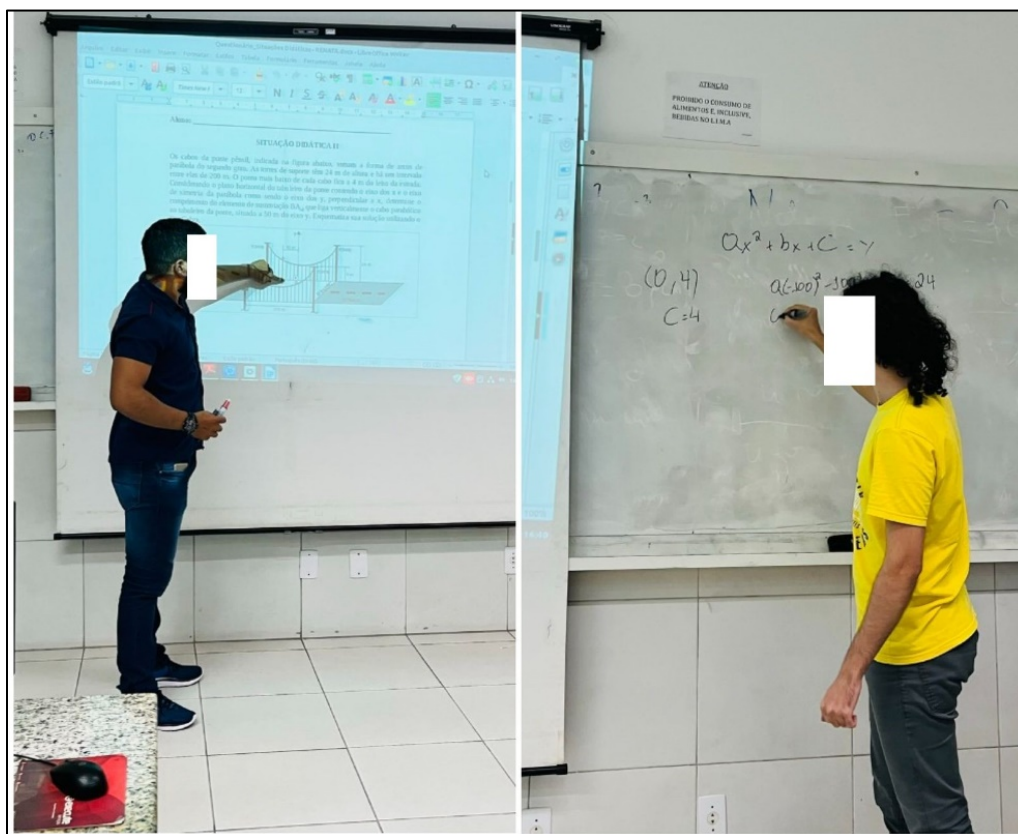
Figura 53: Formulação do participante P3.



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

As propostas de solução dos participantes foram apresentadas e discutidas na *situação de validação* utilizando o quadro do laboratório e o GeoGebra. Como as discussões ocorreram em pequenos grupos, as soluções apresentaram similaridades de modo geral, com exceção de P2 e P3. Dentre todos os presentes, os participantes P1 e P7 se disponibilizaram a apresentar sua solução no quadro para os demais, como mostram as Figuras 54, 55 e 56:

Figura 54: Registro de apresentação dos participantes P1 (à direita) e P7 (à esquerda).



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Figura 55: Apresentação da solução de P1.

$$\begin{aligned}
 & 2x^2 + bx + c = y \\
 & (0, 4) \\
 & c = 4 \\
 & \begin{cases} 2(-50)^2 - 100b + 4 = 24 \\ 2(100)^2 + 100b + 4 = 24 \end{cases} \\
 & \quad \quad \quad 20000 - 100b + 4 = 24 \\
 & \quad \quad \quad 20000 - 100b = 20 \\
 & \quad \quad \quad -100b = 20 - 20000 \\
 & \quad \quad \quad -100b = -19980 \\
 & \quad \quad \quad b = 199.8 \\
 & \quad \quad \quad \text{or } b = 200 \text{ (approximate)} \\
 & \quad \quad \quad \text{or } b = 0 \text{ (if } 20000a = 40 \text{ and } a = \frac{40}{20000} = \frac{1}{500} \text{)} \\
 & \quad \quad \quad \text{or } b = 0 \text{ (if } 100b = 0 \text{)} \\
 & \quad \quad \quad \text{or } b = 0 \text{ (if } 20 + 100b = 20 - 20000 \text{)} \\
 & \quad \quad \quad \text{or } b = 0 \text{ (if } 100b = 0 \text{)} \\
 & \quad \quad \quad \text{or } b = 0 \text{ (if } b = 0 \text{)} \\
 & f(-50) = \frac{1}{500}(-50)^2 + 4 \\
 & \quad = \frac{2500}{500} + 4 \\
 & \quad = 5 + 4 \\
 & \quad = 9 \\
 & \quad \quad \quad \text{or } \frac{1}{500}x^2 + 4 = f(x)
 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Figura 56: Apresentação da solução de P7.

Solução

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$x_v = -\frac{b}{2a} = 0$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = 4$$

$$(0, c) \Rightarrow c = 4$$

$$b = 0$$

$$\begin{pmatrix} x & y=f(x) \\ 100 & 24 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = ax^2 + 4$$

$$24 = a \cdot 100^2 + 4$$

$$a \cdot 10.000 + 4 = 24$$

$$10.000a = 24 - 4$$

$$10.000a = 20$$

$$a = \frac{20}{10.000} = \frac{2}{1000} = \frac{1}{500}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{500} + 4$$

$$f(50) = \frac{50^2}{500} + 4$$

$$f(50) = \frac{2500}{500} + 4$$

$$f(50) = 5 + 4$$

$$f(50) = 9$$

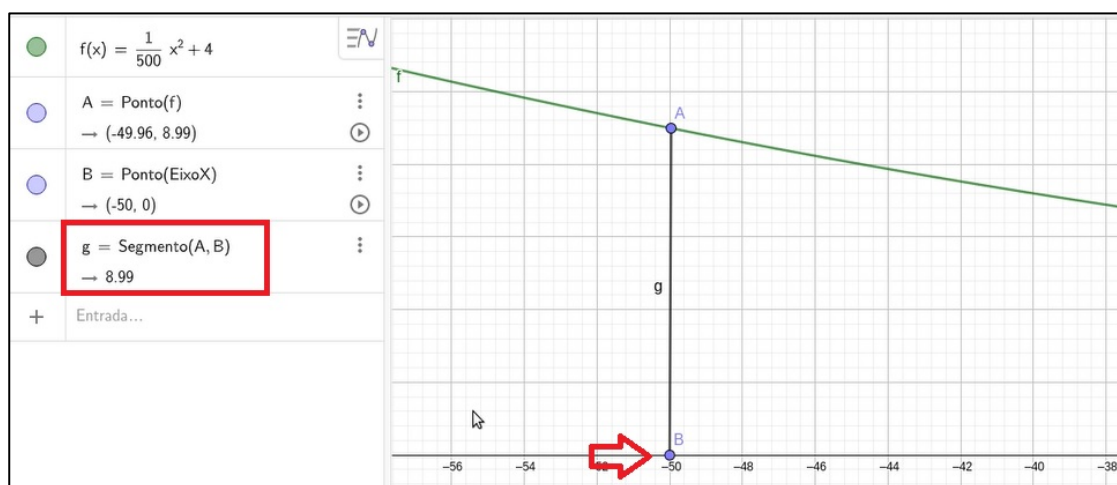
$$\boxed{y = 9}$$

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Já no que diz respeito às observações das manifestações intuitivas e *validação* da situação didática realizada pelos sujeitos, trazemos uma descrição do que foi observado nos arquivos .ggb e nos registros de vídeo da tela do computador.

De acordo com as observações, o participante P1 iniciou sua construção digitando a função $f(x) = 1/500x^2 + 4$, encontrada previamente no ambiente lápis e papel, no campo Entrada do GeoGebra. A partir de uma *intuição conjectural*, P1 traçou um segmento ligando o ponto $(-50, y)$, observando o valor aproximado de y , encontrando inicialmente o valor 8,99:

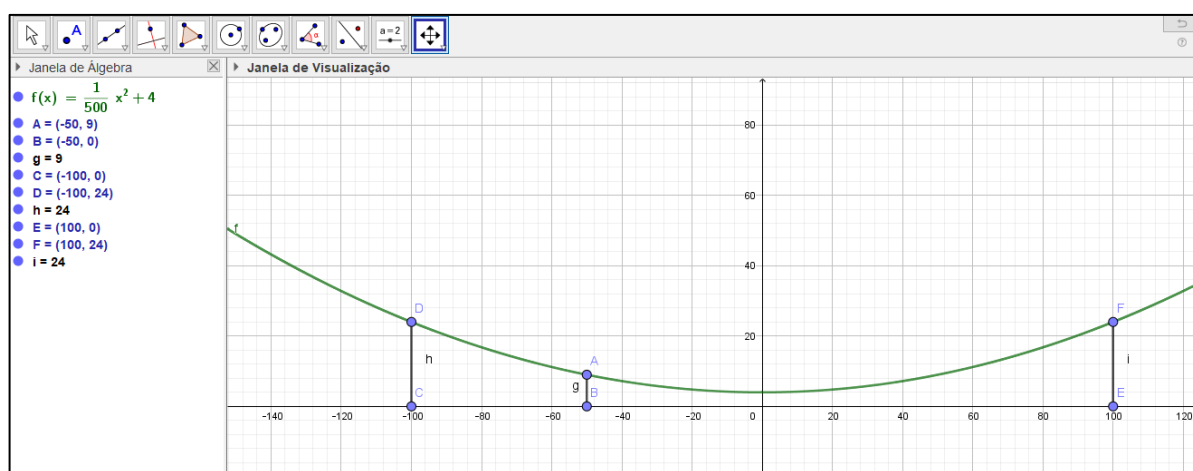
Figura 57: Validação de P1 – parte 1.



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

No entanto, ao observar que o valor se aproximava de $y = 9$, a partir de uma *intuição antecipatória*, P1 ampliou o gráfico utilizando a ferramenta zoom e percebeu que o segmento criado não era exatamente paralelo ao eixo y , o que gerava tal aproximação. Desta forma, por meio de uma *intuição conclusiva* e entendendo que as extremidades do segmento $\overline{BA}$ não eram fixas, P1 manipulou o ponto A para a posição $y = 9$, encontrando o valor do segmento $\overline{BA}$ e validando o que já havia sido conjecturado anteriormente de forma escrita. O participante P1 replicou o processo no 1º quadrante, a partir de uma *intuição afirmativa*, apresentando como construção final no GeoGebra (Figura 58):

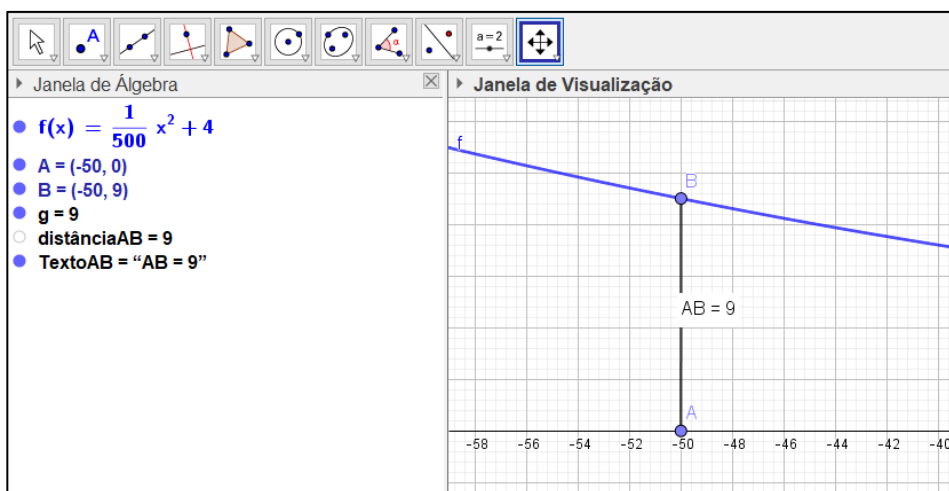
Figura 58: Validação de P1 – parte 2.



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Já o participante P4 inicialmente construiu a função $f(x) = 1/500x^2 + x + 4$ no GeoGebra, mas não obteve sucesso. Retornou ao ambiente lápis e papel para calcular o valor correto de b e voltou ao GeoGebra para inserir a função correta. A partir de *intuições conjecturais* ele criou os pontos $(-50, 0)$ e $(-50, 9)$, dado o fato de que estes valores já haviam sido previamente calculados. Após isso, um pouco diferente de P1, por meio de uma *intuição conclusiva*, P4 usou a ferramenta “*distância, comprimento ou perímetro*” e calculou a distância entre os dois pontos criados, encontrando $AB = 9$, como na Figura 59:

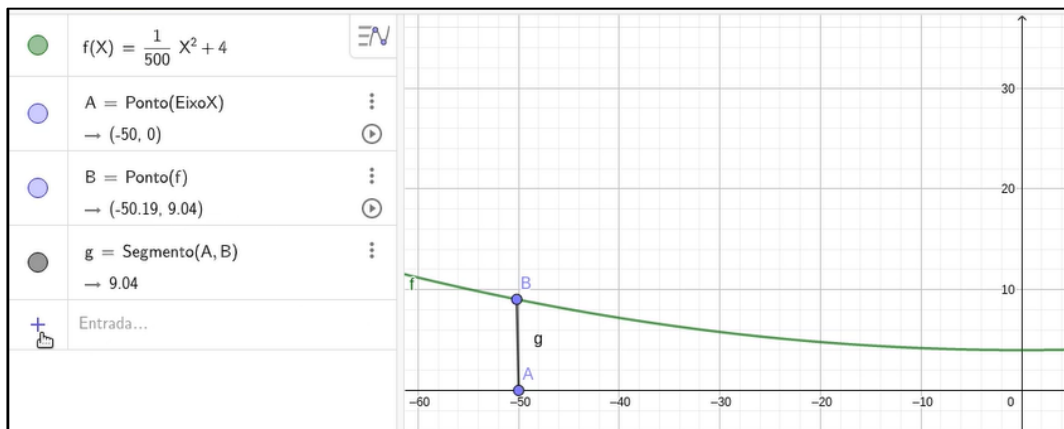
Figura 59: Validação de P4.



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

O início da *situação de validação* tanto de P5 quanto de P8 são similares à de P1. Eles iniciaram construindo a função $f(x) = 1/500x^2 + 4$ e um segmento com $x = -50$ e y como sendo um ponto da parábola que tenha imagem que satisfaça a função, como na Figura 60:

Figura 60: Validação de P5 (similar à de P8).

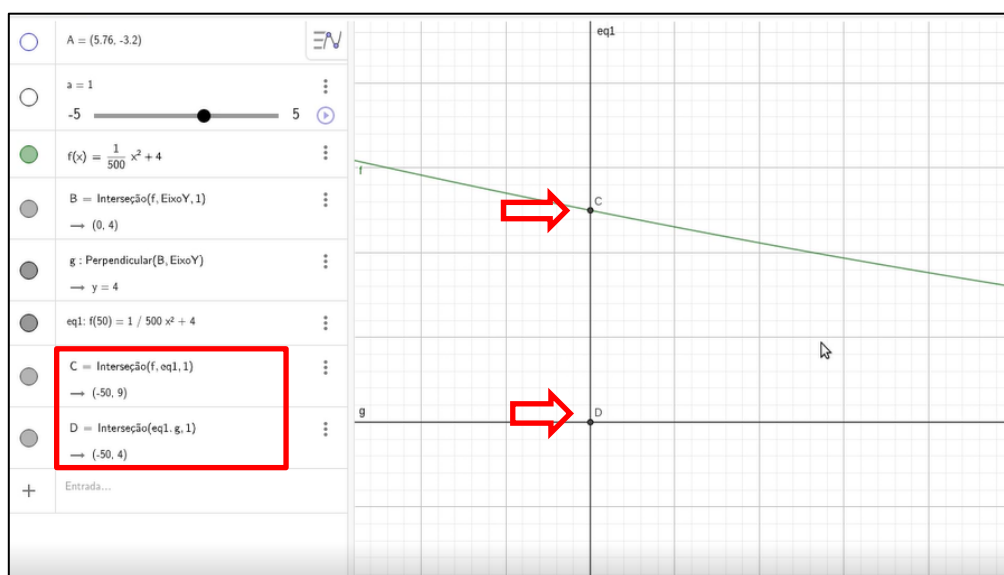


Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Note que apareceram valores aproximados $(-50,19; 9,04)$. Então, por meio de *intuições conjecturais*, P8 calculou o valor de $f(-50)$ e obteve o valor 9. Após confirmar sua conjectura, a partir de uma *intuição antecipatória*, P8 editou as configurações do ponto B, inserindo as coordenadas $(-50,9)$. A diferença entre as soluções de P5 e P8 é que P8 não calculou, assim como P5 e os demais, considerando as coordenadas positivas, ou seja, o x no primeiro quadrante. Interpretamos que isso pode ter sido feito intuitivamente, por uma influência do modelo visual da ponte apresentado na questão e da posição dos elementos.

Já o participante P6 iniciou sua construção inserindo o ponto $A(5.76, -3.2)$ no plano. Em seguida criou um controle deslizante a com variação de -5 a 5 e inseriu no campo de entrada a função $f(x) = 1/500x^2 + 4$. Depois, utilizou a ferramenta intersecção entre dois objetos, para calcular o ponto de intersecção do gráfico de $f(x)$ com o eixo y , obtendo o ponto $B(0,4)$ e traçou uma reta perpendicular ao eixo y , passando por B . Em seguida, copiou a função e colocou no campo de entrada, calculando $f(50)$ e obtendo no gráfico uma reta paralela ao eixo y e que passa pelo ponto $(-50,0)$. Por fim, usou a ferramenta intersecção entre dois objetos e descobriu as intersecções representadas pelos pontos C e D :

Figura 61: Validação de P6.

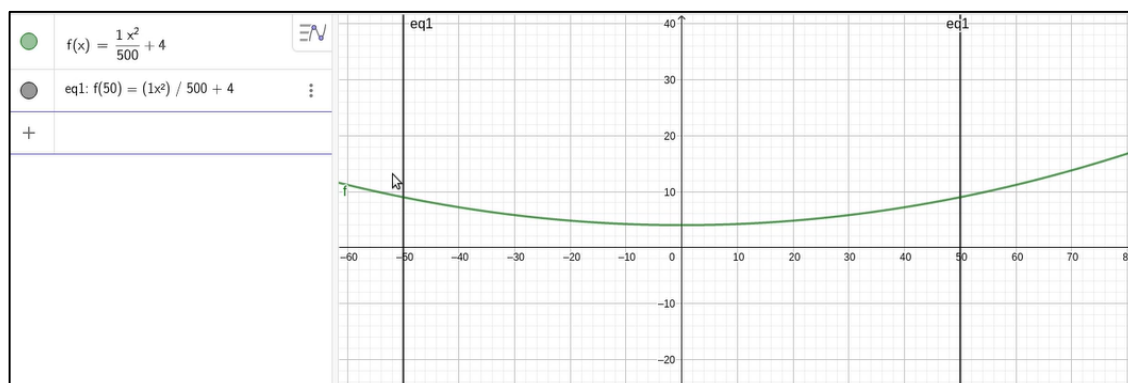


Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Após isso, ele utilizou a ferramenta “segmento com comprimento fixo”, conectando os pontos C e D e obtendo “ $h = \text{Segmento}(C, D)$ à 9”.

O participante P7 iniciou sua construção inserindo a equação $1/500x^2 + 4 = 0$ no campo de entrada, mas notando que o GeoGebra não fornecia o gráfico esperado, inseriu no formato de função $f(x) = 1/500x^2 + 4$. Após longa pausa, P7 calculou $f(50)$, em que surgiram duas retas simétricas e paralelas ao eixo $y(eq1)$, que poderiam representar as torres da ponte, como na Figura 62:

Figura 62: Validação de P7.

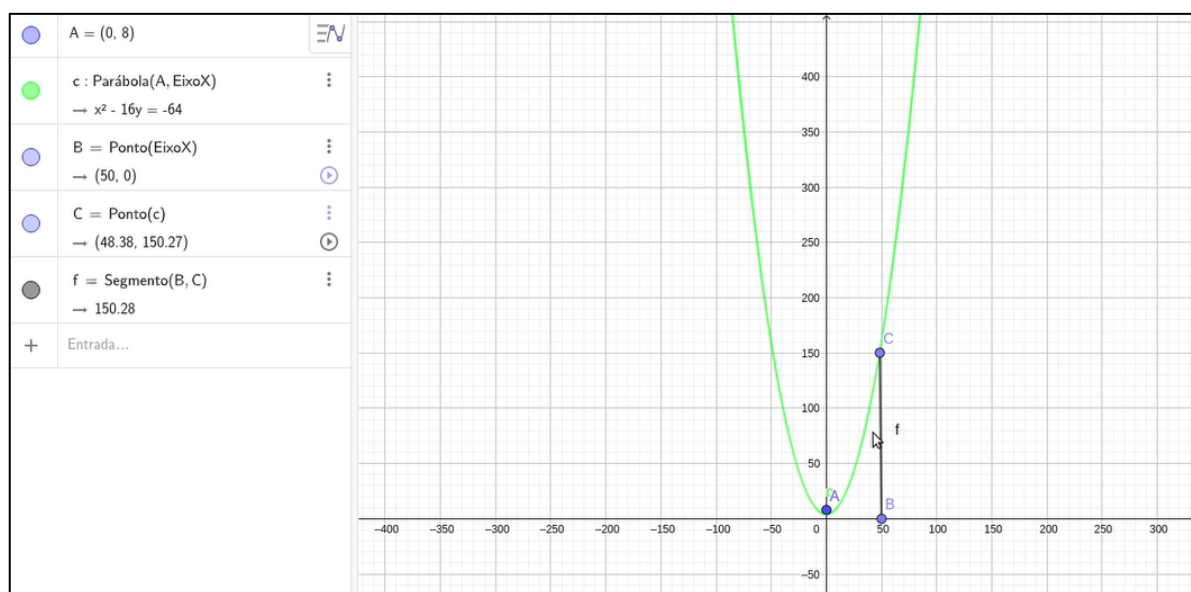


Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Em seguida, P7 usou a ferramenta “intersecção entre dois objetos”, encontrando as coordenadas do ponto de intersecção da reta $eq1$ com a parábola, obtendo $(-50, 9)$. Ao traçar o segmento de A até B , obteve $BA = 9$.

Diferentemente dos colegas, P2 iniciou a resolução da situação didática diretamente no GeoGebra, sem utilizar inicialmente anotações em papel e lápis. Posteriormente, à medida que informações relevantes eram reveladas na construção, a partir de *intuições conjecturais* ele desenvolvia a suposta solução da situação. Isto o permitiu uma maior exploração do *software*, conhecendo ferramentas e recursos. Várias foram suas tentativas e erros, mas em todo o percurso P2 tentou utilizar a visão da Geometria Analítica para resolver a situação didática, o que nos chamou atenção. Uma de suas tentativas (sem sucesso) pode ser vista na Figura 63:

Figura 63: Validação de P2 – parte 1

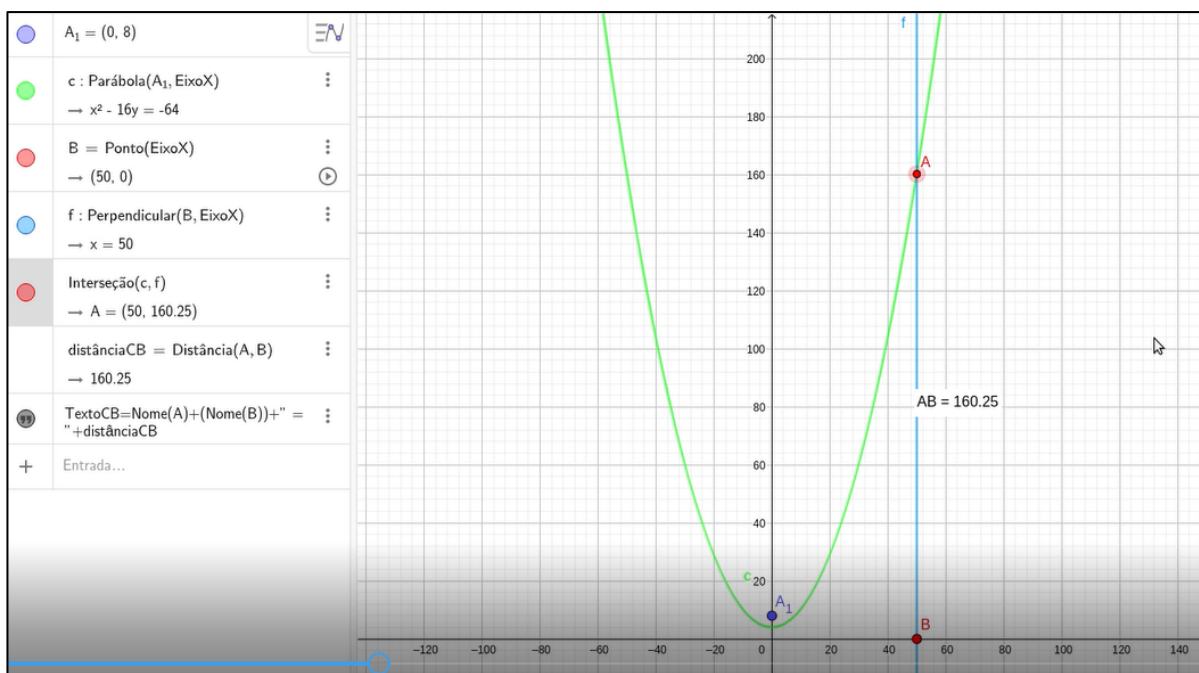


Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Na Figura 63, veja que P2 criou uma parábola com $A(0,8)$ como vértice e tentou criar uma aproximação do que seria o comprimento do elemento de sustentação BA , utilizando a ferramenta “segmento”, como solicitado na situação didática, considerando $x = 50$ e y uma ordenada de um ponto pertencente à parábola. Como a aproximação não funcionou, criou uma reta perpendicular ao eixo x , passando por $x = 50$ e marcou sua intersecção com a parábola.

Note que seu percurso para a *validação*, apesar de parecidos em alguns aspectos com os dos outros participantes, não apresentou o resultado esperado. Esta solução é inadequada, pois a equação utilizada não satisfaz a questão. Neste caso, P2 desconsiderou em seu cálculo o valor do parâmetro p (ou o a da função quadrática). Com efeito, a primeira solução esquematizada por P2 pode ser vista na Figura 64, retirada do registro de vídeo da pesquisa:

Figura 64: Validação de P2 – parte 2.



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Observe na Figura 64 que ele encontrou um valor $AB = 160,25$. Ao ouvir os momentos de *formulação* dos colegas, percebeu que algo estava incoerente em sua solução e chamou a pesquisadora para trocar ideias. Ele não compreendia qual era o seu erro. Então ele foi instigado pela pesquisadora acerca da sua construção. Ela solicitou a P2 que testasse os dados da questão na sua construção e observasse o que aconteceria. Então, ele entendeu que se a equação fosse realmente aquela, a solução estaria certa; caso contrário, ele deveria procurar a equação correta e corrigir a solução.

Após pausa, P2 criou os pontos dados pela questão $(-100,24)$, $(100,24)$ e $(0,4)$ e tentou traçar uma parábola passando por estes pontos, considerando $(0,4)$ como seu vértice e usando a ferramenta “parábola”, mas também sem sucesso. Outra tentativa falha ocorreu quando P2 escolheu a ferramenta “semicírculo” e os pontos $(-100,24)$ e $(100,24)$, pois não havia como o ponto $(0,4)$ pertencer à curva. Sobre a questão do erro com base intuitiva, Fischbein (1987a, p. 12) explica que:

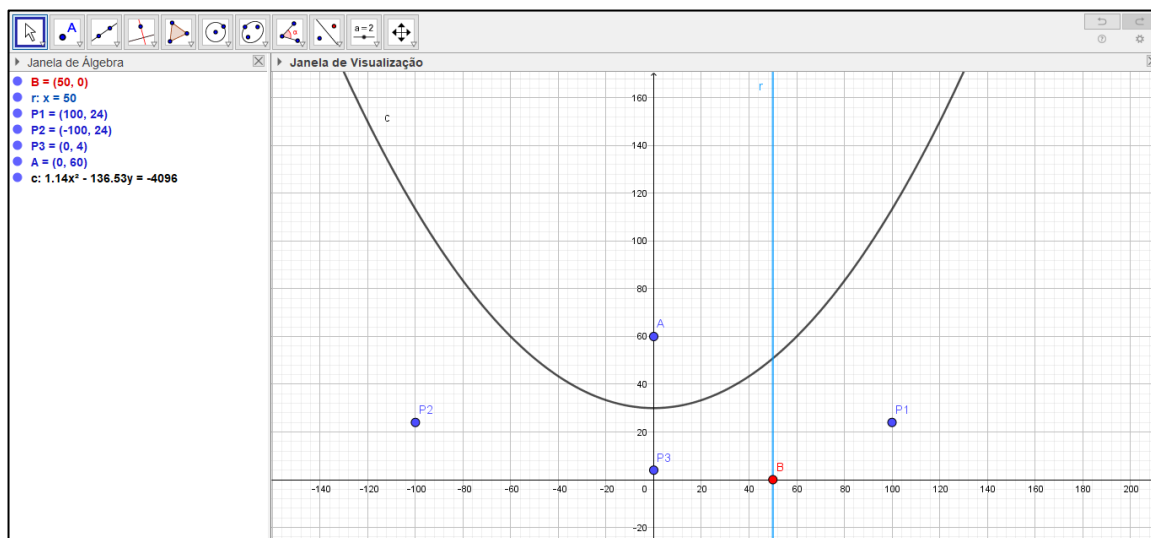
[...] intuition remains a potential source of error because it does not represent a simple duplicate of practically given conditions. Its role is to offer behaviorally meaningful representations, internally structured, of intrinsic credibility, even if these qualities do not, in fact, exist in the given situation. It is highly possible that the process of rendering intuitive will produce a distorted representation of the original reality and the predictions made could be totally or partially wrong. (FISCHBEIN, 1987a, p. 12)³⁰.

Conforme Fischbein (1987a), no decorrer de nosso raciocínio matemático, entre tentativas e erros, por vezes confiamos em representações e ideias subjetivas, como certas e coerentes, que de certo modo mantém o processo de raciocínio funcionando frutiferamente. Entretanto, é importante compreender os raciocínios que não chegam à solução de problemas e, especialmente, sobre as razões pelas quais estas soluções não são alcançadas.

Desta forma, o participante P2, apesar das mais variadas tentativas, não conseguiu concluir a situação didática e não apresentou solução final apropriada ao que foi proposto. Notamos que ele se apoiou apenas nos pontos dados no esquema da questão, mas não verificou a viabilidade do valor do parâmetro p e do foco, tendo dificuldades em concluir a situação proposta. Sua construção final foi (Figura 65):

³⁰ [...] a intuição continua sendo uma fonte potencial de erro porque não representa uma simples duplicata de condições praticamente dadas. Seu papel é oferecer representações comportamentalmente significativas, estruturadas internamente, de credibilidade intrínseca, mesmo que essas qualidades não existam, de fato, na situação dada. É altamente possível que o processo de tornar intuitivo produza uma representação distorcida da realidade original e as previsões feitas possam estar total ou parcialmente erradas. (FISCHBEIN, 1987a, p. 12).

Figura 65: Validação de P2 – parte 3.



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Por fim, o participante P3 elaborou uma formulação/solução parcialmente correta, com uso da Geometria Analítica, mas apresentou apenas registro escrito. Ele não registrou em vídeo a construção no GeoGebra e não salvou o arquivo .ggb, descumprindo o que foi estabelecido no contrato didático. No entanto, afirmou que o valor de BA era 9 e disse que “com a equação dá para calcular de cabeça”.

Entendemos que P3 elaborou um esquema mental com base no raciocínio estruturado por ele mediante os elementos disponíveis no problema. Fischbein (1999), em outra de suas obras, explica que intuições e esquemas são dois tipos diferentes de categorias cognitivas. Enquanto as intuições caracterizam-se por cognições, especialmente por sua globalidade e pelo sentimento subjetivo de certeza intrínseca ou obviedade, os esquemas mentais são conexões geradas a partir da interpretação e reação mediante a situações. Para Alves (2011, p. 108), este tipo de raciocínio pode ser manifestado com base na *percepção*, enquanto forma de pensamento incitadora e diretamente relacionada ao campo intuitivo:

[...] a percepção é a capacidade cognitiva responsável pela identificação de um objeto ou evento que mantém e desperta, por algumas frações de segundo, nossa atenção. Por outro lado, vale diferenciá-lo do que é fruto de uma interação casual e não é percebido do que de fato é percebido e, por um mecanismo pouco explicado na literatura, desperta nosso interesse. (ALVES, 2011, p. 108).

Neste caso, entendemos que há uma relação entre a percepção, os esquemas mentais e sua consequente influência na promoção e manifestação do raciocínio intuitivo por parte do sujeito no decorrer da solução de problemas. Contudo, à medida que se desenvolve um

raciocínio tácito, instigado por nossa percepção, mas este não apresenta uma estrutura lógico-inferencial, significa então que foi mobilizado um raciocínio intuitivo (ALVES, 2011).

Com relação à *situação de institucionalização*, a pesquisadora de fato apresentou a definição de Venturi (2003) como planejado, mencionando a estrutura da equação da parábola com vértice fora da origem e eixo de simetria paralelo a um dos eixos coordenados. Além da discussão em conjunto, durante esta etapa a pesquisadora propôs um modelo de solução do ponto de vista da Geometria Analítica para situação, como mostra a Figura 66:

Figura 66: Modelo de solução complementar à situação de institucionalização.

The image shows a whiteboard with handwritten mathematical work. On the left, the vertex is given as $V(0, 4)$. A point $P(100, 24)$ is noted as belonging to the parabola. The general equation $(x - h)^2 = 2p(y - k)$ is written, followed by the specific equation $(x - 0)^2 = 2p(y - 4)$. This simplifies to $x^2 = 2p(y - 4)$. Substituting the point P , $100^2 = 2p(24 - 4)$, which leads to $10000 = 2p \cdot 20$, then $40p = 10000$, and finally $p = \frac{10000}{40} = 250$. To the right, the parameter a is defined as $a = 2p$, leading to $a = 2 \cdot 250 = 500$. The equation then becomes $x^2 = 500(y - 4)$, which expands to $x^2 = 500y - 2000$. Solving for y , $500y = x^2 + 2000$, $y = \frac{x^2}{500} + 4$. A diagram on the right shows a parabola opening upwards with vertex V at $(0, 4)$ and focus F at $(0, 9)$. The distance between them is labeled $2p = a$. A point P is on the parabola, and a horizontal line segment BA is drawn from P to the y-axis at $y = 9$. The calculation $\frac{BA}{500} \rightarrow P(50, y)$ is shown, leading to $\frac{50^2}{500} + 4 = 9$.

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Após a institucionalização e no decorrer deste modelo de solução, os participantes conseguiram mostrar associações entre a equação da parábola do ponto de vista da Geometria Analítica e a função quadrática, apontando a lacuna deste estudo no decorrer de sua formação, corroborando de algum modo o que foi apontado em nossa análise preliminar e conjecturado nas hipóteses e variáveis didáticas mencionadas na análise *a priori* desta pesquisa.

5.3.3 Experimentação da Situação Didática III

Esta situação didática propõe a construção de uma parábola e identificação de sua equação a partir de um objeto do nosso cotidiano, que é o farol de um automóvel. Contudo, o enunciado não fornece dados explícitos como foco, vértice e diretriz. Neste caso, a questão teve a intenção de observar se os professores em formação fariam associações entre a

parábola do ponto de vista analítico, algébrico e geométrico, com a possibilidade de construí-la utilizando conhecimentos prévios sobre Geometria Plana.

Na *situação de ação*, os participantes após leitura da questão proposta, comentaram, de fato, sobre a não existência de elementos previamente estabelecidos para determinar uma equação, salientando que isto não era algo comum em sua trajetória como estudante, o que condiz com pesquisas apontadas em nossa análise preliminar, como Cerqueira (2015), Macedo (2015), Siqueira (2016), Bermúdez e Mesa (2018), entre outros trabalhos.

As falas de P1 e P7, que corroboram tal observação, foram captadas do registro de áudio do encontro:

professora, eu achei interessante esse problema do ponto de vista que a gente que é da matemática tem o hábito de equacionar tudo, e esse problema sem nenhum dado deixa a gente livre. Eu mesmo nunca tinha parado para resolver questões desse tipo (P1).

Eu nunca tinha visto um problema assim, sem equação, é mais difícil porque depende da gente (P7). (TR03, 2022).

Observe na fala de P1 a afirmação que diz os matemáticos têm “o hábito de equacionar”. Interpretando esta fala, entendemos que há uma visão de que, enquanto professores, utilizamos processos que reduzem os problemas a pontos mais específicos, simplificando situações complexas a partir de sua conversão em expressões algébricas. E nesse encadeamento de ideias, podem ocorrer lacunas que geram obstáculos na aprendizagem.

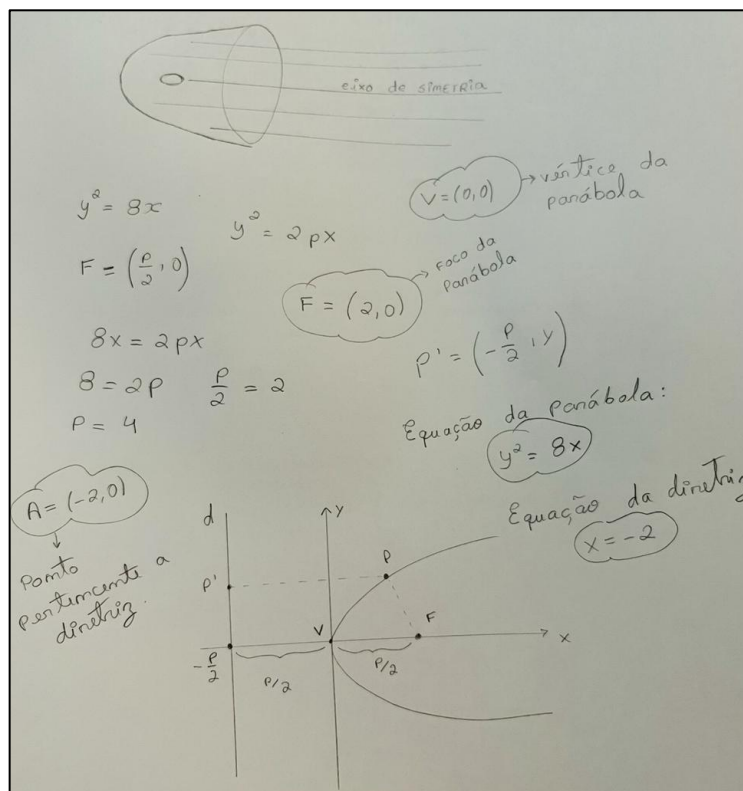
Nessa perspectiva, Brousseau (1989) explica que os erros observados nos estudantes podem ser agrupados em torno de concepções muito específicas ou, ao contrário, muito gerais. Além disso, o autor ainda aponta que os obstáculos na aprendizagem devem ser considerados de forma conjunta, articulando-os e analisando a relação existente entre eles. Sobre tais obstáculos, “vários podem coexistir, se contradizer e sucessivamente suplantar uns aos outros” (BROUSSEAU, 1989, p. 49).

Ainda no decorrer da *situação de ação*, no geral, os participantes inverteram a ordem de utilização dos ambientes, seguindo a sequência “GeoGebra – lápis e papel” para estabelecer suas conjecturas e observações. Exceto um deles, o participante P2, que anunciou de imediato “com base no que a gente viu nos encontros passados, eu tentei criar um foco que tivesse numa posição conveniente, pra poder fazer a parábola” (TR03, 2022), mas isso rabiscando em papel e imaginando como poderia resolver a situação dada.

Observamos que P2, apesar de todas as dificuldades enfrentadas, foi o único participante a buscar sua solução com o uso da equação da parábola pelo prisma da Geometria

Analítica, em um esforço para compreendê-la e encontrar uma solução. Suas conjecturas e ideias foram registradas como uma etapa de *formulação*, representada na Figura 67:

Figura 67: SD3 - Formulação de P2.



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Na *situação de formulação* percebemos que, mesmo após as discussões ocorridas nos encontros anteriores, ainda há uma visão muito arraigada no que diz respeito à relação entre a forma gráfica da parábola e a função do 2º grau. Tanto que, de forma irrefletida, sem analisar ou conjecturar hipóteses, surgiu de imediato como uma *intuição afirmativa* a ideia de se buscar os coeficientes da função quadrática. Observe o diálogo:

- No caso eu vou ter que achar os coeficientes pra fazer essa parábola, né? (P7).
- Mas que coeficientes? (pesquisadora).
- O a, o b e o c, né não? [...] Se eu considerar o x como eixo de simetria e colocar o y = 0 pode dar certo (P7).
- Mas essa parábola, nessa posição, vai ter a mesma estrutura de uma função quadrática? (pesquisadora).
- (momento de silêncio)
- É professora, acho que vai ser diferente, vai ser a mesma coisa não (P7).
- Ei, eu acho que aqui ao invés de y em função de x, tem que ser x em função de y, só pode ser assim pra posição da parábola ficar pro lado (P6). (TR03, 2022).

Outra fala que reforça a visão da parábola limitada ao vínculo *parábola – função quadrática*, ocorreu entre P5 e P6, quando estes mencionaram a possibilidade de elaborar uma função quadrática e rotacionar/transladar seu gráfico para que atenda às condições da questão:

– *Dá pra fazer essa parábola usando aquele negócio de translação, rotação e reflexão?* (P6)

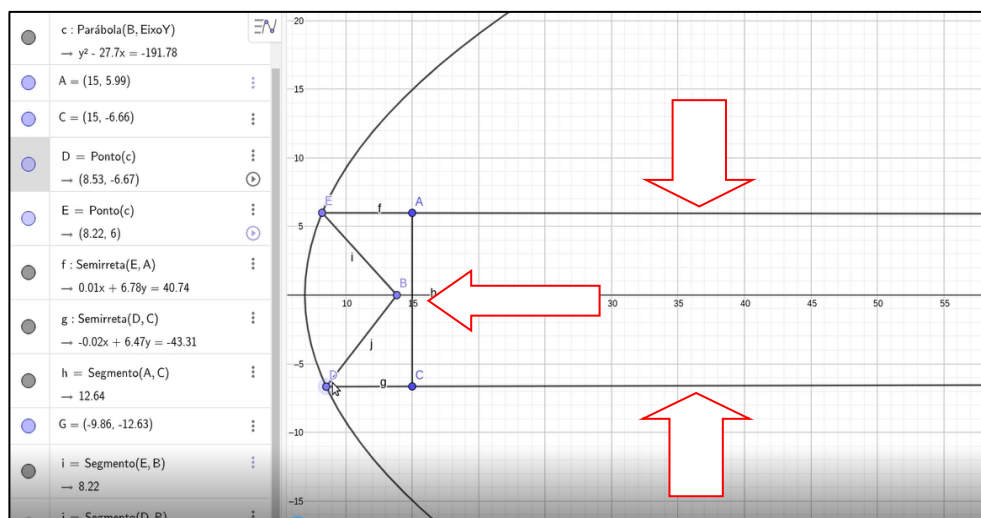
– *Eu acho que dá, só não sei como ainda...* (P5). (TR03, 2022).

Como aponta Fischbein (1982), as estruturas lógicas formais do pensamento e a diversidade de esquemas mentais, até os operacionais, são apenas instrumentos com potencialidades ou possibilidades, mas não necessariamente garantem que o indivíduo alcance uma solução clara a partir disso. O autor exemplifica ainda que “o fato de conhecer as quatro operações aritméticas básicas não capacita a criança a resolver problemas aritméticos. É claro que, para resolver uma questão padrão, a criança recorre automaticamente a soluções padrão” (FISCHBEIN, 1982, p. 13). Dessa maneira, entendemos que as ideias iniciais, naturalmente geradas por um processo intuitivo, para que produzam um resultado matemático adequado necessitam de conjecturas, associações e sistematização do pensamento.

Nos parágrafos que se seguem trazemos uma descrição das etapas de *formulação e validação* dos demais participantes no percurso da TSD, com observações sobre suas manifestações intuitivas no decorrer do uso do GeoGebra para esta situação didática.

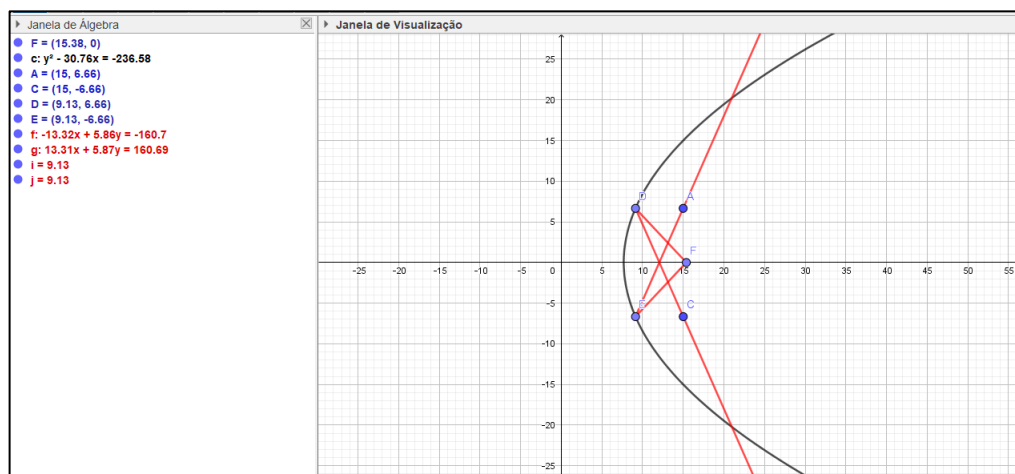
O participante P1 iniciou as etapas de sua construção criando um ponto arbitrário sobre o eixo x , considerando-o como eixo de simetria e o eixo y como reta diretriz. Após isso, entendemos que P1 mostrou uma *intuição conjectural* ao construir retas paralelas ao eixo de simetria da parábola, como tentativa de representar o feixe de luzes do farol apresentado na questão. Entretanto, não satisfeito com o resultado observado, descartou as retas e construiu segmentos de reta, com pontos não fixos, para que a manipulação da curva fosse mais viável.

Observamos que grande parte do tempo de construção no GeoGebra foi usado na tentativa de construir os raios luminosos e seu reflexo, representados pelas retas paralelas e os segmentos BE e BD , passando pelo bulbo da lâmpada (ponto B):

Figura 68: Formulação de P1 para os raios luminosos

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Após ajustes, como ocultar alguns segmentos e teoricamente prolongar os feixes luminosos, sua construção final apresentada como *validação* foi (Figura 69):

Figura 69: Construção final de P1.

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

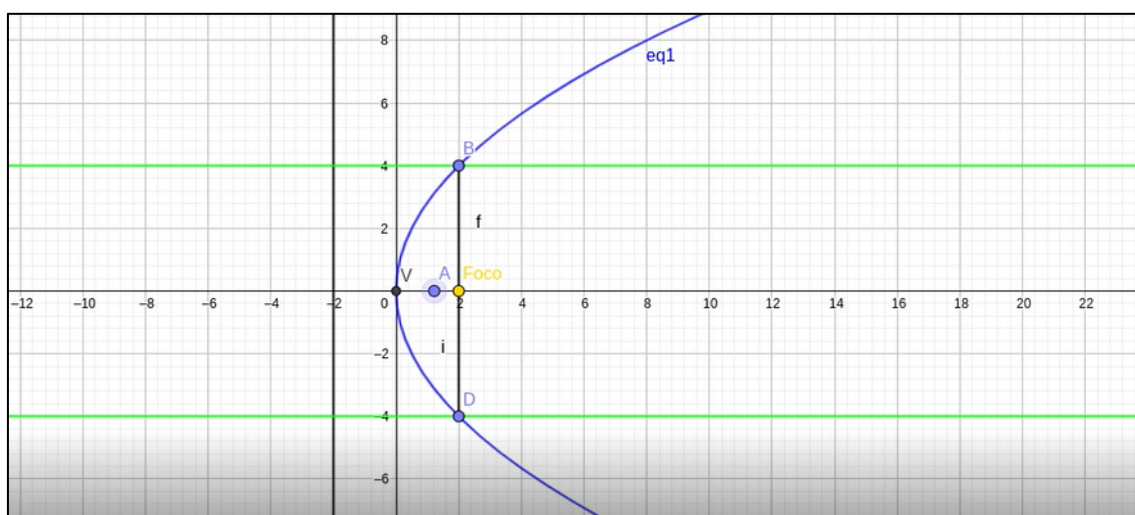
Em Bergson (1911, apud ALVES; BORGES NETO, 2011) duas operações mentais que influenciam o processo intuitivo e suas manifestações são a *percepção* e a *memória*. Entretanto, os autores explicam que o fato de existirem diversos tipos de atividades mentais e consequentemente classificações distintas para os tipos de intuição, que podem ser notadas por pesquisadores/observadores, não há garantia de que as intuições geram a existência um método para se obter conhecimentos seguros e de forma direta. Contudo, entendemos que os modelos de raciocínio intuitivo influenciam as distintas formas de aprendizagem destes

conhecimentos. Podemos notar que a percepção proporcionada pelo GeoGebra, neste caso, foi capaz de estimular os participantes a uma tomada de posição de natureza intuitiva, influenciando o percurso do seu raciocínio matemático.

O participante P2, que a princípio seguiu um percurso distinto dos demais (primeiro o lápis e papel, depois o GeoGebra), observou o fato de que a questão não fornecia equações prévias, em sua *situação de formulação* partiu do que interpretamos como uma *intuição conjectural* e criou uma equação que convenientemente gerasse uma parábola voltada para a direita. Assim como P1, ele criou a parábola considerando o eixo x como o eixo de simetria. Entretanto, posicionou de forma ajustada o vértice na origem do sistema e foco sendo um ponto F sobre o eixo x , simulando a imagem proposta na questão. A equação criada foi $y^2 = 8x$ e, em seguida, ele estabeleceu seu foco em $F(2,0)$ e diretriz $f: x = -2$.

Após isso, na busca por esboçar os feixes luminosos, P2 esboçou dois segmentos de reta: o primeiro conectava o foco a um ponto pertencente à curva (segmento $BFoco$) e o segundo, ligava o foco a um outro ponto também pertencente à curva e simétrico ao primeiro (segmento $DFoco$). Por estes pontos simétricos, foram traçadas retas perpendiculares à diretriz e paralelas entre si (em verde), como mostra a Figura 70:

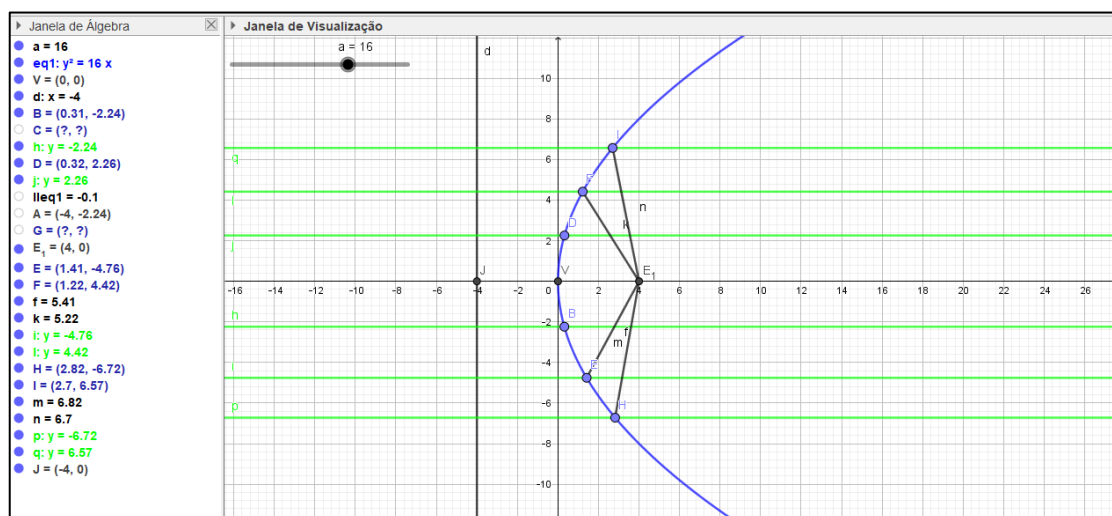
Figura 70: Formulação de P2 no GeoGebra.



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Após tentativas de vincular o foco às retas paralelas, P2 criou um controle deslizante (a) e reescreveu a equação inicial como $y^2 = ax$. Ao repetir o procedimento com outros pontos simétricos pertencentes à curva, sua construção final foi (Figura 71):

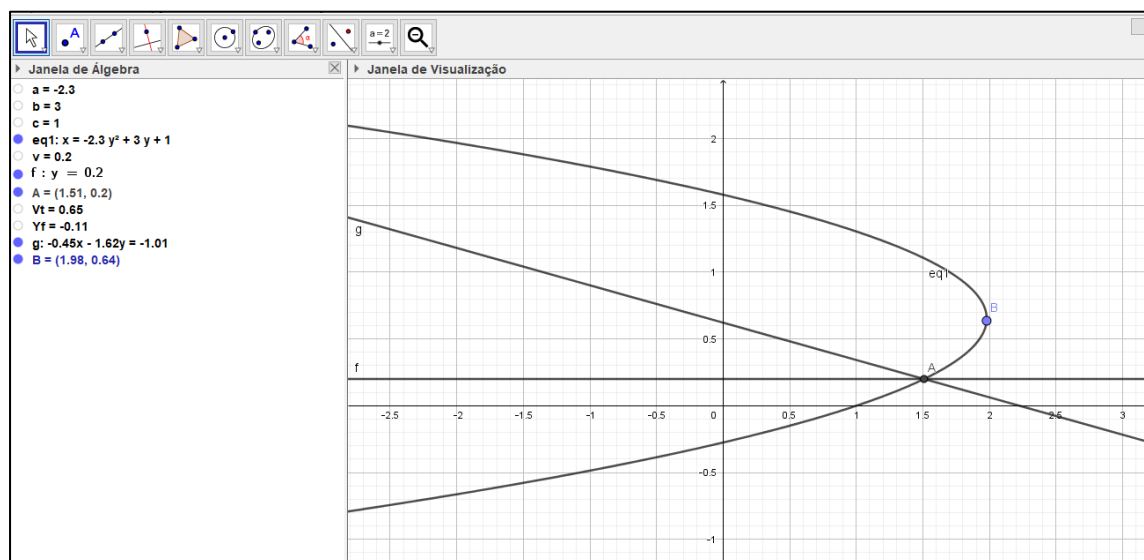
Figura 71: Validação de P2.



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Com relação ao participante P3, este usou uma estratégia diferentes dos demais. Inicialmente, para sua *situação de formulação* P3 criou três controles deslizantes a , b e c e, em seguida, inseriu na caixa de entrada do GeoGebra uma equação com x em função de y , da forma $x = ay + by + c^2$. Estabeleceu o vértice B da parábola e uma reta que intersecta a parábola no ponto A . A partir disso, ele criou uma função constante f e uma função afim g usando os pontos do vértice e o ponto de interseção da função f com a parábola, para simular os raios luminosos. Contudo, ao movimentar os controles deslizantes observamos que a simulação dos feixes luminosos não ocorre de fato (Figura 72):

Figura 72: Formulação de P3 no GeoGebra.



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Percebemos que a *validação* da situação didática no *software* foi apresentada de forma parcial. Nesta etapa, além da construção .ggb, P3 apresentou um registro escrito (Figura 73):

Figura 73: Validação de P3 – registro escrito

Handwritten mathematical work showing the derivation of a parabola equation and its focus. The work is divided into two main sections.

Top Section:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

$$p = \frac{(y - y_0)^2}{2(x - x_0)} = \frac{(0 - 100)^2}{2(4 - 24)} = \frac{100^2}{-40} = -250$$

Bottom Section:

Left side:

$$x_F = x_v + \frac{p}{2}$$

$$y_F = y_v = -\frac{p}{2} = \frac{5}{8}$$

Focus:

$$p = \left| \frac{1}{2a} \right| =$$

Right side:

Para $y = ax^2 + bx + c$
O foco:

$$p = \frac{1}{2a} \quad x_0 = \frac{-b}{2a}$$

$$p = \frac{1}{2(-3)} = -\frac{1}{6}$$

$$y_F = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

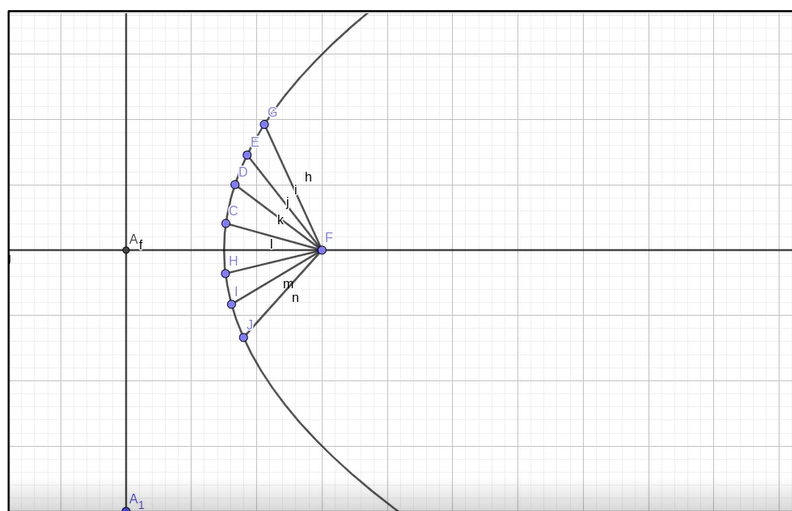
Ex: $x = -4y^2 + 3y + 1$

OK!

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

O participante P4 iniciou sua *situação de formulação* no GeoGebra criando um segmento de reta, depois a mediatriz desse segmento, um ponto sobre essa mediatriz, que ele chamou de F e considerou como o foco. A partir disso, ele usou a ferramenta parábola, clicando no ponto F e no segmento criado. Em seguida criou pontos arbitrários sobre a curva e segmentos ligando estes pontos ao foco, como mostra a Figura 74:

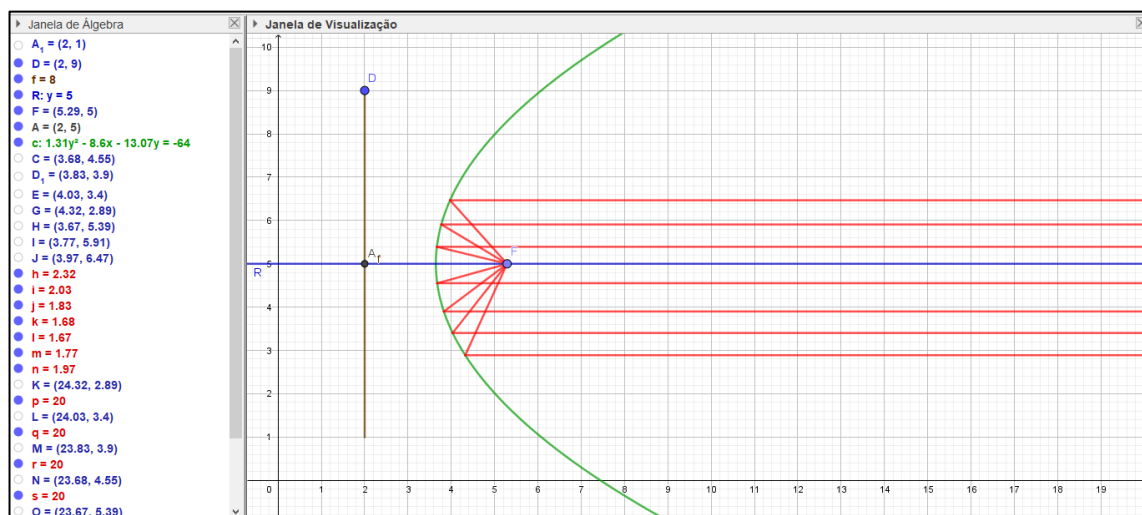
Figura 74: Formulação de P4



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

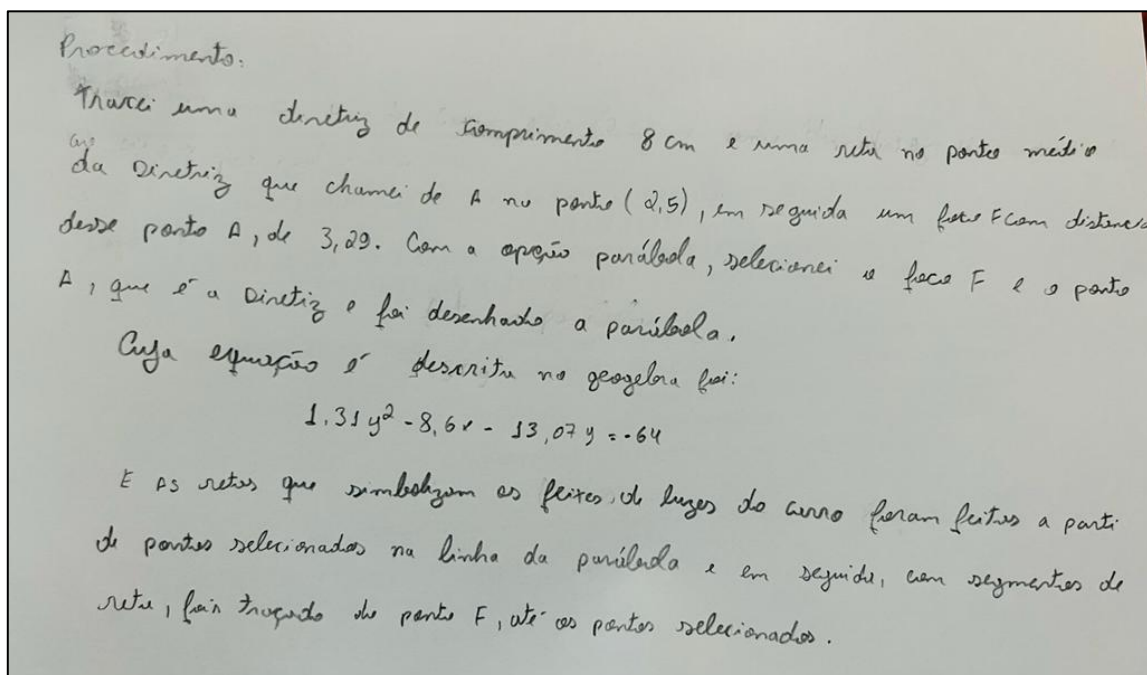
Após esta etapa, P4 criou segmentos de reta com comprimento fixo igual a 20 partindo de cada um dos pontos sobre a curva e perpendiculares ao eixo de simetria da parábola. Em seguida, realizou ajustes de natureza estética na construção, como esconder rótulos, objetos e mudança de cores. Sua construção final (Figura 75) e uma argumentação em um registro escrito (Figura 76) foram apresentados como *validação*:

Figura 75: Validação de P4 – registro no GeoGebra.



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Figura 76: Validação de P4 – registro escrito



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

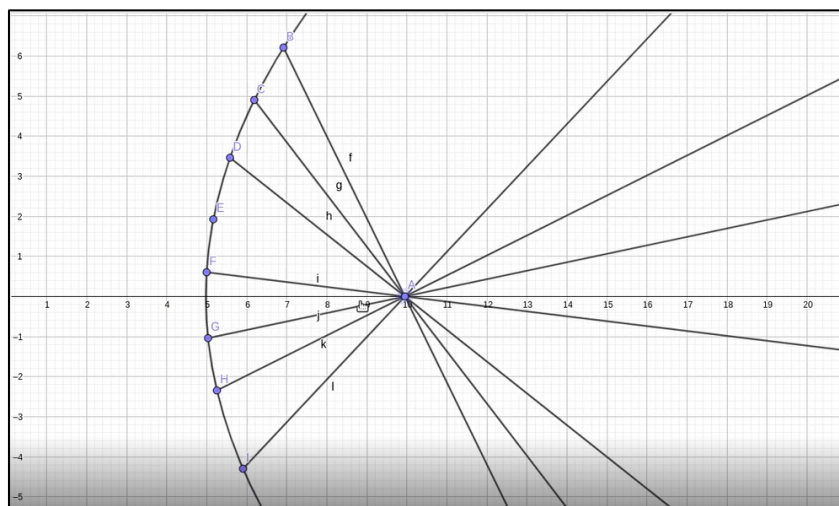
Em seu registro escrito como visto na Figura 76, P4 busca descrever seus passos de forma sequenciada. Esta descrição foi apresentada por ele juntamente à construção feita no GeoGebra na *situação de validação* para os demais presentes. Entendemos que as intuições manifestadas por P4 oscilaram entre *intuições afirmativas* e *conjecturais*, pois na maior parte do seu percurso observado no registro em vídeo, o participante demonstrou ter segurança do que estava fazendo, como um aparente sentimento de certeza. Em poucas ocasiões ele fez e refez suas tentativas.

Apesar de alguns autores interpretarem que um raciocínio organizado e sistematizado já não faz parte do domínio intuitivo, mas sim de um conhecimento consolidado (GRIZE, 1993; ALVES; BORGES NETO, 2011; PRÍNCIPE, 2015), entendemos que os modelos intuitivos podem ser produzidos de forma deliberada ou instintivamente.

Fischbein (1987a, 1987b) explica que em algumas ocasiões no decurso de um raciocínio, as estratégias de busca e solução sofrem influências de modelos que funcionam implicitamente, que estão além do controle consciente direto. “Tais modelos tácitos, produzidos automaticamente, frequentemente determinam a construção de estruturas intuitivas” (FISCHBEIN, 1987a, p. 203).

O participante P6 percorreu um trajeto com características similares aos demais colegas. Iniciou sua construção, assim como P1 e P2, manifestando o que aparenta ser uma *intuição afirmativa*: criou um ponto sobre o eixo x e considerou-o como o foco da parábola e manteve o eixo y como sua diretriz. E assim como P4, criou inicialmente pontos arbitrários sobre a curva. Então, no que entendemos como *intuições conjecturais*, construiu semirretas que partiam destes pontos e passavam pelo foco da parábola (Figura 77):

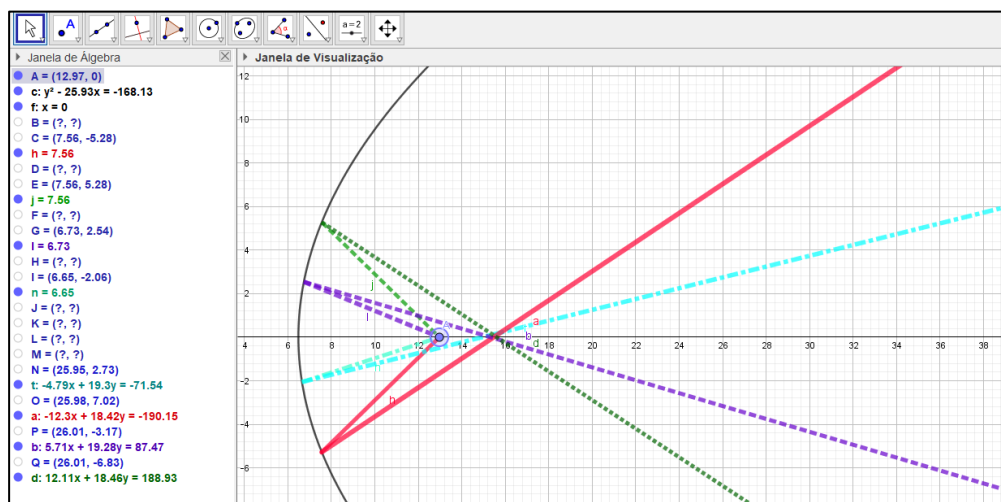
Figura 77: Formulação de P6 – parte 1.



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Após perceber que suas conjecturas não apresentaram o resultado desejado, P6 desfez as retas criadas inicialmente e manteve os pontos sobre a curva. Em seguida, passou a criar pontos arbitrários internos à parábola e traçar retas entre estes pontos e os já existentes sobre a curva, em uma segunda tentativa. Sua terceira tentativa foi, a partir dos pontos sobre a curva, traçar semirretas, como na Figura 78:

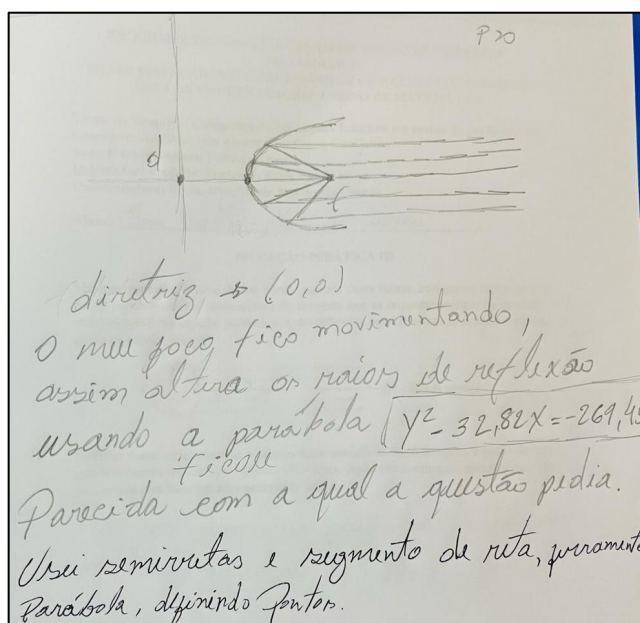
Figura 78: Formulação de P6 – parte 2.



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Após a construção, P6 esboçou um resumo em forma de registro escrito, apresentado na *situação de validação* para os demais colegas, como mostra a Figura 79:

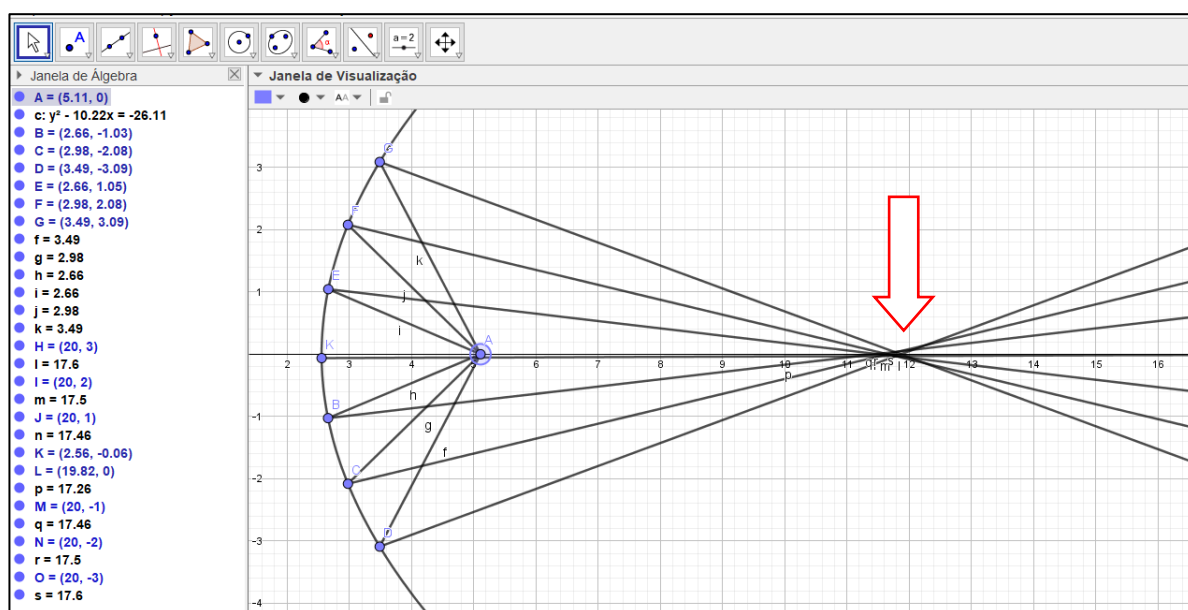
Figura 79: Validação de P6 – registro escrito.



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Dando continuidade às descrições desta experimentação, temos que, de modo análogo a P1, P2 e P6, o participante P7 iniciou sua construção criando um ponto sobre o eixo x e, utilizando a ferramenta parábola, considerou o eixo y como reta diretriz. Após esta etapa, construiu pontos arbitrários sobre a curva e não mostrou como concluiu a construção no registro de vídeo, o que não nos permite analisar de forma mais profunda suas manifestações intuitivas e construção do raciocínio matemático. Entretanto, temos registro de sua construção final no GeoGebra, ilustrada na Figura 80:

Figura 80: Validação de P6 – registro no GeoGebra.



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Há similaridade parcial dessa construção (Figura 80) com as construções dos demais, exceto pelo encontro das semirretas (ver seta em cor vermelha). Contudo, em decorrência da falta de registros de vídeo e escrito, a análise da manifestação das categorias intuitivas foram inviabilizadas. Outros participantes (P5 e P8) também não forneceram dados o suficiente para análise nesta situação didática em particular.

Na *situação de institucionalização*, a pesquisadora fez um compilado de todas as soluções apresentadas pelos presentes, culminando na definição de Venturi (2003), que versa sobre a equação da parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo x e apresentando uma possibilidade de sugestão no GeoGebra, como mostrada na análise *a priori*.

5.3.4 Experimentação da Situação Didática IV

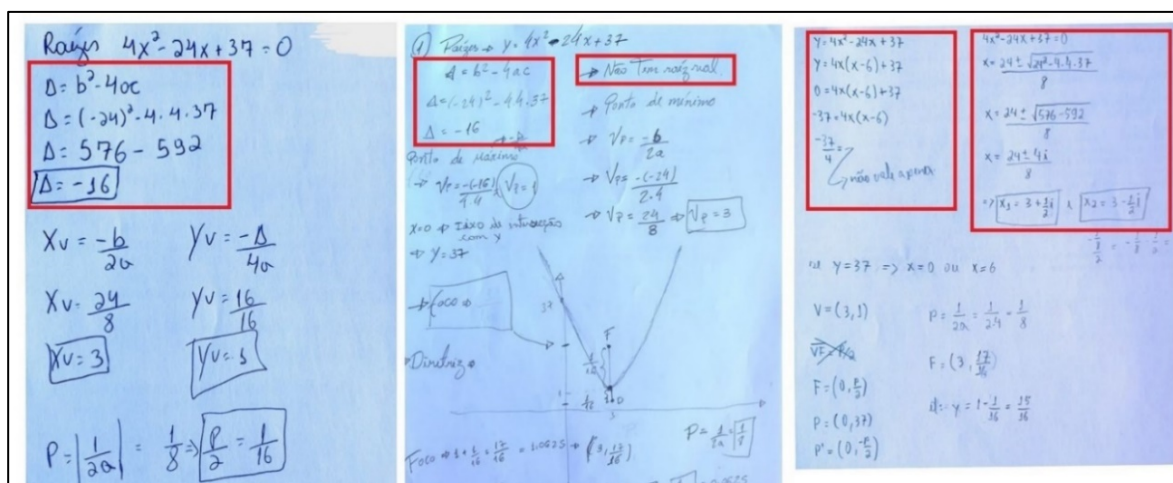
Esta situação didática apresenta uma equação da parábola em sua forma explícita $y = ax^2 + bx + c$ e solicita aos professores em formação que apresentem seus principais elementos. Em uma solução padrão, seria esperado que os sujeitos mostrassem, a partir da equação dada, as coordenadas do foco, do vértice e a equação da reta diretriz. Contudo, cada um dos sujeitos apresentou um modelo distinto de solução para tal.

Na *situação de ação* todos os sujeitos esboçaram no ambiente lápis e papel as informações consideradas pertinentes à solução. Entretanto, alguns deles tentaram de imediato (*intuição afirmativa*) calcular as raízes da equação dada, considerando-a pelo prisma das funções quadráticas, mesmo após as discussões ocorridas nos encontros anteriores acerca dos elementos que compõem uma parábola. Isto foi claramente verbalizado nos registros de áudio da pesquisa, no momento da ação, em um diálogo entre os sujeitos e a pesquisadora:

- Eu já posso ir destacando os elementos principais como os coeficientes a , b e c ? (P7)
- O que você considera de fato como elemento principal da parábola? (pesquisadora)
- O vértice, as raízes e o a , o b e o c (P7)
- Aqui, é fácil, eu vou destacar tudo que eu achar da parábola e vou fazer o gráfico dela (P6)
- O que você consegue lembrar disso daí? (pesquisadora para P8)
- Das raízes (P8)
- A equação desse jeito aqui, eu não lembro como eu acho o foco (P1)
- Eu tô achando o delta e vou colocar aqui no gráfico o vértice, depois as raízes, depois vou procurar as outras coisas (P6). (TR04, 2022).

Note que os sujeitos apresentaram de imediato uma *intuição afirmativa*, declarando como elementos principais de uma parábola as suas raízes (P8) e seus coeficientes (P6, P7 e P8), com ênfase no ponto de vista da função quadrática. Apenas P1 mencionou o foco, mas disse que não sabia como encontrá-lo. Nos registros escritos dos sujeitos P1, P6 e P7, destacados na Figura 81, também temos uma clara demonstração deste ponto de vista:

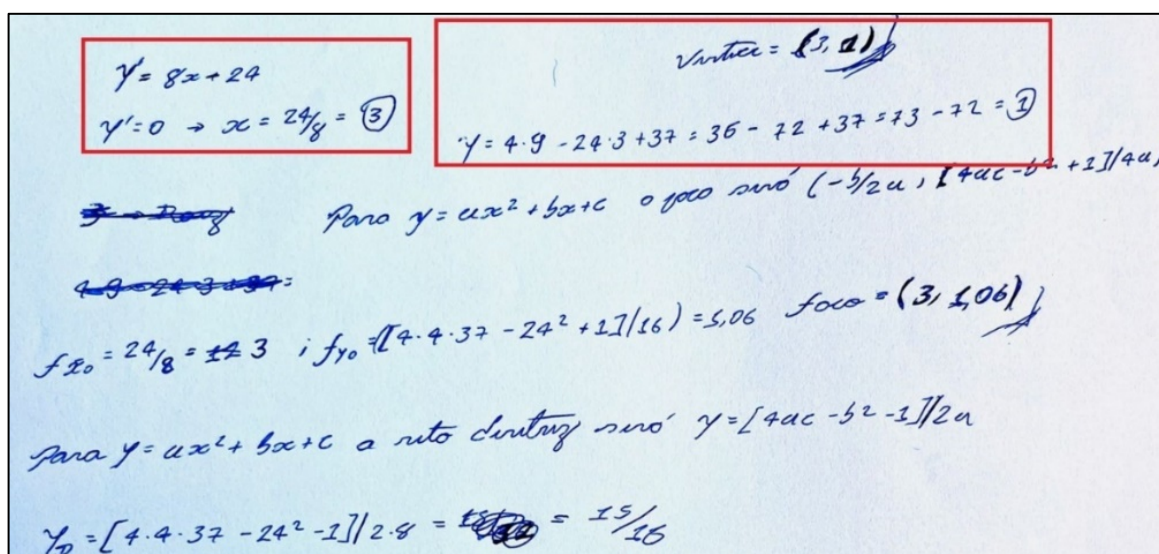
Figura 81: Situação de Ação - P1, P6 e P7, da direita para a esquerda, respectivamente.



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Note ainda na Figura 81 que os sujeitos P6 e P7, após tentativa de calcular as raízes (e possivelmente almejando encontrar raízes exatas), seguiram de imediato para a busca das coordenadas do vértice da parábola, ainda em uma manifestação de *intuições afirmativas* provenientes de seus conhecimentos prévios no tópico de funções quadráticas. Os demais sujeitos buscaram o vértice da parábola utilizando as relações $x_v = -\frac{b}{2a}$ e $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$, com exceção de P3, que em uma *intuição conjectural* calculou a derivada de $y = 4x^2 - 24x + 37$, encontrando $y = 8x - 24$ e, ao efetuar $y=0$ obteve $x = 3$. Substituindo na equação inicial para $x = 3$, P3 obteve $y = 1$, o que gerou as coordenadas do vértice em $V(3,1)$. Podemos ver esse registro escrito na Figura 82, na região destacada em vermelho:

Figura 82: Situação de Ação de P3 para o cálculo do vértice.



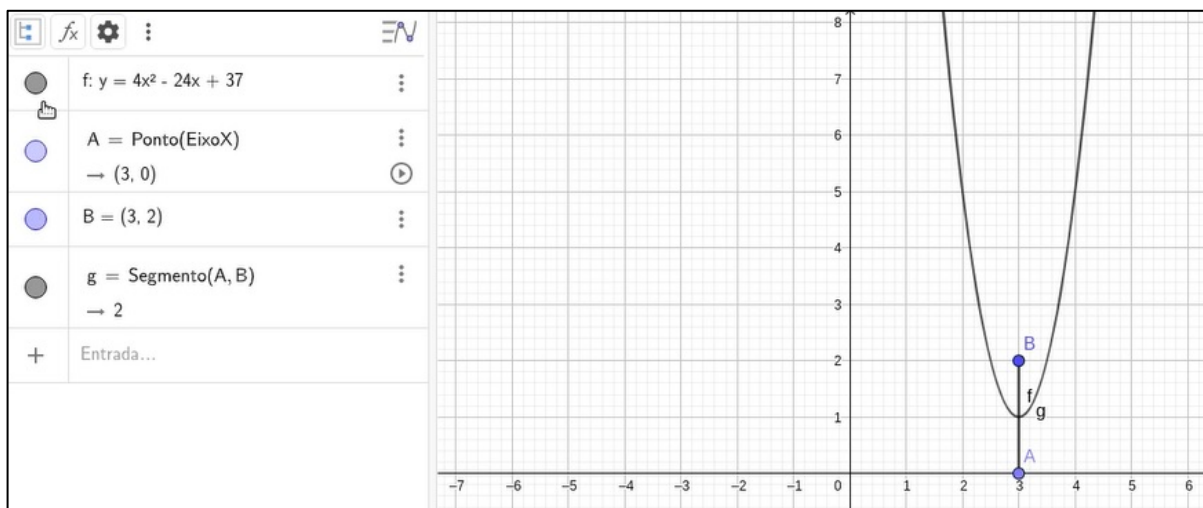
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

No decorrer da *situação de formulação*, os participantes alternaram para o ambiente computacional, inserindo as informações encontradas manualmente no GeoGebra. Nesse sentido, como aponta Siqueira (2016), a tecnologia pode ser usada como ferramenta para estimular os professores em formação na verificação de definições e propriedades, bem como incentivar o levantamento de hipóteses e conjecturas acerca do objeto matemático em questão.

Para compreendermos melhor o percurso que engloba o raciocínio matemático atrelado à intuição, nos parágrafos que se seguem trazemos a descrição dos registros de vídeo da pesquisa e construções .ggb dos sujeitos referentes à esta situação didática.

O participante P1 começou sua *situação de formulação* digitando a função $y = 4x^2 - 24x + 37$ no campo entrada do GeoGebra. Ampliou o gráfico, moveu a tela e passou alguns minutos observando a construção. Em seguida, utilizou a ferramenta “segmento” e criou um segmento ligando um ponto arbitrário que ele considerou como foco e o outro ponto sobre o eixo x, que aparentemente eram equidistantes do que P1 considerou como vértice da parábola. Em seguida, usou a ferramenta “ponto médio”, para descobrir o ponto médio do segmento AB e considerou-o como vértice da parábola, como podemos observar na Figura 83:

Figura 83: Situação de formulação de P1.



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Entendemos que nesta escolha de pontos arbitrária para o foco e o vértice, P1 manifestou uma *intuição conjectural*. Entretanto P1 desconsiderou o fato de que a distância do foco F a um ponto P qualquer da parábola, assim como a distância deste mesmo ponto P até a reta diretriz devem ter a mesma medida, independentemente de onde se localiza o ponto P sobre a curva, o que podemos ver que não ocorre em sua construção inicial (Figura 82). A estrutura conjectural das intuições é geralmente encoberta por sua aparente obviedade e

certeza. “Este é, de fato, o papel fundamental das cognições intuitivas: conferir certeza às ideias extrapoladas” (FISCHBEIN, 1987a, p. 53), o que fez P1 refletir sobre seu percurso.

Após isso, P1 posicionou um ponto sobre as coordenadas (0,37), considerando-o como o coeficiente c de uma função quadrática. Nessa passagem interpretamos que ocorreu uma *intuição afirmativa*, dado o conhecimento prévio acerca de funções quadráticas e seus coeficientes manifestado desde o início por este sujeito. Entretanto, ao discutir com outros colegas, P1 percebeu que suas conjecturas não estavam de fato adequadas. Assim, passou a buscar o foco, o vértice e a diretriz da parábola. Dadas suas dificuldades em encontrar comandos específicos no GeoGebra, P1 calculou manualmente e depois construiu esses elementos no *software*, contudo não apresentou solução final .ggb.

Já o participante P2, assim como P1, começou digitando a função $y = 4x^2 - 24x + 37$ no campo entrada do GeoGebra. Abriu todas as abas de ferramentas e buscou por comandos que o ajudasse. Em seguida, digitou na janela de entrada a palavra “foco” e percebeu que o GeoGebra fornecia uma série de comandos distintos, a depender dos elementos disponíveis construídos pelo usuário. Nesse momento percebemos a manifestação de uma *intuição conjectural* por P2, ao testar os comandos e suas descobertas.

P2 digitou o comando *Foco(<Cônica>)* e tentou inserir *Foco(f(x))*, sem sucesso. Ao reescrever a função como uma equação no campo de entrada, na forma $f: y = 4x^2 - 24x + 37$ e utilizando novamente o comando *Foco(<Cônica >)*, obteve como coordenadas do foco $F(3; 1,06)$. Da mesma forma, P2 demonstrou uma *intuição antecipatória* – tentou fazer o mesmo com outros elementos, como a diretriz e o vértice, seguindo o mesmo percurso. Então, construiu a reta diretriz, usando o comando *Diretriz(<Cônica>)* e inserindo *Diretriz(f)*, encontrando $g: y = 0,94$. Usando a mesma estrutura, construiu o vértice com o comando *Vértice(<Cônica>)*, inserindo *Vértice(f)* e obtendo $V(3,1)$.

Ao ler Venturi (2003), percebeu que poderia construir o parâmetro p e o *latus rectum*³¹ da parábola e buscou este parâmetro p como os elementos anteriores, inserindo *Parâmetro(<Parábola>)* e *Parâmetro(f)*, obtendo o valor $p = 0,13$.

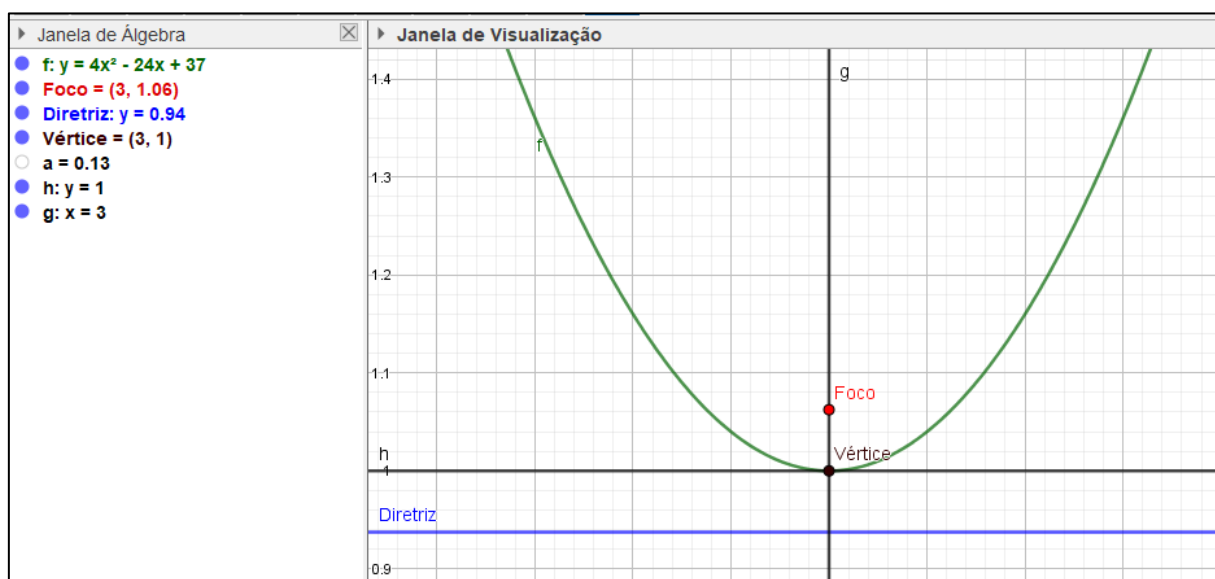
Para a construção do *latus rectum*, P2 tentou inserir “eixo de simetria” na janela de entrada, mas não encontrou o que buscava. Entretanto, ao perceber que apenas digitando a palavra “eixo”, o GeoGebra abria uma série de comandos e, a partir deles, P2 selecionou

³¹ LATUS RECTUM é a corda AA' que passa pelo foco e é perpendicular ao eixo de simetria da parábola, sendo também conhecida como corda focal mínima (VENTURI, 2003)

“Eixos(<Cônica>)”, inserindo $Eixos(f)$ e obtendo o *latus rectum* e outra reta, perpendicular ao *latus rectum* da parábola e que passa pelo vértice V .

Em grande parte do registro de vídeo, percebemos que P2 ficou imerso em uma leitura para compreender como buscar elementos para a construção de uma parábola, fazendo um esforço para entendê-la do ponto de vista analítico. Consideramos suas conjecturas bem-sucedidas e sua construção final foi (Figura 84):

Figura 84: Situação de formulação de P2.



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

O participante P3, diferente dos demais, iniciou inserindo as coordenadas do vértice $V(3,0)$. Primeiro, P3 fez cálculos manuais e, em seguida usou o *software*, apenas para inserir seus achados. Contudo, de acordo com a equação dada, esta ordenada para o vértice está incorreta. Após intervalo, P3 trocou as coordenadas do vértice para $V(3,1)$.

Logo depois, P3 usou o comando “derivada” e calculou a derivada da função $f(x) = 4x^2 - 24x + 37$, obtendo $8x - 24$. Depois disso, calculou $a = -\frac{b}{a} = \frac{24}{8} = 3$. Mas algo que nos chamou a atenção foi a forma como ele pensou em calcular o foco, como podemos ver no recorte do registro de vídeo, na Figura 85:

Figura 85: Cálculo do foco de P3 na SD4.

☰	Vertice	☰
●	$V = (3, 1)$	⋮
○	$f(x) = \text{Derivada}(4x^2 - 24x + 37)$ $\rightarrow 8x - 24$	⋮
	$a = \frac{24}{8}$ $\rightarrow 3$	⋮
●	$F = \left(\frac{24}{8}, \frac{4 \cdot 4 \cdot (-24) - 24^2 + 1}{16} \right)$ $\rightarrow (3, -59.94)$	⋮

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Aparentemente, P3 considerou o foco como $F = \left(-\frac{b}{a}; \frac{4ab-b^2+1}{a^2}\right)$, o que configura como uma *intuição conjectural*, proveniente do próprio desenvolvimento do que conhecemos por Fórmula de Bháskara, usada para o cálculo de raízes de uma função quadrática. As coordenadas obtidas foram $F(3, -59,94)$, o que não corresponde a uma resposta correta. Após isso, P3 inseriu a função $g(x) = 4x^2 - 24x + 37$ no campo entrada e fez uma pequena correção na expressão para o cálculo do foco, obtendo (Figura 86):

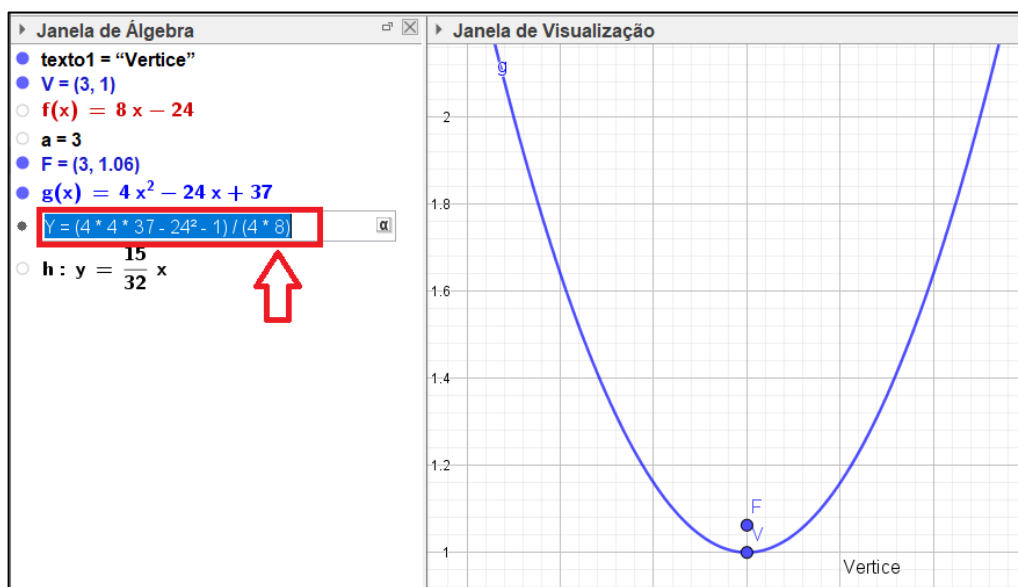
Figura 86: Cálculo do foco de P3 na SD4 – corrigido.

●	$F = \left(\frac{24}{8}, \frac{4 \cdot 4 \cdot 37 - 24^2 + 1}{16} \right)$ $\rightarrow (3, 1.06)$
---	--

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

o que de fato está correto. A expressão para o foco neste caso seria $F = \left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac-b^2+1}{4a}\right)$, em que P3 obteve $F(3,1)$. Ao calcular a diretriz, P3 usou $y = \frac{4ac-b^2-1}{4a}$ como expressão para esta. Contudo, a equação obtida foi $d: y = \frac{15}{32}x$, o que não corresponde à diretriz da parábola em questão. Em sua construção final, percebemos seu equívoco, como mostra a Figura 87:

Figura 87: Equívoco de P3 na SD4.

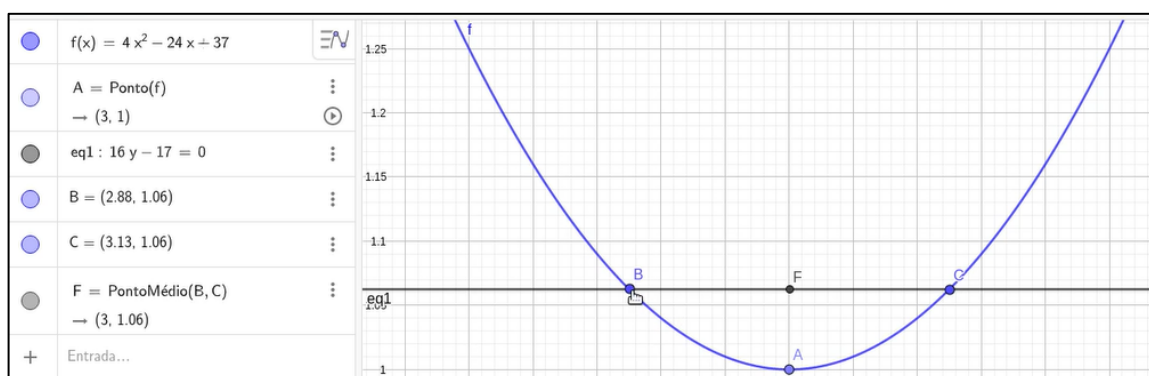


Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Com base na Figura 87, vemos que P3 considerou $a = 8$ e na questão temos $a = 4$. Esta forma de calcular o foco e a diretriz podem ser encontradas na obra de Lima (2014).

Assim como P1 e P2, o participante P4 iniciou a construção inserindo a equação dada como a função $f(x) = 4x^2 - 24x + 37$ no campo de entrada e em seguida com a ferramenta “ponto” marcou o ponto $A(3,1)$, apenas visualmente – o que entendemos aqui como uma *intuição afirmativa*, em que P4 age com base naquilo que considera certo, partindo de uma percepção visual – como vértice da parábola. Para o cálculo do foco, P4 inseriu a equação $eq1: 16y - 17 = 0$, encontrando uma reta que corta a parábola nos pontos B e C e o foco como sendo o ponto médio do segmento BC , como podemos observar na Figura 88:

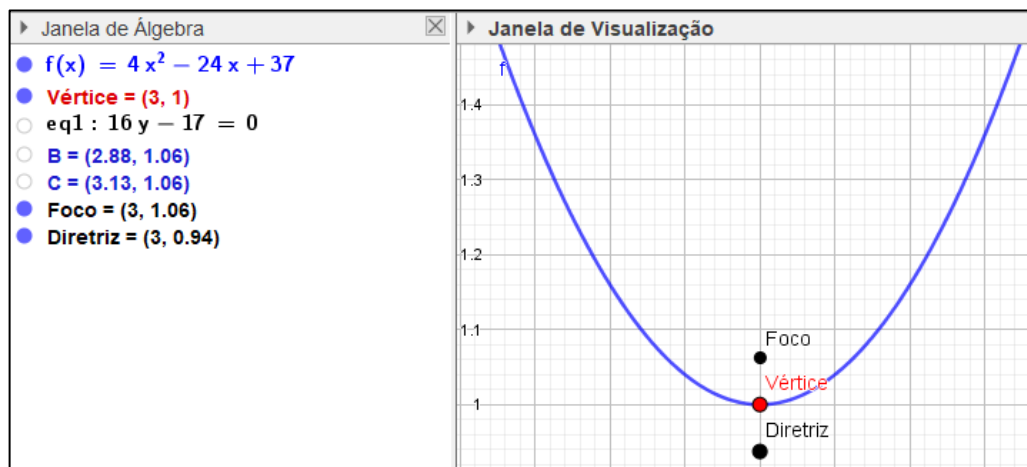
Figura 88: Formulação de P4 – parte 1.



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Já para o cálculo da diretriz, P4 inseriu o ponto $D = (3, \frac{15}{16})$ no campo entrada e apresentou como construção final (Figura 89):

Figura 89: Formulação de P4 – parte 2.

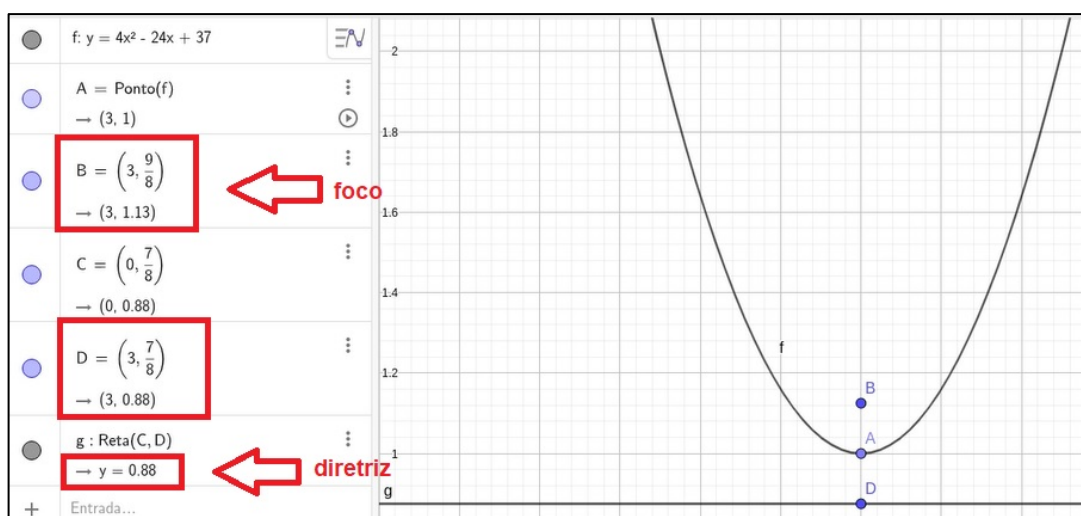


Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Note que P4 não traçou a reta diretriz, mas sim apresentou um ponto simétrico ao foco e que passa pela diretriz da parábola, de acordo com as definições apontadas na análise preliminar em Lima et al. (2006), Lima (2014) e Venturi (2003).

O participante P5, assim como os demais, inseriu a função $f(x) = 4x^2 - 24x + 37$. Entretanto, seus achados no registro de vídeo não correspondem aos valores reais para o foco e para a diretriz (Figura 90):

Figura 90: Formulação de P5.

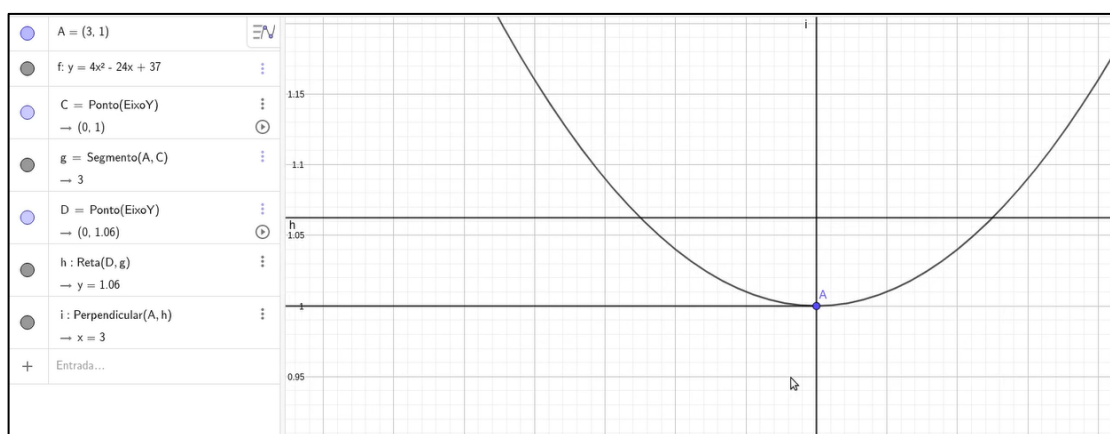


Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Em sua construção final P5 apresentou estes mesmos valores, contudo seus registros escritos não nos permitiram identificar que tipo de intuições geraram tais conjecturas.

O participante P6 iniciou inserindo o ponto $A(3,1)$, que é o vértice e em seguida inseriu a equação. Seu percurso foi diferente dos demais, pois ele buscou construir os elementos da parábola com base em seus conhecimentos de Geometria Plana. Por meio de *intuições conjecturais*, dadas a equação e o vértice, P6 demarcou o ponto $(0, 1.06)$ sobre y . Após isso, construiu uma reta paralela ao eixo x passando pelo vértice e uma perpendicular ao eixo x também passando pelo vértice (Figura 91):

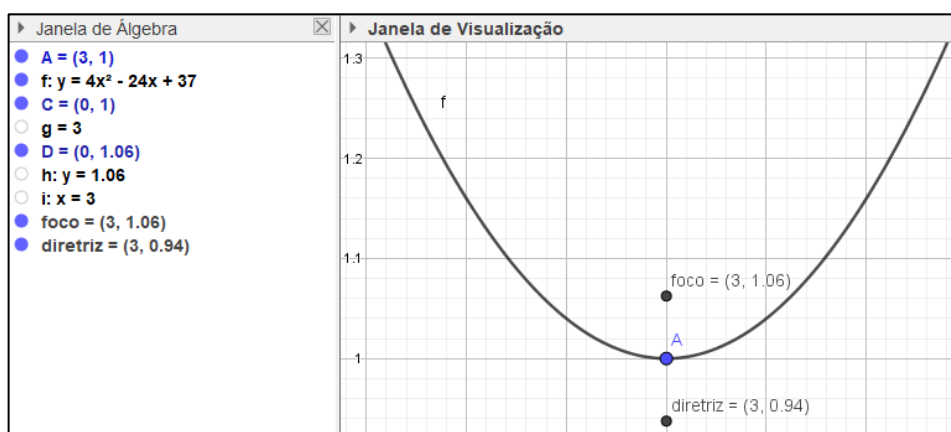
Figura 91: Formulação de P6.



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Em seguida, P6 ocultou as retas e o segmento de reta. Utilizando a ferramenta “reflexão em relação a um ponto”, ele construiu um ponto simétrico ao foco, que teoricamente deve estar sobre a reta diretriz. P6, assim como P4, não construiu a reta diretriz, apenas um ponto pertencente a ela e simétrico ao foco, como podemos ver na Figura 92:

Figura 92: Construção final de P6.



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

As intuições de P7, de natureza *afirmativa* e *conjectural*, foram demonstradas tanto em seus cálculos manuais, como verbalizadas:

- Qual é a definição de parábola? De acordo com o que discutimos nos encontros anteriores (pesquisadora)
- Ehhh... é uma curva que os pontos têm a mesma distância do ponto central e de um ponto fora em cima de uma reta que é a diretriz (P7)
- E tu concorda que os elementos dessa definição são o que fazem uma parábola existir? (pesquisadora)
- Sim, pelo que a gente viu nos encontros passados foi isso (P7)
- E esses elementos estão aí no que você colocou? (pesquisadora)

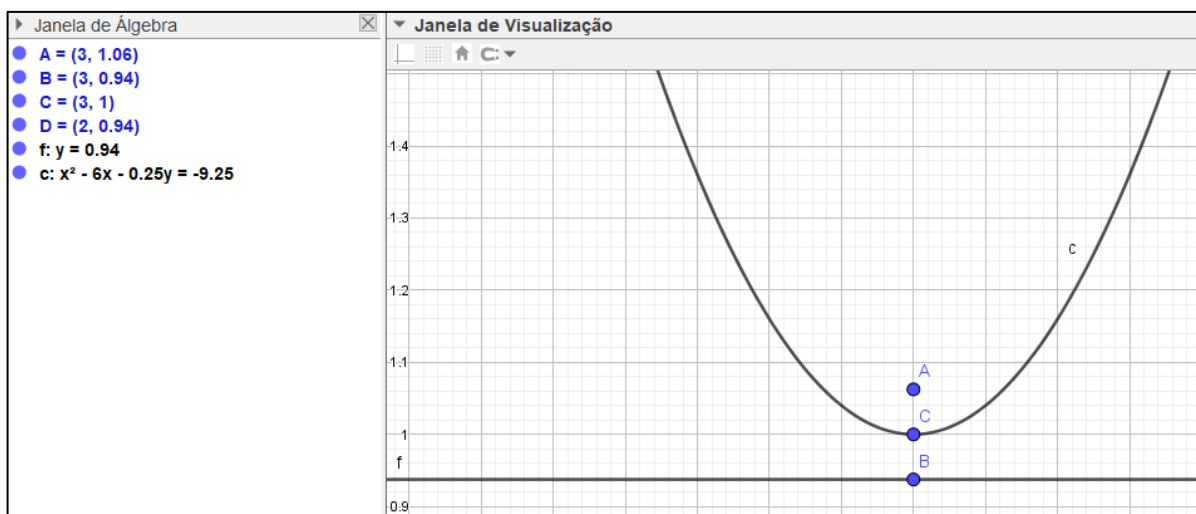
[... silêncio...]

- Então, nesse caso eu teria que achar o foco e a diretriz né... não, essa parte eu entendi, que esses elementos seriam o que faz ela existir... mas desse jeito aqui a equação, é possível no papel eu achar esse foco e essa diretriz? (P7)
- Sim, mas que a equação para ficar com essas coordenadas mais claras, seria de um jeito um pouco diferente, não?" (pesquisadora)
- Seria sim, só que aí como é que eu faço aparecer isso? (P7). (TR04, 2022).

Note que o conhecimento sobre a parábola pelo prisma da Geometria Analítica, mesmo após discussões, ainda não foi internalizado de fato. Sua linguagem com relação aos termos formais “foco, vértice e diretriz” ainda não se constituem em um conhecimento consolidado. Todavia, percebemos no comportamento do sujeito que há uma noção de como proceder, e esta foi viabilizada pelo GeoGebra em seu percurso.

O participante P7, após reflexão e diálogo com seus pares, fez algumas anotações e começou sua construção inserindo o ponto $A(3, \frac{17}{16}) = (3; 1,06)$, que corresponde a um ponto pertencente à diretriz da parábola. Em seguida, P7 inseriu os pontos $B(3, \frac{15}{16})$ e $C(3,1)$ no campo de entrada, representando um ponto sobre a reta diretriz e o vértice da parábola. Traçou uma reta paralela ao eixo x passando por B , representando a reta diretriz e usou a ferramenta parábola, obtendo a equação $x^2 - 6x - 0,25y = -9,25$, que é a mesma equação $y = 4x^2 - 24x + 37$, sendo multiplicada por $\frac{1}{4}$. Sua construção final nos mostra Figura 93:

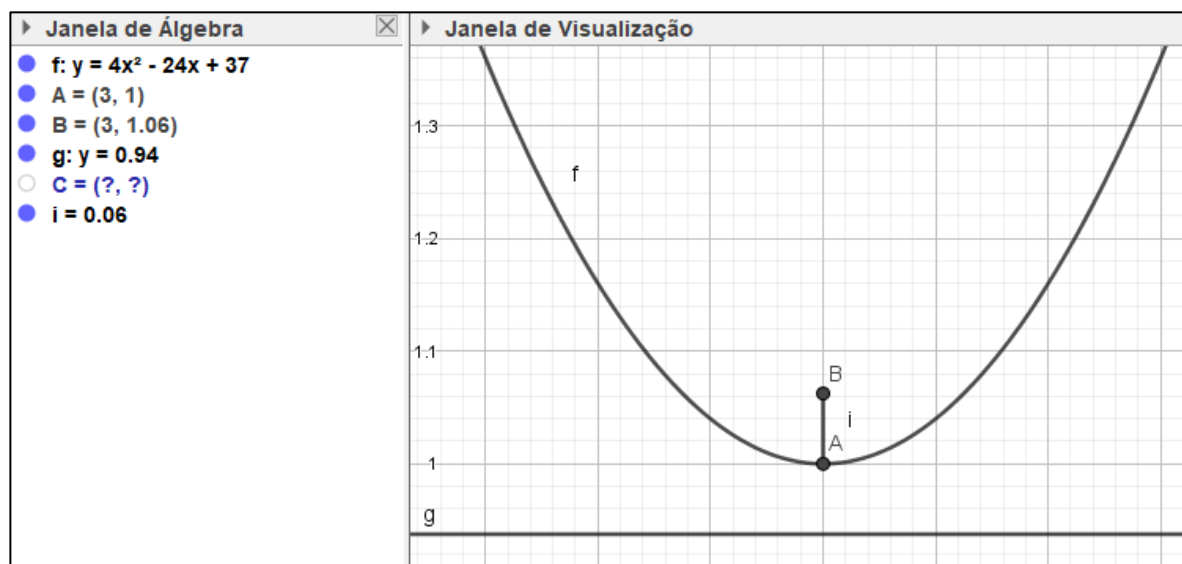
Figura 93: Formulação de P7.



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Por fim, P8 realizou todos os cálculos manuais e inseriu no campo de entrada do GeoGebra a equação dada, as coordenadas do vértice (A), as coordenadas do foco (B), a reta diretriz (g) e um segmento que liga A e B , o que não é relevante para a solução. Seu registro de vídeo foi inconclusivo, pois estava incompleto. Sua construção final foi (Figura 94):

Figura 94: Formulação de P8.

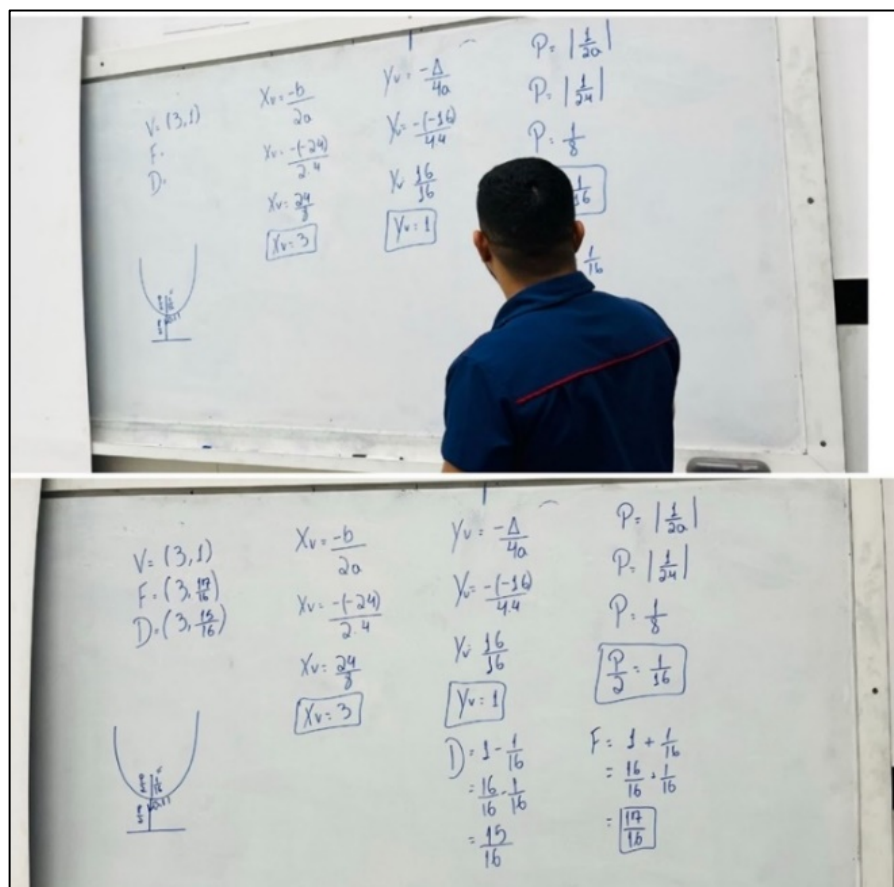


Fonte: Dados da pesquisa (2022).

No que diz respeito à *situação de validação*, os sujeitos discutiram suas diferentes soluções, formas de calcular e de esboçá-las no *software*. Em particular, os participantes P2, P3 e P7 se destacaram em suas distintas formas de solucionar a situação didática. Entretanto,

apenas P7 se disponibilizou para demonstrar no quadro a sua estratégia, bem como apresentar uma argumentação para validar a solução, como mostra a Figura 95:

Figura 95: Validação da SD4 pelo participante P7.



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Podemos observar no registro da Figura 94 que P7 iniciou seu percurso calculando o vértice da parábola, seguido do parâmetro p . No canto inferior esquerdo, observamos como seu raciocínio se desenvolve para o cálculo da diretriz e do foco. Primeiro, ele esboçou o gráfico e em seguida mostrou as coordenadas de um ponto pertencente à diretriz e do foco F .

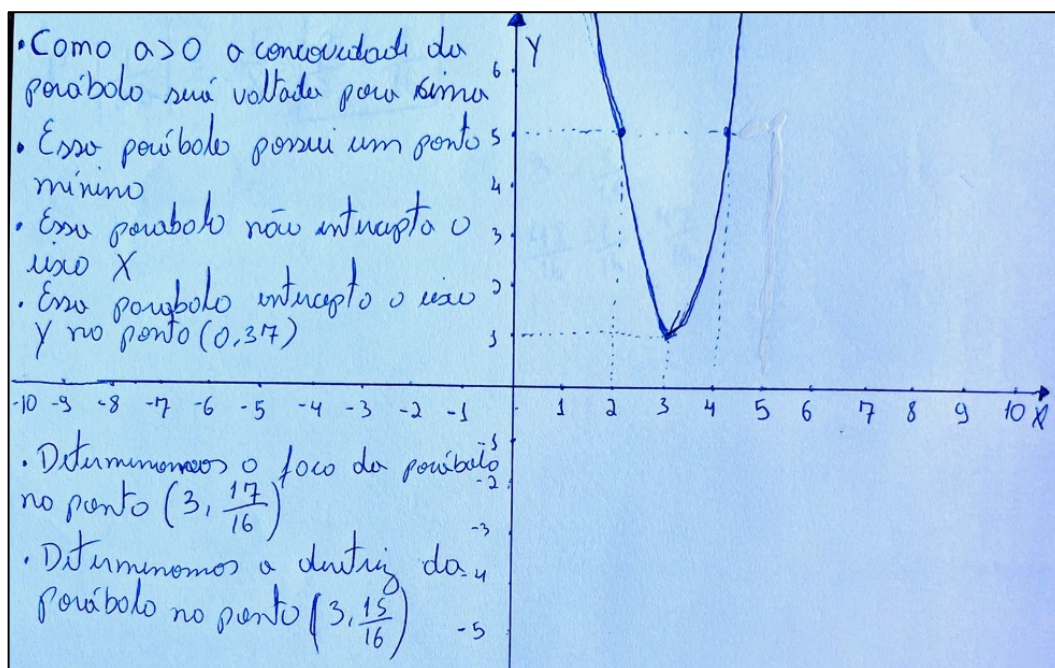
Fischbein (1993) aponta a necessidade da prova lógica, matematicamente válida, para se chegar a uma conclusão aceitável, afirmando que a organização do raciocínio por meio da linguagem verbal e escrita são essenciais para se construir soluções formalmente sustentáveis. De modo complementar, Brousseau e Gibel (2005) ressaltam ainda que, para a validação de um raciocínio matemático, – no que tange à *situação de validação* na TSD –, devemos considerar não apenas a formalidade e precisão dos cálculos, mas também seu contexto cultural e didático, de modo que o estudante se envolva na situação didática e desenvolva uma

argumentação com base em seu pensamento matemático autônomo e, consequentemente, em uma validação independente de seus resultados.

Dessa forma, os autores consideram que a validação matemática “baseia-se em perceber as relações lógicas e semânticas dentro de um sistema de enunciados cujos significados devem ser estáveis e independentes dos indivíduos que os fizeram e do momento de sua produção” (BROUSSEAU; GIBEL, 2005). Note que P7 teve o cuidado de apresentar um percurso linear, organizado, fruto de um resultado matemático que parte de uma sistematização do conhecimento, em via de ser validado.

Outras argumentações foram apresentadas pelo grupo e sintetizadas por um representante da turma de forma voluntária, que no caso foi o participante P6 (Figura 96):

Figura 96: Validação apresentada pela turma.



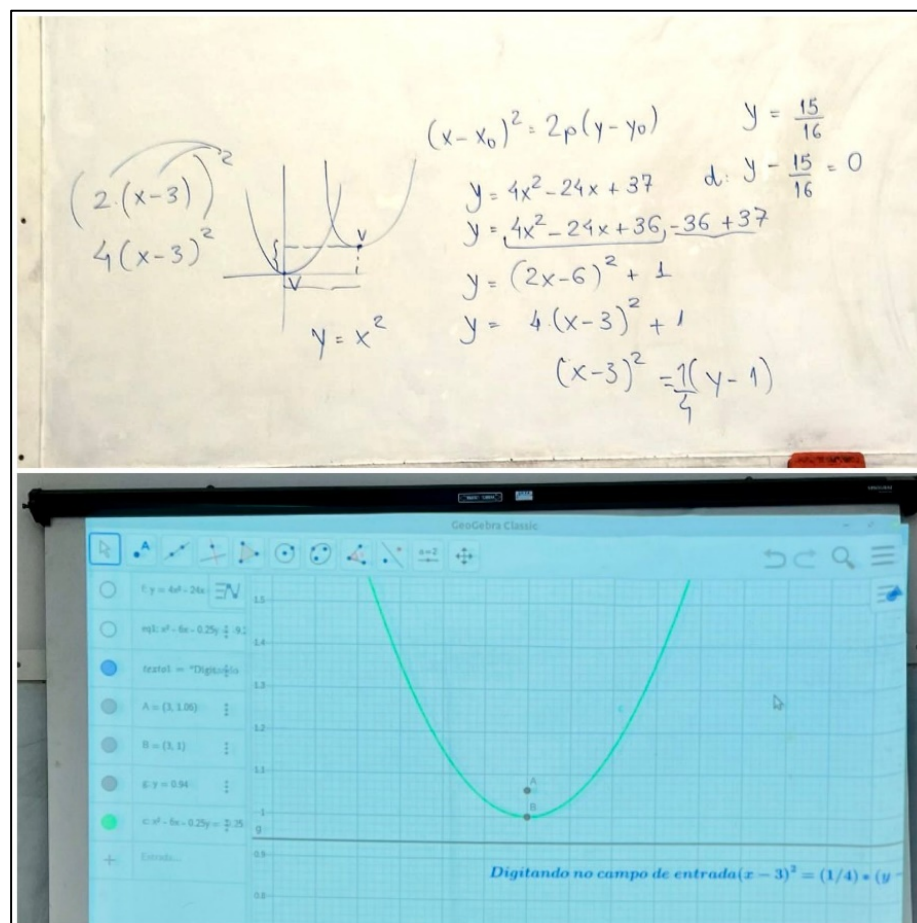
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Perceba na Figura 96 que na primeira parte da argumentação da turma, a parábola foi observada do ponto de vista das funções quadráticas, de modo natural, o que entendemos como fruto de *intuições afirmativas*, já mencionadas anteriormente. Só então, ao perceber que a equação não tinha raízes reais e exatas, os participantes buscaram outras formas de encontrar elementos relevantes para a construção da parábola, iniciando pelo cálculo do vértice, seguindo para a busca do foco e da diretriz.

Após a argumentação dos participantes, a pesquisadora iniciou a *situação de institucionalização*, tendo como base a obra de Venturi (2003), em que demonstra que a

equação de uma parábola de vértice $V(x_0, y_0)$ e eixo de simetria paralelo ao eixo y tem a estrutura padrão $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$. No caso desta questão, a equação foi apresentada em sua forma explícita $y = ax^2 + bx + c$, onde para encontrar a forma padrão faz-se necessário conhecer os valores x_0, y_0 e p , como podemos notar na Figura 97:

Figura 97: Institucionalização da SD4.



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Em um primeiro momento, a pesquisadora demonstrou uma solução alternativa no quadro e, em seguida, realizou sua transposição para o GeoGebra, como forma de esclarecer eventuais dúvidas e em busca de consolidar o conhecimento matemático dos participantes.

5.3.5 Experimentação da Situação Didática V

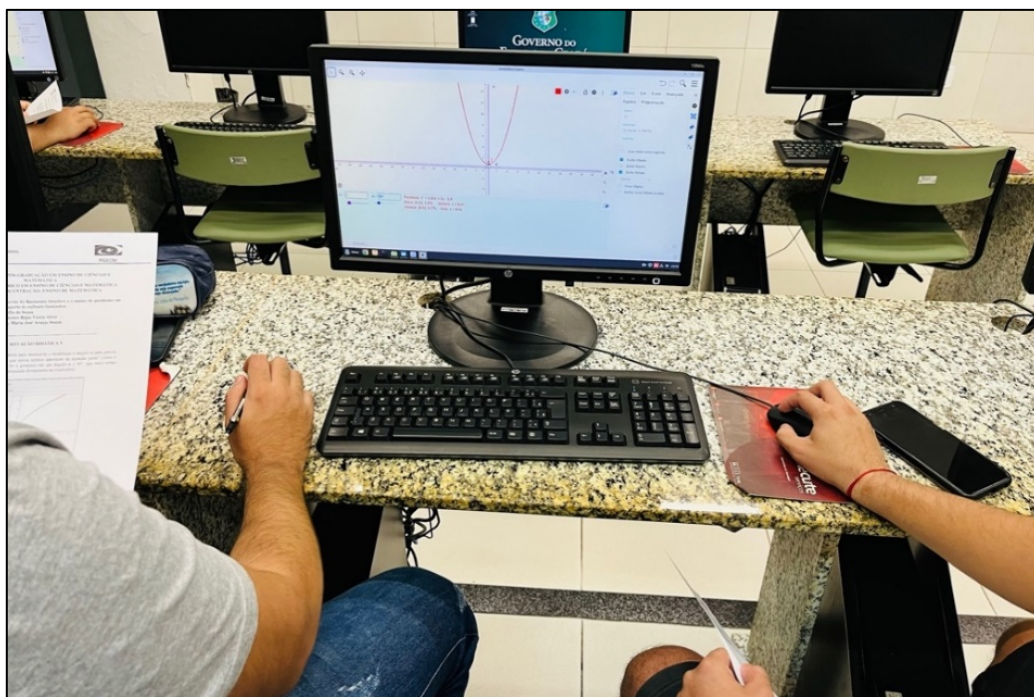
Nesta situação didática a pesquisadora apresentou uma construção cujo objetivo era reconhecer os diferentes tipos de equação da parábola, seu comportamento, seus coeficientes e quais as condições necessárias para que cada uma destas equações ocorra.

Desta maneira, no último encontro os professores em formação utilizaram primeiro o ambiente do GeoGebra para observar a construção previamente fornecida e, em seguida, realizarem seus registros escritos em lápis e papel, seguindo um percurso inverso do que foi realizado nas situações didáticas anteriores.

Na *situação de ação*, os participantes realizaram a leitura do problema, tentando relacionar o que se pede com a construção dada. Desta forma, eles manipularam a construção usando as ferramentas “mover”, “ampliar”, “reduzir”, “controle deslizante” e os espaços destinados a inserir valores, observando o que acontecia com a parábola, tanto de forma gráfica, quanto com relação à estrutura da sua equação. Nesta etapa percebemos a manifestação de *intuições afirmativas e conjecturais*, proporcionadas pelo *milieu* estabelecido pela pesquisadora com aporte da construção no GeoGebra e da visualização das diferentes posições da parábola e suas respectivas equações.

No decorrer da *situação de formulação*, os professores em formação discutiram suas conjecturas em pequenos grupos, esquematizando seu raciocínio sobre as observações realizadas em papel. Um registro desta etapa pode ser observado na Figura 98:

Figura 98: Situação de formulação da SD5.



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

No decorrer desta etapa, percebemos a manifestação de *intuições conjecturais* e, a partir destas intuições, a construção de analogias e proposições do tipo “se..., então” e a organização do pensamento de modo mais formal, o que serviu de subsídio para a construção

de *intuições antecipatórias e conclusivas*, como manifestado nos registros escritos dos participantes, apresentado posteriormente na *situação de validação*.

Já na *situação de validação*, os professores em formação apresentaram seus registros escritos em duplas, com o que seria uma espécie de conclusão do seu raciocínio e demonstração de seu aprendizado sobre a equação da parábola e suas distintas formas gráficas. Esses registros foram feitos em duplas, como forma de estimular as expressões intuitivas associadas ao percurso da TSD e promover uma validação que visa um percurso para a institucionalização a ser realizada futuramente por estes professores em seu *lôcus de atuação profissional*.

Cada uma das duplas apresentou seu ponto de vista acerca das observações da construção, se utilizando de analogias ou mesmo dos modelos de equações apresentadas pelo GeoGebra na manipulação da construção. Notamos que, apesar do esforço dos participantes para compreender os diferentes tipos de equação da parábola, ainda houve dificuldade na generalização de sua equação e compreensão das relações entre os distintos modelos. Nas Figuras 99 a 102 trazemos as validações apresentadas pelos participantes:

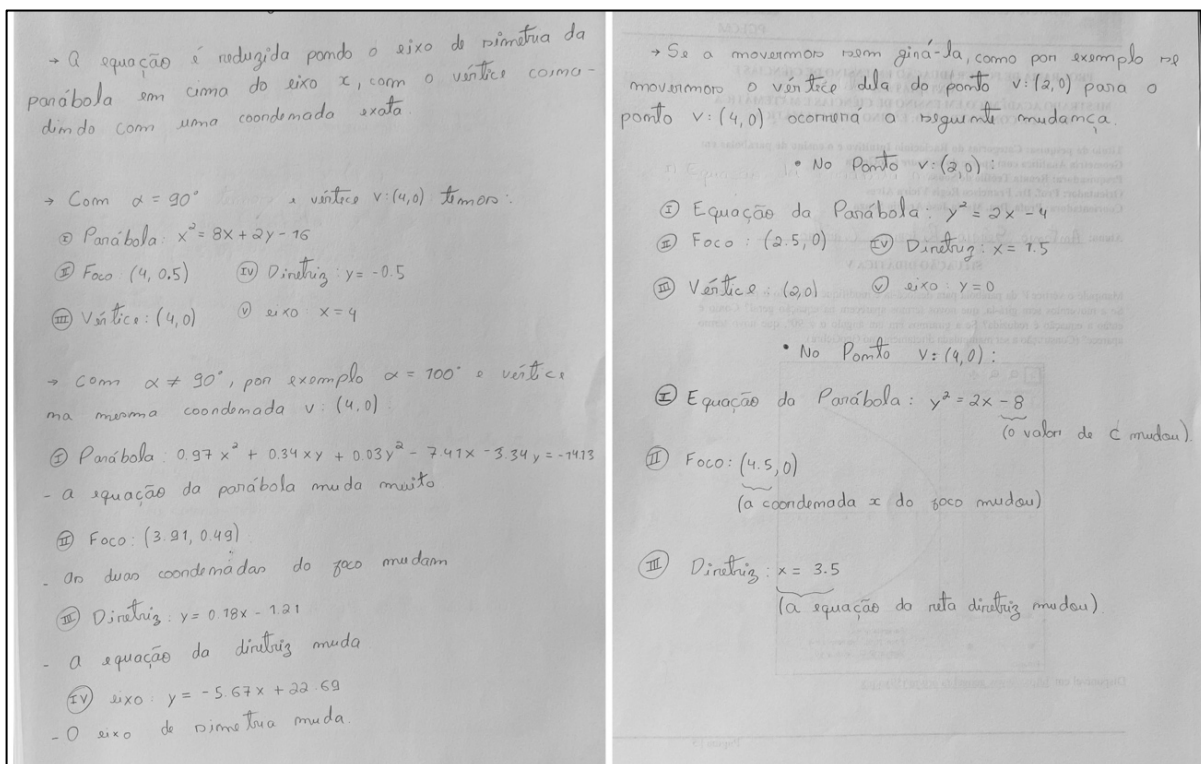
Figura 99: Validação da SD5 - dupla P6 e P7.

Turno Geral $\rightarrow y^2 = 4x \rightarrow V = (0,0)$
 Ao movimentarmos para o lado o turno geral muda, veja, move o vértice usando a construção da situação didática para o ponto $(10,0)$, logo a turno geral mudou para $y^2 = 4x - 40$; Agora move o vértice para $(-10,0) \rightarrow$ Obteve $y^2 = 4x + 40$
 $1^o Q \rightarrow$ vértice $(20,20) \rightarrow$ Obteve $y^2 = 4x + 40y - 400$
 $2^o Q \rightarrow V(-20,20) \rightarrow$ Obteve $y^2 = 4x + 40y - 320$
 $3^o Q \rightarrow V(-20,-20) \rightarrow$ Obteve $y^2 = 4x - 40y - 480$
 $4^o Q \rightarrow V(20,-20) \rightarrow$ Obteve $y^2 = 4x - 40y - 480$
 Ao tirarmos a parábola do vértice, obtemos uma equação no qual tem mais coeficientes, claro que sem movimentar o ângulo. Ao movimentar o ângulo no mesmo vértice ocorrer uma mudança nos sinais do Turno geral, veja: $V = (20,20) \rightarrow \alpha = 180^\circ \rightarrow$
 Turno geral $\rightarrow y^2 = -4x + 40y - 320$
 Ou seja:

I) Ao movimentarmos a vértice aparece novos coeficientes um relacionado a incógnita x e o turno independente;
 II) Equação Reduzida:
 Caso I $\rightarrow V(0,0) \rightarrow y^2 = 4x$
 Caso II $\rightarrow V(20,0) \rightarrow y^2 = 4x - 160$
 Caso III $\rightarrow V(0,1) \rightarrow y^2 = 4x + 40y - 400$
 Obs: Quando movimentarmos o parâmetro o valor do coeficiente dobra com relação a incógnita independente da equação.
 III) Ao movimentarmos o ângulo percebemos que qualquer diferente de $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$, obtemos uma um turno geral no modelo:
 $ax^2 + bxy + cy^2 + Dx + Ey = K$,
 mudando apenas o sinal dependendo do quadrante da parábola.

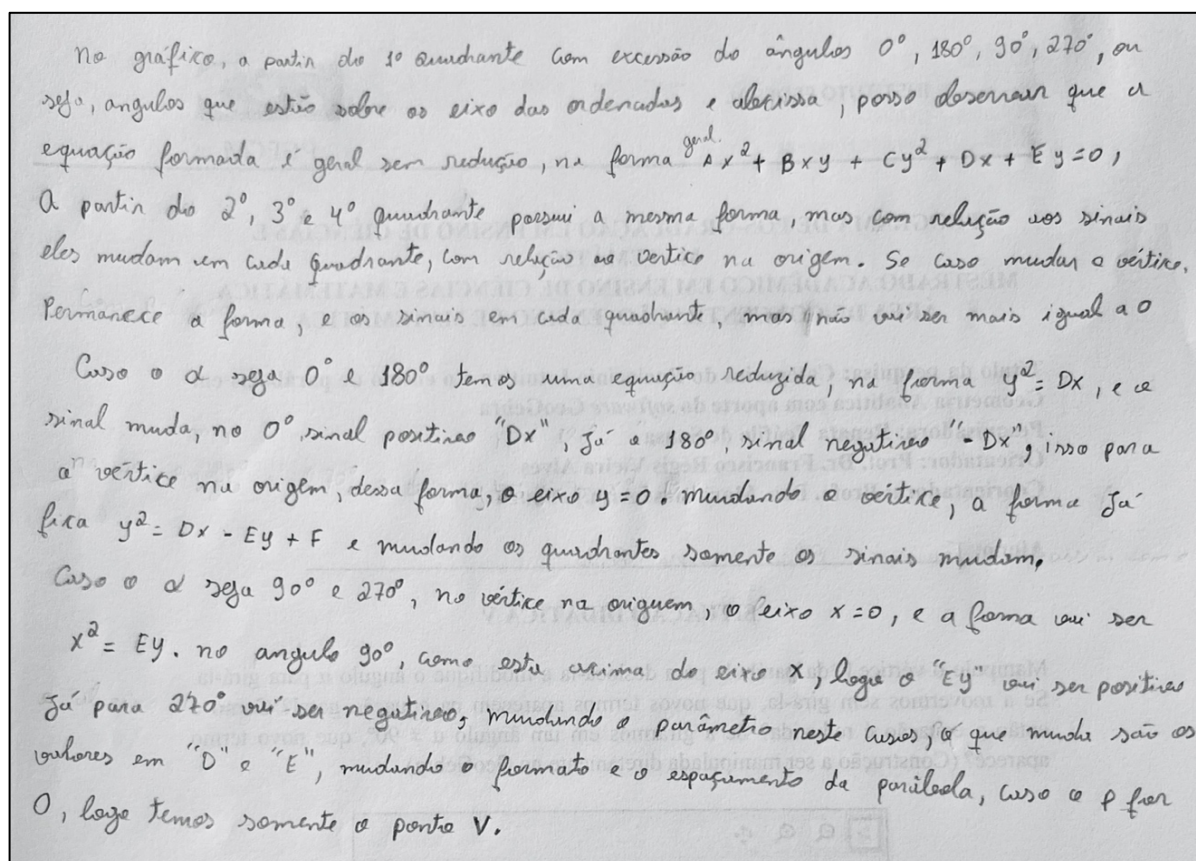
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Figura 100: Validação da SD5 – dupla P2 e P5.



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Figura 101: Validação da SD5 – dupla P1 e P4.



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Figura 102: Validação da SD5 – dupla P3 e P8.

$E.G = \text{equação geral}$
 $E.R = \text{equação reduzida}$

$\alpha = 90^\circ, P=1 \Rightarrow E.G = Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$
 $\Downarrow$
 $A=1 \wedge E=2$
 $E.R = Ax^2 = Ey \Rightarrow x^2 = 2y$

$\alpha = 90^\circ, P \neq 1 \Rightarrow E.G = Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$
 $\Downarrow$
 $A=1 \wedge E \neq 2$
 $E.R = Ax^2 = Ey \Rightarrow x^2 = Ey$

$\alpha = 180^\circ, P=1 \Rightarrow E.G = Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
 $E.R = Cy^2 = -Dx$

$\alpha \neq 90^\circ \wedge \alpha \neq 180^\circ \Rightarrow$
 $E.G = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
 $E.R = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = 0$

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Observe que nas validações das duplas P6 e P7 (Figura 99), bem como de P2 e P5 (Figura 100) não foi feita uma generalização da equação da parábola, assim como não há uma linguagem matemática formalizada. As observações destes participantes relatam diferentes posições do foco e do vértice da parábola e, a partir destas, a equação gerada é apontada como forma de exemplo com dados numéricos. A dupla P6 e P7, ao final de sua validação, apresentou o modelo de equação geral, mas ainda de modo desvinculado ao percurso traçado nas demais posições da parábola e suas respectivas equações.

Já a dupla P1 e P4 buscou explicar o que observou na construção a partir de um texto, enquanto P3 e P8 buscaram sintetizar suas ideias por meio de equações e simbologias. No entanto, percebemos ainda o uso da linguagem matemática formal um tanto limitado. Interpretamos, com base no observado, que na fala destes participantes há traços do que seria uma *intuição conjectural*, mas ainda um pouco distante de se tornar uma *intuição antecipatória* ou *conclusiva*. Isto pode ser esclarecido na obra de Fischbein (1987a, p. 61):

[...] what distinguishes conjectural and anticipatory intuitions in our classification is that anticipatory intuitions represent *a phase* in the process of solving a problem (necessarily followed by an analytical endeavor), while conjectural intuitions are, more or less, *ad hoc* evaluations and predictions generally not included in a systematic solving activity. (FISCHBEIN, 1987a, p. 61)³².

Ainda em conformidade com as ideias do autor, entendemos que essa distinção não deve ser absoluta, pois há a necessidade de se considerar a continuidade do pensamento do estudante. Há um percurso das intuições afirmativas às antecipatórias, passando por intuições conjecturais. Ou seja, “em todas essas categorias ambos os componentes estão presentes: a atitude afirmativa e o elemento de conjectura. É o contexto situacional que é decisivo. Certamente também há diferenças intrínsecas” (FISCHBEIN, 1987a, p. 61). Nesse sentido, entendemos que uma solução ou generalização é, até certo ponto, implícita nas *intuições afirmativas* enquanto é explícita nas *intuições conjecturais* e *antecipatórias*. A generalização explícita, no caso destes participantes, não ocorreu.

Brousseau (1997b) explica que um raciocínio é caracterizado pelo papel que desempenha em uma situação, ou seja, por sua função nessa situação. Essa função pode ser decidir sobre algo, declarar, convencer ou explicar. Neste caso, podemos deduzir que a função de um raciocínio varia de acordo com o tipo de situação em que ocorre. Brousseau e Gibel (2005) complementam que, ao observar as nuances do pensamento matemático estruturado e de suas características, pode-se deduzir se estes compõem uma situação de ação, formulação, validação ou outra. Estes autores ainda afirmam que o tipo de raciocínio manifestado se dá conforme sua necessidade e utilidade mediante a situação proposta.

No caso das validações apresentadas, entendemos que ainda não há um entendimento consolidado no que diz respeito à equação geral da parábola. No entanto, conseguimos notar que as percepções visuais destes participantes forneceram elementos capazes de estimular seu raciocínio intuitivo, bem como convergem para uma possibilidade de generalização da parábola, se dada continuidade ao estudo deste tópico e desenvolvimento das equações. Sobre a percepção do professor e identificação da intuição, Fischbein (1999) reforça que:

Generally speaking, for the teaching of mathematics, it is very important that the teacher understands the interactions between the intuitive, the formal and the procedural aspects in the processes of understanding, remembering and problem solving. If the intuitive forces are neglected, they will, nevertheless, continue to influence the pupil's capacity of understanding and solving, but unfortunately in an

³² [...] o que distingue as intuições conjecturais e antecipatórias na nossa classificação é que as intuições antecipatórias representam uma fase no processo de resolução de um problema (necessariamente seguida de um esforço analítico), enquanto as intuições conjecturais são, mais ou menos, avaliações e previsões *ad hoc* geralmente não incluído em uma atividade de resolução sistemática. (FISCHBEIN, 1987a, p. 61).

uncontrolled manner, usually disturbing the mathematical thinking process. If the formal aspect is neglected and one would tend to rely exclusively on intuitive arguments, that which will be taught will not be mathematics. (FISCHBEIN, 1999, p. 28)³³.

Na *situação de institucionalização*, a pesquisadora se utilizou da explanação contida em Venturi (2003, p. 120), em que se discute a generalização da equação de uma parábola e seus tipos, como previsto na análise *a priori*, explorando a construção .ggb disponibilizada e os conceitos dados na obra do referido autor. No decorrer da institucionalização, os professores em formação mostraram entendimento sobre os modelos de equação $y(x)$ e $x(y)$, que traz a parábola com a concavidade nas posições cima, baixo, direita e esquerda. Entretanto, eles apontaram como novidade o modelo de equação proposto pelo *software* ao trazer o eixo de simetria da parábola fora dos eixos coordenados, que é o modelo da equação geral da parábola $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Após o encerramento dos encontros, a pesquisadora solicitou aos participantes que respondessem um questionário final (APÊNDICE C), com a sua visão acerca dos encontros e do seu aprendizado sobre o tema, sobretudo com o uso do GeoGebra.

Na seção seguinte, trazemos a análise *a posteriori* e validação interna da pesquisa, a partir de uma discussão que considera os aspectos intrínsecos ao percurso da TSD, da manifestação das categorias intuitivas e o aporte do GeoGebra no percurso desta experimentação, realizando uma comparação com a análise *a priori* desta ED.

³³ De um modo geral, para o ensino da matemática, é muito importante que o professor compreenda as interações entre os aspectos intuitivos, formais e procedimentais nos processos de compreensão, memorização e resolução de problemas. Se as forças intuitivas forem negligenciadas, elas continuarão, no entanto, a influenciar a capacidade de compreensão e resolução do aluno, mas infelizmente de forma descontrolada, geralmente perturbando o processo de pensamento matemático. Se o aspecto formal for negligenciado e se tender a confiar exclusivamente em argumentos intuitivos, o que será ensinado não será matemática. (FISCHBEIN, 1999, p. 28)

6. ANÁLISE *A POSTERIORI* E VALIDAÇÃO INTERNA

Segundo Almouloud e Coutinho (2008) na análise *a posteriori* de uma ED, o pesquisador traz, de modo estruturado, um conjunto de resultados obtidos a partir dos dados coletados na etapa de experimentação, visando uma melhoria nos conhecimentos didáticos, no processo de ensino e nas condições da transmissão de um determinado saber em jogo. Ainda sobre a essência de uma análise *a posteriori*, Laborde (1997) explica que a ED testa os vínculos que a teoria supôs entre o ensino e a aprendizagem para comparar os dois modelos diferentes do mesmo objeto (a sequência de ensino) que são a análise *a priori* e a análise *a posteriori* por meio de uma validação interna:

Il ne s'agit pas de comparer les conduites des partenaires et les événements à ceux d'une classe témoin, mais de comparer les deux modélisations différentes du même objet (la séquence) que sont l'analyse *a priori* et l'analyse *a posteriori*. Car l'analyse *a posteriori* constitue bien une modélisation des observables et non une simple constatation, comme le souligne Margolinas (1992). En effet, l'analyse *a posteriori* pose le problème de la signification des actions observables relatives tant au maître qu'à l'élève. (LABORDE, 1997, p. 103)³⁴.

Nesse sentido, esta etapa da pesquisa traz um exame acerca das situações didáticas estruturadas à luz da análise *a priori*, do quadro teórico sobre o objeto de ensino em questão, no caso a parábola, bem como observaremos a relação entre o planejado e o executado, as hipóteses e a problemática da pesquisa. Com base nisso, consideramos nesta análise *a posteriori* as manifestações intuitivas dos professores em formação, a relação entre o uso do GeoGebra e o processo intuitivo no decorrer das soluções apresentadas e a evolução dos sujeitos no decorrer dos encontros, visando uma validação interna das situações didáticas delineadas.

O percurso de cada participante no decorrer das suas construções e apresentação da validação das situações didáticas não foi linear. Muitas tentativas e erros ocorreram durante a resolução das questões, bem como dificuldades na compreensão das definições matemáticas que compõem a parábola pelo prisma da Geometria Analítica, tanto com uso do ambiente lápis e papel, quanto no GeoGebra. As variáveis didáticas previstas na elaboração da análise *a priori* deste trabalho foram, de fato, pertinentes ao problema da pesquisa.

³⁴ Não se trata de comparar a conduta de parceiros e eventos aos de uma classe de controle, mas para comparar os dois modelos diferentes do mesmo objeto (a sequência) que são a análise *a priori* e a análise *a posteriori*. Porque a análise *a posteriori* constitui uma modelização dos observáveis e não uma simples observação, como sublinha Margolinas (1992). De fato, a análise *a posteriori* coloca o problema do significado das ações observáveis relativas tanto ao professor quanto ao aluno (LABORDE, 1997, p. 103).

Nos tópicos a seguir, trazemos uma discussão que analisa o desenvolvimento dos professores em formação no estudo da parábola, observando suas dificuldades no campo epistêmico e novas possibilidades para se trabalhar o tema, as categorias intuitivas percebidas no decorrer da resolução das situações didáticas, suas interações com o GeoGebra e uma visão geral dos participantes após o encerramento da atividade de pesquisa desenvolvida.

6.1 Análise *a posteriori* e validação da SD1

Na situação didática I, que explora o conceito de parábola e os principais elementos que o compõe, observamos na *situação de ação* que após a leitura inicial da questão, houve um resgate de conhecimentos prévios por parte dos professores em formação, o que de fato foi previsto em nossa análise *a priori*.

Contudo, no decorrer desta etapa da TSD notamos falhas na interpretação do enunciado da situação proposta, e, mesmo estas sendo fruto de manifestações intuitivas de natureza *afirmativa* e *conjectural*, algumas destas intuições foram desenvolvidas de forma errônea, possivelmente devido a erros de base conceitual, o que é uma possibilidade esclarecida nas obras de Fischbein (1987a, 1987b, 1993) e em Brousseau (1976) e discutida ao longo das seções teóricas deste trabalho.

Na *situação de formulação*, conjecturamos inicialmente que ocorreria a elaboração da parábola com dobraduras no ambiente lápis e papel, para posteriormente ser realizada a transposição do papel para o *software* GeoGebra, o que ocorreu conforme planejado. Entretanto, nesta etapa os sujeitos não trabalharam individualmente, mas sim em pequenos grupos, em que os que tinham mais facilidade auxiliaram os colegas com mais dificuldades na interpretação da situação didática. Intuições de natureza afirmativa e conjectural também foram percebidas nesta etapa, tanto corretas como incorretas, porém, dos oito professores em formação, apenas dois (P2 e P3) seguiram um percurso equivalente à análise *a priori*.

Na *situação de validação*, assim como previsto e estabelecido no contrato didático, ocorreram as apresentações das construções tanto no ambiente lápis e papel quanto no GeoGebra por parte dos professores em formação. Além disso, era esperado que estes professores em formação reconhecessem a curva construída como uma parábola a partir de técnicas de desenho geométrico, associando a reta d à diretriz e o ponto F ao foco da parábola, o que seria a solução final dos itens a e b , respectivamente.

Entretanto, nesta etapa da TSD apenas três dos oito professores demonstraram ter conhecimentos básicos acerca da parábola pelo ponto de vista de Geometria Analítica. Destes

três, apenas um verbalizou o conceito de parábola ainda sem uma linguagem matemática formalizada. Dois dos sujeitos não conseguiram concluir a situação didática (P7 e P8), contudo estes apresentaram intuições em falas e nos demais registros da pesquisa que nos possibilitaram refletir sobre o tema, como demonstradas na experimentação deste trabalho.

Na *situação de institucionalização*, a pesquisadora de fato utilizou a obra de Lima (2014), como previsto na análise *a priori*. Entretanto, foi necessário acrescentar o conceito de lugar geométrico ainda nesta etapa, dada a dificuldade de parte dos professores em formação por ter uma lacuna na formação referente a este conceito.

No decorrer desta situação didática notamos a predominância de *intuições afirmativas* e *conjeturais*, que segundo Fischbein (1987a) podem, em certo nível, ser consideradas como *intuições primárias*. Estas intuições se desenvolvem nos indivíduos independentemente de qualquer instrução sistemática, como efeito de sua experiência pessoal. “A estabilidade das intuições está relacionada com a estabilidade e coerência interna dos esquemas mentais” (FISCHBEIN, 1987a, p. 194).

6.2 Análise *a posteriori* e validação da SD2

Nesta situação didática, trazemos a ideia de parábola associada ao cotidiano, por meio de uma construção que representa o esquema de uma ponte pênsil, de forma contextualizada.

Na *situação de ação*, como esperado, os participantes realizaram a leitura e extração de informações do enunciado, já verbalizando que se tratava de uma questão que envolvia funções quadráticas, o que configura em uma *intuição afirmativa*. Como mencionado na análise *a priori* deste trabalho, este fato pode ser decorrente do que Fischbein (1989) denomina por *status da teoria*, que consiste em uma intuição gerada a partir da representação de uma situação-problema por meio de um esquema ou modelo.

No decorrer desta etapa, os professores em formação, após a busca de dados no problema, esquematizaram desenhos representativos da ponte, sugerindo-a como o gráfico de uma função quadrática, o que entendemos que sejam a representação de modelos intuitivos com base em seus conhecimentos prévios.

Na *situação de formulação*, de fato, esperávamos o desenvolvimento da situação com uso tanto das funções quadráticas quanto da equação da parábola, contudo, considerando que o primeiro modo seria mais provável. Também prevemos a manifestação de *intuições afirmativas*, por meio de uma associação direta da forma geométrica da parábola a uma

função quadrática, bem como *intuições conjecturais* no decorrer da elaboração e descoberta de termos para esquematizar a sua equação.

Ocorreram *intuições conjecturais*, contudo envolvendo o uso da Geometria Plana para a solução (participante P5). Além disso, um dos participantes (P3) esboçou uma estratégia com uso da equação da parábola. Ambos os fatos não foram previstos em nossa análise. Outra situação pertinente foi o caso do participante P2, que não conseguiu solucionar a questão em nenhum dos ambientes (lápiz e papel/GeoGebra), por uma lacuna de conhecimentos prévios e falta de conexão ou alinhamento entre suas ideias, como mostrado em seus registros, tanto escritos quanto de vídeo. Os demais participantes elaboraram suas soluções utilizando funções quadráticas, sendo estas construídas a partir de sistemas lineares (P1 e P8) ou apenas a própria lei de formação deste tipo de função (P4, P6 e P7).

Vale destacar as observações registradas em áudio no diálogo entre P4, P6 e P7, que desencadeou uma sequência de pensamentos que gerou, a partir das *intuições conjecturais*, um percurso para *intuições antecipatórias*, pois à medida que estes participantes discutiam e extraíam o máximo de informações do problema, tentavam resolver partes necessárias à solução final de modo objetivo, reservando os cálculos apenas para etapas consideradas mais complexas.

Na *situação de validação*, almejamos que os professores em formação apresentassem suas soluções tanto no papel quanto no GeoGebra, usando também o quadro branco disponível no laboratório para expor suas ideias. Nesta etapa da TSD, os participantes P1 e P7 apresentaram suas soluções com uso da função quadrática e a discussão foi frutífera entre os presentes. No decorrer do encontro e desta exposição, notamos que a articulação das ideias propostas por P1 e P7 perpassou o campo intuitivo nos quatro tipos de intuição propostos em Fischbein (1987a, 1987b).

Entretanto, destacamos que P2 não conseguiu validar sua solução, pois desconsiderou o valor do parâmetro p na elaboração da equação, o que descaracterizou sua solução como correta para o problema. Já o participante P3 usou Geometria Analítica, mas apresentou uma solução apenas parcial, alegando a possibilidade de “resolver os cálculos de cabeça”. P3 também descumpriu o contrato didático, ao não realizar os registros de vídeo e do arquivo .ggb, como solicitado pela pesquisadora no início deste e dos demais encontros.

Com relação à *situação de institucionalização*, o andamento ocorreu conforme esperado. A pesquisadora apresentou a definição de Venturi (2003), que trata da equação da parábola com vértice fora da origem. Além disso, forneceu uma solução alternativa pela óptica da Geometria Analítica usando o quadro e expondo uma construção no GeoGebra.

A institucionalização apresentada pela pesquisadora gerou uma discussão entre os participantes, em que estes apontaram associações entre a função quadrática, comentando que esta é largamente estudada ao longo da Educação Básica, e a equação da parábola, que raramente é mencionada de forma paralela. Além disso, reforçaram a lacuna dessa discussão no decorrer da graduação.

6.3 Análise *a posteriori* e validação da SD3

Esta situação didática em particular foi elaborada pela pesquisadora, em busca de estimular os professores em formação a ver a parábola por um ponto de vista geométrico, desvinculada de equações prontas. Além disso, propomos uma situação em que a parábola está esboçada com a abertura da sua concavidade voltada para a direita. Nesse sentido, criamos um *milieu* com a intenção de possibilitar um paralelo entre a imagem mental e a gerada da parábola no *software* GeoGebra e sua definição geral, já discutida na situação didática I, avançando para outros modelos de equação que podem ser descritas.

Assim, na *situação de ação*, era esperado que os professores em formação, após compreensão do enunciado proposto, identificassem o modelo de parábola e de sua respectiva equação a serem construídos. A partir disso, esperávamos que eles traçassem uma estratégia para criar uma expressão algébrica que fornecesse uma parábola similar, usando primeiramente o ambiente físico (lápiz e papel), seguindo para uma transposição no ambiente computacional (GeoGebra).

Nesta etapa, os professores mencionaram o fato de nunca terem se deparado com este modelo de situação didática, sem equações previamente estabelecidas. Além disso, estes sujeitos inverteram a ordem dos ambientes, utilizando primeiro o GeoGebra, e após isso passaram para o lápis e papel, para registro de suas conjecturas. Situações que nos chamaram atenção foram o fato de dois participantes (P6 e P7) cogitarem a busca dos coeficientes da função quadrática para a solução, bem como o fato de apenas um dos participantes ter utilizado a ordem correta dos ambientes e os conhecimentos em Geometria Analítica. Percebemos algumas manifestações intuitivas de ordem *afirmativa* e *conjectural*, sobretudo na etapa de produção da solução no *software*.

No decorrer da *situação de formulação*, almejamos que estes professores fizessem uma retomada em seus conhecimentos prévios e relacionassem a visão geométrica e algébrica da parábola pelo âmbito da Geometria Analítica. A intenção era de perceber também *intuições conjecturais* e *antecipatórias* a partir do uso do GeoGebra.

Nesta etapa os professores em formação criaram o foco e a diretriz, sendo esta paralela ao eixo y , e o eixo de simetria sendo o próprio eixo x . Estes passos iniciais foram comuns a quase todos os participantes, todavia, o restante do percurso de cada um dos participantes foi bastante diferente. Notamos a manifestação de intuições predominantemente *conjecturais*, e entendemos que estas foram propiciadas pelo GeoGebra, como vemos nos registros da pesquisa e no relato da experimentação.

A *situação de validação* demandava que estes professores apresentassem suas construções no GeoGebra, mostrando uma parábola com a concavidade voltada para a direita ou para a esquerda, sendo uma equação do tipo $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$.

Os participantes afirmaram ter criado diretriz e foco de modo arbitrários e apresentaram suas construções em formato .ggb, discutindo os modelos de equação descritos por cada um, conforme previsto. Nas discussões, observamos a presença de intuições conjecturais e antecipatórias, partindo da analogia entre a expressão encontrada como y em função de x e sua comparação com a função quadrática, comum ao longo de toda a etapa do final da educação básica.

Por fim, a *situação de institucionalização* ocorreu conforme previsto, em que a pesquisadora trouxe a explanação de Venturi (2003), que discute a parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo x .

6.4 Análise *a posteriori* e validação da SD4

Esta situação didática foi elaborada pela pesquisadora, no intuito de tratar a equação da parábola em sua forma explícita, almejando que os sujeitos reconhecessem seus principais elementos.

Na *situação de ação* era esperado que os sujeitos esboçassem os dados da questão, demarcando suas estratégias de solução no ambiente lápis e papel. Estabelecemos duas possíveis estratégias. A primeira, seria os professores em formação se utilizarem da fórmula de Bháskara para a busca destes elementos, dada a associação existente entre a equação explícita da parábola e a equação do 2º grau, manifestando assim *intuições afirmativas* com base em seus conhecimentos prévios e vivências. A segunda, em situação oposta, seria estes professores, ao desenvolverem um curso de raciocínio a partir de *intuições afirmativas* e *conjecturais*, transformarem a equação explícita da parábola em uma equação reduzida e, após isso, buscarem reconhecer seus elementos (solução padrão ou ideal).

De fato, a segunda estratégia ocorreu de modo mais recorrente. Os professores em formação possuem ainda uma visão arraigada da parábola atrelada ao gráfico da função quadrática, o que pode ser visto tanto nos registros de áudio quanto escritos da pesquisa, além de explicitado na análise preliminar deste trabalho, como em Cerqueira (2015), Lucena e Gitirana (2016), Siqueira (2016), Bermúdez e Mesa (2018), entre outros.

Além disso, a certeza intrínseca, como propõem os trabalhos de Fischbein (1987a; 1987b), configuram o registro de uma *intuição afirmativa*, no que diz respeito à tentativa de calcular de imediato as raízes da equação (participantes P1, P5 e P8), ou considerar os coeficientes a , b e c como os elementos principais desta curva (P6, P7 e P8). Apenas os participantes P1 e P3 apresentaram modelos de *intuições conjecturais*, mencionando a busca pelo foco e o cálculo da derivada da equação para encontrar o vértice da parábola, respectivamente.

No que tange à *situação de formulação*, almejamos que os professores em formação reescrevam a equação dada como um trinômio quadrado perfeito. Caso esta etapa seja iniciada no GeoGebra, era esperado que estes professores manifestassem intuições de natureza *conjectural* e *antecipatória*, a partir da visualização do gráfico esboçado. Entretanto, notamos percursos relativamente distintos dos participantes nesta etapa da situação didática. Dentre nossas observações, podemos destacar:

- Somente os participantes P2 e P3 utilizaram diretamente conhecimentos em Geometria Analítica, demonstrando *intuições conjecturais* acerca do tema;
- P2 foi o único a usar comandos sequenciados e pré-estabelecidos no GeoGebra e a desenvolver *intuições antecipatórias* e *conclusivas*;
- Os demais participantes iniciaram seus procedimentos calculando as raízes, vértice, em seguida, calcularam foco e diretriz, nesta ordem;
- P6, por não conhecer alguns recursos do GeoGebra, se utilizou de conhecimentos em Geometria Plana dentro da construção, ao elaborar sua solução;
- P7 trouxe diversos questionamentos relevantes, destacando-se no que diz respeito à participação e demonstrações intuitivas (ver diálogos dos registros de áudio da seção 5.3.4).

Na *situação de validação* era esperado que os professores em formação encontrassem os valores corretos para o foco, vértice, diretriz e o parâmetro p e apresentassem seus achados com o aporte do *software* GeoGebra. No caso desta situação didática, a validação foi coletiva e um dos professores em formação foi designado pela turma para apresentar o ponto de vista dos presentes. Nesta etapa notamos a marca de *intuições afirmativas* e *conjecturais*, onde o

representante da turma (P7) fez uma caracterização da equação dada considerando-a como uma função quadrática e, em seguida, calculando os valores do foco, do vértice e da diretriz.

Por fim, na *situação de institucionalização*, a pesquisadora fez uma retomada dos argumentos apresentados e demonstrou o conceito de equação explícita da parábola e a relação existente entre a equação da parábola na forma explícita e a estrutura de uma função quadrática. Para tal, a pesquisadora teve amparo nas obras de Lima (2014), Venturi (2003), realizando esta demonstração de forma sucinta no quadro e sua transposição para o GeoGebra.

6.5 Análise *a posteriori* e validação da SD5

Esta situação didática traz uma construção no GeoGebra que visa explorar os diferentes modelos de equação da parábola e quais as condições algébricas, analíticas e geométricas para que estas equações ocorram. Desta forma, era esperado que os professores em formação analisassem esta construção com base em sua percepção visual e manipulação no ambiente GeoGebra, seguindo um conjunto de comandos apresentados no enunciado proposto.

Na *situação de ação* era previsto que os participantes observassem as solicitações da questão, delineando suas ideias a partir de movimentos como rotação, translação, uso do controle deslizante, entre outras possibilidades. Com base nisso, estes participantes poderiam observar todos os elementos presentes na interface do *software* e como eles se interligam, o que ocorreu como previsto na análise *a priori*.

Nesta etapa notamos a manifestação de *intuições afirmativas e conjecturais*, geradas através da percepção visual dos gráficos e a associação destes com os elementos presentes em cada modelo de equação. Os participantes ressaltaram a relação entre as mudanças de sinal dos coeficientes das equações, o intervalo ao qual o ângulo α e o parâmetro p pertencem e o comportamento do gráfico. Segundo Alves (2011), a construção mental de objetos e de processos matemáticos podem ser afetadas pela percepção, sobretudo visual, que possibilita o direcionamento, por vezes inconsciente, do foco de atenção do sujeito.

A *situação de formulação* também ocorreu dentro do esperado. Em teoria, os sujeitos deveriam tomar nota dos elementos visuais observados na construção e das funções relativas aos controles deslizantes α e p . Neste caso, os participantes discutiram suas conjecturas em duplas, manifestando *intuições afirmativas* relacionadas diretamente à visualização/percepção da construção, como a associação da concavidade da parábola e do ângulo entre o eixo de

simetria e o eixo das abscissas. O percurso entre *intuições afirmativas* → *intuições conjecturais* foi percebido na argumentação proposicional, com o uso do “se... então” e analogias registradas em áudios da pesquisa.

Para a *situação de validação* era presumido que os participantes apresentassem os distintos modelos de equações reconhecidas na manipulação da construção – reduzida, explícita, geral – a partir das observações feitas na etapa anterior, mostrando a condição para que uma cada destas equações ocorresse. No caso, previmos na análise *a priori* a manifestação de *intuições conjecturais*, estimuladas pelos conhecimentos prévios dos sujeitos, tanto do seu percurso acadêmico quanto do que se estudou no decorrer dos encontros anteriores.

Dadas as circunstâncias para a solução da situação didática, os participantes realizaram um registro escrito, como forma de organizar sua solução, elegendo um representante entre eles para apresentar as conclusões a que chegaram de modo coletivo. Apesar da presença de *intuições antecipatórias* e *conclusivas* em suas colocações, ainda notamos dificuldades na generalização e no uso da linguagem matemática formal atinentes ao tema discutido.

Na *situação de institucionalização*, a pesquisadora retomou as notas dos professores, sintetizou tudo e demonstrou a equação geral da parábola no quadro, fazendo um paralelo com a construção no GeoGebra, conforme planejado. Nesta ocasião, os professores em formação mencionaram que analisar o gráfico da equação geral e observar os eixos de simetria não coincidentes e não paralelos aos eixos coordenados foi uma novidade, sendo algo não explorado no decorrer da sua formação.

6.6 Análise do questionário final

Nesta subseção trazemos os resultados do questionário final respondido pelos professores em formação, onde estes apresentam sua visão sobre a abordagem utilizada nesta pesquisa para o estudo da parábola com o uso do software GeoGebra, além de apresentarem suas considerações sobre a contribuição da experiência vivenciada para a sua formação.

Optamos por utilizar um questionário aberto com três questões, dado o fato de que esse modelo de abordagem tem menor influência sobre os sujeitos, além da possibilidade de fornecer esclarecimentos e comentários significativos para a interpretação dos dados coletados (MATTAR, 1994). As questões direcionadas aos professores em formação podem ser observadas no Quadro 8:

Quadro 8: Perguntas do questionário final.

Questão 1: Como você considera a contribuição do software GeoGebra para a resolução das situações didáticas propostas, de modo geral?

Questão 2: Em seu ponto de vista, de que forma o suporte dado pelo GeoGebra pode propiciar aos alunos uma melhor compreensão sobre a parábola? Justifique.

Questão 3: Em sua opinião, você considera que sua participação nesta pesquisa contribuiu para sua formação docente? Em caso afirmativo, de que forma?

Fonte: Elaboração da autora (2021).

A partir das vivências no decorrer dos encontros, os professores em formação forneceram respostas positivas ao questionário, reforçando a importância do GeoGebra para a construção de suas soluções e de um novo olhar sobre a parábola, além da exploração de recursos ainda desconhecidos por eles dentro do ambiente do *software*.

Na primeira pergunta, os participantes citaram aspectos como observar as construções de diferentes ângulos, manipulá-las, a precisão nas informações gráficas fornecidas pelo *software* e seu dinamismo. Outro ponto que nos chamou a atenção e que foi mencionado em nossa análise preliminar, também foi apontado pelos sujeitos P3 e P4, que é o fato de que o GeoGebra fornece possibilidades de visualizar para além do ambiente lápis e papel:

... com simulações e manipulações que o professor não conseguiria alcançar apenas com o quadro branco e pincel. (P3)

De modo geral, o software propicia uma visão mais aprofundada das situações didáticas, na qual somente por meio de uma resolução na folha não possui a mesma dimensão de compreensão, diferentemente do uso do software. (P4)

Isto foi mencionado no decorrer da pesquisa, sendo referenciado pelas obras de Alves e Borges Neto (2012), Iglesias e Ortiz (2018) e Alves (2019) e consideramos isto como uma percepção de grande relevância por parte dos sujeitos. Já com relação à segunda pergunta, o destaque dentro das respostas está nos termos “visualização”, “manipulação” e “percepção”. Os participantes enfatizaram que consideram estas como as maiores vantagens de se utilizar o *software* para trabalhar com este tema. Dentre as falas, destacamos uma que representa a visão geral deles, que é o registro de resposta do participante P5:

A ferramenta traz uma melhor compreensão no 1º estágio de resolução de questões, no que diz respeito a imagem, auxiliando na visualização, além de trazer outros parâmetros que quando resolvidos de maneira manual não são tão perceptíveis, como o exemplo do foco e a diretriz da parábola, e também de mensurar corretamente outras medidas. (P5)

No que diz respeito à terceira pergunta, que versa sobre a contribuição desta atividade de pesquisa em sua formação docente, optamos por apresentar um quadro com todos os

registros de resposta dos sujeitos, pois consideramos que este ponto é crucial para a relevância acadêmica do trabalho desenvolvido. Podemos observar os registros de respostas dos participantes no Quadro 9:

Quadro 9: Resposta à terceira questão do questionário final.

P1: Sem sombra de dúvida. Na nossa profissão de docência, nos deparamos com muitas situações que dificultam o nosso trabalho, e cabe a nós pesquisarmos por formas de solucioná-las. Participar de projetos de pesquisa como esse nos estimula a pesquisar, pois através da interação com as situações didáticas, do trabalho em equipe com colegas que têm diferentes perspectivas e formas de resolver das nossas, nos tornamos também sujeitos da pesquisa. Para sermos bons professores, precisamos ter um bom conhecimento dessas determinadas situações, e esse projeto nos apresentou algumas dessas. P2: Sim, pois o software foi muito utilizado no decorrer da pesquisa e sem dúvida isso nos abriu mais a visão para o seu uso com os alunos nas aulas, a fim de atrair a atenção dos mesmos e fazer com que eles aprendam utilizando a tecnologia. P3: Sim, complementou de forma significativa a metodologia que eu posso usar na sala de aula. Agora posso usar essa ferramenta para mostrar para os meus alunos conteúdos abstratos de forma lúdica. P4: Sim, pois com certeza nossas técnicas e maneiras de se trabalhar esse conteúdo foram melhoradas durante essa pesquisa. Os assuntos que envolvem a parábola nas disciplinas obrigatórias eu não tive aprofundamento com o software GeoGebra, então considero importante para o meu trabalho. P5: Sim, anteriormente à pesquisa não havia tido contato com o software de modo mais técnico, mas agora para mim tornou-se mais maleável e prático, abrindo um “mar” de possibilidades e aplicabilidades no ensino de vários conteúdos geométricos e principalmente no ensino da parábola. P6: Me ajudou muito, pois eu conheci um pouco mais sobre o GeoGebra, conheci conceitos da parábola que eu ainda não tinha visto, ganhei nova possibilidade de didática usando o GeoGebra, já com essa pesquisa aumentou bastante meus conhecimentos em todos os tópicos abordados da parábola, além de conhecer melhor as ferramentas do software. P7: Sim, hoje consigo ter mais propriedade para falar sobre uma parábola. Antes eu me limitava apenas ao vértice, concavidade, pontos de intersecção com os eixos x e y. hoje consigo compreender melhor outras definições e propriedades, por exemplo, o que é o foco de uma parábola, a diretriz e relacionar as coisas. P8: Sim, pois foram abordadas situações que eu ainda não conhecia durante a graduação. Quando eu via uma parábola, eu associava logo de modo imediato às raízes de uma equação como principal objetivo de solução, desconsiderando os elementos foco, vértice e diretriz e o eixo de simetria. Eu aprendi bastante sobre o conteúdo de parábola de uma maneira diferente e isso fez com que eu absorvesse melhor o conteúdo, o que vai me ajudar a explicar pros meus alunos futuramente quando eu tiver em sala de aula.
--

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Com base nas falas dos participantes, interpretamos que a pesquisa foi bem aceita, além de demonstrarem se sentirem mais aptos com uma visão diferente sobre o assunto parábola. Nessa perspectiva, compreendemos que o trabalho desenvolvido teve contribuição significativa para a formação destes licenciandos, que porventura podem se utilizar, tanto destas situações didáticas quanto desenvolverem outras, com base na experiência vivenciada, para trabalhar este tema em sala de aula.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS E PESQUISAS FUTURAS

Este trabalho teve como cerne principal compreender como professores em formação inicial estudam o tópico de parábolas dentro da Geometria Analítica e em disciplinas afins no decorrer da licenciatura em Matemática. Nesse sentido, realizamos um levantamento que parte da ligação entre alguns pontos, como a relevância do ensino de Geometria Analítica para a formação docente e sua atuação profissional, a importância da articulação entre Álgebra e Geometria, o ensino de parábolas em Geometria Analítica e o uso de *softwares* ou aplicativos para na transposição didática deste tópico.

Dessa maneira, nosso pontapé inicial partiu de uma problematização que observou, no decorrer da análise preliminar da Engenharia Didática realizada, as lacunas ainda presentes na formação inicial do professor de Matemática, no que diz respeito ao ensino deste tema, o modelo recorrente de abordagem tradicional em seu ensino e a fragmentação do assunto, desconectado da realidade e de tópicos correlatos, como funções quadráticas, por exemplo.

Para uma observação da realidade e no intuito de traçar estratégias para contribuir com a formação docente no ensino deste tópico, apoiamos-nos em referenciais teóricos do campo da Didática da Matemática Francesa, como Brousseau (1986, 1996a, 1996b, 2002, 2008) em que utilizamos a Teoria das Situações Didáticas (TSD), Artigue (1988, 1996, 2009, 2020), na concepção de uma Engenharia Didática (ED) enquanto metodologia de pesquisa, Tempier (2011), Perrín-Glorian e Bellemain (1993, 2011) como suporte à compreensão de como conceber uma Engenharia Didática de Formação (EDF), dado o fato de que desenvolvemos esta pesquisa na formação inicial, entre outras obras relevantes e relacionadas ao tema.

Dada a necessidade de se compreender como o professor em formação traz o tópico de parábolas enquanto conhecimento prévio, do ponto de vista epistêmico, bem como o desenvolve (ou supostamente o desenvolveria no lócus da sala de aula), sentimos a necessidade de entender o funcionamento de seu raciocínio matemático ao interagir com o tema em questão. Para tal, utilizamos mais um aporte teórico, que foram as Categorias do Raciocínio Intuitivo, do psicólogo e pesquisador romeno Efraim Fischbein (1987a, 1987b), sendo uma teoria basilar para nossa observação empírica, no que diz respeito à interpretação e registro de manifestações intuitivas dos professores em formação participantes desta pesquisa. Em complementaridade, o GeoGebra foi o aporte tecnológico capaz de nos fornecer parte desses registros empíricos.

Assim, a princípio, estabelecemos como objetivo inicial deste trabalho realizar uma análise de como a TSD poderia contribuir para o ensino de parábolas, mediante o estímulo à

mobilização das Categorias do Raciocínio Intuitivo com arrimo do *software* GeoGebra. E diante deste objetivo, traçamos outros, que de modo específico seriam a espinha dorsal que nos auxiliaria a atingir o objetivo geral da pesquisa, que foram, sumariamente, (i) identificar obstáculos que permeiam o ensino de parábolas pelo prisma da Geometria Analítica; (ii) verificar se as situações didáticas elaboradas com o arrimo do *software* GeoGebra proporcionam estímulos para uma mobilização do campo intuitivo, e; (iii) reconhecer, neste meio tempo, as concepções epistêmicas dos professores em formação inicial participantes da pesquisa, com base em suas ações e estratégias para solucionar as situações didáticas elaboradas e propostas.

Com base nestes objetivos, traçamos em nossa análise *a priori* um conjunto de situações didáticas norteadas pela TSD e modeladas pelo GeoGebra, que objetivou compreender, do ponto de vista da intuição, como estes professores em formação traziam a parábola como conhecimento prévio e de que forma este tema seria trabalhado por eles em um futuro lócus de trabalho.

Na etapa de experimentação, ficou clara a presença marcante de uma visão da parábola quase que exclusivamente pelo prisma algébrico, ligada ao tópico de funções quadráticas, explorado na Educação Básica. Esta visão foi se ampliando para os prismas geométrico e analítico, conforme as situações didáticas foram sendo desenvolvidas e discutidas conjuntamente. Como aponta Crescenti (2008), a maneira como os professores ensinam está diretamente relacionada, entre outras coisas, aos conhecimentos prévios que possuem sobre o tema que ensinam, bem como a relação que estabelecem com e em sua práxis. Em outras palavras, entendemos que, de modo natural, estes professores ensinarão (e alguns já ensinam) conforme aprenderam, o que confirma algumas de nossas hipóteses estabelecidas.

Existem variáveis intrínsecas ao que se propôs com estas situações didáticas e que foram consideradas em nossa análise, sendo essenciais para a validação desta engenharia. Assim, consideramos como variáveis as possíveis dificuldades dos professores em formação em apresentar as soluções no GeoGebra, sua bagagem de conhecimentos prévios sobre o tema ser insuficiente para a compreensão das situações didáticas, bem como estes professores em formação não apresentarem claramente manifestações intuitivas passíveis de registro empírico.

A partir disso, retomamos nossa pergunta de pesquisa, que indaga: Como a Teoria das Situações Didáticas pode favorecer o ensino do conceito de parábolas, a partir da mobilização das categorias do raciocínio intuitivo, sendo um suporte ao futuro professor de Matemática? E

buscamos, sumariamente, responder a esta pergunta com base nos resultados da experimentação deste trabalho.

Dito isto, ainda sobre a experimentação, percebemos que os participantes conheciam o *software* de modo elementar. Porém, as situações didáticas oportunizaram a estes professores um aprimoramento no uso de muitas ferramentas, assim como desencadearam percepções geométricas e algébricas por meio da manipulação e visualização de elementos dentro das construções. Como consequência, com o aporte da TSD, do GeoGebra e de toda a estrutura elaborada na análise *a priori*, conseguimos captar momentos em que as manifestações de ordem intuitiva ocorreram, além de proporcionar um ambiente de discussão fértil. No percurso da experimentação a TSD foi fundamental na estruturação das sessões didáticas, no que diz respeito a interpretar a intuição e os diferentes níveis de raciocínio produzidos, reconhecendo-os dentro do percurso de suas dialéticas.

Os participantes, mesmo com conhecimentos ainda elementares sobre o GeoGebra, não apresentaram maiores dificuldades em seu uso. Em linhas gerais, eles buscaram os comandos necessários, percorrendo cada uma das guias de ferramentas e explorando o *software* de forma direcionada ao que se propunha nas construções, usando o dinamismo que, de modo peculiar, é intrínseco ao GeoGebra.

As Categorias do Raciocínio Intuitivo manifestadas foram, sobretudo, de ordem *afirmativa* e *conjectural*, dada a bagagem de conhecimentos prévios restrita dos sujeitos no que diz respeito à parábola pela óptica da Geometria Analítica. Não obstante, observamos também *intuições antecipatórias* e *conclusivas*, mesmo que em menor escala, o que significa que as situações didáticas desenvolvidas tiveram potencial para estimular a intuição destes professores em formação inicial, instituindo uma base para o desenvolvimento de generalizações, analogias, compreensão de propriedades, bem como uma visão diferente do ensino tradicional da parábola. Consideramos isto como um contributo da pesquisa para a sua formação. Contudo, outra observação que colocamos é a dificuldade de abstrair e generalizar certos conceitos que foi demonstrada pelos participantes no decorrer de todas as situações didáticas. A desconexão do tópico de parábolas com a realidade e o obstáculo no estabelecimento de conjecturas e interpretação de problemas ainda é um entrave presente no raciocínio demonstrado por eles.

Decerto, era esperado que os participantes realmente apresentassem dificuldades no desenvolvimento das situações, dado o fato de que esta pesquisa se situa no espaço-tempo de um cenário pós-pandemia, em que os licenciandos percorreram parte do curso de graduação assistindo as aulas das disciplinas no formato remoto, sendo este modelo de ensino

emergencial repleto de limitações e abreviações. Entretanto, também era esperado que estes participantes conseguissem resolver as situações didáticas com seu esforço pessoal e conhecimentos prévios, dado o nível de conhecimento necessário para tal. Muito do que ocorreu, de fato, foi previsto na análise *a priori*. Contudo, algumas situações peculiares como o uso de mediatrizes para a construção da parábola, o cálculo de derivada para a elaboração de etapas da solução, por exemplo, entre outros detalhes relatados anteriormente na experimentação foram fatores não esperados e nos surpreenderam de forma positiva.

Os instrumentos de coleta de dados – registros de vídeo e áudio, fotografias, arquivos .ggb e material escrito – de forma combinada nos forneceram um suporte à compreensão de como a intuição se manifesta dentro do campo matemático, oportunizando um olhar diferente sobre como cada sujeito entende um mesmo conceito, sobre os distintos caminhos que podem ser percorridos para a solução de um mesmo problema, além de nos tornar mais sensíveis à compreensão de possíveis erros de base conceitual que porventura possam ser percebidos em nosso percurso enquanto docentes.

Entretanto, ressaltamos que variados impasses ocorreram para que esta pesquisa pudesse ser executada e estes dados fossem apresentados aqui. Dentre estes, adversidades como: conseguir o espaço físico do laboratório, com datas e horários disponíveis para a aplicação da pesquisa; o processo de seleção e recrutamento dos sujeitos, a pouca adesão dos estudantes do curso e a indisponibilidade dos mesmos, pois muitos trabalham e/ou residem fora de Sobral, onde a pesquisa foi aplicada; os contratempos ocorridos até a aprovação do Conselho de Ética e Pesquisa da Universidade Estadual Vale do Acaraú, para que o andamento das atividades pudesse ser autorizado a começar; a própria catalogação do material e interpretação dos dados e seu caráter de subjetividade, dentro de uma busca por não fugir do tema e manter a fidelidade às ideias dos autores e a imparcialidade nas análises realizadas. Estes podem ser considerados como fatores de complexidade ou dificuldades inerentes ao andamento deste trabalho.

Por fim, esperamos que as análises apresentadas no desenvolvimento desta Engenharia Didática possam ser um contributo de relevância acadêmica para o trabalho com o tema de parábolas no campo da Geometria Analítica, dada a importância do ensino deste campo do conhecimento, de modo vinculado à realidade. Outrossim, almejamos que a atividade de pesquisa realizada possa ser replicada e/ou adaptada para outros contextos, como material complementar à metodologia docente, bem como por licenciandos que visam ampliar seu leque de conhecimentos ao percorrer por novas possibilidades de se trabalhar este assunto.

Com as adequações necessárias, acreditamos que esta pesquisa pode ser ampliada e implementada em outros níveis de ensino e turmas, como a Educação Básica.

Diante do exposto nas fases desta Engenharia Didática, destacamos a importância de se trabalhar a parábola no âmbito da Geometria durante a licenciatura, abordando-a sobretudo a partir do conceito de lugar geométrico, com vistas a contribuir para que o professor em formação inicial desenvolva um olhar que o permita construir uma relação entre a visão geométrica e analítica da parábola. Nesse sentido, recomendamos uma abordagem com aporte da tecnologia, como o GeoGebra, para que estes aspectos (geométrico e analítico) e suas relações sejam trabalhados de modo mais proficiente, pelo viés da Geometria Dinâmica. Desta forma, a relação entre geometria, álgebra e tecnologia, como proposto pela BNCC seria mais frutífera, proporcionando a estruturação de outros modelos didáticos que poderiam ser trabalhados nos diferentes níveis em que o estudo da parábola ocorre, sendo um contributo para o ensino deste tema e para a formação e práxis do professor de matemática.

De modo geral, o estudo da parábola está presente no cotidiano dos estudantes da Educação Básica e, em alguns casos, do Ensino Superior, sendo atinente a outras áreas do conhecimento além da matemática. Contudo, percebemos nesse percurso que seu estudo ainda apresenta fragilidades. Diante dos dados coletados, podemos inferir que os moldes estruturais sobre os quais o estudo da parábola se debruça na licenciatura, em particular na Universidade Estadual Vale do Acaraú, apresentam modelos de ensino voltados para um ensino formal/tradicional, com priorização da Álgebra em detrimento da Geometria. Apesar do nome da disciplina trazer consigo a palavra Geometria, seu enfoque tem sido, até então, essencialmente algébrico. Partindo deste ponto de vista, sugerimos ainda a possibilidade de reflexão e reestruturação no formato metodológico de como este conteúdo tem sido abordado ao longo dos anos, tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior, considerando as contribuições geradas por este trabalho.

Enquanto perspectiva futura, acreditamos na possibilidade da continuidade desta pesquisa de modo mais amplo, explorando outras cônicas ou mesmo outros tópicos deste campo de estudos, em busca de aprimorar formas de se trabalhar a Geometria Analítica associada ao GeoGebra pelo prisma intuitivo, contribuindo para a formação docente.

REFERÊNCIAS

- ABAR, C A. A. P. A Transposição Didática na criação de estratégias para a utilização do GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, v. 9, n. 1, p. 59-75, 2020. DOI: <https://doi.org/10.23925/2237-9657.2020.v9i1p59-75>.
- AGUSTINI, E. **Notas para aulas: Geometria Analítica**. Minas Gerais: Universidade Federal de Uberlândia, 2020. Disponível em: <https://sites.google.com/site/edsonagustini/geometria-analitica?authuser=0>. Acesso em: 13 abr. 2022.
- ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Paraná: UFPR, 2007.
- ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPED. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 3, n. 1, p. 62-77, 2008. DOI: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2008v3n1p62>.
- ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. Engenharia didática: evolução e diversidade. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 22-52, 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/viewFile/1981-1322.2012v7n2p22/23452>. Acesso em: 20 ago. 2021.
- ALVES, F. R. V. **Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis**. 2011a. 353 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011. Disponível em: http://www.teses.ufc.br/tde_biblioteca/login.php. Acesso em: 06 jun. 2021.
- ALVES, F. R. V. Categorias intuitivas para o ensino do Cálculo: descrição e implicações para o seu ensino. **Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Tecnologia**, v. 9, n. 3, p. 1-21, 2016(a).
- ALVES, F. R. V. Engenharia Didática para a generalização da sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura. **Revista Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 18, n. 1, p. 61-93, 2016(b).
- ALVES, F. R. V. Didática das Ciências e Matemática (DCEM): surgimento e implicações para a formação do professor. **Ienci – Investigações em Ensino de Ciências**, v. 22, n. 3, p. 291-320, 2017. DOI: 10.22600/1518-8795.ienci2017v22n3p291.
- ALVES, F. R. V. Engenharia Didática de Formação (EDF): sobre o ensino dos Números (Generalizados) de Catalan (NGC). **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v. 20, n. 2, p. 47-83, 2018. DOI: <http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i2p47-83>.
- ALVES, F. R. V. Visualizing the Olympic Didactic Situation (ODS): teaching mathematics with support of the GeoGebra software. **Acta Didactica Napocensia**, v. 12, n. 2, p. 97-116, 2019.
- ALVES, F. R. V. Situações Didáticas Olímpicas (SDOs): Ensino de Olimpíadas de Matemática com arrimo no software GeoGebra como recurso na visualização. **Alexandria –**

Revista de Educação, Ciência e Tecnologia, v. 13, n. 1, p. 319-349, 2020. DOI: <https://doi.org/10.5007/1982-5153.2020v13n1p319>.

ALVES, F. R. V.; BORGES NETO, H. A intuição na Sequência Fedathi: uma aplicação no Ensino Médio. **Conexões, Ciência e Tecnologia**, v. 3, n. 1, p. 30-41, 2009. DOI: <https://doi.org/10.21439/conexoes.v3i1.126>.

ALVES, F. R. V.; BORGES NETO, H. A contribuição de Efraim Fischbein para a Educação Matemática e a formação do professor. **Revista Conexão, Ciência e Tecnologia**, Fortaleza, v. 5, n. 1, p. 38-54, 2011. DOI: <https://doi.org/10.21439/conexoes.v5i1.441>.

ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Engenharia Didática de Formação (EDF): Repercussões para a formação do professor de matemática no Brasil. **Educação Matemática em Revista**, Rio Grande do Sul, v. 2, n. 18, 2017. Disponível em: <http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/EMR-RS/article/view/1849>. Acesso em: 01 ago. 2021.

ALVES, F. R. V.; DIAS, M. A. Engenharia Didática para a Teoria do Resíduo: Análises Preliminares, Análise a Priori e Descrição de Situações-Problema. **Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas**, v. 10, n. 1, p. 2-14, 2019. DOI: <https://doi.org/10.17921/2447-8733.2019v20n1p2-14>.

ALVES, F. R. V.; PEREIRA, A. C. C. Ensino de Geometria Analítica: alguns pressupostos da Sequência Fedathi no contexto da formação do professor de Matemática. **Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica**, v. 6, n. 2, p. 26 - 45, 2016. Disponível em: <https://ojs.ifes.edu.br/index.php/dect/article/view/157>. Acesso em: 16 out. 2020.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988. Disponível em: <https://revue-rdm.com/1988/ingenierie-didactique-2/>. Acesso em: 10 jan. 2021.

ARTIGUE, M. Engenharia Didáctica. In: BRUN, J. (Org.). **Didáctica das matemáticas**. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, p. 193-217, 1996.

ARTIGUE, M.; DOUADY, R.; MORENO, L. **Ingeniería Didáctica en Educación Matemática**: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.

ARTIGUE, M. L'Ingénierie Didactique: un essai de synthèse. In: MARGOLINAS, et al. (org.). En amont et en aval des ingénieries didactiques, XV^a École d'Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (PUY-de-Dôme). **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage, v. 1, p. 225-237, 2009.

ARTIGUE, M. Metodologias de pesquisa em Didactique des Mathématiques: Où en sommes-nous? **Educação Matemática Pesquisa**, Número temático - Metodologia de pesquisa em Educação Matemática, v. 22, n. 3, p. 25-64, 2020. DOI: <http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i3p025-064>

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. 11^a ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

BERMÚDEZ, E. A.; MESA, J. H. L. Estudio histórico, epistemológico y didáctico de la parábola. **Práxis & Saber**, v. 9, n. 19, p. 63-88, 2018. DOI: <https://doi.org/10.19053/22160159.v9.n19.2018.7922>.

BITTAR, M. Contribuições da teoria das situações didáticas e da engenharia didática para discutir o ensino de matemática. In: TELES, R.; BORBA, R.; MONTEIRO, C. **Investigações em Didática da Matemática**. Editora Universitária UFPE, p. 100-131, 2017. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/321148987>. Acesso em: 20 ago. 2021.

BOHRER, A.; TINTI, D. S. Mapeamento de pesquisas sobre a função quadrática em contextos de ensino e/ou aprendizagem da matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 23, n. 1, p. 201-230, 2021. DOI: <http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2021v23i1p201-230>.

BOYER, C. B. **História da matemática**. 3 ed. São Paulo: Editora Blücher, 2012.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 01 out. 2020.

BROUSSEAU, G. **Les Mathématiques du Cours Préparatoire, Fascicule 1**. Paris: Dunod, 1965. Disponível em: <https://guy-brousseau.com/3144/les-mathematiques-du-cour-preparatoire-1965/>. Acesso em: 11 jan. 2021.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Willy Vanhamme et Jacqueline Vanhamme. **La problématique et l'enseignement de la mathématique**. Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques, Louvain-la-neuve, p.101-117, 1976. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00516569v2>. Acesso em: 27 set. 2021.

BROUSSEAU, G. **Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques**. 906 f. Thèse (Docteur d'État es Sciences). Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 1986. Disponível em: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00471995v3>. Acesso em: 20 abr. 2021.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. In : BEDNARZ, N.; GARNIER, C. **Construction des savoirs Obstacles et Conflits**. Montreal: CIRADE Les éditions Agence d'Arc inc., 1989. p. 41-63.

BROUSSEAU, G. Le contrat didactique: le milieu. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 9, n. 3, p. 309-336, 1990. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00686012>. Acesso em: 02 nov. 2021.

BROUSSEAU, G. **Fundamentos e métodos da Didática da Matemática**. In: BRUN, Jean. (Org.). **Didáticas das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996a. p. 35-113.

BROUSSEAU, G. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, C.; SAIZ, I. **Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996b.

BROUSSEAU, G. **La théorie des situations didactiques**. Canadá: Université de Montréal, 1997a.

BROUSSEAU, G. **Theory of Didactical Situations in Mathematics**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997b.

BROUSSEAU, G. **Theory of Didactical Situations in Mathematics**: Didactique des Mathématiques, 1970-1990. New York, Boston: Kluwer Academic Publishers, 2002.

BROUSSEAU, G. Research in Mathematics Education. **Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education (ICME-10)**, Technical University of Denmark. Copenhagen, Denmark, 4-11 July, 2004, p. 244-254.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

BROUSSEAU, G.; GIBEL, P. Didactical handling of students' reasoning processes in problems solving situations. In: LABORDE, C.; PERRÍN-GLORIAN, M. J.; SIERPINSKA, A. **Beyond the Apparent Banality of the Mathematics Classroom**. Netherlands: Springer, 2005. (p. 13-58).

CERQUEIRA, A. A. **Parábola e suas aplicações**. 64f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2015. Disponível em: <https://repositorio.ufba.br/ri/bitstream/ri/22969/1/adriano.pdf>. Acesso em: 15 ago. 2021.

CHEVALLARD, Y. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. In : **L'Université d'été**, 1998, p. 91-118. Actes de l'Université d'été La Rochelle. Clermont-Ferrand, France: IREM, 1998.

COSTA, A. P. Pensamento Geométrico: em busca de uma caracterização à luz de Fischbein, Duval e Pais. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 9, n. 18, p. 152-179, 2020. Disponível em: <http://revista.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/651>. Acesso em: 08 jul. 2021.

CRESCENTI, E. P. A formação inicial do professor de matemática: aprendizagem da Geometria e atuação docente. **Práxis Educativa**, v. 3, n. 1, p. 81-94, 2008. Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=89430109>. Acesso em: 10 out. 2022.

DIAS, C. C.; DANTAS, N. M. **A parábola – aula 05**. In: Geometria Analítica e Números Complexos. 320 p. Programa Universidade à Distância (UNIDIS grad). Natal, RN: EDUFRN, 2006, p. 1-16.

DOUADY, R. Nacimiento y desarrollo de la didáctica de las matemáticas en Francia: rol de los IREM. In: ARTIGUE, M; DOUADY, R; MORENO, L; GÓMEZ, P. **Ingeniería Didáctica en Educación Matemática**. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, cap. 1, p. 1-6, 1995.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 5 ed. São Paulo: Editora da Unicamp, 2011.

FELTES, C. M.; PUHL, C. S. Gráfico da função quadrática: uma proposta de ensino potencialmente significativa. **Scientia cum Industria**, v. 4, n. 4, p. 202-206, 2016. DOI: <http://dx.doi.org/10.18226/23185279.v4iss4p202>

FISCHBEIN, E. Intuition and proof. **For the Learning of Mathematics**, Montreal, Canadá, v. 3, n. 2, p. 9-18, 1982. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/40248127>. Acesso em: 14 nov. 2020.

FISCHBEIN, E. **Intuition in Science and Mathematics: an educational approach**. Netherlands: D. Reidel Public, Mathematics Educational Library, 1987a.

FISCHBEIN, E. The intuitive dimension of Mathematical Reasoning. In: ROMBERG, T. A.; STEWART, D. M. (Orgs.). **The Monitoring of School Mathematics: Background Papers**, volume 2: Implications from Psychology. Wisconsin Center for Education Research, Madison, p. 47-70, 1987b.

FISCHBEIN, E. Tacit Models and Mathematical Reasoning. **For the Learning of Mathematics**, v. 9, n. 2, p. 9-14, 1989. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/40247948>. Acesso em: 16 fev. 2021.

FISCHBEIN, E. The Theory of Figural Concepts. **Educational Studies in Mathematics**, v. 24, n. 2, p. 139-162, 1993.

FISCHBEIN, E. The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. In: BIEHLER, R.; SCHOLZ, R. W.; STRÄßER, R.; WINKELMANN, B. (Orgs.). **Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline**, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994. p. 231-245.

FISCHBEIN, E. Intuitions and Schemata in Mathematical Reasoning. In: **Educational Studies in Mathematics**, v. 38, n. 11, p. 11-50, 1999.

FISCHBEIN, E. Intuition in Science and Mathematics: an educational approach. Netherlands: D. Reidel Public, Mathematics Educational Library, 1987. 225p. Resenhado por Renata Teófilo de Sousa. **Revista Contraponto: Discussões científicas e pedagógicas em Ciências, Matemática e Educação**, Concórdia, SC, v. 3, n. 3, p. 199-203, 2022. DOI: <https://doi.org/10.21166/ctp.v3i3.2083>.

FISCHBEIN, E.; GAZIT, A. Does the Teaching of Probability improve probabilistic intuitions? **Educational Studies in Mathematics**. v. 15, n. 17, p. 1-24, 1984.

GÁLVEZ, G. A Didática da Matemática. In: PARRA, Cecília.; SAIZ, Irma. (Orgs.). **Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas**. Tradução de: Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: ArtMed, 1996.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNIO, J. R. **Matemática Completa**. 2 ed. Coleção Matemática Completa – 3ª série. São Paulo: FTD, 2005.

GRANDE, A. L. A intuição segundo Poincaré e o Princípio de Cavalieri na resolução de algumas questões relacionadas ao cálculo. **Anais... XI Encontro Nacional de Educação Matemática**. Curitiba – Paraná, 2013. Disponível em:

http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/326_299_ID.pdf Acesso em: 01 out. 2021.

GRANDE, A. L.; SILVA, B. A. Resolução de questões relacionadas ao cálculo e o uso da intuição e do rigor. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v. 2, n. 1, p. 27-38, 2013.

GRIZE, J. B. Logique naturelle et représentations sociales. **Papers on social representations**, v. 2, n. 3, p. 1-9, 1993. Disponível em: http://www.psr.jku.at/PSR1993/2_1993Grize.pdf. Acesso em: 31 mai. 2022.

GUEDES, P. C. C. Aplicação do software GeoGebra ao ensino da geometria analítica. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 37 - Ed. Especial PROFMAT, p. 365–375, 2015. Disponível em: <https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/download/14555/pdf>. Acesso em: 19 ago. 2021.

HALBERSTADT, F. F. **A aprendizagem da Geometria Analítica no Ensino Médio e suas representações semióticas no Grafeq**. Dissertação. 174 f. (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física), Universidade Federal de Santa Maria - UFSM, Santa Maria, 2015. Disponível em: <https://repositorio.ufsm.br/handle/1/6751>. Acesso em: 04 out. 2020.

IGLESIAS, M.; ORTIZ, J. Usos del software de geometría dinámica en la formación inicial de profesores de matemáticas. **Matemáticas, Educación y Sociedad**, v. 1, n. 2, p. 21-35, 2018.

KIDRON, I. Tacit models, treasured intuitions and the discrete - continuous interplay. **Educational Studies in Mathematics**, v. 78, n. 1, p. 109-126, 2011. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/41485943>. Acesso em: 10 ago. 2021.

LABORDE, C. Affronter la complexité des situations didactiques d'apprentissage des mathématiques en classe: défis et tentatives. **Didaskalia**, v. 10, n. 1, p. 97-112, 1997. DOI: <https://doi.org/10.4267/2042/23800>.

LAGRANGE, J.; ARTIGUE, M.; LABORDE, C.; TROUCHE, L. (2003). Technology and Mathematics Education: A Multidimensional Study of the Evolution of Research and Innovation. In: BISHOP, A.; CLEMENTS, M.; KEITEL, C.; KILPATRICK, J.; LEUNG, F. (Orgs.). **Second International Handbook of Mathematics Education**. Dordrecht: Springer International Handbooks of Education, v. 10. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-010-0273-8_9.

LECLERCQ, G. Quelques usages de l'activité d'ingénierie de formation. **Revue Savoirs**, v. 2, n. 2, p. 71-104, 2002. Disponível em: <https://www.cairn.info/revue-savoirs-2003-2-page-71.html>. Acesso em: 23 ago. 2021.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1994.

LIMA, E. L. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. Coleção Matemática Universitária. 324 p. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

LIMA, J. P. Um ambiente dinâmico para o ensino das secções cônicas. **Ciência e Natura**, v. 37, Edição Especial Profmat, p.192–202, 2015. DOI: 10.5902/2179460X14597.

LOUZADA, S. **Relações entre cônicas e funções no ensino médio**. 66 p. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT. Universidade Federal do Espírito Santo, Espírito Santo, 2013. Disponível em: <http://repositorio.ufes.br/handle/10/4813>. Acesso em: 20 jul. 2021.

LUCENA, R.; GITIRANA, V. Articulações Internas à Matemática: a Parábola e a Função Quadrática com o GeoGebra. **Educação Matemática em Revista**, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, n. 51, p. 25-34, 2016. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/article/view/679>. Acesso em: 11 jan. 2022.

MACEDO, H. R. **Estudo sistemático das parábolas**. 66f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, João Pessoa, 2015. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/9431>. Acesso em: 22 jul. 2021.

MARGOLINAS, C. Situations, savoirs et connaissances...comme lieux de rencontre? **Formation et pratiques d'enseignement en questions**, v. 2, n. 19, p. 31-39, 2015.

MATTAR, F. N. **Pesquisa de marketing: metodologia, planejamento, execução e análise**. Volume 2. 2 ed. São Paulo: Atlas, 1994.

NASSER, L. O papel da abstração no pensamento matemático avançado. In: Flores, Rebeca (Ed.), **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**. México: Comité Latino-americano de Matemática Educativa, 2013. cap. 2, p. 891-897. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/4175/1/NasserOpapelALME2013.pdf>. Acesso em: 30 set. 2020.

OLIVEIRA, A. L. **Objeto de aprendizagem para desenvolvimento de habilidades de visualização e representação de seções cônicas: atividade para o ensino médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte. Disponível em: http://www.biblioteca.pucminas.br/teses/EnCiMat_OliveiraAL_1.pdf. Acesso em: 20 dez. 2021.

PAIS, L. C. Intuição, experiência e teoria geométrica. **Revista Zetetiké**, v. 6, 1996. Disponível em: <https://doi.org/10.20396/zet.v4i6.8646739>. Acesso em: 11 fev. 2021.

PAIVA, A. C. P.; ALVES, F. R. V. Utilização do GeoGebra como auxílio no ensino de curvatura de curvas planas e espaciais. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 7, n. 2, p. 65–79, 2018. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/35458>. Acesso em: 9 nov. 2021.

PEREIRA, G. P. R. (2013). **O ensino das cônicas através de estudos contextualizados até sua concepção na Geometria Analítica: parábola**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2013. Disponível em: <http://repositorio.ufla.br/jspui/handle/1/1128>. Acesso em: 03 jan. 2022.

PERRÍN-GLORIAN, M. J. Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans les classes faibles. **Recherches en Didactique Des Mathématiques**, v. 13, n. 1.2, p. 5-118, 1993. Disponível em : <https://revue-rdm.com/1993/questions-didactiques-soulevees-a/>. Acesso em: 12 jan. 2021.

PERRÍN-GLORIAN, M. J. L'ingénierie didactique a l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement des ressources et formação des enseignants. In : Margolinas et al. (Orgs.): En amont et en aval des ingénieries didactiques, XV^a École d'Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (PUY-de-Dôme). **Recherches em Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage, v. 1, p. 57-78, 2011.

PERRIN-GLORIAN, M. J.; BELLEMAIN, P. M. B. L'ingenierie didactique entre recherche et ressource pour l'enseignement et la formation des maitres. **Caminhos da Educação Matemática em Revista/Online**, v. 9, n. 1, 2019. Disponível em: https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/index.php/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/298. Acesso em: 20 ago. 2021.

PIAGET, J. **A psicologia da inteligência**. Tradução: Nathanael C. Caixeiro. Rio de Janeiro: Zahar, 1983.

POINCARÉ, H. **A Ciência e a Hipótese**. Tradução Maria Auxiliadora Kneipp. Brasília: Editora UNB, 1984.

PRÍNCIPE, J. A epistemologia de Poincaré à luz de Kant: convenções e o uso regulador da razão. **Scientiæ Studia**, v. 13, n. 1, p. 49-72, 2015. DOI: <https://doi.org/10.1590/S1678-31662015000100003>.

RAMÍREZ, G. M.; OSORIO, V. L.; GOYCOCHEA, N. R. Esquemas de argumentación de estudiantes de bachillerato al usar GeoGebra en el contexto de teselados. **Uniciência**, v. 35, n. 2, p. 1-18, 2021. DOI: <http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.17>.

RICHIT, A. **Projetos em Geometria Analítica usando software de geometria dinâmica: repensando a formação inicial docente em matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/91153>. Acesso em: 14 dez. 2021.

SANTOS, A. A.; ALVES, F. R. V. A Engenharia Didática em articulação com a Teoria das Situações Didáticas como percurso metodológico ao estudo e ensino de Matemática. **Revista Acta Scientiae**, Canoas, v. 19, n. 3, p. 447-465, 2017. Disponível em: <http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/2739>. Acesso em: 03 ago. 2020.

SIQUEIRA, C. A. F. **Um Estudo Didático das Cônicas**: Quadros, Registros e Pontos de Vista. Dissertação (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

SIQUEIRA, C. A. F.; SILVA, M. J. F. Um estudo da parábola: quadros, registros de representação semiótica e pontos de vista. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 14, n. 2, p. 1-18, 2019. DOI: <http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2019.e56678>

SOARES, N. N.; CARVALHO, M. I. S. S. Didática da Matemática Francesa: implicações na formação em exercício de professores dos anos iniciais do ensino fundamental. **Anais... XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática**, Recife, Brasil, 2011.

SOUSA, R. C.; ALVES, F. R. V.; FONTENELE, F. C. F. Engenharia didática de formação (EDF): uma proposta de situação didática do ENEM com o uso do software GeoGebra para

professores de matemática no Brasil. **Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología**, n. 26, p. 90-99, 2020. DOI: 10.24215/18509959.26.e10

SOUSA, R. T.; AZEVEDO, I. F.; ALVES, F. R. V. Transposición didáctica a través de GeoGebra para apoyar la enseñanza de la Geometría Analítica. **Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, v. 17, n. 62, p. 1-20. Disponível em: <https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/220>. Acesso em: 26 abr. 2021.

SOUSA, R. T.; ALVES, F. R. V. Didactic Engineering and Learning Objects: a proposal for teaching parabolas in Analytical Geometry. **Indonesian Journal of Science and Mathematics Education**, v. 5, n. 1, p. 1-16, 2022. DOI: 10.24042/ij sme.v5i1.11108.

STERNBERG, R. **Psicologia Cognitiva**. Porto Alegre: Artes Médicas, 2000.

STILLWELL, J. **Mathematics and Its History**. 3rd edition. New York: Springer, 2010.

TEIXEIRA, P. J. M.; PASSOS, C. C. M. Um pouco da teoria das situações didáticas (TSD) de Guy Brousseau. **Revista Zetetiké**, FE/Unicamp, v. 21, n. 39, p. 155-168, 2013. DOI: <https://doi.org/10.20396/zet.v21i39.8646602>.

VENTURI, J. J. **Cônicas e Quádricas**. 5 ed. Curitiba: Livrarias Curitiba, 2003.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. O ensino da função quadrática por meio do PhET Colorado e da Engenharia Didática. **Revista de Educação Matemática**, v. 18, p. 1-19, 2021. DOI: doi.org/10.37001/remat25269062v17id522.

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

“Categorias do Raciocínio Intuitivo e o ensino de parábolas em Geometria Analítica com aporte do *software* GeoGebra”

Pesquisadora: Renata Teófilo de Sousa
Orientador: Dr. Francisco Régis Vieira Alves
Coorientadora: Dra. Maria José Araújo Souza

Você está sendo convidado a participar como voluntário de uma pesquisa. Este documento, chamado Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, visa assegurar seus direitos como participante e é elaborado em duas vias, uma que deverá ficar com você e outra com o pesquisador.

Por favor, leia com atenção e calma, aproveitando para esclarecer suas dúvidas. Se houver perguntas antes ou mesmo depois de assiná-lo, você poderá esclarecê-las com o pesquisador. Se preferir, pode levar este termo para casa e consultar seus familiares ou outras pessoas antes de decidir participar. Não haverá nenhum tipo de penalização ou prejuízo se você não aceitar participar ou retirar sua autorização em qualquer momento.

Justificativa e objetivos:

Desejamos investigar, via Engenharia Didática, Teoria das Situações Didáticas e Categorias do Raciocínio Intuitivo, os procedimentos e manifestações de ordem intuitiva acerca do estudo da parábola apresentadas pelos professores em formação inicial durante os encontros de formação. Procuramos vincular nesse estudo um grupo de alunos que estivessem em formação inicial, que já tivessem cursado a disciplina de Geometria Analítica e manifestassem interesse em seu estudo com uso do *software* GeoGebra. Assim, optamos por realizar a experimentação com acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA), situada em Sobral – CE. Esses alunos estão participando de uma atividade de pesquisa e compartilhando um ambiente de estudos, podendo assim contribuir para a inclusão do estudo do conceito de parábola em suas futuras práticas de ensino, ao mesmo tempo, conciliando com o uso do *software* GeoGebra para uma melhor representação e modelização dos problemas.

Os encontros serão focados em resolução de situações didáticas direcionadas ao estudo da parábola e observação do comportamento dos participantes ao resolvê-las, isto é, como eles irão se sobressair diante dos enunciados propostos. No entanto, acreditamos que tais situações tem o potencial de despertar seus conhecimentos de ordem epistêmica, além de capacitar esses professores em formação para a sua desenvoltura profissional. As situações didáticas estruturadas têm como objeto matemático a parábola no âmbito da Geometria Analítica, assunto este presente no currículo da Educação Básica e do Ensino Superior, e se configura em uma oportunidade para avanço do tema, mediante o diálogo entre estes dois níveis de ensino.

Temos como objetivo geral: analisar as contribuições da TSD para o ensino do conceito de parábolas, mediante a identificação e registro das Categorias do Raciocínio Intuitivo com aporte do *software* GeoGebra. Desta forma, buscamos contribuir para a formação inicial do professor de Matemática. Os objetivos específicos são os seguintes:

- Identificar obstáculos/lacunas que permeiam o ensino de parábolas pelo prisma da Geometria Analítica;
- Verificar se as situações didáticas elaboradas com o arrimo do *software* GeoGebra proporcionam estímulos para uma mobilização do campo intuitivo, diante das possibilidades de construção, visualização e manipulação;
- Identificar e registrar as Categorias do Raciocínio Intuitivo manifestadas pelos sujeitos com base em suas ações e estratégias para solucionar as situações didáticas propostas

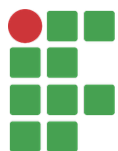
Procedimentos:

Participando do estudo você está sendo convidado a assistir e participar ativamente das formações, de forma presencial, sendo convidado a fazer o preenchimento dos questionários propostos, participar de gravação áudio dos encontros, gravação da tela do computador no ambiente do GeoGebra e responder as situações didáticas propostas nos encontros.

Estes procedimentos descritos acima ocorrerão nas dependências da Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA), Sobral – CE durante cinco encontros que acontecerão nas sextas-feiras compreendidas

Rubrica do pesquisador: _____

Rubrica do participante: _____



entre 27/05/2022 e 01/07/2022, no Laboratório de Informática do Curso de Matemática (LIMA), durante o turno da tarde, com duração prevista de 4 horas de estudo por encontro, totalizando 20 horas de formação.

Ressaltamos que devido à pandemia COVID-19 todas as normas sanitárias serão seguidas como o distanciamento social nas dependências do Laboratório de Informática da Universidade, o uso de máscara (opcional) e a disponibilidade de álcool em gel 70% para os participantes.

Observações:

- Eventualmente, sob permissão expressa dos participantes, realizaremos coleta de imagem e áudio via equipamentos eletrônico apropriado (celular, câmera fotográfica ou de vídeo, gravador de áudio), com o intuito de auxiliar e fundamentar a análise dos exercícios e problemas presentes nos questionários impressos.

Somente a pesquisadora e o orientador terão acesso ao material coletado e a identidade dos participantes será mantida em sigilo absoluto. Ao fim da pesquisa, os dados serão discutidos pelos pesquisadores envolvidos e, em seguida, o material coletado na forma de questionário, entrevistas de vídeo ou áudio serão descartadas, ficando de posse dos pesquisadores por um período máximo de 5 anos.

Desconfortos e riscos:

Você **não** deve participar deste estudo caso sinta algum tipo de desconforto dentro das dependências do laboratório de informática ou possuir impossibilidade de seguir as orientações da pesquisadora, pois essa pesquisa envolve o manuseio de um software matemático, conhecido como GeoGebra, e que exige atenção dos sujeitos da pesquisa para que o estudo proceda.

Os riscos existentes nessa pesquisa são:

- Medo de não saber responder às perguntas propostas nos questionários;
- Estresse, cansaço ou aborrecimento no decorrer da resolução dos questionários;
- O aluno se sentir constrangido ao responder os questionários no momento das formações ou da coleta de dados;
- Quebra de sigilo e identificação do participante.

Ressaltamos que buscaremos minimizar quaisquer desconfortos, garantindo que a pesquisa seja desenvolvida em local reservado e que o participante tem a liberdade de não responder qualquer questão que ele considere constrangedora. A pesquisadora se responsabilizará pelo sigilo dos dados coletados, assegurando a confidencialidade, privacidade e proteção da imagem dos participantes envolvidos.

Benefícios:

Esta pesquisa procura realizar uma contribuição no desenvolvimento das competências profissionais dos professores em formação do curso de licenciatura em Matemática, utilizando a Engenharia Didática de Formação, a Teoria das Situações Didáticas e a Teoria das Categorias do Raciocínio Intuitivo como fundamentação teórica para essa pesquisa. Temos como objeto matemático o assunto “parábolas”, onde selecionaremos problemas de diversos níveis que trazem esse assunto. Outra contribuição dessa pesquisa, é o fato do professor em formação estar se preparando para situações que podem acontecer em sua sala de aula, pois traremos, em certos momentos, problemas que eles precisam estar preparados para resolver, praticando formas de solucionar problemas. E por fim, pretendemos instigar o estudo pela Matemática a partir de situações didáticas envolvendo resolução de problemas sobre parábolas auxiliados com o uso de tecnologias.

Acompanhamento e assistência:

O acompanhamento didático/pedagógico decorrente de eventuais dificuldades surgidas na formação será efetuado preferencialmente no lócus da aula e durante a mesma, se restringindo a dificuldades relativas ao processo de ensino dos assuntos que serão abordados. A pesquisadora se disponibilizará para sanar dúvidas que possam surgir durante os encontros, auxiliando no aprendizado do participante.

Rubrica do pesquisador: _____

Rubrica do participante: _____

Caso o participante sinta algum desconforto físico ou psicológico decorrente da realização da pesquisa, a pesquisadora se responsabilizará em encaminhar e garantir o atendimento médico/psicológico necessário ao participante.

Sigilo e privacidade:

Você tem a garantia de que sua identidade será mantida em sigilo e nenhuma informação será dada a outras pessoas que não façam parte da equipe de pesquisadores. Na divulgação dos resultados desse estudo, seu nome não será citado. Qualquer gravação (áudio e/ou vídeo) e/ou questionário aplicados durante a pesquisa será(ão) mantido(s) em posse do pesquisador responsável por um período de 5 anos. Após passado esse tempo todo o material será descartado.

Ressarcimento e indenização:

Você terá direito ao ressarcimento das despesas diretamente decorrentes de sua participação na pesquisa e à indenização pelos danos resultantes desta, nos termos da Lei.

Contato:

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, você poderá entrar em contato com os pesquisadores Renata Teófilo de Sousa ou Dr. Francisco Régis Vieira Alves, Av. Treze de Maio, 2081 - Benfica, Fortaleza - CE, 60040-531, Coordenação do Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECM, sala 141), fone (88) 99665-0227, e-mail: rtsnaty@gmail.com

Em caso de denúncias ou reclamações sobre sua participação e sobre questões éticas do estudo, você poderá entrar em contato com a secretária do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA) das 08:00hs às 12:00hs e das 13:00hs às 17:00hs no Centro de Ciências da Saúde (CCS), campus do Derby - Av. Comandante Maurocílio Rocha Pontes, 150 - Bairro Derby Clube - CEP 62042-280 | Sobral -CE; telefone (88) 36774255 e e-mail: comite_etica@uvanet.br.

Consentimento livre e esclarecido:

Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais riscos e o incômodo que esta possa acarretar, aceito participar e declaro estar recebendo uma via original deste documento assinada pelo pesquisador e por mim, tendo todas as folhas por nós rubricadas:

Nome do(a) participante: _____

e-mail (opcional): _____

(Assinatura do participante ou nome e assinatura do seu RESPONSÁVEL LEGAL)

Data: ____/____/____.

Responsabilidade do Pesquisador:

Asseguro ter cumprido as exigências da resolução 510/2016 CNS/MS e complementares na elaboração do protocolo e na obtenção deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Asseguro, também, ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Informo que o estudo foi aprovado pelo CEP perante o qual o projeto foi apresentado e pela CONEP, quando pertinente. Comprometo-me a utilizar o material e os dados obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

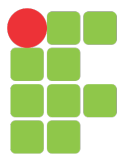
Nome do(a) pesquisador(a): _____

Assinatura do(a) pesquisador(a)

Data: ____/____/____.

Rubrica do pesquisador: _____

Rubrica do participante: _____



**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: ENSINO DE MATEMÁTICA**

Título da pesquisa: Categorias do Raciocínio Intuitivo e o ensino de parábolas em Geometria Analítica com aporte do *software* GeoGebra

Pesquisadora: Renata Teófilo de Sousa

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

QUESTIONÁRIO INICIAL

Este questionário divide-se em duas partes: na primeira, pretende-se conhecer alguns pontos aspectos de sua vida acadêmica/profissional; na segunda, busca-se saber sobre seus conhecimentos acerca do *software* GeoGebra.

Parte I - Identificação do sujeito (o entrevistado)

Nome: _____ Idade: _____

Já possui uma formação acadêmica? () Sim () Não

Se sim, qual curso? _____

Em qual período você está no curso de Licenciatura em Matemática? _____

Você já cursou alguma disciplina que envolva Geometria Analítica? Se sim, qual? _____

Você já trabalha ou trabalhou como professor(a)? () Sim () Não

Se sim, quanto tempo? _____

Parte II - Conhecimentos relacionados ao software GeoGebra

01) Você conhece o *software* GeoGebra? () Sim () Não

Se sim, continue respondendo:

02) Qual sua visão em relação ao uso do GeoGebra nas aulas de Matemática?

03) Você já resolveu situações-problema ou exercícios utilizando o GeoGebra?

() Sim () Não

04) Você já teve experiência com o uso do GeoGebra no curso de licenciatura em Matemática? Se sim, em qual(is) disciplina(s)?

05) Na sua visão pessoal, este *software* é importante na resolução de problemas? Justifique.

Obrigada por sua colaboração!



**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: ENSINO DE MATEMÁTICA**

Título da pesquisa: Categorias do Raciocínio Intuitivo e o ensino de parábolas em Geometria Analítica com aporte do *software* GeoGebra

Pesquisadora: Renata Teófilo de Sousa

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Coorientadora: Profa. Dra. Maria José Araújo Souza

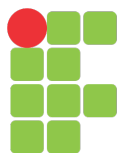
QUESTIONÁRIO FINAL

01. Como você considera a contribuição do software GeoGebra para a resolução das situações didáticas propostas, de modo geral?

02. Em seu ponto de vista, de que forma o suporte dado pelo GeoGebra pode propiciar aos alunos uma melhor compreensão sobre a parábola? Justifique.

03. Em sua opinião, você considera que sua participação nesta pesquisa contribuiu para sua formação docente? Em caso afirmativo, de que forma?

Obrigada por sua colaboração!



**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: ENSINO DE MATEMÁTICA**

Título da pesquisa: Categorias do Raciocínio Intuitivo e o ensino de parábolas em Geometria Analítica com aporte do *software* GeoGebra

Pesquisadora: Renata Teófilo de Sousa

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

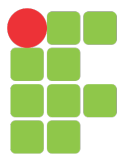
Coorientadora: Profa. Dra. Maria José Araújo Souza

Aluno: _____

SITUAÇÃO DIDÁTICA I

Com o auxílio de uma régua, trace uma reta r e fora dela marque um ponto F . Escolha em r pontos equidistantes $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$ e dobre o papel de modo que A_1 coincida com F . Para facilitar a visualização da curva, trace a reta que coincide com a dobra. Repita essa operação para todos os outros pontos marcados em r . Veja que as dobras obtidas tangenciam uma curva. Trace essa curva e responda:

- Que tipo de curva foi descrita?
- Que papéis exercem a reta r e o ponto F curva descrita? Esquematize esta situação no GeoGebra e apresente sua solução.



**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: ENSINO DE MATEMÁTICA**

Título da pesquisa: Categorias do Raciocínio Intuitivo e o ensino de parábolas em Geometria Analítica com aporte do *software* GeoGebra

Pesquisadora: Renata Teófilo de Sousa

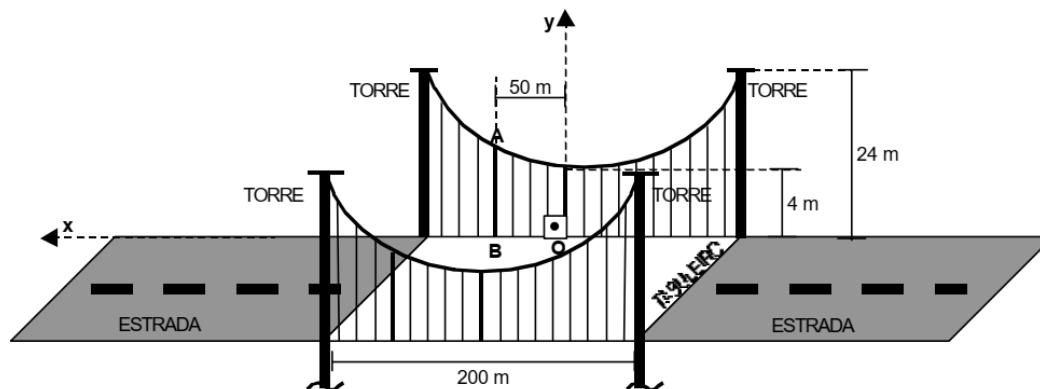
Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

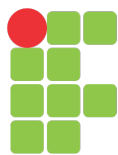
Coorientadora: Profa. Dra. Maria José Araújo Souza

Aluno: _____

SITUAÇÃO DIDÁTICA II

Os cabos da ponte pênsil, indicada na figura abaixo, tomam a forma de arcos de parábola do segundo grau. As torres de suporte têm 24 m de altura e há um intervalo entre elas de 200 m. O ponto mais baixo de cada cabo fica a 4 m do leito da estrada. Considerando o plano horizontal do tabuleiro da ponte contendo o eixo dos x e o eixo de simetria da parábola como sendo o eixo dos y , perpendicular a x , determine o comprimento do elemento de sustentação BA , que liga verticalmente o cabo parabólico ao tabuleiro da ponte, situado a 50 m do eixo y . Esquematiza sua solução utilizando o GeoGebra.





**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: ENSINO DE MATEMÁTICA**

Título da pesquisa: Categorias do Raciocínio Intuitivo e o ensino de parábolas em Geometria Analítica com aporte do *software* GeoGebra

Pesquisadora: Renata Teófilo de Sousa

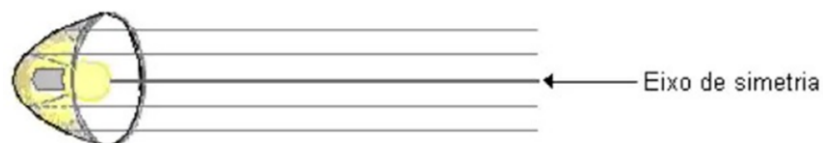
Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Coorientadora: Profa. Dra. Maria José Araújo Souza

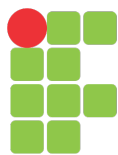
Aluno: _____

SITUAÇÃO DIDÁTICA III

Matematicamente, o farol de um carro funciona desta forma: ao ligar os faróis de um carro, os raios de luz, provenientes da lâmpada que se encontra no foco da parábola, incidem sobre um espelho parabólico e são refletidos paralelamente ao eixo de simetria, como no esboço a seguir:



Partindo dessa ideia, construa o esboço deste modelo de farol de carro, a partir de uma parábola lateral utilizando o *software* GeoGebra. Após sua construção, aponte a equação encontrada com base em seus parâmetros utilizados.



**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: ENSINO DE MATEMÁTICA**

Título da pesquisa: Categorias do Raciocínio Intuitivo e o ensino de parábolas em Geometria Analítica com aporte do *software* GeoGebra

Pesquisadora: Renata Teófilo de Sousa

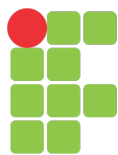
Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Coorientadora: Profa. Dra. Maria José Araújo Souza

Aluno: _____

SITUAÇÃO DIDÁTICA IV

Encontre os principais elementos da parábola $y = 4x^2 - 24x + 37$. Esquematize esta situação no GeoGebra e apresente sua solução.



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: ENSINO DE MATEMÁTICA

Título da pesquisa: Categorias do Raciocínio Intuitivo e o ensino de parábolas em Geometria Analítica com aporte do *software* GeoGebra

Pesquisadora: Renata Teófilo de Sousa

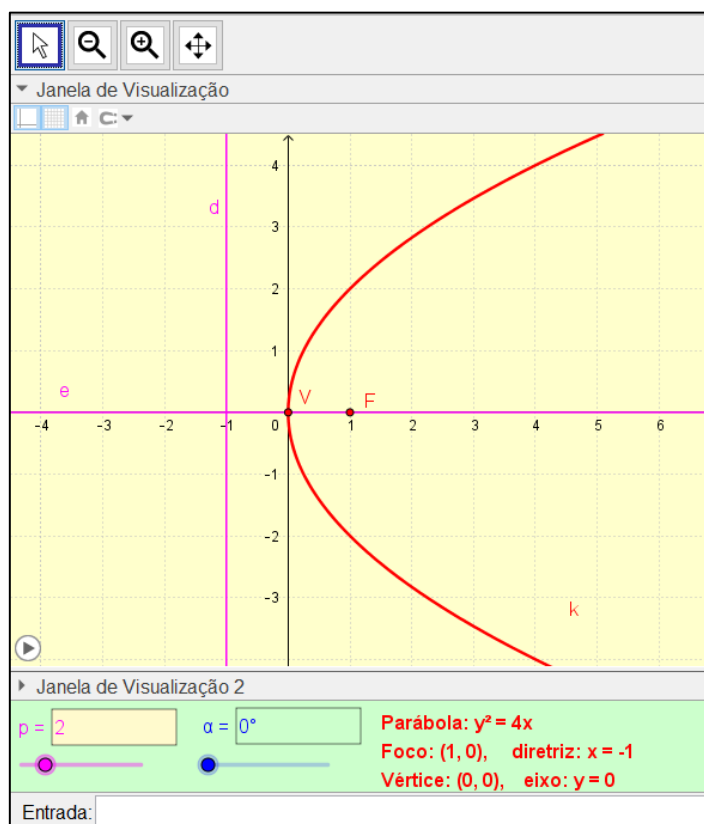
Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Coorientadora: Profa. Dra. Maria José Araújo Souza

Aluno: _____

SITUAÇÃO DIDÁTICA V

Manipule o vértice V da parábola para deslocá-la e modifique o ângulo α para girá-la. Se a movermos sem girá-la, que novos termos aparecem na equação geral? Como é então a equação é reduzida? Se a girarmos em um ângulo $\alpha \neq 90^\circ$, que novo termo aparece? (Construção a ser manipulada diretamente no GeoGebra).



Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/j59xaqux>



UNIVERSIDADE ESTADUAL
VALE DO ACARAÚ - UVA/CE



PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

Elaborado pela Instituição Coparticipante

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: ENGENHARIA DIDÁTICA DE FORMAÇÃO (EDF): UM CONTRIBUTO AO ENSINO DE PARÁBOLAS EM GEOMETRIA ANALÍTICA COM APOORTE DO SOFTWARE

Pesquisador: Renata Teófilo de Sousa

Área Temática:

Versão: 2

CAAE: 52094521.6.3001.5053

Instituição Proponente: Universidade Estadual Vale do Acaraú - UVA

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 5.267.816

Apresentação do Projeto:

Este trabalho apresenta uma pesquisa acerca do ensino de parábolas no campo da Geometria Analítica, visando contribuir para a formação de licenciandos e futuros professores de Matemática. A partir de um levantamento bibliográfico, compreende-se que há lacunas na formação inicial do professor de Matemática, no tocante ao ensino deste tema, que podem ser de ordem epistemológica e/ou didática. Deste modo, busca-se desenvolver nesta pesquisa uma proposta para amenizar as dificuldades presentes no campo epistêmico ao trabalhar este assunto em sala de aula, a partir da Teoria das Situações Didáticas (TSD) e analisadas pelo prisma das Categorias do Raciocínio Intuitivo, com o auxílio do software GeoGebra. Assim, o objetivo desta pesquisa é analisar as contribuições da Teoria das Situações Didáticas e da Engenharia Didática de Formação para o ensino de parábolas e, a partir disto, desenvolver situações didáticas que viabilizem trabalhar este tópico explorando a intuição, a percepção e a visualização, contribuindo para a formação inicial do professor. O GeoGebra será utilizado para o desenvolvimento das situações didáticas, como forma de auxiliar a compreensão dos elementos da parábola explorando sua visualização geométrica. A metodologia adotada para estruturar esta pesquisa é a Engenharia Didática (ED), com ênfase na Engenharia Didática de Formação (EDF), dada sua natureza voltada para a formação de professores. Para a aplicação desta pesquisa serão selecionados um grupo de graduandos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA), situada na

Endereço: Av Comandante Maurocéllo Rocha Ponte, 150

Bairro: Derby

CEP: 62.041-040

UF: CE

Município: SOBRAL

Telefone: (88)3677-4255

Fax: (88)3677-4242

E-mail: cep_uva@uvanet.br



Continuação do Parecer: 5.267.816

cidade de Sobral, Ceará, onde busca-se conectar o professor em formação inicial à realidade de sua futura profissão, por meio de encontros formativos e discussões pautadas na contribuição do avanço deste tema. A coleta de dados será realizada por meio de instrumentais como: questionário, registros fotográficos, registro de áudio e vídeo e gravações da tela do computador com as produções no ambiente do GeoGebra, sendo sua análise realizada com base nos pressupostos da Engenharia Didática.

Espera-se que os resultados referentes a este estudo sejam bastante proveitosos no que diz respeito à melhoria das aulas de Matemática envolvendo a temática abordada nesta pesquisa, bem como a possibilidade de replicação deste estudo em outros contextos.

Objetivo da Pesquisa:

OBJETIVO GERAL

Analisar as contribuições da Teoria das Situações Didáticas e da Engenharia Didática de Formação para o ensino de parábolas e, a partir disto, desenvolver situações didáticas que viabilizem trabalhar este tópico explorando a intuição, a percepção e a visualização, contribuindo para a formação inicial do professor de Matemática.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- (i) Identificar obstáculos didáticos que permeiam o ensino do conteúdo de parábolas;
- (ii) Verificar se as situações didáticas elaboradas para o ensino de parábolas e modeladas pelo software GeoGebra exploram de forma exitosa o campo da intuição e percepção por meio da visualização, a partir da perspectiva de Efraim Fischbein;
- (iii) Reconhecer as concepções epistêmicas dos professores de matemática em formação inicial com base em suas ações e estratégias para solucionar questões envolvendo parábolas.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

Desconfortos e riscos:

Você não deve participar deste estudo caso sinta algum tipo de desconforto dentro das dependências do laboratório de informática ou possuir impossibilidade de seguir as orientações da pesquisadora, pois essa pesquisa envolve o manuseio de um software matemático, conhecido como GeoGebra, e que exige atenção dos sujeitos da pesquisa para que o estudo proceda.

Os riscos existentes nessa pesquisa são:

- Medo de não saber responder às perguntas propostas nos questionários;
- Estresse, cansaço ou aborrecimento no decorrer da resolução dos questionários;
- O aluno se sentir constrangido ao responder os questionários no momento das formações ou da coleta de

Endereço: Av Comandante Maurocélvio Rocha Ponte, 150

Bairro: Derby

CEP: 62.041-040

UF: CE

Município: SOBRAL

Telefone: (88)3677-4255

Fax: (88)3677-4242

E-mail: cep_uva@uvanet.br



Continuação do Parecer: 5.267.816

dados;

- Quebra de sigilo e identificação do participante.

Ressaltamos que a pesquisadora pretende minimizar quaisquer desconfortos, garantindo que a pesquisa seja desenvolvida em local reservado e que o participante tem a liberdade de não responder qualquer questão que ele considere constrangedora. A pesquisadora se responsabilizará pelo sigilo dos dados coletados, assegurando a confidencialidade, privacidade e proteção da imagem dos participantes envolvidos.

Benefícios:

Esta pesquisa procura realizar uma contribuição no desenvolvimento das competências profissionais dos professores em formação do curso de licenciatura em Matemática, utilizando a Engenharia Didática de Formação, a Teoria das Situações Didáticas e a Teoria das Categorias do Raciocínio Intuitivo como fundamentação teórica para essa pesquisa. Temos como objeto matemático o assunto "parábolas", onde selecionaremos problemas de diversos níveis que trazem esse assunto. Outra contribuição dessa pesquisa, é o fato do professor em formação estar se preparando para situações que podem acontecer em sua sala de aula, pois traremos, em certos momentos, problemas que eles precisam estar preparados para resolver, praticando formas de solucionar problemas. E por fim, pretendemos instigar o estudo pela Matemática a partir de situações didáticas envolvendo resolução de problemas sobre parábolas auxiliados com o uso de tecnologias.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

Trata-se de um projeto apresentado ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

Os termos obrigatórios foram apresentados adequadamente.

Recomendações:

Projeto de pesquisa sem óbices éticos.

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

Projeto de pesquisa APROVADO. O CEP reforça a Resolução CNS 466/12, onde: "XI.2 - Cabe ao pesquisador: d) elaborar e apresentar os relatórios parciais e final da pesquisa". Estes relatórios obrigatórios devem ser enviados via Plataforma Brasil, para o monitoramento e arquivamento da pesquisa pelo CEP.

Endereço: Av Comandante Maurocéllo Rocha Ponte, 150

Bairro: Derby

CEP: 62.041-040

UF: CE

Município: SOBRAL

Telefone: (88)3677-4255

Fax: (88)3677-4242

E-mail: cep_uva@uvanet.br



Continuação do Parecer: 5.267.816

Considerações Finais a critério do CEP:

Projeto de pesquisa APROVADO. O CEP reforça a Resolução CNS 466/12, onde: "XI.2 - Cabe ao pesquisador: d) elaborar e apresentar os relatórios parciais e final da pesquisa". Estes relatórios obrigatórios devem ser enviados via Plataforma Brasil, para o monitoramento e arquivamento da pesquisa pelo CEP.

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_1851304.pdf	28/02/2022 22:36:31		Aceito
Brochura Pesquisa	brochura_pesquisa.pdf	28/02/2022 22:35:44	Renata Teófilo de Sousa	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE_UVA.pdf	28/02/2022 22:34:08	Renata Teófilo de Sousa	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	7_TCLE_corrigido_201021.pdf	20/10/2021 17:38:03	Renata Teófilo de Sousa	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	5ProjetoDetalhado_corrigido_091021.pdf	09/10/2021 15:28:33	Renata Teófilo de Sousa	Aceito
Outros	Questionario_Situacoes_Didaticas.pdf	27/09/2021 14:54:37	Renata Teófilo de Sousa	Aceito
Outros	Questionario_Geogebra.pdf	27/09/2021 14:54:02	Renata Teófilo de Sousa	Aceito

Situação do Parecer:

Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:

Não

SOBRAL, 01 de Março de 2022

Assinado por:
Maria do Socorro Melo Carneiro
(Coordenador(a))

Endereço: Av Comandante Maurocéllo Rocha Ponte, 150

Bairro: Derby

CEP: 62.041-040

UF: CE

Município: SOBRAL

Telefone: (88)3677-4255

Fax: (88)3677-4242

E-mail: cep_uva@uvanet.br



UNIVERSIDADE ESTADUAL
VALE DO ACARAÚ - UVA/CE



Continuação do Parecer: 5.267.816

Endereço: Av Comandante Maurocéllo Rocha Ponte, 150

Bairro: Derby

CEP: 62.041-040

UF: CE

Município: SOBRAL

Telefone: (88)3677-4255

Fax: (88)3677-4242

E-mail: cep_uva@uvanet.br

RESOLUÇÃO 036/2012 – CEPE

Modifica nomenclatura do curso de Ciências Habilitação Plena em Matemática para curso de Licenciatura em Matemática e aprova sua nova matriz curricular.

O Presidente do Conselho de Ensino Pesquisa e Extensão – CEPE da Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA, no uso de suas atribuições legais e estatutárias e tendo em vista a deliberação adotada pelo CEPE em reunião do dia 21 de novembro de 2012 e

CONSIDERANDO a Resolução CNE/CES nº 03/2003, que estabelece as Diretrizes Curriculares Nacionais para os curso de Licenciatura em Matemática, com fulcro no Parecer 1302/2001 para o curso de Licenciatura em Matemática, a Resolução CNE/CP nº 02/2002, que institui a duração e a carga horária dos cursos de licenciatura, de graduação plena, de formação de professores da Educação Básica.

RESOLVE

Art 1º Mudar a denominação do curso de Ciências Habilitação Plena em Matemática para curso de Licenciatura em Matemática.

Parágrafo único. Diplomas expedidos a partir da data da assinatura desta Resolução trarão a nova nomenclatura expressa no *caput* deste artigo.





UNIVERSIDADE ESTADUAL
VALE DO ACARAÚ
Conselhos Superiores



GOVERNO DO
ESTADO DO CEARÁ
Secretaria da Ciência, Tecnologia
e Educação Superior

Art 2º Aprovar a matriz curricular do curso de Licenciatura em Matemática, com uma carga horária de **3.000 (três mil) horas**, distribuídas entre disciplinas obrigatórias, eletivas, estágio supervisionado e atividades complementares.

Art 3º Estabelecer as disciplinas obrigatórias e eletivas da matriz curricular ora aprovada.

§ 1º As disciplinas obrigatórias estão distribuídas por período, na forma abaixo:

Período	Disciplina	Prática	Teórica	Total	Pré Requisito
1	Matemática Básica I – Relações e Funções	20	40	60	---
	Álgebra Matricial	20	40	60	---
	Geometria Euclidiana	20	40	60	---
	Lógica e Teoria dos Conjuntos	0	60	60	---
	Introdução às Teorias da Aprendizagem	0	60	60	---
2	Matemática Básica II - Trigonometria	20	40	60	Matemática Básica I – Relações e Funções
	Geometria Analítica Plana	20	40	60	Álgebra Matricial
	Geometria Espacial	20	60	80	Geometria Euclidiana
	Fundamentos de Programação	30	30	60	Lógica e Teoria dos Conjuntos
3	Cálculo I	20	60	80	Matemática Básica II - Trigonometria
	Geometria Analítica Vetorial	20	60	80	Geometria Analítica Plana
	Matemática Básica III – Polinômios e Números Complexos	20	40	60	Matemática Básica II - Trigonometria
	Desenho Geométrico	20	40	60	Geometria Espacial
4	Cálculo II	20	60	80	Cálculo I
	Álgebra Linear	20	60	80	Geometria Analítica Vetorial
	História da Matemática	20	40	60	Matemática Básica III – Polinômios e Números Complexos
5	Cálculo III	20	60	80	Cálculo II
	Tecnologias Digitais no ensino de Matemática	0	60	60	Desenho Geométrico



UNIVERSIDADE ESTADUAL
VALE DO ACARAÚ
Conselhos Superiores



GOVERNO DO
ESTADO DO CEARÁ
Secretaria da Ciência, Tecnologia
e Educação Superior

	Didática Geral e da Matemática	30	30	60	História da Matemática
	Análise Combinatória e Probabilidade	20	40	60	Lógica e Teoria dos Conjuntos
	Estágio Supervisionado I	40	60	100	---
6	Equações Diferenciais Ordinárias	20	60	80	Cálculo III
	Estatística Descritiva	20	40	60	Análise Combinatória e Probabilidade
	Desenvolvimento e Metodologia da Pesquisa em Matemática	0	60	60	História da Matemática
	Cálculo Numérico	30	30	60	Cálculo II e Álgebra Linear
	Estágio Supervisionado II	40	60	100	Estágio Supervisionado I
7	Introdução a Teoria dos Números	20	60	80	Matemática Básica III – Polinômios e Números Complexos
	História da Matemática Escolar no Brasil	0	40	40	Didática Geral e da Matemática
	Modelagem Matemática no Estudo de Ciências	40	20	60	Matemática Básica III – Polinômios e Números Complexos
	Construção dos Números	0	80	80	Cálculo III
	Estágio Supervisionado III	40	60	100	Estágio Supervisionado II
8	Estruturas Algébricas	0	80	80	Introdução a Teoria dos Números
	Matemática Comercial e Financeira	0	60	60	Matemática Básica III – Polinômios e Números Complexos
	Laboratório de Ensino de Matemática e Produção de Material Didático	40	20	60	Geometria Analítica Vetorial
	Estágio Supervisionado IV	40	60	100	Estágio Supervisionado III
9	Trabalho de Conclusão de Curso	30	30	60	Desenvolvimento e Metodologia da Pesquisa em Matemática
	Introdução a LIBRAS	30	30	60	Estágio Supervisionado I
	Etnomatemática e Relações Étnico Raciais no Brasil	0	60	60	Estágio Supervisionado I
	Introdução a Análise Matemática	0	60	60	Construção dos Números
TOTAL		750	---	2680	---

§ 2º Definir como eletivas as seguintes disciplinas:

Disciplinas Eletivas	Carga Horária	Pré Requisito
Introdução às Curvas Diferenciáveis	60	Cálculo III
Equações Diferenciais Ordinárias II	60	Equações Diferenciais Ordinárias
Estruturas Algébricas II	60	Estruturas Algébricas
Introdução as Equações Diferenciais Parciais	60	Equações Diferenciais Ordinárias
Produção de Vídeos Didáticos em Matemática	60	---
Espaços Métricos	60	Construção dos Números
Introdução à Topologia	60	Construção dos Números
Tópicos de Matemática I	60	---
Tópicos de Matemática II	60	Tópicos de Matemática I
Seminários Especiais I	40	---
Seminários Especiais II	40	Seminários Especiais I
Seminários Especiais III	40	Seminários Especiais II
Seminários Especiais IV	40	Seminários Especiais III
Introdução à Filosofia da Matemática	60	---
Funções de Variável Complexa	60	Introdução a Análise
Geometria Descritiva	60	Desenho Geométrico
Introdução à Geometria Fractal	60	Geometria Espacial
Introdução à Filosofia da Educação Matemática	60	---
Geometria não- euclidiana	60	Álgebra Linear
Álgebra e Geometria Dinâmica	60	Álgebra Linear
Álgebra Linear II	60	Álgebra Linear

Parágrafo único. O estudante deve cursar, preferencialmente a partir do quarto período, pelo menos 120 (cento e vinte) horas, dentre as disciplinas ELETIVAS.

Art 4º O estudante deve perfazer um mínimo de 200 (duzentas) horas de atividades complementares.

8



UNIVERSIDADE ESTADUAL
VALE DO ACARAÚ
Conselhos Superiores



GOVERNO DO
ESTADO DO CEARÁ
Secretaria da Ciência, Tecnologia
e Educação Superior

Art 5º Estabelecer a equivalência entre as matrizes anteriores (2006, 2003, 2000 e 1991) e a nova (2012), da seguinte forma:

Período	Disciplinas da Grade 2006	Equivalência na grade 2012
1	Introdução a Universidade	---
	Inglês	---
	Ética	---
	Português	---
	Metodologia do Trabalho Científico	Desenv. e Metodologia da Pesquisa em Matemática
	A matemática na escola fundamental	Matemática básica 1 – Relações e Funções
2	A matemática no ensino médio	Álgebra Matricial
	Geometria Euclidiana	Geometria Euclidiana
	Introdução a Computação	Fundamentos de Programação
	Psicologia I	---
3	Cálculo Diferencial e Integral I	Cálculo I
	Geometria Analítica Vetorial	Geometria Analítica Vetorial
	Psicologia II	Introdução as Teorias da Aprendizagem
	Desenho Geométrico	Desenho Geométrico
	Semana da Matemática I	Matemática Básica II - Trigonometria
4	Cálculo Diferencial e Integral II	Cálculo II
	Geometria Descritiva	Geometria Descritiva (eletiva)
	Álgebra Linear	Álgebra Linear
	História e Tendências no Ensino da Matemática	História da Matemática
5	Cálculo Diferencial e Integral III	Cálculo III
	A física no ensino médio	---
	Estatística e Probabilidade no Ensino Fundamental e Médio	Estatística Descritiva
	Estágio Supervisionado e Prática de Ensino I	---
	Semana da Matemática II	Lógica e Teoria dos Conjuntos
6	Estágio Supervisionado e Prática de Ensino II	---

1



UNIVERSIDADE ESTADUAL
VALE DO ACARAÚ
Conselhos Superiores



GOVERNO DO
ESTADO DO CEARÁ
Secretaria da Ciência, Tecnologia
e Educação Superior

	Estatística e Probabilidade	Análise Combinatória e Probabilidade
	Cálculo Numérico	Cálculo Numérico
	Introdução a Teoria dos Números	Introdução a Teoria dos Números
7	Estágio Supervisionado e Prática de Ensino III	---
	Estruturas Algébricas e o Ensino da Álgebra I	Estruturas Algébricas
	Novas Tecnologias no ensino da Matemática	Tecnologias Digitais no Ensino de Matemática
	Equações Diferenciais Ordinárias e Educação Ambiental	Equações Diferenciais Ordinárias
	Semana da Matemática III	Matemática Básica III – Polinômios e Números Complexos.
8	Estágio Supervisionado e Prática de Ensino IV	---
	Estruturas Algébricas e o Ensino da Álgebra II	Estruturas Algébricas II (eletiva)

Período	Disciplinas da Grade 2003	Equivalência na grade 2012
1	Introdução a Universidade	---
	Inglês	---
	Ética	---
	Português	---
	Metodologia do Trabalho Científico	Desenv. e Metodologia da Pesquisa em Matemática
2	Fundamentos de Matemática	Matemática Básica I – Relações e Funções
	Geometria Euclidiana	Geometria Euclidiana
	Fundamentos de Programação	Fundamentos de Programação
	Psicologia da Adolescência	---
3	Cálculo Diferencial e Integral I	Cálculo I
	Geometria Analítica	Geometria Analítica Plana
	Psicologia da Aprendizagem	Introdução as Teorias da Aprendizagem
	Fundamentos de Física I	---
4	Cálculo Diferencial e Integral II	Cálculo II
	Desenho Geométrico	Desenho Geométrico
	Fundamentos de Física II	---
	Geometria Analítica Vetorial	Geometria Analítica Vetorial

✓



UNIVERSIDADE ESTADUAL
VALE DO ACARAÚ
Conselhos Superiores



GOVERNO DO
ESTADO DO CEARÁ
Secretaria da Ciência, Tecnologia
e Educação Superior

5	Cálculo Diferencial e Integral III	Cálculo III
	Eleticidade e Magnetismo	---
	Geometria Descritiva	Geometria Descritiva (eletiva)
	Prática de Ensino em Matemática	---
	Estrutura e Funcionamento do Ensino de 1 e 2 Graus	---
6	Álgebra Linear I	Álgebra Linear
	História da Matemática	História da Matemática
	Cálculo Numérico	Cálculo Numérico
	Introdução a Teoria dos Números	Introdução a Teoria dos Números
7	Didática	Didática Geral e da Matemática
	Estruturas Algébricas I	Estruturas Algébricas
	Introdução as Equações Diferenciais Ordinárias	Equações Diferenciais Ordinárias
8	Análise Real	Introdução a Análise Real
	Monografia I	---
	Seminário I	Seminários Especiais I (eletiva)
	Estatística	Estatística Descritiva
	Estruturas Algébricas II	Estruturas Algébricas II (eletiva)
9	Estágio Supervisionado	Estágio Supervisionado I
	Monografia II	Trabalho de Conclusão de Curso
	Seminário II	Seminários Especiais II (eletiva)
	Funções de Variável Complexa	Funções de Variável Complexa (eletiva)
	Matemática e Novas Tecnologias	Tecnologias Digitais no Ensino de Matemática

Período	Disciplinas da Grade 2000	Equivalência na grade 2012
1	Fundamentos de Matemática	Matemática Básica I – Relações e Funções
	Geometria Euclidiana	Geometria Euclidiana
	Fundamentos de Programação	Fundamentos de Programação
	Psicologia da Adolescência	---
2	Cálculo Diferencial e Integral I	Cálculo I

Reconhecida pela Portaria Nº 821/ MEC D.O.U. de 01/06/1994
Avenida da Universidade, 850 - Betânia - CEP: 62.040-370 - Sobral - Ceará
Fone: (88) 3677.4243 / FAX: (88) 3613.1866 - www.uvanet.br

✓



UNIVERSIDADE ESTADUAL
VALE DO ACARAÚ
Conselhos Superiores



GOVERNO DO
ESTADO DO CEARÁ
Secretaria de Ciência, Tecnologia
e Educação Superior

	Geometria Analítica	Geometria Analítica Plana
	Psicologia da Aprendizagem	Introdução as Teorias da Aprendizagem
	Fundamentos de Física I	---
3	Cálculo Diferencial e Integral II	Cálculo II
	Desenho Geométrico	Desenho Geométrico
	Fundamentos de Física II	---
	Geometria Analítica Vetorial	Geometria Analítica Vetorial
4	Cálculo Diferencial e Integral III	Cálculo III
	Geometria Descritiva	Geometria Descritiva (eletiva)
	Estrutura e Funcionamento do Ensino de 1 e 2 Graus	---
	Álgebra Linear I	Álgebra Linear
5	História da Matemática	História da Matemática
	Cálculo Numérico	Cálculo Numérico
	Introdução a Teoria dos Números	Introdução a Teoria dos Números
	Didática	Didática Geral e da Matemática
6	Estruturas Algébricas I	Estruturas Algébricas
	Análise Real	Introdução a Análise Real
7	Monografia I	---
	Seminário I	Seminários Especiais I (eletiva)
	Estatística	Estatística Descritiva
	Estruturas Algébricas II	Estruturas Algébricas II (eletiva)
	Estágio Supervisionado	Estágio Supervisionado I
8	Monografia II	Trabalho de Conclusão de Curso
	Seminário II	Seminários Especiais II (eletiva)
	Matemática e Novas Tecnologias	Tecnologias Digitais no ensino de Matemática

Período	Disciplinas da Grade 1991	Equivalência na grade 2012
1	Introdução a Filosofia	Intr. à Filosofia da Educação Matemática (eletiva)
	Metodologia do Trabalho Científico	Desenvolvimento e Metodologia da Pesquisa em Matemática
	Língua Portuguesa	---



UNIVERSIDADE ESTADUAL
VALE DO ACARAÚ
Conselhos Superiores



GOVERNO DO
ESTADO DO CEARÁ
Secretaria da Ciência, Tecnologia
e Educação Superior

	Introdução a Sociologia	---
	Introdução a Psicologia	---
	Educação Física I	---
	Física Geral	---
2	Matemática I	Matemática Básica I – Relações e Funções
	Biologia	---
	Química Geral	---
	Educação Física II	---
	Botânica	---
3	Física II	---
	Química II	---
	Matemática II	Matemática Básica II - Trigonometria
	Matemática III	Matemática Básica III – Polinômios e Números Complexos
	Química III	---
4	Física III	---
	Estrutura e Funcionamento do Ensino de 1 e 2 Grau	---
	Metodologia da Ciências	---
	Psicologia da adolescência	---
	Química IV	---
5	Didática Geral	Didática Geral e da Matemática
	Matemática IV	---
	Física IV	---
	Elementos de Geologia	---
	Psicologia da Aprendizagem	Introdução às Teorias da Aprendizagem
6	Desenho Geométrico	Desenho Geométrico
	Prática de Ensino I (Ciências)	---
	Didática Especial	---
	Álgebra Linear I	Álgebra Linear
7	Cálculo Numérico	Cálculo Numérico
	Cálculo I	Cálculo I
	Geometria Analítica	Geometria Analítica Plana

Reconhecida pela Portaria Nº 821/ MEC - D.O.U. de 01/06/1994
Avenida da Universidade, 850 - Betânia - CEP: 62.040-370 - Sobral - Ceará
Fone: (88) 3677.4243 / FAX: (88) 3613.1866 - www.uvnet.br

✓



UNIVERSIDADE ESTADUAL
VALE DO ACARAÚ
Conselhos Superiores



GOVERNO DO
ESTADO DO CEARÁ
Secretaria da Ciência, Tecnologia
e Educação Superior

	Estatística	Estatística Descritiva
8	Geometria Descritiva	Geometria Descritiva (eletiva)
	Álgebra Linear II	Álgebra Linear II (eletiva)
	Probabilidade	Análise Combinatória e Probabilidade
	Análise matemática	Introdução a Análise Matemática
	Cálculo II	Cálculo II
9	Matemática para o ensino de 2º grau	---
	Matemática Aplicada	Modelagem matemática no Ensino de Ciências
	Prática de Ensino II (Matemática)	---
	Matemática Comercial e Financeira	Matemática Comercial e Financeira

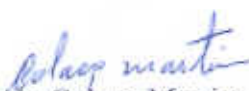
Parágrafo único. Caso a carga horária da disciplina seja menor na nova matriz curricular, mas exista equivalência no conteúdo programático na ordem de pelo menos 75% (setenta e cinco por cento), para fins de aproveitamento, será computada a carga horária maior, desde que a disciplina na nova grade tenha pelo menos 2/3 (dois terços) da carga horária da disciplina da grade anterior.

Art 6º Enquadrar os estudantes que ingressaram a partir de 2012.1 (inclusive) na matriz ora aprovada.

Art 7º Na hipótese de oferta de turma descentralizada, o Reitor, ouvida a PROGRAD, mediante portaria *ad hoc*, poderá adequar a presente matriz curricular, mantendo-se, porém, sempre dentro das das Resoluções CNE/CES nº 03/2003 e CNE/CP nº 02/2002, ou da legislação sucedânea.

Art 8º Revogar a Resolução 49/2011, CEPE a partir desta data.

Sala dos Conselhos Superiores da Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA, em Sobral – CE, aos 21 de novembro de 2012.


Antônio Colaço Martins
Presidente